В. А. ЗОРИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЧАСТЬ II

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов университетов,
обучающихся по специальностям «Математика» и «Механика»*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

22.16
З-86
УДК 517

Зорич В. А. Математический анализ: Учебник. Ч. II. — М.: Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 640 с.

В книге отражена ставшая более тесной связь курса классического анализа с современными математическими курсами (алгебры, дифференциальной геометрии, дифференциальных уравнений, комплексного и функционального анализа).

Во вторую часть учебника включены следующие разделы: Многомерный интеграл. Дифференциальные формы и их интегрирование. Ряды и интегралы, зависящие от параметра (в том числе ряды и преобразования Фурье, а также асимптотические разложения).

Текст снабжен вопросами и задачами, дополняющими материал книги и существующих задачников по анализу.

Органической частью текста являются примеры приложений развиваемой теории, которыми часто служат содержательные задачи механики и физики.

Для студентов университетов, обучающихся по специальности «Математика» и «Механика». Может быть полезна студентам факультетов и вузов с расширенной программой по математике, а так же специалистам в области математики и ее приложений.

Библ. — 29 назв. Илл. — 40.

З $\dfrac{1702050000—030}{053(02)\text{-}84}$ КБ-21-51—83

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 9

* **Глава IX Непрерывные отображения (общая теория)** 11

§ 1 Метрическое пространство 11
1. Определения и примеры (11) 2. Открытые и замкнутые подмножества метрического пространства (13). 3. Подпространство метрического пространства (17). 4. Прямое произведение метрических пространств (18).
Задачи и упражнения 18

§ 2. Топологическое пространство 19
1. Основные определения (19) 2. Подпространство топологического пространства (23). 3 Прямое произведение топологических пространств (24).
Задачи и упражнения 24

§ 3. Компакты 25
1. Определение и общие свойства компакта (25). 2. Метрические компакты (27).
Задачи и упражнения 29

§ 4. Связные топологические пространства 29
Задачи и упражнения 30

§ 5. Полные метрические пространства 31
1. Основные определения и примеры (31). 2. Пополнение метрического пространства (34).
Задачи и упражнения 38

§ 6. Непрерывные отображения топологических пространств 38
1. Предел отображения (38). 2. Непрерывные отображения (40).
Задачи и упражнения 44

§ 7. Принцип сжимающих отображений 44
Задачи и упражнения 49

* **Глава X. Дифференциальное исчисление с более общей точки зрения** 50

§ 1 Линейное нормированное пространство 50
1. Некоторые примеры линейных пространств анализа (50). 2. Норма в векторном пространстве (51). 3. Скалярное произведение в векторном пространстве (54).
Задачи и упражнения 56

§ 2. Линейные и полилинейные операторы 57
1. Определения и примеры (57). 2. Норма оператора (60). 3. Пространство непрерывных операторов (64).
Задачи и упражнения 68

§ 3. Дифференциал отображения 69
1. Отображение, дифференцируемое в точке (69). 2. Общие законы дифференцирования (70). 3. Некоторые примеры (71). 4. Частные производные отображения (77).
Задачи и упражнения 79
§ 4. Теорема о конечном приращении и некоторые примеры ее использования 80
1. Теорема о конечном приращении (80). 2. Некоторые примеры применения теоремы о конечном приращении (83).
Задачи и упражнения 86
§ 5. Производные отображения высших порядков 87
1. Определение n-го дифференциала (87). 2. Производная по вектору и вычисление значений n-го дифференциала (88). 3. Симметричность дифференциалов высшего порядка (89). 4. Некоторые замечания (91).
Задачи и упражнения 93
§ 6. Формула Тейлора и исследование экстремумов 93
1. Формула Тейлора для отображений (93) 2. Исследование внутренних экстремумов (94). 3. Некоторые примеры (96)
Задачи и упражнения 101
§ 7. Общая теорема о неявной функции 103
Задачи и упражнения 111

Глава XI. Кратные интегралы 113

§ 1. Интеграл Римана на n-мерном промежутке 113
1. Определение интеграла (113). 2. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману (115). 3. Критерий Дарбу (120).
Задачи и упражнения 122
§ 2. Интеграл по множеству 123
1. Допустимые множества (123). 2. Интеграл по множеству (124). 3. Мера (объем) допустимого множества (125).
Задачи и упражнения 126
§ 3. Общие свойства интеграла 127
1. Интеграл как линейный функционал (127). 2. Аддитивность интеграла (127) 3. Оценки интеграла (128).
Задачи и упражнения 130
§ 4. Сведение кратного интеграла к повторному 131
1. Теорема Фубини (131). 2. Некоторые следствия (134).
Задачи и упражнения 138
§ 5. Замена переменных в кратном интеграле 139
1. Постановка вопроса и эвристический вывод формулы замены переменных (139). 2. Измеримые множества и гладкие отображения (141). 3. Одномерный случай (143). 4. Случай простейшего диффеоморфизма в $\mathbb{R}^n$ (145). 5. Композиция отображений и формула замены переменных (146). 6. Аддитивность интеграла и завершение доказательства формулы замены переменных в интеграле (147). 7. Некоторые следствия и обобщения формулы замены переменных в кратных интегралах (148).
Задачи и упражнения 152
§ 6. Несобственные кратные интегралы 154
1. Основные определения (154). 2. Мажорантный признак сходимости несобственного интеграла (157). 3. Замена переменных в несобственном интеграле (159).
Задачи и упражнения 162

Глава XII. Поверхности и дифференциальные формы в $\mathbb{R}^n$ 165

§ 1. Поверхность в $\mathbb{R}^n$ 165
Задачи и упражнения 173
§ 2. Ориентация поверхности 174
Задачи и упражнения 181
§ 3. Край поверхности и его ориентация 182
1. Поверхность с краем (182). 2. Согласование ориентации поверхности и края (184).
Задачи и упражнения 187
§ 4. Площадь поверхности в евклидовом пространстве 188
Задачи и упражнения 194
§ 5. Начальные сведения о дифференциальных формах 197
1. Дифференциальная форма, определение и примеры (197). 2. Координатная запись дифференциальной формы (200). 3 Внешний дифференциал формы (203). 4. Перенос векторов и форм при отображениях (206) 5. Формы на поверхностях (209).
Задачи и упражнения 210

Глава XIII. Криволинейные и поверхностные интегралы 213

§ 1. Интеграл от дифференциальной формы 213
1. Исходные задачи, наводящие соображения, примеры (213). 2. Определение интеграла от формы по ориентированной поверхности (219).
Задачи и упражнения 223
§ 2. Форма объема, интегралы первого и второго рода 227
1. Масса материальной поверхности (227). 2. Площадь поверхности как интеграл от формы (228). 3 Форма объема (229). 4. Выражение формы объема в декартовых координатах (231). 5. Интегралы первого и второго рода (232).
Задачи и упражнения 235
§ 3. Основные интегральные формулы анализа 236
1. Формула Грина (236). 2. Формула Гаусса—Остроградского (241). 3. Формула Стокса в $\mathbb{R}^3$ (244). 4. Общая формула Стокса (246).
Задачи и упражнения 249

Глава XIV. Элементы векторного анализа и теории поля 253

§ 1. Дифференциальные операции векторного анализа 253
1. Скалярные и векторные поля (253). 2. Векторные поля и формы в $\mathbb{R}^3$ (253). 3. Дифференциальные операторы grad, rot, div и ∇ (256). 4. Некоторые дифференциальные формулы векторного анализа (259) *5. Векторные операции в криволинейных координатах (261).
Задачи и упражнения 269
§ 2. Интегральные формулы теории поля 270
1. Классические интегральные формулы в векторных обозначениях (270). 2. Физическая интерпретация div, rot, grad (273). 3. Некоторые дальнейшие интегральные формулы (277).
Задачи и упражнения 279
§ 3. Потенциальные поля 281
1. Потенциал векторного поля (281). 2. Необходимое условие потенциальности (282). 3. Критерий потенциальности векторного поля (283).

4. Топологическая структура области и потенциал (286). 5. Векторный потенциал. Точные и замкнутые формы (288).
Задачи и упражнения 291
§ 4. Примеры приложений 295
1. Уравнение теплопроводиости (295) 2. Уравнение неразрывности (297). 3. Основные уравнения динамики сплошной среды (298). 4. Волновое уравнение (300).
Задачи и упражнения 302

Глава XV. Интегрирование дифференциальных форм на многообразиях 305

§ 1. Некоторые напоминания из линейной алгебры 305
1. Алгебра форм (305). 2. Алгебра кососимметрических форм (306). 3. Линейные отображения линейных пространств и сопряженные отображения сопряженных пространств (309).
Задачи и упражнения 310
§ 2. Многообразие 312
1. Определение многообразия (312). 2. Гладкие многообразия и гладкие отображения (317). 3. Ориентация многообразия и его края (320). 4. Разбиение единицы и реализация многообразий в виде поверхностей в $\mathbb{R}^n$ (323).
Задачи и упражнения 327
§ 3. Дифференциальные формы и их интегрирование на многообразиях 329
1. Касательное пространство к многообразию в точке (329). 2. Дифференциальная форма на многообразии (333). 3. Внешний дифференциал (335). 4. Интеграл от формы по многообразию (336). 5. Формула Стокса (338).
Задачи и упражнения 340
§ 4. Замкнутые и точные формы на многообразии 344
1. Теорема Пуанкаре (344). 2. Гомологии и когомологии (348).
Задачи и упражнения 352

Глава XVI. Равномерная сходимость и основные операции анализа над рядами и семействами функций 355

§ 1. Поточечная и равномерная сходимость 355
1. Поточечная сходимость (355). 2. Постановка основных вопросов (356). 3. Сходимость и равномерная сходимость семейства функций, зависящих от параметра (358). 4. Критерий Коши равномерной сходимости (361).
Задачи и упражнения 363
§ 2. Равномерная сходимость рядов функций 363
1. Основные определения и критерий равномерной сходимости ряда (363). 2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда (366). 3. Признак Абеля—Дирихле (368).
Задачи и упражнения 373
§ 3. Функциональные свойства предельной функции 373
1. Конкретизация задачи (373). 2. Условия коммутирования двух предельных переходов (374). 3. Непрерывность и предельный переход (376). 4. Интегрирование и предельный переход (380). 5. Дифференцирование и предельный переход (381).
Задачи и упражнения 387

* § 4. Компактные и плотные подмножества пространства непрерывных функций 390
1. Теорема Арцела — Асколи (391). 2. Метрическое пространство $C(K, Y)$ (393). 3 Теорема Стоуна (394).
Задачи и упражнения 398

Глава XVII. Интегралы, зависящие от параметра 400

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра 400
1. Понятие интеграла, зависящего от параметра (400). 2. Непрерывность интеграла, зависящего от параметра (401). 3. Дифференцирование интеграла, зависящего от параметра (402). 4. Интегрирование интеграла, зависящего от параметра (405).
Задачи и упражнения 406
§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра 407
1. Равномерная сходимость несобственного интеграла относительно параметра (407). 2. Предельный переход под знаком несобственного интеграла и непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра (415). 3. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру (417). 4. Интегрирование несобственного интеграла по параметру (420).
Задачи и упражнения 425
§ 3. Эйлеровы интегралы 428
1. Бета-функция (428). 2. Гамма-функция (429). 3. Связь между функциями В и Г (432) 4. Некоторые примеры (433).
Задачи и упражнения 435
§ 4. Свертка функций и начальные сведения об обобщенных функциях 439
1. Свертка в физических задачах (наводящие соображения) (439). 2. Некоторые общие свойства свертки (442). 3. Дельтаобразные семейства функций и аппроксимационная теорема Вейерштрасса (445). * 4. Начальные представления о распределениях (450)
Задачи и упражнения 461
§ 5. Кратные интегралы, зависящие от параметра 466
1. Собственные кратные интегралы, зависящие от параметра (466). 2. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметра (467). 3. Несобственные интегралы с переменной особенностью (469). * 4. Свертка, фундаментальное решение и обобщенные функции в многомерном случае (473).
Задачи и упражнения 484

Глава XVIII. Ряд Фурье и преобразование Фурье 488

§ 1. Основные общие представления, связанные с понятием ряда Фурье 488
1. Ортогональные системы функций (488). 2. Коэффициенты Фурье (494) 3. Ряд Фурье (499). * 4. Об одном важном источнике ортогональных систем функций в анализе (506).
Задачи и упражнения 510
§ 2. Тригонометрический ряд Фурье 515
1. Основные виды сходимости классического ряда Фурье (515). 2. Исследование поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье (520). 3. Гладкость функции и скорость убывания коэффициентов Фурье (530) 4. Полнота тригонометрической системы (535).
Задачи и упражнения 542

§ 3. Преобразование Фурье 551
1. Представление функции интегралом Фурье (551). 2 Регулярность функции и скорость убывания ее преобразования Фурье (562) 3. Важнейшие аппаратные свойства преобразования Фурье (566) 4. Примеры приложений (572)
Задачи и упражнения 577

Глава XIX Асимптотические разложения 584

§ 1. Асимптотическая формула и асимптотический ряд 586
1. Основные определения (586). 2. Общие сведения об асимптотических рядах (591). 3. Степенные асимптотические ряды (596)
Задачи и упражнении 599
§ 2. Асимптотика интегралов (метод Лапласа) 602
1. Идея метода Лапласа (602) 2. Принцип локализации для интеграла Лапласа (605). 3 Канонические интегралы и их асимптотика (607). 4. Главный член асимптотики интеграла Лапласа (610). * 5. Асимптотические разложения интегралов Лапласа (613).
Задачи и упражнения 624

Литература 630
Указатель основных обозначений 632
Алфавитный указатель 635

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предисловии к первой части была дана достаточно подробная характеристика курса в целом, поэтому я ограничусь здесь замечаниями по содержанию лишь этой второй его части.

Основной материал настоящего тома составляют, с одной стороны, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, доведенные до общей формулы Стокса и примеров ее приложений, а с другой стороны, аппарат рядов и интегралов, зависящих от параметра, включающий ряды Фурье, преобразование Фурье и представления об асимптотических разложениях.

Таким образом, эта часть II в основном соответствует программе второго года обучения на математических факультетах университетов.

Чтобы не закреплять жестко порядок следования указанных двух больших тем по семестрам, я изложил их практически независимо.

Главы IX и X, с которых начинается эта книга, в сжатом и общем виде воспроизводят по существу почти все самое ценное, что было получено в первой части в отношении непрерывных и дифференцируемых функций. Они отмечены звездочкой и написаны как дополнение к первой части. В нем, однако, содержится много таких понятий, которые уже сейчас фигурируют в любом изложении анализа математикам. Наличие этих двух глав делает вторую книгу формально почти независимой от первой при условии, что читатель достаточно подготовлен, чтобы при чтении этих двух глав обойтись без многочисленных примеров и наводящих соображений, которые в первой части предшествовали излагаемому здесь формализму.

Основной новый материал книги, посвященный интегральному исчислению функций многих переменных, начинается с главы XI, с которой, собственно, без потери связности восприятия после первой части можно читать эту вторую часть курса.

При изложении теории криволинейных и поверхностных интегралов разъясняется и используется язык дифференциальных форм и сначала на элементарном материале вводятся все основные геометрические понятия и аналитические конструкции, которые потом составляют лестницу абстрактных определений, ведущую к общей формуле Стокса.

Такому итоговому изложению интегрирования дифференциальных форм на многообразиях посвящена глава XV, которую я рассматриваю как весьма желательное систематизирующее дополнение к изложенному и разъясненному на конкретных объектах в обязательных для изучения главах XI—XIV.

В разделе, относящемся к рядам и интегралам, зависящим от параметра, наряду с традиционным материалом даны (гл. XIX) начальные сведения об асимптотических рядах и асимптотике интегралов, поскольку это, несомненно, полезный, благодаря своей эффективности, аппарат анализа.

Для удобства ориентировки дополнительный материал или разделы, которые при первом чтении можно опустить, помечены звездочкой.

Нумерация глав и рисунков этой книги продолжает нумерацию уже вышедшей из печати первой части: Зорич В. А. Математический анализ, ч. I.—М.: Наука, 1981.

Биографические сведения здесь даются только о тех ученых, которые не упоминались в первой части.

Как и прежде, для удобства читателя и сокращения текста начало и конец доказательства отмечаются знаками ◄ и ► соответственно, а когда это удобно, определения вводятся специальными символами $:=$ или $=:$ (равенства по определению), в которых двоеточие ставится со стороны определяемого объекта.

Сохраняя традиции части I, в этой книге много внимания уделено как прозрачности и логической четкости самих математических конструкций, так и демонстрации содержательных естественно-научных приложений развиваемой теории.

1982 г. *В. Зорич*

*ГЛАВА IX

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ (ОБЩАЯ ТЕОРИЯ)

В этой главе будут обобщены и изложены с единой точки зрения свойства непрерывных отображений, которые были нами установлены для числовых функций и отображений типа $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. При этом будет введен ряд простых, но важных понятий, имеющих общематематическое употребление.

§ 1. Метрическое пространство

1. Определение и примеры.

Определение 1. Говорят, что множество X наделено *метрикой*, или *структурой метрического пространства*, или что X есть *метрическое пространство*, если указана функция

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

удовлетворяющая условиям:

a) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$,

b) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ (симметричность),

c) $d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ (неравенство треугольника),

где x_1, x_2, x_3 — произвольные элементы X.

Функцию (1) называют в этом случае *метрикой* или *расстоянием* в X.

Таким образом, *метрическое пространство* есть пара $(X; d)$, состоящая из множества X и заданной на нем метрики.

Элементы множества X в соответствии с геометрической терминологией обычно называют *точками*.

Заметим, что если в неравенстве треугольника c) положить $x_3 = x_1$, то с учетом аксиом a) и b) метрики получим, что

$$0 \leqslant d(x_1, x_2),$$

т. е. расстояние, удовлетворяющее аксиомам a), b), c), неотрицательно.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел становится метрическим пространством, если для чисел x_1, x_2 положить $d(x_1, x_2)=|x_1-x_2|$, как мы это всегда и делали.

Пример 2. На $\mathbb{R}$ можно ввести и много других метрик. Тривиальной метрикой является, например, такая, при которой между любыми двумя различными точками расстояние полагается равным единице.

Значительно содержательнее следующая метрика на $\mathbb{R}$. Пусть $x \mapsto f(x)$ — определенная для $x \geqslant 0$ неотрицательная функция, обращающаяся в нуль лишь при $x=0$. Если эта функция строго выпукла вверх, то, полагая для точек $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$d(x_1, x_2)=f(|x_1-x_2|), \tag{2}$$

получим метрику на $\mathbb{R}$.

Аксиомы a), b) здесь, очевидно, выполнены, а неравенство треугольника следует из того, что, как легко проверить, f строго монотонна и при $0<a<b$ удовлетворяет неравенствам

$$f(a+b)-f(b)<f(a)-f(0)=f(a).$$

В частности, можно было бы положить $d(x_1, x_2)=\sqrt{|x_1-x_2|}$ или $d(x_1, x_2)=\frac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|}$. В последнем случае расстояние между любыми точками прямой меньше единицы.

Пример 3. В $\mathbb{R}^n$, кроме традиционного расстояния

$$d(x_1, x_2)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_1^i-x_2^i|^2} \tag{3}$$

между точками $x_1=(x_1^1, \ldots, x_1^n)$, $x_2=(x_2^1, \ldots, x_2^n)$, можно ввести расстояние

$$d_p(x_1, x_2)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_1^i-x_2^i|^p\right)^{1/p}, \tag{4}$$

где $p \geqslant 1$. То, что для функции (4) выполнено неравенство треугольника, вытекает из неравенства Минковского (см. гл. V, § 4, п. 2).

Пример 4. Если в печатном тексте встретилось слово с искаженными буквами, то, если дефектов не слишком много, мы без особого труда восстанавливаем слово, исправляя ошибки. Однако исправление ошибок и получение слова — операция не всегда однозначная, и потому при прочих равных условиях предпочтение надо отдать той расшифровке искаженного текста, для получения которой потребуется сделать меньше исправлений. В соответствии со сказанным в теории кодирования на множестве всех последовательностей длины n, состоящих из нулей и единиц, используется метрика (4) при $p=1$.

Геометрически множество таких последовательностей интерпретируется как множество вершин единичного куба $I=\{x\in\mathbb{R}^n \mid 0\leqslant x^i\leqslant 1,\ i=1,\ \ldots,\ n\}$ в $\mathbb{R}^n$. Расстояние между двумя вершинами — это число перемен нулей и единиц необходимое, чтобы получить из координат одной из этих вершин координаты другой вершины. Каждая такая перемена есть переход вдоль одного из ребер куба. Таким образом, рассматриваемое расстояние есть кратчайший путь по ребрам куба между рассматриваемыми его вершинами.

Пример 5. При сравнении результатов двух серий из n однотипных измерений чаще всего используют метрику (4) при $p=2$. Расстояние между точками в этой метрике называют обычно их *средним квадратичным уклонением*.

Пример 6. Если в (4) сделать предельный переход при $p\to+\infty$, то, как легко видеть, получается следующая метрика в $\mathbb{R}^n$:

$$d(x_1,\ x_2)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_1^i-x_2^i|. \tag{5}$$

Пример 7. Множество $C[a,\ b]$ функций, непрерывных на отрезке, становится метрическим пространством, если для функций f, g из $C[a,\ b]$ положить

$$d(f,\ g)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|. \tag{6}$$

Аксиомы а), b) метрики, очевидно, выполнены, а неравенство треугольника следует из того, что

$$|f(x)-h(x)|\leqslant|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|\leqslant d(f,\ g)+d(g,\ h),$$

т. е.

$$d(f,\ h)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-h(x)|\leqslant d(f,\ g)+d(g,\ h).$$

Метрика (6) — так называемая *равномерная*, или *чебышевская, метрика* в $C[a,\ b]$ — используется тогда, когда мы желаем заменить одну функцию другой, например полиномом, по которой можно было бы вычислять значения первой функции с нужной точностью в любой точке $x\in[a,\ b]$. Величина $d(f,\ g)$ как раз характеризует точность такого приближенного расчета.

Метрика (6) в $C[a,\ b]$ очень схожа с метрикой (5) в $\mathbb{R}^n$.

Пример 8. Подобно метрике (4) в $C[a,\ b]$ при $p\geqslant 1$ можно ввести метрику

$$d_p(f,\ g)=\left(\int_a^b|f-g|^p(x)\,dx\right)^{1/p}. \tag{7}$$

То, что при $p\geqslant 1$ это действительно метрика, следует из неравенства Минковского для интегралов, получающегося предельным переходом из неравенства Минковского, которое можно написать для интегральных сумм.

Особо важными частными случаями метрики (7) являются: при $p=1$ — интегральная метрика; при $p=2$ — метрика среднего квадратичного уклонения; при $p=+\infty$ — равномерная метрика.

Пространство $C[a, b]$, наделенное метрикой (7), часто обозначают символом $C_p[a, b]$. Можно проверить, что $C_\infty[a, b]$ есть пространство $C[a, b]$, наделенное метрикой (6).

Пример 9. Метрику (7) можно было бы использовать также на множестве $\mathscr{R}[a, b]$ функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$. Однако поскольку интеграл от модуля разности двух функций может обратиться в нуль, даже если функции не совпадают тождественно, то аксиома а) в этом случае не будет выполнена. Мы знаем, однако, что интеграл от неотрицательной функции $\varphi \in \mathscr{R}[a, b]$ равен нулю тогда и только тогда, когда $\varphi(x)=0$ почти во всех точках отрезка $[a, b]$.

Таким образом, если разбить $\mathscr{R}[a, b]$ на классы эквивалентных функций, причем функции из $\mathscr{R}[a, b]$ считать эквивалентными, если они отличаются не более чем на множестве меры нуль, то на совокупности $\tilde{\mathscr{R}}[a, b]$ таких классов эквивалентности соотношение (7) действительно задает метрику. Множество $\tilde{\mathscr{R}}[a, b]$, наделенное этой метрикой, обозначается через $\tilde{\mathscr{R}}_p[a, b]$, а иногда и просто через $\mathscr{R}_p[a, b]$.

Пример 10. В множестве $C^{(k)}[a, b]$ функций, определенных на $[a, b]$ и имеющих на этом отрезке непрерывные производные до порядка k включительно, можно определить следующую метрику:

$$d(f, g)=\max\{M_0, \ldots, M_k\}, \tag{8}$$

где

$$M_i=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(i)}(x)-g^{(i)}(x)|, \quad i=0, 1, \ldots, k.$$

Используя то, что (6) есть метрика, легко проверить, что и (8) есть метрика.

Предположим, например, что f есть координата движущейся точки как функция времени. Если ставится ограничение на допустимый район пребывания точки в промежуток времени $[a, b]$ и запрещается превышать определенную скорость, а, кроме того, желают иметь некоторый комфорт, состоящий в том, что ускорения не должны превышать определенный уровень, то естественно рассмотреть для функции $f\in C^{(2)}[a, b]$ набор $\left\{\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|, \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|, \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\right\}$ и по этим характеристикам два движения f, g считать близкими, если величина (8) для них мала.

Рассмотренные примеры показывают, что одно и то же множество можно метризовать различными способами. Введение той или иной метрики диктуется обычно самой постановкой задачи. Сейчас же мы будем интересоваться самыми общими свойствами метрических пространств, присущими им всем.

2. Открытые и замкнутые подмножества метрического пространства. Пусть $(X; d)$ — метрическое пространство. Подобно тому, как это было сделано в главе VII, § 1 для случая $X=\mathbb{R}^n$, в общем случае тоже можно ввести понятия шара с центром в данной точке, открытого множества, замкнутого множества, окрестности точки, предельной точки множества и т. д.

Напомним эти основные для дальнейшего понятия.

Определение 2. При $\delta>0$ и $a\in X$ множество

$$B(a;\ \delta)=\{x\in X\mid d(a,\ x)<\delta\}$$

называется *шаром с центром* $a\in X$ *радиуса* δ или также *δ-окрестностью точки* a.

В случае общего метрического пространства это название является удобным, но его не следует отождествлять с традиционным геометрическим образом, к которому мы привыкли в $\mathbb{R}^3$.

Пример 11. Единичный шар в $C[a, b]$ с центром в функции, тождественно равной нулю на $[a, b]$, состоит из тех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, модуль которых меньше единицы на этом отрезке.

Пример 12. Пусть X — единичный квадрат в $\mathbb{R}^2$, расстояние между точками которого определяется как расстояние между этими же точками в $\mathbb{R}^2$. Тогда X является метрическим пространством, причем взятый сам по себе квадрат X с такой метрикой можно считать шаром любого радиуса $\rho\geqslant\sqrt{2}/2$ относительно своего центра.

Ясно, что так можно было бы построить шары весьма причудливой формы. Так что термин шар не следует понимать слишком буквально.

Определение 3. Множество $G\subset X$ называется *открытым в метрическом пространстве* $(X; d)$, если для любой точки $x\in G$ найдется шар $B(x;\ \delta)$ такой, что $B(x;\ \delta)\subset G$.

Из этого определения, очевидно, следует, что само X — открытое в $(X; d)$ множество; пустое множество $\varnothing$ также открыто. Теми же рассуждениями, что и в случае $\mathbb{R}^n$, можно доказать, что шар $B(a;\ r)$ или его внешность $\{x\in X\mid d(a,\ x)>r\}$ суть открытые множества. (См. гл. VIII, § 1, примеры 3,4.)

Определение 4. Множество $\mathcal{F}\subset X$ называется *замкнутым в* $(X; d)$, если его дополнение $X\setminus\mathcal{F}$ открыто в $(X; d)$.

В частности, отсюда заключаем, что *замкнутый шар*

$$\tilde{B}(a;\ r):=\{x\in X\mid d(a,\ x)\leqslant r\}$$

является множеством, замкнутым в метрическом пространстве $(X;\ d)$.

Для открытых и замкнутых множеств в метрическом пространстве $(X;\ d)$ справедливо

Утверждение 1. a) *Объединение* $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha$ *множеств любой системы* $\{G_\alpha,\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ *множеств* G_α*, открытых в* X*, является множеством, открытым в* X.

b) *Пересечение* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ *конечного числа множеств, открытых в* X*, является множеством, открытым в* X.

a′) *Пересечение* $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha$ *множеств любой системы* $\{\mathcal{F}_\alpha,\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ *множеств* $\mathcal{F}_\alpha$*, замкнутых в* X*, является множеством, замкнутым в* X.

b′) *Объединение* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$ *конечного числа множеств, замкнутых в* X*, является множеством, замкнутым в* X.

Доказательство утверждения 1 дословно повторяет доказательство соответствующего утверждения для открытых и замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$, и мы его опускаем. (См. гл. VII, § 1, утверждение 1.)

Определение 5. Открытое в X множество, содержащее точку $x\in X$, называется *окрестностью* этой точки в X.

Определение 6. Точка $x\in X$ по отношению к множеству $E\subset X$ называется

внутренней точкой E, если она содержится в E вместе с некоторой своей окрестностью;

внешней точкой E, если она является внутренней точкой дополнения к E в X;

граничной точкой E, если она не является ни внутренней, ни внешней точкой по отношению к E (т. е. если в любой окрестности этой точки имеются как точки, принадлежащие, так и точки, не принадлежащие множеству E).

Пример 13. Все точки шара $B(a;\ r)$ являются его внутренними точками, а множество $C_X\tilde{B}(a;\ r)=X\setminus\tilde{B}(a;\ r)$ состоит из точек, внешних по отношению к шару $B(a;\ r)$.

В случае пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой d в $\mathbb{R}^n$ сфера $S(a;\ r)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid d(a,\ x)=r>0\}$ является множеством граничных точек шара $B(a;\ r)$ *).

Определение 7. Точка $a\in X$ называется *предельной* для множества $E\subset X$, если для любой ее окрестности $O(a)$ множество $E\cap O(a)$ бесконечно.

*) В связи с примером 13 см. также задачу 2 в конце этого параграфа.

Определение 8. Объединение множества E и всех его предельных точек в X называется *замыканием* множества E в X.

Как и прежде, замыкание множества $E \subset X$ будем обозначать через $\bar{E}$.

Утверждение 2. *Множество $\mathcal{F} \subset X$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Итак,

$$(\mathcal{F} \text{ замкнуто в } X) \Longleftrightarrow (\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}} \text{ в } X).$$

Доказательство мы опускаем, так как оно повторяет доказательство аналогичного утверждения в случае, когда $X = \mathbb{R}^n$, изложенного в гл. VII, § 1.

3. Подпространство метрического пространства. Если $(X; d)$ — метрическое пространство, а E — подмножество X, то, полагая для любой пары точек x_1, x_2 из E расстояние равным $d(x_1, x_2)$, т. е. расстоянию между этими точками в X, мы получим метрическое пространство $(E; d)$, которое по отношению к исходному пространству $(X; d)$ принято называть подпространством.

Итак, мы принимаем следующее

Определение 9. Метрическое пространство $(X_1; d_1)$ называется *подпространством метрического пространства* $(X; d)$, если $X_1 \subset X$ и для любой пары точек a, b множества X_1 справедливо равенство $d_1(a, b) = d(a, b)$.

Поскольку шар $B_1(a; r) = \{x \in X_1 \mid d_1(a, x) < r\}$ в подпространстве $(X_1; d_1)$ метрического пространства $(X; d)$, очевидно, является пересечением

$$B_1(a; r) = X_1 \cap B(a; r)$$

множества $X_1 \subset X$ с шаром $B(a; r)$ в X, то всякое открытое в X_1 множество имеет вид

$$G_1 = X_1 \cap G,$$

где G — множество, открытое в X, а всякое замкнутое в X_1 множество $\mathcal{F}_1$ имеет вид

$$\mathcal{F}_1 = X \cap \mathcal{F},$$

где $\mathcal{F}$ — множество, замкнутое в X.

Из сказанного следует, что свойство множества, лежащего в метрическом пространстве, быть открытым или замкнутым относительно и зависит от этого объемлющего пространства.

Пример 14. Интервал $|x| < 1$, $y = 0$ оси абсцисс плоскости $\mathbb{R}^2$ со стандартной метрикой в $\mathbb{R}^2$ является метрическим пространством $(X_1; d_1)$, которое, как и всякое метрическое пространство, замкнуто в себе, ибо содержит все свои предельные точки в X_1. Вместе с тем очевидно, что X_1 не является замкнутым множеством в $\mathbb{R}^2 = X$.

Этот же пример показывает, что и понятие открытости множества также относительно.

Пример 15. Множество $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой (7) является подпространством метрического пространства $\mathscr{R}_p[a, b]$. Однако если на $C[a, b]$ рассматривать метрику (6), а не (7), то это уже не будет иметь место.

4. Прямое произведение метрических пространств. Если $(X_1; d_1)$ и $(X_2; d_2)$ — два метрических пространства, то в прямом произведении $X_1 \times X_2$ можно ввести метрику d. Наиболее распространенные способы введения метрики в $X_1 \times X_2$ состоят в следующем. Если $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ и $(x_1', x_2') \in X_1 \times X_2$, то можно положить

$$d((x_1, x_2), (x_1', x_2')) = \sqrt{d_1^2(x_1, x_1') + d_2^2(x_2, x_2')},$$

или

$$d((x_1, x_2), (x_1', x_2')) = d_1(x_1, x_1') + d_2(x_2, x_2'),$$

или

$$d((x_1, x_2), (x_1', x_2')) = \max\{d_1(x_1, x_1'), d_2(x_2, x_2')\}.$$

Легко видеть, что в любом из этих случаев мы получаем метрику на $X_1 \times X_2$.

Определение 10. Если $(X_1; d_1)$, $(X_2; d_2)$ — два метрических пространства, то пространство $(X_1 \times X_2; d)$, где d — введенная любым из указанных выше способов метрика в $X_1 \times X_2$, будем называть *прямым произведением* исходных *метрических пространств*.

Пример 16. Пространство $\mathbb{R}^2$ можно считать прямым произведением двух метрических пространств $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой на $\mathbb{R}$, а метрическое пространство $\mathbb{R}^3$ есть прямое произведение $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ метрических пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Задачи и упражнения

1. a. Развивая пример 2, покажите, что если $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная строго выпуклая вверх функция, а $(X; d)$ — метрическое пространство, то на X можно определить новую метрику d_f следующим соотношением: $d_f(x_1, x_2) = f(d(x_1, x_2))$.

b. Покажите, что на любом метрическом пространстве $(X; d)$ можно ввести метрику $d'(x_1, x_2) = \dfrac{d(x_1, x_2)}{1 + d(x_1, x_2)}$, в которой расстояния между точками не будут превосходить единицу

2. Пусть $(X; d)$ — метрическое пространство с указанной в начале примера 2 тривиальной (*дискретной*) метрикой, и пусть $a \in X$. Каковы в данном случае множества $B(a; 1/2)$, $B(a; 1)$, $\bar{B}(a; 1)$, $\tilde{B}(a; 1)$, $B(a; 3/2)$ и множества $\{x \in X \mid d(a, x) = 1/2\}$, $\{x \in X \mid d(a, x) = 1\}$, $\bar{B}(a; 1) \setminus B(a; 1)$, $\tilde{B}(a; 1) \setminus B(a; 1)$?

3. a. Верно ли, что объединение любого семейства замкнутых множеств является множеством замкнутым?

b. Всякая ли граничная точка множества является его предельной точкой?

c. Верно ли, что в любой окрестности граничной точки множества имеются как внутренние, так и внешние точки этого множества?

d. Покажите, что множество граничных точек любого множества является замкнутым множеством.

4. a. Докажите, что если $(Y;\ d_Y)$ есть подпространство метрического пространства $(X;\ d_X)$, то для любого открытого (замкнутого) множества G_Y $(\mathscr{F}_Y)$ в Y найдется такое открытое (замкнутое) множество G_X $(\mathscr{F}_X)$ в X, что $G_Y = Y \cap G_X$ $(\mathscr{F}_Y = Y \cap \mathscr{F}_X)$

b. Проверьте, что если открытые множества G'_Y, G''_Y из Y не пересекаются, то соответствующие множества G'_X, G''_X в X можно выбрать так, что они тоже не будут иметь общих точек

5. Имея метрику d на множестве X, можно попытаться определить расстояние $\tilde{d}(A,\ B)$ между множествами $A \subset X$ и $B \subset X$ следующим образом:

$$\tilde{d}(A,\ B) = \inf_{a \in A,\ b \in B} d(a,\ b).$$

a. Приведите пример метрического пространства и двух замкнутых не пересекающихся его подмножеств A, B, для которых $\tilde{d}(A,\ B) = 0$.

b. Покажите, следуя Хаусдорфу, что на множестве подмножеств метрического пространства $(X;\ d)$ можно ввести *метрику Хаусдорфа* D, полагая, что для $A \subset X$ и $B \subset X$

$$D(A,\ B) := \max\left\{\sup_{a \in A} \tilde{d}(a,\ B),\ \sup_{b \in B} \tilde{d}(A,\ b)\right\}.$$

§ 2. Топологическое пространство

Для вопросов, связанных с понятием предела функции или отображения, во многих случаях существенным является не наличие той или иной метрики в пространстве, а возможность сказать, что такое окрестность точки. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что само определение предела или определение непрерывности может быть сформулировано в терминах окрестностей. Топологическое пространство является тем математическим объектом, на котором операция предельного перехода и непрерывность отображения изучаются в наиболее общем виде.

1. Основные определения.

Определение 1. Говорят, что множество X *наделено структурой топологического пространства*, или *наделено топологией*, или, что X есть *топологическое пространство*, если указана система τ подмножеств X (называемых *открытыми множествами в* X), обладающая следующими свойствами:

a) $\varnothing \in \tau$; $X \in \tau$.

b) $(\forall \alpha \in \mathfrak{A}\ (\tau_\alpha \in \tau)) \Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \tau_\alpha \in \tau$.

c) $(\tau_i \in \tau;\ i = 1,\ \ldots,\ n) \Longrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} \tau_i \in \tau$.

Таким образом, топологическое пространство есть пара $(X; \tau)$, состоящая из множества X и системы τ выделенных его подмножеств, обладающей теми свойствами, что τ содержит пустое множество и все множество X, что объединение любого числа множеств системы τ есть множество системы τ и пересечение конечного числа множеств системы τ есть множество системы τ.

Как видно, в аксиоматике a), b), c) топологического пространства постулированы те свойства открытых множеств, которые мы уже доказали в случае метрического пространства. Таким образом, любое метрическое пространство с определенным выше понятием открытого множества в нем является топологическим пространством.

Итак, *задать топологию* в X значит указать систему τ подмножеств X, удовлетворяющую аксиомам a), b), c) топологического пространства.

Задание метрики в X, как мы видели, автоматически задает топологию на X, индуцированную этой метрикой. Следует, однако, заметить, что разные метрики на X могут порождать на этом множестве одну и ту же топологию.

Пример 1. Пусть $X=\mathbb{R}^n$ $(n>1)$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ метрику $d_1(x_1, x_2)$, задаваемую соотношением (5) § 1, и метрику $d_2(x_1, x_2)$, определенную формулой (3) § 1.

Из неравенств

$$d_1(x_1, x_2) \leqslant d_2(x_1, x_2) \leqslant \sqrt{n}\, d_1(x_1, x_2),$$

очевидно, следует, что каждый шар $B(a; r)$ с центром в произвольной точке $a \in X$, понимаемый в смысле одной из этих метрик, содержит шар с тем же центром, понимаемый в смысле другой метрики. Отсюда в силу определения открытого подмножества метрического пространства вытекает, что обе метрики индуцируют на X одну и ту же топологию.

Почти все топологические пространства, которые мы будем активно использовать в пределах этого курса, являются метрическими. Не следует, однако, думать, что всякое топологическое пространство можно метризовать, т. е. наделить его метрикой, открытые множества в которой будут совпадать с открытыми множествами системы τ, задающей топологию на X. Условия, при которых это можно сделать, составляют содержание так называемых метризационных теорем.

Определение 2. Если $(X; \tau)$ — топологическое пространство, то множества системы τ называют *открытыми*, а дополнения к ним в X — *замкнутыми множествами* топологического пространства $(X; \tau)$.

Топологию τ в множестве X редко задают перечислением всех множеств системы τ. Чаще систему τ задают, указывая лишь некоторый набор подмножеств X, объединением и пересечением которых можно получить любое множество системы τ. Весьма важным поэтому является

Определение 3. *Базой топологического пространства* $(X; \tau)$ (*открытой базой* или *базой топологии*) называется такое семейство $\mathfrak{B}$ открытых подмножеств X, что каждое открытое множество $G \in \tau$ является объединением некоторой совокупности элементов семейства $\mathfrak{B}$.

Пример 2. Если $(X; d)$ — метрическое пространство, а $(X; \tau)$ — соответствующее ему топологическое пространство, то совокупность $\mathfrak{B} = \{B(a; r)\}$ всех шаров, где $a \in X$ и $r > 0$, очевидно, является базой топологии τ. Более того, если брать систему $\mathfrak{B}'$ всех шаров с положительными рациональными радиусами r, то эта система также будет базой топологии τ.

Итак, топологию τ можно задать, описав лишь базу этой топологии. Как видно из примера 2, топологическое пространство может иметь много различных баз топологии.

Определение 4. Минимальная мощность баз топологического пространства называется его *весом*.

Мы будем, как правило, иметь дело с топологическими пространствами, допускающими счетную базу топологии (см., однако, задачи 4 и 6).

Пример 3. Если в $\mathbb{R}^k$ взять систему $\mathfrak{B}'$ шаров всевозможных рациональных радиусов $r = \frac{m}{n} > 0$ с центрами во всевозможных рациональных точках $\left(\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}\right) \in \mathbb{R}^k$, то мы, очевидно, получим счетную базу стандартной топологии пространства $\mathbb{R}^k$. Нетрудно проверить, что конечной системой открытых множеств стандартную топологию в $\mathbb{R}^k$ задать невозможно. Таким образом, стандартное топологическое пространство $\mathbb{R}^k$ имеет счетный вес.

Определение 5. *Окрестностью* точки топологического пространства $(X; \tau)$ называется открытое множество, содержащее эту точку.

Ясно, что если на X задана топология τ, то для каждой точки определена система ее окрестностей.

Ясно также, что система всех окрестностей всевозможных точек топологического пространства может служить базой топологии этого пространства. Таким образом, топологию в X можно ввести, описав окрестности точек множества X. Именно эта форма задания топологии в X и была начальной в определении топологического пространства*). Заметьте, что, например, в метрическом

---

*) Понятия метрического и топологического пространства были сформулированы в явном виде в начале нашего столетия. В 1906 г. французский математик М. Р. Фреше (1878—1973) ввел понятие метрического пространства, а в 1914 г. немецкий математик Ф. Хаусдорф (1868—1942) определил топологическое пространство.

пространстве саму топологию мы ввели по существу, указав лишь, что такое δ-окрестность точки. Приведем еще

Пример 4. Рассмотрим множество $C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ вещественнозначных непрерывных функций, определенных на всей числовой прямой, и на его основе построим новое множество — множество ростков непрерывных функций. Две функции $f, g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ будем считать эквивалентными в точке $a \in \mathbb{R}$, если найдется такая окрестность $U(a)$ этой точки, что $\forall x \in U(a)$ $(f(x) = g(x))$. Введенное отношение действительно является отношением эквивалентности (оно рефлексивно, симметрично и транзитивно). Класс эквивалентных между собой в точке $a \in \mathbb{R}$ непрерывных функций назовем *ростком непрерывных функций* в этой точке. Если f — одна из функций, порождающих росток в точке a, то сам росток будем обозначать символом f_a. Определим теперь окрестность ростка. Пусть $U(a)$ — окрестность точки a в $\mathbb{R}$, f — определенная в $U(a)$ функция, порождающая росток f_a в точке a. Эта же функция в любой точке $x \in U(a)$ порождает свой росток f_x. Множество $\{f_x\}$ ростков, отвечающих точкам $x \in U(a)$, назовем *окрестностью ростка* f_a. Приняв множество таких окрестностей всевозможных ростков за базу топологии, мы превратим множество ростков непрерывных функций в топологическое пространство. Полезно заметить, что в полученном топологическом пространстве две различные точки (ростки) f_a, g_a могут не иметь непересекающихся окрестностей (рис. 66).

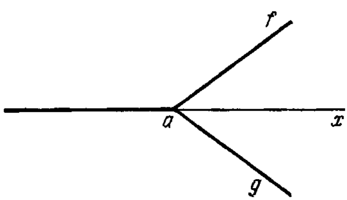

Рис. 66.

Определение 6. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если в нем выполнена *аксиома Хаусдорфа*: любые две различные точки пространства обладают непересекающимися окрестностями.

Пример 5. Любое метрическое пространство, очевидно, является хаусдорфовым, поскольку для любых двух точек $a, b \in X$ таких, что $d(a, b) > 0$, их шаровые окрестности $B\left(a; \frac{1}{2}d(a, b)\right)$, $B\left(b; \frac{1}{2}d(a, b)\right)$ не имеют общих точек.

Вместе с тем, как показывает пример 4, бывают и не хаусдорфовы топологические пространства.

Мы будем работать исключительно с хаусдорфовыми пространствами.

Определение 7. Множество $E \subset X$ называется *всюду плотным* в топологическом пространстве $(X; \tau)$, если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности $U(x)$ пересечение $E \cap U(x)$ непусто.

Пример 6. Если в $\mathbb{R}$ рассмотреть стандартную топологию, то множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является всюду плотным в $\mathbb{R}$. Аналогично множество $\mathbb{Q}^n$ рациональных точек $\mathbb{R}^n$ всюду плотно в $\mathbb{R}^n$.

Можно показать, что в каждом топологическом пространстве имеется всюду плотное множество, мощность которого не превосходит веса этого топологического пространства.

Определение 8. Метрическое пространство, обладающее счетным всюду плотным множеством, называется *сепарабельным пространством*.

Пример 7. Метрическое пространство $(\mathbb{R}^n; d)$ в любой из стандартных метрик является сепарабельным пространством, поскольку множество $\mathbb{Q}^n$ всюду плотно в нем.

Пример 8. Метрическое пространство $(C([0, 1]; \mathbb{R}); d)$ с метрикой, определенной соотношением (6), также сепарабельно, ибо, как следует из равномерной непрерывности функций $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$, график любой такой функции сколь угодно точно можно аппроксимировать конечнозвенной ломаной, вершины которой имеют рациональные координаты. Множество таких ломаных счетно.

Мы будем иметь дело главным образом с сепарабельными пространствами.

Отметим теперь, что поскольку определение окрестности точки в топологическом пространстве дословно совпадает с определением окрестности точки в метрическом пространстве, то, естественно, рассмотренные в § 1 понятия *внутренней*, *внешней*, *граничной*, *предельной* точки множества и понятия *замыкания* множества, использующие только понятие окрестности, без изменения переносятся на случай произвольного топологического пространства.

Кроме того (как видно из проведенного в гл. VII, § 1 доказательства утверждения 2), справедливо также утверждение о том, что множество в топологическом пространстве замкнуто в том и только в том случае, когда оно содержит все свои предельные точки.

2. Подпространство топологического пространства. Пусть $(X; \tau_X)$ — топологическое пространство, а Y — подмножество в X. Топология τ_X позволяет определить следующую топологию τ_Y в Y, называемую *индуцированной* или *относительной топологией* в $Y \subset X$.

Открытым в Y назовем любое множество G_Y вида $G_Y = Y \cap G_X$, где G_X — множество, открытое в X.

Нетрудно проверить, что возникающая система τ_Y подмножеств Y удовлетворяет аксиомам открытых множеств топологического пространства.

Определение открытых в Y множеств G_Y, как видно, согласуется с тем, которое мы получили в п. 3 предыдущего параграфа в случае, когда Y было подпространством метрического пространства X.

Определение 9. Подмножество $Y \subset X$ топологического пространства $(X; \tau)$ с индуцированной в Y топологией τ_Y называется *подпространством топологического пространства* $(X; \tau)$.

Ясно, что множество, открытое в $(Y; \tau_Y)$, уже не обязано быть открытым в $(X; \tau_X)$.

3. Прямое произведение топологических пространств. Если $(X_1; \tau_1)$ и $(X_2; \tau_2)$ — два топологических пространства с системами $\tau_1 = \{G_1\}$, $\tau_2 = \{G_2\}$ открытых множеств, то в $X_1 \times X_2$ можно ввести топологию, считая ее базой всевозможные множества вида $G_1 \times G_2$.

Определение 10. Топологическое пространство $(X_1 \times X_2; \tau_1 \times \tau_2)$, базу топологии которого составляют множества вида $G_1 \times G_2$, где G_i — открытое множество в топологическом пространстве $(X_i; \tau_i)$, $i = 1, 2$, называется *прямым произведением* топологических пространств $(X_1; \tau_1)$, $(X_2; \tau_2)$.

Пример 9. Если $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$ рассматривать со стандартной топологией, то, как видно, $\mathbb{R}^2$ является прямым произведением $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, ибо всякое открытое множество в $\mathbb{R}^2$ можно получить, например, как объединение «квадратных» окрестностей всех его точек. Квадраты же (со сторонами, параллельными координатным осям) являются прямым произведением интервалов — открытых в $\mathbb{R}$ множеств.

Следует обратить внимание на то, что множества вида $G_1 \times G_2$, где $G_1 \in \tau_1$ и $G_2 \in \tau_2$, образуют лишь базу топологии, а не все открытые множества прямого произведения топологических пространств.

Задачи и упражнения

1. Проверьте, что если $(X; d)$ — метрическое пространство, то $\left(X; \dfrac{d}{1+d}\right)$ — тоже метрическое пространство, причем метрики d и $\dfrac{d}{1+d}$ индуцируют на X одну и ту же топологию. (См. также задачу 1 из предыдущего параграфа.)

2. a. В множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел окрестностью числа $n \in \mathbb{N}$ назовем арифметическую прогрессию с разностью d, взаимно простой с n. Является ли возникающее при этом топологическое пространство хаусдорфовым?

b. Какова топология $\mathbb{N}$ как подмножества $\mathbb{R}$ действительных чисел, взятых со стандартной топологией?

c. Опишите все открытые подмножества $\mathbb{R}$.

3. Если на одном и том же множестве заданы две топологии τ_1 и τ_2, то говорят, что топология τ_2 *сильнее* топологии τ_1, если $\tau_1 \subset \tau_2$, т. е. в τ_2, кроме открытых множеств, составляющих систему τ_1, содержатся еще некоторые множества, не вошедшие в τ_1.

a. Сравнимы ли две топологии на $\mathbb{N}$, рассмотренные в предыдущей задаче?

b. Если на множестве $C[0, 1]$ непрерывных вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, ввести метрику сначала соотношением (6) из § 1, а затем соотношением (7) из того же параграфа, то на $C[a, b]$ возникнут, вообще говоря, две топологии. Сравнимы ли они?

4. a. Докажите подробно, что рассмотренное в примере 4 пространство ростков непрерывных функций не хаусдорфово.

b. Объясните, почему это топологическое пространство не метризуемо.

c. Каков вес этого пространства?

5. a. Сформулируйте аксиомы топологического пространства на языке замкнутых множеств.

b. Проверьте, что повторное замыкание множества совпадает с его замыканием.

c. Проверьте, что граница любого множества является множеством замкнутым.

d. Покажите, что если $\mathscr{F}$ замкнуто, а G открыто в $(X; \tau)$, то множество $G \setminus \mathscr{F}$ открыто в $(X; \tau)$.

e. Если $(Y; \tau_Y)$ — подпространство топологического пространства $(X; \tau_X)$, а множество E таково, что $E \subset Y \subset X$ и $E \in \tau_X$, то $E \in \tau_Y$.

6. a. Докажите, что в любом топологическом пространстве имеется всюду плотное множество, мощность которого не превосходит веса пространства.

b. Проверьте сепарабельность метрических пространств $C[a, b]$, $C^{(k)}[a, b]$, $\mathscr{R}_1[a, b]$, $\mathscr{R}_p[a, b]$ (формулы соответствующих метрик см. в § 1).

c. Проверьте, что если на множестве ограниченных вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, ввести метрику соотношением (6) из § 1, то получится не сепарабельное метрическое пространство

§ 3. Компакты

1. Определение и общие свойства компакта.

Определение 1. Множество $\mathscr{K}$ в топологическом пространстве $(X; \tau)$ называется *компактом* (бикомпактом *)), если из любого покрытия $\mathscr{K}$ множествами, открытыми в X, можно выделить конечное покрытие $\mathscr{K}$.

Пример 1. Отрезок $[a, b]$ множества $\mathbb{R}$ действительных чисел, рассматриваемого в стандартной топологии, является компактом, что немедленно вытекает из доказанной в гл. II, § 1, п. 3 леммы о возможности выделить конечное покрытие из покрытия отрезка интервалами.

И вообще m-мерный промежуток $I^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a^i \leq x \leq b^i, i = 1, \ldots, m\}$ в $\mathbb{R}^m$ является компактом, что было установлено в гл. VII, § 1, п. 3.

В гл. VII, § 1, п. 3 было доказано также, что подмножество $\mathbb{R}^m$ является компактом в том и только в том случае, когда оно замкнуто и ограничено.

В отличие от относительных свойств множества быть открытым или замкнутым в топологическом пространстве, свойство множества быть компактом абсолютно в том смысле, что не зависит от объемлющего пространства. Точнее, имеет место следующее

Утверждение 1. *Подмножество $\mathscr{K}$ топологического пространства $(X; \tau)$ является компактом в X тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}$ является компактом в себе как в топологическом пространстве с индуцированной из $(X; \tau)$ топологией.*

◄ Сформулированное утверждение следует из определения компакта и того обстоятельства, что каждое множество $G_{\mathscr{K}}$,

*) То понятие компакта, которое вводит определение 1, в топологии иногда именуют бикомпактом

открытое в $\mathcal{K}$, получается пересечением $\mathcal{K}$ с некоторым множеством G_X, открытым в X. ▶

Таким образом, если $(X; \tau_X)$ и $(Y; \tau_Y)$ — два топологических пространства, индуцирующих одинаковую топологию на множестве $\mathcal{K} \subset (X \cap Y)$, то $\mathcal{K}$ одновременно компактно или нет как в X, так и в Y.

Пример 2. Пусть d — стандартная метрика на $\mathbb{R}$, а $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ — единичный интервал в $\mathbb{R}$. Метрическое пространство $(I; d)$ замкнуто (в себе) и ограничено, однако это не компакт, ибо, например, оно не является компактом в $\mathbb{R}$.

Установим теперь важнейшие свойства компактов.

Лемма 1 (о замкнутости компакта). *Если $\mathcal{K}$ — компакт в хаусдорфовом пространстве $(X; \tau)$, то $\mathcal{K}$ — замкнутое подмножество X.*

◀ В силу критерия замкнутости множества достаточно проверить, что любая предельная для $\mathcal{K}$ точка $x_0 \in X$ принадлежит $\mathcal{K}$.

Пусть $x_0 \notin \mathcal{K}$. Для каждой точки $x \in \mathcal{K}$ построим такую ее открытую окрестность $G(x)$, что x_0 обладает окрестностью, не пересекающейся с $G(x)$. Совокупность $G(x)$, $x \in \mathcal{K}$, всех таких окрестностей образует открытое покрытие $\mathcal{K}$, из которого выделяется конечное покрытие $G(x_1), \ldots, G(x_n)$. Если теперь $O_i(x_0)$ такая окрестность точки x_0, что $G(x_i) \cap O_i(x_0) = \varnothing$, то множество $O(x) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i(x_0)$ также является окрестностью точки x_0, причем $G(x_i) \cap O(x_0) = \varnothing$ при любом $i = 1, \ldots, n$. Но это означает, что $\mathcal{K} \cap O(x_0) = \varnothing$ и x_0 не может быть предельной точкой для $\mathcal{K}$. ▶

Лемма 2 (о вложенных компактах). *Если $\mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{K}_n \supset \ldots$ — последовательность непустых вложенных компактов, то пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_i$ непусто.*

◀ В силу леммы 1 множества $G_i = \mathcal{K}_1 \setminus \mathcal{K}_i$, $i = 1, \ldots, n, \ldots$ открыты в $\mathcal{K}_1$. Если пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_i$ пусто, то последовательность $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$ в совокупности образует покрытие $\mathcal{K}_1$. Извлекая из него конечное покрытие, найдем, что некоторый элемент G_m последовательности уже покрывает $\mathcal{K}_1$. Но по условию $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}_1 \setminus G_m \neq \varnothing$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 2. ▶

Лемма 3 (о замкнутом подмножестве компакта). *Замкнутое подмножество $\mathcal{F}$ компакта $\mathcal{K}$ само является компактом.*

◀ Пусть $\{G_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — открытое покрытие $\mathcal{F}$. Добавив к нему открытое множество $G = \mathcal{K} \setminus \mathcal{F}$, получим открытое покрытие всего компакта $\mathcal{K}$. Из этого покрытия можно извлечь конечное покрытие $\mathcal{K}$. Поскольку $G \cap \mathcal{F} = \varnothing$, то, значит, из системы $\{G_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ выделяется конечное покрытие множества $\mathcal{F}$. ▶

2. Метрические компакты. Далее мы установим некоторые свойства метрических компактов, т. е. метрических пространств, являющихся компактами, как топологические пространства с топологией, индуцированной метрикой.

Определение 2. Говорят, что множество $E \subset X$ является *ε-сетью* в метрическом пространстве $(X;\ d)$, если для любой точки $x \in X$ найдется точка $e \in E$ такая, что $d(e;\ x) < \varepsilon$.

Лемма 4 (о конечной ε-сети). *Если метрическое пространство $(\mathcal{K};\ d)$ — компакт, то для любого $\varepsilon > 0$ в нем имеется конечная ε-сеть.*

◀ Для каждой точки $x \in \mathcal{K}$ берем открытый шар $B(x;\ \varepsilon)$. Из открытого покрытия $\mathcal{K}$ этими шарами выделяем конечное покрытие $B(x_1;\ \varepsilon), \ldots, B(x_n;\ \varepsilon)$. Точки $x_1, \ldots, x_n$, очевидно, образуют искомую ε-сеть. ▶

Наряду с рассуждениями, в которых выделяют конечные покрытия, в анализе часто встречаются рассуждения, в которых из произвольной последовательности извлекают сходящуюся подпоследовательность. Оказывается справедливо следующее

Утверждение 2 (критерий метрического компакта). *Метрическое пространство $(\mathcal{K};\ d)$ является компактом в том и только в том случае, когда из любой последовательности его точек можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из $\mathcal{K}$*

Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к некоторой точке $a \in \mathcal{K}$, как и прежде, означает, что для любой окрестности $U(a)$ точки $a \in \mathcal{K}$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при $n > N$ будем иметь $x_n \in U(a)$.

Подробнее о пределе мы будем говорить ниже в § 6.

Доказательству утверждения 2 предпошлем две леммы.

Лемма 5. *Если метрическое пространство $(\mathcal{K};\ d)$ таково, что из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся в $\mathcal{K}$ подпоследовательность, то для любого $\varepsilon > 0$ в $\mathcal{K}$ имеется конечная ε-сеть.*

◀ Если бы для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ в $\mathcal{K}$ не было конечной ε_0-сети, то в $\mathcal{K}$ можно построить последовательность $\{x_n\}$ точек так, что $d(x_n,\ x_i) > \varepsilon_0$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и любом значении $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Из этой последовательности, очевидно, нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. ▶

Лемма 6. *Если метрическое пространство $(\mathcal{K};\ d)$ таково, что из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся в $\mathcal{K}$ подпоследовательность, то любая последовательность вложенных замкнутых непустых подмножеств такого пространства имеет непустое пересечение.*

◀ Если $\mathcal{F}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{F}_n \supset \ldots$ — указанная последовательность замкнутых в $\mathcal{K}$ множеств, то, взяв в каждом из них по точке, получим последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, из которой извлечем сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$. Ее предел $a \in \mathscr{K}$ по построению обязан принадлежать каждому из замкнутых множеств $\mathscr{F}_i$, $i \in \mathbb{N}$. ►

Теперь докажем утверждение 2.

◄ Сначала проверим, что если $(\mathscr{K};\ d)$ — компакт, а $\{x_n\}$ — последовательность его точек, то из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\mathscr{K}$. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет всего конечное число различных значений, то утверждение очевидно, поэтому можем считать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечно много различных значений. Для $\varepsilon_1 = 1/1$ строим конечную 1-сеть и берем тот замкнутый шар $\tilde{B}(a_k;\ 1)$, который содержит бесконечное число членов последовательности. По лемме 3 шар $\tilde{B}(a_1;\ 1)$ сам является компактом, в котором существует конечная $\varepsilon_2 = 1/2$ сеть и ее шар $\tilde{B}(a_2,\ 1/2)$, содержащий бесконечно много элементов последовательности. Так возникает последовательность $\tilde{B}(a_1;\ 1) \supset \tilde{B}(a_2;\ 1/2) \supset \ldots$ $\ldots \supset \tilde{B}(a_n;\ 1/n) \supset \ldots$ вложенных компактов, имеющих по лемме 2 общую точку $a \in \mathscr{K}$. Выбирая в шаре $\tilde{B}(a_1;\ 1)$ точку x_{n_1} последовательности, затем в шаре $\tilde{B}(a_2;\ 1/2)$ точку x_{n_2} последовательности с номером $n_2 > n_1$ и т. д., получим подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, которая по построению сходится к a.

Докажем теперь обратное утверждение, т. е. проверим, что если из любой последовательности $\{x_n\}$ точек метрического пространства $(\mathscr{K};\ d)$ можно выделить сходящуюся в $\mathscr{K}$ подпоследовательность, то $(\mathscr{K};\ d)$ — компакт.

В самом деле, если из некоторого открытого покрытия $\{G_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ пространства $(\mathscr{K};\ d)$ нельзя выделить конечное покрытие, то, построив в силу леммы 5 конечную $\varepsilon_1 = 1$-сеть в $\mathscr{K}$, найдем замкнутый шар $\tilde{B}(a_1;\ 1)$, который тоже нельзя покрыть конечным набором множеств системы $\{G_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Этот шар $\tilde{B}(a_1;\ 1)$ теперь можно считать исходным множеством и, построив в нем конечную 1/2-сеть, найти в нем шар $\tilde{B}(a_2;\ 1/2)$, который не допускает конечного покрытия множествами системы $\{G_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$.

Получаемая таким образом последовательность вложенных замкнутых множеств $\tilde{B}(a_1;\ 1) \supset \tilde{B}(a_2;\ 1/2) \supset \ldots \supset \tilde{B}(a_n;\ 1/n) \supset \ldots$ в силу леммы 6 имеет, и как видно из построения, только одну общую точку $a \in \mathscr{K}$. Эта точка покрыта некоторым множеством G_{α_0} нашей системы, и, поскольку G_{α_0} открыто, все множества $\tilde{B}(a_n;\ 1/n)$ при достаточно больших значениях n должны лежать в G_{α_0}. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 2. ►

Задачи и упражнения

1. Подмножество топологического пространства называется *относительно компактным*, если его замыкание является компактом.

Приведите примеры относительно компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$.

2. Топологическое пространство называется *локально компактным*, если каждая точка этого пространства имеет относительно компактную окрестность.

Приведите примеры локально компактных, но не компактных топологических пространств

3. Покажите, что для любого локально компактного, но не компактного топологического пространства $(X;\ \tau_X)$ найдется такое компактное топологическое пространство $(Y;\ \tau_Y)$, что $X \subset Y$, а $Y \setminus X$ состоит из одной точки и пространство $(X;\ \tau_X)$ является подпространством топологического пространства $(Y;\ \tau_Y)$.

§ 4. Связные топологические пространства

Определение 1. Топологическое пространство $(X;\ \tau)$ называется *связным*, если в нем нет других открыто-замкнутых подмножеств *), кроме самого X и пустого множества.

Это определение становится более прозрачным с точки зрения нашей интуиции, если ему придать следующую форму.

Топологическое пространство связно тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде объединения двух его непустых замкнутых (открытых) подмножеств без общих точек.

Определение 2. Множество E в топологическом пространстве $(X;\ \tau)$ называется *связным*, если оно связно как топологическое подпространство $(X;\ \tau)$ (с индуцированной топологией).

Из этого определения и определения 1 вытекает, что свойство множества E быть связным не зависит от объемлющего пространства. Точнее, если $(X;\ \tau_X)$ и $(Y;\ \tau_Y)$ — топологические пространства, содержащие E и индуцирующие на E одну и ту же топологию, то E связно или нет одновременно как в X, так и в Y.

Пример 1. Пусть $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$. Множество $E_- = \{x \in E \mid x < 0\}$ непусто, не совпадает с E и в то же время открыто-замкнуто в E (как и $E_+ = \{x \in E \mid x > 0\}$), если рассматривать E как топологическое пространство с топологией, индуцированной стандартной топологией $\mathbb{R}$. Таким образом, E не связно, как и подсказывает наша интуиция.

Утверждение (о связных подмножествах $\mathbb{R}$). *Не пустое множество $E \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда для любых x, z, принадлежащих E, из $x < y < z$ следует, что $y \in E$.*

Таким образом, на прямой связными являются только промежутки (конечные или бесконечные): интервалы, полуинтервалы, отрезки.

◄ Необходимость. Пусть E — связное подмножество $\mathbb{R}$ и тройка точек a, b, c такова, что $a \in E$, $b \in E$, но $c \notin E$, хотя

*) То есть одновременно открытых и замкнутых.

$a<c<b$. Полагая $A=\{x\in E\mid x<c\}$, $B=\{x\in E\mid x>c\}$, видим, что $a\in A$, $b\in B$, т. е. $A\neq\varnothing$ и $B\neq\varnothing$ и $A\cap B=\varnothing$. Кроме того, $E=A\cup B$ и оба множества A, B открыты в E. Это противоречит связности E.

Достаточность. Пусть E — подпространство $\mathbb{R}$, обладающее тем свойством, что вместе с любой парой точек a и b ему принадлежит и всякая промежуточная точка отрезка $[a, b]$. Покажем, что E связно.

Предположим, что A — открыто-замкнутое подмножество E, причем $A\neq\varnothing$ и $B=E\setminus A\neq\varnothing$. Пусть $a\in A$ и $b\in B$. Для определенности будем считать, что $a<b$ ($a\neq b$, так как $A\cap B=\varnothing$). Рассмотрим точку $c_1=\sup\{A\cap[a, b]\}$. Поскольку $A\ni a\leqslant c_1\leqslant\leqslant b\in B$, имеем $c_1\in E$. Ввиду замкнутости A в E заключаем, что $c_1\in A$.

Рассматривая теперь точку $c_2=\inf\{B\cap[c_1, b]\}$, аналогично, ввиду замкнутости B заключаем, что $c_2\in B$. Таким образом, $a\leqslant c_1<c_2\leqslant b$, поскольку $c_1\in A$, $c_2\in B$ и $A\cap B=\varnothing$. Но из определений c_1 и c_2 и того, что $E=A\cup B$ теперь вытекает, что ни одна точка интервала $]c_1, c_2[$ не может принадлежать E. Это противоречит исходному свойству E. Таким образом, множество E не может иметь подмножества A с указанными свойствами, что и доказывает связность E. ►

Задачи и упражнения

1. a. Проверьте, что если A — открыто-замкнутое подмножество $(X; \tau)$, то $B=X\setminus A$ тоже является таковым.

b. Покажите, что в терминах объемлющего пространства свойство связности множества можно выразить в следующем виде: подмножество E топологического пространства (X, τ) связно тогда и только тогда, когда в X нельзя указать пару открытых (замкнутых) и не пересекающихся множеств G'_X, G''_X таких, что $E\cap G'_X\neq\varnothing$, $E\cap G''_X\neq\varnothing$ и $E\subset G'_X\cup G''_X$.

2. Покажите, что:

a. Объединение связных подпространств, имеющих общую точку, связно.

b. Пересечение связных подпространств не всегда связно.

c. Замыкание связного пространства — связно.

3. Группу $GL(n)$ невырожденных матриц порядка n с вещественными элементами можно рассматривать как произведение $\mathbb{R}^{n^2}$ топологических пространств, если с каждым элементом матрицы связывать свой экземпляр множества $\mathbb{R}$ действительных чисел, взятых со стандартной топологией. Выясните, связно ли пространство $GL(n)$.

4. Топологическое пространство называется *локально связным*, если каждая его точка обладает связной окрестностью.

a. Покажите, что из локальной связности еще не вытекает связность топологического пространства.

b. Множество E в $\mathbb{R}^2$ есть график функции $x\longmapsto\sin\frac{1}{x}$ (при $x\neq 0$) плюс отрезок $\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\mid x=0\wedge|y|\leqslant 1\}$ оси ординат. На E рассматривается индуцированная из $\mathbb{R}^2$ топология. Покажите, что получающееся при этом топологическое пространство является связным, но не является локально связным.

5. В гл. VII, § 2, п. 2 мы определяли связное подмножество $\mathbb{R}^n$ как такое множество $E\subset\mathbb{R}^n$, любые две точки которого можно соединить путем с носи-

телем в E. В отличие от введенного в настоящем параграфе определения топологической связности, рассмотренное в главе VII понятие именуется обычно *линейной связностью*. Проверьте, что:

a. Всякое линейно связное подмножество $\mathbb{R}^n$ является связным.

b. Не всякое связное подмножество $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$ является линейно связным (см. задачу 4).

c. Всякое связное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ является линейно связным.

§ 5. Полные метрические пространства

В этом параграфе речь будет уже только о метрических пространствах и, точнее, об одном классе таких пространств, играющем важную роль в различных отделах анализа.

1. Основные определения и примеры. По аналогии с уже известными нам из рассмотрения пространства $\mathbb{R}^n$ понятиями, введем понятия фундаментальной и сходящейся последовательностей точек произвольного метрического пространства.

Определение 1. Последовательность $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ точек метрического пространства $(X;\ d)$ называется *фундаментальной* последовательностью или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при любых номерах m, $n \in \mathbb{N}$, больших, чем N, выполняется соотношение $d(x_m,\ x_n) < \varepsilon$.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ точек метрического пространства $(X;\ d)$ *сходится к точке* $a \in X$ и что a есть *предел* этой последовательности, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(a,\ x_n) = 0$.

Последовательности, имеющие предел, будем, как и прежде, называть *сходящимися*.

Теперь дадим основное

Определение 3. Метрическое пространство $(X;\ d)$ называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность его точек является сходящейся.

Пример 1. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел со стандартной метрикой является полным метрическим пространством, что следует из критерия Коши сходимости числовой последовательности.

Заметим, что поскольку всякая сходящаяся последовательность точек метрического пространства, очевидно, является фундаментальной последовательностью, то в определении полного метрического пространства в сущности просто постулируется выполнение в нем критерия Коши сходимости последовательности.

Пример 2. Если из множества $\mathbb{R}$ удалить, например, число 0, то в стандартной метрике множество $\mathbb{R}\setminus 0$ уже не будет полным пространством. Действительно, последовательность $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, его точек фундаментальна, но она не имеет предела в $\mathbb{R}\setminus 0$.

Пример 3. Пространство $\mathbb{R}^n$ с любой из стандартных метрик в нем является полным, как это было выяснено в гл. VII, § 2, п. 1.

Пример 4. Рассмотрим множество $C[a, b]$ вещественнозначных непрерывных на отрезке $[a, b]\subset\mathbb{R}$ функций с метрикой

$$d(f, g)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)| \tag{1}$$

(см. § 1, пример 7).

Покажем, что метрическое пространство $(C[a, b]; d)$ является полным.

◀ Пусть $\{f_n(x); n\in\mathbb{N}\}$ — фундаментальная последовательность функций из $C[a, b]$, т. е.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ ((m>N\wedge n>N)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\forall x\in[a, b]\,(|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon)). \tag{2}$$

При каждом фиксированном значении $x\in[a, b]$, как видно из (2), числовая последовательность $\{f_n(x); n\in\mathbb{N}\}$ фундаментальна и по критерию Коши имеет определенный предел $f(x)$.

Итак,

$$f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x),\qquad x\in[a, b]. \tag{3}$$

Проверим, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, т. е. $f\in C[a, b]$.

Из (2) и (3) следует, что при $n>N$ выполнено неравенство

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon,\ \forall x\in[a, b]. \tag{4}$$

Фиксируем точку $x\in[a, b]$ и проверим непрерывность функции f в этой точке. Пусть смещение h таково, что $(x+h)\in[a, b]$. Из тождества

$$f(x+h)-f(x)=f(x+h)-f_n(x+h)+f_n(x+h)-f_n(x)+f_n(x)-f(x)$$

вытекает неравенство

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x+h)-f_n(x+h)|+|f_n(x+h)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|. \tag{5}$$

Крайние члены правой части последнего неравенства в силу (4) не превосходят ε, если $n>N$. Фиксировав $n>N$, получаем функцию $f_n\in C[a, b]$ и, подбирая $\delta=\delta(\varepsilon)$ так, что при $|h|<\delta$ выполняется $|f_n(x+h)-f_n(x)|<\varepsilon$, получаем, что $|f(x+h)-f(x)|<3\varepsilon$, если $|h|<\delta$. Но это и означает, что функция f непрерывна в точке x. Поскольку точка x была произвольной точкой отрезка $[a, b]$, мы показали, что $f\in C[a, b]$. ▶

Итак, пространство $C[a, b]$ с метрикой (1) является полным метрическим пространством. Это очень важный и широко используемый в анализе факт.

Пример 5. Если на том же множестве $C[a, b]$ вместо метрики (1) рассмотреть интегральную метрику

$$d(f, g)=\int_a^b |f-g|(x)\,dx, \tag{6}$$

то возникающее метрическое пространство уже не будет полным.

◀ Ради простоты обозначений положим $[a, b]=[-1, 1]$ и рассмотрим, к примеру, последовательность $\{f_n \in C[-1, 1]; n\in\mathbb{N}\}$ функций, определенных следующим образом:

$$f_n(x)=\begin{cases} -1, & \text{если } -1\leqslant x\leqslant -1/n, \\ nx, & \text{если } -1/n<x<1/n, \\ 1, & \text{если } 1/n\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

(рис. 67).

Из свойств интеграла непосредственно вытекает, что эта последовательность фундаментальна в смысле метрики (6) в $C[-1, 1]$. Вместе с тем она не имеет предела в $C[-1, 1]$, ибо если бы непрерывная функция $f\in C[-1, 1]$ была пределом указанной последовательности в смысле метрики (6), то на промежутке $-1\leqslant x<0$ функция f должна была бы быть постоянной, равной -1, а на промежутке $0<x\leqslant 1$ — постоянной, равной 1, что несовместимо с непрерывностью f в точке $x=0$. ▶

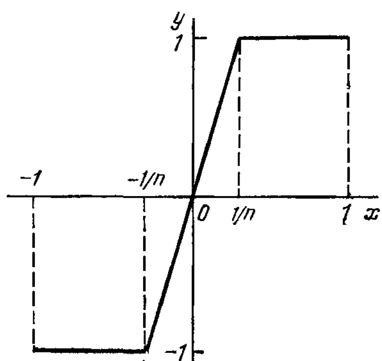

Рис. 67.

Пример 6. Несколько труднее показать, что даже множество $\mathcal{R}[a, b]$ определенных на отрезке $[a, b]$ вещественнозначных интегрируемых по Риману на этом отрезке функций также не является полным в смысле метрики (6) *). Мы покажем это, опираясь на критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

◀ В качестве $[a, b]$ возьмем отрезок $[0, 1]$ и построим на нем такое канторовское множество, которое не является множеством меры нуль. Пусть $\Delta\in]0, 1/3[$. Удалим из отрезка $[0, 1]$ среднюю его часть длины Δ, точнее, $\Delta/2$-окрестность середины отрезка $[0, 1]$. На каждом из оставшихся двух отрезков удалим среднюю часть длины $\Delta\cdot 1/3$. На каждом из четырех оставшихся отрезков удалим среднюю часть длины $\Delta\cdot 1/3^2$ и т. д. Длина всех

*) По поводу самой метрики (6) на $\mathcal{R}[a, b]$ см. замечание, сделанное в примере 9 из § 1

удаленных в таком процессе интервалов равна $\Delta+\Delta\cdot 2/3+ + \Delta\cdot 4/3^2+\ldots+\Delta\cdot(2/3)^n+\ldots=3\Delta$. Поскольку $0<\Delta<\frac{1}{3}$, имеем $1-3\Delta>0$ и, как можно проверить, отсюда следует, что оставшееся на отрезке $[0, 1]$ (канторово множество) K не имеет меру нуль в смысле Лебега.

Рассмотрим теперь следующую последовательность: $\{f_n\in \in\mathcal{R}[0, 1];\ n\in\mathbb{N}\}$. Пусть f_n — функция, равная единице всюду на $[0, 1]$, кроме точек, выбрасываемых на первых n шагах интервалов, на которых она полагается равной нулю. Легко проверить, что эта последовательность фундаментальна в смысле метрики (6). Если бы некоторая функция $f\in\mathcal{R}[0, 1]$ была пределом этой последовательности, то f должна была бы почти во всех точках отрезка $[0, 1]$ совпадать с характеристической функцией множества K. Тогда f имела бы разрывы во всех точках множества K. Но поскольку K не имеет меру нуль, из критерия Лебега можно было бы заключить, что $f\notin\mathcal{R}[0, 1]$. Значит, $\mathcal{R}[a, b]$ с метрикой (6) не является полным метрическим пространством. ▶

2. Пополнение метрического пространства.

Пример. 7. Вернемся вновь на действительную ось и рассмотрим множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с метрикой, индуцированной стандартной метрикой на $\mathbb{R}$.

Ясно, что последовательность рациональных чисел, сходящаяся в $\mathbb{R}$ к $\sqrt{2}$ фундаментальна, но не имеет предела в $\mathbb{Q}$, т. е. $\mathbb{Q}$ с указанной метрикой не является полным пространством. Вместе с тем $\mathbb{Q}$ оказывается подпространством полного метрического пространства $\mathbb{R}$, которое естественно рассматривать как пополнение $\mathbb{Q}$. Заметим, что множество $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ можно было бы рассматривать и как подмножество полного метрического пространства $\mathbb{R}^2$, однако называть $\mathbb{R}^2$ пополнением $\mathbb{Q}$ не представляется целесообразным.

Определение 4. Наименьшее полное метрическое пространство, содержащее данное метрическое пространство $(X; d)$, назовем *пополнением* пространства $(X; d)$.

Это интуитивно приемлемое определение требует по меньшей мере двух разъяснений: что такое «наименьшее» и существует ли оно.

Очень скоро мы сможем ответить на оба эти вопроса, а пока примем следующее более формальное

Определение 5. Если метрическое пространство $(X; d)$ является подпространством метрического пространства $(Y; d)$ и множество $X\subset Y$ всюду плотно в Y, то пространство $(Y; d)$ называется *пополнением* метрического пространства $(X; d)$.

Определение 6. Метрическое пространство $(X_1; d_1)$ называется *изометричным* метрическому пространству $(X_2; d_2)$, если существует биективное отображение $f\colon X_1\to X_2$ такое, что для любых точек a, b из X_1 справедливо равенство $d_2(f(a), f(b)) = d_1(a, b)$. (Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называют в этом случае *изометрией*.)

Ясно, что введенное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности между метрическими пространствами. При изучении свойств метрических пространств мы изучаем не индивидуальное пространство, а свойства сразу всех изометричных ему пространств. По этой причине изометричные пространства можно не различать.

Пример 8. Две конгруэнтные фигуры на плоскости как метрические пространства изометричны, поэтому при изучении метрических свойств фигур мы вовсе отвлекаемся, например, от расположения фигуры в плоскости, отождествляя между собой все конгруэнтные фигуры.

Приняв соглашение об отождествлении изометричных пространств, можно показать, что если пополнение метрического пространства и существует, то оно единственно.

Проверим предварительно, что справедлива

Лемма. *Для любой четверки точек a, b, u, v метрического пространства $(X; d)$ имеет место неравенство*

$$|d(a, b) - d(u, v)| \leqslant d(a, u) + d(b, v). \tag{7}$$

◀ В силу неравенства треугольника

$$d(a, b) \leqslant d(a, u) + d(u, v) + d(b, v),$$

откуда и следует (7). ▶

Теперь докажем

Утверждение 1. *Если метрические пространства $(Y_1; d_1)$, $(Y_2; d_2)$ являются пополнениями одного и того же пространства $(X; d)$, то они изометричны.*

◀ Изометрию $f\colon Y_1 \to Y_2$ построим следующим образом. Для $x \in X$ положим $f(x) = x$. Тогда $d_2(f(x_1), f(x_2)) = d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) = d_1(x_1, x_2)$ при $x_1, x_2 \in X$. Если $y_1 \in Y_1 \setminus X$, то y_1 — предельная точка для X, так как X всюду плотно в Y_1. Пусть $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ — сходящаяся к y_1 в смысле метрики d_1 последовательность точек X. Эта последовательность фундаментальна в смысле d_1. Но поскольку на X метрики d_1 и d_2 совпадают с d, эта последовательность фундаментальна также и в $(Y_2; d_2)$. Последнее пространство полное, поэтому эта последовательность имеет в нем предел $y_2 \in Y$. Стандартным образом проверяется, что такой предел единственный. Положим теперь $f(y_1) = y_2$. Поскольку любая точка $y_2 \in Y_2 \setminus X$, так же как и любая точка $y_1 \in Y_1 \setminus X$, является пределом некоторой фундаментальной последовательности точек из X, то построенное отображение $f\colon Y_1 \to Y_2$ сюръективно.

Проверим теперь, что для любой пары точек y_1', y_1'' из Y_1 выполнено равенство

$$d_2(f(y_1'),\ f(y_1''))=d_1(y_1',\ y_1''). \tag{8}$$

Если y_1', y_1'' лежат в X, то это очевидно. В общем же случае возьмем две последовательности $\{x_n';\ n\in\mathbb{N}\}$, $\{x_n'';\ n\in\mathbb{N}\}$ точек из X, сходящиеся соответственно к y_1' и y_1''. Из неравенства (7) вытекает, что

$$d_1(y_1',\ y_1'')=\lim_{n\to\infty} d_1(x_n',\ x_n''),$$

или, что то же самое

$$d_1(y_1',\ y_1'')=\lim_{n\to\infty} d(x_n',\ x_n''). \tag{9}$$

По построению эти же последовательности сходятся к $y_2'=f(y_1')$ и $y_2''=f(y_1'')$ соответственно в пространстве $(Y_2;\ d_2)$. Значит,

$$d_2(y_2',\ y_2'')=\lim_{n\to\infty} d(x_n',\ x_n''). \tag{10}$$

Сравнивая соотношения (9) и (10), получаем равенство (8). Это равенство заодно устанавливает инъективность нашего отображения $f\colon Y_1\to Y_2$ и тем самым завершает доказательство того, что f — изометрия. ►

В определении 5 пополнения $(Y;\ d)$ метрического пространства $(X;\ d)$ мы требовали, чтобы $(X;\ d)$ было подпространством $(Y;\ d)$ всюду плотным в $(Y;\ d)$. С точки зрения отождествления изометричных пространств можно было бы теперь расширить представление о пополнении и принять следующее

Определение 5′. Метрическое пространство $(Y;\ d_Y)$ называется *пополнением* метрического пространства $(X;\ d_X)$, если в $(Y;\ d_Y)$ имеется всюду плотное подпространство, изометричное $(X;\ d_X)$.

Докажем теперь

Утверждение 2. *Каждое метрическое пространство имеет пополнение.*

◄ Если исходное пространство само является полным, то оно само является своим пополнением.

Идею построения пополнения неполного метрического пространства $(X;\ d_X)$ мы уже, по существу, продемонстрировали, доказывая утверждение 1.

Рассмотрим множество фундаментальных последовательностей в пространстве $(X;\ d_X)$. Две такие последовательности $\{x_n';\ n\in\mathbb{N}\}$, $\{x_n'';\ n\in\mathbb{N}\}$ назовем *эквивалентными* или *конфинальными*, если $d_X(x_n',\ x_n'')\to 0$ при $n\to\infty$. Легко видеть, что отношение конфинальности действительно является отношением эквивалентности. Множество классов эквивалентных фундаментальных последовательностей обозначим через S. Введем в S метрику по следующему правилу. Если s' и s'' — элементы S, а $\{x'_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ и $\{x''_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ — некоторые последовательности из классов s' и s'' соответственно, то положим

$$d(s', s'') = \lim_{n \to \infty} d_X(x'_n, x''_n). \tag{11}$$

Из неравенства (7) следует, что это определение корректно: написанный справа предел существует (по критерию Коши для числовой последовательности) и не зависит от индивидуального выбора последовательностей $\{x'_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, $\{x''_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ из s', s''.

Функция $d(s', s'')$ удовлетворяет всем аксиомам метрики. Полученное метрическое пространство $(S; d)$ и является искомым пополнением пространства $(X; d_X)$. В самом деле, $(X; d_X)$ изометрично подпространству $(S_X; d)$ пространства (S, d), состоящему из тех классов эквивалентных фундаментальных последовательностей, в каждом из которых имеется постоянная последовательность $\{x_n = x \in X;\ n \in \mathbb{N}\}$. Такой класс $s \in S$ естественно отождествить с точкой $x \in X$. Получающееся при этом отображение $f\colon (X; d_X) \to (S_X; d)$, очевидно, изометрично.

Остается проверить, что $(S_X; d)$ всюду плотно в $(S; d)$ и что $(S; d)$ — полное метрическое пространство.

Проверим сначала плотность $(S_X; d)$ в $(S; d)$. Пусть s — произвольный элемент S, а $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ — фундаментальная последовательность из $(X; d_X)$, принадлежащая этому классу $s \in S$. Взяв $\xi_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, мы получаем последовательность $\{\xi_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ точек пространства $(S_X; d)$, которая, как видно из (11), имеет своим пределом именно $s \in S$.

Докажем теперь полноту пространства $(S; d)$. Пусть $\{s_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ — произвольная фундаментальная последовательность пространства $(S; d)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ подберем элемент ξ_n из $(S_X; d)$ так, что $d(s_n, \xi_n) < 1/n$. Тогда последовательность $\{\xi_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, так же как и последовательность $\{s_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ окажется фундаментальной. Но в таком случае будет фундаментальной в $(X; d_X)$ и последовательность $\{x_n = f^{-1}(\xi_n);\ n \in \mathbb{N}\}$. Последовательность $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ определяет некоторый элемент $s \in S$, к которому в силу (11) и сходится данная последовательность $\{s_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. ▶

Замечание 1. После доказанных утверждений 1 и 2 становится понятно, что пополнение метрического пространства в смысле определения 5′ действительно является наименьшим полным пространством, содержащим (с точностью до изометрии) данное метрическое пространство. Этим мы уточнили и оправдали исходное определение 4.

Замечание 2. Построение множества $\mathbb{R}$ действительных чисел, исходя из множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, можно было бы провести в полном соответствии с проведенным выше в общем виде построением пополнения метрического пространства. Именно так переход от $\mathbb{Q}$ к $\mathbb{R}$ был осуществлен Кантором.

Замечание 3. В примере 6 мы показали, что пространство $\mathcal{R}[a, b]$ интегрируемых по Риману функций не является полным в естественной интегральной метрике. Его пополнением является важное пространство $\mathcal{L}[a, b]$ функций, интегрируемых по Лебегу.

Задачи и упражнения

1. a. Докажите следующую лемму о вложенных шарах. *Пусть $(X; d)$ — метрическое пространство и $\tilde{B}(x_1; r_1) \supset \ldots \supset \tilde{B}(x_n; r_n) \supset \ldots$ — последовательность замкнутых вложенных шаров в X, радиусы которых стремятся к нулю. Пространство $(X; d)$ полно тогда и только тогда, когда для любой такой последовательности существует и притом единственная точка, принадлежащая всем шарам этой последовательности.*

b. Покажите, что если из условий сформулированной выше леммы исключить требование $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, то пересечение последовательности вложенных шаров может оказаться пустым даже в полном пространстве.

2. a. Множество $E \subset X$ метрического пространства $(X; d)$ называется *нигде не плотным* в X, если оно не плотно ни в одном шаре, т. е если для любого шара $B(x; r)$ найдется другой шар $B(x_1; r_1) \subset B(x; r)$, свободный от точек множества E.

Множество E называется *множеством первой категории* в X, если его можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.

Множество, не являющееся множеством первой категории, называют *множеством второй категории* в X.

Покажите, что полное метрическое пространство есть множество второй категории (в себе)

b. Покажите, что если функция $f \in C^{(\infty)}[a, b]$ такова, что $\forall x \in [a, b]\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m > n\ (f^{(m)}(x) = 0)$, то функция f — многочлен.

§ 6. Непрерывные отображения топологических пространств

Этот и следующий параграфы содержат наиболее важные с точки зрения анализа результаты настоящей главы.

Основные понятия и утверждения, которые здесь изложены, являются естественным, а иногда просто дословным переносом уже хорошо известных нам понятий и утверждений на случай отображений произвольных топологических или метрических пространств. Для многих фактов при этом оказываются почти идентичными с уже рассмотренными не только формулировки, но и доказательства, которые в этих случаях, разумеется, опускаются со ссылкой на соответствующие утверждения, изложенные подробно ранее.

1. Предел отображения.

a. Основное определение и его частные случаи.

Определение 1. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множества X с фиксированной в X базой $\mathcal{B} = \{B\}$ в топологическое пространство Y. Говорят, что точка $A \in Y$ является *пределом отображения $f\colon X \to Y$ по базе $\mathcal{B}$* и пишут $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A$, если для любой окрестности $V(A)$ точки A в Y существует элемент $B \in \mathcal{B}$ базы $\mathcal{B}$, образ которого при отображении f содержится в $V(A)$.

В логической символике определение 1 имеет вид

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A := \forall V(A) \subset Y \ \exists B \in \mathcal{B} (f(B) \subset V(A)).$$

Чаще всего нам будет встречаться случай, когда X, как и Y, — топологическое пространство, а $\mathcal{B}$ — база окрестностей или проколотых окрестностей некоторой точки $a \in X$. Сохраняя для базы проколотых окрестностей $\{\overset{\circ}{U}(a)\}$ точки a прежнее обозначение $x \to a$, можно конкретизировать определение 1 для этой базы:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A := \forall V(A) \subset Y \ \exists \overset{\circ}{U}(a) \subset X \ (f(\overset{\circ}{U}(a)) \subset V(A)).$$

Если $(X; d_X)$ и $(Y; d_Y)$ — метрические пространства, то последнее определение можно переформулировать уже на языке $\varepsilon - \delta$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A := \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X$$
$$(0 < d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(A, f(x)) < \varepsilon).$$

Иными словами,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to a} d_Y(A, f(x)) = 0.$$

Мы видим, таким образом, что, имея понятие окрестности, можно определить понятие предела отображения $f: X \to Y$ в топологическое или метрическое пространство Y так же, как это было сделано в случае $Y = \mathbb{R}$ или, более общо, в случае $Y = \mathbb{R}^n$.

b. О свойствах предела отображения. Сделаем некоторые замечания относительно общих свойств предела.

Отметим прежде всего, что получавшаяся ранее сама собой единственность предела в случае, когда Y не является хаусдорфовым пространством, уже не имеет места. Если же Y — хаусдорфово пространство, то единственность предела имеет место и доказательство ее ничем не отличается от уже проведенного в частных случаях $Y = \mathbb{R}$ или $Y = \mathbb{R}^n$.

Далее, если $f: X \to Y$ — отображение в метрическое пространство, то можно говорить об *ограниченности* отображения (что означает ограниченность множества $f(X)$ в Y) и о *финальной ограниченности* отображения по базе $\mathcal{B}$ в X (что означает существование элемента B базы $\mathcal{B}$, на котором f ограничено).

Из самого определения предела отображения вытекает, что если отображение $f: X \to Y$ множества X с базой $\mathcal{B}$ в метрическое пространство Y имеет предел по базе $\mathcal{B}$, то оно финально ограничено по этой базе.

c. Вопросы существования предела отображения.

Утверждение 1 (о пределе композиции отображений). *Пусть Y — множество с базой $\mathcal{B}_Y$, а $g: Y \to Z$ — отображение Y в топологическое пространство Z, имеющее предел по базе $\mathcal{B}_Y$.*

Пусть X — множество с базой $\mathcal{B}_X$ и $f: X \to Y$ — такое отображение X в Y, что для любого элемента $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ базы $\mathcal{B}_Y$ существует элемент $B_X \in \mathcal{B}_X$ базы $\mathcal{B}_X$, образ которого содержится в B_Y, т. е. $f(B_X) \subset B_Y$.

При этих условиях композиция $g \circ f: X \to Z$ отображений f и g определена, имеет предел по базе $\mathcal{B}_X$ и

$$\lim_{\mathcal{B}_X} g \circ f(x) = \lim_{\mathcal{B}_Y} g(y).$$

Доказательство см. в гл. III, § 2, теорема 5.

Другим важным утверждением о существовании предела является критерий Коши, к которому мы теперь переходим. На сей раз речь будет идти уже об отображении $f: X \to Y$ в метрическое и даже в полное метрическое пространство.

В случае отображения $f: X \to Y$ множества X в метрическое пространство $(Y; d)$ естественно принять следующее

Определение 2. *Колебанием* отображения $f: X \to Y$ на множестве $E \subset X$ называется величина

$$\omega(f; E) = \sup_{x_1, x_2 \in E} d(f(x_1), f(x_2)).$$

Имеет место

Утверждение 2 (критерий Коши существования предела отображения). *Пусть X — множество с базой $\mathcal{B}$; $f: X \to Y$ — отображение X в полное метрическое пространство $(Y; d)$.*

Для того чтобы отображение f имело предел по базе $\mathcal{B}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся такой элемент B базы $\mathcal{B}$, на котором колебание отображения меньше ε

Короче:

$$\exists \lim_{\mathcal{B}} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathcal{B} \ (\omega(f; B) < \varepsilon).$$

Доказательство см. в гл. III, § 2, теорема 4.

Полезно заметить, что полнота пространства Y нужна только при переходе от правой части последнего соотношения к левой. Более того, если Y не является полным пространством, то именно этот переход, вообще говоря, невозможен.

2. Непрерывные отображения.

а. Основные определения.

Определение 3. Отображение $f: X \to Y$ топологического пространства $(X; \tau_X)$ в топологическое пространство $(Y; \tau_Y)$ называется *непрерывным в точке* $a \in X$, если для любой окрестности $V(f(a)) \subset Y$ точки $f(a) \in Y$ найдется окрестность $U(a) \subset X$ точки $a \in X$, образ которой $f(U(a))$ содержится в $V(f(a))$.

Итак,

$f: X \to Y$ непрерывно в $a \in X :=$

$$= \forall V(f(a)) \ \exists U(a) \ (f(U(a)) \subset V(f(a))).$$

В случае, если X и Y — метрические пространства $(X;\ d_X)$, $(Y;\ d_Y)$, определение 3, разумеется, можно сформулировать на языке $\varepsilon-\delta$:

$$f\colon X \to Y \text{ непрерывно в } a \in X := \\ = \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ (d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon).$$

Определение 4. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Множество непрерывных отображений X в Y обозначают символом $C(X;\ Y)$.

Теорема 1 (критерий непрерывности). *Отображение $f\colon X \to Y$ топологического пространства (X, τ_X) в топологическое пространство $(Y;\ \tau_Y)$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого (замкнутого) подмножества Y открыт (замкнут) в X.*

◀ Поскольку прообраз дополнения есть дополнение к прообразу, достаточно доказать теорему для открытых множеств.

Покажем сначала, что если $f \in C(X;\ Y)$, а $G_Y \in \tau_Y$, то $G_X = f^{-1}(G_Y) \in \tau_X$. Если $G_X = \varnothing$, то открытость прообраза налицо. Если же $G_X \neq \varnothing$ и $a \in G_X$, то по определению непрерывности отображения f в точке a для окрестности G_Y точки $f(a)$ найдется такая окрестность $U_X(a)$ точки a в X, что $f(U_X(a)) \subset G_Y$. Значит, $U_X(a) \subset G_X = f^{-1}(G_Y)$. Поскольку $G_X = \bigcup\limits_{a \in G_X} U_X(a)$, заключаем, что G_X — открыто, т. е. $G_X \in \tau_X$.

Теперь докажем, что если прообраз любого открытого в Y множества открыт в X, то $f \in C(X;\ Y)$. Но, беря любую точку $a \in X$ и произвольную окрестность $V_Y(f(a))$ ее образа в Y, мы обнаруживаем, что множество $U_X(a) = f^{-1}(V_Y(f(a)))$ является открытой окрестностью точки a в X, образ которой содержится в $V_Y(f(a))$. Следовательно, проверено определение непрерывности отображения $f\colon X \to Y$ в произвольной точке $a \in X$. ▶

Определение 5. Биективное отображение $f\colon X \to Y$ одного топологического пространства $(X;\ \tau_X)$ на другое $(Y;\ \tau_Y)$ называется *гомеоморфным* или *гомеоморфизмом*, если как оно само, так и ему обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ непрерывны.

Определение 6. Топологические пространства, допускающие гомеоморфное отображение друг на друга, называются *гомеоморфными*.

Как показывает теорема 1, при гомеоморфном отображении $f\colon X \to Y$ топологического пространства $(X;\ \tau_X)$ на пространство $(Y;\ \tau_Y)$ системы открытых множеств τ_X, τ_Y соответствуют друг другу в том смысле, что $G_X \in \tau_X \Leftrightarrow f(G_X) = G_Y \in \tau_Y$.

Таким образом, с точки зрения топологических свойств гомеоморфные пространства абсолютно одинаковы. Следовательно, гомеоморфность топологических пространств есть такое же отношение эквивалентности в множестве топологических пространств, как, например, изометричность есть отношение эквивалентности в метрических пространствах.

b. Локальные свойства непрерывных отображений. Укажем локальные свойства непрерывных отображений. Они вытекают непосредственно из соответствующих свойств предела.

Утверждение 3 (непрерывность композиции непрерывных отображений). *Пусть* $(X; \tau_X)$, $(Y; \tau_Y)$, $(Z; \tau_Z)$ — *топологические пространства. Если отображение* $g\colon Y \to Z$ *непрерывно в точке* $b \in Y$, *а отображение* $f\colon X \to Y$ *непрерывно в точке* $a \in X$, *причем* $f(a) = b$, *то композиция этих отображений* $g \circ f\colon X \to Z$ *непрерывна в точке* $a \in X$.

Это следует из определения непрерывности отображения и утверждения 1.

Утверждение 4 (ограниченность отображения в окрестности точки непрерывности). *Если отображение* $f\colon X \to Y$ *топологического пространства* $(X; \tau)$ *в метрическое пространство* $(Y; d)$ *непрерывно в некоторой точке* $a \in X$, *то оно ограничено в некоторой окрестности этой точки.*

Утверждение следует из финальной ограниченности (по базе) отображения, имеющего предел.

Прежде чем формулировать следующее утверждение о свойствах непрерывных отображений, напомним, что для отображений в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{R}^n$ величину

$$\omega(f; a) := \lim_{r \to 0} \omega(f; B(a; r)).$$

мы назвали колебанием отображения f в точке a.

Поскольку и понятие колебания отображения на множестве и понятие шара $B(a, r)$ остаются в силе в любом метрическом пространстве, то определение колебания $\omega(f; a)$ отображения f в точке a также остается в силе для отображения $f\colon X \to Y$ метрического пространства $(X; d_X)$ в метрическое пространство $(Y; d_Y)$.

Утверждение 5. *Отображение* $f\colon X \to Y$ *метрического пространства* $(X; d_X)$ *в метрическое пространство* $(Y; d_Y)$ *непрерывно в точке* $a \in X$ *тогда и только тогда, когда* $\omega(f; a) = 0$.

Это утверждение непосредственно следует из определения непрерывности отображения в точке.

с. Глобальные свойства непрерывных отображений. Остановимся теперь на важнейших глобальных свойствах непрерывных отображений.

Теорема 2. *При непрерывном отображении образ компакта является компактом.*

◀ Пусть $f\colon \mathcal{K} \to Y$ — непрерывное отображение компакта $(\mathcal{K}; \tau_{\mathcal{K}})$ в топологическое пространство $(Y; \tau_Y)$, и пусть $\{G_Y^\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — покрытие $f(\mathcal{K})$ множествами, открытыми в Y. В силу теоремы 1 множества $\{G_X^\alpha = f^{-1}(G_Y^\alpha),\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ образуют открытое покрытие $\mathcal{K}$. Извлекая из него конечное покрытие $G_X^{\alpha_1}, \ldots, G_X^{\alpha_n}$, находим конечное покрытие $G_Y^{\alpha_1}, \ldots, G_Y^{\alpha_n}$ множества $f(\mathcal{K}) \subset Y$. Таким образом, $f(\mathcal{K})$ — компакт в Y. ►

Следствие. *Непрерывная вещественная функция $f\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ на компакте принимает в некоторой точке компакта наибольшее (наименьшее) значение.*

◄ Действительно, $f(\mathcal{K})$ — компакт в $\mathbb{R}$, т. е. ограниченное и замкнутое множество. Это значит, что $\inf f(\mathcal{K}) \in f(\mathcal{K})$ и $\sup f(\mathcal{K}) \in f(\mathcal{K})$. ►

В частности, если $\mathcal{K}$ — отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, то мы вновь получаем классическую теорему Вейерштрасса.

На отображения, непрерывные на компактах, дословно переносится теорема Кантора о равномерной непрерывности. Прежде чем ее формулировать, приведем нужное

Определение 7. Отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства $(X;\ d_X)$ в метрическое пространство $(Y;\ d_Y)$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что на любом множестве $E \subset X$ с диаметром, меньшим δ, колебание $\omega(f;\ E)$ отображения f меньше ε.

Теорема 3 (о равномерной непрерывности). *Непрерывное отображение $f\colon \mathcal{K} \to Y$ метрического компакта $\mathcal{K}$ в метрическое пространство $(Y;\ \tau_Y)$ равномерно непрерывно.*

В частности, если $\mathcal{K}$ — отрезок на $\mathbb{R}$, а $Y = \mathbb{R}$, то мы вновь возвращаемся к классической теореме Кантора, доказательство которой, изложенное в гл. IV, § 2, п. 2, практически без изменений переносится на указанный общий случай.

Рассмотрим теперь непрерывные отображения связных пространств.

Теорема 4. *При непрерывном отображении образ связного топологического пространства связен.*

◄ Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение связного топологического пространства $(X;\ \tau_X)$ на топологическое пространство $(Y;\ \tau_Y)$. Пусть E_Y открыто-замкнутое подмножество Y. В силу теоремы 1 прообраз $E_X = f^{-1}(E_Y)$ множества E_Y открыто-замкнут в X. В силу связности X имеем тогда: либо $E_X = \varnothing$, либо $E_X = X$. Но это означает, что либо $E_Y = \varnothing$, либо $E_Y = Y = f(X)$. ►

Следствие. *Если функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, непрерывная на связном топологическом пространстве $(X;\ \tau)$, принимает значение $f(a) = A \in \mathbb{R}$ и $f(b) = B \in \mathbb{R}$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдется такая точка $c \in X$, в которой $f(c) = C$.*

◄ Действительно, по теореме 4 $f(X)$ — связное множество в $\mathbb{R}$. Но в $\mathbb{R}$ связными множествами являются только промежутки (см. утверждение из § 4). Таким образом, вместе с точками A и B точка C содержится в $f(X)$. ►

В частности, если X — отрезок, мы возвращаемся к классической теореме о промежуточном значении непрерывной вещественнозначной функции.

Задачи и упражнения

1. a. Если отображение $f: X \to Y$ непрерывно, то будут ли образы открытых (замкнутых) в X множеств открытыми (замкнутыми) множествами в Y?

b. Если при отображении $f: X \to Y$ не только прообраз открытого множества, но и образ открытого множества открыт, то обязано ли f быть гомеоморфизмом?

c. Если отображение $f: X \to Y$ непрерывно и биективно, то всегда ли оно гомеоморфно?

d. Будет ли гомеоморфным отображение, удовлетворяющее условиям b и c одновременно?

2. Покажите, что всякое непрерывное биективное отображение компакта является гомеоморфизмом.

3. Выясните гомеоморфны ли (попарно) как топологические пространства следующие подмножества $\mathbb{R}^n$: прямая, интервал на прямой, отрезок на прямой; сфера; тор.

4. Топологическое пространство $(X; \tau)$ называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путем, лежащим в X. Точнее это означает, что для любых точек A и B из X существует такое непрерывное отображение $f: I \to X$ отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в X, что $f(a) = A$, $f(b) = B$.

a. Покажите, что всякое линейно связное пространство связно

b. Покажите, что любое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ связно.

c. Покажите, что сфера $S(a; r)$ линейно связна в $\mathbb{R}^n$, но в другом метрическом пространстве она может быть вообще не связной

d Проверьте, что в топологическом пространстве нельзя соединить путем внутреннюю точку множества с внешней точкой множества, не пересекая границу этого множества.

§ 7. Принцип сжимающих отображений

Здесь будет установлен принцип, который, несмотря на всю свою простоту, оказывается средством эффективного доказательства многих теорем существования.

Определение 1. Точка $a \in X$ называется *неподвижной точкой отображения* $f: X \to X$, если $f(a) = a$.

Определение 2. Отображение $f: X \to X$ метрического пространства $(X; d)$ в себя называется *сжимающим*, если существует число q, $0 < q < 1$, такое, что для любых точек x_1, x_2 из X имеет место неравенство

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq q d(x_1, x_2). \tag{1}$$

Теорема (принцип неподвижной точки Пикара *) — Банаха **)).

---

*) Ш. Э. Пикар (1856—1941) — французский математик, которому принадлежит ряд важных результатов в теории дифференциальных уравнений и теории аналитических функций.

**) С. Банах (1892—1945) — польский математик, один из создателей функционального анализа.

Сжимающее отображение $f\colon X \to X$ полного метрического пространства $(X;\ d)$ в себя имеет и притом единственную неподвижную точку a.

Более того, для любой точки $x_0 \in X$ итерационная последовательность $x_0,\ x_1 = f(x_0),\ \ldots,\ x_{n+1} = f(x_n),\ \ldots$ сходится к a. Скорость этой сходимости дается оценкой

$$d(a,\ x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1,\ x_0). \tag{2}$$

◀ Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и покажем, что последовательность $x_0,\ x_1 = f(x_0),\ \ldots,\ x_{n+1} = f(x_n),\ \ldots$ фундаментальна. Отображение f сжимающее, поэтому в силу (1)

$$d(x_{n+1},\ x_n) \leqslant q d(x_n,\ x_{n-1}) \leqslant \ldots \leqslant q^n d(x_1,\ x_0)$$

и

$$d(x_{n+k},\ x_n) \leqslant d(x_n,\ x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+k-1},\ x_{n+k}) \leqslant$$
$$\leqslant (q^n + q^{n+1} + \ldots + q^{n+k-1})\, d(x_1,\ x_0) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1,\ x_0).$$

Отсюда видно, что последовательность $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ действительно фундаментальная.

Пространство $(X;\ d)$ полное, поэтому указанная последовательность имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in X$.

Из определения сжимающего отображения видно, что сжимающее отображение всегда непрерывно, поэтому

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(a).$$

Таким образом, a — неподвижная точка отображения f.

Другой неподвижной точки отображение f иметь не может, поскольку из $a_i = f(a_i)$, $i = 1,\ 2$, с учетом (1) следует

$$0 \leqslant d(a_1,\ a_2) = d(f(a_1),\ f(a_2)) \leqslant q d(a_1,\ a_2),$$

что возможно только при $d(a_1,\ a_2) = 0$, т. е. при $a_1 = a_2$.

Далее, из соотношения

$$d(x_{n+k},\ x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1,\ x_0),$$

переходя к пределу при $k \to \infty$, находим, что

$$d(a,\ x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1,\ x_0). \ ▶$$

В дополнение к этой теореме докажем следующее

Утверждение (об устойчивости неподвижной точки). *Пусть $(X;\ d)$ — полное метрическое пространство; $(\Omega;\ \tau)$ — топологическое пространство, играющее в дальнейшем роль пространства параметров.*

Пусть каждому значению параметра $t \in \Omega$ отвечает сжимающее отображение f_t: $X \to X$ пространства X в себя, причем выполнены следующие условия:

a) *семейство $\{f_t, t \in \Omega\}$ равномерно сжимающее, т. е. существует такое число q, $0 < q < 1$, что каждое отображение f_t является q-сжимающим;*

b) *при каждом $x \in X$ отображение $f_t(x)$: $\Omega \to X$ как функция от t непрерывно в некоторой точке $t_0 \in \Omega$, т. е. $\lim\limits_{t \to t_0} f_t(x) = f_{t_0}(x)$.*

Тогда решение $a(t) \in X$ уравнения $x = f_t(x)$ в точке t_0 непрерывно зависит от t, т. е. $\lim\limits_{t \to t_0} a(t) = a(t_0)$.

◀ Как было показано при доказательстве теоремы, решение $a(t)$ уравнения $x = f_t(x)$ может быть получено как предел последовательности $\{x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, \ldots\}$, исходя из любой точки $x_0 \in X$. Пусть $x_0 = a(t_0) = f_{t_0}(a(t_0))$.

С учетом оценки (2) и условия a), получаем

$$d(a(t), a(t_0)) = d(a(t), x_0) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{1-q} d(x_1, x_0) = \frac{1}{1-q} d(f_t(a(t_0)), f_{t_0}(a(t_0))).$$

Последний член в этом соотношении в силу условия b) стремится к нулю при $t \to t_0$. Таким образом, доказано, что

$$\lim_{t \to t_0} d(a(t), a(t_0)) = 0, \text{ т. е. } \lim_{t \to t_0} a(t) = a(t_0). \ ▶$$

Пример 1. В качестве важного примера применения принципа сжимающих отображений докажем, следуя Пикару, теорему существования решения дифференциального уравнения $y'(x) = f(x, y(x))$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Если функция $f \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ такова, что

$$|f(u, v_1) - f(u, v_2)| \leqslant M |v_1 - v_2|,$$

где M — некоторая постоянная, то, каково бы ни было начальное условие

$$y(x_0) = y_0, \tag{3}$$

существуют окрестность $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и определенная в ней единственная функция $y = y(x)$, которая удовлетворяет уравнению

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

и начальному условию (3).

◀ Уравнение (4) совместно с условием (3) можно записать в виде одного соотношения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{5}$$

Обозначая через $A(y)$ правую часть последнего равенства, находим, что $A\colon C(V(x_0); \mathbb{R}) \to C(V(x_0); \mathbb{R})$ есть отображение множества определенных в окрестности $V(x_0)$ точки x_0 непрерывных функций в себя. Рассматривая $C(\overline{V}(x_0); \mathbb{R})$ как метрическое пространство с равномерной метрикой (см. формулу (6) из § 1), находим, что

$$d(Ay_1, Ay_2) = \max_{x\in\overline{V}(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in\overline{V}(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} M\,|y_1(t) - y(t)|\,dt \right| \leqslant M\,|x - x_0|\,d(y_1, y_2).$$

Если считать, что $|x - x_0| \leqslant \frac{1}{2M}$, то на соответствующем отрезке I оказывается выполненным неравенство

$$d(Ay_1, Ay_2) \leqslant \frac{1}{2} d(y_1, y_2),$$

где $d(y_1, y_2) = \max\limits_{x\in I} |y_1(x) - y_2(x)|$. Таким образом, мы имеем сжимающее отображение

$$A\colon C(I; \mathbb{R}) \to C(I; \mathbb{R})$$

полного (см. пример 4 из § 5) метрического пространства $(C(I; \mathbb{R}); d)$ в себя, которое по принципу сжимающих отображений должно иметь и притом единственную неподвижную точку $y = Ay$. Но это означает, что найденная в $C(I; \mathbb{R})$ функция и будет той единственной функцией, которая определена в $I \ni x_0$ и удовлетворяет уравнению (5). ▶

Пример 2. В качестве иллюстрации к сказанному будем искать, исходя из принципа сжимающих отображений, решение уже знакомого нам уравнения

$$y' = y$$

при начальном условии (3).

В данном случае

$$Ay = y_0 + \int_{x_0}^{x} y(t)\,dt$$

и принцип применим по крайней мере при $|x - x_0| \leqslant q < 1$.

Исходя из начального приближения $y(x) \equiv 0$, построим последовательность $0, y_1 = A(0), \ldots, y_{n+1}(t) = A(y_n(t)), \ldots$ приближений:

$$y_1(t) \equiv y_0,$$

$$y_2(t) = y_0(1 + (x - x_0)),$$

$$y_3(t) = y_0\left(1 + (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\right),$$

. . . .

$$y_{n+1}(t) = y_0\left(1 + (x - x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n\right)$$

. . . .

из которой уже видно, что

$$y(x) = y_0 e^{x - x_0}.$$

Принцип неподвижной точки, сформулированный в приведенной выше теореме, носит также название *принципа сжимающих отображений*. Он возник как обобщение рассмотренного в примере 1 доказательства Пикара теоремы существования решения дифференциального уравнения (4). В полной общности принцип сжимающих отображений был сформулирован Банахом.

Пример 3. *Метод Ньютона отыскания корня уравнения* $f(x) = 0$. Пусть выпуклая с положительной производной на отрезке $[\alpha, \beta]$ вещественнозначная функция принимает на концах отрезка значения разных знаков. Тогда на этом отрезке она имеет и притом единственную точку a, в которой $f(a) = 0$. Наряду с простейшим общим методом поиска точки a путем деления отрезка пополам существуют разные более тонкие и быстрые методы отыскания точки a, использующие специфику функции f. Так, в нашем случае можно воспользоваться следующим методом, предложенным Ньютоном и называемым *методом Ньютона* или *методом касательных*. Возьмем произвольную точку $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и запишем уравнение $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ касательной к графику нашей функции в точке $(x_0, f(x_0))$. Найдем точку $x_1 = x_0 - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f(x_0)$ пересечения касательной с осью абсцисс (рис. 68). Примем x_1 в качестве первого приближения корня a и повторим операцию, заменяя x_0 на x_1. Так мы получим последовательность

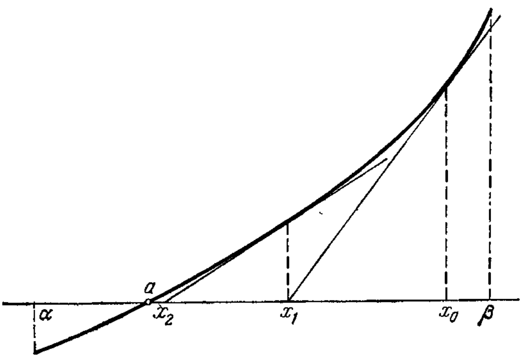

Рис. 68

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} \cdot f(x_n) \tag{6}$$

точек, которые, как можно проверить, в нашем случае будут монотонно стремиться к a.

В частности, если $f(x) = x^k - a$, т. е. когда мы ищем $\sqrt[k]{a}$, где $a > 0$, рекуррентное соотношение (6) имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}},$$

что при $k = 2$ преобразуется к знакомому выражению

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Способ (6) образования последовательности $\{x_n\}$ называют *методом Ньютона.*

Если вместо последовательности (6) рассматривается последовательность, получаемая рекуррентным соотношением

$$x_{n+1}=x_n-[f'(x_0)]^{-1}\cdot f(x_n), \tag{7}$$

то говорят о *модифицированном методе Ньютона.* Модификация состоит в том, что производная вычислена раз и навсегда в точке x_0.

Рассмотрим отображение

$$x\longmapsto A(x)=x-[f'(x_0)]^{-1}f(x). \tag{8}$$

По теореме Лагранжа

$$|A(x_2)-A(x_1)|=|[f'(x_0)]^{-1}\cdot f'(\xi)|\cdot|x_2-x_1|,$$

где ξ — некоторая точка, лежащая между x_1 и x_2.

Таким образом, если на некотором отрезке $I\subset\mathbb{R}$ выполнены условия

$$A(I)\subset I \tag{9}$$

и

$$|[f'(x_0)]^{-1}\cdot f'(x)|\leqslant q<1, \tag{10}$$

то задаваемое соотношением (8) отображение $A\colon I\to I$ окажется сжимающим отображением этого отрезка. Тогда по общему принципу оно имеет на отрезке единственную неподвижную точку a. Но, как видно из (8), условие $A(a)=a$ равносильно соотношению $f(a)=0$.

Значит, при выполнении условий (9) и (10), для любой функции f модифицированный метод Ньютона (7) на основании принципа сжимающих отображений приводит к искомому решению a уравнения $f(x)=0$.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что в принципе сжимающих отображений условие (1) нельзя заменить более слабым условием

$$d(f(x_1),\ f(x_2))<d(x_1,\ x_2).$$

2. a. Докажите, что если отображение $f\colon X\to X$ полного метрического пространства $(X;\ d)$ в себя таково, что некоторая его итерация $f^n\colon X\to X$ является сжимающим отображением, то f имеет и притом единственную неподвижную точку

b. Проверьте, что рассмотренное в примере 2 отображение $A\colon C(I;\ \mathbb{R})\to\to C(I;\ \mathbb{R})$ таково, что при любом отрезке $I\subset\mathbb{R}$ некоторая итерация A^n отображения A является сжимающим отображением.

c. Получите из b, что найденное в примере 2 локальное решение $y=y_0e^{x-x_0}$ на самом деле является решением исходного уравнения на всей числовой прямой.

3. a. Покажите, что в случае выпуклой с положительной производной на отрезке $[\alpha,\ \beta]$ функции, принимающей на концах отрезка значения разных знаков, метод Ньютона (6) действительно дает последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к той точке $a\in[\alpha,\ \beta]$, в которой $f(a)=0$.

b. Оцените скорость сходимости последовательности (6) к точке a.

*ГЛАВА X

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ С БОЛЕЕ ОБЩЕЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

§ 1. Линейное нормированное пространство

Дифференцирование — это отыскание наилучшего локального линейного приближения функции, поэтому любая сколь-нибудь общая теория дифференцирования должна опираться на элементарные представления, связанные с линейными функциями. Из курса алгебры читателю хорошо знакомо понятие *линейного пространства*, а также понятия линейной зависимости и независимости системы векторов, базиса и размерности линейного пространства, подпространства и т. д. В этом параграфе мы дадим представление о линейных пространствах с нормой или, как говорят, линейных *нормированных* пространствах, широко используемых в анализе. Начнем однако с примеров линейных пространств.

1. Некоторые примеры линейных пространств анализа.

Пример 1. Классическими примерами линейных пространств над полем действительных и комплексных чисел являются соответственно вещественное $\mathbb{R}^n$ и комплексное $\mathbb{C}^n$ арифметические пространства размерности n.

Пример 2. В анализе, наряду с указанными в примере 1 пространствами $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, встречается наиболее близкое к ним пространство l последовательностей $x=(x^1, \ldots, x^n, \ldots)$ действительных или комплексных чисел. Линейные операции в l, как и в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, осуществляются покоординатно. Особенностью в сравнении с $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ является то, что любая конечная подсистема счетной системы векторов $\{x_i=(0, \ldots, 0, x^i=1, 0, \ldots), i \in \mathbb{N}\}$ линейно независима. То есть l — бесконечномерное (в данном случае счетномерное) линейное пространство.

Совокупность $\overset{\circ}{l}$ финитных последовательностей (все члены которых, начиная с некоторого, равны нулю) является линейным подпространством пространства l, причем тоже бесконечномерным.

Пример 3. Пусть $F[a, b]$ — множество числовых (действительно- или комплекснозначных) функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Это множество является линейным пространством (над соответствующим числовым полем) по отношению к операциям сложения функций и умножения функции на число.

Совокупность функций вида

$$e_\tau(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [a, b] \text{ и } x \neq \tau, \\ 1, & \text{если } x \in [a, b] \text{ и } x = \tau \end{cases}$$

является континуальной системой линейно независимых векторов в $F[a, b]$.

Множество $C[a, b]$ непрерывных функций, очевидно, является подпространством построенного пространства $F[a, b]$.

Пример 4. Если X_1 и X_2 — два линейных пространства над одним и тем же полем, то в их прямом произведении $X_1 \times X_2$ естественным образом вводится структура линейного пространства, если линейные операции над элементами $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ выполнять покомпонентно.

Аналогично вводится структура линейного пространства в прямом произведении $X_1 \times \ldots \times X_n$ любого конечного набора линейных пространств. Это полный аналог пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

2. Норма в линейном пространстве. Теперь дадим основное

Определение 1. Пусть X — линейное пространство над полем действительных или комплексных чисел.

Функция $\| \ \|: X \to \mathbb{R}$, ставящая каждому вектору $x \in X$ в соответствие действительное число $\|x\|$, называется *нормой* в линейном пространстве X, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (невырожденность);

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (однородность);

c) $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$ (неравенство треугольника).

Определение 2. Линейное пространство с определенной на нем нормой называется *линейным нормированным пространством*.

Определение 3. Значение нормы на векторе называется *нормой* этого *вектора*.

Норма вектора всегда неотрицательна (и, как видно из a), равна нулю только для нулевого вектора).

◀ Действительно, для любого $x \in X$, в силу c) и с учетом a) и b) получаем

$$0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leqslant \|x\| + \|-x\| = \|x\| + |-1| \|x\| = 2\|x\|. \ ▶$$

Из c) и принципа индукции следует общее неравенство

$$\|x_1 + \ldots + x_n\| \leqslant \|x_1\| + \ldots + \|x_n\|, \tag{1}$$

а с учетом b) из c) легко вывести также полезное неравенство

$$|\|x_1\| - \|x_2\|| \leqslant \|x_1 - x_2\|. \tag{2}$$

Любое линейное нормированное пространство имеет естественную метрику

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|. \tag{3}$$

То, что так определенная функция $d(x_1, x_2)$ удовлетворяет аксиомам метрики, непосредственно следует из свойств нормы.

Благодаря наличию в X линейной структуры метрика d в X обладает двумя дополнительными специфическими свойствами:

$$d(x_1+x, x_2+x) = \|(x_1+x)-(x_2+x)\| = \|x_1-x_2\| = d(x_1, x_2),$$

т. е. метрика инвариантна относительно переносов, и

$$d(\lambda x_1, \lambda x_2) = \|\lambda x_1 - \lambda x_2\| = \|\lambda(x_1-x_2)\| = |\lambda|\|x_1-x_2\| = |\lambda| d(x_1, x_2),$$

т. е. она однородна.

Определение 4. Если линейное нормированное пространство является полным как метрическое пространство относительно естественной метрики (3), то оно называется *полным нормированным пространством* или *банаховым пространством.*

Пример 5. Если для вектора $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ при $p \geqslant 1$ положить

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4}$$

то, как следует из неравенства Минковского, мы получим норму в $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathbb{R}^n$, наделенное этой нормой, будем обозначать символом $\mathbb{R}^n_p$.

Можно проверить, что

$$\|x\|_{p_2} \leqslant \|x\|_{p_1}, \text{ если } 1 \leqslant p_1 \leqslant p_2, \tag{5}$$

и что

$$\|x\|_p \to \max\{|x^1|, \ldots, |x^n|\} \tag{6}$$

при $p \to +\infty$. Таким образом, естественно положить

$$\|x\|_\infty := \max\{|x^1|, \ldots, |x^n|\}. \tag{7}$$

Тогда из (4) и (5) следует, что

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty \text{ при } p \geqslant 1. \tag{8}$$

Из этого неравенства, как, впрочем, и из самого определения (4) нормы $\|x\|_p$, видно, что $\mathbb{R}^n_p$ является полным нормированным пространством.

Пример 6. Предыдущий пример полезно обобщить следующим образом. Если $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ есть прямое произведение нормированных пространств, то в X можно ввести норму вектора

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, положив

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \geq 1, \tag{9}$$

где $\|x_i\|$ есть норма вектора $x_i \in X_i$ в пространстве X_i.

Естественно, неравенства (8) и в этом случае остаются в силе.

В дальнейшем, когда рассматривается прямое произведение нормированных пространств, всегда, если нет специальных оговорок, предполагается, что в нем норма определена в соответствии с формулой (9) (включая случай $p = +\infty$).

Пример 7. Пусть $p \geq 1$. Обозначим через l_p множество таких последовательностей $x = (x^1, \ldots, x^n, \ldots)$ действительных или комплексных чисел, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ сходится, и для $x \in l_p$ положим

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^n|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{10}$$

Используя неравенство Минковского, легко видеть, что l_p является линейным нормированным пространством относительно стандартных линейных операций и нормы (10). Это бесконечномерное пространство, по отношению к которому $\mathbb{R}^n_p$ является линейным подпространством конечной размерности.

Для нормы (10) справедливы все неравенства (8), кроме последнего. Нетрудно проверить, что l_p является банаховым пространством.

Пример 8. В линейном пространстве $C[a, b]$ числовых функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, чаще всего рассматривается следующая норма:

$$\|f\| := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|. \tag{11}$$

Проверку аксиом нормы мы оставляем читателю. Заметим, что эта норма порождает уже знакомую нам метрику (см. гл. IX, § 5) на $C[a, b]$ и нам известно, что возникающее при этом метрическое пространство полно. Таким образом, линейное пространство $C[a, b]$ с нормой (11) является банаховым.

Пример 9. В $C[a, b]$ можно ввести и иную норму

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f|^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \geq 1, \tag{12}$$

которая сводится к (11) при $p \to +\infty$.

Легко видеть (см., например, гл. IX, § 5), что при $1 \leq p < +\infty$ пространство $C[a, b]$ с нормой (12) не является полным.

3. Скалярное произведение в векторном пространстве. Важный класс нормированных пространств составляют пространства со скалярным произведением. Они являются прямым обобщением евклидовых пространств.

Напомним

Определение 5. Говорят, что в линейном (над полем комплексных чисел) пространстве X задана *эрмитова форма*, если задано отображение $\langle\ ,\ \rangle\colon X\times X\to\mathbb{C}$, обладающее свойствами:

a) $\langle x_1, x_2\rangle=\overline{\langle x_2, x_1\rangle}$,

b) $\langle \lambda x_1, x_2\rangle=\lambda\langle x_1, x_2\rangle$,

c) $\langle x_1+x_2, x_3\rangle=\langle x_1, x_3\rangle+\langle x_2, x_3\rangle$,

где x_1, x_2, x_3 — векторы из X, а $\lambda\in\mathbb{C}$.

Из a), b), c) следует, например, что

$$\langle x_1, \lambda x_2\rangle=\overline{\langle \lambda x_2, x_1\rangle}=\overline{\lambda\langle x_2, x_1\rangle}=\bar\lambda\,\overline{\langle x_2, x_1\rangle}=\bar\lambda\langle x_1, x_2\rangle;$$
$$\langle x_1, x_2+x_3\rangle=\overline{\langle x_2+x_3, x_1\rangle}=\overline{\langle x_2, x_1\rangle}+\overline{\langle x_3, x_1\rangle}=\langle x_1, x_2\rangle+\langle x_1, x_3\rangle;$$
$$\langle x, x\rangle=\overline{\langle x, x\rangle},\ \text{т. е. } \langle x, x\rangle\text{ — действительное число.}$$

Эрмитова форма называется *положительной*, если

d) $\langle x, x\rangle\geqslant 0$,

и *невырожденной*, если

e) $\langle x, x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$.

Если X — линейное пространство над полем вещественных чисел, то, разумеется, надо рассматривать вещественнозначную форму $\langle x_1, x_2\rangle$. В этом случае вместо a) можно записать просто $\langle x_1, x_2\rangle=\langle x_2, x_1\rangle$, что означает симметричность формы относительно векторов-аргументов x_1, x_2.

Примером такой формы может служить знакомое из аналитической геометрии скалярное произведение векторов трехмерного евклидова пространства. В связи с этой аналогией принято

Определение 6. Невырожденную положительную эрмитову форму в линейном пространстве называют *скалярным произведением* в этом пространстве.

Пример 10. В $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение векторов $x=(x^1, \ldots, x^n)$, $y=(y^1, \ldots, y^n)$ можно определить, положив

$$\langle x, y\rangle:=\sum_{i=1}^{n}x^iy^i, \tag{13}$$

а в $\mathbb{C}^n$ — положив

$$\langle x, y\rangle:=\sum_{i=1}^{n}x^i\overline{y^i}. \tag{14}$$

Пример 11. В l_2 скалярное произведение векторов x, y можно определить, полагая

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x^i \overline{y^i}.$$

Написанный здесь ряд сходится абсолютно, поскольку

$$2\sum_{i=1}^{\infty} |x^i\overline{y^i}| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |y^i|^2.$$

Пример 12. В $C[a, b]$ скалярное произведение можно определить формулой

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b (f\cdot \bar{g})(x)\,dx. \tag{15}$$

Из свойств интеграла легко следует, что все требования к скалярному произведению в этом случае выполнены.

Для скалярного произведения справедливо следующее важное *неравенство Коши — Буняковского*:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\cdot\langle y, y\rangle. \tag{16}$$

◀ Действительно, пусть $a=\langle x, x\rangle$, $b=\langle x, y\rangle$ и $c=\langle y, y\rangle$. По условию $a\geqslant 0$ и $c\geqslant 0$. Если $c>0$, то из

$$0\leqslant\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = a+\bar{b}\lambda+b\bar{\lambda}+c\lambda\bar{\lambda}$$

при $\lambda = -\frac{b}{c}$ получим

$$0\leqslant a-\frac{\bar{b}b}{c}-\frac{b\bar{b}}{c}+\frac{b\bar{b}}{c}$$

или

$$0\leqslant ac-b\bar{b}=ac-|b|^2,$$

что совпадает с (16).

Аналогично рассматривается случай $a>0$.

Если же $a=c=0$, то подставляя в (17) $\lambda=-b$, получим $0\leqslant -\bar{b}b-b\bar{b}=-2|b|^2$, т. е. $b=0$, и неравенство (16) опять справедливо. ▶

Линейное пространство со скалярным произведением обладает естественной нормой

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{18}$$

и метрикой

$$d(x, y) := \|x-y\|.$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, проверим, что если $\langle x, y\rangle$ — невырожденная положительная эрмитова форма, то формула (18) действительно определяет норму.

◀ В самом деле,

$$\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}=0 \Leftrightarrow x=0,$$

поскольку форма $\langle x, y\rangle$ невырожденная.

Далее

$$\|\lambda x\|=\sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle}=\sqrt{\lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle}=|\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle}=|\lambda|\,\|x\|.$$

Проверим, наконец, неравенство треугольника

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

Нам, таким образом, следует показать, что

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle}\leqslant\sqrt{\langle x, x\rangle}+\sqrt{\langle y, y\rangle},$$

или после возведения в квадрат и упрощений, что

$$\langle x, y\rangle+\langle y, x\rangle\leqslant 2\sqrt{\langle x, x\rangle\cdot\langle y, y\rangle}.$$

Но

$$\langle x, y\rangle+\langle y, x\rangle=\langle x, y\rangle+\overline{\langle x, y\rangle}=2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle\leqslant 2|\langle x, y\rangle|,$$

и доказываемое неравенство теперь непосредственно следует из неравенства Коши — Буняковского (16). ▶

Отметим в заключение, что линейные пространства со скалярным произведением в конечномерном случае называют обычно *евклидовыми* или *эрмитовыми*, когда полем констант является $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ соответственно. Если же линейное нормированное пространство бесконечной размерности, то его называют *гильбертовым*, если оно полно, и *предгильбертовым*, если оно не полно по отношению к метрике, индуцированной естественной нормой в нем.

Задачи и упражнения

1. a Покажите, что если в линейном пространстве X задана метрика $d(x_1, x_2)$, трансляционно инвариантная и однородная, то X можно нормировать, положив $\|x\|=d(0, x)$.

b. Проверьте, что норма в линейном пространстве X является функцией, непрерывной по отношению к той топологии, которая индуцируется естественной метрикой (3).

c. Докажите, что если X — конечномерное линейное пространство, а $\|x\|$ и $\|x\|'$ — две нормы на X, то всегда можно найти положительные числа M, N такие, что для любого вектора $x\in X$ выполнено

$$M\|x\|\leqslant\|x\|'\leqslant N\|x\|. \tag{19}$$

d. На примере норм $\|x\|_1$ и $\|x\|_\infty$ в пространстве l убедитесь, что предыдущее неравенство в бесконечномерных пространствах, вообще говоря, не выполняется.

2. a. Докажите неравенство (5).

b. Проверьте соотношение (6).

c. Покажите, что при $p\to+\infty$ определенная формулой (12) величина $\|f\|_p$ стремится к величине $\|f\|$, задаваемой формулой (11).

3. a. Проверьте, что рассмотренное в примере 7 нормированное пространство l_p является полным.

b Покажите, что подпространство пространства l_p, состоящее из финитных (заканчивающихся нулями) последовательностей, не является банаховым пространством.

4. a. Проверьте, что соотношения (11), (12) задают норму в пространстве $C[a, b]$, и убедитесь в том, что при этом в одном случае получается полное, а в другом не полное нормированное пространство.

b. Задает ли формула (12) норму в линейном пространстве $\mathcal{R}[a, b]$ интегрируемых по Риману функций?

c. Какую факторизацию (отождествление) следует провести в $\mathcal{R}[a, b]$, чтобы задаваемая формулой (12) величина была нормой в полученном линейном пространстве?

5. a. Проверьте, что формулы (13)—(15) действительно задают скалярное произведение в соответствующих линейных пространствах.

b. Будет ли задаваемая формулой (15) форма скалярным произведением в пространстве $\mathcal{R}[a, b]$ интегрируемых по Риману функций?

c. Какие функции в $\mathcal{R}[a, b]$ следует отождествить, чтобы ответ на вопрос b был положительным в фактор-пространстве классов эквивалентности.

6. Используя неравенство Коши—Буняковского, найдите нижнюю грань значений произведения $\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int\limits_a^b \left(\frac{1}{f}\right)(x)\,dx\right)$ на множестве непрерывных вещественнозначных функций, не обращающихся в нуль на отрезке $[a, b]$.

§ 2. Линейные и полилинейные операторы

1. Определения и примеры. Начнем с того, что напомним следующее

Определение 1. Если X и Y — линейные пространства над одним и тем же полем (в нашем случае полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то отображение $A\colon X\to Y$ называется *линейным*, если для любых векторов x, x_1, x_2 пространства X и любого числа λ поля коэффициентов имеют место равенства

$$A(x_1+x_2)=A(x_1)+A(x_2),$$
$$A(\lambda x)=\lambda A(x).$$

Для линейного оператора $A\colon X\to Y$ вместо $A(x)$ часто пишут Ax.

Определение 2. Отображение $A\colon X_1\times\ldots\times X_n\to Y$ прямого произведения линейных пространств $X_1, \ldots, X_n$ в линейное пространство Y называется *полилинейным* (*n-линейным*), если это отображение $y=A(x_1, \ldots, x_n)$ линейно по каждой переменной при фиксированных значениях остальных переменных.

Множество n-линейных отображений $A\colon X_1\times\ldots\times X_n\to Y$ будет обозначаться символом $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

В частности, при $n=1$ получаем множество $\mathcal{L}(X; Y)$ линейных отображений из $X_1=X$ в Y.

При $n=2$ полилиниейное отображение называется ***билинейным***, при $n=3$ — *трилинейным* и т. д.

Не следует смешивать n-линейное отображение $A\in\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ и линейное отображение $A\in\mathcal{L}(X; Y)$ линейного пространства $X=X_1\times\ldots\times X_n$ (см. в этой связи примеры 9—11).

Если $Y=\mathbb{R}$ или $Y=\mathbb{C}$, то линейные и полилинейные отображения называют чаще линейными или соответственно *полилинейными функциями* (или *функционалами*, если отображаются пространства функций). Когда же Y — произвольное линейное пространство, линейное отображение $A\colon X\to Y$ чаще называют *линейным оператором*, действующим из пространства X в пространство Y.

Рассмотрим некоторые примеры линейных отображений.

Пример 1. Пусть $\overset{\circ}{l}$ — линейное пространство числовых финитных последовательностей. Оператор $A\colon \overset{\circ}{l}\to\overset{\circ}{l}$ определим следующим образом:

$$A((x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)) := (1\cdot x_1, 2x_2, \ldots, nx_n, 0, \ldots).$$

Пример 2. Функционал $A\colon C([a, b]; \mathbb{R})\to\mathbb{R}$ определим соотношением

$$A(f) := f(x_0),$$

где $f\in C([a, b]; \mathbb{R})$, а x_0 — фиксированная точка отрезка $[a, b]$.

Пример 3. Функционал $A\colon C([a, b]; \mathbb{R})\to\mathbb{R}$ определим соотношением

$$A(f) := \int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 4. Преобразование $A\colon C([a, b]; \mathbb{R})\to C([a, b]; \mathbb{R})$ определим формулой

$$A(f) := \int_a^x f(t)\,dt,$$

где x — точка, пробегающая отрезок $[a, b]$.

Все это, очевидно, линейные отображения.

Рассмотрим некоторые знакомые примеры полилинейных отображений.

Пример 5. Обычное произведение $(x_1, \ldots, x_n)\longmapsto x_1\cdot\ldots\cdot x_n$ n действительных чисел является типичным примером n-линейной функции $A\in\mathcal{L}(\underbrace{\mathbb{R}, \ldots, \mathbb{R}}_{n}; \mathbb{R})$.

Пример 6. Скалярное произведение в евклидовом векторном пространстве над полем $\mathbb{R}$ является билинейной функцией $(x_1, x_2)\overset{A}{\longmapsto}\langle x_1, x_2\rangle$.

Пример 7. Векторное произведение $(x_1, x_2)\overset{A}{\longmapsto}[x_1, x_2]$ векторов трехмерного евклидова пространства E^3 является билинейным оператором, т. е. $A\in\mathcal{L}(E^3, E^3; E^3)$

Пример 8. Если X — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$; $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в X; $x=x^ie_i$ — координатное представление вектора $x \in X$, то, полагая

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^n \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ x_n^1 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix},$$

получаем n-линейную функцию $A\colon X^n \to \mathbb{R}$.

В качестве полезного дополнения к приведенным примерам разберем еще устройство линейных отображений произведения линейных пространств в произведение линейных пространств.

Пример 9. Пусть $X = X_1 \times \ldots \times X_m$ — линейное пространство, являющееся прямым произведением линейных пространств $X_1, \ldots, X_m$, и пусть $A\colon X \to Y$ — линейное отображение X в линейное пространство Y. Представляя каждый вектор $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X$ в виде

$$x = (x_1, \ldots, x_m) =$$
$$= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x_m) \qquad (1)$$

и полагая для $x_i \in X_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$A_i(x_i) := A((0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)), \qquad (2)$$

мы замечаем, что $A_i\colon X_i \to Y$ суть линейные отображения и что

$$A(x) = A_1(x_1) + \ldots + A_m(x_m). \qquad (3)$$

Поскольку при любых линейных отображениях $A_i\colon X_i \to Y$ определяемое формулой (3) отображение $A\colon X = X_1 \times \ldots \times X_m \to Y$, очевидно, линейно, то мы показали, что формула (3) дает общий вид любого линейного отображения $A \in \mathcal{L}(X = X_1 \times \ldots \times X_m; Y)$.

Пример 10. Исходя из определения прямого произведения $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ линейных пространств $Y_1, \ldots, Y_n$ и определения линейного отображения $A\colon X \to Y$, легко видеть, что любое линейное отображение

$$A\colon X \to Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$$

имеет вид $x \longmapsto Ax = (A_1 x, \ldots, A_n x) = (y_1, \ldots, y_n) = y \in Y$, где $A_i\colon X \to Y_i$ — линейные отображения.

Пример 11. Объединяя примеры 9 н 10, заключаем, что любое линейное отображение

$$A\colon X_1 \times \ldots \times X_m = X \to Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$$

прямого произведения $X = X_1 \times \ldots \times X_m$ линейных пространств в другое прямое произведение $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ линейных пространств имеет вид

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1m} \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ A_{n1} & \ldots & A_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} = Ax, \qquad (4)$$

где $A_{ij}\colon X_j \to Y_i$ — линейные отображения.

В частности, если $X_1 = X_2 = \ldots = X_m = \mathbb{R}$, $Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n = \mathbb{R}$, то A_{ij}: $X_j \to Y_i$ суть линейные отображения $\mathbb{R} \ni x \longmapsto a_{ij}x \in \mathbb{R}$, каждое из которых задается одним числом a_{ij}. Таким образом, в этом случае соотношение (4) превращается в знакомую численную запись линейного отображения A: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

2. Норма оператора.

Определение 3. Пусть A: $X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ — полилинейный оператор, действующий из прямого произведения нормированных пространств $X_1, \ldots, X_n$ в нормированное пространство Y.

Величина

$$\|A\| := \sup_{\substack{x_1, \ldots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|A(x_1, \ldots, x_n)|_Y}{|x_1|_{X_1} \cdot \ldots \cdot |x_n|_{X_n}}, \tag{5}$$

где верхняя грань берется по всевозможным наборам $x_1, \ldots, x_n$ отличных от нуля векторов пространств $X_1, \ldots, X_n$, называется *нормой* полилинейного оператора A.

В правой части формулы (5) вместо знака $\|\cdot\|$ нормы вектора употреблено обозначение $|\cdot|$, рядом с которым стоит символ того нормированного пространства, которому вектор принадлежит. В дальнейшем мы будем придерживаться этого обозначения для нормы вектора и, если не возникает недоразумений, будем опускать символ пространства, подразумевая, что норма (модуль) вектора вычисляется всегда в том пространстве, которому вектор принадлежит. Мы хотим тем самым пока внести некоторое различие в обозначения нормы вектора и нормы линейного или полилинейного оператора, действующего на нормированных векторных пространствах.

Пользуясь свойствами нормы вектора и свойствами полилинейного оператора, формулу (5) можно переписать следующим образом:

$$\|A\| = \sup_{\substack{x_1, \ldots, x_n \\ x_i \neq 0}} \left| A\left(\frac{x_1}{|x_1|}, \ldots, \frac{x_n}{|x_n|}\right) \right| = \sup_{e_1, \ldots, e_n} |A(e_1, \ldots, e_n)|, \tag{6}$$

где последняя верхняя грань берется по всевозможным наборам $e_1, \ldots, e_n$ единичных векторов пространств $X_1, \ldots, X_n$ соответственно (т. е. $|e_i| = 1$, $i = 1, \ldots, n$).

В частности, для линейного оператора A: $X \to Y$ из (5) и (6) получаем

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|e|=1} |Ae|. \tag{7}$$

Из определения 3 нормы полилинейного оператора A следует, что если $\|A\| < \infty$, то при любых векторах $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, справедливо неравенство

$$|A(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \|A\| |x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|. \tag{8}$$

В частности, для линейного оператора получаем

$$|Ax| \leqslant \|A\| |x|. \tag{9}$$

Кроме того, из определения 3 следует, что если норма полилинейного оператора конечна, то она есть нижняя грань тех чисел M, для которых неравенство

$$|A(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant M |x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n| \tag{10}$$

выполнено при любых значениях $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 4. Полилинейный оператор $A: X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ называется *ограниченным*, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что при любых значениях $x_1, \ldots, x_n$ из пространств $X_1, \ldots, X_n$ соответственно справедливо неравенство (10).

Таким образом, ограниченными являются те и только те операторы, которые имеют конечную норму.

На основании соотношения (7) легко понять геометрический смысл нормы линейного оператора в знакомом случае $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. В этом случае единичная сфера пространства $\mathbb{R}^m$ переходит под действием преобразования A в некоторый эллипсоид в $\mathbb{R}^n$, центр которого совпадает с нулем в $\mathbb{R}^n$. Значит норма A в данном случае просто наибольшая из полуосей этого эллипсоида.

С другой стороны, норму линейного оператора можно трактовать также как верхнюю грань коэффициентов растяжения векторов при данном отображении, что видно из первого равенства в (7).

Нетрудно доказать, что при отображении конечномерных пространств норма полилинейного и, в частности, линейного оператора всегда конечна. В случае пространств бесконечной размерности это, вообще говоря, уже не так, что видно на первом из следующих примеров.

Подсчитаем нормы операторов, рассмотренных в примерах 1—8.

Пример 1'. Если считать, что l — подпространство нормированного пространства l_p, в котором вектор $e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots)$ имеет единичную норму, то, поскольку $Ae_n = ne_n$, ясно, что $\|A\| = \infty$.

Пример 2'. Если $|f| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \leqslant 1$, то $|Af| = |f(x_0)| \leqslant 1$, причем $|Af| = 1$, если $f(x_0) = 1$, значит, $\|A\| = 1$.

Заметим, что если на том же линейном пространстве $C([a, b]; \mathbb{R})$ ввести, например, интегральную норму

$$|f| = \int_a^b |f|(x)\,dx,$$

то результат вычисления $\|A\|$ может существенно измениться. Действительно, пусть $[a, b]=[0, 1]$, а $x_0=1$. Интегральная норма функции $f_n=x^n$ на отрезке $[0, 1]$, очевидно, равна $\frac{1}{n+1}$, в то время как $Af_n=Ax^n=x^n|_{x=1}=1$. Отсюда следует, что в этом случае $\|A\|=\infty$.

Всюду дальше, если не оговорено противное, пространство $C([a, b]; \mathbb{R})$ рассматривается с нормой, определяемой максимумом модуля функции на отрезке $[a, b]$.

Пример 3'. Если $|f|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant 1$, то

$$|Af| = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|(x)\,dx \leqslant \int_a^b 1\,dx = b-a.$$

Но при $f(x)\equiv 1$ получаем $|A1|=b-a$, поэтому $\|A\|=b-a$.

Пример 4'. Если $|f|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant 1$, то

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x |f|(t)\,dt \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}(x-a) = b-a.$$

Но при $f(t)\equiv 1$ получаем

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x 1\,dt = b-a,$$

поэтому и в данном примере $\|A\|=b-a$.

Пример 5'. Непосредственно из определения 3 в данном случае получаем, что $\|A\|=1$.

Пример 6'. В силу неравенства Коши — Буняковского

$$|\langle x_1, x_2\rangle| \leqslant |x_1|\cdot|x_2|,$$

причем, если $x_1=x_2$, то это неравенство переходит в равенство. Следовательно, $\|A\|=1$.

Пример 7'. Мы знаем, что

$$|[x_1, x_2]| = |x_1|\,|x_2|\sin\varphi,$$

где φ — угол между векторами x_1 и x_2, поэтому $\|A\|\leqslant 1$. В то же время, если векторы x_1, x_2 ортогональны, то $\sin\varphi=1$. Таким образом, $\|A\|=1$.

Пример 8'. Если считать, что векторы берутся в евклидовом пространстве размерности n, то можно заметить, что

$A(x_1, \ldots, x_n) = \det(x_1, \ldots, x_n)$ есть объем параллелепипеда, натянутого на векторы $x_1, \ldots, x_n$, и этот объем максимален, если векторы $x_1, \ldots, x_n$, сохранив их длины, сделать взаимно ортогональными.

Таким образом,

$$|\det(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant |x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|,$$

причем для ортогональных векторов имеет место равенство. Значит в рассматриваемом случае $\|A\| = 1$.

Оценим теперь нормы операторов, рассмотренных в примерах 9—11. Будем считать, что в прямом произведении $X = X_1 \times \ldots \times X_m$ нормированных пространств $X_1, \ldots, X_m$ норма вектора $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X$ введена в соответствии с принятым в § 1 (пример 6) соглашением.

Пример 9′. Задание линейного оператора

$$A\colon X_1 \times \ldots \times X_m = X \to Y,$$

как было показано, равносильно заданию m линейных операторов $A_i\colon X_i \to Y$, определенных соотношениями $A_i x_i = A((0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0))$, $i = 1, \ldots, m$. При этом имеет место формула (3), в силу которой

$$|Ax|_Y \leqslant \sum_{i=1}^{m} |A_i x_i|_Y \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|A_i\| |x_i|_{X_i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} \|A_i\|\right) |x|_X.$$

Таким образом, показано, что

$$\|A\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|A_i\|.$$

С другой стороны, поскольку

$$|A_i x_i| = |A((0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0))| \leqslant$$
$$\leqslant \|A\| |(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)|_X = \|A\| |x_i|_{X_i},$$

можно заключить, что при любом $i = 1, \ldots, m$ справедлива также оценка

$$\|A_i\| \leqslant \|A\|.$$

Пример 10′. С учетом введенной в $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ нормы в этом случае сразу получаем двусторонние оценки

$$\|A_i\| \leqslant \|A\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|A_i\|.$$

Пример 11′. Учитывая результаты примеров 9 и 10, можно заключить, что

$$\|A_{ij}\| \leqslant \|A\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \|A_{ij}\|.$$

3. Пространство непрерывных операторов. В дальнейшем нас будут интересовать не все линейные или полилинейные операторы, а только непрерывные. В этой связи полезно иметь в виду

Утверждение 1. *Для полилинейного оператора A: $X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$, действующего из произведения нормированных пространств $X_1, \ldots, X_n$ в нормированное пространство Y, следующие условия равносильны:*

a) *A имеет конечную норму,*

b) *A — ограниченный оператор,*

c) *A — непрерывный оператор,*

d) *A — оператор, непрерывный в точке* $(0, \ldots, 0) \in X_1 \times \ldots \times X_n$.

◀ Докажем замкнутую цепочку импликаций a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ a).

Ввиду (8), очевидно, a) $\Rightarrow$ b).

Проверим, что b) $\Rightarrow$ c), т. е. что из (10) следует непрерывность оператора A. Действительно, учитывая полилинейность A, можем записать, что

$$\begin{aligned}
&A(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n) - A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\
&\qquad = A(h_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, h_n) + \\
&\qquad + A(h_1, h_2, x_3, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-2}, h_{n-1}, h_n) + \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + A(h_1, \ldots, h_n).
\end{aligned}$$

Теперь в силу (10) получаем оценку

$$\begin{aligned}
&|A(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n) - A(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant \\
&\qquad \leqslant M(|h_1||x_2|\cdot\ldots\cdot|x_n| + \ldots + |x_1|\cdot|x_2|\cdot\ldots\cdot|x_{n-1}||h_n| + \\
&\qquad + |h_1||h_2||x_3|\cdot\ldots\cdot|x_n| + \ldots + |x_1||x_2|\cdot\ldots\cdot|x_{n-1}||h_n| + \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + |h_1|\cdot\ldots\cdot|h_n|),
\end{aligned}$$

из которой, очевидно, следует непрерывность A в любой точке $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$.

В частности, если $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$, то из c) получаем d).

Осталось показать, что d) $\Rightarrow$ a).

По $\varepsilon > 0$ найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при $\max\{|x_1|, \ldots \ldots, |x_n|\} < \delta$ иметь $|A(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon$.

Тогда для любого набора $e_1, \ldots, e_n$ единичных векторов получаем

$$|A(e_1, \ldots, e_n)| = \frac{1}{\delta^n}|A(\delta e_1, \ldots, \delta e_n)| < \frac{\varepsilon}{\delta^n},$$

т. е. $\|A\| < \frac{\varepsilon}{\delta^n} < \infty$. ►

Выше (пример 1) мы видели, что не всякий линейный оператор имеет конечную норму, т. е. он не всегда непрерывен. Мы отмечали также, что нарушение непрерывности линейного оператора может произойти только в случае, когда он определен на пространстве бесконечной размерности.

Начиная с этого места, символом $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ будет обозначаться множество полилинейных непрерывных операторов, действующих из прямого произведения линейных нормированных пространств $X_1, \ldots, X_n$ в линейное нормированное пространство Y.

В частности, $\mathcal{L}(X; Y)$ есть множество всех линейных непрерывных операторов из X в Y.

В множестве $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ вводится естественная структура линейного пространства:

$$(A+B)(x_1, \ldots, x_n) := A(x_1, \ldots, x_n) + B(x_1, \ldots, x_n)$$

и

$$(\lambda A)(x_1, \ldots, x_n) := \lambda A(x_1, \ldots, x_n).$$

Очевидно, если $A, B \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, то $(A+B) \in \mathcal{L}(X_1, \ldots$ $\ldots, X_n; Y)$ и $(\lambda A) \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

Таким образом, $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ можно рассматривать как линейное пространство.

Утверждение 2. *Норма полилинейного оператора является нормой в линейном пространстве $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ непрерывных полилинейных операторов.*

◄ Прежде всего отметим, что в силу утверждения 1 для любого оператора $A \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ определено неотрицательное число $\|A\| < \infty$.

Неравенство (8) показывает, что

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Далее, по определению нормы полилинейного оператора

$$\|\lambda A\| = \sup_{\substack{x_1, \ldots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|(\lambda A)(x_1, \ldots, x_n)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} =$$

$$= \sup_{\substack{x_1, \ldots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|\lambda|\,|A(x_1, \ldots, x_n)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} = |\lambda|\,\|A\|.$$

Наконец, если A и B — элементы пространства $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, то

$$\|A+B\| = \sup_{\substack{x_1, \ldots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|(A+B)(x_1, \ldots, x_n)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} =$$

$$= \sup_{\substack{x_1, \ldots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|A(x_1, \ldots, x_n) + B(x_1, \ldots, x_n)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{x_1, \ldots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|A(x_1, \ldots, x_n)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} + \sup_{\substack{x_1, \ldots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|B(x_1, \ldots, x_n)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} = \|A\| + \|B\|. \blacktriangleright$$

Теперь, употребляя символ $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, мы будем иметь в виду линейное *пространство непрерывных n-линейных операторов,* нормированное указанной *операторной нормой.* В частности, $\mathcal{L}(X, Y)$ — нормированное пространство линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y.

Сделаем к утверждению 2 следующее полезное

Дополнение. *Если X, Y, Z — нормированные пространства и $A \in \mathcal{L}(X; Y)$, а $B \in \mathcal{L}(Y; Z)$, то*

$$\|B \circ A\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|.$$

◀ В самом деле,

$$\|B \circ A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(B \circ A)x|}{|x|} \leqslant \sup_{x \neq 0} \frac{\|B\| \, |Ax|}{|x|} =$$

$$= \|B\| \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \|B\| \cdot \|A\|. \blacktriangleright$$

Утверждение 3. *Если Y — полное нормированное пространство, то $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ также является полным нормированным пространством.*

◀ Проведем доказательство для пространства $\mathcal{L}(X; Y)$ линейных непрерывных операторов. Общий случай, как будет видно из приводимых ниже рассуждений, отличается только более громоздкой записью.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — фундаментальная последовательность в $\mathcal{L}(X; Y)$. Поскольку при любом $x \in X$

$$|A_m x - A_n x| = |(A_m - A_n)x| \leqslant \|A_m - A_n\| |x|,$$

то ясно, что при любом $x \in X$ последовательность $A_1x, A_2x, \ldots, A_nx, \ldots$ фундаментальна в Y. Ввиду полноты Y она имеет предел в Y, который мы обозначим через Ax.

Итак

$$Ax := \lim_{n \to \infty} A_n x.$$

Покажем, что $A: X \to Y$ — линейный непрерывный оператор.

Линейность A следует из того, что

$$\lim_{n\to\infty} A_n(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)=\lim_{n\to\infty}(\lambda_1 A_n x_1+\lambda_2 A_n x_2)=$$
$$=\lambda_1\lim_{n\to\infty}A_n x_1+\lambda_2\lim_{n\to\infty}A_n x_2.$$

Далее, при любом фиксированном $\varepsilon>0$ и достаточно больших значениях $m, n\in\mathbb{N}$, выполнено $\|A_m-A_n\|<\varepsilon$, поэтому

$$|A_m x-A_n x|\leqslant\varepsilon|x|$$

на любом векторе $x\in X$. Устремляя в последнем неравенстве m к бесконечности и пользуясь непрерывностью нормы вектора, получаем

$$|Ax-A_n x|\leqslant\varepsilon|x|.$$

Таким образом, $\|A-A_n\|\leqslant\varepsilon$, и поскольку $A=A_n+(A-A_n)$, заключаем, что

$$\|A\|\leqslant\|A_n\|+\varepsilon.$$

Следовательно, мы показали, что $A\in\mathcal{L}(X;Y)$ и $\|A-A_n\|\to 0$ при $n\to\infty$, т. е. $A=\lim_{n\to\infty}A_n$ в смысле нормы пространства $\mathcal{L}(X;Y)$. ▶

В заключение остановимся на одном специальном замечании, относящемся к пространству полилинейных операторов, которое нам потребуется при рассмотрении дифференциалов высшего порядка.

Утверждение 4. *Между пространствами*

$$\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;\ \mathcal{L}(X_{m+1},\ldots,X_n;Y))\ \text{и}\ \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;Y)$$

при любом $m\in\{1,\ldots,n\}$ существует биекция, сохраняющая линейную структуру и норму.

◀ Предъявим этот изоморфизм.

Пусть $\mathfrak{A}\in\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;\ \mathcal{L}(X_{m+1},\ldots,X_n;Y))$, т. е. $\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_m)\in\mathcal{L}(X_{m+1},\ldots,X_n;Y)$.

Положим

$$A(x_1,\ldots,x_n):=\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_m)(x_{m+1},\ldots,x_n). \tag{11}$$

Тогда

$$\|\mathfrak{A}\|=\sup_{\substack{x_1,\ldots,x_m\\ x_i\neq 0}}\frac{\|\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_m)\|}{|x_1|\cdot\ldots\cdot|x_m|}=$$

$$=\sup_{\substack{x_1,\ldots,x_m\\ x_i\neq 0}}\frac{\displaystyle\sup_{\substack{x_{m+1},\ldots,x_n\\ x_j\neq 0}}\frac{|\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_m)(x_{m+1},\ldots,x_n)|}{|x_{m+1}|\cdot\ldots\cdot|x_n|}}{|x_1|\cdot\ldots\cdot|x_m|}=$$

$$=\sup_{\substack{x_1,\ldots,x_n\\ x_k\neq 0}}\frac{|A(x_1,\ldots,x_n)|}{|x_1|\cdot\ldots\cdot|x_n|}=\|A\|.$$

Проверку того, что соотношение (11) задает изоморфизм рассматриваемых линейных пространств, мы оставляем читателю. ▶

Применяя n раз утверждение 4, в частности, получаем, что пространство $\mathscr{L}(X_1; \mathscr{L}(X_2; \ldots; \mathscr{L}(X_n; Y))\ldots)$ изоморфно пространству $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ n-линейных операторов.

Задачи и упражнения

1. a. Докажите, что если $A: X \to Y$ — линейный оператор, действующий из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, и пространство X конечномерно, то A — непрерывный оператор.

b. Докажите для полилинейного оператора утверждение, аналогичное сформулированному в a.

2. Два линейных нормированных пространства называются *изоморфными*, если существует такой изоморфизм между ними, как линейными векторными пространствами, который вместе с ему обратным является непрерывным линейным оператором

a. Покажите, что линейные нормированные пространства одинаковой конечной размерности изоморфны.

b. Покажите, что для бесконечномерного случая утверждение a уже, вообще говоря, не имеет места.

c. В пространстве $C([a, b]; \mathbb{R})$ введите две нормы так, чтобы тождественное отображение $C([a, b]; \mathbb{R})$ на себя не было непрерывным отображением полученных нормированных пространств.

3. Покажите, что если полилинейный оператор непрерывен в некоторой точке, то он непрерывен всюду

4. Пусть $A: E^n \to E^n$ — линейное преобразование евклидова n-мерного пространства, $A^*: E^n \to E^n$ — сопряженное к нему преобразование

Покажите, что:

a. Все собственные значения оператора $A \cdot A^*: E^n \to E^n$ неотрицательны

b. Если $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — собственные значения оператора $A \cdot A^*$, то $\|A\| = \sqrt{\lambda_n}$.

c. Если оператор A имеет обратный $A^{-1}: E^n \to E^n$, то $\|A^{-1}\| = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$.

d. Если (a_j^i) — матрица преобразования $A: E^n \to E^n$ в некотором базисе, то справедливы оценки

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_j^i)^2} \leqslant \|A\| \leqslant \sqrt{\sum_{i, j=1}^{n} (a_j^i)^2} \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|.$$

5. Пусть $\mathbb{P}[x]$ — линейное пространство многочленов от переменной x с вещественными коэффициентами. Норму вектора $P \in \mathbb{P}[x]$ определим формулой

$$\|P\| = \sqrt{\int_0^1 P^2(x)\,dx}.$$

a. Ограничен ли в полученном пространстве оператор $D: \mathbb{P}[x] \to \mathbb{P}[x]$ дифференцирования $D(P(x)) := P'(x)$?

b. Найдите норму оператора $F: \mathbb{P}[x] \to \mathbb{P}[x]$ умножения на x $(F(P(x)) := x \cdot P(x))$

6. На примере операторов проектирования в $\mathbb{R}^2$ покажите, что неравенство $\|B \cdot A\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|$ может быть строгим.

§ 3. Дифференциал отображения

1. Отображение, дифференцируемое в точке.

Определение 1. Пусть X, Y — нормированные пространства. Отображение $f\colon E\to Y$ множества $E\subset X$ в Y называется *дифференцируемым в точке* $x\in E$, внутренней для E, если существует такое линейное непрерывное отображение $L(x)\colon X\to Y$, что

$$f(x+h)-f(x)=L(x)h+\alpha(x;\ h), \tag{1}$$

где $\alpha(x;\ h)=o(h)$ при $h\to 0$, $x+h\in E$ *).

Определение 2. Линейная относительно h функция $L(x)\in \mathscr{L}(X;\ Y)$, удовлетворяющая соотношению (1), называется *дифференциалом, касательным отображением* или *производной отображения* $f\colon E\to Y$ *в точке* x.

Как и прежде, мы будем обозначать $L(x)$ одним из символов $df(x)$, $Df(x)$ или $f'(x)$.

Мы видим, таким образом, что приведенное общее определение дифференцируемости отображения в точке почти дословно совпадает с уже знакомым нам из главы VIII, § 2 определением, где оно рассматривалось в случае $X=\mathbb{R}^m$, $Y=\mathbb{R}^n$. Поэтому без повторных пояснений мы позволим себе в дальнейшем употреблять такие введенные там понятия, как *приращение функции*, *приращение аргумента*, *касательное пространство в точке*, оставляя за ними соответствующие обозначения.

Проверим, однако, в общем виде следующее

Утверждение 1. *Если отображение $f\colon E\to Y$ дифференцируемо во внутренней точке x множества $E\subset X$, то его дифференциал $L(x)$ в этой точке определен однозначно.*

◀ Итак, проверим единственность дифференциала.

Пусть $L_1(x)$ и $L_2(x)$ — линейные отображения, удовлетворяющие соотношению (1), т. е.

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x)-L_1(x)h&=\alpha_1(x;\ h),\\ f(x+h)-f(x)-L_2(x)h&=\alpha_2(x;\ h), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha_i(x;\ h)=o(h)$ при $h\to 0$, $x+h\in E$, $i=1,\ 2$.

Тогда, полагая $L(x)=L_2(x)-L_1(x)$ и $\alpha(x;h)=\alpha_2(x;\ h)-\alpha_1(x;h)$, после вычитания второго из равенств (2) из первого, получим, что

$$L(x)h=\alpha(x;\ h).$$

Здесь $L(x)$ — линейное относительно h отображение, а $\alpha(x;\ h)=o(h)$ при $h\to 0$, $x+h\in E$. Взяв вспомогательный числовой параметр λ,

*) Запись «$\alpha(x;\ h)=o(h)$ при $h\to 0$, $x+h\in E$», разумеется, означает, что

$$\lim_{h\to 0,\ x+h\in E} |\alpha(x;\ h)|_Y\cdot|h|_X^{-1}=0.$$

можно теперь записать, что

$$|L(x)h| = \frac{|L(x)(\lambda h)|}{|\lambda|} = \frac{|\alpha(x;\ \lambda h)|}{|\lambda h|}|h| \to 0 \text{ при } \lambda \to 0.$$

Таким образом, $L(x)h = 0$ при любом $h \neq 0$ (напомним, что x — внутренняя точка E). Поскольку $L(x)0 = 0$, то мы показали, что при любом значении h имеет место равенство $L_1(x)h = L_2(x)h$. ▶

Если E — открытое подмножество в X, а f: $E \to Y$ — отображение, дифференцируемое в каждой точке $x \in E$, т. е. *дифференцируемое на* E, то в силу доказанной единственности дифференциала отображения в точке, на множестве E возникает функция $E \ni x \longmapsto f'(x) \in \mathscr{L}(X;\ Y)$, обозначаемая f': $E \to \mathscr{L}(X;\ Y)$, которую называют *производной от* f или *производным отображением* по отношению к исходному отображению f: $E \to Y$. Значение $f'(x)$ этой функции в индивидуальной точке $x \in E$ есть линейное непрерывное отображение $f'(x) \in \mathscr{L}(X;\ Y)$, являющееся дифференциалом или производной функции f в данной конкретной точке $x \in E$.

Отметим, что ввиду высказанного в определении 1 требования непрерывности линейного отображения $L(x)$ из равенства (1) следует, что отображение, дифференцируемое в точке, необходимо является непрерывным в этой точке.

Обратное, конечно, неверно, что мы уже видели на примере числовых функций.

Сделаем еще следующее важное

Замечание. Если условие дифференцируемости отображения f в некоторой точке a записать в виде

$$f(x) - f(a) = L(x)(x-a) + \alpha(a;\ x),$$

где $\alpha(a;\ x) = o(x-a)$ при $x \to a$, то становится ясно, что определение 1 на самом деле относится к отображениям f: $A \to B$ любых аффинных пространств $(A,\ X)$, $(B,\ Y)$, линейные пространства X и Y которых нормированы. Такие аффинные пространства, называемые *аффинными нормированными пространствами*, встречаются часто, поэтому сделанное замечание полезно иметь в виду при использовании дифференциального исчисления.

Все дальнейшее, если нет специальной оговорки, в равной степени относится как к линейным, так и к аффинным нормированным пространствам и лишь для упрощения записи мы используем символику векторных пространств.

2. Общие законы дифференцирования. Из определения 1 вытекают следующие общие свойства операции дифференцирования. В приводимых ниже формулировках X, Y, Z — нормированные пространства, а U и V — открытые множества в X и Y соответственно.

a. Линейность дифференцирования.

Если отображения f_i: $U \to Y$, $i = 1, 2$, *дифференцируемы в точке* $x \in U$, *то их линейная комбинация* $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$: $U \to Y$

также дифференцируема в точке x, причем

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(x) = \lambda_1 f_1'(x) + \lambda_2 f_2'(x).$$

Таким образом, дифференциал линейной комбиниции отображений есть соответствующая линейная комбинация дифференциалов этих отображений.

b. Дифференцирование композиции отображений.

Если отображение $f\colon U \to V$ дифференцируемо в точке $x \in U \subset X$, а отображение $g\colon V \to Z$ дифференцируемо в точке $f(x) = y \in V \subset Y$, то композиция $g \circ f$ этих отображений дифференцируема в точке x, причем

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Таким образом, дифференциал композиции равен композиции диффренциалов.

c. Дифференцирование обратного отображения.

Пусть $f\colon U \to Y$ — непрерывное в точке $x \in U \subset X$ отображение, имеющее обратное $f^{-1}\colon V \to X$, определенное в окрестности точки $y = f(x)$ и непрерывное в этой точке.

Если отображение f дифференцируемо в точке x и его касательное отображение $f'(x) \in \mathcal{L}(X; Y)$ в этой точке имеет непрерывное обратное $[f'(x)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, то отображение f^{-1} дифференцируемо в точке $y = f(x)$, причем

$$[f^{-1}]'(f(x)) = [f'(x)]^{-1}.$$

Таким образом, дифференциал обратного отображения есть линейное отображение, обратное к дифференциалу исходного отображения в соответствующей точке.

Доказательства утверждений a, b, c мы опускаем, поскольку они аналогичны тем доказательствам, которые были даны в гл. VIII, § 3 для случая $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$.

3. Некоторые примеры.

Пример 1. Если $f\colon U \to Y$ — постоянное отображение окрестности $U = U(x) \subset X$ точки x, т. е. $f(U) = y_0 \in Y$, то $f'(x) = 0 \in \mathcal{L}(X; Y)$.

◀ Действительно, в этом случае, очевидно,

$$f(x+h) - f(x) - 0h = y_0 - y_0 - 0 = 0 = o(h). \ ▶$$

Пример 2. Если отображение $f\colon X \to Y$ есть линейное непрерывное отображение линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y, то $f'(x) = f \in \mathcal{L}(X, Y)$ в любой точке $x \in X$.

◀ Действительно,

$$f(x+h) - f(x) - fh = fx + fh - fx - fh = 0. \ ▶$$

Заметим, что на самом-то деле здесь $f'(x) \in \mathscr{L}(TX_x;\ TY_{f(x)})$, и h — вектор касательного пространства TX_x. Но в линейном пространстве определен перенос вектора в любую точку $x \in X$, что позволяет нам отождествить касательное пространство TX_x с самим линейным пространством X. (Аналогично в случае аффинного пространства (A, X) пространство TA_a векторов, «приложенных» к точке $a \in A$, можно отождествить с векторным пространством X данного аффинного пространства.) Следовательно, выбрав базис в X, его можно разнести по всем касательным пространствам TX_x. Это означает, что если, например, $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$ и отображение $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\ \mathbb{R}^n)$ задается матрицей (a_i^j), то в любой точке $x \in \mathbb{R}^m$ касательное к нему отображение $f'(x)$: $T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^n_{f(x)}$ также будет задаваться той же матрицей

В частности, для линейного отображения $x \overset{f}{\longmapsto} ax = y$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ при $x \in \mathbb{R}$ и $h \in T\mathbb{R}_x \sim \mathbb{R}$ получаем соответствующее отображение $T\mathbb{R}_x \ni h \overset{f'}{\longmapsto} ah \in T\mathbb{R}_{f(x)}$.

С учетом сделанных оговорок результат примера 2 можно условно сформулировать так: отображение f': $X \to Y$, производное от линейного отображения f: $X \to Y$ линейных нормированных пространств, постоянно, причем в любой точке $x \in X$ $f'(x) = f$.

Пример 3. Из правила дифференцирования композиции отображений и результата примера 2 можно заключить, что если f: $U \to Y$ — отображение окрестности $U = U(x) \subset X$ точки $x \in X$, дифференцируемое в x, а $A \in \mathscr{L}(Y;\ Z)$, то

$$(A \circ f)'(x) = A \circ f'(x).$$

Для числовых функций, когда $Y = Z = \mathbb{R}$, это не что иное, как знакомая возможность вынесения постоянного множителя за знак дифференцирования.

Пример 4. Пусть снова $U = U(x)$ — окрестность точки x нормированного пространства X, и пусть

$$f\colon U \to Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$$

— отображение U в прямое произведение нормированных пространств $Y_1, \ldots, Y_n$.

Задание такого отображения равносильно заданию n отображений f_i: $U \to Y_i$, $i = 1, \ldots, n$, связанных с f соотношением

$$x \longmapsto f(x) = y = (y_1, \ldots, y_n) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)),$$

справедливым в любой точке U.

Если теперь в формуле (1) учесть, что

$$\begin{gathered} f(x+h) - f(x) = (f_1(x+h) - f_1(x), \ldots, f_n(x+h) - f_n(x)), \\ L(x)h = (L_1(x)h, \ldots, L_n(x)h), \\ \alpha(x;\ h) = (\alpha_1(x;\ h), \ldots, \alpha_n(x;\ h)), \end{gathered}$$

то со ссылкой на результаты примеров 6 из § 1 и 10 из § 2 можно заключить, что рассматриваемое отображение f дифференцируемо в точке x тогда и только тогда, когда дифференцируемы все его компоненты $f_i\colon U \to Y_i$, $i=1, \ldots, n$, причем в случае дифференцируемости отображения f имеет место равенство

$$f'(x) = (f_1'(x), \ldots, f_n'(x)).$$

Пример 5. Пусть теперь $A \in \mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, т. е. A — непрерывный n-линейный оператор, действующий из произведения $X_1 \times \ldots \times X_n$ линейных нормированных пространств $X_1, \ldots, X_n$ в линейное нормированное пространство Y.

Докажем дифференцируемость отображения

$$A\colon X_1 \times \ldots \times X_n = X \to Y$$

и найдем его дифференциал.

◀ Используя полилинейность A, находим, что

$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= A(x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n) - A(x_1, \ldots, x_n) = \\ &= A(x_1, \ldots, x_n) + A(h_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n) + \\ &\quad + A(h_1, h_2, x_3, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-2}, h_{n-1}, h_n) + \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + A(h_1, \ldots, h_n) - A(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Поскольку норма в $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ удовлетворяет неравенствам

$$|x_i|_{X_i} \leqslant |x|_X \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|_{X_i},$$

а норма $\|A\|$ оператора A конечна и

$$|A(\xi_1, \ldots, \xi_n)| \leqslant \|A\| |\xi_1| \cdot \ldots \cdot |\xi_n|,$$

можно заключить, что

$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= A(x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n) - A(x_1, \ldots, x_n) = \\ &= A(h_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n) + \alpha(x; h), \end{aligned}$$

где $\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$.

Но оператор

$$L(x)h = A(h_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n)$$

есть линейный по $h = (h_1, \ldots, h_n)$ непрерывный (в силу непрерывности A) оператор.

Таким образом, установлено, что

$$\begin{aligned} A'(x)h &= A'(x_1, \ldots, x_n)(h_1, \ldots, h_n) = \\ &= A(h_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n) \end{aligned}$$

или, короче,

$$dA(x_1, \ldots, x_n) = A(dx_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-1}, dx_n). \blacktriangleright$$

В частности, если:

a) $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ — произведение n-числовых переменных, то

$$d(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) = dx_1 \, x_2 \, \ldots \cdot x_n + \ldots + x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \, dx_n;$$

b) $\langle x_1, x_2 \rangle$ — скалярное произведение в E^3, то

$$d\langle x_1, x_2 \rangle = \langle dx_1, x_2 \rangle + \langle x_1, dx_2 \rangle;$$

c) $[x_1, x_2]$ — векторное произведение в E^3, то

$$d[x_1, x_2] = [dx_1, x_2] + [x_1, dx_2];$$

d) (x_1, x_2, x_3) — смешанное произведение в E^3, то

$$d(x_1, x_2, x_3) = (dx_1, x_2, x_3) + (x_1, dx_2, x_3) + (x_1, x_2, dx_3);$$

e) $\det(x_1, \ldots, x_n)$ — определитель матрицы, составленной из координат n векторов $x_1, \ldots, x_n$ n-мерного линейного пространства X с фиксированным в X базисом, то

$$d(\det(x_1, \ldots, x_n)) = \det(dx_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \det(x_1, \ldots, x_{n-1}, dx_n).$$

Пример 6. Пусть U — подмножество $\mathscr{L}(X; Y)$, состоящее из тех линейных непрерывных операторов $A: X \to Y$, которые имеют непрерывные обратные операторы $A^{-1}: Y \to X$ (принадлежащие $\mathscr{L}(Y; X)$). Рассмотрим отображение

$$U \ni A \longmapsto A^{-1} \in \mathscr{L}(Y; X),$$

состоящее в том, что каждому оператору $A \in U$ ставится в соответствие обратный к нему оператор $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y; X)$.

Доказываемое ниже утверждение 2 позволяет ответить на вопрос о дифференцируемости этого отображения.

Утверждение 2. *Если X — полное пространство и $A \in U$, то при любом $h \in \mathscr{L}(X; Y)$ таком, что $\|h\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, оператор $A + h$ также принадлежит U и справедливо соотношение*

$$(A+h)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}hA^{-1} + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{3}$$

◀ Поскольку

$$(A+h)^{-1} = (A(E + A^{-1}h))^{-1} = (E + A^{-1}h)^{-1} A^{-1}, \tag{4}$$

то достаточно найти оператор $(E + A^{-1}h)^{-1}$, обратный к оператору $(E + A^{-1}h) \in \mathscr{L}(X; X)$, где E — тождественное (единичное) отображение e_X пространства X на себя.

Пусть $\Delta := -A^{-1}h$. Учитывая сделанное к утверждению 2 из § 2 дополнение, можно заметить, что $\|\Delta\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|h\|$, поэтому в силу сделанных относительно оператора h предположений можно считать, что $\|\Delta\| \leqslant q < 1$.

Проверим теперь, что

$$(E - \Delta)^{-1} = E + \Delta + \Delta^2 + \ldots + \Delta^n + \ldots, \tag{5}$$

где ряд, стоящий справа, есть ряд, составленный из линейных операторов $\Delta^n = (\Delta \circ \ldots \circ \Delta) \in \mathscr{L}(X; X)$.

Ввиду полноты X (в силу утверждения 3 из § 2) линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X; X)$ является полным. Тогда сходимость указанного ряда, составленного из векторов этого пространства, немедленно вытекает из того, что $\|\Delta^n\| \leqslant \|\Delta\|^n \leqslant q^n$, и того, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, если $|q| < 1$.

Непосредственная проверка

$$(E+\Delta+\Delta^2+\ldots)(E-\Delta) = \\ = (E+\Delta+\Delta^2+\ldots)-(\Delta+\Delta^2+\Delta^3+\ldots) = E$$

и

$$(E-\Delta)(E+\Delta+\Delta^2+\ldots) = \\ = (E+\Delta+\Delta^2+\ldots)-(\Delta+\Delta^2+\Delta^3+\ldots) = E$$

показывает, что мы действительно нашли $(E-\Delta)^{-1}$.

Стоит отметить, что свобода выполнения арифметических операций над рядами (перестановки членов!) в данном случае гарантируется абсолютной сходимостью (сходимостью по норме) рассматриваемых рядов.

Сопоставляя соотношения (4) и (5), заключаем, что при $\|h\| \leqslant \|A^{-1}\|^{-1}$

$$(A+h)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}hA^{-1} + (A^{-1}h)^2 A^{-1} - \ldots \\ \ldots + (-1)^n (A^{-1}h)^n A^{-1} + \ldots \tag{6}$$

Поскольку

$$\left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-A^{-1}h)^n A^{-1} \right\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \|A^{-1}h\|^n \|A^{-1}\| \leqslant \\ \leqslant \|A^{-1}\|^3 \|h\|^2 \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{\|A^{-1}\|^3}{1-q} \|h\|^2,$$

то из (6), в частности, следует равенство (3). ►

Возвращаясь теперь к примеру 6, можно сказать, что в случае полного пространства Y рассматриваемое отображение $A \overset{f}{\longmapsto} A^{-1}$ заведомо дифференцируемо, причем

$$df(A)h = d(A^{-1})h = -A^{-1}hA^{-1}.$$

В частности, это означает, что если A — квадратная невырожденная матрица и A^{-1} — обратная к ней матрица, то при возмущении матрицы A с помощью матрицы h с близкими к нулю элементами матрицу $(A+h)^{-1}$, обратную к возмущенной матрице $A+h$, можно в первом приближении находить по следующей формуле:

$$(A+h)^{-1} \approx A^{-1} - A^{-1}hA^{-1}.$$

Более точные формулы, очевидно, можно получить, исходя из равенства (6).

Пример 7. Пусть X — полное линейное нормированное пространство. Важное отображение

$$\exp\colon \mathscr{L}(X;\ X) \to \mathscr{L}(X;\ X)$$

определяется следующим образом:

$$\exp A := E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n + \ldots, \tag{7}$$

если $A \in \mathscr{L}(X;\ X)$.

Стоящий в (7) ряд сходится, так как $\mathscr{L}(X;\ X)$ — полное пространство и $\left\|\frac{1}{n!}A^n\right\| \leqslant \frac{\|A\|^n}{n!}$, а числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$ сходится.

Нетрудно проверить, что

$$\exp(A+h) = \exp A + L(A)h + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0, \tag{8}$$

где

$$L(A)h = h + \frac{1}{2!}(Ah + hA) + \frac{1}{3!}(A^2h + AhA + hA^2) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}(A^{n-1}h + A^{n-2}hA + \ldots + AhA^{n-2} + hA^{n-1}) + \ldots$$

и $\|L(A)\| \leqslant \exp\|A\| = e^{\|A\|}$, т. е. $L(A) \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(X;\ X);\ \mathscr{L}(X;\ X))$.

Таким образом, отображение $\mathscr{L}(X;\ X) \ni A \mapsto \exp A \in \mathscr{L}(X;\ X)$ дифференцируемо при любом значении A.

Заметим, что если операторы A и h коммутируют, т. е. $Ah = hA$, то, как видно из выражения для $L(A)h$, в этом случае $L(A)h = (\exp A)h$. В частности, для $X = \mathbb{R}$ или $X = \mathbb{C}$ вместо (8) вновь получаем

$$\exp(A+h) = \exp A + (\exp A)h + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{9}$$

Пример 8. Попробуем дать математическое описание мгновенной скорости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой o (волчок). Рассмотрим в точке o ортонормальный репер $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$, жестко связанный с телом. Ясно, что положение тела вполне характеризуется положением такого орторепера, а тройка $\{\dot{e}_1,\ \dot{e}_2,\ \dot{e}_3\}$ мгновенных скоростей движения векторов репера, очевидно, вполне характеризует мгновенную скорость вращения тела. Положение самого репера $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ в момент t можно задать ортогональной матрицей (α_i^j), $i,\ j = 1,\ 2,\ 3$, составленной из координат векторов $e_1,\ e_2,\ e_3$ относительно некоторого неподвижного ортонормированного репера пространства. Таким образом, движению волчка отвечает отображение $t \to O(t)$ из $\mathbb{R}$ (ось времени) в группу $SO(3)$ специальных ортогональных матриц третьего порядка. Следовательно, скорость вращения тела, которую мы договорились описывать тройкой $\{\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3\}$, задается матрицей $\dot{O}(t) =: (\omega_i^j)(t) = (\dot{\alpha}_i^j)(t)$ — производной от матрицы $O(t) = (\alpha_i^j)(t)$ по времени.

Поскольку $O(t)$ — ортогональная матрица, то в любой момент t выполнено соотношение

$$O(t)\,O^*(t) = E, \tag{10}$$

где $O^*(t)$ — транспонированная по отношению к $O(t)$ матрица, а E — единичная матрица.

Заметим, что произведение $A\cdot B$ матриц есть билинейная функция от A и B, а производная от транспонированной матрицы, очевидно, равна матрице, транспонированной по отношению к производной исходной матрицы. Дифференцируя равенство (10) с учетом сказанного, находим, что

$$\dot{O}(t)O^*(t) + O(t)\,\dot{O}^*(t) = 0$$

или

$$\dot{O}(t) = -O(t)\,\dot{O}^*(t)\,O(t), \tag{11}$$

поскольку $O^*(t)\,O(t) = E$.

В частности, если считать, что в момент t репер $\{e_1, e_2, e_3\}$ совпадает с репером пространства, то $O(t) = E$ и из (11) получается, что

$$\dot{O}(t) = -\dot{O}^*(t), \tag{12}$$

т. е. матрица $\dot{O}(t) =: \Omega(t) = (\omega_i^j)$ координат векторов $\{\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3\}$ в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ оказывается кососимметрической:

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мгновенная скорость волчка на самом-то деле характеризуется тремя независимыми параметрами, что в наших рассуждениях проистекало из соотношения (10) и что с физической точки зрения естественно, поскольку положение репера $\{e_1, e_2, e_3\}$, а значит, и самого тела описывается тремя независимыми параметрами (в механике это, например, углы Эйлера).

Если с каждым вектором $\boldsymbol{\omega} = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3$ пространства, приложенным к точке o, связать правое вращение пространства с угловой скоростью $|\boldsymbol{\omega}|$ относительно определяемой этим вектором оси, то из полученных результатов нетрудно заключить, что в каждый момент t тело имеет свою мгновенную ось вращения и скорость тела в данный момент может быть адекватно описана мгновенным вектором скорости вращения $\boldsymbol{\omega}(t)$ (см. задачу 5).

4. Частные производные отображения. Пусть $U = U(a)$ — окрестность точки $a \in X = X_1 \times \ldots \times X_m$ в прямом произведении нормированных пространств $X_1, \ldots, X_m$, и пусть $f\colon U \to Y$ — отображение U в нормированное пространство Y. В этом случае

$$y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_m), \tag{13}$$

и значит, фиксировав в (13) все переменные, кроме одной переменной x_i, положив $x_k = a_k$, $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus i$, мы получим функцию

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_m) =: f_i(x) =: \varphi_i(x_i), \tag{14}$$

определенную в некоторой окрестности U_i точки a_i пространства X_i.

Определение 3. Отображение $\varphi_i\colon U_i \to Y$ по отношению к исходному отображению (13) называют *частным отображением по переменной x_i в точке $a \in X$*.

Определение 4. Если отображение (14) дифференцируемо в точке $x_i = a$, то его производная в этой точке называется *частной производной* или *частным дифференциалом отображения f в точке a по переменной x_i*.

Эту частную производную обозначают обычно одним из символов

$$\partial_i f(a), \quad D_i f(a), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad f'_{x_i}(a).$$

В соответствии с этими определениями $D_i f(a) \in \mathscr{L}(X_i; Y)$, точнее, $D_i f(a) \in \mathscr{L}(TX_i(a_i); TY(f(a)))$.

Дифференциал $df(a)$ отображения (13) в точке a (если f дифференцируемо в точке a) часто в рассматриваемой ситуации называют *полным дифференциалом*, чтобы отличить его от частных дифференциалов по отдельным переменным.

Ранее все эти понятия нам уже встречались в случае вещественнозначных функций m вещественных переменных, поэтому мы не будем здесь подробно их обсуждать. Отметим только, что, повторив прежние рассуждения, с учетом разобранного в § 2 примера 9, легко доказать, что и в общем случае справедливо следующее

Утверждение 3. *Если отображение* (13) *дифференцируемо в точке $a = (a_1, \ldots, a_m) \in X_1 \times \ldots \times X_m = X$, то оно имеет в этой точке частные дифференциалы по каждой из переменных, причем полный дифференциал и частные дифференциалы связаны соотношением*

$$df(a)h = \partial_1 f(a)h_1 + \ldots + \partial_m f(a)h_m, \tag{15}$$

где $h = (h_1, \ldots, h_m) \in TX_1(a_1) \times \ldots \times TX_m(a_m) = TX(a)$.

На примере числовых функций мы уже уяснили себе, что наличие частных дифференциалов, вообще говоря, не гарантирует дифференцируемости функции (13).

Задачи и упражнения

1. a. Пусть $A \in \mathcal{L}(X; X)$ — *нильпотентный оператор*, т. е. существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $A^k = 0$. Покажите, что оператор $(E - A)$ в этом случае имеет обратный, причем $(E-A)^{-1} = E + A + \ldots + A^{k-1}$.

b. Пусть D: $\mathbb{P}[x] \to \mathbb{P}[x]$ — оператор дифференцирования на линейном пространстве $\mathbb{P}[x]$ полиномов Заметив, что D — нильпотентный оператор, запишите оператор $\exp(aD)$, где $a \in \mathbb{R}$, и покажите, что $\exp(aD)(P(x)) = P(x+a) =: T_a(P(x))$.

c. Запишите матрицы операторов D. $\mathbb{P}_n[x] \to \mathbb{P}_n[x]$ и T_a: $\mathbb{P}_n[x] \to \mathbb{P}_n[x]$ (из задачи b) в базисе $e_i = \dfrac{x^{n-i}}{(n-i)!}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, пространства $\mathbb{P}_n[x]$ вещественных полиномов степени n от одной переменной

2. a. Если $A, B \in \mathcal{L}(X; X)$ и $\exists B^{-1} \in \mathcal{L}(X; X)$, то $\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}(\exp A)B$.

b. Если $AB = BA$, то $\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$.

c. Проверьте, что $\exp 0 = E$ и что $\exp A$ всегда имеет обратный оператор, причем $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.

3. Пусть $A \in \mathcal{L}(X; X)$. Рассмотрим отображение φ_A: $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(X; X)$, определяемое соответствием $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \exp(tA) \in \mathcal{L}(X; X)$. Покажите, что:

a. Отображение φ_A непрерывно;

b. φ_A есть гомоморфизм $\mathbb{R}$ как аддитивной группы в мультипликативную группу обратимых операторов из $\mathcal{L}(X; X)$

4. Проверьте, что:

a. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$, то $\exp \lambda_1, \ldots, \exp \lambda_n$ суть собственные значения оператора $\exp A$.

b. $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$, где $\operatorname{tr} A$ — след оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$.

c Если $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, то $\det(\exp A) > 0$.

d. Если A^* — транспонированная по отношению к матрице $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$ матрица, а $\bar{A}$ — матрица из комплексно сопряженных (по отношению к элементам A) элементов, то $(\exp A)^* = \exp A^*$ и $\overline{\exp A} = \exp \bar{A}$.

e. Матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ не является матрицей вида $\exp A$, какова бы ни была квадратная матрица A второго порядка.

5. Напомним, что множество, наделенное одновременно структурой группы и структурой топологического пространства, называется *топологической* или *непрерывной группой*, если групповая операция непрерывна в указанной топологии; если же групповая операция в некотором смысле даже аналитична, то топологическая группа называется *группой Ли* *).

Алгебра Ли — это линейное пространство X с антикоммутативной билинейной операцией $[\ ,\ ]$: $X \times X \to X$, удовлетворяющей *тождеству Якоби*: для любых векторов $a, b, c \in X$ $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$. Группы и алгебры Ли тесно связаны между собой и важную роль в осуществлении этой связи играет отображение exp (см. задачу 1)

Примером алгебры Ли может служить ориентированное евклидово пространство E^3 с операцией векторного произведения его векторов. Обозначим пока эту алгебру Ли через LA_1

a Покажите, что вещественные кососимметрические матрицы порядка 3 образуют алгебру Ли (обозначим ее LA_2), если произведение матриц A и B определить соотношением $[A, B] = AB - BA$.

*) Точное определение группы Ли и соответствующую сноску см. в гл. XV, § 2, задача 8.

b. Покажите, что соответствие

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ \omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega$$

является изоморфизмом алгебр LA_2 и LA_1.

c. Проверьте, что если кососимметрическая матрица Ω и вектор ω соответствуют друг другу, как указано в b, то для любого вектора $r \in E^3$ имеет место равенство $\Omega r = [\omega, r]$, а для любой матрицы $P \in SO(3)$ — соответствие $P\Omega P^{-1} \leftrightarrow P\omega$.

d Проверьте, что если $\mathbb{R} \ni t \longmapsto O(t) \in SO(3)$ — гладкое отображение, то матрица $\Omega(t) = O^{-1}(t)\dot{O}(t)$ — кососимметрическая.

e. Покажите, что если $r(t)$ — радиус-вектор некоторой точки вращающегося волчка, а $\Omega(t)$ — найденная в d матрица $(O^{-1}\dot{O})(t)$, то $\dot{r}(t) = (\Omega r)(t)$

f Пусть r и ω — два приложенных к началу координат вектора пространства E^3 Пусть в E^3 выбран правый репер и пространство совершает правое вращение с угловой скоростью $|\omega|$ вокруг оси, определяемой вектором ω Покажите, что при этом $\dot{r}(t) = [\omega, r(t)]$

g. Сопоставьте результаты задач d, e, f и укажите вектор мгновенной скорости вращающегося волчка, о котором говорилось в примере 8.

h. Используя результат задачи c, проверьте, что вектор скорости ω не зависит от выбора неподвижного орторепера в E^3, т. е. не зависит от системы координат

6. Пусть $r = r(s) = (x^1(s), x^2(s), x^3(s))$ — параметрическое уравнение гладкой кривой в E^3, причем в качестве параметра взята длина дуги вдоль кривой (*натуральная параметризация кривой*).

a. Покажите, что вектор $e_1(s) = \frac{dr}{ds}(s)$, касательный к кривой в этом случае, имеет единичную длину.

b. Вектор $\frac{de_1}{ds}(s) = \frac{d^2r}{ds^2}(s)$ ортогонален вектору e_1. Пусть $e_2(s)$ — единичный вектор, сонаправленный с $\frac{de_1}{ds}(s)$. Коэффициент $k(s)$ в равенстве $\frac{de_1}{ds}(s) = k(s)\,e_2(s)$ называют *кривизной* кривой в соответствующей точке.

c. Построив вектор $e_3(s) = [e_1(s), e_2(s)]$, мы получаем в каждой точке нашей кривой репер $\{e_1, e_2, e_3\}(s)$, который называют *репером Френе* *) или *сопровождающим трехгранником* кривой. Проверьте следующие формулы Френе:

$$\begin{aligned}
\frac{de_1}{ds}(s) &= \quad k(s)\,e_2(s), \\
\frac{de_2}{ds}(s) &= -k(s)\,e_1(s) \qquad\qquad + \varkappa(s)\,e_3(s), \\
\frac{de_3}{ds}(s) &= -\varkappa(s)\,e_2(s).
\end{aligned}$$

Выясните геометрический смысл коэффициента $\varkappa(s)$, нзываемого *кручением* кривой в соответствующей точке

§ 4. Теорема о конечном приращении и некоторые примеры ее использования

1. Теорема о конечном приращении. Изучая числовые функции многих переменных, мы в гл. V, § 3, п. 1 доказали для них теорему о конечном приращении и подробно обсудили различные

*) Ж. Ф. Френе (1816—1900) — французский математик.

аспекты этой важной теоремы анализа. Здесь теорема о конечном приращении будет доказана в общем виде. Чтобы ее утверждение было для читателя очевидным, советуем восстановить в памяти обсуждения, проведенные в указанном пункте, а также обратить внимание на геометрический смысл нормы линейного оператора (см. § 2, п. 2).

Теорема 1 (о конечном приращении). *Пусть f: $U \to Y$ — непрерывное отображение открытого множества U нормированного пространства X в нормированное пространство Y.*

Если отрезок $[x, x+h] = \{\xi \in X \mid \xi = x + \theta h,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1\}$ полностью содержится в U и отображение f дифференцируемо во всех точках интервала $]x, x+h[= \{\xi \in X \mid \xi = x + \theta h,\ 0 < \theta < 1\}$, то справедлива следующая оценка:

$$|f(x+h) - f(x)|_Y \leqslant \sup_{\xi \in]x,\, x+h[} \| f'(\xi) \|_{\mathscr{L}(X;\, Y)} |h|_X. \tag{1}$$

◀ Заметим прежде всего, что если бы для любого отрезка $[\xi', \xi''] \subset [x, x+h]$ нам удалось проверить неравенство

$$|f(\xi'') - f(\xi')| \leqslant \sup_{\xi \in [\xi', \xi'']} \| f'(\xi) \| |\xi'' - \xi'|, \tag{2}$$

в котором верхняя грань берется уже по всему отрезку $[\xi', \xi'']$, то, пользуясь непрерывностью f и нормы, а также тем, что

$$\sup_{\xi \in [\xi', \xi'']} \| f'(\xi) \| \leqslant \sup_{\xi \in]x,\, x+h[} \| f'(\xi) \|,$$

мы в пределе при $\xi' \to x$ и $\xi'' \to x+h$ получили бы неравенство (1).

Итак, будем доказывать неравенство (2). Для сокращения записи введем обозначения $\Delta f := f(\xi'') - f(\xi')$, $|\Delta f| := |f(\xi'') - f(\xi')|$, $\Delta x := \xi'' - \xi'$, $|\Delta x| := |\xi'' - \xi'|$.

Воспользуемся следующим элементарным соотношением:

$$\frac{c}{\gamma} \leqslant \max\left\{\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right\}, \tag{3}$$

справедливым для неотрицательных чисел, удовлетворяющих условиям

$$c \leqslant a + b, \quad \gamma = \alpha + \beta. \tag{4}$$

При $c = \gamma = 1$ неравенство (3) очевидно, значит, в силу однородности, оно справедливо и в общем случае.

Предположим теперь, что (2) не имеет места, т. е.

$$\sup_{\xi \in [\xi', \xi'']} \| f'(\xi) \| < \frac{|\Delta f|}{|\Delta x|} = p. \tag{5}$$

Тогда отрезок $[\xi', \xi'']$, который мы позволим себе также обозначать символом Δx, разобьем пополам и получим два отрезка $\Delta' x$, $\Delta'' x$ и соответствующие им приращения функции $\Delta' f$, $\Delta'' f$.

В силу (3), (4) и (5)

$$p=\frac{|\Delta f|}{|\Delta x|}\leqslant \max\left\{\frac{|\Delta' f|}{|\Delta' x|}, \frac{|\Delta'' f|}{|\Delta'' x|}\right\}.$$

Значит, по крайней мере для одного из двух полученных отрезков, который мы обозначим через $\Delta_1 x$, будет выполнено неравенство

$$p\leqslant\frac{|\Delta_1 f|}{|\Delta_1 x|}, \tag{6}$$

где $\Delta_1 f$ — приращение функции на этом отрезке.

Разбивая отрезок $\Delta_1 x$ пополам и повторяя дальше всю процедуру, мы получим последовательность $\Delta x\supset\Delta_1 x\supset\Delta_2 x\supset\ldots$ вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю и для каждого из которых выполнено неравенство типа (6). Нам известно, что все эти отрезки должны иметь некоторую общую точку $\xi_0\in[\xi', \xi'']=\Delta x$.

Проведя дополнительно разбиение каждого из отрезков $\Delta_i x$, $i\in\mathbb{N}$, точкой ξ_0 и вновь используя неравенство (3), получим последовательность отрезков, одним концом которых является точка ξ_0, а другие концы образуют последовательность $\{\xi_n;\ n\in\mathbb{N}\}$, стремящуюся к ξ_0, причем для каждого $n\in\mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$p\leqslant\frac{|f(\xi_n)-f(\xi_0)|}{|\xi_n-\xi_0|}. \tag{7}$$

Но f дифференцируемо в $\xi_0\in[\xi', \xi'']$, т. е.

$$f(\xi_n)-f(\xi_0)=f'(\xi_0)(\xi_n-\xi_0)+o(\xi_n-\xi_0)$$

при $\xi_n\to\xi_0$. Значит, взяв $\varepsilon>0$ так, что $\|f'(\xi_0)\|+\varepsilon<p$, при достаточно больших значениях $n\in\mathbb{N}$ будем иметь

$$\frac{|f(\xi_n)-f(\xi_0)|}{|\xi_n-\xi_0|}\leqslant\|f'(\xi_0)\|+\varepsilon<p,$$

что несовместимо с неравенством (7). Таким образом, предположение (5) невозможно и теорема доказана. ▶

Теорема о конечном приращении имеет следующее часто технически полезное

Следствие. *Если $A\in\mathcal{L}(X; Y)$, т. е. A есть линейное непрерывное отображение нормированного пространства X в нормированное пространство Y, а $f\colon U\to Y$ — отображение, удовлетворяющее условиям теоремы о конечном приращении, то*

$$|f(x+h)-f(x)-Ah|\leqslant\sup_{\xi\in]x,\,x+h[}\|f'(\xi)-A\|\,|h|.$$

◀ Для доказательства достаточно применить теорему о конечном приращении к отображению

$$t\mapsto F(t)=f(x+th)-Ath$$

единичного отрезка $[0, 1]\subset\mathbb{R}$ в Y, ибо

$$F(1)-F(0)=f(x+h)-f(x)-Ah,$$
$$F'(\theta)=f'(x+\theta h)h-Ah \quad \text{при} \quad 0<\theta<1,$$
$$\|F'(\theta)\|\leqslant\|f'(x+\theta h)-A\||h|,$$
$$\sup_{0<\theta<1}\|F'(\theta)\|\leqslant\sup_{\xi\in]x,\,x+h[}\|f'(\xi)-A\||h|. \ ▶$$

Замечание. Как видно из доказательства теоремы 1, в ее условиях нет нужды требовать, чтобы f было дифференцируемо как отображение $f\colon U\to Y$; достаточно, чтобы ограничение f на отрезок $[x, x+h]$ было непрерывным отображением этого отрезка, дифференцируемым в точках интервала $]x, x+h[$.

Это замечание в равной степени относится и к доказанному только что следствию теоремы о конечном приращении.

2. Некоторые примеры применения теоремы о конечном приращении.

а. Непрерывно дифференцируемые отображения. Пусть

$$f\colon U\to Y \tag{8}$$

— отображение открытого подмножества U нормированного пространства X в нормированное пространство Y. Если f дифференцируемо в каждой точке $x\in U$, то, сопоставляя точке x отображение $f'(x)\in\mathscr{L}(X; Y)$, касательное к f в этой точке, мы получаем производное отображение

$$f'\colon U\to\mathscr{L}(X; Y). \tag{9}$$

Поскольку пространство $\mathscr{L}(X; Y)$ линейных непрерывных операторов из X в Y является, как нам известно, нормированным (нормой оператора) пространством, то можно говорить о непрерывности отображения (9).

Определение. В том случае, когда производное отображение (9) непрерывно в U, отображение (8), в полном соответствии с прежней терминологией, будем называть *непрерывно дифференцируемым.*

Множество непрерывно дифференцируемых отображений типа (8) будем по-прежнему обозначать символом $C^{(1)}(U; Y)$ или, короче, $C^{(1)}(U)$, если из контекста ясно куда идет отображение.

Итак, по определению

$$f\in C^{(1)}(U; Y)\Leftrightarrow f'\in C(U; \mathscr{L}(X; Y)).$$

Посмотрим, что означает непрерывная дифференцируемость отображения в различных конкретных случаях.

Пример 1. Рассмотрим знакомую ситуацию, когда $X=Y=\mathbb{R}$, и, таким образом $f\colon U\to\mathbb{R}$ есть вещественнозначная функция вещественного аргумента. Поскольку любое линейное отображение $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ сводится к умножению на некоторое число $a \in \mathbb{R}$, т. е. $Ah = ah$, причем, очевидно, $\|A\| = |a|$, то в любой точке $x \in U$ для любого вектора $h \in T\mathbb{R}_x \sim \mathbb{R}$ получаем, что $f'(x)h = a(x)h$, где $a(x)$ — числовая производная функции f в точке x.

Далее, так как

$$(f'(x+\delta) - f'(x))h = f'(x+\delta)h - f'(x)h =$$
$$= a(x+\delta)h - a(x)h = (a(x+\delta) - a(x))h, \qquad (10)$$

то

$$\|f'(x+\delta) - f'(x)\| = |a(x+\delta) - a(x)|$$

и, значит, непрерывная дифференцируемость отображения f в данном случае равносильна рассматривавшемуся ранее понятию непрерывно дифференцируемой числовой функции (класса $C^{(1)}(U; \mathbb{R})$).

Пример 2. Пусть на сей раз X есть прямое произведение $X_1 \times \ldots \times X_m$ нормированных пространств. Отображение (8) в этом случае есть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ от m переменных $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, m$, со значениями в пространстве Y.

Если отображение f дифференцируемо в точке $x \in U$, то его дифференциал $df(x)$ в этой точке есть элемент пространства $\mathcal{L}(X_1 \times \ldots \times X_m = X; Y)$.

Действие $df(x)$ на вектор $h = (h_1, \ldots, h_m)$, согласно формуле (15) из § 3, представляется в виде

$$df(x)h = \partial_1 f(x)h_1 + \ldots + \partial_m f(x)h_m,$$

где $\partial_i f(x)\colon X_i \to Y$, $i = 1, \ldots, m$, суть частные производные отображения f в рассматриваемой точке x.

Далее,

$$(df(x+\delta) - df(x))h = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f(x+\delta) - \partial_i f(x))h_i. \qquad (11)$$

Но в силу свойств стандартной нормы в прямом произведении нормированных пространств (см. § 1, п. 2, пример 6) и определения нормы оператора получаем, что

$$\|\partial_i f(x+\delta) - \partial_i f(x)\|_{\mathcal{L}(X_i; Y)} \leq \|df(x+\delta) - df(x)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m} \|\partial_i f(x+\delta) - \partial_i f(x)\|_{\mathcal{L}(X_i; Y)}. \qquad (12)$$

Таким образом, дифференцируемое отображение (8) в данном случае непрерывно дифференцируемо в U, если и только если все его частные производные отображения непрерывны в U.

В частности, если $X = \mathbb{R}^m$ и $Y = \mathbb{R}$, мы вновь получаем уже знакомое понятие непрерывно дифференцируемой числовой функции m действительных переменных (функции класса $C^{(1)}(U;\ \mathbb{R})$, где $U \subset \mathbb{R}^m$).

Замечание. Стоит отметить, что в записи равенств (10) и (11) мы существенно пользовались каноническим отождествлением $TX_x \sim X$, позволившим сравнивать или отождествлять векторы, лежащие в различных касательных пространствах.

Покажем теперь, что для непрерывно дифференцируемых отображений имеет место

Утверждение 1. *Если $\mathcal{K}$ — выпуклый компакт в нормированном пространстве X, и $f \in C^{(1)}(\mathcal{K};\ Y)$, где Y — тоже нормированное пространство, то отображение $f\colon \mathcal{K} \to Y$ удовлетворяет условию Липшица на $\mathcal{K}$, т. е. существует постоянная $M > 0$ такая, что для любых точек $x_1,\ x_2 \in \mathcal{K}$ выполнено неравенство*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant M\,|x_2 - x_1|. \tag{13}$$

◀ По условию $f'\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}(X;\ Y)$ есть непрерывное отображение компакта $\mathcal{K}$ в метрическое пространство $\mathcal{L}(X;\ Y)$. Поскольку норма есть непрерывная функция на нормированном пространстве, взятом с его естественной метрикой, то отображение $x \longmapsto \|f'(x)\|$, как композиция непрерывных отображений, само есть непрерывное отображение компакта $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}$. Но такое отображение обязано быть ограниченным. Пусть M такая постоянная, что в любой точке $x \in \mathcal{K}$ имеет место неравенство $\|f'(x)\| \leqslant M$. Ввиду выпуклости $\mathcal{K}$ вместе с любыми двумя точками $x_1 \in \mathcal{K}$, $x_2 \in \mathcal{K}$ компакт $\mathcal{K}$ содержит и весь отрезок $[x_1,\ x_2]$. Применяя к этому отрезку теорему о конечном приращении, немедленно получаем соотношение (13). ▶

Утверждение 2. *В условиях утверждения 1 существует такая неотрицательная стремящаяся к нулю при $\delta \to +0$ функция $\omega(\delta)$, что имеет место соотношение*

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x)\,h| \leqslant \omega(\delta)\,|h|, \tag{14}$$

справедливое в любой точке $x \in \mathcal{K}$ при $|h| < \delta$, если $x + h \in \mathcal{K}$.

◀ В силу следствия теоремы о конечном приращении можно записать, что

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x)\,h| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|f'(x+\theta h) - f'(x)\|\,|h|$$

и, полагая

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{x_1,\ x_2 \in \mathcal{K} \\ |x_1 - x_2| < \delta}} \|f'(x_2) - f'(x_1)\|,$$

получаем (14) ввиду равномерной непрерывности функции $x \longmapsto f'(x)$, непрерывной на компакте $\mathcal{K}$. ▶

b. Достаточное условие дифференцируемости. Покажем теперь как, располагая общей теоремой о конечном приращении, можно в общем виде получить достаточное условие дифференцируемости отображений в терминах частных производных.

Теорема 2. *Пусть U — окрестность точки x нормированного пространства $X = X_1 \times \ldots \times X_m$, являющегося прямым произведением нормированных пространств $X_1 \times \ldots \times X_m$, и пусть $f\colon U \to Y$ — отображение U в нормированное пространство Y. Если в U отображение f имеет все частные производные отображения, то при условии их непрерывности в точке x отображение f дифференцируемо в этой точке.*

◀ Для упрощения записи проведем доказательство в случае $m = 2$. Проверим непосредственно, что линейное относительно $h = (h_1, h_2)$ отображение

$$Lh = \partial_1 f(x) h_1 + \partial_2 f(x) h_2$$

является полным дифференциалом f в точке x.

Сделав элементарные преобразования

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) - Lh &= \\ &= f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) - \partial_1 f(x) h_1 - \partial_2 f(x) h_2 = \\ &= f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2+h_2) - \partial_1 f(x_1, x_2) h_1 + \\ &\qquad + f(x_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) - \partial_2 f(x_1, x_2) h_2, \end{aligned}$$

по следствию из теоремы 1 получаем

$$\begin{aligned} |f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) - \partial_1 f(x_1, x_2) h_1 - \partial_2 f(x_1, x_2) h_2| &\leqslant \\ \leqslant \sup_{0<\theta_1<1} \|\partial_1 f(x_1+\theta_1 h_1, x_2+h_2) - \partial_1 f(x_1, x_2)\| \, |h_1| &+ \\ + \sup_{0<\theta_2<1} \|\partial_2 f(x_1, x_2+\theta_2 h_2) - \partial_2 f(x_1, x_2)\| \, |h_2|&. \end{aligned} \tag{15}$$

Поскольку $\max\{|h_1|, |h_2|\} \leqslant |h|$, то из непрерывности частных производных $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ в точке $x = (x_1, x_2)$, очевидно, следует, что правая часть неравенства (15) есть $o(h)$ при $h = (h_1, h_2) \to 0$. ▶

Следствие. *Отображение $f\colon U \to Y$ открытого подмножества U нормированного пространства $X = X_1 \times \ldots \times X_m$ в нормированное пространство Y непрерывно дифференцируемо тогда и только тогда, когда в U непрерывны все частные производные отображения f.*

◀ В примере 2 мы показали, что при условии дифференцируемости отображения $f\colon U \to Y$ его непрерывная дифференцируемость равносильна непрерывности его частных производных.

Теперь же мы видим, что если частные производные непрерывны, то отображение f автоматически дифференцируемо, а следовательно (на основании примера 2), и непрерывно дифференцируемо. ▶

Задачи и упражнения

1. Пусть $f\colon I \to Y$ — непрерывное отображение отрезка $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ в нормированное пространство Y, а $g\colon I \to \mathbb{R}$ — непрерывная вещественнозначная функция на I. Покажите, что если f и g дифференцируемы в интервале

$]0, 1[$ и в точках этого интервала имеет место соотношение $\|f'(x)\| \leqslant g'(t)$, то справедливо также неравенство $|f(1)-f(0)| \leqslant g(1)-g(0)$.

2. a. Пусть $f\colon I \to Y$ — непрерывно дифференцируемое отображение отрезка $I=[0, 1] \subset \mathbb{R}$ в нормированное пространство Y. Оно задает гладкий путь в Y. Определите длину этого пути.

b. Вспомните геометрический смысл нормы касательного отображения и оцените сверху длину пути, рассмотренного в a.

c. Дайте геометрическое истолкование теоремы о конечном приращении.

3. Пусть $f\colon U \to Y$ — непрерывное отображение окрестности U точки a нормированного пространства X в нормированное пространство Y. Покажите, что если f дифференцируемо в $U \setminus a$ и $f'(x)$ имеет предел $L \in \mathscr{L}(X; Y)$ при $x \to a$, то отображение f дифференцируемо в точке a и $f'(a) = L$.

4. Пусть U — открытое выпуклое подмножество нормированного пространства X, а $f\colon U \to Y$ — отображение U в нормированное пространство Y. Покажите, что если $f'(x) \equiv 0$ на U, то отображение f постоянно.

§ 5. Производные отображения высших порядков

1. Определение n-го дифференциала. Пусть U — открытое множество в нормированном пространстве X, а

$$f\colon U \to Y \tag{1}$$

— отображение U в нормированное пространство Y.

Если отображение (1) дифференцируемо в U, то в U определено производное от f отображение

$$f'\colon U \to \mathscr{L}(X; Y). \tag{2}$$

Пространство $\mathscr{L}(X; Y) =: Y_1$ является нормированным пространством, по отношению к которому отображение (2) имеет вид (1), т. е. $f'\colon U \to Y_1$ и можно поставить вопрос о его дифференцируемости.

Если отображение (2) дифференцируемо, то его производное отображение

$$(f')'\colon U \to \mathscr{L}(X; Y_1) = \mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X; Y))$$

называют *вторым производным отображением* или *вторым дифференциалом* от f и обозначают символом f'' или $f^{(2)}$. И вообще принимается следующее индуктивное

Определение 1. *Производным отображением порядка* $n \in \mathbb{N}$ *или n-м дифференциалом отображения* (1) *в точке* $x \in U$ называется отображение, касательное в этой точке к производному отображению порядка $n-1$ от f.

Если производное отображение порядка $k \in \mathbb{N}$ в точке $x \in U$ обозначать символом $f^{(k)}(x)$, то определение 1 означает, что

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x). \tag{3}$$

Таким образом, если $f^{(n)}(x)$ определено, то

$$f^{(n)}(x) \in \mathscr{L}(X; Y_n) = \mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X; Y_{n-1})) = \ldots$$
$$\ldots = \mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X; \ldots; \mathscr{L}(X; Y))\ldots).$$

Следовательно, на основании утверждения 4 из § 2 дифференциал n-го порядка $f^{(n)}(x)$ отображения (1) в точке x можно интерпретировать как элемент пространства $\mathcal{L}(\underbrace{X, \ldots, X}_{n \text{ раз}}; Y)$ n-линейных непрерывных операторов.

Отметим еще раз, что касательное отображение $f'(x)\colon TX_x \to TY_{f(x)}$ есть отображение касательных пространств, каждое из которых, благодаря аффинной или линейной структуре отображаемых пространств, мы отождествляли с соответствующим линейным пространством и говорили на этом основании, что $f'(x) \in \mathcal{L}(X; Y)$. Именно это рассмотрение элементов $f'(x_1) \in \mathcal{L}(TX_{x_1}; TY_{f(x_1)})$, $f'(x_2) \in \mathcal{L}(TX_{x_2}; TY_{f(x_2)})$ различных пространств как векторов одного и того же пространства $\mathcal{L}(X; Y)$ лежит в основе определения высших дифференциалов отображения нормированных пространств. В случае аффинного или линейного пространства имеется естественная связь между векторами различных касательных пространств, соответствующих различным точкам исходного пространства. Эта связь в конечном счете и позволяет в данном случае говорить как о непрерывной дифференцируемости отображения (1), так и о его высших дифференциалах.

2. Производная по вектору и вычисление значений n-го дифференциала. При конкретизации абстрактного определения 1 может быть удачно использовано понятие производной по вектору, которое для общего отображения (1) вводится так же, как это в свое время было сделано в случае $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}$.

Определение 2. Если X и Y — линейные нормированные пространства над полем $\mathbb{R}$, то *производной отображения* (1) *в точке $x \in U$ по вектору $h \in TX_x \sim X$* назовем предел

$$D_h f(x) := \lim_{\mathbb{R} \ni t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t},$$

если указанный предел в Y существует.

Непосредственно проверяется, что

$$D_{\lambda h} f(x) = \lambda D_h f(x) \tag{4}$$

и что если отображение f дифференцируемо в точке $x \in U$, то оно имеет в этой точке производную по любому вектору, причем

$$D_h f(x) = f'(x) h, \tag{5}$$

и в силу линейности касательного отображения

$$D_{\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2} f(x) = \lambda_1 D_{h_1} f(x) + \lambda_2 D_{h_2} f(x). \tag{6}$$

Из определения 2 видно также, что значение $D_h f(x)$ производной отображения $f\colon U \to Y$ по вектору есть элемент линейного пространства $TY_{f(x)} \sim Y$, и что если L — линейное непрерывное отображение Y в некоторое нормированное пространство Z, то

$$D_h(L \cdot f)(x) = L \cdot D_h f(x). \tag{7}$$

Попробуем теперь истолковать значение $f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n)$ n-го дифференциала отображения f в точке x на наборе $(h_1, \dots, h_n)$ векторов $h_i \in TX_x \sim X$, $i = 1, \dots, n$.

Начнем с $n = 1$. В этом случае по формуле (5)

$$f'(x)(h) = f'(x)h = D_h f(x).$$

Рассмотрим теперь случай $n = 2$. Поскольку $f^{(2)}(x) = \mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X; Y))$, то, фиксировав вектор $h_1 \in X$, мы сопоставляем ему по закону

$$h_1 \longmapsto f^{(2)}(x)h_1$$

линейный оператор $(f^{(2)}(x)h_1) \in \mathscr{L}(X; Y)$, а вычислив затем значение этого оператора на векторе $h_2 \in X$, мы получим элемент

$$f^{(2)}(x)(h_1, h_2) := (f^{(2)}(x)h_1)h_2 \in Y \tag{8}$$

пространства Y.

Но

$$f^{(2)}(x)h = (f')'(x)h = D_h f'(x),$$

поэтому

$$f^{(2)}(x)(h_1, h_2) = (D_{h_1} f'(x))h_2. \tag{9}$$

Если $A \in \mathscr{L}(X; Y)$, а $h \in X$, то спаривание Ah можно рассматривать не только как отображение $h \longmapsto Ah$ из X в Y, но и как отображение $A \longmapsto Ah$ из $\mathscr{L}(X; Y)$ в Y, причем это последнее отображение, как и первое, является линейным.

Сравнив теперь соотношения (5), (7) и (9), можем записать, что $(D_{h_1} f'(x))h_2 = D_{h_1}(f'(x)h_2) = D_{h_1} D_{h_2} f(x)$.

Таким образом, окончательно получаем

$$f^{(2)}(x)(h_1, h_2) = D_{h_1} D_{h_2} f(x).$$

Аналогично можно показать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение

$$f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n) := (\dots((f^{(n)}(x)h_1)\dots h_n) = D_{h_1} D_{h_2} \dots D_{h_n} f(x), \tag{10}$$

причем дифференцирование по векторам выполняется последовательно, начиная от дифференцирования по h_n и кончая дифференцированием по h_1.

3. Симметричность дифференциалов высшего порядка. В связи с формулой (10), уже вполне пригодной для вычислений, естественно возникает вопрос о том, в какой мере результат вычислений зависит от указанного порядка дифференцирования.

Утверждение. *Если для отображения* (1) *форма* $f^{(n)}(x)$ *в точке* x *определена, то она симметрична относительно любой пары своих аргументов.*

◀ Основным элементом доказательства является проверка справедливости этого утверждения в случае $n=2$.

Пусть h_1, h_2 — два произвольных фиксированных вектора пространства $TX_x \sim X$. Поскольку U открыто в X, при всех достаточно близких к нулю значениях $t \in \mathbb{R}$ определена следующая вспомогательная функция от t:

$$F_t(h_1, h_2) = f(x + t(h_1 + h_2)) - f(x + th_1) - f(x + th_2) + f(x).$$

Рассмотрим еще одну вспомогательную функцию

$$g(v) = f(x + t(h_1 + v)) - f(x + tv),$$

заведомо определенную для векторов v, коллинеарных вектору h_2 и таких, что $|v| \leqslant |h_2|$.

Заметим, что

$$F_t(h_1, h_2) = g(h_2) - g(0).$$

Заметим также, что коль скоро функция $f: U \to Y$ в точке $x \in U$ имеет второй дифференциал $f''(x)$, она обязана быть дифференцируема по крайней мере в некоторой окрестности точки x. Мы будем считать, что параметр t настолько мал, что аргументы в правой части определяющего функцию $F_t(h_1, h_2)$ равенства лежат в указанной окрестности точки x.

Воспользуемся этими замечаниями и следствием теоремы о конечном приращении в следующих выкладках:

$$|F_t(t_1, t_2) - t^2 f''(x)(h_1, h_2)| =$$
$$= |g(h_2) - g(0) - t^2 f''(x)(h_1, h_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0<\theta_2<1} \|g'(\theta_2 h_2) - t^2 f''(x) h_1\| \, |h_2| =$$
$$= \sup_{0<\theta_2<1} \|(f'(x + t(h_1 + \theta_2 h_2)) - f'(x + t\theta_2 h_2))\, t - t^2 f''(x) h_1\| \, |h_2|.$$

По определению производного отображения можно записать, что

$$f'(x + t(h_1 + \theta_2 h_2)) = f'(x) + f''(x)(t(h_1 + \theta_2 h_2)) + o(t)$$

и

$$f'(x + t\theta_2 h_2) = f'(x) + f''(x)(t\theta_2 h_2) + o(t)$$

при $t \to 0$. Учитывая это, предыдущую выкладку можно продолжить и после арифметических упрощений получить, что

$$F_t(h_1, h_2) - t^2 f''(x)(h_1, h_2)| = o(t^2)$$

при $t \to 0$. Но это равенство означает, что

$$f''(x)(h_1, h_2) = \lim_{t \to 0} \frac{F_t(h_1, h_2)}{t^2}.$$

Поскольку, очевидно, $F_t(h_1, h_2) = F_t(h_2, h_1)$, то отсюда уже следует, что $f''(x)(h_1, h_2) = f''(x)(h_2, h_1)$.

Завершить доказательство утверждения теперь можно по индукции дословно так же, как это было сделано при доказательстве независимости значения смешанных частных производных от порядка выполнения дифференцирования. ▶

Итак, показано, что n-й дифференциал отображения (1) в точке $x \in U$ есть n-линейный симметрический оператор

$$f^{(n)}(x) \in \mathcal{L}(TX_x, \ldots, TX_x; TY_{f(x)}) \sim \mathcal{L}(X, \ldots, X; Y),$$

значение которого на наборе $(h_1, \ldots, h_n)$ векторов $h_i \in TX_x \sim X$, $i = 1, \ldots, n$, может быть вычислено по формуле (10).

Если X — конечномерное пространство, $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — базис в X и $h_j = h_j^i e_i$ — разложение векторов h_j, $j = 1, \ldots, n$, по этому базису, то в силу полилинейности $f^{(n)}(x)$ можно записать, что

$$f^{(n)}(x)(h_1, \ldots, h_n) = f^{(n)}(x)\left(h_1^{i_1}e_{i_1}, \ldots, h_n^{i_n}e_{i_n}\right) =$$
$$= f^{(n)}(x)\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}\right) h_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot h_n^{i_n},$$

или, используя прежние обозначения $\partial_{i_1 \ldots i_n} f(x)$ для $D_{e_1} \ldots D_{e_n} f(x)$, можно окончательно получить, что

$$f^{(n)}(x)(h_1, \ldots, h_n) = \partial_{i_1 \ldots i_n} f(x)\, h_1^{i_1} \ldots h_n^{i_n},$$

где в правой части, как обычно, имеется в виду суммирование по повторяющимся индексам в пределах их изменения, т. е. от 1 до k.

Условимся в следующем сокращении:

$$f^{(n)}(x)(h, \ldots, h) =: f^{(n)}(x) h^n. \tag{11}$$

В частности, если речь идет о конечномерном пространстве X и $h = h^i e_i$, то

$$f^{(n)}(x) h^n = \partial_{i_1 \ldots i_n} f(x)\, h^{i_1} \cdot \ldots \cdot h^{i_n},$$

что нам уже хорошо знакомо из теории числовых функций многих переменных.

4. Некоторые замечания. В связи с обозначением (11) рассмотрим полезный и используемый уже в следующем параграфе

Пример. Пусть $A \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, т. е. $y = A(x_1, \ldots, x_n)$ есть n-линейный непрерывный оператор, действующий из прямого произведения линейных нормированных пространств $X_1, \ldots, X_n$ в линейное нормированное пространство Y.

В примере 5 предыдущего параграфа было показано, что A является дифференцируемым отображением $A: X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$, причем

$$A'(x_1, \ldots, x_n)(h_1, \ldots, h_n) = \\ = A(h_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n).$$

Таким образом, если $X_1 = \ldots = X_n = X$ и если A — симметрический оператор, то

$$A'(x, \ldots, x)(h, \ldots, h) = nA(\underbrace{x, \ldots, x}_{n-1}, h) = :(nAx^{n-1})h.$$

Значит, если рассмотреть функцию $F\colon X \to Y$, определяемую условием

$$X \ni x \longmapsto F(x) = A(x, \ldots, x) = : Ax^n,$$

то она окажется дифференцируемой и

$$F'(x)h = (nAx^{n-1})h,$$

т. е. в этом случае

$$F'(x) = nAx^{n-1},$$

где $Ax^{n-1} := A(\underbrace{x, \ldots, x}_{n-1}, \cdot)$.

В частности, если отображение (1) имеет в некоторой точке $x \in U$ дифференциал $f^{(n)}(x)$, то функция $F(h) = f^{(n)}(x)h^n$ дифференцируема и

$$F'(h) = nf^{(n)}(x)h^{n-1}. \tag{12}$$

Заканчивая обсуждение понятия производного отображения n-го порядка, полезно еще отметить, что если исходная функция (1) определена на множестве U пространства X, являющегося прямым произведением нормированных пространств $X_1, \ldots, X_m$, то можно говорить о частных производных отображениях $\partial_1 f(x), \ldots$ $\ldots, \partial_m f(x)$ первого и более высокого порядка $\partial_{i_1 \ldots i_n} f(x)$ от функции f по переменным $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, m$.

На основании теоремы 2 из § 4 в этом случае по индукции получаем, что *если в некоторой точке $x \in U \subset X = X_1 \times \ldots \times X_m$ все частные производные $\partial_{i_1 \ldots i_n} f(x)$ отображения $f\colon U \to Y$ непрерывны, то в этой точке отображение f имеет дифференциал n-го порядка $f^{(n)}(x)$.*

Если учесть еще результат примера 2 из того же параграфа, то можно заключить, что *отображение $U \ni x \longmapsto f^{(n)}(x) \in$ $\in \mathcal{L}(\underbrace{X, \ldots, X}_{n \text{ раз}}; Y)$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все частные производные отображения $U \ni x \longmapsto$ $\longmapsto \partial_{i_1 \ldots i_n} f(x) \in \mathcal{L}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}; Y)$ порядка n* (или, что то же самое, до порядка n включительно) *исходного отображения $f\colon U \to Y$.*

Класс отображений (1), имеющих в U непрерывные производные отображения до порядка n включительно, обозначают символом $C^{(n)}(U; Y)$ или, если не возникает недоразумений, более коротким символом $C^{(n)}(U)$ или даже $C^{(n)}$.

В частности, если $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, то сделанное выше заключение можно коротко записать в виде

$$(f \in C^{(n)}) \Longleftrightarrow (\partial_{i_1 \ldots i_n} f \in C, \quad i_1, \ldots, i_n = 1, \ldots, m),$$

где C, как всегда, символ соответствующего множества непрерывных функций.

Задачи и упражнении

1. Проведите полностью доказательство равенства (7).

2. Проведите подробно конец доказательства утверждения о симметричности $f^{(n)}(x)$.

3. a. Покажите, что если для пары векторов h_1, h_2 и отображения (1) в области U определены функции $D_{h_1}D_{h_2}f$, $D_{h_2}D_{h_1}f$ и они непрерывны в некоторой точке $x \in U$, то в этой точке имеет место равенство $D_{h_1}D_{h_2}f(x) = D_{h_2}D_{h_1}f(x)$.

b. Покажите на примере числовой функции $f(x, y)$, что непрерывность в некоторой точке смешанных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, хотя и влечет в силу a их равенство в этой точке, вообще говоря, не влечет наличия в этой точке второго дифференциала функции.

c. Покажите, что наличие $f^{(2)}(x, y)$, хотя и обеспечивает наличие и равенство в соответствующей точке смешанных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, не влечет, вообще говоря, их непрерывность в этой точке.

4. Пусть $A \in \mathscr{L}(X, \ldots, X; Y)$, причем A — симметрический n-линейный оператор. Найдите последовательные производные до порядка $n+1$ включительно от функции $x \longmapsto Ax^n = A(x, \ldots, x)$

§ 6. Формула Тейлора и исследование экстремумов

1. Формула Тейлора для отображений.

Теорема 1. *Если отображение $f\colon U \to Y$ окрестности $U = U(x)$ точки x нормированного пространства X в нормированное пространство Y таково, что f имеет в U производные до порядка $n-1$ включительно, а в самой точке x имеет производную $f^{(n)}(x)$ порядка n, то*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) h^n + o(|h|^n) \tag{1}$$

при $h \to 0$.

Равенство (1) есть одна из разновидностей формулы Тейлора, написанной на сей раз уже для достаточно общих классов отображений.

◀ Докажем формулу Тейлора (1) по индукции.

При $n = 1$ она верна в силу определения $f'(x)$.

Пусть формула (1) верна для некоторого $(n-1)\in\mathbb{N}$.

Тогда на основании теоремы о конечном приращении, формулы (12) из § 5 и сделанного предположения индукции получаем

$$\left|f(x+h)-\left(f(x)+f'(x)h+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{0<\theta<1}\left\|f'(x+\theta h)-\left(f'(x)+f''(x)(\theta h)+\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x)(\theta h)^{n-1}\right)\right\||h|=o(|\theta h|^{n-1})|h|=o(|h|^n)$$

при $h\to 0$. ▶

Мы не останавливаемся здесь на других, иногда весьма полезных, вариантах формулы Тейлора. В свое время они подробно обсуждались для числовых функций. Теперь мы предоставляем их вывод читателю (см., например, задачу 1).

2. Исследование внутренних экстремумов. Используя формулу Тейлора, укажем необходимые, а также достаточные дифференциальные условия внутреннего локального экстремума вещественнозначной функции, определенной на некотором открытом множестве нормированного пространства. Как мы увидим, эти условия аналогичны уже известным нам дифференциальным условиям экстремума вещественнозначной функции вещественного переменного.

Теорема 2. *Пусть $f\colon U\to\mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определенная на открытом множестве U нормированного пространства X и имеющая в окрестности некоторой точки $x\in U$ непрерывные производные отображения до порядка $k-1\geqslant 1$ включительно, а также производное отображение $f^{(k)}(x)$ порядка k в самой точке x.*

Если $f'(x)=0, \ldots, f^{(k-1)}(x)=0$ и $f^{(k)}(x)\neq 0$, то для того, чтобы x была точкой экстремума функции f

необходимо, чтобы k было четно, а форма $f^{(k)}(x)h^k$ была полуопределенной *);

достаточно, чтобы значения формы $f^{(k)}(x)h^k$ на единичной сфере $|h|=1$ были отделены от нуля; при этом, если на этой сфере

$$f^{(k)}(x)h^k\geqslant\delta>0,$$

то x — точка локального минимума, а если

$$f^{(k)}(x)h^k\leqslant\delta<0,$$

то x — точка локального максимума.

---

*) Это значит, что форма $f^{(k)}(x)h^k$ не может принимать значения разных знаков, хотя при некоторых значениях $h\neq 0$ она может обращаться в нуль. Равенство $f^{(i)}(x)=0$, как обычно, понимается в том смысле, что $f^{(i)}(x)h=0$ для любого вектора h.

◀ Для доказательства рассмотрим тейлоровское разложение (1) функции f в окрестности точки x. Сделанные предположения позволяют записать, что

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h^k+\alpha(h)|h|^k,$$

где $\alpha(h)$ — вещественнозначная функция, причем $\alpha(h)\to 0$ при $h\to 0$.

Докажем сначала необходимые условия.

Поскольку $f^{(k)}(x)\neq 0$, найдется вектор $h_0\neq 0$, на котором $f^{(k)}(x)h_0^k\neq 0$. Тогда при значениях вещественного параметра t, достаточно близких к нулю,

$$f(x+th_0)-f(x)=\frac{1}{k!}(x)(th_0)^k+\alpha(th_0)|th_0|^k=$$
$$=\left(\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h_0^k+\alpha(th_0)|h_0|^k\right)t^k$$

и заключенное во внешние скобки выражение имеет тот же знак, что и $f^{(k)}(x)h_0^k$.

Для того чтобы x была точкой экстремума, необходимо, чтобы левая (а значит, и правая) часть последнего равенства не меняла знака при изменении знака t. Но это возможно, только если k четно.

Проведенное рассуждение показывает, что если x — точка экстремума, то знак разности $f(x+th_0)-f(x)$ при достаточно малых значениях t совпадает со знаком $f^{(k)}(x)h_0^k$, и, следовательно, в этом случае не может быть двух векторов h_0, h_1, на которых бы форма $f^{(k)}(x)$ принимала значения разных знаков.

Перейдем к доказательству достаточных условий экстремума. Для определенности рассмотрим случай, когда $f^{(k)}(x)h^k\geqslant\delta>0$ при $|h|=1$. Тогда

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h^k+\alpha(h)|h|^k=$$
$$=\left(\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\left(\frac{h}{|h|}\right)^k+\alpha(h)\right)|h|^k\geqslant\left(\frac{1}{k!}\delta+\alpha(h)\right)|h|^k,$$

и, поскольку $\alpha(h)\to 0$ при $h\to 0$, последний член неравенства положителен для всех достаточно близких к нулю векторов $h\neq 0$. Таким образом, для всех таких векторов h

$$f(x+h)-f(x)>0,$$

т. е. x — точка строгого локального минимума.

Аналогично проверяется достаточное условие строгого локального максимума. ▶.

Замечание 1. Если пространство X конечномерно, то единичная сфера $S(x;1)$ с центром в точке $x\in X$, являясь ограниченным замкнутым множеством в X, компактна. Тогда непрерывная функция (k-форма) $f^{(k)}(x)h^k = \partial_{i_1 \ldots i_k} f(x) h^{i_1} \cdot \ldots \cdot h^{i_k}$ имеет на $S(x; 1)$ как максимальное значение, так и минимальное значение. Если эти значения разных знаков, то экстремума в точке x функция f не имеет. Если же эти значения одного знака, то, как было показано в теореме 2, экстремум есть. В последнем случае достаточное условие экстремума, очевидно, можно высказать в виде эквивалентного ему требования определенности (положительной или отрицательной) формы $f^{(k)}(x)h^k$.

Именно в таком виде оно нам уже встречалось при рассмотрении вещественнозначных функций в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 2. Как мы видели на примере функций f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, указанная в необходимых условиях экстремума полуопределенность формы $f^{(k)}(x)h^k$ еще не является достаточным признаком экстремума.

Замечание 3. На практике при исследовании экстремумов дифференцируемых функций обычно пользуются только первым или первым и вторым дифференциалами. Если по смыслу исследуемой задачи единственность и характер экстремума очевидны, то при отыскании экстремума можно ограничиться первым дифференциалом, найдя ту точку x, где $f'(x) = 0$.

3. Некоторые примеры.

Пример 1. Пусть $L \in C^{(1)}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, а $f \in C^{(1)}([a, b]; \mathbb{R})$, т. е. $(u^1, u^2, u^3) \longmapsto L(u^1, u^2, u^3)$ — определенная в $\mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемая вещественнозначная функция, а $x \longmapsto f(x)$ — гладкая вещественнозначная функция, определенная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Рассмотрим функцию

$$F\colon C^{(1)}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \tag{2}$$

задаваемую соотношением

$$C^{(1)}([a, b]; \mathbb{R}) \ni f \longmapsto F(f) = \int_a^b L(x, f(x), f'(x))\, dx \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Таким образом, (2) есть вещественнозначный функционал, определенный на множестве функций $f \in C^{(1)}([a, b]; \mathbb{R})$.

В физике и механике известны фундаментальные вариационные принципы, связанные с движением. Согласно этим принципам истинные движения среди всех мыслимых выделяются тем, что они совершаются по траекториям, вдоль которых те или иные функционалы имеют экстремум. Вопросы, связанные с экстремумами функционалов, — центральные в теории оптимального управления. Таким образом, отыскание и исследование экстремумов функционалов является важной самостоятельной задачей, теории которой посвящен обширный раздел анализа — вариационное исчисление. Мы уже кое-что сделали для того, чтобы переход от анализа экстремумов числовых функций к отысканию и исследованию экстремумов функционалов был для читателя естественным. Однако мы не будем углубляться в специальные вопросы вариационного исчисления и проиллюстрируем на примере функционала (3) лишь рассмотренные выше общие идеи дифференцирования и исследования локальных экстремумов.

Покажем, что функционал (3) является дифференцируемым отображением и найдем его дифференциал.

Заметим, что функцию (3) можно рассматривать как композицию отображения

$$F_1\colon C^{(1)}([a, b]; \mathbb{R}) \to C([a, b]; \mathbb{R}), \tag{4}$$

задаваемого формулой

$$F_1(f)(x) = L(x, f(x), f'(x)), \tag{5}$$

и последующего отображения

$$C([a, b]; \mathbb{R}) \ni g \longmapsto F_2(g) = \int_a^b g(x)\,dx \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Отображение F_2 в силу свойств интеграла, очевидно, линейное и непрерывное, таким образом, с его дифференцируемостью вопрос ясен.

Покажем, что отображение F_1 тоже дифференцируемо, причем

$$F_1'(f)\,h(x) = \partial_2 L(x, f(x), f'(x))\,h(x) + \partial_3 L(x, f(x), f'(x))\,h'(x) \tag{7}$$

при $h \in C^{(1)}([a, b]; \mathbb{R})$.

Действительно, в силу следствия из теоремы о конечном приращении в нашем случае можно записать, что

$$\Big|L(u^1+\Delta^1, u^2+\Delta^2, u^3+\Delta^3) - L(u^1, u^2, u^3) - \\ - \sum_{i=1}^{3} \partial_i L(u^1, u^2, u^3)\,\Delta^i\Big| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|(\partial_1 L(u+\theta\Delta) - \\ - \partial_1 L(u), \partial_2 L(u+\theta\Delta) - \partial_2 L(u), \partial_3 L(u+\theta\Delta) - \partial_3 L(u))\| \cdot |\Delta| \leqslant \\ \leqslant 3 \max_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant 1\\ i=1,2,3}} |\partial_i L(u+\theta u) - \partial_i L(u)| \cdot \max_{i=1,2,3} |\Delta^i|, \tag{8}$$

где $u = (u^1, u^2, u^3)$ и $\Delta = (\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3)$.

Если теперь вспомнить, что в $C^{(1)}([a, b]; \mathbb{R})$ норма $|f|_{C^{(1)}}$ функции f есть $\max\{|f|_C, |f'|_C\}$ (где $|f|_C$ есть максимум модуля функции на отрезке $[a, b]$), то, полагая $u^1 = x$, $u^2 = f(x)$, $u^3 = f'(x)$, $\Delta^1 = 0$, $\Delta^2 = h(x)$ и $\Delta^3 = h'(x)$, из неравенства (8), учитывая равномерную непрерывность функций $\partial_i L(u^1, u^2, u^3)$, $i =$

$= 1, 2, 3$, на ограниченных подмножествах $\mathbb{R}^3$, получаем

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |L(x, f(x)+h(x), f'(x)+h'(x)) - L(x, f(x), f'(x)) - \\ - \partial_2 L(x, f(x), f'(x))\,h(x) - \partial_3 L(x, f(x), f'(x))\,h'(x)| = \\ = o(|h|_{C^{(1)}}) \text{ при } |h|_{C^{(1)}} \to 0.$$

Но это и означает, что имеет место равенство (7).

В силу теоремы о дифференцировании композиции отображений теперь заключаем, что функционал (3) действительно дифференцируем и

$$F'(f)\,h = \int_a^b (\partial_2 L(x, f(x), f'(x))\,h(x) + \\ + \partial_3 L(x, f(x), f'(x))\,h'(x))\,dx. \tag{9}$$

Часто рассматривается ограничение функционала (3) на аффинное пространство тех функций $f \in C^{(1)}([a, b]; \mathbb{R})$, которые на концах отрезка $[a, b]$ принимают фиксированные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$. В этом случае функции h из касательного пространства $TC_f^{(1)}$ должны на концах отрезка $[a, b]$ иметь нулевые значения. Учитывая это, равенство (9) интегрированием по частям в рассматриваемом случае, очевидно, можно привести к виду

$$F'(f)\,h = \int_a^b \left(\partial_2 L(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\partial_3 L(x, f(x), f'(x))\right) h(x)\,dx, \tag{10}$$

разумеется, уже в предположении, что L и f принадлежат соответствующему классу $C^{(2)}$.

В частности, если f — точка экстремума (экстремаль) такого функционала, то, согласно теореме 2, $F'(f)\,h = 0$ при любой функции $h \in C^{(1)}([a, b]; \mathbb{R})$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$. Отсюда и из (10) нетрудно заключить (см. задачу 3), что функция f должна удовлетворять уравнению

$$\partial_2 L(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\partial_3 L(x, f(x), f'(x)) = 0. \tag{11}$$

Это частный вид уравнения, именуемого в вариационном исчислении *уравнением Эйлера — Лагранжа.*

Рассмотрим теперь конкретные примеры.

Пример 2. *Задача о кратчайшей.*

Среди кривых, лежащих в плоскости и соединяющих две фиксированные ее точки, найти ту кривую, которая имеет минимальную длину.

Ответ в данном случае очевиден, и он скорее послужит контролем над следующими формальными выкладками.

Будем считать, что в плоскости фиксирована декартова система координат, в которой указанными точками являются, например, точки (0, 0) и (1, 0). Мы ограничимся рассмотрением только тех кривых, которые являются графиками функций $f \in C^{(1)}([0, 1]; \mathbb{R})$, принимающих на концах отрезка $[0, 1]$ нулевые значения. Длина такой кривой

$$F(f)=\int_0^1 \sqrt{1+(f')^2(x)}\,dx \tag{12}$$

зависит от функции f и является функционалом рассмотренного в примере 1 типа. В данном случае функция L имеет вид

$$L(u^1, u^2, u^3)=\sqrt{1+(u^3)^2},$$

поэтому необходимое условие экстремума (11) здесь сводится к уравнению

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f')^2(x)}}\right)=0,$$

из которого следует, что на отрезке $[0, 1]$

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f')^2(x)}}\equiv \text{const}. \tag{13}$$

Поскольку функция $\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ нигде непостоянна, то (13) возможно лишь при условии, что $f'(x)\equiv\text{const}$ на $[a, b]$. Таким образом, гладкая экстремаль нашей задачи должна быть линейной функцией, график которой проходит через точки (0, 0), (1, 0). Отсюда следует, что $f(x)\equiv 0$, и мы приходим к отрезку прямой, соединяющему две заданные точки.

Пример 3. *Задача о кривой скорейшего спуска.*

Эта классическая, поставленная в 1696 г. Иоганном (первым) Бернулли задача о брахистохроне состоит в отыскании формы желоба, вдоль которого материальная частица под действием силы тяжести за кратчайшее время переходит из заданной точки P_0 в другую фиксированную точку P_1, расположенную на более низком уровне.

Трением, разумеется, мы пренебрегаем. Кроме того, будем считать, что тривиальный случай, когда обе точки находятся на одной вертикали, исключен из дальнейшего рассмотрения.

В вертикальной плоскости, проходящей через точки P_0, P_1, введем прямоугольную систему координат так, чтобы точка P_0 была ее началом, ось абсцисс была направлена вертикально вниз, а точка P_1 имела положительные координаты (x_1, y_1). Форму желоба будем искать только среди графиков, заданных на отрезке $[0, x_1]$ гладких функций, удовлетворяющих условиям $f(0)=0$, $f(x_1)=y_1$. На исследовании этого отнюдь не бесспорного предположения мы пока не останавливаемся (см. задачу 4).

Если частица начинала свое движение из точки P_0 с нулевой скоростью, то закон изменения величины ее скорости в выбранной системе координат запишется в виде

$$v=\sqrt{2gx}. \tag{14}$$

Вспоминая, что дифференциал длины дуги вычисляется по формуле

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+(f')^2(x)}\,dx, \tag{15}$$

найдем время

$$F(f)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+(f')^2(x)}{x}}\,dx \tag{16}$$

движения вдоль траектории, заданной графиком функции $y=f(x)$ на отрезке $[0, x_1]$.

Для функционала (16)

$$L(u^1;\ u^2,\ u^3)=\sqrt{\frac{1+(u^3)^2}{u^1}},$$

поэтому необходимое условие экстремума (11) в данном случае сводится к уравнению

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{x(1+(f')^2(x))}}\right)=0,$$

из которого следует, что

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f')^2(x)}}=c\sqrt{x}, \tag{17}$$

где c — отличная от нуля постоянная (точки не лежат на одной вертикали!).

С учетом (15) уравнение (17) можно переписать в виде

$$\frac{dy}{ds}=c\sqrt{x}. \tag{18}$$

Однако с геометрической точки зрения

$$\frac{dx}{ds}=\cos\varphi,\quad \frac{dy}{ds}=\sin\varphi, \tag{19}$$

где φ — угол между касательной к траектории и положительным направлением оси абсцисс.

Сравнивая уравнение (18) со вторым из уравнений (19), находим

$$x=\frac{1}{c^2}\sin^2\varphi. \tag{20}$$

Но из (19) и (20) следует, что

$$\frac{dy}{d\varphi}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\varphi}=\operatorname{tg}\varphi\frac{dx}{d\varphi}=\operatorname{tg}\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin^2\varphi}{c^2}\right)=2\frac{\sin^2\varphi}{c^2},$$

откуда находим

$$y=\frac{2}{c^2}(2\varphi-\sin 2\varphi)+b. \tag{21}$$

Полагая $2/c^2=:a$ и $2\varphi=:t$, запишем соотношения (20) и (21) в виде

$$\begin{aligned} x&=a(1-\cos t),\\ y&=a(t-\sin t)+b. \end{aligned} \tag{22}$$

Поскольку $a\neq 0$, то $x=0$ лишь при $t=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Из вида функций (22) следует, что без ограничения общности можно считать, что точке $P_0=(0,\ 0)$ отвечает значение $t=0$ параметра t. В этом случае $b=0$, и мы приходим к более простой форме

$$\begin{aligned} x&=a(1-\cos t),\\ y&=a(t-\sin t) \end{aligned} \tag{23}$$

параметрического задания искомой кривой.

Таким образом, брахистохроной является циклоида, имеющая в исходной точке P_0 точку возврата с вертикальной касательной.

Постоянная a, коэффициент гомотетии, должна быть подобрана так, чтобы кривая (23) прошла также через точку P_1. Такой выбор, как можно заметить, нарисовав кривую (23), вовсе не всегда является однозначным, и это свидетельствует о том, что необходимое условие экстремума (11), вообще говоря, не является достаточным. Из физических соображений, однако, ясно, какому из возможных значений параметра a следует отдать предпочтение (что, впрочем, можно подтвердить и прямым вычислением).

Задачи и упражнения

1. Пусть $f\colon U\to Y$ — отображение класса $C^{(n)}(U;\ Y)$ открытого подмножества U нормированного пространства X в нормированное пространство Y. Пусть отрезок $[x,\ x+h]$ полностью содержится в U, и в точках интервала $]x,\ x+h[$ функция f имеет дифференциал $(n+1)$-го порядка, причем $\|f^{(n+1)}(\xi)\|\leqslant M$ в любой точке $\xi\in\,]x,\ x+h[$.

a. Покажите, что функция

$$g(t)=f(x+th)-\left(f(x)+f'(x)(th)+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(th)^n\right)$$

определена на отрезке $[0,\ 1]\subset\mathbb{R}$, дифференцируема на интервале $]0,\ 1[$ и при любом $t\in\,]0,\ 1[$ справедлива оценка

$$\|g'(t)\|\leqslant\frac{1}{n!}M\,|th|^n\,|h|.$$

b. Покажите, что $|g(1)-g(0)|\leqslant\dfrac{1}{(n+1)!}M\,|h|^{n+1}$.

c. Докажите следующую формулу Тейлора:

$$\left|f(x+h)-\left(f(x)+f'(x)h+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n\right)\right|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}\,|h|^{n+1}.$$

d. Что можно сказать об отображении $f\colon U \to Y$, если известно, что $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ в U?

2. a Если n-линейный симметрический оператор A таков, что для любого вектора $x \in X$ $Ax^n = 0$, то $A(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$, т е оператор A равен нулю на любом наборе $x_1, \ldots, x_n$ векторов из X

b. Если отображение $f\colon U \to Y$ имеет в точке $x \in U$ n-й дифференциал $f^{(n)}(x)$ и удовлетворяет условию

$$f(x+h) = L_0 + L_1 h + \ldots + \frac{1}{n!} L_n h^n + \alpha(h)\,|h|^n,$$

где L_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ суть i-линейные операторы, а $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$, то $L_i = f^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

c. Покажите, что из наличия приведенного в предыдущей задаче разложения функции f, вообще говоря, еще не вытекает наличие n-го дифференциала $f^{(n)}(x)$ (при $n > 1$) у этой функции в точке x

d. Докажите, что отображение $\mathscr{L}(X; Y) \ni A \longmapsto A^{-1} \in \mathscr{L}(X; Y)$ в области своего определения является бесконечно дифференцируемым, причем $(A^{-1})^{(n)}(A)(h_1, \ldots, h_n) = (-1)^n A^{-1}h_1A^{-1}h_2 \cdot \ldots \cdot A^{-1}h_nA^{-1}$.

3. a. Пусть $\varphi \in C([a, b]; \mathbb{R})$. Покажите, что если для любой функции $h \in C^{(2)}([a, b]; \mathbb{R})$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$, выполняется условие

$$\int_a^b \varphi(x)\,h(x)\,dx = 0, \text{ то } \varphi(x) \equiv 0 \text{ на } [a, b].$$

b. Выведите уравнение (11) Эйлера — Лагранжа как необходимое условие экстремума функционала (3), ограниченного на множество функций $f \in C^{(2)}([a, b]; \mathbb{R})$, принимающих на концах отрезка $[a, b]$ заданные значения.

4. Найдите форму $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, меридиана той поверхности вращения (вокруг оси Ox), которая имеет наименьшую площадь среди всех поверхностей вращения с окружностями заданного радиуса r_a, r_b в сечениях поверхности плоскостями $x = a$, $x = b$ соответственно

5. a. Функция L в задаче о брахистохроне не удовлетворяет условиям примера 1, поэтому непосредственное применение результатов примера 1 было в данном случае неоправданным. Покажите, повторив с нужными видоизменениями вывод формулы (10), что она и уравнение (11) остаются в силе и в рассматриваемом случае

b. Изменится ли уравнение брахистохроны, если частица стартует из точки P_0 с отличной от нуля начальной скоростью (движение происходит без трения в закрытой трубке)?

c. Покажите, что если P — произвольная точка брахистохроны, отвечающей паре точек P_0, P_1, то дуга этой брахистохроны от P_0 до P является брахистохроной пары P_0, P.

d. Допущение о том, что брахистохрона, отвечающая паре точек P_0, P_1, может быть записана в виде $y = f(x)$, как выяснилось из окончательных формул (23), не всегда оправдано. Покажите, используя результат задачи c, что вывод формул (23) можно провести и без подобного предположения о глобальном устройстве брахистохроны.

e. Расположите точку P_1 так, чтобы отвечающая паре P_0, P_1 брахистохрона в системе координат, которая была введена в примере 3, не могла быть записана в виде $y = f(x)$.

f. Расположите точку P_1 так, чтобы отвечающая паре P_0, P_1 брахистохрона в системе координат примера 3 имела вид $y = f(x)$, причем $f \notin C^{(1)}([a, b]; \mathbb{R})$. Таким образом, получится, что в этом случае интересующий нас функционал (16) имеет на множестве $C^{(1)}([a, b], \mathbb{R})$ нижнюю грань, но не имеет минимума

g Покажите, что брахистохрона пары точек P_0, P_1 пространства является плоской кривой

6. Удаление $d(P_0, P_1)$ точки P_0 пространства от точки P_1 в однородном гравитационном поле будем измерять временем движения материальной частицы по брахистохроне, отвечающей паре P_0, P_1.

a. Найдите измеряемое в этом смысле удаление точки P_0 от фиксированной вертикальной прямой.

b. Найдите асимптотику функции $d(P_0, P_1)$, когда точка P_1 поднимается по вертикали, приближаясь к уровню высоты точки P_0.

c Выясните, является ли функция $d(P_0, P_1)$ метрикой.

§ 7. Общая теорема о неявной функции

В этом заключительном параграфе главы почти весь развитый в ней аппарат будет продемонстрирован в работе на примере исследования неявно заданной функции. Представление о содержании и месте теоремы о неявной функции в анализе и его приложениях читатель уже имеет из гл. VIII, поэтому мы не останавливаемся здесь на предваряющих формализм пояснениях существа дела. Отметим только, что на сей раз неявно заданная функция будет построена совсем иным методом, опирающимся на принцип сжатых отображений. Этот метод часто используется в анализе и весьма полезен ввиду его вычислительной эффективности.

Теорема. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства, причем Y — полное пространство; $W=\{(x, y)\in X\times Y \mid |x-x_0|<\alpha \wedge |y-y_0|<\beta\}$ — окрестность точки (x_0, y_0) в произведении $X\times Y$ пространств X, Y.*

Если отображение $F\colon W\to Z$ удовлетворяет условиям

1. $F(x_0, y_0)=0$.
2. *$F(x, y)$ непрерывно в точке (x_0, y_0).*
3. *$F'_y(x, y)$ определено в W и непрерывно в (x_0, y_0).*
4. *$F'_y(x_0, y_0)$ обратимый*) оператор,*

то найдутся окрестность $U=U(x_0)$ точки x_0 в X, окрестность $V=V(y)$ точки y_0 в Y и отображение $f\colon U\to V$ такие, что:

1′. $U\times V\subset W$.

2′. $(F(x, y)=0$ *в* $U\times V)\Leftrightarrow(y=f(x)$, *где* $x\in U$, *а* $f(x)\in V)$.

3′. $y_0=f(x_0)$.

4′. *f непрерывно в точке x_0.*

◀ 1° Для упрощения записи и, очевидно, без ограничения общности рассмотрения можно считать, что $x_0=0$, $y_0=0$ и, следовательно,

$$W=\{(x, y)\in X\times Y \mid |x|<\alpha \wedge |y|<\beta\}.$$

2° Основную роль в доказательстве теоремы играет вспомогательное семейство отображений

$$g_x(y):=y-(F'_y(0, 0))^{-1}\cdot F(x, y), \tag{1}$$

зависящих от параметра $x\in X$, $|x|<\alpha$, и определенных на множестве $\{y\in Y \mid |y|<\beta\}$.

---

*) То есть $\exists\left[F'_y(x_0, y_0)\right]^{-1}\in\mathscr{L}(Z; Y)$.

Обсудим формулу (1). Прежде всего выясним, корректно ли определены отображения g_x и где лежат их значения.

При $(x, y) \in W$ определено отображение F, значение $F(x, y)$ которого на паре (x, y) лежит в пространстве Z. Частное производное отображения $F'_y(x, y)$ в любой точке $(x, y) \in W$, как мы знаем, есть линейное непрерывное отображение пространства Y в пространство Z.

По условию 4 отображение $F'_y(0, 0)$: $Y \to Z$ имеет непрерывное обратное отображение $(F'_y(0, 0))^{-1}$: $Z \to Y$. Значит, композиция $(F'_y(0, 0))^{-1} \cdot F(x, y)$ действительно определена и ее значения лежат в пространстве Y.

Итак, при любом x из α-окрестности $B_X(0; \alpha) := \{x \in X \mid |x| < \alpha\}$ точки $0 \in X$ g_x есть отображение, g_x: $B_Y(0; \beta) \to Y$ β-окрестности $B_Y(0, \beta) := \{y \in Y \mid |y| < \beta\}$ точки $0 \in Y$ в пространство Y.

Связь отображений (1) с задачей разрешения относительно переменной y уравнения $F(x, y) = 0$ состоит, очевидно, в том, что точка y_x является неподвижной точкой отображения g_x тогда и только тогда, когда $F(x, y_x) = 0$.

Зафиксируем это важное наблюдение:

$$g_x(y_x) = y_x \Leftrightarrow F(x, y_x) = 0. \tag{2}$$

Таким образом, отыскание и исследование неявно заданной функции $y = y_x = f(x)$ сводится к отысканию неподвижных точек отображений (1) и исследованию их зависимости от параметра x.

3° Покажем, что существует положительное число $\gamma < \min\{\alpha, \beta\}$ такое, что при любом $x \in X$, удовлетворяющем условию $|x| < \gamma < \alpha$, отображение g_x: $B_Y(0, \gamma) \to Y$ шара $B_Y(0; \gamma) := \{y \in Y \mid |y| < \gamma < \beta\}$ в Y является сжимающим отображением с коэффициентом сжатия, не превосходящим, например, числа 1/2.

Действительно, при любом фиксированном $x \in B_X(0; \alpha)$ отображение g_x: $B_Y(0; \beta) \to Y$ дифференцируемо, что следует из условия 3 и теоремы о дифференцировании композиции отображений, причем

$$g'_x(y) = e_Y - (F'_y(0, 0))^{-1} \cdot (F'_y(x, y)) = \\ = (F'_y(0, 0))^{-1}(F'_y(0, 0) - F'_y(x, y)). \tag{3}$$

В силу непрерывности $F'_y(x, y)$ в точке $(0, 0)$ (условие 3) найдется такая окрестность $\{(x, y) \in X \times Y \mid |x| < \gamma < \alpha \wedge |y| < \gamma < \beta\}$ точки $(0, 0) \in X \times Y$, в которой

$$\|g'_x(y)\| \leq \|(F'_y(0, 0))^{-1}\| \cdot \|F'_y(0, 0) - F'_y(x, y)\| < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Здесь мы пользуемся тем, что $(F'_y(0, 0))^{-1} \in \mathscr{L}(Z; Y)$, т. е. $\|(F'_y(0, 0))^{-1}\| < \infty$.

Всюду дальше будем считать, что $|x| < \gamma$ и $|y| < \gamma$, поэтому имеет место оценка (4).

Таким образом, при любом $x \in B_X(0;\ \gamma)$ и любых $y_1,\ y_2 \in B_Y(0;\ \gamma)$ по теореме о конечном приращении мы действительно получаем теперь, что

$$|g_x(y_1) - g_x(y_2)| \leqslant \sup_{\xi \in]y_1,\, y_2[} \|g'(\xi)\| |y_1 - y_2| < \frac{1}{2}|y_1 - y_2|. \tag{5}$$

4° Для того чтобы утверждать существование неподвижной точки y_x отображения g_x, нам надо иметь такое полное метрическое пространство, которое при этом отображении переходит в себя (быть может, и не на себя).

Проверим, что

для любого числа ε, удовлетворяющего условиям $0 < \varepsilon < \gamma$, найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$ из интервала $]0,\ \gamma[$, что при любом $x \in B_X(0;\ \delta)$ отображение g_x преобразует замкнутый шар $\bar{B}_Y(0;\ \varepsilon)$ в себя, т. е. $g_x(\bar{B}_Y(0;\ \varepsilon)) \subset \bar{B}_Y(0;\ \varepsilon)$.

Действительно, сначала по ε подберем число $\delta \in]0,\ \gamma[$ так, чтобы при $|x| < \delta$ иметь

$$\begin{aligned} g_x(0)| = |(F'_y(0,\ 0))^{-1} \cdot F(x,\ 0)| \leqslant \\ \leqslant \|(F'_y(0,\ 0))^{-1}\| |F(x,\ 0)| < \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned} \tag{6}$$

Это можно сделать благодаря условиям 1 и 2, в силу которых $F(0,\ 0) = 0$ и $F(x,\ y)$ непрерывно в точке $(0,\ 0)$.

Если теперь $|x| < \delta(\varepsilon) < \gamma$ и $|y| \leqslant \varepsilon < \gamma$, то из (5) и (6) получаем

$$|g_x(y)| \leqslant |g_x(y) - g_x(0)| + |g_x(0)| < \frac{1}{2}|y| + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon,$$

и, значит, при $|x| < \delta(\varepsilon)$

$$g_x(\bar{B}_Y(0;\ \varepsilon)) \subset B_Y(0;\ \varepsilon). \tag{7}$$

Как замкнутое подмножество полного метрического пространства Y замкнутый шар $\bar{B}_Y(0;\ \varepsilon)$ сам является полным метрическим пространством.

5° Сопоставляя соотношения (5) и (7), на основании принципа неподвижной точки (см. гл. IX, § 7) теперь можно утверждать, что при каждом $x \in B_x(0;\ \delta(\varepsilon)) =: U$ найдется единственная точка $y = y_x =: f(x) \in B_Y(0;\ \ \varepsilon) =: V$, которая является неподвижной точкой отображения g_x: $\bar{B}_Y(0;\ \varepsilon) \to \bar{B}_Y(0;\ \varepsilon)$.

В силу основного соотношения (2) отсюда следует, что так построенная функция f: $U \to V$ уже обладает свойством 2′, а значит, и свойством 3′, поскольку $F(0,\ 0) = 0$ по условию 1.

Свойство 1′ окрестностей U и V следует из того, что по построению $U \times V \subset B_X(0;\ \alpha) \times B_Y(0;\ \beta) = W$.

Наконец, непрерывность функции $y = f(x)$ в точке $x = 0$, т. е. свойство 4′, следует из 2′ и того, что, как было показано в п. 4° доказательства, для любого числа $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \gamma)$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$ $(\delta(\varepsilon) < \gamma)$, что при любом $x \in B_X(0;\ \delta(\varepsilon))$ выполнено $g_x(\bar{B}_Y(0;\ \varepsilon)) \subset B_Y(0;\ \varepsilon)$, т. е. единственная неподвижная точка $y_x = f(x)$ отображения g_x: $\bar{B}_Y(0,\ \varepsilon) \to \bar{B}_Y(0;\ \varepsilon)$ при $|x| < \delta(\varepsilon)$ удовлетворяет условию $|f(x)| < \varepsilon$. ▶

Мы доказали теорему существования неявной функции. Сделаем теперь ряд дополнений о свойствах этой функции, порождаемых свойствами исходной функции F.

Дополнение 1 (о непрерывности неявной функции). *Если в дополнение к условиям теоремы известно, что отображение* F: $W \to Z$ *непрерывно не только в точке* (x_0, y_0), *но и в некоторой ее окрестности, то найденная функция* f: $U \to V$ *будет непрерывна не только в точке* $x_0 \in U$, *но и в некоторой ее окрестности.*

◀ Из условий 3 и 4 теоремы на основании свойств отображения $\mathscr{L}(Y;\ Z) \ni A \longmapsto A^{-1} \in \mathscr{L}(Z;\ Y)$ (см. пример 6 из § 3) заключаем, что в каждой точке $(x,\ y)$ некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ оператор $F'_y(x,\ y) \in \mathscr{L}(Y;\ Z)$ является обратимым. Таким образом, при наличии сделанного дополнительного предположения о непрерывности F все точки $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ вида $(x,\ f(x))$ из некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ удовлетворяют условиям $1-4$, которым раньше удовлетворяла только точка $(x_0,\ y_0)$.

Повторив построение неявной функции в окрестности любой из этих точек $(\tilde{x},\ \tilde{y})$, мы получили бы функцию $y = \tilde{f}(x)$ непрерывную в $\tilde{x}$ и в силу $2'$ совпадающую с функцией $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки $\tilde{x}$. Но это и означает, что функция f непрерывна в $\tilde{x}$. ▶

Дополнение 2 (о дифференцируемости неявной функции). *Если в дополнение к условиям теоремы известно, что в окрестности* W *точки* $(x_0,\ y_0)$ *существует также частная производная* $F'_x(x,\ y)$, *непрерывная в точке* $(x_0,\ y_0)$, *то функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *причем*

$$f'(x_0) = -(F'_y(x_0,\ y_0))^{-1} \cdot (F'_x(x_0,\ y_0)). \tag{8}$$

◀ Проверим непосредственно, что линейный оператор $L \in \mathscr{L}(X;\ Y)$, стоящий в правой части формулы (8), действительно является дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Как и прежде, для упрощения записи будем считать, что $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, поэтому $f(0) = 0$.

Проведем сначала предварительный подсчет

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f(0) - Lx| = |f(x) - Lx| = \\
&\qquad = |f(x) + (F'_y(0,\ 0))^{-1} \cdot (F'_x(0,\ 0))\,x| = \\
&\qquad = |(F'_y(0,\ 0))^{-1}(F'_x(0,\ 0)\,x + F'_y(0,\ 0)\,f(x))| = \\
&= |(F'_y(0,\ 0))^{-1}(F(x,\ f(x)) - F(0,\ 0) - F'_x(0,0)\,x - F'_y(0,0)\,f(x))| \leqslant \\
&\leqslant \|(F'_y(0,\ 0))^{-1}\|\,|F(x, f(x)) - F(0,\ 0) - F'_x(0,0)\,x - F'_y(0,0)\,f(x)| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \|(F'_y(0,\ 0))^{-1}\| \cdot \alpha(x,\ f(x))\,(|x| + |f(x)|),
\end{aligned}$$

где $\alpha(x,\ y) \to 0$ при $(x,\ y) \to (0,\ 0)$.

Эти соотношения написаны с учетом того, что $F(x, f(x)) \equiv 0$, и того, что непрерывность частных производных отображений F'_x, F'_y в точке $(0, 0)$ обеспечивает дифференцируемость функции $F(x, y)$ в этой точке.

Положим для удобства записи $a := \|L\|$ и $b := \|(F'_y(0, 0)^{-1}\|$. Учитывая, что

$$|f(x)| = |f(x) - Lx + Lx| \leqslant |f(x) - Lx| + |Lx| \leqslant |f(x) - Lx| + a|x|,$$

проведенную выше предварительную выкладку можно продолжить и получить, что

$$|f(x) - Lx| \leqslant b\alpha(x, f(x))(|a-1||x| + |f(x) - Lx|),$$

или

$$|f(x) - Lx| \leqslant \frac{(a+1)b}{1 - b\alpha(x, f(x))}\alpha(x, f(x))|x|.$$

Ввиду непрерывности f в точке $x = 0$ и того, что $f(0) = 0$, при $x \to 0$ также $f(x) \to 0$, поэтому $\alpha(x, f(x)) \to 0$ при $x \to 0$

Значит, из последнего неравенства следует, что

$$|f(x) - f(0) - Lx| = |f(x) - Lx| = o(|x|) \text{ при } x \to 0. \blacktriangleright$$

Дополнение 3 (о непрерывной дифференцируемости неявной функции). *Если в дополнение к условиям теоремы известно, что в окрестности W точки (x_0, y_0) существуют и непрерывны частные производные отображения F'_x, F'_y, то в некоторой окрестности точки x_0 функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема и ее производное отображение вычисляется по формуле*

$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot (F'_x(x, f(x))). \tag{9}$$

◀ То, что в индивидуальной точке x, для которой оператор $F'_y(x, f(x))$ обратим, производное отображение $f'(x)$ существует и выражается в виде (9), нам уже известно из формулы (8).

Остается проверить, что при сделанных предположениях функция $f'(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = x_0$.

Билинейная функция $(A, B) \mapsto A \cdot B$ — произведение линейных операторов A, B является непрерывной функцией.

Оператор $B = -F'_x(x, f(x))$ непрерывно зависит от x как композиция непрерывных функций $x \mapsto (x, f(x)) \mapsto -F'_x(x, f(x))$.

То же самое можно сказать о линейном операторе $A^{-1} = F'_y(x, f(x))$.

Остается вспомнить (см. пример 6 из § 3), что отображение $A^{-1} \mapsto A$ также непрерывно в области своего определения.

Таким образом, задаваемая формулой (9) функция $f'(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x = x_0$ как композиция непрерывных функций. ▶

Теперь мы можем подвести итог и сформулировать следующее общее

Утверждение. *Если в дополнение к условиям теоремы о неявной функции известно, что функция F принадлежит классу $C^{(n)}(W; Z)$, то определяемая уравнением $F(x, y)=0$ неявная функция $y=f(x)$ принадлежит классу $C^{(n)}(U; Y)$ в некоторой окрестности U точки x_0.*

◀ При $n=0$ и $n=1$ утверждение уже доказано. Общий случай может теперь быть получен по индукции из формулы (9), если заметить, что отображение $\mathscr{L}(Y; Z) \ni A \longmapsto A^{-1} \in \mathscr{L}(Z; Y)$ (бесконечно) дифференцируемо и что при дифференцировании равенства (9) правая часть всегда содержит производные от f на один порядок более низкие, чем левая часть. Таким образом, последовательное дифференцирование равенства (9) возможно столько раз, каков порядок гладкости функции F. ▶

В частности, если

$$f'(x)h_1 = -(F'_y(x, f(x)))^{-1}\cdot(F'_x(x, f(x)))h_1,$$

то

$$\begin{aligned}
f''(x)(h_1, h_2) &= -d(F'_y(x, f(x)))^{-1}h_2F'_x(x, f(x))h_1 - \\
&\quad -(F'_y(x, f(x)))^{-1}d(F'_x(x, f(x))h_1)h_2 = \\
&= (F'_y(x, f(x)))^{-1}dF'_y(x, f(x))h_2(F'_y(x, f(x)))^{-1}F'_x(x, f(x))h_1 - \\
&\quad -(F'_y(x, f(x)))^{-1}((F''_{xx}(x, f(x)) + F''_{xy}(x, f(x))f'(x))h_1)h_2 = \\
&= (F'_y(x, f(x)))^{-1}((F''_{yx}(x, f(x)) + F''_{yy}(x, f(x))f'(x))h_2)\times \\
&\quad \times(F'_y(x, f(x)))^{-1}F'_x(x, f(x))h_1 - (F'_y(x, f(x)))^{-1}\times \\
&\quad \times((F''_{xx}(x, f(x)) + F''_{xy}(x, f(x))f'(x))h_1)h_2.
\end{aligned}$$

В менее подробной, но более обозримой записи это означает, что

$$\begin{aligned}
f''(x)(h_1, h_2) = -(F'_y)^{-1}[((F''_{yx} + F''_{yy}f')h_2)(F'_y)^{-1}F'_xh_1 - \\
-((F''_{xx} + F''_{yy}f')h_1)h_2]. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Так можно было бы в принципе получить выражение для производной любого порядка от неявной функции, однако, как видно уже из формулы (10), эти выражения в общем случае слишком громоздки, чтобы быть удобными в употреблении.

Посмотрим теперь, как конкретизируются полученные результаты в важнейшем частном случае, когда $X=\mathbb{R}^m$, $Y=\mathbb{R}^n$, $Z=\mathbb{R}^n$.

В этом случае отображение $z=F(x, y)$ имеет координатное представление

$$\begin{aligned}
z^1 &= F^1(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (11)\\
z^n &= F^n(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n).
\end{aligned}$$

Частные производные отображения $F'_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, $F'_y \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ задаются матрицами

$$F'_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}, \quad F'_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix},$$

вычисленными в соответствующей точке (x, y).

Непрерывность F'_x и F'_y, как нам известно, равносильна непрерывности всех элементов указанных матриц.

Обратимость линейного преобразования $F'_y(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ равносильна невырожденности матрицы, задающей это преобразование.

Таким образом, в рассматриваемом случае теорема о неявной функции утверждает, что если

1) $F(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0^1, \ldots, y_0^n) = 0,$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$F^n(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0^1, \ldots, y_0^n) = 0;$

2) $F^i(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n)$, $i = 1, \ldots, n$, — функции, непрерывные в окрестности точки $(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0^1, \ldots, y_0^n) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$;

3) все частные производные $\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, определены в окрестности точки $(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0^1, \ldots, y_0^n)$ и непрерывны в самой этой точке;

4) в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0^1, \ldots, y_0^n)$ определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{vmatrix}$$

матрицы F'_y отличен от нуля, то найдутся окрестность U точки $(x_0^1, \ldots, x_0^m)$ в $\mathbb{R}^m$, окрестность V точки $(y_0^1, \ldots, y_0^n)$ в $\mathbb{R}^n$ и отображение $f\colon U \to V$, имеющее в данном случае координатное представление

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1(x^1, \ldots, x^m), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n &= f^n(x^1, \ldots, x^m), \end{aligned} \tag{12}$$

такие, что:

1′) в пределах окрестности $U\times V$ точки $(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0^1, \ldots, y_0^n)\in \in \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ система уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^n(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n)=0 \end{cases}$$

равносильна функциональной зависимости $f\colon U\to V$, выраженной равенствами (12);

2′) $y_0^1=f^1(x_0^1, \ldots, x_0^m)$,

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$y_0^n=f^n(x_0^1, \ldots, x_0^m)$;

3′) отображение (12) непрерывно в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0^1, \ldots, y_0^m)$.

Если же, сверх того, известно, что отображение (11) принадлежит классу гладкости $C^{(n)}$, то, как следует из приведенного выше утверждения, отображение (12) также будет принадлежать классу $C^{(n)}$, разумеется, в соответствующей своей области определения.

Формула (9) в рассматриваемом случае конкретизируется, превращаясь в матричное равенство

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}, & \ldots, & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}, & \ldots, & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1}, & \ldots, & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1}, & \ldots, & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}, & \ldots, & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1}, & \ldots, & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix},$$

в котором левая часть вычисляется в точке $(x^1, \ldots, x^m)$, а правая — в соответствующей точке $(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n)$, где $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^m)$, $i=1, \ldots, n$.

Если $n=1$, т. е. когда решается относительно y уравнение

$$F(x^1, \ldots, x^m, y)=0,$$

матрица F'_y состоит из одного элемента — числа $\frac{\partial F}{\partial y}(x^1, \ldots, x^m, y)$. В этом случае $y=f(x^1, \ldots, x^m)$ и

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x^m}\right). \tag{13}$$

Формула (10) в этом случае также несколько упрощается, точнее, может быть переписана в следующем более симметричном виде:

$$f''(x)(h_1, h_2) = -\frac{(F''_{xx}+F''_{xy}f')\,h_1F'_yh_2+(F''_{yx}+F''_{yy}f')\,h_2F'_xh_1}{(F'_y)^2}. \tag{14}$$

Если же и $n=1$ и $m=1$, то $y=f(x)$ есть вещественнозначная функция одного числового аргумента, и формулы (13), (14) предельно упрощаются, превращаясь в знакомые числовые равенства

$$f'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}(x, y),$$

$$f''(x)=-\frac{(F''_{xx}+F''_{xy}f')F'_y-(F''_{yx}+F''_{yy}f')F'_x}{(F'_y)^2}(x, y)$$

для первых двух производных неявной функции, задаваемой уравнением $F(x, y)=0$.

Задачи и упражнения

1. a. Предположим, что наряду с указанной в теореме функцией $f\colon U\to Y$ нашлась функция $\tilde{f}\colon \tilde{U}\to Y$, определенная в некоторой окрестности $\tilde{U}$ точки x_0 и удовлетворяющая условиям $y_0=\tilde{f}(x_0)$ и $F(x, \tilde{f}(x))\equiv 0$ в $\tilde{U}$. Докажите, что если $\tilde{f}$ непрерывна в x_0, то в некоторой окрестности точки x_0 функции f и $\tilde{f}$ совпадают.

b. Покажите, что без предположения о непрерывности $\tilde{f}$ в x_0 утверждение a, вообще говоря, неверно.

2. Проанализируйте еще раз доказательство теоремы о неявной функции и дополнений к ней и покажите, что:

a. Если $z=F(x, y)$ непрерывно дифференцируемая комплекснозначная функция комплексных переменных x, y, то определяемая уравнением $F(x, y)=0$ неявная функция $y=f(x)$ будет дифференцируемой по комплексному переменному x.

b. В условиях теоремы пространство X не обязано быть нормированным, а может быть любым топологическим пространством.

3. a. Выясните симметрична ли форма $f''(x)(h_1, h_2)$, заданная соотношением (10).

b. Запишите в матричном виде формы (9) и (10) для случая числовых функций $F(x^1, x^2, y)$ и $F(x, y^1, y^2)$.

c. Покажите, что если $\mathbb{R}\ni t\longmapsto A(t)\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ есть бесконечно гладко зависящее от параметра t семейство невырожденных матриц $A(t)$, то

$$\frac{d^2A^{-1}}{dt^2}=2A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}-A^{-1}\frac{d^2A}{dt^2}A^{-1}, \text{ где } A^{-1}=A^{-1}(t)$$

— символ матрицы, обратной к матрице $A=A(t)$.

4. a. Покажите, что дополнение 1 к теореме является прямым следствием условий устойчивости неподвижной точки семейства сжимающих отображений, рассмотренных в § 7 главы IX.

b. Пусть $\{A_t\colon X\to X\}$ — семейство сжимающих отображений полного нормированного пространства X в себя, зависящих от параметра t, который изменяется в области Ω нормированного пространства T. Покажите, что если $A_t(x)=\varphi(t, x)$ является функцией класса $C^{(n)}(\Omega\times X; X)$, то неподвижная точка $x(t)$ отображения A_t как функция t принадлежит классу $C^{(n)}(\Omega; X)$.

5. a. Опираясь на теорему о неявной функции, докажите следующую теорему *об обратном отображении*.

Пусть $g\colon G\to X$ — отображение окрестности G точки y_0 полного нормированного пространства Y в нормированное пространство X.

Если отображение $x=g(y)$

1° дифференцируемо в G,
2° $g'(y)$ непрерывно в y_0,
3° $g'(y_0)$ обратимый оператор,

то найдутся окрестность $V \subset Y$ точки y_0 в Y и окрестность $U \subset X$ точки x_0 в X такие, что $g: V \to U$ биективно, а обратное к нему отображение $f: U \to V$ непрерывно в U и дифференцируемо в x_0, причем

$$f'(x_0) = (g'(y_0))^{-1}.$$

b. Покажите, что если сверх приведенных в а условий известно, что отображение g принадлежит классу $C^{(n)}(V; U)$, то обратное отображение f принадлежит классу $C^{(n)}(U; V)$.

c. Пусть $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, у которого в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ матрица $f'(x)$ невырождена и удовлетворяет неравенству $\|(f')^{-1}(x)\| > C > 0$ с константой C, не зависящей от x. Покажите, что f — биективное отображение.

d. Используя опыт решения задачи c, попробуйте дать некоторую оценку радиуса той шаровой окрестности $U = B(x_0; r)$ точки x_0, в которой заведомо определено рассматриваемое в теореме об обратной функции отображение $f: U \to V$.

6. a. Покажите, что если линейные отображения $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ и $B \in \mathcal{L}(X; \mathbb{R})$ таковы, что $\ker A \subset \ker B$ (ker, как обычно, символ, обозначающий ядро оператора), то найдется такое линейное отображение $\lambda \in \mathcal{L}(Y; \mathbb{R})$, что $B = \lambda \cdot A$.

b. Пусть X и Y — нормированные пространства, а $f: X \to \mathbb{R}$ и $g: X \to Y$ — гладкие функции на X со значениями в $\mathbb{R}$ и Y соответственно. Пусть S — гладкая поверхность, задаваемая в X уравнением $g(x) = y_0$. Покажите, что если $x_0 \in S$ точка экстремума функции $f|_S$, то любой вектор h, касательный к S в точке x_0, одновременно удовлетворяет двум условиям: $f'(x_0)h = 0$ и $g'(x_0)h = 0$.

c. Докажите, что если $x_0 \in S$ точка экстремума функции $f|_S$, то $f'(x_0) = \lambda \cdot g'(x_0)$, где $\lambda \in \mathcal{L}(Y; \mathbb{R})$.

d. Покажите, как из предыдущего результата получается классический *необходимый признак* Лагранжа *условного экстремума* функции на гладкой поверхности в $\mathbb{R}^n$.

ГЛАВА XI

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Интеграл Римана на n-мерном промежутке

1. Определение интеграла.

а. Промежуток в $\mathbb{R}^n$ и его мера.

Определение 1. Множество $I=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^i\leqslant x^i\leqslant b^i,\ i=1, \dots, n\}$ называется *промежутком* или *координатным параллелепипедом* в $\mathbb{R}^n$.

Если желают отметить, что промежуток определяется точками $a=(a^1, \dots, a^n)$ и $b=(b^1, \dots, b^n)$, то его часто обозначают символом $I_{a,b}$ или, по аналогии с одномерным случаем, записывают в виде $a\leqslant x\leqslant b$.

Определение 2. Промежутку $I=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^i\leqslant x^i\leqslant b^i,\ i=1, \dots, n\}$ ставится в соответствие число $|I|:=\prod\limits_{i=1}^{n}(b^i-a^i)$, называемое *объемом* или *мерой промежутка*.

Объем (меру) промежутка I обозначают также символами $v(I)$ или $\mu(I)$.

Лемма 1. *Мера промежутка в* $\mathbb{R}^n$

a) *однородна, т. е. если* $\lambda I_{a,b}:=I_{\lambda a, \lambda b}$, *где* $\lambda\geqslant 0$, *то*

$$|\lambda I_{a,b}|=\lambda^n|I_{a,b}|;$$

b) *аддитивна, т. е. если промежутки* $I, I_1, \dots, I_k$ *таковы, что* $I=\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, *и промежутки* $I_1, \dots, I_k$ *попарно не имеют общих внутренних точек, то* $|I|=\sum\limits_{i=1}^{k}|I_i|$;

c) *если промежуток* I *покрыт конечной системой промежутков* $I_1, \dots, I_k$, *т. е.* $I\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, *то* $|I|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}|I_i|$.

Все эти утверждения легко вытекают из определений 1 и 2.

b. Разбиение промежутка и база в множестве разбиений. Пусть задан промежуток $I=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^i\leqslant x^i\leqslant b^i,\ i=1, \dots, n\}$. Разбиения координатных отрезков $[a^i, b^i]$, $i=1, \ldots, n$, индуцируют разбиение промежутка I на более мелкие промежутки, получающиеся прямым произведением промежутков разбиения указанных координатных отрезков.

Определение 3. Описанное представление промежутка I $\left(\text{в виде объединения } I=\bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j \text{ более мелких промежутков } I_j\right)$ будем называть *разбиением промежутка* I и обозначать символом P.

Определение 4. Величина $\lambda(P):=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k} d(I_j)$ (максимального из диаметров промежутков разбиения P) называется *параметром разбиения* P.

Определение 5. Если в каждом промежутке I_j разбиения P фиксирована некоторая точка $\xi_j\in I_j$, то говорят, что имеется *разбиение с отмеченными точками*.

Набор $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$, как и прежде, будем обозначать одним символом ξ, а разбиение с отмеченными точками — символом (P, ξ).

В множестве $\mathcal{P}=\{(P, \xi)\}$ разбиений с отмеченными точками промежутка I вводится база $\lambda(P)\to 0$, элементы B_d $(d>0)$ которой, как и в одномерном случае, определяются соотношением $B_d:=\{(P, \xi)\in\mathcal{P}\mid\lambda(P)<d\}$.

То, что $\mathcal{B}=\{B_d\}$ — действительно база, следует из существования разбиений с параметром $\lambda(P)$, сколь угодно близким к нулю.

с. Интегральная сумма и интеграл. Пусть $f\colon I\to\mathbb{R}$ — вещественнозначная *) функция на промежутке I, а $P=\{I_1, \ldots, I_k\}$ — разбиение этого промежутка с отмеченными точками $\xi=\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$.

Определение 6. Сумма

$$\sigma(f, P, \xi):=\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,|I_i|$$

называется *интегральной суммой* (Римана) функции f, соответствующей разбиению (P, ξ) с отмеченными точками промежутка I.

Определение 7. Величина

$$\int\limits_I f(x)\,dx:=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f, P, \xi),$$

если указанный предел существует, называется *интегралом* (Римана) *от функции f на промежутке I*.

Мы видим, что данное определение и вообще весь процесс построения интеграла на промежутке $I\subset\mathbb{R}^n$ дословно повторяет уже знакомую нам процедуру определения интеграла Римана на

*) Обратите внимание на то, что в последующих определениях можно было бы считать, что значения f лежат в любом линейном нормированном пространстве. Например, это могут быть пространство $\mathbb{C}$ комплексных чисел, пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ и т. д.

отрезке. Для большего сходства мы даже оставили прежний вид $f(x)\,dx$ подынтегрального выражения. Равносильные, но более развернутые обозначения интеграла таковы:

$$\int\limits_I f(x^1, \ldots, x^n)\,dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n \quad \text{или} \quad \underbrace{\int \ldots \int}_{I}\limits^{n} f(x^1, \ldots, x^n)\,dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n.$$

Чтобы подчеркнуть, что речь идет об интеграле по многомерной области I, говорят, что это *кратный интеграл* (двойной, тройной и т. д. в соответствии с размерностью I).

d. Необходимое условие интегрируемости.

Определение 8. Если для функции $f\colon I \to \mathbb{R}$ указанный в определении 7 конечный предел существует, то f называется *интегрируемой* (по Риману) *функцией на промежутке* I.

Множество всех таких функций будем обозначать символом $\mathcal{R}(I)$.

Проверим следующее простейшее необходимое условие интегрируемости.

Утверждение 1. *$f \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow f$ ограничена на I.*

◀ Пусть P — произвольное разбиение промежутка I. Если функция f неограничена на I, то она неограничена и на некотором промежутке I_{i_0} разбиения P. Если (P, ξ'), (P, ξ'') — разбиения P с такими отмеченными наборами точек, что ξ' и ξ'' отличаются только выбором точек ξ'_{i_0}, ξ''_{i_0} в промежутке I_{i_0}, то

$$|\sigma(f, P, \xi') - \sigma(f, P, \xi'')| = |f(\xi'_{i_0}) - f(\xi''_{i_0})|\,|I_{i_0}|.$$

Меняя одну из точек ξ'_{i_0}, ξ''_{i_0}, при неограниченности f в I_{i_0}, мы могли бы сделать правую часть последнего равенства сколь угодно большой. В силу критерия Коши отсюда следует, что интегральные суммы функции f не имеют предела при $\lambda(P) \to 0$. ▶

2. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Изучая интеграл Римана в одномерном случае, мы уже познакомили читателя (без доказательств) с критерием Лебега существования интеграла. Здесь мы напомним некоторые понятия и докажем этот критерий.

a. Множество меры нуль в $\mathbb{R}^n$.

Определение 9. Говорят, что *множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет* (n-мерную) *меру нуль* или является *множеством меры нуль* (в смысле Лебега), если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества E не более чем счетной системой $\{I_i\}$ n-мерных промежутков, сумма $\sum\limits_i |I_i|$ объемов которых не превышает ε.

Лемма 2. а) *Точка и конечное число точек суть множества меры нуль.*

b) *Объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.*

c) *Подмножество множества меры нуль само есть множество меры нуль.*

d) *Невырожденный промежуток* *) $I_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ *не является множеством меры нуль.*

Доказательство леммы 2 ничем не отличается от доказательства ее одномерного варианта, рассмотренного в п 3d, § 1, гл. VI, поэтому мы на нем не останавливаемся.

Пример 1. Множество рациональных точек в $\mathbb{R}^n$ (точек, все координаты которых рациональны) счетно и потому является множеством меры нуль.

Пример 2. Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ — непрерывная вещественнозначная функция, определенная на $(n-1)$-мерном промежутке $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Покажем, что ее график в $\mathbb{R}^n$ есть множество n-мерной меры нуль.

◀ Поскольку функция f равномерно непрерывна на I, то по $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ так, чтобы для любых точек $x_1, x_2 \in I$ при условии $|x_1 - x_2| < \delta$ иметь $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ Если теперь взять разбиение P промежутка I с параметром $\lambda(P) < \delta$, то на каждом промежутке I_i такого разбиения колебание функции f будет меньше ε. Значит, если x_i — произвольная фиксированная точка промежутка I_i, то n-мерный промежуток $\tilde{I}_i = I_i \times [f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon]$, очевидно, содержит всю часть графика функции f, которая лежит над промежутком I_i, а объединение $\bigcup\limits_i \tilde{I}_i$ промежутков $\tilde{I}_i$ покрывает весь график функции f над I. Но $\sum\limits_i |\tilde{I}_i| = \sum\limits_i |I_i| \cdot 2\varepsilon = 2\varepsilon |I|$ (здесь $|I_i|$ — объем I_i в $\mathbb{R}^{n-1}$, $|\tilde{I}_i|$ — объем $\tilde{I}_i$ в $\mathbb{R}^n$). Таким образом, уменьшая ε, действительно можно общий объем покрытия сделать сколь угодно близким к нулю. ▶

Замечание 1. Сопоставляя утверждение b) леммы 2 с примером 2, можно заключить, что вообще график непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ или непрерывной функции $f\colon M \to \mathbb{R}$, где $M \subset \mathbb{R}^{n-1}$, является множеством n-мерной меры нуль в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 3. а) *Класс множеств меры нуль не изменится от того, понимать ли в определении 9 покрытие множества E системой промежутков $\{I_i\}$ в обычном смысле, т. е. считая $E \subset \bigcup\limits_i I_i$, или в более жестком смысле, требуя, чтобы каждая точка множества была внутренней точкой по крайней мере одного из промежутков покрытия* **).

---

*) То есть такой промежуток $I_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leq x^i \leq b^i,\ i = 1, \ldots, n\}$, что при любом значении $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место строгое неравенство $a^i < b^i$.

**) Иными словами, все равно, иметь ли в виду в определении 9 замкнутые или открытые промежутки

b) *Компакт* $\mathscr{K}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *является множеством меры нуль в том и только в том случае, если для любого* $\varepsilon>0$ *существует конечное покрытие* $\mathscr{K}$ *промежутками, сумма объемов которых меньше* ε.

◀ a) Если $\{I_i\}$ — покрытие множества E, т. е. $E\subset\bigcup_i I_i$, причем $\sum_i |I_i|<\varepsilon$, то, взяв вместо каждого промежутка I_i гомотетичный ему относительно его центра промежуток $\tilde{I}_i$, получим систему промежутков $\{\tilde{I}_i\}$ такую, что $\sum |\tilde{I}_i|<\lambda^n\varepsilon$, где λ — общий для всех промежутков коэффициент гомотетии. Если $\lambda>1$, то, очевидно, система $\{\tilde{I}_i\}$ будет покрывать множество E так, что любая точка E является внутренней точкой по крайней мере одного из промежутков покрытия.

b) Это следует из a) и возможности извлечь конечное покрытие из любого открытого покрытия компакта $\mathscr{K}$. (В качестве такого покрытия может выступать система $\{\tilde{I}_i\setminus\partial\tilde{I}_i\}$ открытых промежутков, получаемая из рассмотренной в a) системы $\{\tilde{I}_i\}$.) ▶

b. Одно обобщение теоремы Кантора. Напомним, что колебанием функции $f\colon E\to\mathbb{R}$ на множестве E мы назвали величину $\omega(f;E):=\sup\limits_{x_1,\,x_2\in E}|f(x_1)-f(x_2)|$, а колебанием функции в точке $x\in E$ — величину $\omega(f;x):=\lim\limits_{\delta\to 0}\omega\big(f;U_E^\delta(x)\big)$, где $U_E^\delta(x)$ — δ-окрестность точки x в множестве E.

Лемма 4. *Если в каждой точке компакта* $\mathscr{K}$ *для функции* $f\colon \mathscr{K}\to\mathbb{R}$ *имеет место соотношение* $\omega(f;x)\leqslant\omega_0$, *то для любого* $\varepsilon>0$ *найдется* $\delta>0$ *такое, что для любой точки* $x\in\mathscr{K}$ *будет выполнено неравенство* $\omega\big(f;U_E^\delta(x)\big)<\omega_0+\varepsilon$.

При $\omega_0=0$ это утверждение превращается в теорему Кантора о равномерной непрерывности функции непрерывной на компакте. Доказательство леммы 4 буквально повторяет схему доказательства теоремы Кантора (п. 2, § 2, гл. VI), поэтому мы на нем не задерживаемся.

c. Критерий Лебега. Как и прежде, будем говорить, что некоторое свойство имеет место *почти во всех точках множества* M или выполнено *почти всюду на* M, если подмножество M, где это свойство может нарушаться, имеет меру нуль.

Теорема 1 (критерий Лебега). $f\in\mathscr{R}(I)\Leftrightarrow(f$ *ограничена на* $I)\wedge(f$ *непрерывна почти всюду на* $I)$.

◀ Необходимость. Если $f\in\mathscr{R}(I)$, то по утверждению 1 функция f ограничена на I. Пусть $|f|\leqslant M$ на I.

Проверим, что f непрерывна почти во всех точках I. Для этого покажем, что если множество E точек разрыва функции не есть множество меры нуль, то $f\notin\mathscr{R}(I)$.

Действительно, представив E в виде $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n = \{x \in I \mid \omega(f;\ x) \geqslant 1/n\}$, на основании леммы 2 заключаем, что если E не имеет меру нуль, то найдется номер n_0 такой, что множество E_{n_0} тоже не есть множество меры нуль. Пусть P — произвольное разбиение промежутка I на промежутки $\{I_i\}$. Разделим промежутки разбиения P на две группы A и B, где

$$A=\left\{I_i \in P \mid I_i \cap E_{n_0} \neq \varnothing \wedge \omega(f;\ I_i) \geqslant \frac{1}{2n_0}\right\}, \text{ а } B = P \setminus A.$$

Система промежутков A образует покрытие множества E_{n_0}. В самом деле, каждая точка E_{n_0} лежит либо внутри некоторого промежутка $I_i \in P$, и тогда, очевидно, $I_i \in A$, либо на границе некоторых промежутков разбиения P. В последнем случае хотя бы на одном из этих промежутков колебание функции должно быть (в силу неравенства треугольника) не менее чем $\frac{1}{2n_0}$, и он войдет в систему A.

Покажем теперь, что, выбирая различным образом набор ξ отмеченных точек в промежутках разбиения P, мы можем заметно менять величину интегральной суммы.

Именно, выберем наборы точек ξ', ξ'' так, чтобы в промежутках системы B отмеченные точки обоих наборов совпадали, а в промежутках I_i системы A точки ξ_i', ξ_i'' выберем так, что $|f(\xi_i') - f(\xi_i'')| > \frac{1}{3n_0}$. Тогда $|\sigma(f,\ P,\ \xi') - \sigma(f,\ P,\ \xi'')| = \left|\sum\limits_{I_i \in A} (f(\xi_i') - f(\xi_i''))\,|I_i|\right| > \frac{1}{3n_0} \sum\limits_{I_i \in A} |I_i| > c > 0$. Существование такой постоянной c вытекает из того, что промежутки системы A образуют покрытие множества E_{n_0}, которое по предположению не есть множество меры нуль.

Поскольку P было произвольным разбиением промежутка I, на основании критерия Коши заключаем, что интегральные суммы $\sigma(f,\ P,\ \xi)$ не могут иметь предел при $\lambda(P) \to 0$, т. е. $f \notin \mathscr{R}(I)$.

Достаточность. Пусть ε — произвольное положительное число, а $E_\varepsilon = \{x \in I \mid \omega(f;\ x) \geqslant \varepsilon\}$. По условию E_ε есть множество меры нуль.

Кроме того, E_ε, очевидно, замкнуто в I, поэтому E_ε — компакт. По лемме 3 существует такая конечная система $I_1, \ldots, I_k$ промежутков в $\mathbb{R}^n$, что $E_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} |I_i| < \varepsilon$. Положим $C_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, а через C_2 и C_3 обозначим объединение промежутков, полученных из промежутков I_i гомотетией с центром в центре I_i и коэффициентом 2 и 3 соответственно. Ясно, что E_ε лежит строго внутри C_2 и что расстояние d между границами множеств C_2 и C_3 положительно.

Отметим, что сумма объемов любой конечной системы промежутков, которые лежат в C_3 и попарно не имеют общих внутренних точек, не больше чем $3^n\varepsilon$, где n-размерность пространства $\mathbb{R}^n$. Это следует из определения множества C_3 и свойств меры промежутка (лемма 1).

Отметим также, что любое подмножество промежутка I, диаметр которого меньше d, либо содержится в множестве C_3, либо лежит в компакте $\mathscr{K} = I \setminus (C_2 \setminus \partial C_2)$, где ∂C_2 — граница C_2 (и, следовательно, $C_2 \setminus \partial C_2$ — совокупность внутренних точек множества C_2).

По построению $E_\varepsilon \subset I \setminus \mathscr{K}$, поэтому в любой точке $x \in \mathscr{K}$ должно быть $\omega(f;\, x) < \varepsilon$. По лемме 4 найдется число $\delta > 0$ такое, что для любой пары точек $x_1, x_2 \in \mathscr{K}$, удаленных друг от друга не больше чем на δ, имеет место неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < 2\varepsilon$.

Сделанные построения позволяют теперь следующим образом провести доказательство достаточности условий интегрируемости. Берем любые два разбиения P', P'' промежутка I с параметрами $\lambda(P')$, $\lambda(P'')$ меньшими, чем $\lambda = \min\{d, \delta\}$. Пусть P — разбиение, полученное пересечением промежутков разбиений P', P'', т. е. в естественных обозначениях $P = \{I_{ij} = I'_i \cap I''_j\}$. Сравним интегральные суммы $\sigma(f, P, \xi)$ и $\sigma(f, P', \xi')$. Учитывая, что $|I'_i| = \sum\limits_j |I_{ij}|$, можно записать:

$$|\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P, \xi)| = \left|\sum_{ij} (f(\xi'_i) - f(\xi_{ij}))\,|I_{ij}|\right| \leqslant$$
$$\leqslant \Sigma_1 |f(\xi'_i) - f(\xi_{ij})|\,|I_{ij}| + \Sigma_2 |f(\xi'_i) - f(\xi_{ij})|\,|I_{ij}|.$$

Здесь в первую сумму Σ_1 вошли те промежутки I_{ij} разбиения P, которые лежат в промежутках I'_i разбиения P', содержащихся в множестве C_3, а остальные промежутки разбиения P отнесены к сумме Σ_2, т. е. все они обязательно содержатся в $\mathscr{K}$ (ведь $\lambda(P) < d$).

Поскольку $|f| \leqslant M$ на I, заменяя в первой сумме $|f(\xi'_i) - f(\xi_{ij})|$ величиной $2M$, заключаем, что первая сумма не превосходит $2M \cdot 3^n\varepsilon$.

Учитывая, что во второй сумме $\xi'_i, \xi_{ij} \in I'_i \subset \mathscr{K}$, а $\lambda(P') < \delta$, заключаем, что $|f(\xi'_i) - f(\xi_{ij})| < 2\varepsilon$, и, следовательно, вторая сумма не превосходит $2\varepsilon\,|I|$.

Таким образом, $|\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P, \xi)| < (2M \cdot 3^n + 2|I|)\,\varepsilon$, откуда (ввиду равноправности P' и P''), используя неравенство треугольника, получаем, что

$$|\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'')| < 4(3^nM + |I|)\,\varepsilon$$

для любых разбиений P', P'' с достаточно малыми параметрами.

В силу критерия Коши теперь заключаем, что $f \in \mathscr{R}(I)$. ▶

Замечание 2. Поскольку критерий Коши существования предела функций имеет силу в любом полном метрическом пространстве, то критерий Лебега, как видно из доказательства, справедлив для функций со значениями в любом полном линейном нормированном пространстве.

3. Критерий Дарбу. Рассмотрим еще один полезный критерий интегрируемости функции по Риману, применимый уже только к вещественнозначным функциям.

а. **Нижние и верхние интегральные суммы.** Пусть f — вещественнозначная функция на промежутке I, а $P=\{I_i\}$ — разбиение промежутка I. Положим

$$m_i=\inf_{x\in I_i} f(x),\quad M_i=\sup_{x\in I_i} f(x).$$

Определение 10. Величины

$$s(f,\ P)=\sum_i m_i|I_i|,\quad S(f,\ P)=\sum_i M_i|I_i|$$

называются соответственно *нижней* и *верхней интегральной суммой* (Дарбу) *функции f на промежутке I, отвечающей разбиению P этого промежутка.*

Лемма 5. *Между интегральными суммами функции $f\colon I\to\mathbb{R}$ имеют место следующие соотношения:*

a) $s(f,\ P)=\inf\limits_{\xi}\sigma(f,\ P,\ \xi)\leqslant\sigma(f,\ P,\ \xi)\leqslant\sup\limits_{\xi}\sigma(f,\ P,\ \xi)=S(f,\ P)$;

b) *если разбиение P' промежутка I получается измельчанием промежутков разбиения P, то $s(f,\ P)\leqslant s(f,\ P')\leqslant S(f,\ P')\leqslant \leqslant S(f,\ P)$*;

c) *для любой пары P_1, P_2 разбиений промежутка I справедливо неравенство $s(f,\ P_1)\leqslant S(f,\ P_2)$.*

◀ Соотношения а) и b) непосредственно следуют из определений 6 и 10 с учетом, разумеется, определений верхней и нижней граней числового множества.

Для доказательства соотношения с) достаточно рассмотреть вспомогательное разбиение P, получающееся пересечением промежутков разбиений P_1 и P_2. Разбиение P можно рассматривать как измельчание каждого из разбиений P_1, P_2, поэтому из соотношений b) следует, что

$$s(f,\ P_1)\leqslant s(f,\ P)\leqslant S(f,\ P)\leqslant S(f,\ P_2).\ ▶$$

b. **Нижний и верхний интегралы.**

Определение 11. *Нижним* и *верхним интегралом* (Дарбу) *от функции $f\colon I\to\mathbb{R}$ на промежутке I* называются соответственно величины

$$\underline{\mathcal{J}}=\sup_P s(f,\ P),\quad \overline{\mathcal{J}}=\inf_P S(f,\ P),$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всевозможным разбиениям P промежутка I.

Из этого определения и указанного в лемме 3 свойства сумм Дарбу следует, что для любого разбиения P промежутка имеют место неравенства

$$s(f, P) \leqslant \underline{\mathcal{J}} \leqslant \overline{\mathcal{J}} \leqslant S(f, P).$$

• Теорема 2 (Дарбу). *Для любой ограниченной функции f: $I \to \mathbb{R}$ имеют место утверждения*

$$\left(\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f, P)\right) \wedge \left(\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f, P) = \underline{\mathcal{J}}\right);$$

$$\left(\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f, P)\right) \wedge \left(\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f, P) = \overline{\mathcal{J}}\right).$$

◀ Если сопоставить эти утверждения с определением 11, то становится ясно, что в сущности надо лишь доказать существование указанных пределов. Проверим это для нижних интегральных сумм.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и такое разбиение P_ε промежутка I, для которого $s(f, P_\varepsilon) > \underline{\mathcal{J}} - \varepsilon$. Пусть Γ_ε — совокупность точек промежутка I, лежащих на границе промежутков разбиения P_ε. Как следует из примера 2, Γ_ε есть множество меры нуль. Ввиду простоты структуры множества Γ_ε очевидно даже, что найдется число λ_ε такое, что для любого разбиения P, для которого $\lambda(P) < \lambda_\varepsilon$, сумма объемов тех его промежутков, которые имеют общие точки с Γ_ε, меньше чем ε.

Взяв теперь любое разбиение P с параметром $\lambda(P) < \lambda_\varepsilon$, образуем вспомогательное разбиение P', получаемое пересечением промежутков разбиений P и P_ε. В силу выбора разбиения P_ε и свойств сумм Дарбу (лемма 5), находим

$$\underline{\mathcal{J}} - \varepsilon < s(f, P_\varepsilon) < s(f, P') \leqslant \underline{\mathcal{J}}.$$

Теперь заметим, что в суммах $s(f, P')$ и $s(f, P)$ общими являются все слагаемые, которые отвечают промежуткам разбиения P, не задевающим Γ_ε. Поэтому, если $|f(x)| \leqslant M$ на I, то

$$|s(f, P') - s(f, P)| < 2M\varepsilon$$

и, с учетом предыдущих неравенств, таким образом находим, что при $\lambda(P) < \lambda_\varepsilon$ имеет место соотношение

$$\underline{\mathcal{J}} - s(f, P) < (2M+1)\varepsilon.$$

Сопоставляя полученное соотношение с определением 11, заключаем, что предел $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f, P)$ действительно существует и равен $\underline{\mathcal{J}}$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для верхних сумм. ▶

с. Критерий Дарбу интегрируемости вещественнозначной функции.

Теорема 3 (критерий Дарбу). *Определённая на промежутке $I \subset \mathbb{R}^n$ вещественнозначная функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ интегрируема на нем тогда и только тогда, когда она ограничена на I и ее нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают.*

Итак,

$$f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow (f \text{ ограничена на } I) \wedge (\underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}).$$

◀ Необходимость. Если $f \in \mathcal{R}(I)$, то по утверждению 1 функция f ограничена на I. Из определения 7 интеграла, определения 11 величин $\underline{\mathcal{J}}$, $\overline{\mathcal{J}}$ и п. а) леммы 5 следует, что в этом случае также $\underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}$.

Достаточность. Поскольку $s(f, P) \leqslant \sigma(f, P, \xi) \leqslant S(f, P)$, то при $\underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}$ крайние члены этих неравенств по теореме 2 стремятся к одному и тому же пределу, когда $\lambda(P) \to 0$. Значит, $\sigma(f; P, \xi)$ имеет и притом тот же предел при $\lambda(P) \to 0$. ▶

Замечание 3. Из доказательства критерия Дарбу видно, что если функция интегрируема, то ее нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают между собой и равны значению интеграла от этой функции.

Задачи и упражнения

1. a. Покажите, что множество меры нуль не имеет внутренних точек.

b. Покажите, что если множество не имеет внутренних точек, то это вовсе не означает, что это множество меры нуль.

c. Постройте множество, имеющее меру нуль, замыкание которого совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$.

d. Говорят, что множество $E \subset I$ имеет объем нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечной системой $I_1, \ldots, I_k$ промежутков так, что $\sum_{i=1}^{k} |I_i| < \varepsilon$. Всякое ли ограниченное множество меры нуль имеет объем нуль?

Покажите, что если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ является прямым произведением $\mathbb{R} \times e$ прямой $\mathbb{R}$ и множества $e \subset \mathbb{R}^{n-1}$ $(n-1)$-мерной меры нуль, то E есть множество n-мерной меры нуль.

2. a. Постройте "аналог" функции Дирихле в $\mathbb{R}^n$ и покажите, что если ограниченная функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ равна нулю почти во всех точках промежутка I, то это еще не означает, что $f \in \mathcal{R}(I)$.

b. Покажите, что если $f \in \mathcal{R}(I)$ и $f(x) = 0$ почти во всех точках промежутка I, то $\int\limits_I f(x)\,dx = 0$.

3. Между прежним определением интеграла Римана на отрезке $I \subset \mathbb{R}$ и определением 7 интеграла на промежутке произвольной размерности имеется маленькое различие, связанное с определением разбиения и меры промежутка разбиения. Уясните для себя этот нюанс и проверьте, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_I f(x)\,dx, \quad \text{если} \quad a < b$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_I f(x)\,dx, \quad \text{если} \quad a > b,$$

где I — промежуток на прямой $\mathbb{R}$ с концами a, b.

4. a. Докажите, что определенная на промежутке $I \in \mathbb{R}^n$ вещественнозначная функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ интегрируема на нем тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение P промежутка I, что $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

b. Используя результат a и считая, что рассматривается вещественнозначная функция $f\colon I \to \mathbb{R}$, можно несколько упростить доказательство критерия Лебега в разделе, относящемся к достаточности. Постарайтесь самостоятельно сделать эти упрощения

§ 2. Интеграл по множеству

1. Допустимые множества. В дальнейшем нам предстоит интегрировать функции не только по промежутку, но и по другим не слишком сложным множествам в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *допустимым*, если оно ограничено в $\mathbb{R}^n$ и его граница ∂E есть множество меры нуль (в смысле Лебега).

Пример 1. Куб, тетраэдр, шар в $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^n$) являются допустимыми множествами.

Пример 2. Пусть определенные на $(n-1)$-мерном промежутке $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$ функции $\varphi_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, таковы, что $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ в любой точке $x \in I$. Если эти функции непрерывны, то на основании примера 2 из § 1 можно утверждать, что область в $\mathbb{R}^n$, ограниченная графиками этих функций и боковой цилиндрической поверхностью, лежащей над границей ∂I промежутка I, является допустимым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Напомним, что граница ∂E множества $E \subset \mathbb{R}^n$ состоит из точек, в любой окрестности которых имеются как точки множества E, так и точки дополнения E в $\mathbb{R}^n$. Значит, справедлива

Лемма 1. *Для любых множеств E, E_1, $E_2 \subset \mathbb{R}^n$:*

a) *∂E — замкнутое в $\mathbb{R}^n$ множество;*

b) $\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$;

c) $\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$;

d) $\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$.

Отсюда и из определения 1 вытекает, что имеет место

Лемма 2. *Объединение или пересечение конечного числа допустимых множеств является допустимым множеством; разность допустимых множеств — тоже допустимое множество.*

Замечание 1. Для бесконечного количества допустимых множеств лемма 2, вообще говоря, неверна, как, впрочем, и соответствующие утверждения b) и c) леммы 1.

Замечание 2. Граница допустимого множества — не только замкнутое, но и ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, т. е. это — компакт в $\mathbb{R}^n$. Значит, по лемме 3 из § 1 ее можно покрыть даже конечной системой промежутков со сколь угодно близкой к нулю суммой объемов.

Рассмотрим теперь характеристическую функцию

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in E,\\ 0, & \text{если } x\notin E\end{cases}$$

допустимого множества E. Как и для любого множества E, функция $\chi_E(x)$ имеет разрывы в граничных и только в граничных точках множества E. Значит, если E — допустимое множество, то функция $\chi_E(x)$ непрерывна почти во всех точках пространства $\mathbb{R}^n$.

2. Интеграл по множеству. Пусть f — определенная на множестве E функция. Условимся, как и прежде, символом $f\chi_E(x)$ обозначать функцию, равную $f(x)$ при $x\in E$ и равную нулю вне E (хотя f вне E не определена).

Определение 2. *Интеграл от функции f по множеству E* определяется соотношением

$$\int\limits_E f(x)\,dx := \int\limits_{I\supset E} f\chi_E(x)\,dx,$$

где I — произвольный промежуток, содержащий множество E.

Если стоящий в правой части равенства интеграл не существует, то говорят, что f *неинтегрируема* (по Риману) *на множестве E*. В противном случае f называется *интегрируемой* (по Риману) *на множестве E*.

Совокупность интегрируемых по Риману на множестве E функций будем обозначать символом $\mathcal{R}(E)$.

Определение 2, разумеется, требует пояснения, которое доставляет

Лемма 3. *Если I_1 и I_2 — два промежутка, содержащие порознь множество E, то интегралы*

$$\int\limits_{I_1} f\chi_E(x)\,dx,\qquad \int\limits_{I_2} f\chi_E(x)\,dx$$

существуют или не существуют одновременно, причем в первом случае их значения совпадают.

◄ Рассмотрим промежуток $I=I_1\cap I_2$. По условию $I\supset E$. Точки разрыва функции $f\chi_E$ либо совпадают с точками разрыва функции f на E, либо проистекают от разрывов функции χ_E и лежат на ∂E. Во всяком случае все эти точки лежат в $I\cap I_1\cap I_2$. По критерию Лебега (теорема 1, § 1) отсюда следует, что интегралы от $f\chi_E$ по промежуткам I, I_1, I_2 существуют или не существуют одновременно. Если они существуют, то мы вправе выбирать разбиения I, I_1, I_2 по своему усмотрению. Будем поэтому брать только те разбиения промежутков I_1, I_2, которые получаются продолжением разбиений промежутка $I = I_1 \cap I_2$. Поскольку вне I рассматриваемая функция равна нулю, интегральные суммы, отвечающие описанным разбиениям I_1 и I_2, сведутся к интегральной сумме соответствующего разбиения промежутка I. После предельного перехода отсюда получается, что интегралы по I_1 и I_2 равны интегралу от рассматриваемой функции по промежутку I. ▶

Из критерия Лебега (теорема 1, § 1) существования интеграла на промежутке и определения 2 вытекает

Теорема 1. *Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ интегрируема на допустимом множестве тогда и только тогда, когда она непрерывна почти во всех точках множества E.*

◀ Функция $f\chi_E$ по сравнению с функцией f может иметь дополнительно точки разрыва лишь на границе ∂E множества E, которая по условию является множеством меры нуль. ▶

3. Мера (объем) допустимого множества.

Определение 3. *Мерой* (Жордана) или *объемом* ограниченного *множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ назовем величину

$$\mu(E) := \int_E 1 \cdot dx,$$

если указанный интеграл (Римана) существует.

Поскольку

$$\int_E 1 \cdot dx = \int_{I \supset E} \chi_E(x)\, dx,$$

а множество точек разрыва функции χ_E совпадает с ∂E, то по критерию Лебега получаем, что так введенная мера определена только для допустимых множеств.

Таким образом, допустимые множества и только они являются измеримыми в смысле определения 3.

Выясним теперь геометрический смысл величины $\mu(E)$.

Если E — допустимое множество, то

$$\mu(E) = \int_{I \supset E} \chi_E(x)\, dx = \underline{\int_{I \supset E}} \chi_E(x)\, dx = \overline{\int_{I \supset E}} \chi_E(x)\, dx,$$

где последние два интеграла суть нижний и верхний интегралы Дарбу соответственно. В силу критерия Дарбу существования интеграла (теорема 3 § 1) мера $\mu(E)$ множества определена тогда и только тогда, когда указанные нижний и верхний интегралы совпадают. По теореме Дарбу (теорема 2 § 1) они являются пределами нижних и верхних интегральных сумм функции χ_E, отвечающих разбиениям P промежутка I. Но в силу определения функции χ_E нижняя интегральная сумма равна сумме объемов промежутков разбиения P, лежащих в E (это объем вписанного в E многогранника), а верхняя сумма равна сумме объемов тех промежутков разбиения P, которые имеют общие точки с множеством E (объем описанного многогранника). Значит, $\mu(E)$ есть общий предел при $\lambda(P)\to 0$ объемов вписанных в E и описанных около E многогранников, что совпадает с принятым представлением об объеме простых тел $E\subset\mathbb{R}^n$.

При $n=1$ объем принято называть *длиной*, а при $n=2$ — *площадью*.

Замечание 3. Поясним теперь почему вводимая определением 3 мера $\mu(E)$ множества называется иногда мерой Жордана.

Определение 4. Множество $E\subset\mathbb{R}^n$ называется *множеством меры нуль в смысле Жордана* или *множеством объема нуль*, если для любого $\varepsilon>0$ его можно покрыть такой конечной системой промежутков $I_1, \ldots, I_k$, что $\sum_{i=1}^{k}|I_i|<\varepsilon$.

По сравнению с мерой нуль в смысле Лебега здесь появилось требование конечности покрытия, которое сужает лебеговский класс множеств меры нуль. Например, множество рациональных точек является множеством меры нуль в смысле Лебега, но не в смысле Жордана.

Для того чтобы верхняя грань объемов вписанных в ограниченное множество E многогранников совпадала с нижней гранью объемов описанных около E многогранников (и служила мерой $\mu(E)$ или объемом E), очевидно, необходимо и достаточно, чтобы граница ∂E множества E имела меру нуль в смысле Жордана. Именно поэтому принимают

Определение 5. Множество E называется *измеримым в смысле Жордана*, если оно ограничено и его граница имеет меру нуль в смысле Жордана.

Как видно из замечания 2, класс множеств, измеримых по Жордану, это в точности тот класс допустимых множеств, который был введен определением 1. Вот почему определенная выше мера $\mu(E)$ может быть названа (и называется) *мерой Жордана* множеств E (измеримых по Жордану).

Задачи и упражнения

1. a. Покажите, что если множество $E\subset\mathbb{R}^n$ таково, что $\mu(E)=0$, то и для замыкания $\bar{E}$ этого множества справедливо равенство $\mu(\bar{E})=0$.

b. Приведите пример ограниченного множества E меры нуль в смысле Лебега, замыкание $\bar{E}$ которого уже не является множеством меры нуль в смысле Лебега

c. Выясните, надо ли понимать утверждение b) леммы 3 из § 1 как то, что для компакта понятия множества меры нуль в смысле Жордана и в смысле Лебега совпадают.

d. Докажите, что если проекция ограниченного множества $E\subset\mathbb{R}^n$ на гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1}$ имеет $(n-1)$-мерный объем нуль, то само множество E имеет n-мерный объем нуль.

e. Покажите, что измеримое по Жордану множество без внутренних точек имеет нулевой объем.

2. а. Может ли существовать введенный определением 2 интеграл от некоторой функции f по ограниченному множеству E, если E не является допустимым множеством (измеримым в смысле Жордана)?

b Интегрируема ли постоянная функция $f: E \to \mathbb{R}$ на ограниченном, но неизмеримом по Жордану множестве E?

c. Верно ли, что если некоторая функция f интегрируема на множестве E, то сужение $f|_A$ этой функции на любое подмножество $A \subset E$ множества E является интегрируемой на A функцией?

d. Укажите необходимые и достаточные условия на функцию $f: E \to \mathbb{R}$, определенную на ограниченном (но не обязательно измеримом по Жордану) множестве E, при которых интеграл Римана от нее по множеству E существует.

3. а. Пусть E — множество меры нуль в смысле Лебега, а $f: E \to \mathbb{R}$ — непрерывная и ограниченная функция на E. Всегда ли f интегрируема на E?

b. Ответьте на вопрос а, считая E множеством меры нуль в смысле Жордана.

c. Чему равен интеграл от указанной в а функции f, если он существует?

§ 3. Общие свойства интеграла

1. Интеграл как линейный функционал.

Утверждение 1. а) *Множество $\mathcal{R}(E)$ функций, интегрируемых по Риману на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, является линейным пространством относительно стандартных операций сложения функций и умножения функции на число.*

b) *Интеграл является линейным функционалом*

$$\int_E : \mathcal{R}(E) \to \mathbb{R} \text{ на пространстве } \mathcal{R}(E).$$

◀ Если учесть, что объединение множеств меры нуль также является множеством меры нуль, то утверждение а) вытекает непосредственно из определения интеграла и критерия Лебега существования интеграла от функции на промежутке.

Учитывая линейность интегральных сумм, предельным переходом получаем линейность интеграла. ▶

Замечание 1. Если вспомнить, что один и тот же предел интегральных сумм должен существовать при $\lambda(P) \to 0$ независимо от выбора отмеченных точек ξ, то можно заключить, что $(f \in \mathcal{R}(E)) \wedge (f(x) = 0$ почти всюду на $E) \Rightarrow \left(\int_E f(x)\,dx = 0\right)$.

Таким образом, если две интегрируемые функции совпадают почти во всех точках множества E, то их интегралы по E тоже совпадают. Значит, если профакторизовать линейное пространство $\mathcal{R}(E)$, относя в один класс эквивалентности функции, совпадающие почти во всех точках множества E, то получится линейное пространство $\tilde{\mathcal{R}}(E)$, на котором интеграл тоже будет линейным функционалом.

2. Аддитивность интеграла. Хотя мы всегда будем иметь дело с допустимыми множествами $E \subset \mathbb{R}^n$, в п. 1 можно было этого и не предполагать (что мы и сделали). Теперь же речь будет идти только о допустимых множествах.

Утверждение 2. *Пусть E_1, E_2 — допустимые множества в $\mathbb{R}^n$, а f — функция, определенная на $E_1 \cup E_2$.*

a) *Имеют место соотношения*

$$\left(\exists \int\limits_{E_1 \cup E_2} f(x)\,dx\right) \Leftrightarrow \left(\exists \int\limits_{E_1} f(x)\,dx\right) \wedge \left(\exists \int\limits_{E_2} f(x)\,dx\right) \Rightarrow \exists \int\limits_{E_1 \cap E_2} f(x)\,dx.$$

b) *Если еще известно, что $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, то при условии существования интегралов имеет место равенство*

$$\int\limits_{E_1 \cup E_2} f(x)\,dx = \int\limits_{E_1} f(x)\,dx + \int\limits_{E_2} f(x)\,dx.$$

◀ Утверждение a) следует из критерия Лебега существования интеграла Римана по допустимому множеству (теорема 1, § 2). При этом надо только вспомнить, что объединение и пересечение допустимых множеств также являются допустимыми множествами (лемма 2, § 2).

Для доказательства утверждения b) заметим сначала, что

$$\chi_{E_1 \cup E_2}(x) = \chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x) - \chi_{E_1 \cap E_2}(x).$$

Значит,

$$\int\limits_{E_1 \cup E_2} f(x)\,dx = \int\limits_{I \supset E_1 \cup E_2} f\chi_{E_1 \cup E_2}(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_I f\chi_{E_1}(x)\,dx + \int\limits_I f\chi_{E_2}(x)\,dx - \int\limits_I f\chi_{E_1 \cap E_2}(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{E_1} f(x)\,dx + \int\limits_{E_2} f(x)\,dx.$$

Дело в том, что интеграл

$$\int\limits_I f\chi_{E_1 \cap E_2}(x)\,dx = \int\limits_{E_1 \cap E_2} f(x)\,dx,$$

как нам известно из a), существует, а поскольку $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, то он равен нулю (см. замечание 1). ▶

3. Оценки интеграла.

a. Общая оценка. Начнем с одной общей оценки интеграла, справедливой и для интегралов от функции со значениями в любом полном линейном нормированном пространстве.

Утверждение 3. *Если $f \in \mathcal{R}(E)$, то $|f| \in \mathcal{R}(E)$ и имеет место неравенство*

$$\left| \int\limits_E f(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_E |f|(x)\,dx.$$

◀ То, что $|f| \in \mathcal{R}(E)$, вытекает из определения интеграла по множеству и критерия Лебега интегрируемости функции на промежутке.

Указанное неравенство получается теперь предельным переходом из соответствующего неравенства для интегральных сумм. ▶

b. Интеграл от неотрицательной функции. Следующие утверждения относятся уже только к вещественнозначным функциям.

Утверждение 4. *Для функции $f\colon E\to\mathbb{R}$ справедливо следующее предложение*:

$$(f\in\mathcal{R}(E))\wedge(\forall x\in E\,(f(x)\geqslant 0))\Longrightarrow\int\limits_E f(x)\,dx\geqslant 0.$$

◀ Действительно, ведь если $f(x)\geqslant 0$ на E, то $f\chi_E(x)\geqslant 0$ в $\mathbb{R}^n$. Далее, по определению

$$\int\limits_E f(x)\,dx=\int\limits_{I\supset E} f\chi_E(x)\,dx.$$

Последний интеграл по условию существует. Но он является пределом неотрицательных интегральных сумм, значит, он неотрицателен. ▶

Из доказанного утверждения 4 последовательно получаем

Следствие 1.

$$(f,\ g\in\mathcal{R}(E))\wedge(f\leqslant g\ \text{на}\ E)\Longrightarrow\left(\int\limits_E f(x)\,dx\leqslant\int\limits_E g(x)\,dx\right).$$

Следствие 2. *Если $f\in\mathcal{R}(E)$ и в любой точке допустимого множества E выполнены неравенства $m\leqslant f(x)\leqslant M$, то*

$$m\mu(E)\leqslant\int\limits_E f(x)\,dx\leqslant M\mu(E).$$

Следствие 3. *Если $f\in\mathcal{R}(E)$, $m=\inf\limits_{x\in E}f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in E}f(x)$, то найдется такое число $\theta\in[m,\ M]$, что*

$$\int\limits_E f(x)\,dx=\theta\mu(E).$$

Следствие 4 *Если E — связное допустимое множество и функция $f\colon E\to\mathbb{R}$ непрерывна, то найдется такая точка $\xi\in E$, что*

$$\int\limits_E f(x)\,dx=f(\xi)\,\mu(E).$$

Следствие 5. *Если в дополнение к условиям следствия 2 имеется функция $g\in\mathcal{R}(E)$, неотрицательная на E, то*

$$m\int\limits_E g(x)\,dx\leqslant\int\limits_E fg(x)\,dx\leqslant M\int\limits_E g(x)\,dx.$$

Последнее утверждение является обобщающим и обычно называется, как и в случае одномерного интеграла, *теоремой о среднем для интеграла.*

◀ Оно вытекает из неравенств $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$ с учетом линейности интеграла и следствия 1. Его можно доказать и непосредственно, если перейти от интегралов по E к соответствующим интегралам по промежутку, проверить неравенства для интегральных сумм, а затем перейти к пределу. Поскольку все эти рассуждения уже подробно проводились в одномерном случае, мы на деталях не останавливаемся. Отметим лишь, что интегрируемость произведения $f \cdot g$ функций f и g, очевидно, вытекает из критерия Лебега. ▶

Продемонстрируем теперь полученные соотношения в работе, проверив с их помощью, что справедлива следующая полезная

Лемма. a) *Если интеграл от неотрицательной на промежутке I функции $f\colon I \to \mathbb{R}$ равен нулю, то $f(x)=0$ почти во всех точках промежутка I.*

b) *Утверждение* a) *остается в силе, если промежуток I в нем заменить любым допустимым* (*т. е. измеримым по Жордану*) *множеством E.*

◀ По критерию Лебега функция $f \in \mathcal{R}(I)$ непрерывна почти во всех точках промежутка I, поэтому доказательство утверждения a) будет закончено, если мы покажем, что $f(a)=0$ в любой точке $a \in I$, в которой функция f непрерывна.

Предположим, что $f(a)>0$. Тогда $f(x) \geqslant c > 0$ в некоторой окрестности $U_I(a)$ точки a (окрестность $U_I(a)$ можно считать промежутком). Значит, по доказанным свойствам интеграла

$$\int_I f(x)dx = \int_{U_I(a)} f(x)\,dx + \int_{I \setminus U_I(a)} f(x)\,dx \geqslant \int_{U_I(a)} f(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant c\mu(U_I(a)) > 0.$$

Полученное противоречие проверяет справедливость утверждения a). Если применить это утверждение к функции $f\chi_E$ и учесть, что $\mu(\partial E)=0$, то получим утверждение b). ▶

Замечание 2. Из доказанной леммы следует, что если E — измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$, а $\tilde{\mathcal{R}}(E)$ — рассмотренное в замечании 1 линейное пространство классов эквивалентных функций, интегрируемых на E и различающихся лишь на множествах меры нуль в смысле Лебега, то величина $\|f\| = \int_E |f|(x)\,dx$ является нормой на $\tilde{\mathcal{R}}(E)$.

◀ Действительно, ведь из равенства $\int_E |f|(x)\,dx = 0$, теперь можно заключить, что f лежит в том же классе эквивалентности, что и функция, тождественно равная нулю. ▶

Задачи и упражнения

1. Пусть E — измеримое по Жордану множество ненулевой меры, а $f\colon E \to \mathbb{R}$ — непрерывная, неотрицательная интегрируемая функция на E и $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$.

Покажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_E f^n(x)\,dx\right)^{1/n}=M$$

2. Докажите, что если $f,\ g\in\mathscr{R}(E)$, то справедливо

a) неравенство Гельдера

$$\left|\int_E (f\cdot g)(x)\,dx\right|\leqslant\left(\int_E |f|^p(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\int_E |g|^q(x)\,dx\right)^{1/q},$$

где $p\geqslant 1,\ q\geqslant 1$ и $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$;

b) Неравенство Минковского

$$\left(\int_E |f+g|^p(x)\,dx\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_E |f|^p(x)\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_E |g|^p(x)\,dx\right)^{1/p},$$

если $p\geqslant 1$.

Покажите, что

c) предыдущее неравенство меняется на противоположное, если $0<p<1$;

d) знак равенства в неравенстве Минковского имеет место тогда и только тогда, когда существует число $\lambda\geqslant 0$ такое, что с точностью до множества меры нуль на E выполнено одно из двух соотношений $f=\lambda g$ или $g=\lambda f$;

f) величина $\|f\|_p=\left(\int_E |f|^p(x)\,dx\right)^{1/p}$ при $p>1$ являетси нормой в пространстве $\tilde{\mathscr{R}}(E)$.

Выясните, при каких условиях в неравенстве Гёльдера имеет место знак равенства.

3. Пусть E — измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$, причем $\mu(E)>0$. Проверьте, что если $\varphi\in C(E,\mathbb{R})$, а $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — выпуклая функция, то

$$f\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E \varphi(x)\,dx\right)\leqslant\frac{1}{\mu(E)}\int_E (f\circ\varphi)(x)\,dx.$$

4. a. Покажите, что если E — измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$, а интегрируемая на нем функция $f\colon E\to\mathbb{R}$ непрерывна в его внутренней точке $a\in E$, то

$$\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\mu\left(U_E^\delta(a)\right)}\int_{U_E^\delta(a)} f(x)\,dx=f(a),$$

где, как обычно, $U_E^\delta(a)$ обозначает δ-окрестность точки в множестве E.

b. Проверьте, что предыдущее соотношение остается в силе, если условие «a — внутренняя точка E» заменить условием $\mu\left(U_E^\delta(a)\right)>0$ для любого $\delta>0$.

§ 4. Сведение кратного интеграла к повторному

1. Теорема Фубини *). До сих пор мы говорили об определении интеграла, условиях его существования и его общих свойствах. Здесь будет доказана теорема, которая наряду с теоремой о замене переменных является инструментом для вычисления кратных интегралов.

*) Г. Фубини (1870—1943) — итальяиский магематик Его основные труды отиосится к теории функций и геометрии

Теорема*). *Пусть $X \times Y$ — промежуток в $\mathbb{R}^{m+n}$, являющийся прямым произведением промежутков $X \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$. Если функция $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ интегрируема на $X \times Y$, то интегралы*

$$\boxed{\int\limits_{X \times Y} f(x, y)\,dx\,dy, \quad \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x, y)\,dy, \quad \int\limits_Y dy \int\limits_X f(x, y)\,dx}$$

существуют одновременно и равны между собой

Прежде чем браться за доказательство теоремы, расшифруем смысл входящих в ее формулировку символов.

Интеграл $\int\limits_{X \times Y} f(x, y)\,dx\,dy$ — это записанный в переменных $x \in X$, $y \in Y$ знакомый нам интеграл от функции f по промежутку $X \times Y$.

Символ $\int\limits_X dx \int\limits_Y f(x, y)\,dy$ следует понимать следующим образом: при фиксированном значении $x \in X$ вычисляется интеграл $F(x) = \int\limits_Y f(x, y)\,dy$ по промежутку Y, а затем полученная функция $F\colon X \to \mathbb{R}$ интегрируется на промежутке X. При этом, если для некоторого $x \in X$ интеграл $\int\limits_Y f(x, y)\,dy$ не существует, то $F(x)$ полагается равным любому числу между $\underline{J}(x) = \underline{\int\limits_Y} f(x, y)\,dy$ и $\overline{J}(x) = \overline{\int\limits_Y} f(x, y)\,dy$, не исключая и самих значений $\underline{J}(x)$, $\overline{J}(x)$ нижнего и верхнего интегралов. Будет показано, что тогда $F \in \mathcal{R}(X)$.

Аналогичный смысл имеет символ $\int\limits_Y dy \int\limits_X f(x, y)\,dx$.

В процессе доказательства теоремы выяснится, что совокупность тех значений $x \in X$, для которых $\underline{J}(x) \neq \overline{J}(x)$ является множеством m-мерной меры нуль в X.

Аналогично и совокупность тех $y \in Y$, при которых интеграл $\int\limits_X f(x, y)\,dx$ может не существовать, окажется множеством n-мерной меры нуль в Y.

Заметим, наконец, что, в отличие от интеграла по $(m+n)$-мерному промежутку $X \times Y$, который мы в свое время условились называть *кратным интегралом*, последовательно вычисляемые интегралы от функции $f(x, y)$ по Y, затем по X, или по X,

*) Эта теорема была доказана задолго до появления известной в теории функций теоремы Фубини, частным случаем которой она является. Однако теоремы, позволяющие сводить вычисление кратных интегралов к повторному интегрированию в меньших размерностях, принято называть теоремами типа теоремы Фубини или, для краткости, теоремами Фубини.

а затем по Y, принято называть *повторными интегралами* от этой функции.

Если X и Y — отрезки прямой, то сформулированная теорема в принципе сводит вычисление двойного интеграла по промежутку $X\times Y$ к последовательному вычислению двух одномерных интегралов. Ясно, что, применяя эту теорему несколько раз, можно свести вычисление интеграла по k-мерному промежутку к последовательному вычислению k одномерных интегралов.

Сущность сформулированной теоремы очень проста и состоит в следующем. Рассмотрим интегральную сумму $\sum\limits_{i,j} f(x_i, y_j)\times$ $\times|X_i|\cdot|Y_j|$, отвечающую разбиению промежутка $X\times Y$ на промежутки $X_i\times Y_j$. Поскольку интеграл от f по промежутку $X\times Y$ существует, то отмеченные точки $\xi_{ij}\in X_i\times Y_j$ можно выбирать по своему усмотрению, и мы их выбрали как «прямое произведение» выборов $x_i\in X_i\subset X$ и $y_j\in Y_j\subset Y$. Тогда можно записать, что

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j)\,|X_i|\cdot|Y_j| = \sum_i |X_i| \sum_j f(x_i, y_j)\,|Y_j| = \sum_j |Y_j| \sum_i f(x_i, y_j)\,|X_i|,$$

а это и есть допредельный вид нашей теоремы.

Дадим теперь ее формальное доказательство.

◀ Любое разбиение P промежутка $X\times Y$ индуцируется соответствующими разбиениями P_X, P_Y промежутков X и Y. При этом каждый промежуток разбиения P есть прямое произведение $X_i\times Y_j$ некоторых промежутков X_i, Y_j разбиений P_X, P_Y соответственно. По свойствам объема промежутка $|X_i\times Y_j|=|X_i|\cdot|Y_j|$, где каждый из объемов вычисляется в том пространстве $\mathbb{R}^{m+n}$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, которому принадлежит рассматриваемый промежуток.

Используя свойства нижней и верхней граней, а также определения нижних и верхних интегральных сумм и интегралов, проведем теперь следующие оценки:

$$\begin{aligned}
s(f, P) &= \\
&= \sum_{i,j} \inf_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x, y)\,|X_i\times Y_j| \le \sum_i \inf_{x\in X_i}\Bigl(\sum_j \inf_{y\in Y_j} f(x, y)\,|Y_j|\Bigr)|X_i| \le \\
&\le \sum_i \inf\Bigl(\underline{\int_Y} f(x, y)\,dy\Bigr)|X_i| \le \sum_i \inf_{x\in X_i} F(x)\,|X_i| \le \\
&\le \sum_i \sup_{x\in X_i} F(x)\,|X_i| \le \sum_i \sup_{x\in X_i}\Bigl(\overline{\int_Y} f(x, y)\,dy\Bigr)|X_i| \le \\
&\le \sum_i \sup_{x\in X_i}\Bigl(\sum_j \sup_{y\in Y_j} f(x, y)\,|Y_j|\Bigr)|X_i| \le \\
&\le \sum_{i,j} \sup_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x, y)\,|X_i\times Y_j| = S(f, P).
\end{aligned}$$

Поскольку $f \in \mathcal{R}(X \times Y)$, то при $\lambda(P) \to 0$ оба крайних члена этих неравенств стремятся к значению интеграла от функции f по промежутку $X \times Y$. Это обстоятельство позволяет из написанных оценок заключить, что $F \in \mathcal{R}(X)$ и что имеет место равенство

$$\int\limits_{X \times Y} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_X F(x)\,dx.$$

Мы провели доказательство в случае повторного интегрирования по Y, а затем по X. Ясно, что аналогичные рассуждения можно провести и в случае, когда сначала идет интегрирование по X, а затем по Y. ▶

2. Некоторые следствия.

Следствие 1. *Если $f \in \mathcal{R}(X \times Y)$, то при почти всех (в смысле Лебега) значениях $x \in X$ интеграл $\int\limits_Y f(x, y)\,dy$ существует и при почти всех значениях $y \in Y$ существует интеграл $\int\limits_X f(x, y)\,dx$.*

◀ По доказанной теореме

$$\int\limits_X \left(\overline{\int\limits_Y} f(x, y)\,dy - \underline{\int\limits_Y} f(x, y) \right) dx = 0.$$

Но стоящая в скобках разность верхнего и нижнего интегралов неотрицательна. На основании леммы из § 3 можно заключить, что эта разность равна нулю почти во всех точках $x \in X$. Тогда по критерию Дарбу (теорема 3 § 1) интеграл $\int\limits_Y f(x, y)\,dx$ существует почти при всех значениях $x \in X$.

Аналогично доказывается и вторая часть сделанного утверждения. ▶

Следствие 2. *Если промежуток $I \subset \mathbb{R}^n$ является прямым произведением отрезков $I_i = [a^i, b^i]$, $i = 1, \ldots, n$, то*

$$\int\limits_I f(x)\,dx = \int\limits_{a^n}^{b^n} dx^n \int\limits_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} dx^{n-1} \ldots \int\limits_{a^1}^{b^1} f(x^1, x^2, \ldots, x^n)\,dx^1.$$

◀ Эта формула, очевидно, получается повторным применением доказанной теоремы. Все внутренние интегралы в правой части понимаются, как и в теореме. Например, всюду можно поставить знак верхнего или нижнего интеграла. ▶

Пример 1. Пусть $f(x, y, z) = z \sin(x + y)$. Найдем интеграл от сужения этой функции на промежуток $I \subset \mathbb{R}^3$, определяемый соотношениями $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $|y| \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

По следствию 2

$$\iiint\limits_I f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \int_0^{\pi} z\sin(x+y)\,dx =$$
$$= \int_0^1 dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-z\cos(x+y)\Big|_{x=0}^{\pi}\right) dy = \int_0^1 dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2z\cos y\,dy =$$
$$= \int_0^1 \left(2z\sin y\Big|_{y=-\pi/2}^{\pi/2}\right) dz = \int_0^1 4z\,dz = 2.$$

Доказанную теорему можно использовать и для вычисления интегралов по достаточно общим множествам.

Следствие 3. *Пусть D — ограниченное множество в $\mathbb{R}^{n-1}$, а $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid (x \in D) \wedge (\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x))\}$. Если $f \in \mathcal{R}(E)$, то*

$$\int\limits_E f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_D dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{1}$$

◀ Пусть $E_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$, если $x \in D$ и $E_x = \varnothing$ при $x \notin D$. Заметим, что $\chi_E(x, y) = \chi_D(x) \cdot \chi_{E_x}(y)$. Вспоминая определение интеграла по множеству и используя теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_E f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{I \supset E} f\chi_E(x, y)\,dx\,dy =$$
$$= \int\limits_{I_x \supset D} dx \int\limits_{I_y \supset E_x} f\chi_E(x, y)\,dy = \int\limits_{I_x}\left(\int\limits_{I_y} f(x, y)\chi_{E_x}(y)\,dy\right)\chi_D(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{I_x}\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)\chi_D(x)\,dx = \int\limits_D\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right)dx.$$

Внутренний интеграл здесь тоже может не существовать на некотором множестве точек $x \in D$ меры нуль в смысле Лебега, и тогда ему приписывается тот же смысл, что и в доказанной теореме Фубини. ▶

Замечание. Если в условиях следствия 3 множество D измеримо по Жордану, а функции φ_i: $D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, непрерывны, то множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану.

◀ Граница ∂E множества E состоит из двух графиков непрерывных функций φ_i: $D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ (являющихся в силу примера 2 § 1 множествами меры нуль), и части ∂E прямого произведения границы ∂D множества $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ на достаточно большой одномерный отрезок длины l. По условию ∂D можно покрыть системой $(n-1)$-мерных промежутков, сумма $(n-1)$-мерных объемов которых будет меньше ε/l. Прямое произведение этих промежутков на выбранный отрезок (длины l) даст покрытие множества ∂E промежутками, сумма объемов которых меньше ε. ▶

На основании этого замечания можно сказать, что на измеримом множестве E такой структуры (как и на любом измеримом множестве E) функция $f\colon E \to 1 \in \mathbb{R}$ интегрируема. Опираясь на следствие 3 и на определение меры измеримого множества можно теперь заключить, что справедливо

Следствие 4. *Если в условиях следствия 3 множество E измеримо по Жордану, а функции $\varphi_i\colon D \to \mathbb{R}$, $i=1, 2$, непрерывны, то множество E измеримо и его объем можно вычислять по формуле*

$$\mu(E) = \int_D (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,dx. \tag{2}$$

Пример 2. Для круга $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ по этой формуле получаем

$$\mu(E) = \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - y^2} - \left(-\sqrt{r^2 - y^2}\right)\right) dy = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\,dy =$$

$$= 4\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\,dy = 4\int_0^{\pi/2} r\cos\varphi\,dr\sin\varphi = 4r^2\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\,d\varphi = \pi r^2.$$

Следствие 5. *Пусть E — измеримое множество, лежащее в промежутке $I \subset \mathbb{R}^n$. Представим I в виде прямого произведения $I = I_x \times I_y$ $(n-1)$-мерного промежутка I_x и отрезка I_y. Тогда при почти всех значениях $y_0 \in I_y$ сечение $E_{y_0} = \{(x, y) \in E \mid y = y_0\}$ множества E $(n-1)$-мерной гиперплоскостью $y = y_0$ является измеримым ее подмножеством, причем*

$$\mu(E) = \int_{I_y} \tilde{\mu}(E_y)\,dy, \tag{3}$$

где $\tilde{\mu}(E_y)$ — $(n-1)$-мерная мера множества E_y, если оно измеримо, и любое число между числами $\int_{\underline{E}_y} 1\cdot dx$ и $\int_{\overline{E}_y} 1\cdot dx$, если E_y оказалось неизмеримым множеством.

◀ Следствие 5 вытекает непосредственно из доказанной теоремы и следствия 1, если положить в них $f = \chi_E$ и учесть, что $\chi_E(x, y) = \chi_{E_y}(x)\cdot\chi_{I_x}(y)$. ▶

Отсюда, в частности, получается

Следствие 6 (принцип Кавальери *)).

Пусть A и B — два тела в пространстве $\mathbb{R}^3$, имеющие объем (т. е. измеримые по Жордану). Пусть $A_c = \{(x, y, z) \in A \mid z = c\}$ и $B_c = \{(x, y, z) \in B \mid z = c\}$ — сечения тел A и B плоскостью $z = c$. Если при каждом $c \in \mathbb{R}$ множества A_c, B_c измеримы и имеют одинаковую площадь, то тела A и B имеют одинаковые объемы.

---

*) Б. Кавальери (1598—1647) — итальянский математик, автор так называемого метода неделимых для определения площадей и объемов.

Ясно, что принцип Кавальери можно сформулировать и для пространства $\mathbb{R}^n$ любой размерности.

Пример 3. Используя формулу (3), вычислим объем V_n шара $B=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\leqslant r\}$ радиуса r в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, $V_1=2r$. В примере 2 мы нашли, что $V_2=\pi r^2$. Покажем, что $V_n=c_nr^n$, где c_n — постоянная (которую мы ниже вычислим). Выберем какой-нибудь диаметр $[-r, r]$ шара и для каждой точки $x\in[-r, r]$ рассмотрим сечение B_x шара B гиперплоскостью, ортогональной выбранному диаметру. Поскольку B_x есть шар размерности $n-1$, радиус которого по теореме Пифагора равен $\sqrt{r^2-x^2}$, то, действуя по индукции и используя формулу (3), можно написать:

$$V_n=\int_{-r}^{r} c_{n-1}(r^2-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx=\left(c_{n-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n\varphi\,d\varphi\right)r^n.$$

(При переходе к последнему равенству, как видно, была сделана замена $x=r\sin\varphi$.)

Итак, показано, что $V_n=c_nr^n$, причем

$$c_n=c_{n-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n\varphi\,d\varphi. \tag{4}$$

Теперь найдем постоянную c_n в явном виде. Заметим, что при $m\geqslant 2$

$$I_m=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^m\varphi\,d\varphi=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{m-2}\varphi\,(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=I_{m-2}+\frac{1}{m-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\varphi\,d\cos^{m-1}\varphi=I_{m-2}-\frac{1}{m-1}I_m,$$

т. е. имеет место рекуррентное соотношение

$$I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2}. \tag{5}$$

В частности, $I_2=\pi/2$. Непосредственно из определения величины I_m видно, что $I_1=2$. Учитывая эти значения I_1 и I_2, из рекуррентной формулы (5) находим, что

$$I_{2k+1}=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot 2,\quad I_{2k}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi. \tag{6}$$

Возвращаясь к формуле (4), теперь получаем

$$c_{2k+1}=c_{2k}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot 2=c_{2k-1}\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot 2\,\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi=\ldots=c_1\cdot\frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!},$$

$$c_{2k}=c_{2k-1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi=c_{2k-2}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi\cdot\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\cdot 2=\ldots=c_2\frac{(2\pi)^{k-1}}{(2k)!!}\cdot 2.$$

Но, как мы видели выше, $c_1=2$, а $c_2=\pi$, поэтому окончательные формулы для искомого объема V_n таковы:

$$V_{2k+1}=2\frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!}r^{2k+1},\quad V_{2k}=\frac{(2\pi)^k}{(2k)!!}r^{2k}, \tag{7}$$

где $k\in\mathbb{N}$, причем первая из этих формул справедлива и при $k=0$.

Задачи и упражнения

1. a. Постройте такое подмножество квадрата $I\subset\mathbb{R}^2$, что, с одной стороны, его пересечение с любой вертикальной и любой горизонтальной прямой состоит не более чем из одной точки, а, с другой стороны, замыкание этого множества совпадает с I.

b Постройте функцию $f\colon I\to\mathbb{R}$, для которой оба участвующих в теореме Фубини повторных интеграла существуют и равны между собой, в то время как $f\notin\mathcal{R}(I)$

c. Покажите на примере, что если значения участвующей в теореме Фубини функции $F(x)$, подчиненные там условиям $\underline{\mathcal{J}}(x)\leqslant F(x)\leqslant\overline{\mathcal{J}}(x)$, в точках, где $\underline{\mathcal{J}}(x)<\overline{\mathcal{J}}(x)$, просто положить равными нулю, то функция F может оказаться неинтегрируемой. (Рассмотрите, например, в $\mathbb{R}^2$ функцию $f(x, y)$, равную единице, если точка $(x, y)\in\mathbb{R}^2$ не является рациональной, и равную $1-1/q$ в рациональной точке $(p/q,\ m/n)$, где обе дроби несократимы.)

2. a. В связи с формулой (3) покажите, что если все сечения ограниченного множества E семейством параллельных гиперплоскостей измеримы, то это еще не означает, что E измеримо.

b. Пусть в дополнение к условиям a известно, что функция $\mu(E_y)$ из формулы (3) интегрируема на отрезке I_y Можно ли в этом случае утверждать, что E — измеримое множество?

3. Используя теорему Фубини и положительность интеграла от положительной функции, дайте простое доказательство равенства $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ смешанных производных, в предположении, что они являются непрерывными функциями

4. Пусть $f\colon I_{a,b}\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, определенная на промежутке $I_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid a^i\leqslant x^i\leqslant b^i,\ i=1, \ldots, n\}$, а функция $F.\ I_{a,b}\to\mathbb{R}$, определена равенством

$$F(x)=\int\limits_{I_{a,x}}f(t)\,dt,$$

где $I_{a,x}\subset I_{a,b}$ Найдите частные производные этой функции по переменным $x^1, \ldots, x^n$.

5. Определенная на прямоугольнике $I=[a, b]\times[c, d]\subset\mathbb{R}^2$ непрерывная функция $f(x, y)$ имеет непрерывную в I частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$.

a. Пусть $F(y)=\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$. Исходя из равенства $F(y)=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^y\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\,dt+f(x, c)\right)dx$, проверьте *правило Лейбница*, согласно которому $F'(y)=\int\limits_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx$.

b. Пусть $G(x, y) = \int\limits_a^x f(t, y)\, dt$. Найдите $\frac{\partial G}{\partial x}$ и $\frac{\partial G}{\partial y}$.

c. Пусть $H(y) = \int\limits_a^{h(y)} f(x, y)\, dx$, где $h \in C^{(1)}[a, b]$. Найдите $H'(y)$.

6. Рассмотрим последовательность интегралов

$$F_0(x) = \int\limits_0^x f(y)\, dy, \quad F_n(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f(y)\, dy, \qquad n \in \mathbb{N},$$

где $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a. Проверьте, что $F_n'(x) = F_{n-1}(x)$; $F_n^{(k)}(0) = 0$, если $k \leqslant n$; $F_n^{(n+1)}(x) = f(x)$.

b. Покажите, что

$$\int\limits_0^x dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n = \frac{1}{n!} \int\limits_0^x (x-y)^n f(y)\, dy.$$

7. a. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — функция, непрерывная на множестве $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant y \leqslant x\}$. Докажите, что

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x, y)\, dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x, y)\, dx.$$

b. На примере повторного интеграла $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} 1 \cdot dy$ объясните, почему не каждый повторный интеграл является расписанным по теореме Фубини двойным интегралом.

§ 5. Замена переменных в кратном интеграле

1. Постановка вопроса и эвристический вывод формулы замены переменных. Рассматривая интеграл в одномерном случае, мы получили в свое время важную формулу замены переменной в таком интеграле. Теперь наша задача состоит в том, чтобы найти формулу замены переменных в общем случае. Уточним вопрос.

Пусть D_x — множество в $\mathbb{R}^n$, f — интегрируемая на D_x функция, а $\varphi\colon D_t \to D_x$ — отображение $(t \longmapsto \varphi(t))$ множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на D_x. Спрашивается, по какому закону, зная f и φ, находить функцию ψ в D_t так, чтобы иметь равенство

$$\int\limits_{D_x} f(x)\, dx = \int\limits_{D_t} \psi(t)\, dt,$$

позволяющее сводить вычисление интеграла по D_x к вычислению интеграла по D_t?

Предположим сначала, что D_t есть промежуток $I \subset \mathbb{R}^n$, а $\varphi\colon I \to D_x$ — диффеоморфное отображение этого промежутка на D_x.

Любому разбиению P промежутка I на промежутки $I_1, I_2, \ldots, I_k$ соответствует разложение D_x на множества $\varphi(I_i)$, $i=1, \ldots, k$. Если все эти множества измеримы и пересекаются попарно лишь по множествам меры нуль, то в силу аддитивности интеграла

$$\int_{D_x} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi(I_i)} f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если f непрерывна на D_x, то по теореме о среднем

$$\int_{\varphi(I_i)} f(x)\,dx = f(\xi_i)\,\mu(\varphi(I_i)),$$

где $\xi_i \in \varphi(I_i)$. Поскольку $f(\xi_i)=f(\varphi(\tau_i))$, где $\tau_i=\varphi^{-1}(\xi_i)$, то нам остается связать $\mu(\varphi(I_i))$ с $\mu(I_i)$.

Если бы φ было линейным преобразованием, то $\varphi(I_i)$ был бы параллелепипед, объем которого, как известно из аналитической геометрии и алгебры, был бы равен $|\det\varphi'|\,\mu(I_i)$. Но диффеоморфизм локально является почти линейным отображением, поэтому, если размеры промежутков I_i достаточно малы, то с малой относительной погрешностью можно считать, что $\mu(\varphi(I_i)) \approx \approx |\det\varphi'(\tau_i)|\,|I_i|$ (можно показать, что при некотором выборе точки $\tau_i \in I_i$ будет иметь место даже точное равенство). Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi(I_i)} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{k} f(\varphi(\tau_i)\,|\det\varphi'(\tau_i)|\,|I_i|. \qquad (2)$$

Но справа в этом приближенном равенстве стоит интегральная сумма от функции $f(\varphi(t))\,|\det\varphi'(t)|$ по промежутку I, отвечающая разбиению P этого промежутка с отмеченными точками τ. В пределе при $\lambda(P)\to 0$ из (1) и (2) получаем

$$\int_{D_x} f(x)\,dx = \int_{D_t} f(\varphi(t))\,|\det\varphi'(t)|\,dt.$$

Это и есть искомая формула. Намеченный путь к ней можно пройти со всеми обоснованиями, однако чтобы избежать утомительных технических трудностей, мы в дальнейшем доказательстве кое в чем отклонимся от этого пути.

Перейдем к точным формулировкам. Напомним

Определение 1 *Носителем* заданной в области $D\subset\mathbb{R}^n$ *функции* $f\colon D\to\mathbb{R}$ назовем замыкание в D множества тех точек области D, в которых $f(x)\neq 0$.

В этом параграфе мы рассмотрим ситуацию, когда интегрируемая функция $f\colon D_x\to\mathbb{R}$ равна нулю в окрестности границы области D_x, точнее, когда носитель функции D_x (обозначаемый

$\operatorname{supp} f$) является лежащим в D_x компактом *) $\mathscr{K}$. Интегралы от f по D_x и по $\mathscr{K}$, если они существуют, очевидно, совпадают, поскольку вне $\mathscr{K}$ в D функция равна нулю. С точки зрения отображений, условие $\operatorname{supp} f = \mathscr{K} \subset D_x$ равносильно тому, что замена $x = \varphi(t)$ действует не только на множестве $\mathscr{K}$, по которому в сущности и надо интегрировать, но и в некоторой окрестности D_x этого множества.

Теперь сформулируем, что мы собираемся доказать.

Теорема 1. *Если $\varphi\colon D_t \to D_x$ — диффеоморфизм ограниченного открытого множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на такое же множество $D_x = \varphi(D_t) \subset \mathbb{R}^n$, а $f \in \mathscr{R}(D_x)$ и $\operatorname{supp} f$ — компакт в D_x, то $f \circ \varphi \,|\det \varphi'| \in \mathscr{R}(D_t)$ и справедлива формула*

$$\boxed{\int\limits_{D_x = \varphi(D_t)} f(x)\,dx = \int\limits_{D_t} f \circ \varphi(t)\,|\det \varphi'(t)|\,dt.} \tag{3}$$

2. Измеримые множества и гладкие отображения.

Лемма 1. *Пусть $\varphi\colon D_t \to D_x$ — диффеоморфизм (класса $C^{(1)}(D_t, D_x)$) открытого множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на такое же множество $D_x \subset \mathbb{R}^n$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) *Если $E_t \subset D_t$ — множество меры нуль (в смысле Лебега), то его образ $\varphi(E_t) \subset D_x$ также является множеством меры нуль.*

b) *Если множество E_t, содержащееся в D_t вместе со своим замыканием $\bar{E}_t$, имеет объем нуль (в смысле меры Жордана), то его образ $\varphi(E_t) = E_x$ содержится в D_x вместе со своим замыканием и тоже имеет объем нуль.*

c) *Если измеримое (по Жордану) множество E_t содержится в области D_t вместе со своим замыканием $\bar{E}_t$, то его образ $E_x = \varphi(E_t)$ является измеримым множеством и $\bar{E}_x \subset D_x$.*

◀ Заметим, прежде всего, что любое открытое подмножество D пространства $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых промежутков (которые к тому же попарно не имеют общих внутренних точек). Для этого, например, можно разбить координатные оси на отрезки длины Δ и рассмотреть соответствующее разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ на кубики с ребрами длины Δ. Фиксировав $\Delta = 1$, возьмем те кубики этого разбиения, которые содержатся в D. Обозначим через F_1 их объединение. Взяв далее $\Delta = 1/2$ добавим к F_1 те кубики нового разбиения, которые содержатся в $D \setminus F_1$. Получим множество F_2 и т. д. Продолжая процесс, получим последовательность $F_1 \subset \ldots \ldots \subset F_n \subset \ldots$ множеств, каждое из которых состоит из конечного или счетного числа промежутков, не имеющих общих внутренних точек и, как видно из построения, $\bigcup F_n = D$.

---

*) Такие функции обычно называют *финитными* в рассматриваемой области.

Поскольку объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль является множеством меры нуль, утверждение а), таким образом, достаточно проверить для множества E_t, лежащего в замкнутом промежутке $I \subset D_t$. Это мы и сделаем.

Поскольку $\varphi \in C^{(1)}(I)$ (т. е. $\varphi' \in C(I)$), то существует постоянная M такая, что $\|\varphi'(t)\| \leqslant M$ на I. В силу теоремы о конечном приращении для любой пары точек $t_1, t_2 \in I$ и их образов $x_1 = \varphi(t_1)$, $x_2 = \varphi(t_2)$ должно тогда выполняться соотношение $|x_2 - x_1| \leqslant M|t_2 - t_1|$.

Пусть теперь $\{I_i\}$ — такое покрытие множества E_t промежутками, что $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon$. Без ограничения общности можно считать, что $I_i = I_i \cap I \subset I$.

Совокупность $\{\varphi(I_i)\}$ множеств $\varphi(I_i)$, очевидно, образует покрытие множества $E_x = \varphi(E_t)$. Если t_i — центр промежутка I_i, то ввиду установленной выше оценки возможного изменения расстояний при отображении φ все множество $\varphi(I_i)$ можно накрыть таким промежутком $\tilde{I}_i$ с центром $x_i = \varphi(t_i)$, линейные элементы которого в M раз отличаются от соответствующих элементов промежутка I_i. Поскольку $|\tilde{I}_i| = M^n|I_i|$, а $\varphi(E_t) \subset \bigcup\limits_i \tilde{I}_i$, то мы получили покрытие множества $\varphi(E_t) = E_x$ промежутками, сумма объемов которых меньше чем $M^n\varepsilon$. Тем самым основное утверждение а) леммы доказано.

Утверждение b) следует из а), если учесть, что $\bar{E}_t$, а значит, по доказанному и $\bar{E}_x = \varphi(\bar{E}_t)$ суть множества меры нуль в смысле Лебега и что $\bar{E}_t$, а значит и $\bar{E}_x$ — компакты. Ведь в силу леммы 3 § 1 всякий компакт, являющийся множеством меры нуль в смысле Лебега, имеет объем нуль.

Наконец, утверждение с) получается непосредственно из b), если вспомнить определение измеримого множества и то, что при диффеоморфизме внутренние точки множества E_t перейдут во внутренние точки его образа $E_x = \varphi(E_t)$, а значит, $\partial E_x = \varphi(\partial E_t)$. ►

Следствие. *При условиях теоремы стоящий в правой части формулы* (3) *интеграл существует.*

◄ Поскольку $|\det \varphi'(t)| \neq 0$ в D_t, то $\operatorname{supp} f \circ \varphi \cdot |\det \varphi'| = \operatorname{supp} f \circ \varphi = \varphi^{-1}(\operatorname{supp} f)$ — компакт в D_t. Значит, точки разрыва функции $f \circ \varphi \cdot |\det \varphi'| \chi_{D_t}$ в $\mathbb{R}^n$ совсем не связаны с функцией χ_{D_t}, а являются прообразами точек разрыва функции f в D_x. Но $f \in \mathcal{R}(D_x)$, поэтому совокупность E_x точек разрыва функции f в D_x является множеством меры нуль по Лебегу. Тогда по утверждению а) доказанной леммы множество $E_t = \varphi^{-1}(E_x)$ имеет меру нуль. На основании критерия Лебега теперь можно заключить, что функция $f \circ \varphi |\det \varphi'| \chi_{D_t}$ интегрируема на любом промежутке $I_t \supset D_t$. ►

3. Одномерный случай.

Лемма 2. a) *Если* $\varphi\colon I_t \to I_x$ — *диффеоморфизм отрезка* $I_t \subset \mathbb{R}^1$ *на отрезок* $I_x \subset \mathbb{R}^1$, *а* $f \in \mathcal{R}(I_x)$, *то* $f \circ \varphi \cdot |\varphi'| \in \mathcal{R}(I_t)$ *и*

$$\int\limits_{I_x} f(x)\,dx = \int\limits_{I_t} (f \circ \varphi \cdot |\varphi'|)(t)\,dt. \tag{4}$$

b) *Формула* (3) *справедлива в* $\mathbb{R}^1$.

◀ Хотя утверждение а) леммы 2 нам, по существу, уже известно, мы дадим здесь независимое от изложенного в части I его короткое доказательство, использующее имеющийся теперь в нашем распоряжении критерий Лебега существования интеграла.

Поскольку $f \in \mathcal{R}(I_x)$, а $\varphi\colon I_t \to I_x$ — диффеоморфизм, функция $f \circ \varphi |\varphi'|$ ограничена на I_t. Точками разрыва этой функции могут быть только прообразы точек разрыва функции f на I_x. Последние по критерию Лебега образуют множество меры нуль. Образ этого множества при диффеоморфизме $\varphi^{-1}\colon I_x \to I_t$, как мы видели при доказательстве леммы 1, имеет меру нуль. Значит, $f \circ \varphi |\varphi'| \in \mathcal{R}(I_t)$.

Пусть P_x — разбиение отрезка I_x. Посредством отображения φ^{-1} оно индуцирует разбиение P_t отрезка I_t, причем из равномерной непрерывности отображений φ и φ^{-1} следует, что $\lambda(P_x) \to 0 \Leftrightarrow \lambda(P_t) \to 0$. Для разбиений P_x, P_t с отмеченными точками $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ запишем интегральные суммы:

$$\sum_i f(\xi_i)\,|x_i - x_{i-1}| = \sum_i f \circ \varphi(\tau_i)\,|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = \\ = \sum_i f \circ \varphi(\tau_i)\,|\varphi'(\tau_i)|\,|t_i - t_{i-1}|,$$

причем точки ξ_i можно считать выбранными именно так, что $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, где τ_i — точка, получаемая применением теоремы Лагранжа к разности $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$.

Поскольку оба интеграла в соотношении (4) существуют, выбор отмеченных точек в интегральных суммах можно делать по своему усмотрению, не влияя на величину предела. Значит, из написанного равенства интегральных сумм в пределе при $\lambda(P_x) \to 0$ $(\lambda(P_t) \to 0)$ получается равенство (4) для интегралов.

Утверждение b) леммы 2 вытекает из доказанного равенства (4). Прежде всего отметим, что в одномерном случае $|\det \varphi'| = |\varphi'|$. Далее, компакт $\operatorname{supp} f$ легко покрыть конечной системой отрезков, лежащих в D_x и попарно не имеющих общих внутренних точек. Тогда интеграл от f по множеству D_x сведется к сумме интегралов от f по отрезкам указанной системы, а интеграл от $f \circ \varphi |\varphi'|$ по D_t сведется к сумме интегралов по отрезкам, являющимся прообразами отрезков этой системы. Применяя к каждой паре соответствующих друг другу при отображении φ отрезков равенство (4), после сложения получаем формулу (3). ▶

Замечание 1. Доказанная нами ранее формула замены переменной в одномерном интеграле имела вид

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f\circ\varphi\cdot\varphi')(t)\,dt, \tag{5}$$

где φ было любым гладким отображением отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок с концами $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$. В формуле (5) стоит не модуль $|\varphi'|$ производной, а сама производная. Это связано с тем, что в левой части формулы (5) может быть $\varphi(\beta) < \varphi(\alpha)$.

Если, однако, заметить, что для отрезка I с концами a и b имеют место соотношения

$$\int_I f(x)\,dx = \begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx, & \text{если} \quad a \leqslant b, \\ -\int_a^b f(x)\,dx, & \text{если} \quad a > b, \end{cases}$$

то становится ясно, что в случае, когда φ — диффеоморфизм, формулы (4) и (5) отличаются лишь внешним видом, а по существу совпадают.

Замечание 2. Интересно отметить (и этим мы не преминем воспользоваться), что если $\varphi\colon I_t \to I_x$ — диффеоморфизм отрезков, то всегда справедливы формулы

$$\bar{\int_{I_x}} f(x)\,dx = \bar{\int_{I_t}} (f\circ\varphi\,|\varphi'|)(t)\,dt,$$

$$\underline{\int_{I_x}} f(x)\,dx = \underline{\int_{I_t}} (f\circ\varphi\,|\varphi'|)(t)\,dt,$$

относящиеся к верхним и нижним интегралам от вещественнозначных функций.

А если это так, то, значит, в одномерном случае можно считать установленным, что формула (3) остается в силе для любой ограниченной функции f, если интегралы в ней понимать как верхние или как нижние интегралы Дарбу.

◀ Будем временно считать, что f — неотрицательная функция, ограниченная константой M.

Снова, как и при доказательстве утверждения а) леммы 2, можно взять отвечающие друг другу в силу отображения φ разбиения P_x, P_t отрезков I_x и I_t соответственно и написать следующие оценки, в которых ε — максимальное из колебаний функции φ на промежутках разбиения P_t:

$$\sum_i \sup_{x\in\Delta x_i} f(x)\,|x_i-x_{i-1}| \leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} f(\varphi(t)) \sup_{t\in\Delta t_i} |\varphi'(t)|\,|t_i-t_{i-1}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} \Big(f(\varphi(t))\cdot \sup_{t\in\Delta t_i} |\varphi'(t)|\Big)|\Delta t_i| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} \big(f(\varphi(t))(|\varphi'(t)|+\varepsilon)\big)|\Delta t_i| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} \big(f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\big)|\Delta t_i| + \varepsilon \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} f(\varphi(t))\,|\Delta t_i| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} \big(f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\big)|\Delta t_i| + \varepsilon M\,|I_t|.$$

Учитывая равномерную непрерывность φ, отсюда при $\lambda(P_t)\to 0$ получаем

$$\bar{\int\limits_{I_x}} f(x)\,dx \leqslant \bar{\int\limits_{I_t}} (f\circ\varphi\,|\varphi'|)(t)\,dt.$$

Применяя доказанное к отображению φ^{-1} и функции $f\circ\varphi\,|\varphi'|$, получаем обратное неравенство и устанавливаем тем самым для неотрицательных функций первое из равенств замечания 2. Но поскольку любую функцию можно представить в виде $f = \max\{f, 0\} - \max\{-f, 0\}$ (разности неотрицательных), то это равенство можно считать доказанным и в общем случае Аналогично проверяется и второе равенство. ▶

Из доказанных равенств, конечно, можно вновь получить утверждение а) леммы 2 в случае вещественнозначной функции f.

4. Случай простейшего диффеоморфизма в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\varphi\colon D_t\to D_x$ — диффеоморфизм области $D_t\subset\mathbb{R}^n_t$ на область $D_x\subset\mathbb{R}^n_x$; $(t^1, \ldots, t^n)$, $(x^1, \ldots, x^n)$ — координаты точек $t\in\mathbb{R}^n_t$ и $x\in\mathbb{R}^n_x$ соответственно. Напомним

Определение 2. Диффеоморфизм $\varphi\colon D_t\to D_x$ называется *простейшим*, если его координатная запись имеет вид

$$\begin{aligned}
x^1 &= \varphi^1(t^1, \ldots, t^n) = t^1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x^{k-1} &= \varphi^{k-1}(t^1, \ldots, t^n) = t^{k-1},\\
x^k &= \varphi^k(t^1, \ldots, t^n) = \varphi^k(t^1, \ldots, t^k, \ldots, t^n),\\
x^{k+1} &= \varphi^{k+1}(t^1, \ldots, t^n) = t^{k+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x^n &= \varphi^n(t^1, \ldots, t^n) = t^n.
\end{aligned}$$

Таким образом, при простейшем диффеоморфизме меняется только одна из координат (в данном случае координата с индексом k)

Лемма 3. *Для простейшего диффеоморфизма $\varphi\colon D_t \to D_x$ формула (3) верна.*

◀ С точностью до перенумерации координат можно считать, что рассматривается диффеоморфизм φ, меняющий только n-ю координату.

Введем для удобства записи следующие обозначения:

$$(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n) =: (\tilde{x}, x^n); \quad (t^1, \ldots, t^{n-1}, t^n) = (\tilde{t}, t^n);$$
$$D_{x^n}(\tilde{x}_0) := \{(\tilde{x}, x^n) \in D_x \mid \tilde{x} = \tilde{x}_0\};$$
$$D_{t^n}(\tilde{t}_0) := \{(\tilde{t}, t^n) \in D_t \mid \tilde{t} = \tilde{t}_0\}.$$

Таким образом, $D_{x^n}(\tilde{x})$, $D_{t^n}(\tilde{t})$ — это просто одномерные сечения множеств D_x и D_t соответственно прямыми, параллельными n-й координатной оси. Пусть I_x — промежуток в $\mathbb{R}^n_x$, содержащий D_x. Представим I_x в виде прямого произведения $I_x = I_{\tilde{x}} \times I_{x^n}$ $(n-1)$-мерного промежутка $I_{\tilde{x}}$ и отрезка I_{x^n} n-й координатной оси. Аналогичное разложение $I_t = I_{\tilde{t}} \times I_{t^n}$ запишем для иксированного в $\mathbb{R}^n_t$ промежутка I_t, содержащего D_t.

Используя определение интеграла по множеству, теорему Фубини и замечание 2, можно написать, что

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \int\limits_{I_x} f \cdot \chi_{D_x}(x)\,dx = \int\limits_{I_{\tilde{x}}} d\tilde{x} \int\limits_{I_{x^n}} f \cdot \chi_{D_x}(\tilde{x}, x^n)\,dx^n =$$
$$= \int\limits_{I_{\tilde{x}}} d\tilde{x} \int\limits_{D_{x^n}(\tilde{x})} f(\tilde{x}, x^n)\,dx^n =$$
$$= \int\limits_{I_{\tilde{t}}} d\tilde{t} \int\limits_{D_{t^n}(\tilde{t})} f(\tilde{t}, \varphi^n(\tilde{t}, t^n)) \left|\frac{\partial \varphi^n}{\partial t^n}\right| (\tilde{t}, t^n)\,dt^n =$$
$$= \int\limits_{I_{\tilde{t}}} d\tilde{t} \int\limits_{I_{t^n}} \big(f \circ \varphi \,|\det \varphi'|\, \chi_{D_t}\big)(\tilde{t}, t^n)\,dt^n =$$
$$= \int\limits_{I_t} \big(f \circ \varphi \,|\det \varphi'|\, \chi_{D_t}\big)(t)\,dt = \int\limits_{D_t} (f \circ \varphi \,|\det \varphi'|)(t)\,dt.$$

В этой выкладке мы учли также то обстоятельство, что для рассматриваемого диффеоморфизма $\det \varphi' = \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^n}$. ▶

5. Композиция отображений и формула замены переменных.

Лемма 4. *Если $D_\tau \xrightarrow{\psi} D_t \xrightarrow{\varphi} D_x$ — два диффеоморфизма, для каждого из которых справедлива формула (3) замены переменных в интеграле, то она справедлива и для композиции $\varphi \circ \psi\colon D_\tau \to D_x$ этих отображений.*

◀ Для доказательства достаточно вспомнить, что $(\varphi \circ \psi)' = \varphi' \circ \psi'$ и что $\det(\varphi \circ \psi)'(\tau) = \det \varphi'(t) \det \psi'(\tau)$, где $t = \varphi(\tau)$.

Действительно, тогда получаем, что

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \int\limits_{D_t} (f\circ\varphi\,|\det\varphi'|)(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{D_\tau} ((f\circ\varphi\circ\psi)\,|\det\varphi'\circ\psi|\,|\det\psi'|)(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{D_\tau} ((f\circ(\varphi\circ\psi))\,|\det(\varphi\circ\psi)'|))(\tau)\,d\tau. \ \blacktriangleright$$

6. Аддитивность интеграла и завершение доказательства формулы замены переменных в интеграле. Леммы 3 и 4 наводят на мысль воспользоваться возможностью локального разложения любого диффеоморфизма в композицию простейших (см. утверждение 2 из п. 4 § 6 гл. VIII часть I) и на этом пути получить в общем случае формулу (3).

Сводить интеграл по множеству к интегралам по малым окрестностям его точек можно по-разному. Например, можно воспользоваться аддитивностью интеграла. Так мы и поступим. Опираясь на леммы 1, 3, 4, проведем теперь доказательство теоремы 1 о замене переменных в кратном интеграле.

◀ Для каждой точки t компакта $\mathscr{K}_t = \operatorname{supp}((f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|) \subset D_t$ построим такую ее $\delta(t)$-окрестность $U(t)$, в которой диффеоморфизм φ раскладывается в композицию простейших. Из $\frac{\delta(t)}{2}$-окрестностей $\tilde{U}(t) \subset U(t)$ точек $t \in \mathscr{K}_t$ выделим конечное покрытие $\tilde{U}(t_1), \ldots, \tilde{U}(t_k)$ компакта $\mathscr{K}_t$. Пусть $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta(t_1), \ldots, \delta(t_k)\}$. Тогда любое множество, диаметр которого меньше чем δ, и которое пересекается с $\mathscr{K}_t$, очевидно, содержится вместе со своим замыканием хотя бы в одной из окрестностей системы $U(t_1), \ldots, U(t_k)$.

Пусть теперь I — промежуток, содержащий множество D_t, а P — такое разбиение промежутка I, что $\lambda(P) < \min\{\delta, d\}$, где число δ найдено выше, а d — расстояние от $\mathscr{K}_t$ до границы множества D_t. Пусть $\{I_i\}$ — те промежутки разбиения P, которые имеют с $\mathscr{K}_t$ непустое пересечение. Ясно, что если $I_i \in \{I_i\}$, то $I_i \subset D_t$ и

$$\int\limits_{D_t} (f\circ\varphi\,|\det\varphi'|)(t)\,dt = \int\limits_{I} ((f\circ\varphi\,|\det\varphi'|)\chi_{D_t})(t)\,dt =$$

$$= \sum_i \int\limits_{I_i} (f\circ\varphi\,|\det\varphi'|)(t)\,dt. \qquad (6)$$

Образ $E_i = \varphi(I_i)$ промежутков I_i по лемме 1 является измеримым множеством. Тогда и множество $E = \bigcup_i E_i$ измеримо, и $\operatorname{supp} f \subset E = \bar{E} \subset D_x$. Используя аддитивность интеграла, отсюда выводим, что

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \int\limits_{I_x \supset D_x} f\chi_{D_x}(x)\,dx = \int\limits_{I_x \setminus E} f\chi_{D_x}(x)\,dx + \int\limits_{E} f\chi_{D_x}(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{E} f\chi_{D_x}(x)\,dx = \int\limits_{E} f(x)\,dx = \sum_i \int\limits_{E_i} f(x)\,dx \qquad (7)$$

По построению любой промежуток $I_i \in \{I_i\}$ содержится в некоторой окрестности $U(x_j)$, в пределах которой диффеоморфизм φ раскладывается в композицию простейших. Значит, на основании лемм 3 и 4 можно записать, что

$$\int\limits_{E_i} f(x)\,dx = \int\limits_{I_i} (f \circ \varphi\,|\det \varphi'|)(t)\,dt. \qquad (8)$$

Сопоставляя соотношения (6), (7), (8), получаем формулу (3). ►

7. Некоторые следствия и обобщения формулы замены переменных в кратных интегралах.

a. Замена переменных при отображениях измеримых множеств.

Утверждение 1. *Пусть $\varphi\colon D_t \to D_x$ — диффеоморфизм открытого ограниченного множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на такое же множество $D_x \subset \mathbb{R}^n$; E_t и E_x — подмножества D_t и D_x соответственно, причем такие, что $\overline{E}_t \subset D_t$, $\overline{E}_x = D_x$ и $E_x = \varphi(E_t)$. Если $f \in \mathcal{R}(E_x)$, то $f \circ \varphi\,|\det \varphi'| \in \mathcal{R}(E_t)$ и имеет место равенство*

$$\int\limits_{E_x} f(x)\,dx = \int\limits_{E_t} (f \circ \varphi\,|\det \varphi'|)(t)\,dt. \qquad (9)$$

◄ Действительно,

$$\int\limits_{E_x} f(x)\,dx = \int\limits_{D_x} (f\chi_{E_x})(x)\,dx = \int\limits_{D_t} (((f\chi_{E_x}) \circ \varphi)\,|\det \varphi'|)(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{D_t} ((f \circ \varphi)\,|\det \varphi'|\,\chi_{E_t})(t)\,dt = \int\limits_{E_t} ((f \circ \varphi)\,|\det \varphi'|)(t)\,dt.$$

В этой выкладке мы использовали определение интеграла по множеству, формулу 3 и то обстоятельство, что $\chi_{E_t} = \chi_{E_x} \circ \varphi$ ►

b. Инвариантность интеграла. Напомним, что интеграл по множеству E от функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ сводится к вычислению интеграла от функции $f\chi_E$ по промежутку $I \supset E$. Но сам промежуток I был по определению связан с системой декартовых координат в $\mathbb{R}^n$. Теперь мы в состоянии доказать

Утверждение 2. *Величина интеграла от функции f по множеству $E \subset \mathbb{R}^n$ не зависит от выбора декартовых координат в $\mathbb{R}^n$.*

◄ Действительно, переход от одной системы декартовых координат в $\mathbb{R}^n$ к другой такой же системе имеет якобиан, по модулю равный единице. В силу утверждения 1 отсюда следует равенство

$$\int_{E_x} f(x)\,dx = \int_{E_t} (f \circ \varphi)(t)\,dt.$$

Но это и означает, что интеграл определен инвариантно: ведь если p — точка множества E, $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — ее координаты в первой системе, а $t = (t^1, \ldots, t^n)$ — во второй, а $x = \varphi(t)$ — функция перехода от одних координат к другим, то

$$f(p) = f_x(x^1, \ldots, x^n) = f_t(t^1, \ldots, t^n),$$

где $f_t = f_x \circ \varphi$. Значит, мы показали, что

$$\int_{E_x} f_x(x)\,dx = \int_{E_t} f_t(t)\,dt,$$

где E_x и E_t — запись множества E в системе координат x и t соответственно. ▶

Из утверждения 2 и определения 3 § 2 меры (Жордана) множества $E \subset \mathbb{R}^n$ можно заключить, что эта мера не зависит от выбора системы декартовых координат в $\mathbb{R}^n$, или, что то же самое, мера Жордана инвариантна относительно группы движений евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

c. **Пренебрежимые множества.** Используемые на практике замены переменных или формулы преобразования координат иногда имеют те или иные особенности (например, где-то может быть нарушение взаимной однозначности, обращение в нуль якобиана или отсутствие дифференцируемости). Как правило, эти особенности бывают на множествах меры нуль и потому для потребностей практики весьма полезна следующая

Теорема 2. *Пусть $\varphi\colon D_t \to D_x$ — отображение измеримого (по Жордану) множества $D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ на такое же множество $D_x \subset \mathbb{R}^n_x$. Предположим, что в D_t и D_x можно указать такие множества S_t, S_x меры нуль (в смысле Лебега), что $D_t \setminus S_t$ и $D_x \setminus S_x$ — открытые множества, а φ отображает диффеоморфно и с ограниченным якобианом первое из них на второе. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{R}(D_x)$ также $(f \circ \varphi)\,|\det \varphi'| \in \mathcal{R}(D_t \setminus S_t)$ и*

$$\int_{D_x} f(x)\,dx = \int_{D_t \setminus S_t} ((f \circ \varphi)\,|\det \varphi'|)(t)\,dt. \tag{10}$$

Если, кроме того, величина $|\det \varphi'|$ определена и ограничена в D_t, то

$$\int_{D_x} f(x)\,dx = \int_{D_t} ((f \circ \varphi)\,|\det \varphi'|)(t)\,dt. \tag{11}$$

◀ По критерию Лебега функция f может иметь разрывы в D_x, а значит, и в $D_x \setminus S_x$, лишь на множестве меры нуль. Образ этого множества точек разрыва при отображении φ^{-1}: $D_x \setminus S_x \to D_t \setminus S_t$ по лемме 1 является множеством меры нуль в $D_t \setminus S_t$. Таким образом, соотношение $(f\cdot\varphi)\,|\det\varphi'| \in \mathcal{R}(D_t \setminus S_t)$ будет немедленно следовать из того же критерия Лебега интегрируемости функции, если мы установим, что множество $D_t \setminus S_t$ измеримо. То, что это действительное измеримое по Жордану множество, будет побочным продуктом проводимых ниже рассуждений.

По условию $D_x \setminus S_x$ — открытое множество, поэтому $(D_x \setminus S_x) \cap \partial S_x = \varnothing$, значит, $\partial S_x \subset \partial D_x \cup S_x$ и, следовательно, $\partial D_x \cup S_x = \partial D_x \cup \bar{S}_x$, где $\bar{S}_x = S_x \cup \partial S_x$ — замыкание в $\mathbb{R}^n_x$ множества S_x. Получается, что $\partial D_x \cup S_x$ есть замкнутое ограниченное множество, т. е. компакт в $\mathbb{R}^n$, который, как объединение двух множеств меры нуль, сам является множеством меры нуль в смысле Лебега. Из леммы 3 § 1 нам известно, что тогда множество $\partial D_x \cup S_x$ (а вместе с ним и S_x) имеет объем нуль, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное покрытие $I_1, \ldots, I_k$ этого множества промежутками, что $\sum_{i=1}^{k} |I_i| < \varepsilon$. Отсюда, в частности, следует, что множество $D_x \setminus S_x$ (и аналогично множество $D_t \setminus S_t$) измеримо по Жордану: ведь $\partial(D_x \setminus S_x) \subset \partial D_x \cup \partial S_x \subset \partial D_x \cup S_x$.

Покрытие $I_1, \ldots, I_k$, очевидно, можно выбрать еще и так, чтобы любая точка $x \in \partial D_x \setminus S_x$ была внутренней точкой по крайней мере одного из промежутков покрытия. Пусть $U_x = \bigcup_{i=1}^{k} I_i$. Множество U_x измеримо, как и множество $V_x = D_x \setminus U_x$. По построению множество V_x таково, что $\bar{V}_x \subset D_x \setminus S_x$, и для любого измеримого множества $E_x \subset D_x$, которое содержит компакт $\bar{V}_x$, справедлива оценка

$$\left| \int_{D_x} f(x)\,dx - \int_{E_x} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{D_x \setminus E_x} f(x)\,dx \right| \leqslant \leqslant M\mu(D_x \setminus E_x) < M\cdot\varepsilon, \tag{12}$$

где $M = \sup_{x \in D_x} f(x)$.

Прообраз $\bar{V}_t = \varphi^{-1}(\bar{V}_x)$ компакта $\bar{V}_x$ является компактом в $D_t \setminus S_t$. Рассуждая, как и выше, можно построить измеримый компакт W_t, подчиненный условиям $\bar{V}_t \subset W_t \subset D_t \setminus S_t$ и обладающий тем свойством, что для любого измеримого множества E_t такого, что $W_t \subset E_t \subset D_t \setminus S_t$, выполняется оценка

$$\left| \int_{D_t \setminus S_t} ((f\cdot\varphi)\,|\det\varphi'|)(t)\,dt - \int_{E_t} ((f\cdot\varphi)\,|\det\varphi'|)(t)\,dt \right| < \varepsilon. \tag{13}$$

Пусть теперь $E_x = \varphi(E_t)$. Для множеств $E_x \subset D_x \setminus S_x$ и $E_t \subset D_t \setminus S_t$ по утверждению 1 имеет место формула (9). Сопоставляя соотношения (9), (12), (13) и учитывая произвольность величины $\varepsilon > 0$, получаем равенство (10).

Докажем теперь последнее утверждение теоремы 2. Если функция $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ определена на всем множестве D_t, то, поскольку $D_t\setminus S_t$ открыто в $\mathbb{R}^n_t$, все множество точек разрыва этой функции на D_t состоит из множества A точек разрыва функции $(f\circ\varphi)|\det\varphi'||_{D_t\setminus S_t}$ (сужения исходной функции на множество $D_t\setminus S_t$) и, быть может, некоторого подмножества B множества $S_t\cup\partial D_t$.

Множество A, как мы видели, является множеством меры нуль по Лебегу (ведь интеграл в правой части равенства (10) существует), а поскольку $S_t\cup\partial D_t$ имеет объем нуль, то это же можно сказать про множество B. Значит, достаточно знать, что функция $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ ограничена на D_t, как по критерию Лебега получится, что она интегрируема на D_t. Но $|f\circ\varphi|(t)\leqslant M$ на D_t, поэтому функция $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ ограничена на S_t, коль скоро функция $|\det\varphi'|$ по условию ограничена на S_t. Что же касается множества $D_t\setminus S_t$, то на нем функция $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ интегрируема и, значит, ограничена. Итак, функция $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ интегрируема на D_t. Но множества D_t и $D_t\setminus S_t$ отличаются лишь на измеримое множество S_t, объем которого, как было показано, равен нулю. Значит, в силу аддитивности интеграла и обращения в нуль интеграла по S_t можно заключить, что правые части равенств (10) и (11) в рассматриваемом случае действительно совпадают. ▶

Пример. Отображение прямоугольника $I=\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\leqslant r\leqslant R\wedge 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$ на круг $\mathscr{K}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\leqslant R^2\}$, задаваемое формулами

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi, \tag{14}$$

не является диффеоморфизмом: вся сторона прямоугольника I на которой $r=0$, переходит при этом отображении в одну точку $(0, 0)$; образы точек $(r, 0)$ в $(r, 2\pi)$ совпадают. Однако если рассмотреть, например, множества $I\setminus\partial I$ и $\mathscr{K}\setminus E$, где E — объединение границы $\partial\mathscr{K}$ круга $\mathscr{K}$ и радиуса, идущего в точку $(0, R)$, то сужение отображения (14) на область $I\setminus\partial I$ окажется ее диффеоморфизмом на область $\mathscr{K}\setminus E$. Значит, по теореме 2 для любой функции $f\in\mathscr{R}(\mathscr{K})$ можно написать, что

$$\iint\limits_{\mathscr{K}} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{I} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

или, применяя теорему Фубини,

$$\iint\limits_{\mathscr{K}} f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{R} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr.$$

Соотношения (14) суть хорошо известные формулы перехода от полярных координат к декартовым на плоскости.

Сказанное можно, естественно, развить и применительно к общей полярной (сферической) системе координат в $\mathbb{R}^n$, которую мы рассматривали в части I, где был указан также якобиан перехода от полярных координат к декартовым в пространстве $\mathbb{R}^n$ любой размерности.

Задачи и упражнения

1. a. Покажите, что лемма 1 справедлива для любого гладкого отображения $\varphi\colon D_t \to D_x$ (см в этой связи также задачу 8)

b. Докажите, что если D — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, а $\varphi \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$, то $\varphi(D)$ при $m < n$ является множеством меры нуль в $\mathbb{R}^n$.

2. a Проверьте, что мера измеримого множества E и мера его образа $\varphi(E)$ при диффеоморфизме φ связаны соотношением $\mu(\varphi(E)) = \theta\mu(E)$, где $\theta \in \left[\inf\limits_{t\in E} |\det \varphi'(t)|, \sup\limits_{t\in E} |\det \varphi'(t)|\right]$

b В частности, если E — связное множество, то найдется такая точка $\tau \in E$, что $\mu(\varphi(E)) = |\det \varphi'(\tau)|\,\mu(E)$.

3. a. Покажите, что если формула (3) справедлива для функции $f \equiv 1$, то она верна и в общем случае

b Проведите вновь доказательство теоремы 1, но для случая $f \equiv 1$, упрощая его в этой специальной ситуации

4. Не опираясь на замечание 2, проведите доказательство леммы 3, считая известным лемму 2 и равенство интегралов от двух интегрируемых функций, отличающихся лишь на множестве меры нуль

5. Вместо свойства аддитивности интеграла и сопутствующего его использованию анализа измеримости множеств, при сведении формулы (3) к ее локальному варианту (т е к проверке формулы для малой окрестности точек отображаемой области) можно пользоваться другим приемом локализации, основанным на линейности интеграла

a Если гладкие функции $e_1, \ldots, e_k$ таковы, что $0 \leq e_i \leq 1$, $i = 1, \ldots, k$, а $\sum\limits_{i}^{k} e_i(x) \equiv 1$ на D_x, то $\int\limits_{D_x} \left(\sum\limits_{i=1}^{k} e_i f\right)(x)\,dx = \int\limits_{D_x} f(x)\,dx$ для любой функции $f \in \mathcal{R}(D_x)$

b. Если $\operatorname{supp} e_i$ лежит в множестве $U \subset D_x$, то $\int\limits_{D_x} (e_i f)(x)\,dx = \int\limits_{U} (e_i f)(x)\,dx$

c. С учетом лемм 3 и 4 и свойства линейности интеграла из a и b можно вывести формулу (3), если для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ компакта $\mathcal{K} = \operatorname{supp} f \subset D_x$ построить такой набор гладких в D_x функций $e_1, \ldots, e_k$, что $0 \leq e_i \leq 1$, $i = 1, \ldots, k$; $\sum\limits_{i=1}^{k} e_i \equiv 1$ на $\mathcal{K}$; и для любой функции $e_i \in \{e_i\}$ найдется множество $U_{\alpha_i} \in \{U_\alpha\}$ такое, что $\operatorname{supp} e_i \subset U_{\alpha_i}$.

Набор $\{e_i\}$ в этом случае называют *разбиением единицы на компакте* $\mathcal{K}$, *подчиненным покрытию* U_α.

6. Эта задача содержит план построения того разбиения единицы, о котором шла речь в задаче 5.

a. Постройте функцию $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ такую, что $f|_{[-1,1]} \equiv 1$ и $\operatorname{supp} f \subset [-1-\delta, 1+\delta]$, где $\delta > 0$.

b Постройте функцию $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ с указанными в a свойствами для единичного кубика в $\mathbb{R}^n$ и его δ-раздутия.

c. Покажите, что для любого открытого покрытия компакта $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ существует гладкое разбиение единицы на $\mathcal{K}$, подчиненное этому покрытию

d. В развитие c постройте $C^{(\infty)}$-разбиение единицы в $\mathbb{R}^n$, подчиненное локально конечному открытому покрытию всего пространства. (Локальная конечность покрытия означает, что любая точка покрываемого множества, в данном случае $\mathbb{R}^n$, имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом элементов покрытия. Для разбиения единицы, содержащего бесконечное число функций $\{e_i\}$, вводится требование, чтобы любая точка множества, на котором это разбиение строится, принадлежала не более чем конечному числу носителей функций системы $\{e_i\}$. При этом условии не возникает вопросов о том, в каком смысле понимать равенство $\sum\limits_i e_i \equiv 1$, точнее, стоящую в его левой части сумму.)

7. Несколько иное в сравнении с изложенным доказательство теоремы 1, опирающееся на возможность разложения лишь линейного отображения в композицию простейших и более близкое к указанным в п. 1 эвристическим соображениям, можно получить, доказав последовательно следующие утверждения.

a. Проверьте, что при простейших линейных отображениях $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ вида $(x^1, \dots, x^k, \dots, x^n) \longmapsto (x^1, \dots, x^{k-1}, \lambda x^k, x^{k+1}, \dots, x^n)$, $\lambda \neq 0$ и $(x^1, \dots, x^k, \dots, x^n) \longmapsto (x^1, \dots, x^{k-1}, x^k + x^j, x^{k+1}, \dots, x^n)$ для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ выполнено соотношение $\mu(L(E)) = |\det L'|\,\mu(E)$ и докажите, что это соотношение справедливо для любого линейного отображения $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. (Используйте теорему Фубини и возможность разложения линейного преобразования в композицию указанных простейших.)

b. Покажите, что если $\varphi: D_t \to D_x$ — диффеоморфизм, то для любого измеримого компакта $\mathscr{K} \subset D_t$ и его образа $\varphi(\mathscr{K})$ имеет место соотношение $\mu(\varphi(\mathscr{K})) \leqslant \int\limits_{K} |\det \varphi'(t)|\,dt$. (Если $a \in D_t$, то $\exists (\varphi'(a))^{-1}$ и в представлении $\varphi(t) = (\varphi'(a) \circ (\varphi'(a))^{-1} \circ \varphi)(t)$ отображение $\varphi'(a)$ линейное, а отображение $(\varphi'(a))^{-1} \circ \varphi$ близко к тождественному в окрестности точки a.)

c. Покажите, что если рассматриваемая в теореме 1 функция f неотрицательна, то $\int\limits_{D_x} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{D_t} ((f \circ \varphi)\,|\det \varphi'|)(t)\,dt$.

d. Применив предыдущее неравенство к функции $(f \circ \varphi)\,|\det \varphi'|$ и отображению $\varphi^{-1}: D_x \to D_t$, покажите, что для неотрицательной функции f формула (3) верна.

e. Представив функцию f из теоремы 1 в виде разности интегрируемых неотрицательных функций, докажите справедливость формулы (3).

8. Лемма Сарда. *Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$ и S — множество критических точек отображения φ. Тогда $\varphi(S)$ является множеством меры нуль (в смысле Лебега).*

Напомним, что *критической точкой гладкого отображения* φ области $D \subset \mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^n$ называлась такая точка $x \in D$, в которой $\operatorname{rang} \varphi'(x) < \min\{m, n\}$. В случае $m = n$ это равносильно условию $\det \varphi'(x) = 0$.

a. Проверьте лемму Сарда для линейного отображения.

b. Пусть I — промежуток в области D, а $\varphi \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$. Покажите, что существует такая функция $\alpha(h)$, $\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$ и $|\varphi(x+h) - \varphi(x) - \varphi'(x)h| \leqslant \alpha(h)\,|h|$ при любых $x, x+h \in I$.

c. Используя b, оцените уклонение образа $\varphi(I)$ промежутка I при отображении φ от его же образа при линейном отображении $L(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a)$, где $a \in I$.

d. Опираясь на a, b, c, покажите, что если S — множество критических точек отображения φ в промежутке I, то $\varphi(S)$ есть множество меры нуль.

e. Закончите теперь доказательство леммы Сарда.

f. Используя лемму Сарда, покажите, что в теореме 1 достаточно потребовать, чтобы отображение φ было взаимно однозначным отображением класса $C^{(1)}(D_t, D_x)$.

Отметим, что приведенная лемма Сарда является простым частным случаем теоремы Сарда и Морса, по которой утверждение леммы справедливо, даже если $D \subset \mathbb{R}^m$, а $\varphi \in C^{(k)}(D, \mathbb{R}^n)$, где $k = \max\{m - n + 1, 1\}$. Величина k здесь, как показал на примере Уитни, не может быть уменьшена, каково бы ни было сочетание чисел m и n.

В геометрии лемма Сарда известна как утверждение о том, что если φ: $D \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение открытого множества $D \subset \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, то для почти всех точек $x \in \varphi(D)$ их полный прообраз $\varphi^{-1}(x) = M_x$ в D есть поверхность (многообразие) коразмерности n в $\mathbb{R}^m$ (т е. $m - \dim M_x = n$ для почти всех $x \in D$)

9. Пусть вместо диффеоморфизма φ в теореме 1 рассматривается произвольное отображение $\varphi \in C^{(1)}(D_t, D_x)$ такое, что $\det \varphi'(t) \neq 0$ в D_t. Пусть $n(x) = \operatorname{card}\{t \in \operatorname{supp}(f \circ \varphi) \mid \varphi(t) = x\}$, т. е. $n(x)$ — число точек носителя функции $f \circ \varphi$, которые при отображении φ: $D_t \to D_x$ переходят в точку $x \in D_x$ Имеет место следующая формула:

$$\int\limits_{D_x} (f \cdot n)(x)\, dx = \int\limits_{D_t} ((f \circ \varphi) \mid \det \varphi' \mid)(t)\, dt.$$

a, Какой геометрический смысл этой формулы при $f \equiv 1$?

b. Докажите эту формулу для специального отображения кольца $D_t = \{t \in \mathbb{R}^2_t \mid 1 < |t| < 2\}$ на кольцо $D_x = \{x \in \mathbb{R}^2_x \mid 1 < |x| < 2\}$, если в полярных координатах (r, φ) и (ρ, θ) плоскостей $\mathbb{R}^2_x$ и $\mathbb{R}^2_t$ соответственно это отображение записывается формулами $r = \rho$, $\varphi = 2\theta$.

c. Попробуйте теперь доказать формулу в общем виде.

§ 6. Несобственные кратные интегралы

1. Основные определения.

Определение 1. *Исчерпанием множества* $E \subset \mathbb{R}^m$ *будем называть такую последовательность измеримых множеств* $\{E_n\}$, *что* $E_n \subset E_{n+1} \subset E$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Лемма. *Если* $\{E_n\}$ — *исчерпание измеримого множества* E, *то*:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$;

b) *для любой функции* $f \in \mathcal{R}(E)$ *также* $f|_{E_n} \in \mathcal{R}(E_n)$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f(x)\, dx = \int\limits_{E} f(x)\, dx.$$

◀ a) Поскольку $E_n \subset E_{n+1} \subset E$, то $\mu(E_n) \leqslant \mu(E_{n+1}) \leqslant \mu(E)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) \leqslant \mu(E)$. Для доказательства равенства a) покажем, что выполняется также неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) \geqslant \mu(E)$.

Граница ∂E множества E имеет объем нуль, поэтому ее можно покрыть конечным числом открытых промежутков, сумма объемов которых меньше наперед заданной величины $\varepsilon > 0$. Пусть Δ — объединение всех этих открытых промежутков. Тогда множество $E \cup \Delta =: \tilde{E}$ открыто в $\mathbb{R}^n$, причем по построению $\tilde{E}$ содержит замыкание $\bar{E}$ множества E и $\mu(\tilde{E}) \leqslant \mu(E) + \mu(\Delta) < \mu(E) + \varepsilon$.

Для каждого множества E_n исчерпания $\{E_n\}$ можно повторить описанное построение со значением $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$. Тогда получим последовательность открытых множеств $\tilde{E}_n = E_n \cup \Delta_n$ таких, что $E_n \subset \tilde{E}_n$, $\mu(\tilde{E}_n) \leqslant \mu(E_n) + \mu(\Delta_n) < \mu(E_n) + \varepsilon_n$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n \supset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \supset E$.

Система открытых множеств Δ, $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, ... образует открытое покрытие компакта $\bar{E}$.

Пусть Δ, $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, ..., $\tilde{E}_k$ — извлеченное из него конечное покрытие компакта $\bar{E}$. Поскольку $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_k$, то множества Δ, Δ_1, ..., Δ_k, E_k тоже образуют покрытие $\bar{E}$ и, значит,

$$\mu(E) \leqslant \mu(\bar{E}) \leqslant \mu(E_k) + \mu(\Delta) + \mu(\Delta_1) + \ldots + (\Delta_k) < \mu(E_k) + 2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\mu(E) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

b). То, что $f|_{E_n} \in \mathcal{R}(E_n)$, нам хорошо известно и следует из критерия Лебега существование интеграла по измеримому множеству. По условию $f \in \mathcal{R}(E)$, значит, существует постоянная M такая, что $|f(x)| \leqslant M$ на E. Из аддитивности интеграла и общей оценки интеграла получаем

$$\left| \int\limits_E f(x)\,dx - \int\limits_{E_n} f(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_{E \setminus E_n} f(x)\,dx \right| \leqslant M\mu(E \setminus E_n).$$

Отсюда с учетом доказанного в а) заключаем, что утверждение b) действительно имеет место. ▶

Определение 2. Пусть $\{E_n\}$ — исчерпание множества E, а функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ интегрируема на множествах $E_n \in \{E_n\}$. Тогда величина

$$\int\limits_E f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f(x)\,dx,$$

если указанный предел существует и его величина не зависит от выбора любого такого исчерпания множества E, называется *несобственным интегралом от функции f по множеству E*.

Стоящий в левой части последнего равенства символ интеграла обычно пишут для любой заданной на E функции, но говорят, что этот *интеграл существует* или *сходится*, если существует указанный в определении 2 предел Если же такого общего для всех указанных исчерпаний предела не существует, то говорят, что интеграл от функции f по множеству E не существует или что *интеграл расходится*.

Цель определения 2 состоит в том, чтобы распространить понятие интеграла на случай неограниченной подынтегральной функции или неограниченной области интегрирования.

Введенный символ несобственного интеграла совпадает с символом обычного — собственного интеграла, поэтому необходимо

Замечание 1. Если E — измеримое множество и $f \in \mathcal{R}(E)$, то интеграл от f по E в смысле определения 2 существует и совпадает с собственным интегралом от функции f по множеству E.

◀ Именно об этом говорит утверждение b) доказанной выше леммы. ▶

Совокупность всех исчерпаний любого сколь-нибудь обильного множества практически необозрима, да всеми исчерпаниями и не пользуются. Проверку сходимости несобственного интеграла часто облегчает

Утверждение 1. *Если функция $f\colon E\to\mathbb{R}$ неотрицательна и хотя бы для одного исчерпания $\{E_n\}$ множества E указанный в определении 2 предел существует, то несобственный интеграл от функции f по множеству E сходится.*

◀ Пусть $\{E'_k\}$ — другое исчерпание множества E, на элементах которого функция f интегрируема. Множества $E^k_n := E'_k\cap E_n$, $n=1, 2, \ldots$, образуют исчерпание измеримого множества E'_k, поэтому из утверждения b) леммы следует, что

$$\int\limits_{E'_k} f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{E^k_n} f(x)\,dx\leqslant\lim_{n\to\infty}\int\limits_{E_n} f(x)\,dx=A.$$

Поскольку $f\geqslant 0$, а $E'_k\subset E'_{k+1}\subset E$, то

$$\exists\lim_{m\to\infty}\int\limits_{E'_k} f(x)\,dx=B\leqslant A.$$

Но теперь исчерпания $\{E_n\}$, $\{E'_n\}$ равноправны, поэтому $A\leqslant B$ и, значит, $A=B$. ▶

Пример 1. Найдем несобственный интеграл $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

Будем исчерпывать плоскость $\mathbb{R}^2$ последовательностью кругов $E_n=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<n^2\}$. После перехода к полярным координатам легко получаем, что

$$\iint\limits_{E_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0 e^{-r^2}r\,dr=\pi\left(1-e^{-n^2}\right)\to\pi$$

при $n\to\infty$.

В силу утверждения 1 уже можно заключить, что рассматриваемый интеграл сходится и равен π.

Из полученного результата можно извлечь полезное следствие, если рассмотреть теперь исчерпание плоскости квадратами $E'_n=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\mid |x|<n\wedge|y|<n\}$. По теореме Фубини

$$\iint\limits_{E'_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int\limits_{-n}^{n} dy\int\limits_{-n}^{n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx=\left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-t^2}\,dt\right)^2.$$

В силу утверждения 1 последняя величина при $n\to\infty$ должна стремиться к π. Таким образом, мы вслед за Эйлером и Пуассоном получаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$

Некоторые дополнительные не вполне очевидные на первый взгляд особенности определения 2 несобственного кратного интеграла будут указаны ниже в замечании 3.

2. Мажорантный признак сходимости несобственного интеграла.

Утверждение 2. *Пусть f и g — определенные на множестве E и интегрируемые на одних и тех же его измеримых подмножествах функции, причем $|f|(x) \leqslant g(x)$ на E. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_E g(x)\,dx$ вытекает сходимость интегралов $\int\limits_E |f|(x)\,dx$ и $\int\limits_E f(x)\,dx$.*

◀ Пусть $\{E_n\}$ — исчерпание множества E, на элементах которого обе функции g и f интегрируемы. Из критерия Лебега вытекает интегрируемость функции $|f|$ на множествах E_n, $n \in \mathbb{N}$, поэтому можно записать, что

$$\int\limits_{E_{n+k}} |f|(x)\,dx - \int\limits_{E_n} |f|(x)\,dx = \int\limits_{E_{n+k}\setminus E_n} |f|(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{E_{n+k}\setminus E_n} g(x)\,dx = \int\limits_{E_{n+k}} g(x)\,dx - \int\limits_{E_n} g(x)\,dx,$$

где k и n — любые натуральные числа. Эти неравенства с учетом утверждения 1 и критерия Коши существования предела последовательности позволяют заключить, что интеграл $\int\limits_E |f|(x)\,dx$ сходится.

Рассмотрим теперь функции $f_+ := \frac{1}{2}(|f|+f)$, $f_- := \frac{1}{2}(|f|-f)$. Очевидно, $0 \leqslant f_+ \leqslant |f|$ и $0 \leqslant f_- \leqslant |f|$. В силу уже доказанного несобственные интегралы от функций f_+ и f_- по множеству E сходятся. Но $f = f_+ - f_-$, значит, сходится и несобственный интеграл от функции f по этому же множеству (и он равен разности интегралов от функций f_+ и f_-). ▶

Для того чтобы утверждением 2 можно было эффективно пользоваться при исследовании сходимости несобственных интегралов, полезно иметь некоторый набор эталонных функций для сравнения. Рассмотрим в этой связи

Пример 2. В n-мерном единичном шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ с выколотым центром 0 рассматривается функция $1/r^\alpha$, где $r = d(0, x)$ — расстояние от точки $x \in B\setminus 0$ до точки 0. Выясним, при каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ интеграл от этой функции по области $B\setminus 0$ сходится. Для этого построим исчерпание области кольцевыми областями $B(\varepsilon) = \{x \in B \mid \varepsilon < d(0, x) < 1\}$.

Переходя к полярным координатам с центром 0, по теореме Фубини получаем

$$\int\limits_{B(\varepsilon)} \frac{dx}{r^\alpha(x)} = \int\limits_S f(\varphi)\,d\varphi \int\limits_\varepsilon^1 \frac{r^{n-1}\,dr}{r^\alpha} = c\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^{\alpha-n+1}},$$

где $d\varphi = d\varphi_1 \cdot \ldots \cdot d\varphi_{n-1}$, $f(\varphi)$ — некоторое произведение синусов углов $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}$, появляющееся в якобиане перехода к полярным координатам в $\mathbb{R}^n$, а c — величина интеграла по S, которая зависит только от n и не зависит от r и ε.

При $\varepsilon \to +0$ полученная величина интеграла по $B(\varepsilon)$ будет иметь конечный предел, если $\alpha < n$. В остальных случаях последний интеграл стремится к бесконечности, когда $\varepsilon \to +0$.

Итак, мы показали, что функция $\frac{1}{d^\alpha(0, x)}$, где d — расстояние до точки 0, интегрируется в проколотой окрестности этой точки, лишь при $\alpha < n$, где n — размерность пространства.

Аналогично показывается, что вне шара B, т. е. в окрестности бесконечности, эта же функция интегрируется в несобственном смысле, лишь когда $\alpha > n$.

Пример 3. Пусть $I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x^i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n\}$ — n-мерный куб, а I_k — его k-мерная грань, задаваемая условиями $x^{k+1} = \ldots = x^n = 0$. На множестве $I \setminus I_k$ рассмотрим функцию $\frac{1}{d^\alpha(x)}$, где $d(x)$ — расстояние от точки $x \in I \setminus I_k$ до грани I_k. Выясним, при каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ интеграл от этой функции по множеству $I \setminus I_k$ сходится.

Заметим, что если $x = (x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n)$, то $d(x) = \sqrt{(x^{k+1})^2 + \ldots + (x^n)^2}$.

Пусть $I(\varepsilon)$ — это куб I, из которого удалена ε-окрестность грани I_k. По теореме Фубини

$$\int\limits_{I(\varepsilon)} \frac{dx}{d^\alpha(x)} = \int\limits_{I_k} dx^1 \ldots dx^k \int\limits_{I_{n-k}(\varepsilon)} \frac{dx^{k+1} \ldots dx^n}{((x^{k+1})^2 + \ldots + (x^n)^2)^{\alpha/2}} = \int\limits_{I_{n-\varepsilon}(\varepsilon)} \frac{du}{|u|^\alpha},$$

где $u = (x^{k+1}, \ldots, x^n)$, $I_{n-k}(\varepsilon)$ — грань $I_{n-k} \subset \mathbb{R}^{n-k}$, из которой удалена ε окрестность точки $u = 0$.

Но на базе приобретенного в примере 1 опыта ясно, что последний интеграл сходится лишь при $\alpha < n - k$. Значит, рассматриваемый нами несобственный интеграл сходится лишь при $\alpha < n - k$, где k — размерность грани, около которой функция может неограниченно возрастать.

Замечание 2. При доказательстве утверждения 2 было проверено, что сходимость интеграла от функции $|f|$ влечет сходимость интеграла от функции f. Оказывается, для несобственного в смысле определения 2 интеграла верно и обратное утверждение, чего не было в рассматривавшемся нами прежде случае несобственного интеграла на прямой, где мы различали абсолютную и неабсолютную (условную) сходимости несобственного интеграла. Чтобы сразу понять суть возникшего нового явления, связанного с определением 2, рассмотрим следующий

Пример 4. Пусть функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ определена на множестве $\mathbb{R}_+$ неотрицательных чисел следующими условиями: $f(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, если $n-1 \leqslant x < n$, $n \in \mathbb{N}$.

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится, то, как легко видеть, предел при $A \to +\infty$ интеграла $\int\limits_0^A f(x)\,dx$ существует и равен сумме указанного ряда. Однако этот ряд не сходится абсолютно, и перестановкой его членов можно получить ряд, например, расходящийся к $+\infty$. Частичные суммы нового ряда можно интерпретировать как интегралы от функции f по объединению E_n соответствующих членам ряда отрезков вещественной оси. Множества E_n в совокупности, очевидно, образуют исчерпание области $\mathbb{R}_+$ задания функции f.

Таким образом, несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx$ от предъявленной функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ в прежнем его понимании существует, а в смысле определения 2 не существует.

Мы видим, что требуемая в определении 2 независимость предела от выбора исчерпания эквивалентна независимости суммы ряда от порядка суммирования его членов. Последнее, как нам известно, в точности равносильно абсолютной сходимости.

На самом-то деле практически всегда приходится рассматривать лишь специальные исчерпания следующего вида. Пусть определенная в области D функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ неограничена в окрестности некоторого множества $E \subset \partial D$ Тогда мы удаляем из D точки, лежащие в ε-окрестности множества E, и получаем область $D(\varepsilon) \subset D$. При $\varepsilon \to 0$ эти области порождают исчерпание D. Если же область неограниченная, то ее исчерпание можно получить, взяв дополнения в D к окрестностям бесконечности. Именно такие специальные исчерпания мы в свое время и рассматривали в одномерном случае, и именно эти специальные исчерпания непосредственно ведут к обобщению на случай пространства любой размерности понятия главного (в смысле Коши) значения несобственного интеграла, о котором мы в свое время уже говорили, изучая несобственные интегралы на прямой.

3. Замена переменных в несобственном интеграле. В заключение получим формулу замены переменных в несобственных интегралах и тем самым сделаем весьма ценное, хотя и очень простое дополнение к теоремам 1 и 2 из § 5.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi\colon D_t \to D_x$ — *диффеоморфное отображение открытого множества* $D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ *на такое же множество* $D_x \subset$

$\subset \mathbb{R}^n_x$, а функция $f\colon D_x \to \mathbb{R}$ интегрируема на измеримых компактных подмножествах множества D_x. Если несобственный интеграл $\int\limits_{D_x} f(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_{D_t} ((f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|)(t)\,dt$ также сходится и их значения совпадают.

◀ Открытое множество $D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ можно исчерпать последовательностью лежащих в D_t компактов E^k_t, $k \in \mathbb{N}$, каждый из которых является объединением конечного числа промежутков пространства $\mathbb{R}^n_t$ (см. в этой связи начало доказательства леммы 1 из § 5). Поскольку $\varphi\colon D_t \to D_x$ — диффеоморфизм, исчерпанию $\{E^k_t\}$ множества D_t отвечает исчерпание $\{E^k_x\}$ множества D_x, где $E^k_x = \varphi(E^k_t)$ — измеримые компакты в D_x (измеримость множеств E^k_x следует из леммы 1, § 5). В силу утверждения 1 из § 5 можно записать, что

$$\int\limits_{E^k_x} f(x)\,dx = \int\limits_{E^k_t} ((f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|)(t)\,dt.$$

Левая часть этого равенства при $k\to\infty$ по условию имеет предел. Значит, правая часть при $k\to\infty$ тоже имеет и притом тот же предел. ▶

Замечание 3. Приведенным рассуждением проверено, что стоящий в правой части последнего равенства интеграл имеет один и тот же предел при любом исчерпании D_t указанного специального вида. В дальнейшем мы будем использовать именно эту доказанную часть теоремы. Но формально для завершения доказательства сформулированного утверждения необходимо в соответствии с определением 2 проверить, что найденный предел существует для любого исчерпания области D_t. Эту (не вполне элементарную проверку) мы оставляем читателю в качестве хорошего упражнения. Заметим только, что из доказанного уже можно извлечь сходимость несобственного интеграла от функции $|f\circ\varphi|\times$ $\times|\det\varphi'|$ по множеству D_t (см. задачу 7).

Теорема 2. *Пусть $\varphi\colon D_t \to D_x$ — отображение открытых множеств D_t и D_x. Предположим, что в D_t и D_x можно указать такие множества S_t, S_x меры нуль, что $D_t\setminus S_t$, $D_x\setminus S_x$ — открытые множества, а φ диффеоморфно отображает первое из них на второе. Если при этих условиях несобственный интеграл $\int\limits_{D_x} f(x)\,dx$ сходится, то сходится также интеграл $\int\limits_{D_t\setminus S_t} ((f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|)(t)\,dt$ и их значения совпадают. Если к тому же величина $|\det\varphi'|$ определена и ограничена на компактных подмножествах множества D_t, то функция $(f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|$ интегрируема в несобственном* *смысле по множеству* D_t *и имеет место равенство*

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx=\int\limits_{D_t}((f\circ\varphi)\,|\det\varphi'\,|)(t)\,dt.$$

◀ Сформулированное утверждение является прямым следствием теоремы 1 настоящего параграфа и теоремы 2 из § 5, если учесть, что при отыскании несобственного интеграла по открытому множеству можно ограничиться рассмотрением исчерпаний, состоящих из измеримых компактов (см. замечание 3). ▶

Пример 5. Вычислим интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2<1}\frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$, который при $\alpha>0$ является несобственным, поскольку тогда подынтегральная функция неограничена в окрестности окружности $x^2+y^2=1$.

Переходя к полярным координатам, по теореме 2 получаем

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1}\frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}=\iint\limits_{\substack{0<\varphi<2\pi\\0<r<1}}\frac{r\,dr\,d\varphi}{(1-r^2)^\alpha}.$$

При $\alpha>0$ последний интеграл тоже несобственный, но, поскольку подынтегральная функция неотрицательна, его можно вычислять как предел по специальному исчерпанию прямоугольника $I=\{(r,\ \varphi)\in\mathbb{R}^2\,|\,0<\varphi<2\pi\wedge0<r<1\}$ прямоугольниками $I_n=\left\{(r,\ \varphi)\in\mathbb{R}^2\,|\,0<\varphi<2\pi\wedge0<r<1-\frac{1}{n}\right\}$, $n\in\mathbb{N}$. Используя теорему Фубини, находим, что при $\alpha<1$

$$\iint\limits_{\substack{0<\varphi<2\pi\\0<r<1}}\frac{r\,dr\,d\varphi}{(1-r^2)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{r\,dr}{(1-r^2)^\alpha}=\frac{\pi}{1-\alpha}.$$

На основе этих же соображений можно сделать вывод, что исходный интеграл при $\alpha\geqslant1$ расходится.

Пример 6. Покажем, что несобственный интеграл $\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$ сходится лишь при условии $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$.

◀ Ввиду очевидной симметрии достаточно рассмотреть интеграл только по области D, в которой $x\geqslant0$, $y\geqslant0$ и $x+y\geqslant1$.

Ясно, что для сходимости интеграла необходимо одновременное выполнение условий $p>0$ и $q>0$. Действительно, если бы, например, было $p\leqslant0$, то уже для интеграла по прямоугольнику $I_A=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\,|\,1\leqslant x\leqslant A\wedge0\leqslant y\leqslant1\}$, лежащему в D, мы бы получили оценку

$$\iint\limits_{I_A}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}=\int\limits_1^A dx\int\limits_0^1\frac{dy}{x^p+y^q}\geqslant\int\limits_1^A dx\int\limits_0^1\frac{dy}{1+y^q}=(A-1)\int\limits_0^1\frac{dy}{1+y^q},$$

которая показывает, что при $A \to +\infty$ этот интеграл неограниченно возрастает. Таким образом, в дальнейших рассмотрениях можно считать, что $p > 0$ и $q > 0$.

В ограниченной части области D подынтегральная функция не имеет особенностей, поэтому исследование сходимости нашего интеграла равносильно исследованию сходимости интеграла от той же функции, но, например, по той части G области D, где $x^p + y^q \geqslant a > 0$. Число a предполагается достаточно большим, чтобы кривая $x^p + y^q = a$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ лежала в D.

Переходя к обобщенным полярным координатам φ по формулам

$$x = (r\cos^2\varphi)^{1/p}, \quad y = (r\sin^2\varphi)^{1/q},$$

на основании теоремы 2 получаем

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^p + y^q} = \frac{2}{p\cdot q} \iint\limits_{\substack{0<\varphi<\pi/2\\ a\leqslant r<\infty}} \left(r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} \cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi \sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi \right) dr\,d\varphi.$$

Используя исчерпание области $\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \varphi < \pi/2 \wedge a \leqslant \leqslant r < \infty\}$ промежутками $I_{\varepsilon A} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \pi/2 - - \varepsilon \wedge a \leqslant r \leqslant A\}$ и применяя теорему Фубини, получаем

$$\iint\limits_{\substack{0<\varphi<\pi/2\\ a\leqslant r<\infty}} \left(r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} \cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi \sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi \right) dr\,d\varphi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi \sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\,d\varphi \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2}\,dr.$$

Поскольку $p > 0$ и $q > 0$, первый из этих пределов заведомо конечен, а второй конечен, лишь когда $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. ▶

Задачи и упражнения

1. Укажите условие на параметры p, q, при котором интеграл $\iint\limits_{0<|x|+|y|\leqslant 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p + |y|^q}$ сходится.

2. a. Существует ли $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_0^A \cos x^2\,dx$?

b. Сходится ли интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^1} \cos x^2\,dx$ в смысле определения 2?

c. Проверив, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{|x|\leqslant n} \sin(x^2 + y^2)\,dx\,dy = \pi$$

и

$$\lim_{n\to 0} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n} \sin(x^2 + y^2)\,dx\,dy = 0,$$

убедитесь, что интеграл от $\sin(x^2 + y^2)$ по плоскости $\mathbb{R}^2$ расходится

3. a. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}$.

b. Следует быть осторожным, применяя теорему Фубини к несобственным (как, впрочем, и к собственным) интегралам. Покажите, что интеграл $\iint\limits_{x\geqslant 1,\ y\geqslant 1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$ расходится, в то время как оба повторных интеграла $\int\limits_1^{+\infty} dx \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy$ и $\int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$ сходятся.

c. Докажите, что если $f\in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ и $f\geqslant 0$ в $\mathbb{R}^2$, то из существования любого из двух повторных интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx$ вытекает, что интеграл $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dx\,dy$ сходится и равен значению этого повторного интеграла.

4. Покажите, что если $f\in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,dx=f(0).$$

5. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, а S — гладкая k-мерная поверхность, лежащая на границе области D Покажите, что если функция $f\in C(D, \mathbb{R})$ допускает оценку $|f|<\frac{1}{d^{n-k-\varepsilon}}$, где $d=d(S, x)$ — расстояние от точки $x\in D$ до S, а $\varepsilon>0$, то интеграл от функции f по области D сходится.

6. В дополнение к замечанию 1 покажите, что оно остается в силе даже без предположения об измеримости множества E

7. Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а функция $f\colon D\to\mathbb{R}$ интегрируема на любом измеримом компакте, лежащем в D

a) Покажите, что если несобственный интеграл от функции $|f|$ по D расходится, то найдется такое исчерпание $\{E_n\}$ множества D, что каждое из множеств E_n является *элементарным компактом в* D, состоящим из конечного числа n-мерных промежутков и $\iint\limits_{E_n} |f|(x)\,dx\to+\infty$ при $n\to\infty$.

b. Проверьте, что если интеграл от f по некоторому множеству сходится, а от $|f|$ расходится, то должны расходиться также интегралы от $f_+=\frac{1}{2}(|f|+f)$ и $f_-=\frac{1}{2}(|f|-f)$.

c. Покажите, что полученное в a исчерпание $|E_n|$ можно разрядить так, что для любого $n\in\mathbb{N}$ будет выполняться соотношение $\int\limits_{E_{n+1}\setminus E_n} f_+(x)\,dx > \int\limits_{E_n} |f|(x)\,dx+n$.

d. Используя нижние интегральные суммы, покажите, что если $\int\limits_E f_+(x)\,dx>A$, то найдется такой элементарный компакт $F\subset E$, состоящий из конечного числа промежутков, что $\int\limits_F f(x)\,dx>A$.

e. Выведите из c и d, что существует такой элементарный компакт $F_n \subset E_{n+1} \setminus E_n$, для которого $\int\limits_{F_n} f(x)\,dx > \int\limits_{E_n} |f|(x)\,dx + n$

f. Покажите, используя e, что множества $G_n = F_n \cup E_n$ являются лежащими в D элементарными компактами (т е состоят из конечного числа промежутков), которые в совокупности образуют исчерпание множества D и для которых имеет место соотношение $\int\limits_{G_n} f(x)\,dx \to +\infty$ при $n \to \infty$

Таким образом, если интеграл от $|f|$ расходится, то расходится (в смысле определения 2) и интеграл от функции f.

8. Проведите подробно доказательство теоремы 2.

ГЛАВА XII

ПОВЕРХНОСТИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ В $\mathbb{R}^n$

В этой главе разобраны понятия поверхности, края поверхности, согласованной ориентации поверхности и ее края, выведена формула для вычисления площади поверхности, лежащей в $\mathbb{R}^n$, а также даны начальные представления о дифференциальных формах. Владение перечисленными понятиями весьма важно при работе с криволинейными и поверхностными интегралами, которым посвящена следующая глава.

§ 1. Поверхность в $\mathbb{R}^n$

Определение 1. *Поверхностью размерности k (k-мерной поверхностью или k-мерным многообразием)* в $\mathbb{R}^n$ называется такое множество $S \subset \mathbb{R}^n$, каждая точка которого имеет в S окрестность *), гомеоморфную **) $\mathbb{R}^k$.

Определение 2. Отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to U \subset S$, осуществляющее указанный в определении поверхности гомеоморфизм, называется *картой* или *локальной картой поверхности* S; $\mathbb{R}^k$ — *областью параметров*, а U — *районом* или *областью действия карты* на поверхности S.

Локальная карта вводит в U криволинейные координаты, сопоставляя точке $x = \varphi(t) \in U$ числовой набор $t = (t^1, \ldots, t^k) \in \mathbb{R}^k$.

Из определения поверхности видно, что совокупность описываемых им объектов S не изменится, если в нем $\mathbb{R}^k$ заменить любым гомеоморфным $\mathbb{R}^k$ топологическим пространством. Чаще всего вместо $\mathbb{R}^k$ за стандартную область параметров локальных карт

---

*) Под окрестностью точки $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ в множестве S, как и прежде, понимается множество $U_S(x) = S \cap U(x)$, где $U(x)$ окрестность x в $\mathbb{R}^n$. Поскольку в дальнейшем речь будет только об окрестностях точки на поверхности, для упрощения обозначений, если не возникает недоразумений, мы пишем U или $U(x)$ вместо $U_S(x)$.

**) На $S \subset \mathbb{R}^n$, а значит, и на $U \subset S$ имеется естественная, индуцированная из $\mathbb{R}^n$ метрика, поэтому можно говорить о топологическом отображении U в $\mathbb{R}^n$.

принимают открытый куб I^k или открытый шар B^k в $\mathbb{R}^k$. Но это чистая условность. Для проведения некоторых аналогий и в целях большей наглядности ряда последующих построений мы, как правило, в качестве канонической области параметров локальных карт поверхности будем брать куб I^k.

Итак, карта

$$\varphi\colon I^k \to U \subset S \tag{1}$$

локально дает параметрическое уравнение $x = \varphi(t)$ поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$, а сама k-мерная поверхность, таким образом, локально устроена как продеформированный стандартный k-мерный промежуток $I^k \subset \mathbb{R}^k$.

Для вычислительных целей, как будет видно из дальнейшего, параметрическое задание поверхности особенно важно. Иногда всю поверхность можно задать всего лишь одной картой. Такую поверхность обычно называют *элементарной*. Например, график в $\mathbb{R}^{k+1}$ непрерывной функции $f\colon I^k \to \mathbb{R}$ является элементарной поверхностью. Однако элементарность поверхности скорее исключение, чем правило. Например, обычную нашу двумерную земную сферу уже нельзя задать только одной картой. В атласе поверхности Земли должны быть по крайней мере две карты (см. задачу 4 в конце параграфа).

В соответствии с возникшей аналогией примем

Определение 3. Набор $A(S) := \{\varphi_i\colon I_i^k \to U_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ локальных карт поверхности S, районы действия которых в совокупности покрывают всю поверхность $\left(\text{т. е. } S = \bigcup\limits_i U_i\right)$, называется *атласом поверхности* S.

Объединение двух атласов одной и той же поверхности, очевидно, тоже является атласом этой поверхности.

Если на отображения (1) — локальные параметрические уравнения поверхности — не накладывать других ограничений, кроме того, что это должны быть гомеоморфизмы, то поверхность в $\mathbb{R}^n$ может оказаться расположенной весьма странно. Например, может случиться, что гомеоморфная двумерной сфере поверхность, т. е. топологически — сфера, лежит в $\mathbb{R}^3$, но ограничиваемая ею область не гомеоморфна шару (так называемая рогатая сфера *)).

Чтобы избавиться от подобных затруднений, не связанных с существом рассматриваемых в анализе вопросов, мы в гл. VIII, § 7. определили *гладкую k-мерную поверхность*, лежащую в $\mathbb{R}^n$, как такое множество $S \subset \mathbb{R}^n$, что для каждой точки $x_0 \in S$ найдутся ее окрестность $U(x_0)$ в $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\psi\colon U(x_0) \to I^n =$

*) Пример поверхности, о которой идет речь, был построен Александером. Д. У. Александер (1888—1971) — американский математик-тополог.

$=\{t\in\mathbb{R}^n \mid |t^i|<1,\ i=1, \ldots, n\}$, при котором множество $U_S(x_0):=S\cap U(x_0)$ преобразуется в куб $I^k=I^n\cap\{t\in\mathbb{R}^n \mid t^{k+1}=\ldots \ldots=t^n=0\}$.

Ясно, что гладкая в этом смысле поверхность является поверхностью в смысле определения 1, поскольку отображения $x=\psi^{-1}(t^1, \ldots, t^k, 0, \ldots, 0)=\varphi(t^1, \ldots, t^k)$, очевидно, задают локальную параметризацию поверхности. Обратное, как следует из упомянутого выше примера рогатой сферы, вообще говоря, не имеет места, даже если ψ просто гомеоморфизмы. Однако если отображения (1) достаточно регулярны, то понятие поверхности в прежнем и новом определении на самом-то деле совпадают.

По существу, это уже было показано в примере 8 из § 7 гл. VIII, но учитывая важность вопроса, сформулируем утверждение точно и напомним, как получается ответ.

Утверждение. *Если отображение* (1) *принадлежит классу* $C^{(1)}(I^k, \mathbb{R}^n)$ *и в каждой точке куба* I^k *имеет максимально возможный ранг* k, *то найдутся число* $\varepsilon>0$ *и такой диффеоморфизм* $\varphi_\varepsilon\colon I^n_\varepsilon\to\mathbb{R}^n$ *куба* $I^n_\varepsilon:=\{t\in\mathbb{R}^n \mid |t^i|<\varepsilon,\ i=1, \ldots, n\}$ *размерности* n *в пространство* $\mathbb{R}^n$, *что* $\varphi|_{I^k\cap I^n_\varepsilon}=\varphi_\varepsilon|_{I^k\cap I^n_\varepsilon}$.

Иными словами, утверждается, что при указанных условиях отображения (1) локально являются сужениями на k-мерные кубы $I^k_\varepsilon:=I^k\cap I^n_\varepsilon$ диффеоморфизмов полномерных кубов I^n_ε.

◀ Положим для определенности, что уже первые k из n координатных функций $x^i=\varphi^i(t^1, \ldots, t^k)$, $i=1, \ldots, n$, отображения $x=\varphi(t)$ таковы, что $\det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^j}\right)(0)\neq 0$, $i, j=1, \ldots, k$. Тогда в силу теоремы о неявной функции соотношения

$$\begin{cases} x^1=\varphi^1(t^1, \ldots, t^k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^k=\varphi^k(t^1, \ldots, t^k), \\ x^{k+1}=\varphi^{k+1}(t^1, \ldots, t^k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n=\varphi^n(t^1, \ldots, t^k) \end{cases}$$

около точки $(t_0, x_0)=(0, \varphi(0))$ эквивалентны соотношениям

$$\begin{aligned} t^1&=f^1(x^1, \ldots, x^k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t^k&=f^k(x^1, \ldots, x^k), \\ x^{k+1}&=f^{k+1}(x^1, \ldots, x^k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n&=f^n(x^1, \ldots, x^k). \end{aligned}$$

В таком случае отображение

$$
\begin{aligned}
t^1 &= f^1(x^1, \ldots, x^k), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t^k &= f^k(x^1, \ldots, x^k), \\
t^{k+1} &= x^{k+1} - f^{k+1}(x^1, \ldots, x^k), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t^n &= x^n - f^n(x^1, \ldots, x^k)
\end{aligned}
$$

является диффеоморфизмом полномерной окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$. В качестве φ_ε можно теперь взять сужение обратного к нему диффеоморфизма на некоторый куб I^n_ε. ▶

Изменением масштаба, разумеется, можно сделать так, чтобы в последнем диффеоморфизме было $\varepsilon = 1$, а куб I^n_ε был единичным.

Итак, показано, что для гладкой поверхности в $\mathbb{R}^n$ можно принять следующее эквивалентное прежнему

Определение 4. Поверхность размерности k в $\mathbb{R}^n$ (введенная определением 1) называется *гладкой* (*класса* $C^{(m)}$, $m \geqslant 1$), если она обладает атласом, локальные карты которого являются гладкими (класса $C^{(m)}$, $m \geqslant 1$) отображениями и в каждой точке области своего определения имеют ранг k.

Заметим, что условие на ранг отображений (1) существенно. Например, аналитическое отображение $\mathbb{R} \ni t \longmapsto (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$, задаваемое формулами $x^1 = t^2$, $x^2 = t^3$, определяет кривую в плоскости $\mathbb{R}^2$, имеющую острие в точке $(0, 0)$. Ясно, что эта кривая не является гладкой 1-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^2$, ибо последняя должна иметь касательную (1-мерную касательную плоскость) в любой точке *).

Таким образом, в частности, не следует смешивать понятие гладкого пути класса $C^{(m)}$ и понятие гладкой кривой класса $C^{(m)}$.

В анализе, как правило, имеют дело с достаточно гладкими параметризациями (1) ранга k. Мы убедились, что в этом случае принятое здесь определение 4 гладкой поверхности совпадает с уже рассмотренным в гл. VIII, § 7. Однако если прежнее определение было наглядным и сразу избавляло от некоторых лишних хлопот, то известное преимущество определения 4, согласованного с определением 1 поверхности, состоит в том, что оно с легкостью может быть доведено до определения абстрактного многообразия, не обязательно лежащего в $\mathbb{R}^n$. Здесь же нас будут интересовать пока только поверхности в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим некоторые примеры таких поверхностей.

---

*) О касательной плоскости см. в гл. VIII, § 7.

Пример 1. Напомним, что если $F^i \in C^{(m)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i=1, \ldots$ $\ldots, n-k$ — такой набор гладких функций, что система уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

в любой точке множества S своих решений имеет ранг $n-k$, то эта система либо вовсе не имеет решений, либо в качестве множества решений имеет k-мерную $C^{(m)}$-гладкую поверхность S в $\mathbb{R}^n$.

◀ Проверим, что если $S \neq \varnothing$, то S действительно удовлетворяет определению 4. Это вытекает из теоремы о неявной функции, в силу которой в некоторой окрестности любой точки $x_0 \in S$ система (2), с точностью до переобозначения переменных, эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^{k+1} = f^{k+1}(x^1, \ldots, x^k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = f^n(x^1, \ldots, x^k), \end{cases}$$

где $f^{k+1}, \ldots, f^n \in C^{(m)}$. Записывая последнюю систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = t^1, \\ \ldots \\ x^k = t^k, \\ x^{k+1} = f^{k+1}(t^1, \ldots, t^k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = f^n(t^1, \ldots, t^k), \end{cases}$$

приходим к параметрическому уравнению окрестности точки $x_0 \in S$ на S. Дополнительным преобразованием область параметров, очевидно, можно превратить в каноническую, например в I^k, и получить стандартную локальную карту (1). ▶

Пример 2. В частности, задаваемая в $\mathbb{R}^n$ уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = r^2 \qquad (r > 0) \tag{3}$$

сфера есть $(n-1)$-мерная гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$, поскольку множество S решений уравнения (3), очевидно, непусто и в любой точке S градиент левой части уравнения (3) отличен от нуля.

При $n=2$ получаем в $\mathbb{R}^2$ окружность

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2,$$

которую легко локально параметризовать полярным углом θ, используя полярные координаты

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\theta, \\ x^2 = r\sin\theta. \end{cases}$$

Отображение $\theta \longmapsto (x^1, x^2)(\theta)$ при фиксированном значении $r>0$ является диффеоморфизмом на любом промежутке вида $\theta_0<\theta<\theta_0+2\pi$ и двух карт (например, отвечающих значениям $\theta_0=0$ и $\theta_0=-\pi$) достаточно, чтобы составить атлас окружности. Одной канонической картой (1) здесь обойтись нельзя хотя бы потому, что окружность — компакт, в отличие от $\mathbb{R}^1$ или $I^1=B^1$, а свойство топологического пространства быть компактом инвариантно относительно топологических преобразований.

Полярные (сферические) координаты могут быть использованы и для параметризации двумерной сферы

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=r^2$$

в $\mathbb{R}^3$. Обозначая через ψ угол между направлением вектора (x^1, x^2, x^3) и направлением оси Ox^3 (т. е. $0\leqslant\psi\leqslant\pi$), а через φ — полярный угол проекции радиус-вектора (x^1, x^2, x^3) на плоскость (x^1, x^2), получаем

$$\begin{aligned} x^3&=r\cos\psi,\\ x^2&=r\sin\psi\sin\varphi,\\ x^1&=r\sin\psi\cos\varphi. \end{aligned}$$

В общем случае полярные координаты $(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ в $\mathbb{R}^n$ вводятся соотношениями

$$\begin{aligned} x^1&=r\cos\theta_1,\\ x^2&=r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x^{n-1}&=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},\\ x^n&=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Напомним якобиан

$$J=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdot\ldots\cdot\sin\varphi_{n-2} \tag{5}$$

перехода (4) от общих полярных координат $(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ к декартовым координатам $(x^1, \ldots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n$. Из выражения якобиана видно, что он отличен от нуля, если, например, $0<\varphi_i<\pi$, $i=1, \ldots, n-2$ и $r>0$. Значит, даже не ссылаясь на простой геометрический смысл параметров $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, можно гарантировать, что при фиксированном $r>0$ отображение $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})\longmapsto (x^1, \ldots, x^n)$ как сужение локального диффеоморфизма $(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})\longmapsto(x^1, \ldots, x^n)$ само локально диффеоморфно. Но сфера однородна относительно группы ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n$, поэтому отсюда уже следует возможность построеиия локальной карты для окрестности любой точки сферы.

Пример 3. Цилиндр

$$(x^1)^2+\ldots+(x^k)^2=r^2 \qquad (r>0),$$

при $k<n$ есть $(n-1)$-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, являющаяся прямым произведением $(k-1)$-мерной сферы плоскости переменных $(x^1, \ldots, x^k)$ и $(n-k)$-мерной плоскости переменных $(x^{k+1}, \ldots \ldots, x^n)$.

Локальная параметризация этой поверхности, очевидно, может быть получена, если в качестве первых $k-1$ из $(n-1)$ параметров $(t^1, \ldots, t^{n-1})$ взять полярные координаты $\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}$ точки $(k-1)$-мерной сферы в $\mathbb{R}^k$, а $t^k, \ldots, t^{n-1}$ положить равными $x^{k+1}, \ldots, x^n$ соответственно.

Пример 4. Если в плоскости $x=0$ пространства $\mathbb{R}^3$, наделенного декартовыми координатами (x, y, z), взять кривую (1-мерную поверхность), не пересекающую ось Oz, и вращать ее относительно оси Oz, то получится 2-мерная поверхность, в качестве локальных координат которой можно принять локальные координаты исходной кривой (меридиана) и, например, угол поворота (локальная координата на параллели).

В частности, если в качестве исходной кривой взять окружность радиуса a с центром в точке $(b, 0, 0)$, то при $a<b$ получим двумерный тор (рис. 69). Его параметрическое уравнение может быть представлено в виде

$$\begin{cases} x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi, \\ z=a\sin\psi, \end{cases}$$

где ψ — угловой параметр на исходной окружности — меридиане, а φ — угловой параметр на параллели.

Любую поверхность, гомеоморфную построенному тору вращения, в топологии принято называть *тором* (точнее, *двумерным тором*).

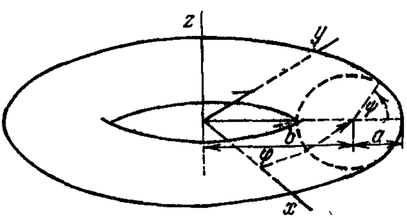

Рис. 69.

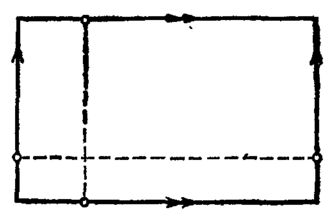

Рис. 70.

Как видно, двумерный тор есть прямое произведение двух окружностей. Поскольку окружность получается из отрезка склеиванием (отождествлением) его концов, тор можно получить из прямого произведения отрезков, т. е. из прямоугольника, склеиванием противоположных сторон прямоугольника по соответствующим точкам (рис. 70).

В сущности, этим мы уже в свое время пользовались, когда установили, что конфигурационное пространство двойного маятника является двумерным тором, а движению маятника соответствует путь на торе.

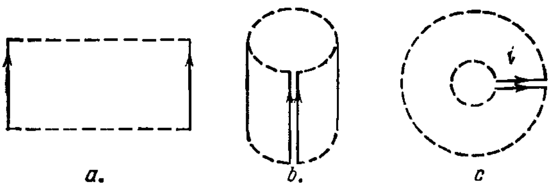

Рис. 71

Пример 5. Если гибкую ленту (прямоугольник) склеить по стрелкам, указанным на рис. 71, a, то можно получить кольцо (рис. 71, c) или цилиндрическую поверхность (рис. 71, b), что с топологической точки зрения одно и то же (эти поверхности гомеоморфны).

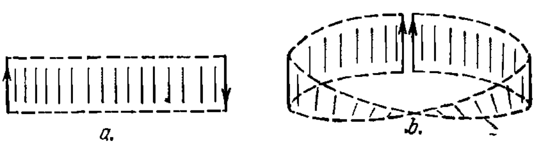

Рис. 72.

Если же ленту склеить по стрелкам, изображенным на рис. 72, a, то получим в $\mathbb{R}^3$ поверхность (рис. 72, b), называемую в математике *листом Мёбиуса* *).

Локальные координаты на этой поверхности естественно вводятся посредством координат на плоскости, в которой лежит исходный прямоугольник.

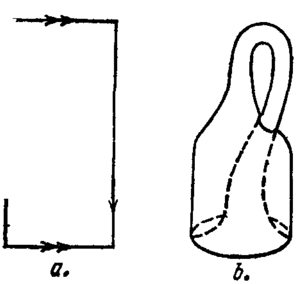

Рис. 73

Пример 6. Сопоставляя изложенное в примерах 4 и 5, поддавшись естественной аналогии, можно теперь предписать склейку прямоугольника (рис. 73, a), объединяющую в себе и элементы тора и элементы листа Мёбиуса. Но подобно тому, как лист Мёбиуса нельзя было склеить без разрывов или самопересечений, не выходя за пределы плоскости $\mathbb{R}^2$, так и предписанную склейку не удастся выполнить в $\mathbb{R}^3$. Однако в $\mathbb{R}^4$ это уже можно сделать и в результате получить в $\mathbb{R}^4$ поверхность, которую принято называть

*) А. Ф. Мёбиус (1790—1868) — немецкий математик и астроном.

бутылкой Клейна *). Попытка изобразить эту поверхность предпринята на рис. 73, *b*.

Последний пример дает некоторое представление о том, что поверхность порой легче описать саму по себе, нежели ее же, лежащую в определенном пространстве $\mathbb{R}^n$. Более того, многие важные поверхности (различной размерности) первоначально возникают не как подмножества $\mathbb{R}^n$, а, например, как фазовые пространства механических систем, как геометрический образ непрерывных групп преобразований, как фактор-пространства относительно групп автоморфизмов исходного пространства, и так далее, и тому подобное. Мы ограничимся пока этими первоначальными замечаниями, оставляя их уточнение до гл. XV, где будет дано общее определение поверхности, не обязательно лежащей в $\mathbb{R}^n$. Но уже здесь, еще не дав этого общего определения, сообщим, что, согласно известной теореме Уитни **), любую k-мерную поверхность можно гомеоморфно отобразить на некоторую поверхность, лежащую в пространстве $\mathbb{R}^{2k+1}$. Значит, рассматривая поверхности в $\mathbb{R}^n$, мы на самом-то деле ничего не теряем с точки зрения их топологического разнообразия и классификации. Эти вопросы, однако, лежат уже в стороне от наших скромных потребностей в геометрии.

Задачи и упражнения

1. Для каждого из множеств E_α, задаваемых условиями

$$E_\alpha=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2=\alpha\},$$
$$E_\alpha=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2-y^2=\alpha\},$$
$$E_\alpha=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=\alpha\},$$
$$E_\alpha=\{z\in\mathbb{C} \mid |z^2-1|=\alpha\},$$

в зависимости от значения параметра $\alpha\in\mathbb{R}$ выясните:

a) является ли E_α поверхностью;

b) если да, то какова размерность E_α;

c) связно ли E_α.

2. Пусть f: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, удовлетворяющее условию $f\circ f=f$.

a. Покажите, что множество $f(\mathbb{R}^n)$ является гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

b. Какой характеристикой отображения f определяется размерность этой поверхности?

3. Пусть $e_0,\ e_1,\ \ldots,\ e_n$ — ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $x=x^0e_0+x^1e_1+\ldots+x^ne_n$, $\{x\}$ — точка $(x^0,\ x^1,\ \ldots,\ x^n)$, $e_1,\ \ldots$ $\ldots,\ e_n$ — базис в $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$.

---

*) Ф. Х. Клейн (1849—1925) — крупный немецкий математик, впервые строго обосновавший непротиворечивость неевклидовой геометрии. Знаток истории математики, один из организаторов издания «Энциклопедии математических наук».

**) Х. Уитни (1907) — современный американский математик-тополог, один из создателей теории расслоенных пространств.

Формулы

$$\psi_1=\frac{x-x^0e_0}{1-x^0} \text{ при } x\neq e_0,\quad \psi_2=\frac{x-x^0e_0}{1+x^0} \text{ при } x\neq -e_0$$

задают стереографические проекции

$$\psi_1\colon S^n\setminus\{e_0\}\to\mathbb{R}^n,\quad \psi_2\colon S^n\setminus\{-e_0\}\to\mathbb{R}^n$$

из точек $\{e_0\}$ и $\{-e_0\}$ соответственно.

a. Выясните геометрический смысл этих отображений.

b. Проверьте, что если $t\in\mathbb{R}^n$ и $t\neq 0$, то $(\psi_2\circ\psi_1^{-1})(t)=\frac{t}{|t|^2}$, где $\psi_1^{-1}=$ $=\left(\psi_1|_{S^n\setminus\{e_0\}}\right)^{-1}$.

c. Покажите, что две карты $\psi_1^{-1}=\varphi_1\colon \mathbb{R}^n\to S^n\setminus\{e_0\}$, $\psi_2^{-1}=\varphi_2\colon \mathbb{R}^n\to$ $\to S^n\setminus\{-e_0\}$ образуют атлас сферы $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$.

d. Докажите, что любой атлас сферы должен иметь не менее двух карт.

§ 2. Ориентация поверхности

Напомним, прежде всего, что переход от одного репера $e_1, \dots$ $\dots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ к другому $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ осуществляется посредством квадратной матрицы (a_j^i), возникающей из разложений $\tilde{e}_j=a_j^ie_i$. Определитель этой матрицы всегда отличен от нуля и все реперы пространства разбиваются на два класса эквивалентности, если в один класс отнести реперы, для которых определитель матрицы взаимного перехода положителен. Такие классы эквивалентности называют *классами ориентации реперов* пространства $\mathbb{R}^n$.

Задать ориентацию $\mathbb{R}^n$ значит по определению фиксировать один из этих классов ориентации реперов $\mathbb{R}^n$. Таким образом, *ориентированное пространство* $\mathbb{R}^n$ — это само пространство $\mathbb{R}^n$ плюс фиксированный класс ориентации его реперов. Чтобы указать класс ориентации, достаточно предъявить любой его репер, поэтому можно сказать, что ориентированное пространство $\mathbb{R}^n$ — это $\mathbb{R}^n$ вместе с фиксированным в нем репером.

Репер в $\mathbb{R}^n$ порождает в $\mathbb{R}^n$ систему координат и переход от одной такой системы координат к другой осуществляется матрицей (a_i^j), транспонированной по отношению к матрице (a_j^i) связи реперов. Поскольку определители этих матриц одинаковы, можно было бы все сказанное выше об ориентации повторить на уровне *классов ориентации систем координат в* $\mathbb{R}^n$, относя в один класс те координатные системы, взаимный переход между которыми осуществляется матрицей с положительным якобианом.

Оба эти по существу совпадающие подхода к описанию понятия ориентации пространства $\mathbb{R}^n$ проявятся и при описании понятия ориентации поверхности, к которому мы переходим.

Напомним, однако, еще полезную для дальнейшего связь между координатами и реперами в случае, когда речь идет о системе криволинейных координат.

Пусть G и D — диффеоморфные области, лежащие в двух экземплярах пространства $\mathbb{R}^n$, наделенных декартовыми координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(t^1, \ldots, t^n)$ соответственно. Диффеоморфизм φ: $D \to G$ можно рассматривать как введение в области G криволинейных координат $(t^1, \ldots, t^n)$ по закону $x = \varphi(t)$, т. е. точка $x \in G$ наделяется декартовыми координатами $(t^1, \ldots, t^n)$ точки $t = \varphi^{-1}(x) \in D$. Если в каждой точке $t \in D$ рассмотреть репер $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ касательного пространства $T\mathbb{R}^n_t$, составленный из ортов координатных направлений, то в D возникнет поле реперов, которое можно рассматривать как разнесение по точкам D параллельно самому себе орторепера исходного пространства $\mathbb{R}^n$,

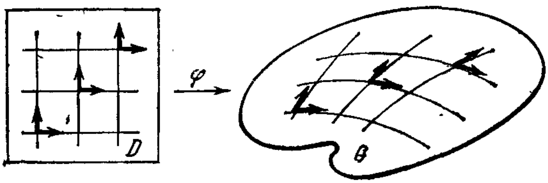

Рис. 74.

содержащего область D. Поскольку φ: $D \to G$ — диффеоморфизм, отображение $\varphi'(t)$: $TD_t \to TG_{x=\varphi(t)}$ касательных пространств, осуществляемое по закону $TD_t \ni \boldsymbol{e} \mapsto \varphi'(t)\boldsymbol{e} = \xi \in TG_x$, в каждой точке t является изоморфизмом касательных пространств. Значит, из репера $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в TD_t при этом получится репер $\xi_1 = \varphi'(t)\boldsymbol{e}_1, \ldots, \xi_n = \varphi'(t)\boldsymbol{e}_n$ в TG_x, а поле реперов на D преобразуется в поле реперов на G (рис. 74). Поскольку $\varphi \in C^{(1)}(D, G)$, то векторное поле $\xi(x) = \xi(\varphi(t)) = \varphi'(t)\boldsymbol{e}(t)$ непрерывно в G, если векторное поле $\boldsymbol{e}(t)$ непрерывно в D. Таким образом, любое непрерывное поле реперов (состоящее из n непрерывных векторных полей) при диффеоморфизме преобразуется в непрерывное поле реперов.

Рассмотрим теперь пару диффеоморфизмов φ_i: $D_i \to G$, $i = 1, 2$, которые по закону $x = \varphi_i(t_i)$ вводят в одной и той же области G две системы криволинейных координат $(t_1^1, \ldots, t_1^n)$ и $(t_2^1, \ldots, t_2^n)$. Взаимно обратные диффеоморфизмы $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$: $D_1 \to D_2$, $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$: $D_2 \to D_1$ осуществляют взаимные переходы между этими системами координат. Якобианы этих отображений в соответствующих друг другу точках областей D_1, D_2 взаимно обратны и, следовательно, имеют один и тот же знак. Если область G (а вместе с нею D_1 и D_2) связна, то ввиду непрерывности и необращения в нуль рассматриваемых якобианов они имеют один и тот же знак во всех точках областей D_1 и D_2 соответственно.

Значит, все вводимые указанным способом в связной области G системы криволинейных координат распадаются точно на два класса эквивалентности, если в один класс отнести те системы, взаимные преобразования которых осуществляются с положительным якобианом. Такие классы эквивалентности называют *классами ориентаций систем криволинейных координат* в области G.

Задать ориентацию в области G по определению означает фиксировать в G класс ориентации систем ее криволинейных координат.

Нетрудно проверить, что принадлежащие одному классу ориентации системы криволинейных координат области G порождают в G (как это описано выше) такие непрерывные поля реперов, которые в каждой точке $x \in G$ лежат в одном классе ориентации реперов касательного пространства TG_x. Можно показать, что вообще непрерывные поля реперов области G в случае ее связности разбиваются точно на два класса эквивалентности, если в один класс относить поля, реперы которых в каждой точке $x \in G$ принадлежат одному классу ориентации реперов пространства TG_x (см. в этой связи задачи 3, 4 в конце параграфа).

Таким образом, одну и ту же ориентацию области G можно задать двумя, совершенно равносильными способами: указанием некоторой системы криволинейных координат в G или заданием любого непрерывного поля реперов в G, принадлежащего тому же классу ориентации, что и поле реперов, порожденное этой системой координат.

Теперь ясно, что ориентация связной области G вполне определится, если хотя бы в одной точке $x \in G$ будет указан репер, ориентирующий TG_x. Это обстоятельство широко используется на практике. Если такой *ориентирующий репер* в некоторой точке $x_0 \in G$ задан, и взята какая-то система криволинейных координат $\varphi\colon D \to G$ в области G, то, построив в TG_{x_0} репер, индуцированный этой системой координат, сравниваем его с заданным в TG_{x_0} ориентирующим репером. В случае, когда оба репера принадлежат одному классу ориентации TG_{x_0}, считают, что криволинейные координаты задают на G ту же ориентацию, которая предписывается ориентирующим репером. В противном случае — противоположную ориентацию.

Если G открытое, но не обязательно связное множество, то, поскольку все изложенное применимо к любой связной компоненте множества G, для того чтобы ориентировать G надо задать свой ориентирующий репер в каждой связной компоненте G. Значит, если таких компонент m, то множество G допускает 2^m различных ориентаций.

Сказанное об ориентации области $G \subset \mathbb{R}^n$ можно дословно повторить, если вместо области G рассмотреть задаваемую одной картой гладкую k-мерную поверхность S в $\mathbb{R}^n$ (рис. 75). В этом случае системы криволинейных координат S тоже разбиваются естественным образом на два класса ориентации в соответствии со знаком якобиана преобразований их взаимного перехода; тоже возникают поля реперов на S; тоже задание ориентации может быть осуществлено ориентирующим репером, лежащим в некоторой касательной к S плоскости TS_{x_0}.

Единственный новый элемент, который тут возникает и требует проверки, это неявно присутствующее

Утверждение 1. *Взаимные переходы от одной системы криволинейных координат на гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ к другой являются диффеоморфизмами той же степени гладкости, что и карты поверхности.*

◀ В самом деле, в силу утверждения из § 1 любую карту $\varphi\colon I^k \to U \subset S$ локально можно рассматривать как сужение на $I^k \cap O(t)$ диффеоморфизма $\mathcal{F}\colon O(t) \to O(x)$ некоторой n-мерой окрестности $O(t)$ точки $t \in I^k \subset \mathbb{R}^n$ на n-мерную окрестность $O(x)$ точки $x \in S \subset \mathbb{R}^n$, причем $\mathcal{F}$ того же класса гладкости, что и φ. Если теперь $\varphi_1\colon I_1^k \to U_1$ и $\varphi_2\colon I_2^k \to U_2$ — две такие карты, то возникающее в их общей области действия отображение $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ (переход от первой системы координат ко второй) локально представляется в виде $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(t^1, \ldots, t^k) = \mathcal{F}_2^{-1} \circ \mathcal{F}_1(t^1, \ldots, t^k, 0, \ldots \ldots, 0)$, где $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — соответствующие диффеоморфизмы n-мерных окрестностей. ▶

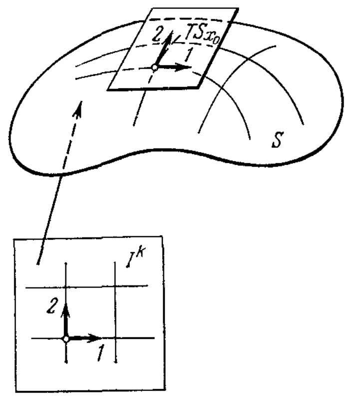

Рис. 75.

На примере элементарной поверхности, задаваемой одной картой, мы разобрали все существенные компоненты понятия ориентации поверхности. Теперь мы завершим дело окончательными определениями, относящимися к случаю произвольной гладкой поверхности в $\mathbb{R}^n$.

Пусть S — гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\varphi_i\colon I_i^k \to U_i$, $\varphi_j\colon I_j^k \to U_j$ — две локальные карты поверхности S, районы действия которых пересекаются, т. е. $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. Тогда между множествами $I_{ij}^k = \varphi_i^{-1}(U_j)$, $I_{ji}^k = \varphi_j^{-1}(U_i)$, как было только что доказано, естественно устанавливаются взаимно обратные диффеоморфизмы $\varphi_{ij}\colon I_{ij}^k \to I_{ji}^k$, $\varphi_{ji}\colon I_{ji}^k \to I_{ij}^k$, осуществляющие переход от одной локальной системы криволинейных координат на S к другой.

Определение 1. Две локальные карты поверхности называют *согласованными*, либо когда районы их действия не пересекаются, либо когда это пересечение непусто и взаимные переходы в общей области действия этих локальных карт осуществляются диффеоморфизмами с положительным якобианом.

Определение 2. Атлас поверхности называется *ориентирующим атласом поверхности*, если он состоит из попарно согласованных карт.

Определение 3. Поверхность называется *ориентируемой*, если она обладает ориентирующим атласом. В противном случае поверхность называется *неориентируемой*.

В отличие от областей пространства $\mathbb{R}^n$ или элементарных поверхностей, задаваемых одной картой, произвольная поверхность может оказаться и неориентируемой.

Пример 1. Лист Мёбиуса, как можно проверить (см. задачи 2, 3 в конце параграфа), — неориентируемая поверхность.

Пример 2. Бутылка Клейна в таком случае — тоже неориентируемая поверхность, поскольку она содержит в качестве своей части лист Мёбиуса. Последнее видно непосредственно из конструкции бутылки Клейна, изображенной на рис. 73.

Пример 3. Окружность и вообще k-мерная сфера — ориентируемые поверхности, что доказывается непосредственным предъявлением атласа сферы, состоящего из согласованных карт (см. пример 2 из § 1).

Пример 4. Рассмотренный в примере 4 из § 1 двумерный тор также является ориентируемой поверхностью. Действительно, используя указанные в примере 4, § 1 параметрические уравнения тора, легко предъявить его ориентирующий атлас.

Мы не останавливаемся на деталях, поскольку ниже будет указан другой более наглядный способ контроля ориентируемости достаточно простых поверхностей, который с легкостью позволит проверить сказанное в примерах 1—4.

Формальное описание понятия ориентации поверхности будет завершено, если к определениям 1, 2, 3 добавить еще приведенные ниже определения 4, 5.

Два ориентирующих атласа поверхности будем считать *эквивалентными*, если их объединение также является ориентирующим атласом этой поверхности.

Указанное отношение действительно является отношением эквивалентности между ориентирующими атласами ориентируемой поверхности.

Определение 4. Класс эквивалентности ориентирующих атласов поверхности по указанному отношению эквивалентности называется *классом ориентации атласов поверхности* или просто *ориентацией поверхности*.

Определение 5. *Ориентированной поверхностью* называется поверхность с фиксированным классом ориентации ее атласов (т. е. с фиксированной на ней ориентацией).

Таким образом, *ориентировать поверхность* — значит тем или иным способом указать определенный класс ориентации ориентирующих атласов этой поверхности.

Имеет место уже знакомое нам в его частных проявлениях

Утверждение 2. *На ориентируемой связной поверхности существует точно две ориентации.*

Обычно их называют *взаимно противоположными ориентациями*.

Доказательство утверждения 2 см. в гл. XV, § 2, п. 3.

В общем случае произвольной поверхности верно также и то (см. задачи 3, 4), что наличие на ней ориентирующего атласа равносильно наличию на этой поверхности непрерывного поля реперов касательных плоскостей (пространств) и что классам ориентации атласов поверхности отвечают классы ориентации непрерывных полей реперов на ней.

Значит, как и в разобранном выше частном случае, задать ориентацию поверхности можно двояко: либо предъявив ориентирующий атлас поверхности, либо указав соответствующее непрерывное поле реперов на этой поверхности.

Если ориентируемая поверхность связна, то для задания ее ориентации вполне достаточно указать какую-нибудь локальную карту этой поверхности или ориентирующий репер в какой-нибудь из ее касательных плоскостей. Этим широко пользуются на практике.

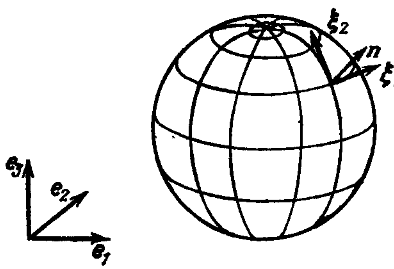

Рис. 76.

Когда поверхность имеет несколько связных компонент, то такое указание локальной карты или репера естественно делается в каждой компоненте связности.

Очень широко на практике применяется также следующий способ задания ориентации поверхности, лежащей в уже ориентированном пространстве. Пусть S — ориентируемая $(n-1)$-мерная поверхность, лежащая в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, с фиксированным в $\mathbb{R}^n$ ориентирующим репером $e_1, \ldots, e_n$. Пусть TS_x — $(n-1)$-мерная плоскость, касательная к S в точке $x \in S$, а $\boldsymbol{n}$ — вектор, ортогональный TS_x, т. е. вектор нормали к поверхности S в точке x. Если при заданном векторе $\boldsymbol{n}$ условиться в TS_x репер $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ выбирать так, чтобы реперы $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $(\boldsymbol{n}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n)$ принадлежали одному классу ориентации пространства $\mathbb{R}^n$ то, как легко видеть, такие реперы $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ плоскости TS_x сами окажутся принадлежащими одному классу ориентации этой плоскости. Значит, указание класса ориентации плоскости TS_x, а вместе с ним и задание ориентации на связной ориентируемой поверхности в этом случае можно осуществить, задав нормальный вектор $\boldsymbol{n}$ (рис. 76).

Непрерывному полю реперов на $(n-1)$-мерной поверхности, очевидно, соответствует непрерывное поле единичных нормальных векторов к этой поверхности. Нетрудно проверить (см. задачу 4), что верно и обратное. Таким образом, ориентируемость $(n-1)$-мерной поверхности, лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, равносильна наличию на ней непрерывного поля ненулевых нормальных векторов.

Отсюда, в частности, с очевидностью следует ориентируемость сферы, тора и неориентируемость листа Мёбиуса, о чем говорилось в примерах 7—10.

Связные $(n-1)$-мерные поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, на которых существует (однозначное) непрерывное поле единичных нормальных векторов, в геометрии называют *двусторонними*.

Таким образом, например, сфера, тор, плоскость в $\mathbb{R}^3$ — двусторонние поверхности, в отличие от листа Мёбиуса, являющегося в этом смысле *односторонней поверхностью*.

Заканчивая обсуждение понятия ориентации поверхности, сделаем несколько замечаний, относящихся к практике использования этого понятия в анализе.

В вычислениях, связанных в анализе с ориентированными поверхностями в $\mathbb{R}^n$, обычно сначала находят какую-то локальную параметризацию поверхности S, не заботясь об ориентации. Затем строят в некоторой касательной плоскости TS_x к поверхности репер $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ из векторов (скорости), касательных к линиям выбранной системы криволинейных координат, т. е. строят ориентирующий репер, индуцированный этой системой координат.

Если пространство $\mathbb{R}^n$ было ориентировано, а ориентация S задавалась полем нормальных векторов, то берут вектор $\boldsymbol{n}$ данного поля в точке x и сравнивают репер $\boldsymbol{n}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ с репером $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, ориентирующим пространство. Если эти реперы одного класса ориентации, то локальная карта по принятому выше соглашению задает нужную ориентацию поверхности, а когда эти реперы не согласованы, выбранная карта задает ориентацию поверхности, противоположную предписанной нормалью $\boldsymbol{n}$.

Ясно, что при наличии какой-то локальной карты $(n-1)$-мерной поверхности простым изменением порядка координат можно получить локальную карту нужной ориентации (ориентации, предписанной фиксированным нормальным вектором $\boldsymbol{n}$ к двусторонней гиперповерхности, лежащей в ориентированном пространстве $\mathbb{R}^n$).

В одномерном случае, когда поверхность сводится к кривой, ориентацию чаще задают касательным вектором к кривой в некоторой ее точке и в этом случае часто вместо «ориентация кривой» говорят *направление движения вдоль кривой*.

Если на плоскости $\mathbb{R}^2$ выбран ориентирующий $\mathbb{R}^2$ репер и задана замкнутая кривая, то *положительным направлением обхода* (вдоль кривой) ограниченной этой кривой *области* D принято считать такое, при котором репер $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней по отношению к D нормали к кривой, а $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости обхода, согласован с ориентирующим репером $\mathbb{R}^2$.

Это означает, что, например, при традиционно рисуемом на плоскости (правом) репере, положительным обходом будет движение «против часовой стрелки», при котором область, ограниченная кривой, остается «слева».

В этой связи саму ориентацию плоскости или плоской области часто задают, отмечая не репер в $\mathbb{R}^2$, а положительное направление движения вдоль какой-нибудь замкнутой кривой, обычно окружности.

Задание такого направления по существу есть указание направления кратчайшего поворота первого вектора репера до его совмещения со вторым, что равносильно заданию класса ориентации реперов на плоскости.

Задачи и упражнения

1. Является ли указанный в задаче 4 с из § 1 атлас сферы ориентирующим атласом этой сферы?

2. a. Воспользовавшись примером 4 из § 1, предъявите ориентирующий атлас двумерного тора

b. Докажите, что не существует ориентирующего атласа листа Мебиуса.

c. Покажите, что при диффеоморфизме $f\colon D \to \tilde{D}$ ориентируемая поверхность $S \subset D$ переходит в ориентируемую поверхность $\tilde{S} \subset \tilde{D}$.

3. a. Проверьте, что принадлежащие одному классу ориентации системы криволинейных координат области $G \subset \mathbb{R}^n$ порождают такие непрерывные поля реперов в G, которые в каждой точке $x \in G$ задают реперы одного класса ориентации пространства TG_x.

b. Покажите, что в связной области $G \subset \mathbb{R}^n$ непрерывные поля реперов разбиваются точно на два класса ориентации.

c. Покажите, что если гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$ обладает ориентирующим атласом, то на S существует непрерывное поле реперов касательных к S пространств, а классам ориентации атласов поверхности S отвечают классы ориентации таких полей реперов.

d. Докажите, что на связной ориентируемой поверхности можно задать точно две различные ориентации.

4. a. В пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксировано подпространство $\mathbb{R}^{n-1}$, взят вектор $v \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$ и два репера $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, $(\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_{n-1})$ подпространства $\mathbb{R}^{n-1}$ Проверьте, что эти реперы принадлежат одному классу ориентации реперов пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ тогда и только тогда, когда реперы $(v, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, $(v, \tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_{n-1})$ задают одинаковую ориентацию пространства $\mathbb{R}^n$.

b. Покажите, что на гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда существует непрерывное поле реперов касательных пространств, когда на S существует непрерывное поле единичных нормальных к S векторов. Отсюда, в частности, вытекает ориентируемость двусторонних поверхностей.

c. Покажите, что если $\operatorname{grad} F \neq 0$, то задаваемая уравнением $F(x^1, \ldots, x^n) = 0$ поверхность ориентируема (предполагается, что уравнение имеет решение).

d. Обобщите предыдущий результат на случай поверхности, задаваемой системой уравнений.

e. Объясните, почему не каждую гладкую двумерную поверхность в $\mathbb{R}^3$ можно задать уравнением $F(x, y, z) = 0$, где F — гладкая функция без критических точек (т. е. $\operatorname{grad} F \neq 0$).

§ 3. Край поверхности и его ориентация

1. Поверхность с краем. Пусть $\mathbb{R}^k$ — евклидово пространство размерности k, наделенное декартовыми координатами $t^1, \ldots, t^k$. Рассмотрим полупространство $H^k := \{t \in \mathbb{R}^k \mid t^1 \leqslant 0\}$ пространства $\mathbb{R}^k$. Гиперплоскость $\partial H^k := \{t \in \mathbb{R}^k \mid t^1 = 0\}$ будем называть *краем* полупространства H^k.

Заметим, что множество $\mathring{H}^k := H^k \setminus \partial H^k$, т. е. открытая часть H^k, является простейшей k-мерной поверхностью. Само же полупространство H^k формально не удовлетворяет определению поверхности ввиду наличия в H^k точек края ∂H^k. Множество H^k является каноническим представителем поверхностей с краем, которые мы сейчас опишем.

Определение 1. Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называют *поверхностью* (размерностью k) *с краем*, если любая точка $x \in S$ имеет окрестность U в S, гомеоморфную либо $\mathbb{R}^k$, либо H^k.

Определение 2. Если при указанном в определении 1 гомеоморфизме $\varphi\colon U \to H^k$ точке $x \in U$ соответствует точка $\varphi(x) \in \partial H^k$, то x называется *точкой края* поверхности (с краем) S и своей окрестности U. Совокупность всех точек края называется *краем поверхности* S.

Край поверхности S, как правило, будет обозначаться символом ∂S.

Напомним, что при гомеоморфном отображении $\varphi_{ij}\colon G_i \to G_j$ области $G_i \subset \mathbb{R}^k$ на область $G_j \subset \mathbb{R}^k$ внутренние точки области G_i переходят во внутренние точки образа $\varphi_{ij}(G_i)$ (это — теорема Брауэра). Следовательно, понятие точки края поверхности не зависит от выбора локальной карты, т. е. определено корректно.

Определение 1 формально включает в себя и случай поверхности, описанный в определении 1, § 1. Сопоставляя эти определения, видим, что если на S нет точек края, то мы возвращаемся к прежнему определению поверхности, которое теперь можно было бы считать определением поверхности без края. Отметим в этой связи, что термин «поверхность с краем» обычно употребляется тогда, когда множество точек края непусто.

Понятие гладкой (класса $C^{(m)}$) поверхности S с краем вводится, как и для поверхностей без края, требованием, чтобы S обладала атласом карт данного класса гладкости. При этом мы подразумеваем, что для карт вида $\varphi\colon H^k \to U$ частные производные от φ в точках края ∂H^k вычисляются только по области H^k определения отображения φ, т. е. иногда это односторонние производные, а якобиан отображения φ отличен от нуля всюду в H^k.

Поскольку $\mathbb{R}^k$ можно диффеоморфизмом класса $C^{(\infty)}$ преобразовать в куб $I^k = \{t \in \mathbb{R}^k \mid |t^i| < 1,\ i = 1, \ldots, k\}$, причем так, что H^k преобразуется в часть I_H куба I^k, определяемую дополнительным условием $t^1 \leqslant 0$, то ясно, что в определении поверхности с краем (даже в случае ее гладкости) можно было бы заменить $\mathbb{R}^k$ на I^k, а H^k на I^k_H или на куб $\tilde{I}^k$ с одной присоединенной гранью $I^{k-1} := \{t \in \mathbb{R}^k \mid t^1 = 1, \quad |t^i| < 1, \quad i = 2, \ \ldots, \ k\}$, являющейся, очевидно, кубом на единицу меньшей размерности.

С учетом этой всегда присутствующей свободы в выборе канонических локальных карт поверхности, сопоставляя определения 1, 2 и определение 1 из § 1 видим, что справедливо следующее

Утверждение 1. *Край k-мерной поверхности класса $C^{(m)}$ сам является поверхностью того же класса гладкости, причем поверхностью без края и на единицу меньшей размерности в сравнении с размерностью исходной поверхности с краем.*

◀ Действительно, если $A(S) = \{(H^k, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(\mathbb{R}^k, \varphi_j, U_j)\}$ — атлас поверхности S с краем, то $A(\partial S) = \{(\mathbb{R}^{k-1}, \varphi_i|_{\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}}, \partial U_i)\}$, очевидно, является атласом того же класса гладкости для края ∂S. ▶

Укажем некоторые простые примеры поверхностей с краем.

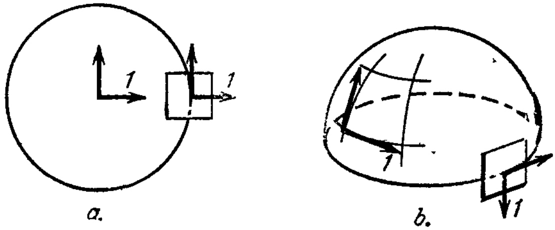

Рис. 77

Пример 1. Замкнутый n-мерный шар $\bar{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$ есть n-мерная поверхность с краем. Ее край $\partial\bar{B}^n$ есть $(n-1)$-мерная сфера (см. рис. 76 и рис. 77, *a*). Шар $\bar{B}^n$, называемый часто по аналогии с двумерным случаем *n-мерным диском*, можно гомеоморфно преобразовать в половину n-мерной сферы, краем которой является экваториальная $(n-1)$-мерная сфера (рис. 77, *b*).

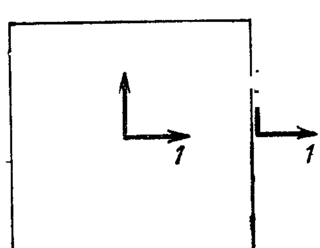

Рис. 78.

Пример 2. Замкнутый куб I^n в $\mathbb{R}^n$ по лучам, исходящим из его центра, можно гомеоморфно преобразовать в замкнутый шар $\bar{B}^n$. Следовательно, I^n, как и $\bar{B}^n$, есть n-мерная поверхность с краем, который в данном случае образован гранями куба (рис. 78). Отметим, что на ребрах, являющихся пересечениями граней, никакое отображение куба на шар, очевидно, не может быть регулярным (т. е. гладким и ранга n).

Пример 3. Если лист Мёбиуса получать описанным в примере 5, § 1 склеиванием двух противоположных сторон теперь уже замкнутого прямоугольника, то, очевидно, в $\mathbb{R}^3$ получится поверхность с краем, причем ее край гомеоморфен окружности (правда, заузленной в $\mathbb{R}^3$).

При другой возможной склейке этих же сторон получится цилиндрическая поверхность, край которой состоит из двух окружностей. Эта поверхность гомеоморфна обычному плоскому кольцу (см. рис. 71 к примеру 5, § 1).

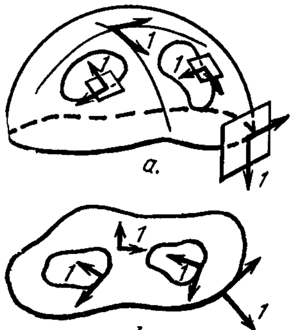

Рис. 79.

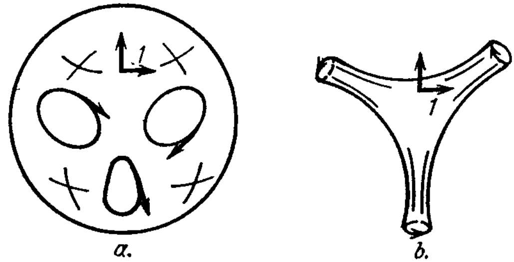

Рис. 80.

На рис. 79, a, b, 80, a, b, 81, a, b, которые мы используем в дальнейшем, изображены попарно гомеоморфные поверхности с краем, лежащие в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

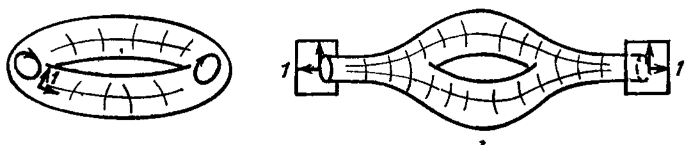

Рис. 81.

Как видно, край поверхности может оказаться несвязным, даже если сама поверхность была связной.

2. Согласование ориентации поверхности и края. Если в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ фиксирован ориентирующий орторепер $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$, который индуцирует в $\mathbb{R}^k$ декартовы координаты $x^1, \ldots$ $\ldots, x^k$, то векторы $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ на краю $\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}$ полупространства $H^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 \leqslant 0\}$ задают ориентацию, которую считают согласованной с заданной репером $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ ориентацией полупространства H^k.

Мы хотим теперь в общем случае определить, что значит согласованность ориентации поверхности и края. Это весьма важно для практики вычислений, связанных с поверхностными интегралами, о которых будет речь ниже.

Прежде всего убедимся в том, что имеет место следующее общее

Утверждение 2. *Край ∂S гладкой ориентируемой поверхности S сам является гладкой ориентируемой поверхностью (быть может, и несвязной).*

◀ С учетом утверждения 1 нам остается только проверить ориентируемость ∂S. Покажем, что если $A(S)=\{(H^k, \varphi_i, U_i)\}\cup\cup\{(\mathbb{R}^k, \varphi_j, U_j)\}$ — ориентирующий атлас поверхности с краем S, то атлас $A(\partial S)=\{(\mathbb{R}^{k-1}, \varphi_i|_{\partial H^n=\mathbb{R}^{k-1}}, \partial U_i)\}$ края тоже состоит из попарно согласованных карт. Для этого, очевидно, достаточно проверить, что если $\tilde{t}=\psi(t)$ есть диффеоморфизм с положительным якобианом окрестности $U_{H^k}(t_0)$ в H^k точки $t_0\in\partial H^k$ на окрестность $\tilde{U}_H(\tilde{t}_0)$ в H^k точки $\tilde{t}_0\in\partial H^k$, то положительный якобиан имеет также отображение $\psi|_{\partial U_{H^k}(t_0)}$ окрестности $U_{\partial H^k}(t_0)=$ $=\partial U_{H^k}(t_0)$ в ∂H^k точки t_0 на окрестность $\tilde{U}_{\partial H^k}(\tilde{t}_0)=\partial\tilde{U}_{H^k}(\tilde{t}_0$ в ∂H^k точки $\tilde{t}_0=\psi(t_0)$.

Заметим, что в любой точке $t_0=(0, t_0^2, \ldots t_0^k)\in\partial H^k$ якобиан отображения ψ имеет вид

$$
J(t_0)=\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi^1}{\partial t^1} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial\psi^2}{\partial t^1} & \frac{\partial\psi^2}{\partial t^2} & \ldots & \frac{\partial\psi^2}{\partial t^k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\psi^k}{\partial t^1} & \frac{\partial\psi^k}{\partial t^2} & \ldots & \frac{\partial\psi^k}{\partial t^k} \end{vmatrix}=\frac{\partial\psi^1}{\partial t^1}\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi^2}{\partial t^2} & \ldots & \frac{\partial\psi^2}{\partial t^k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\psi^k}{\partial t^2} & \ldots & \frac{\partial\psi^k}{\partial t^k} \end{vmatrix},
$$

поскольку при $t^1=0$ должно быть также $\tilde{t}^1=\psi^1(0, t^2, \ldots, t^k)\equiv 0$ (граничные точки переходят при диффеоморфизме в граничные). Остается заметить, что при $t^1<0$ должно быть также $\tilde{t}^1=$ $=\psi^1(t^1, t^2, \ldots, t^k)<0$ (ведь $\tilde{t}=\psi(t)\in H^k$), поэтому значение $\frac{\partial\psi^1}{\partial t^1}(0, t^2, \ldots, t^k)$ не может быть отрицательным. По условию $J(t_0)>0$, и раз $\frac{\partial\psi^1}{\partial t^1}(0, t^2, \ldots, t^k)\geqslant 0$, то из указанного равенства определителей следует, что якобиан отображения $\psi|_{\partial U_{H^k}}=$ $=\psi(0, t^2, \ldots, t^k)$ положителен. ▶

Определение 3. Если $A(S)=\{(H^k, \varphi_i, U_i)\}\cup\{(\mathbb{R}^k, \varphi_j, U_j)\}$ — ориентирующий атлас стандартных локальных карт поверхности S с краем ∂S, то $A(\partial S)=\{(\mathbb{R}^{k-1}, \varphi_i|_{\partial H^k=\mathbb{R}^{k-1}}, \partial U_i)\}$ есть ориентирующий атлас края. Задаваемая им ориентация края ∂S называется *ориентацией края, согласованной с ориентацией поверхности.*

Заканчивая рассмотрение ориентации края ориентируемой поверхности, сделаем два полезных замечания.

Замечание 1. На практике, как уже отмечалось выше, ориентацию лежащей в $\mathbb{R}^n$ поверхности часто задают репером касательных к поверхности векторов, поэтому проверку согласованности ориентации поверхности и ее края в этом случае осуществляют следующим образом. Берут k-мерную плоскость TS_{x_0}, касательную к гладкой поверхности S в точке x_0 края ∂S. Поскольку локально структура поверхности S около точки x_0 такая же, как и структура полупространства H^k около точки $0 \in \partial H^k$, то, направив первый вектор ориентирующего S орторепера $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \in TS_{x_0}$ по нормали к ∂S и в сторону внешнюю по отношению к локальной проекции S на TS_{x_0}, получают в $(k-1)$-мерной плоскости $T\,\partial S_{x_0}$, касательной к ∂S в точке x_0, репер $\xi_2, \ldots, \xi_k$, который и задает ориентацию $T\,\partial S_{x_0}$, а значит, и ∂S, согласованную с заданной репером $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ ориентацией поверхности S.

На рис. 77—80 на простых примерах показаны процесс и результат согласования ориентаций поверхности и ее края.

Отметим, что описанная схема, по существу, предполагает, что на S возможно задание непрерывного поля реперов касательных пространств TS_x, $x \in S$, поскольку мы должны иметь возможность переносить задающий ориентацию S репер в разные точки поверхности и ее края, который, как видно из примеров, может быть и несвязным.

Замечание 2. В ориентированном пространстве $\mathbb{R}^k$ рассмотрим полупространства $H^k_- = H^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 \leqslant 0\}$ и $H^k_+ = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 \geqslant 0\}$ с индуцированной из $\mathbb{R}^k$ ориентацией. Гиперплоскость $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 = 0\}$ является общим краем H^k_- и H^k_+. Легко видеть, что ориентации гиперплоскости Γ, согласованные с ориентациями H^k_- и H^k_+, противоположны.

Аналогично, если ориентированную k-мерную поверхность разрезать некоторой $(k-1)$-мерной поверхностью (например, сферу — экватором), то на указанном разрезе возникнут две противоположные ориентации, индуцированные ориентациями примыкающих к разрезу частей исходной поверхности.

Этим наблюдением часто пользуются в теории поверхностных интегралов.

Кроме того, им можно воспользоваться, чтобы следующим образом определить ориентируемость кусочно гладкой поверхности.

Дадим прежде всего определение такой поверхности.

Определение 4 (индуктивное определение кусочно гладкой поверхности). Точку условимся относить к *нульмерным* поверхностям любого класса гладкости.

Кусочно гладкой одномерной поверхностью (кусочно гладкой кривой) назовем такую кривую в $\mathbb{R}^n$, которая после удаления из нее конечного или счетного числа некоторых нульмерных поверхностей (точек) распадается на гладкие одномерные поверхности (кривые).

Поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$ размерности k назовем *кусочно гладкой*, если из нее можно так удалить конечное или счетное число кусочно гладких поверхностей размерности не выше $k-1$, что остаток распадется на гладкие k-мерные поверхности S_i (с краем или без края).

Пример 4. Граница плоского угла и граница квадрата суть кусочно гладкие кривые.

Граница куба или граница прямого кругового конуса в $\mathbb{R}^3$ суть двумерные кусочно гладкие поверхности.

Вернемся теперь к ориентации кусочно гладкой поверхности.

Точку (нульмерную поверхность) принято ориентировать, приписывая ей знак $+$ или $-$ В частности, край отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$, состоящий из двух точек a, b, если отрезок ориентирован направлением от a к b, принято согласованно (с этой ориентацией отрезка) ориентировать так: $(a, -)$, $(b, +)$.

Рассмотрим теперь k-мерную ($k>0$) кусочно гладкую поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$.

Предположим, что две гладкие поверхности S_{i_1}, S_{i_2} из определения 4 кусочно гладкой поверхности S ориентированы и примыкают друг к другу вдоль гладкого куска Γ $(k-1)$-мерной поверхности (ребра). Тогда на Γ, как на краю, возникают ориентации, согласованные с ориентациями S_{i_1} и S_{i_2} соответственно. Если эти две ориентации на любом таком ребре $\Gamma \subset \bar{S}_{i_1} \cap \bar{S}_{i_2}$ противоположны, то исходные ориентации S_{i_1} и S_{i_2} считаются *согласованными*. В случае, если $\bar{S}_{i_1} \cap \bar{S}_{i_2}$ пусто или имеет размерность меньшую чем $(k-1)$, любые ориентации S_{i_1}, S_{i_2} считаются согласованными.

Определение 5. Кусочно гладкую k-мерную ($k>0$) поверхность будем считать *ориентируемой*, если с точностью до конечного или счетного числа кусочно гладких поверхностей размерности не выше $(k-1)$ она является объединением гладких ориентируемых поверхностей S_i, допускающих их одновременную взаимно согласованную ориентацию.

Пример 5. Поверхность трехмерного куба, как легко проверить, является ориентируемой кусочно гладкой поверхностью. И вообще, все указанные в примере 4 кусочно гладкие поверхности ориентируемы.

Пример 6. Лист Мёбиуса легко представить в виде объединения двух ориентируемых гладких поверхностей, примыкающих по части края, однако эти поверхности нельзя ориентировать согласованно. Можно проверить, что лист Мёбиуса не является ориентируемой поверхностью даже с точки зрения определения 5.

Задачи и упражнения

1. а. Верно ли, что край поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ есть множество $\bar{S} \setminus S$, где $\bar{S}$ — замыкание S в $\mathbb{R}^n$?

b. Имеют ли поверхности $S_1=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<x^2+y^2<2\}$, $S_2=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x^2+y^2\}$ край?

c. Укажите край поверхностей $S_1=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqslant x^2+y^2<2\}$, $S_2=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqslant x^2+y^2\}$.

2. Приведите пример неориентируемой поверхности с ориентируемым краем.

3. a. Каждая грань куба $I^k=\{x\in\mathbb{R}^k \mid |x^i|<1,\ i=1, \dots, k\}$ параллельна соответствующей $(k-1)$-мерной координатной гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^k$, поэтому в грани можно рассмотреть тот же репер и ту же систему координат, что и в этой гиперплоскости Укажите, в каких гранях получающаяся при этом ориентация согласуется с ориентацией куба I^k, индуцированной ориентацией $\mathbb{R}^k$, а в каких не согласуется. Разберите последовательно случаи $k=2$, $k=3$ и $k=n$.

b. В некоторой области полусферы $S=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1 \wedge z>0\}$ действует локальная карта $(t^1, t^2)\longmapsto(\sin t^1\cos t^2, \sin t^1\sin t^2, \cos t^1)$, а в некоторой области края ∂S этой полусферы действует локальная карта $t\longmapsto(\cos t, \sin t, 0)$. Выясните, задают ли эти карты согласованные ориентации поверхности S и ее края ∂S.

c. Постройте на полусфере S и ее крае ∂S поля реперов, индуцированные указанными в b локальными картами.

d. На крае ∂S полусферы S укажите репер, задающий ориентацию края, согласованную с полученной в c ориентацией полусферы.

e. Задайте полученную в c ориентацию полусферы S с помощью вектора, нормального к $S\subset\mathbb{R}^3$.

4. a. Проверьте, что лист Мёбиуса не является ориентируемой поверхностью даже с точки зрения определения 3.

b Покажите, что если S — гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$, то определении ее ориентируемости как гладкой и как кусочно гладкой поверхности равносильны

5. a. Будем говорить, что множество $S\subset\mathbb{R}^n$ есть k-мерная поверхность с краем, если для каждой точки $x\in S$ найдутся ее окрестность $U(x)$ в $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм ψ. $U(x)\to I^n$ этой окрестности на стандартный куб $I^n\subset\mathbb{R}^n$, при котором $\psi(S\cap U(x))$ совпадает либо с кубом $I^k=\{t\in I^n \mid t^{k+1}=\ldots=t^n=0\}$, либо с его частью $I^k\cap\{t\in\mathbb{R}^n \mid t^k\leqslant 0\}$, которая является k-мерным промежутком с одной присоединенной к нему гранью.

Исходя из сказанного в § 1 при обсуждении понятия поверхности, покажите, что это определение поверхности с краем не эквивалентно определению 1

b. Верно ли, что если $f\in C^{(l)}(H^k, \mathbb{R})$, где $H^k=\{x\in\mathbb{R}^k \mid x^1\leqslant 0\}$, то для любой точки $x\in\partial H^k$ можно найти ее окрестность $U(x)$ в $\mathbb{R}^k$ и функцию $\mathcal{F}\in C^{(l)}(U(x), \mathbb{R})$ так, что $\mathcal{F}|_{H^k\cap U(x)}=f|_{H^k\cap U(x)}$?

c. Если указанное в a определение использовать для описания гладкой поверхности с краем, т. е. считать ψ гладким отображением максимального ранга, то будет ли такое определение гладкой поверхности с краем совпадать с принятым в § 3?

§ 4. Площадь поверхности в евклидовом пространстве

Перейдем теперь к определению площади k-мерной кусочно гладкой поверхности, лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant k$.

Напомним сначала, что если $\xi_1, \dots, \xi_k$ — k векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^k$, то объем $V(\xi_1, \dots, \xi_k)$ параллелепипеда, натянутого на эти векторы как на ребра, может быть вычислен посредством определителя

$$V(\xi_1, \dots, \xi_k)=\det(\xi_i^j) \tag{1}$$

матрицы $J=(\xi_i^j)$, строки которой образованы координатами данных векторов в некотором ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_k$ пространства $\mathbb{R}^k$. Отметим, однако, что на самом-то деле формула (1) дает не просто объем, а так называемый *ориентированный объем параллелепипеда.* Если $V\neq 0$, то определяемое формулой (1) значение V положительно или отрицательно в соответствии с тем, принадлежат ли реперы $e_1, \ldots, e_k, \xi_1, \ldots, \xi_k$ одному или разным классам ориентации пространства $\mathbb{R}^k$.

Заметим теперь, что произведение JJ^* матрицы J на ее транспонированную J^* есть не что иное, как матрица $G=(g_{ij})$ попарных скалярных произведений $g_{ij}=\langle\xi_i, \xi_j\rangle$ данных векторов, т. е. *матрица Грама* *) системы векторов $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Таким образом,

$$\det G=\det(JJ^*)=\det J\det J^*=(\det J)^2, \tag{2}$$

и, значит, неотрицательное значение объема $V(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ можно получить в виде

$$V(\xi_1, \ldots, \xi_k)=\sqrt{\det(\langle\xi_i, \xi_j\rangle)}. \tag{3}$$

Последняя формула удобна тем, что в ней, по существу, уже нет координат, а есть только набор геометрических величин, характеризующих рассматриваемый параллелепипед. В частности, если эти же векторы $\xi_1, \ldots, \xi_k$ считать лежащими в n-мерном ($n\geqslant k$) евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, то формула (3) k-мерного объема (или k-мерной площади) натянутого на них параллелепипеда останется без изменений.

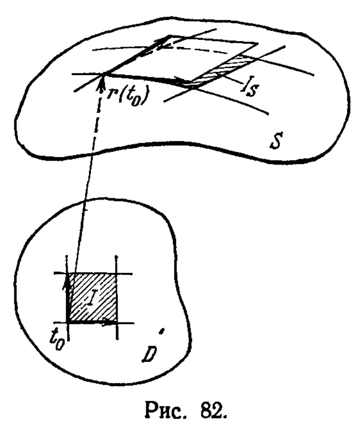

Рис. 82.

Пусть теперь $r\colon D\to S\subset\mathbb{R}^n$ — k-мерная гладкая поверхность S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, заданная в параметрическом виде $r=r(t^1, \ldots, t^k)$, т. е. в виде гладкой вектор-функции $r(t)=(x^1, \ldots, x^n)(t)$, определенной в области $D\subset\mathbb{R}^k$. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^k$, порождающий координатную систему $(t^1, \ldots, t^k)$. Фиксировав точку $t_0=(t_0^1, \ldots, t_0^k)\in D$, возьмем положительные числа $h^1, \ldots, h^k$ столь малыми, чтобы параллелепипед I, натянутый на векторы $h^ie_i\in TD_{t_0}$, $i=1, \ldots, k$, приложенные к точке t_0, лежал в области D.

На поверхности S в силу отображения $D\to S$ параллелепипеду I соответствует фигура I_S, которую условно можно назвать криволинейным параллелепипедом (см. рис. 82, отвечающий

*) См. сноску на стр. 492.

случаю $k=2$, $n=3$). Поскольку

$$r(t_0^1, \ldots, t_0^{i-1}, t_0^i+h^i, t_0^{i+1}, \ldots, t_0^k)-$$
$$-r(t_0^1, \ldots, t_0^{i-1}, t_0^i, t_0^{i+1}, \ldots, t_0^k)=\frac{\partial r}{\partial t^i}(t_0)\,h^i+o(h^i),$$

смещению от t_0 на вектор h^ie_i отвечает в $\mathbb{R}^n$ такое смещение от точки $r(t_0)$, которое при $h^i\to 0$ можно с точностью до $o(h^i)$ заменить частным дифференциалом $\frac{\partial r}{\partial t^i}(t_0)\,h^i=:\dot r_ih^i$. Таким образом, при малых значениях h^i, $i=1, \ldots, k$, криволинейный параллелепипед I_S мало отличается от параллелепипеда, натянутого на векторы $h^1\dot r_1, \ldots, h^k\dot r_k$, касательные к поверхности S в точке $r(t_0)$. Считая по этой причине, что объем ΔV криволинейного параллелепипеда I_S должен тогда быть близок к объему указанного стандартного параллелепипеда, находим приближенную формулу

$$\Delta V\approx\sqrt{\det(g_{ij})(t_0)}\,\Delta t^1\cdot\ldots\cdot\Delta t^k, \tag{4}$$

где положено $g_{ij}(t_0)=\langle\dot r_i, \dot r_j\rangle(t_0)$, $\Delta t^i=h^i$, $i, j=1, \ldots, k$.

Если теперь все пространство $\mathbb{R}^k$, в котором лежит область параметров D, стандартным образом заместить k-мерными параллелепипедами малого диаметра d, взять среди них те, которые лежат в D, вычислить по формуле (4) приближенное значение k-мерного объема их образов и взять сумму полученных так значений, то мы придем к величине

$$\sum_\alpha\sqrt{\det g_{ij}(t_\alpha)}\,\Delta t^1\cdot\ldots\cdot\Delta t^k,$$

которую можно считать приближенным значением k-мерного объема или площади рассматриваемой поверхности S, причем это приближение должно становиться более точным при $d\to 0$.

Таким образом, мы принимаем

Определение 1. *Площадью* (или *k-мерным объемом*) заданной в параметрическом виде $D\ni t\mapsto r(t)\in S$ гладкой k-мерной поверхности S, лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, называется величина

$$V_k(S):=\int_D\sqrt{\det(\langle\dot r_i, \dot r_j\rangle)(t)}\,dt^1\ldots dt^k. \tag{5}$$

Посмотрим, как выглядит формула (5) в уже знакомых нам частных случаях.

При $k=1$ область $D\subset\mathbb{R}^1$ есть промежуток с некоторыми концами a, b ($a<b$) на прямой $\mathbb{R}^1$, а S в этом случае — кривая в $\mathbb{R}^n$. Формула (5), таким образом, при $k=1$ превращается в формулу

$$V_1(S)=\int_a^b|\dot r(t)|\,dt=\int_a^b\sqrt{(\dot x^1)^2+\ldots+(\dot x^n)^2}(t)\,dt$$

для вычисления длины гладкой кривой.

Если $k=n$, то S — диффеоморфная области D n-мерная область в $\mathbb{R}^n$. В этом случае матрица Якоби $J=x'(t)$ отображения $D \ni (t^1, \ldots, t^n) = t \longmapsto r(t) = (x^1, \ldots, x^n)(t) \in S$ квадратная. Воспользовавшись теперь соотношением (2) и формулой замены переменных в кратном интеграле, можно написать, что

$$V_n(S) = \int_D \sqrt{\det G(t)}\, dt = \int_D |\det x'(t)|\, dt = \int_S dx = V(S),$$

т. е., как и следовало ожидать, мы пришли к объему области S в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что при $k=2$ и $n=3$, т. е. когда S — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$, часто вместо стандартных обозначений $g_{ij} = \langle \dot{r}_i, \dot{r}_j \rangle$ используют следующие: $\sigma := V_2(S)$, $E := g_{11} = \langle \dot{r}_1, \dot{r}_1 \rangle$, $F := g_{12} = g_{21} = \langle \dot{r}_1, \dot{r}_2 \rangle$, $G := g_{22} = \langle \dot{r}_2, \dot{r}_2 \rangle$, а вместо t^1, t^2 пишут соответственно u, v. В этих обозначениях формула (5) приобретает вид

$$\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

В частности, если $u=x$, $v=y$, а поверхность S есть график гладкой вещественнозначной функции $z=f(x, y)$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^2$, то, как легко подсчитать,

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy.$$

Вернемся теперь вновь к определению 1 и сделаем несколько полезных для дальнейшего замечаний.

Замечание 1. Определение 1 корректно лишь в том случае, когда стоящий в формуле (5) интеграл существует. Он заведомо существует, например, если D — измеримая по Жордану область, а $r \in C^{(1)}(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$.

Замечание 2. Если поверхность S, участвующую в определении 1, разбить на конечное число поверхностей $S_1, \ldots, S_m$ с кусочно гладкими краями, то этому разбиению S будет отвечать такое же разбиение области D на соответствующие $S_1, \ldots, S_m$ области $D_1, \ldots, D_m$. Если поверхность S имела площадь в смысле равенства (5), то при каждом значении $\alpha = 1, \ldots, m$ определены величины

$$V_k(S_\alpha) = \int_{D_\alpha} \sqrt{\det \langle \dot{r}_i, \dot{r}_j \rangle}\, dt.$$

В силу аддитивности интеграла отсюда следует, что

$$V_k(S) = \sum_\alpha V_k(S_\alpha).$$

Мы установили таким образом, что площадь k-мерной поверхности аддитивна в том же смысле, что и обычный кратный интеграл.

Замечание 3. Последнее замечание позволяет переходить, если нужно, к исчерпанию области D, а значит, оно позволяет расширить смысл формулы (5), в которой теперь интеграл можно понимать и как несобственный.

Замечание 4. Более существенно аддитивность площади можно использовать для определения площади произвольной (а не только заданной одной картой) гладкой или даже кусочно гладкой поверхности.

Определение 2. Пусть S — произвольная кусочно гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Если после удаления из S конечного или счетного числа кусочно гладких поверхностей размерности не выше чем $k-1$ она распадается на конечное или счетное число гладких параметризуемых поверхностей $S_1, \ldots, S_m, \ldots$, то полагаем

$$V_k(S) := \sum_\alpha V_k(S_\alpha).$$

Аддитивность кратного интеграла позволяет проверить, что так определенная величина $V_k(S)$ не зависит от способа описанного разбиения поверхности S на гладкие куски $S_1, \ldots, S_m, \ldots$, каждый из которых лежит в районе действия какой-то локальной карты поверхности S.

Отметим также, что из определений гладкой и кусочно гладкой поверхностей легко следует, что описанное в определении 2 разбиение S на гладкие параметризуемые куски $S_1, \ldots, S_m$ всегда возможно и даже с соблюдением естественного дополнительного требования *локальной конечности разбиения*. Последнее означает, что любой компакт $\mathscr{K} \subset S$ может иметь общие точки лишь с конечным числом поверхностей $S_1, \ldots, S_m, \ldots$ Нагляднее это можно выразить иначе, сказав, что любая точка поверхности S должна обладать окрестностью, которая пересекается не более чем с конечным числом множеств $S_1, \ldots, S_m, \ldots$

Замечание 5. В основной формуле (5) участвует система криволинейных координат $t^1, \ldots, t^k$. Естественно поэтому проверить, что определяемая равенством (5) величина $V_k(S)$ (а тем самым и величина $V_k(S)$ из определения 2) инвариантна при диффеоморфном переходе $\tilde{D} \ni (\tilde{t}^1, \ldots, \tilde{t}^k) = \tilde{t} \mapsto t = (t^1, \ldots, t^k) \in D$ к новым криволинейным координатам $\tilde{t}^1, \ldots, \tilde{t}^k$, меняющимся в соответствующей области $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^k$.

◀ Для проверки достаточно заметить, что матрицы

$$G = (g_{ij}) = \left(\left\langle \frac{\partial r}{\partial t^i}, \frac{\partial r}{\partial t^j} \right\rangle\right) \quad \text{и} \quad \tilde{G} = (\tilde{g}_{ij}) = \left(\left\langle \frac{\partial r}{\partial \tilde{t}^i}, \frac{\partial r}{\partial \tilde{t}^j} \right\rangle\right)$$

в соответствующих друг другу точках областей D и $\tilde{D}$ связаны соотношением $\tilde{G} = J^* G J$, где $J = \left(\frac{\partial t^j}{\partial \tilde{t}^i}\right)$ — матрица Якоби отображения $\tilde{D} \ni \tilde{t} \mapsto t \in D$, а J^* — транспонированная по отношению к J

матрица. Таким образом, $\det\tilde{G}(\tilde{t}) = \det\hat{G}(t)(\det J)^2(t)$, откуда следует, что

$$\int_D \sqrt{\det G(t)}\,dt = \int_{\tilde{D}} \sqrt{\det G(t(\tilde{t}))}\,|J(\tilde{t})|\,d\tilde{t} = \int_{\tilde{D}} \sqrt{\det\tilde{G}(\tilde{t})}\,d\tilde{t}. \blacktriangleright$$

Итак, мы дали инвариантное по отношению к выбору системы координат определение 2 k-мерного объема или площади k-мерной кусочно гладкой поверхности.

Замечание 6. Этому замечанию мы предпошлем

Определение 3. Про множество E, лежащее на k-мерной кусочно гладкой поверхности, будем говорить, что оно является *множеством k-мерной меры нуль* или имеет *площадь нуль* в смысле Лебега, если при любом $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечной или счетной системой $S_1, \ldots, S_m, \ldots$ (возможно пересекающихся) поверхностей $S_\alpha \subset S$ так, что $\sum_\alpha V_k(S_\alpha) < \varepsilon$.

Как видно, это дословное повторение определения множества меры нуль, лежащего в $\mathbb{R}^k$.

Легко видеть, что в области D параметров любой локальной карты $\varphi: D \to S$ кусочно гладкой поверхности S такому множеству E отвечает множество $\varphi^{-1}(E) \subset D \subset \mathbb{R}^k$ k-мерной меры нуль. Можно даже проверить, что это характеристическое свойство множеств $E \subset S$ площади нуль.

На практике при вычислении площадей, а также вводимых ниже поверхностных интегралов полезно иметь в виду, что если кусочно гладкая поверхность $\tilde{S}$ получена из кусочно гладкой поверхности S удалением из S множества E площади нуль, то площади поверхностей $\tilde{S}$ и S одинаковы.

Польза этого замечания в том, что из кусочно гладкой поверхности часто можно так удалить множество площади нуль, что в результате получится гладкая поверхность $\tilde{S}$, задаваемая всего лишь одной картой. Но тогда площадь $\tilde{S}$, а значит, и площадь S можно вычислить прямо по формуле (5).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Отображение $]0, 2\pi[\ni t \mapsto (R\cos t,\ R\sin t) \in \mathbb{R}^2$ есть карта дуги $\tilde{S}$ окружности $x^2+y^2=\mathbb{R}^2$, получаемой удалением из этой окружности S единственной точки $E=(R, 0)$. Поскольку E — множество длины нуль на S, можно писать, что

$$V_1(S) = V_1(\tilde{S}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = 2\pi R.$$

Пример 2. В примере 4 § 1 было указано следующее параметрическое представление двумерного тора S в $\mathbb{R}^3$:

$$r(\varphi, \psi) = ((b + a\cos\psi)\cos\varphi,\ (b + a\cos\psi)\sin\varphi,\ a\sin\psi).$$

В области $D=\{(\varphi, \psi) \mid 0<\varphi<2\pi,\ 0<\psi<2\pi\}$ отображение $(\varphi, \psi) \longmapsto \boldsymbol{r}(\varphi, \psi)$ диффеоморфно. Образ $\tilde{S}$ области D при этом диффеоморфизме отличается от тора S на множество E, состоящее из координатной линии $\varphi=2\pi$ и линии $\psi=2\pi$. Множество E состоит, таким образом, из одной параллели и одного меридиана тора и, как легко видеть, имеет площадь нуль. Значит, площадь тора можно найти по формуле (5), исходя из приведенного параметрического представления, рассматриваемого в пределах области D.

Проведем необходимые выкладки:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}}_\varphi &= (-(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\ (b+a\cos\varphi)\cos\varphi),\\
\dot{\boldsymbol{r}}_\psi &= (-a\sin\psi\cos\varphi,\ -a\sin\psi\sin\varphi,\ a\cos\psi),\\
g_{11} &= \langle \dot{\boldsymbol{r}}_\varphi, \dot{\boldsymbol{r}}_\varphi \rangle = (b+a\cos\psi)^2,\\
g_{12} &= g_{21} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_\varphi, \dot{\boldsymbol{r}}_\psi \rangle = 0,\\
g_{22} &= \langle \dot{\boldsymbol{r}}_\psi, \dot{\boldsymbol{r}}_\psi \rangle = a^2,\\
\det G &= \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{22} & g_{22} \end{vmatrix} = a^2(b+a\cos\psi)^2.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
V_2(S) = V_2(\tilde{S}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b+a\cos\psi)\,d\psi = 4\pi^2 ab.
$$

Отметим в заключение, что указанным в определении 2 способом можно теперь вычислять также длины и площади кусочно гладких кривых и поверхностей.

Задачи и упражнения

1. a. Пусть P и $\tilde{P}$ — две гиперплоскости евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, D — подобласть P, а $\tilde{D}$ — ортогональная проекция D на гиперплоскость $\tilde{P}$. Покажите, что $(n-1)$-мерные площади D и $\tilde{D}$ связаны соотношением $\sigma(\tilde{D}) = \sigma(D)\cos\alpha$, где α — угол между гиперплоскостями P, $\tilde{P}$.

b. Учитывая результат a, укажите геометрический смысл формулы $d\sigma = \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dx\,dy$ для элемента площади графика гладкой функции $z=f(x, y)$ в трехмерном евклидовом пространстве.

c. Покажите, что если поверхность S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задана в форме гладкой вектор-функции $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^2$, то площадь поверхности S можно найти по формуле

$$
\sigma(S) = \iint_D |[\boldsymbol{r}'_u, \boldsymbol{r}'_v]|\,du\,dv,
$$

где $[\boldsymbol{r}'_u, \boldsymbol{r}'_v]$ — векторное произведение векторов $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$.

d. Проверьте, что если поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, а область U поверхности S взаимно однозначно ортогонально проектируется на область D плоскости (x, y), то имеет место формула

$$
\sigma(U) = \iint_D \frac{|\operatorname{grad} F|}{|F'_z|}\,dx\,dy.
$$

2. Найдите площадь сферического прямоугольника, образованного двумя параллелями и двумя меридианами сферы $S \subset \mathbb{R}^3$.

3. a. Пусть (r, φ, h) — цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$. Гладкая кривая, расположенная в плоскости $\varphi = \varphi_0$ и заданная там уравнением $r = r(s)$, где s — натуральный параметр, вращается вокруг оси h. Покажите, что площадь поверхности, полученной вращением куска этой кривой, отвечающего отрезку $[s_1, s_2]$ изменения параметра s, может быть найдена по формуле

$$\sigma = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} r(s)\, ds.$$

b. График гладкой неотрицательной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, вращается сначала вокруг оси Ox, затем вокруг оси Oy. В каждом из этих случаев напишите формулу для площади соответствующей поверхности вращения в виде интеграла по отрезку $[a, b]$.

4. a. Центр шара радиуса 1 скользит вдоль гладкой плоской замкнутой кривой, имеющей длину L. Покажите, что площадь поверхности образованного при этом трубчатого тела равна $2\pi \cdot 1 \cdot L$.

b. Исходя из результата a, найдите площадь двумерного тора, полученного вращением окружности радиуса a вокруг оси, лежащей в плоскости окружности и удаленной от ее центра на расстояние $b > a$.

5. Изобразите заданную в декартовых координатах (x, y, z) пространства $\mathbb{R}^3$ винтовую поверхность

$$y - x \operatorname{tg}\frac{z}{h} = 0, \quad |z| \leqslant \frac{\pi}{2} h$$

и найдите площадь той ее части, для которой $r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

6. a. Покажите, что площадь Ω_{n-1} единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ равна $\dfrac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, где $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$. $\Bigg($В частности, если n четно, то $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n-2}{2}\right)!$, а если n нечетно, то $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \dfrac{(n-2)!!}{2^{\frac{n-1}{2}}}\sqrt{\pi}$.$\Bigg)$

b. Проверив, что объем $V_n(r)$ шара радиуса r в $\mathbb{R}^n$ равен $\dfrac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} r^n$, покажите, что $\left.\dfrac{dV_n}{dr}\right|_{r=1} = \Omega_{n-1}$.

c. Найдите предел при $n \to +\infty$ отношения площади полусферы $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \wedge x^n > 0\}$ к площади ее ортогональной проекции на плоскость $x^n = 0$.

7. a. Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — система векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant k)$. Покажите, что определитель Грама этой системы может быть представлен в виде

$$\det(\langle x_i, x_j \rangle) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} P^2_{i_1 \ldots i_k},$$

где

$$P_{i_1 \ldots i_k} = \det\begin{pmatrix} x_1^{i_1} & \ldots & x_1^{i_k} \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ x_k^{i_1} & \ldots & x_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

b. Выясните геометрический смысл величин $P_{i_1 \dots i_k}$ из а и сформулируйте результат задачи а как теорему Пифагора для произвольной размерности k, $1 \leqslant k \leqslant n$.

c. Объясните теперь формулу

$$\sigma = \int\limits_D \sqrt{\sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant k} \det{}^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^k} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x^{i_k}}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial x^{i_k}}{\partial t^k} \end{pmatrix}}\, dt^1 \dots dt^k$$

для площади, заданной в параметрическом виде $x = x(t^1, \dots, t^k)$, $t \in D \subset \mathbb{R}^k$ k-мерной гладкой поверхности.

8. a. Проверьте, что в определении 2 величина $V_k(S)$ действительно не зависит от указанного там способа разбиения S на гладкие куски $S_1, \dots, S_m, \dots$

b. Покажите, что кусочно гладкая поверхность S допускает локально конечное разбиение на куски $S_1, \dots, S_m, \dots$, описанные в определении 2.

c. Докажите, что из гладкой поверхности S всегда можно так удалить множество E площади нуль, что останется гладкая поверхность $\tilde{S} = S \setminus E$, которая уже может быть описана одной стандартной локальной картой $\varphi: I \to S$.

9. Длину кривой, подобно школьному определению длины окружности, часто определяют как предел длин соответствующим образом вписанных в кривую ломаных. Предел берется при стремлении к нулю длин звеньев вписанных ломаных. Следующий простой пример, принадлежащий Г Шварцу, показывает, что аналогичные действия при попытке определить площадь даже очень гладкой поверхности через площади «вписанных» в нее многогранных поверхностей могут привести к абсурду.

В цилиндр радиуса R и высоты H впишем многогранник следующим образом Рассечем цилиндр горизонтальными плоскостями на m равных цилиндров высоты H/m каждый. Каждую из $m+1$ окружностей сечения (включая окружности верхнего и нижнего оснований исходного цилиндра) разобьем на n равных частей так, чтобы точки деления на каждой окружности находились под серединами дуг ближайшей верхней окружности. Теперь берем пару точек деления любой окружности и точку, лежащую непосредственно над или под серединой дуги, заключенной между этой парой точек.

Указанные три точки порождают треугольник, а совокупность всех таких треугольников образует многогранную поверхность, вписанную в исходную цилиндрическую поверхность (боковую поверхность прямого кругового цилиндра). На вид этот многогранник похож на примятое и собравшееся в гармошку голенище сапога, поэтому его часто называют *сапогом Шварца*.

a. Покажите, что если m и n устремить к бесконечности, но так, чтобы при этом отношение n^2/m стремилось к нулю, площадь построенной многогранной поверхности будет неограниченно расти, хотя размеры каждой ее грани (треугольника) при этом стремятся к нулю.

b. Если же n и m стремятся к бесконечности так, что отношение m/n^2 стремится к некоторому конечному пределу p, то площади многогранных поверхностей будут стремиться к конечному пределу, который в зависимости от величины p может быть больше, меньше или (при $p=0$) равен площади исходной цилиндрической поверхности.

c. Сравните описанный здесь способ введения площади гладкой поверхности с тем, который изложен в § 4, и объясните, почему в одномерном случае результаты совпадают, а в двумерном уже, вообще говоря, не совпадают. Каковы условия на последовательность вписанных многогранных поверхностей, гарантирующие совпадение результатов?

§ 5. Начальные сведения о дифференциальных формах

Дадим теперь первоначальные представления об удобном математическом аппарате дифференциальных форм, обращая здесь основное внимание на его алгоритмические возможности, а не на подробности теоретических конструкций, которые будут изложены в гл. XV.

1. Дифференциальная форма, определение и примеры. Из курса алгебры читателю хорошо известно понятие линейной формы, и мы этим понятием уже широко пользовались при построении дифференциального исчисления. Там главным образом встречались симметрические формы. Здесь же речь будет о кососимметрических (антисимметрических) формах.

Напомним, что форма $L: X^k \to Y$ степени или порядка k, определенная на упорядоченных наборах $\xi_1, \ldots, \xi_k$ векторов линейного пространства X и принимающая значения в линейном пространстве Y, называется *кососимметрической* (антисимметрической), если значение формы меняет знак при перестановке местами любой пары ее аргументов, т. е.

$$L(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_k) = -L(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_k).$$

В частности, если $\xi_i = \xi_j$, то независимо от остальных векторов значение формы будет равно нулю.

Пример 1. Векторное произведение $[\xi_1, \xi_2]$ векторов пространства $\mathbb{R}^3$ есть билинейная кососимметрическая форма со значениями в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пример 2. Определенный формулой (1) § 4 ориентированный объем $V(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ параллелепипеда, натянутого на векторы $\xi_1, \ldots, \xi_k$ пространства $\mathbb{R}^k$, является кососимметрической вещественнозначной k-формой в $\mathbb{R}^k$.

Нас будут пока интересовать вещественнозначные формы (случай $Y = \mathbb{R}$), хотя все излагаемое ниже применимо и в более общей ситуации, например, когда Y есть поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Линейная комбинация кососимметрических форм одной степени в свою очередь является кососимметрической формой, т. е. кососимметрические формы одной степени образуют линейное пространство.

В алгебре вводится, кроме того, операция $\wedge$ *внешнего умножения* кососимметрических форм, которая упорядоченной паре A^p, B^q таких форм (степени p и q соответственно) сопоставляет кососимметрическую форму $A^p \wedge B^q$ степени $p+q$. Эта операция

ассоциативна: $(A^p \wedge B^q) \wedge C^r = A^p \wedge (B^q \wedge C^r)$,

дистрибутивна: $(A^p + B^p) \wedge C^q = A^p \wedge C^q + B^p \wedge C^q$,

кососоммутативна: $A^p \wedge B^q = (-1)^{pq} B^q \wedge A^p$.

В частности, если речь идет об 1-формах A и B, то имеет место антикоммутативность $A \wedge B = -B \wedge A$ операции, подобная антикоммутативности упомянутого в примере 1 векторного произведения, обобщением которого и является внешнее умножение форм.

Не вникая в детали общего определения внешнего произведения, примем пока к сведению перечисленные свойства этой операции и отметим, что в случае внешнего произведения 1-форм $L_1, \ldots, L_k \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ результат $L_1 \wedge \ldots \wedge L_k$ есть k-форма, которая на наборе векторов $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ принимает значение

$$L_1 \wedge \ldots \wedge L_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \begin{vmatrix} L_1(\xi_1) & \ldots & L_k(\xi_1) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ L_1(\xi_k) & \ldots & L_k(\xi_k) \end{vmatrix} = \det(L_j(\xi_i)). \tag{1}$$

Если соотношение (1) принять в качестве определения его левой части, то из свойств определителей легко следует, что в случае линейных 1-форм A, B, C действительно: $A \wedge B = -B \wedge A$ и $(A+B) \wedge C = A \wedge C + B \wedge C$.

Рассмотрим несколько полезных для дальнейшего примеров.

Пример 3. Пусть $\pi^i \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$, — проекторы. Точнее, линейная функция $\pi^i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такова, что на любом векторе $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$ она принимает значение $\pi^i(\xi) = \xi^i$ проекции этого вектора на соответствующую координатную ось. Тогда в соответствии с формулой (1) получаем

$$\pi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \ldots & \xi_1^{i_k} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \xi_k^{i_1} & \ldots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Пример 4. Декартовы координаты векторного произведения $[\xi_1, \xi_2]$ векторов $\xi_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3)$, $\xi_2 = (\xi_2^1, \xi_2^2, \xi_2^3)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, как известно, определяются из равенства

$$[\xi_1, \xi_2] = \left(\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_1^3 & \xi_1^1 \\ \xi_2^3 & \xi_2^1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{vmatrix} \right).$$

Таким образом, в соответствии с результатом примера 3 можно записать, что

$$\pi^1([\xi_1, \xi_2]) = \pi^2 \wedge \pi^3(\xi_1, \xi_2),$$
$$\pi^2([\xi_1, \xi_2]) = \pi^3 \wedge \pi^1(\xi_1, \xi_2),$$
$$\pi^3([\xi_1, \xi_2]) = \pi^1 \wedge \pi^2(\xi_1, \xi_2).$$

Пример 5. Пусть $f: D \to \mathbb{R}$ — определенная в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ и дифференцируемая в точке $x_0 \in D$ функция. Как известно, дифференциал $df(x_0)$ функции в точке является линейной функцией, определенной на векторах ξ смещения от этой точки, точнее, на векторах пространства TD_{x_0}, касательного к D (к $\mathbb{R}^n$) в рассматриваемой точке. Напомним, что если $x^1, \ldots, x^n$ — координаты в $\mathbb{R}^n$, а $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, то

$$df(x_0)(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\,\xi^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\,\xi^n = D_\xi f(x_0).$$

В частности, $dx^i(\xi)=\xi^i$, или, более формально, $dx^i(x_0)(\xi)=\xi^i$.

Если $f_1, \ldots, f_k$ — определенные в G и дифференцируемые в точке $x_0 \in G$ вещественнозначные функции, то в соответствии с формулой (1) в точке x_0 на наборе $\xi_1, \ldots, \xi_k$ векторов пространства TG_{x_0} получаем

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \begin{vmatrix} df_1(\xi_1) & \ldots & df_k(\xi_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ df_1(\xi_k) & \ldots & df_k(\xi_k) \end{vmatrix}, \tag{3}$$

и, в частности,

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \ldots & \xi_1^{i_k} \\ \xi_k^{i_1} & \ldots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Таким образом, из линейных форм $df_1, \ldots, df_k$, определенных на линейном пространстве $TD_{x_0} \approx T\mathbb{R}^n_{x_0} \approx \mathbb{R}^n$, получились определенные на этом же пространстве кососимметрические формы степени k.

Пример 6. Если $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$, где D — область в $\mathbb{R}^n$, то в любой точке $x \in D$ определен дифференциал $df(x)$ функции f, который, как было сказано, является линейной функцией $df(x)$: $TD_x \to T\mathbb{R}_{f(x)} \approx \mathbb{R}$ на линейном пространстве TD_x, касательном к D в точке x. При переходе от точки к точке в области D форма $df(x)=f'(x)$, вообще говоря, меняется. Итак, гладкая скалярная функция f: $D \to \mathbb{R}$ порождает в каждой точке области D линейную форму $df(x)$, или, как говорят, порождает в D *поле линейных форм*, определенных на соответствующих касательных пространствах TD_x.

Определение 1. Будем говорить, что в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана вещественнозначная *дифференциальная p-форма* ω, если в каждой точке $x \in D$ определена кососимметрическая форма $\omega(x)$: $(TD_x)^p \to \mathbb{R}$.

Число p обычно называют *степенью* или *порядком* дифференциальной p-формы ω.

Таким образом, рассмотренное в примере 6 поле дифференциала df гладкой функции f: $D \to \mathbb{R}$ есть дифференциальная 1-форма в области D, а $\omega = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ есть простейший пример дифференциальной формы степени p.

Пример 7. Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле, т. е. с каждой точкой $x \in D$ связан вектор $\boldsymbol{F}(x)$. При наличии евклидовой структуры в $\mathbb{R}^n$ это векторное поле порождает следующую дифференциальную 1-форму $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$ в D.

Если ξ — вектор, приложенный к точке $x \in D$, т. е. $\xi \in TD_x$, то положим

$$\omega^1_{\boldsymbol{F}}(x)(\xi) = \langle \boldsymbol{F}(x), \xi \rangle.$$

Из свойств скалярного произведения вытекает, что в каждой точке $x \in D$ $\omega^1_{\boldsymbol{F}}(x) = \langle \boldsymbol{F}(x), \cdot \rangle$ действительно является линейной формой.

Такие дифференциальные формы возникают очень часто. Например, если F — непрерывное силовое поле в области D, а ξ — вектор малого смещения от точки $x \in D$, то элементарная работа поля, отвечающая такому смещению, как известно из физики, определяется именно величиной $\langle F(x), \xi \rangle$.

Итак, поле сил F в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ естественным образом порождает в D дифференциальную 1-форму ω_F^1, которую в этом случае естественно назвать *формой работы поля* F.

Заметим, что в евклидовом пространстве дифференциал df гладкой в области $D \subset \mathbb{R}^n$ функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ тоже можно считать 1-формой, порожденной векторным полем, которым в данном случае является поле $F = \operatorname{grad} f$. В самом деле, ведь по определению вектор $\operatorname{grad} f(x)$ таков, что для любого вектора $\xi \in TD_x$ имеет место равенство $df(x)(\xi) = \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle$.

Пример 8. Заданное в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ векторное поле V может также следующим образом порождать дифференциальную форму ω_V^{n-1} степени $n-1$. Если в точке $x \in D$ взять соответствующий ей вектор поля $V(x)$ и еще $n-1$ векторов $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1} \in TD_x$, приложенный к точке x, то ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на векторы $V(x), \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, равный определителю матрицы, строки которой состоят из координат этих векторов, очевидно, будет кососимметрической $(n-1)$-формой по переменным $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

При $n=3$ форма ω_V^2 есть обычное смешанное произведение $(V(x), \xi_1, \xi_2)$ векторов, из которых один $V(x)$ задан, а тогда по двум оставшимся аргументам получается кососимметрическая 2-форма $\omega_V^2 = (V, \cdot, \cdot)$.

Например, если в области D имеется установившееся течение жидкости и $V(x)$ — вектор скорости течения в точке $x \in D$, то величина $(V(x), \xi_1, \xi_2)$ есть элементарный объем жидкости, которая протекает за единицу времени через натянутую на малые векторы $\xi_1, \xi_2 \in TD_x$ площадку (параллелограмм). Выбирая поразному векторы ξ_1, ξ_2, мы будем получать различные по конфигурации и расположению в пространстве площадки (параллелограммы), одной из вершин которых является точка x. Для каждой такой площадки будет, вообще говоря, свое значение $(V(x), \xi_1, \xi_2)$ формы $\omega_V^2(x)$. Как было сказано, оно показывает, сколько жидкости протекло за единицу времени через данную площадку, т. е. характеризует расход жидкости или поток через выбранную элементарную площадку. По этой причине форму ω_V^2, как, впрочем, и ее многомерный аналог ω_V^{n-1}, часто называют *формой потока векторного поля* V в области D.

2. Координатная запись дифференциальной формы. Остановимся теперь на координатной записи кососимметрических алгебраических и дифференциальных форм и покажем, в частности, что любая дифференциальная k-форма в некотором смысле является линейной комбинацией стандартных дифференциальных форм вида (4).

Для сокращения записи будем (как мы это делали в аналогичных случаях и прежде) по повторяющимся сверху и снизу индексам подразумевать суммирование в пределах области допустимых значений этих индексов.

Пусть L — k-линейная форма в $\mathbb{R}^n$. Если в $\mathbb{R}^n$ фиксирован базис $e_1, \ldots, e_n$, то каждый вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$ получает координатное представление $\xi = \xi^i e_i$ в этом базисе, а форма L приобретает координатную запись

$$L(\xi_1, \ldots, \xi_k) = L\left(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, \xi_k^{i_k} e_{i_k}\right) = \\ = L\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\right) \xi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \xi_k^{i_k}. \tag{5}$$

Числа $a_{i_1 \ldots i_k} = L\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\right)$ вполне характеризуют форму L, если известно в каком базисе $e_1, \ldots, e_n$ они получены. Эти числа, очевидно, симметричны или кососимметричны по их индексам тогда и только тогда, когда соответствующим видом симметрии обладает форма L.

В случае кососимметрической формы L координатное представление (5) можно несколько преобразовать. Чтобы направление этого преобразования стало ясным и естественным, рассмотрим частный случай соотношения (5), когда L — кососимметрическая 2-форма в $\mathbb{R}^3$. Тогда для векторов $\xi_1 = \xi_1^{i_1} e_{i_1}$, $\xi_2 = \xi_2^{i_2} e_{i_2}$, где $i_1, i_2 = 1, 2, 3$, получаем

$$\begin{aligned} L(\xi_1, \xi_2) &= L\left(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \xi_2^{i_2} e_{i_2}\right) = L(e_{i_1}, e_{i_2})\, \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} = \\ &= L(e_1, e_1)\, \xi_1^1 \xi_2^1 + L(e_1, e_2)\, \xi_1^1 \xi_2^2 + L(e_1, e_3)\, \xi_1^1 \xi_2^3 + \\ &+ L(e_2, e_1)\, \xi_1^2 \xi_2^1 + L(e_2, e_2)\, \xi_1^2 \xi_2^2 + L(e_2, e_3)\, \xi_1^2 \xi_2^3 + \\ &+ L(e_3, e_1)\, \xi_1^3 \xi_2^1 + L(e_3, e_2)\, \xi_1^3 \xi_2^2 + L(e_3, e_3)\, \xi_1^3 \xi_2^3 = \\ &= L(e_1, e_2)(\xi_1^1 \xi_2^2 - \xi_1^2 \xi_2^1) + L(e_1, e_3)(\xi_1^1 \xi_2^3 - \xi_1^3 \xi_2^1) + \\ &+ L(e_2, e_3)(\xi_1^2 \xi_2^3 - \xi_1^3 \xi_2^2) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3} L(e_{i_1}, e_{i_2}) \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \xi_1^{i_2} \\ \xi_2^{i_1} & \xi_2^{i_2} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем возможным комбинациям индексов i_1, i_2, которые удовлетворяют указанным под знаком суммы неравенствам.

Аналогично и в общем случае для кососимметрической формы L можно получить следующее представление:

$$L(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \ldots & \xi_1^{i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_k^{i_1} & \ldots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Тогда в соответствии с формулой (2) последнее равенство можно переписать в виде

$$L(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \pi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Таким образом, любую кососимметрическую форму L можно представить в виде линейной комбинации

$$L = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k} \pi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{i_k} \tag{7}$$

k-форм $\pi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{i_k}$, являющихся внешним произведением, составленным из простейших 1-форм $\pi^1, \ldots, \pi^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Пусть теперь в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана дифференциальная k-форма ω и некоторая система криволинейных координат $x^1, \ldots, x^n$. В каждой точке $x \in D$ фиксируем базис $e_1(x), \ldots, e_n(x)$ пространства TD_x, составленный из единичных векторов координатных направлений. (Например, если $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, то $e_1(x), \ldots, e_n(x)$ есть просто репер $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ пространства $\mathbb{R}^n$, параллельно перенесенный из начала координат в точку x.) Тогда в каждой точке $x \in D$ на основании формул (4) и (6) получаем, что

$$\omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \omega(e_{i_1}(x), \ldots, e_{i_k}(x)) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$$

или

$$\omega(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{8}$$

Таким образом, любая дифференциальная k-форма является комбинацией простейших k-форм $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, составленных из дифференциалов координат. Отсюда, собственно, и название «дифференциальная форма».

Коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_k}(x)$ линейной комбинации (8), вообще говоря, зависят от точки x, т. е. это какие-то функции, определенные в области, где задана форма ω_k.

В частности, нам уже давно известно разложение дифференциала

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) dx^n, \tag{9}$$

а, как видно из равенств,

$$\langle \mathbf{F}(x), \xi \rangle = \langle F^{i_1}(x) e_{i_1}(x), \xi^{i_2} e_{i_2}(x) \rangle = \langle e_{i_1}(x), e_{i_2}(x) \rangle F^{i_1}(x) \xi^{i_2} = g_{i_1 i_2}(x) F^{i_1}(x) \xi^{i_2} = g_{i_1 i_2}(x) F^{i_1}(x) dx^{i_2}(\xi),$$

имеет также место разложение

$$\omega^1_F(x) = \langle F(x), \ \cdot\rangle = (g_{i_1 i}(x) F^{i_1}(x))\, dx^i = a_i(x)\, dx^i, \tag{10}$$

которое в декартовых координатах выглядит особенно просто:

$$\omega^1_F(x) = \langle F(x), \ \cdot\rangle = \sum_{i=1}^{n} F^i(x)\, dx^i. \tag{11}$$

Далее, в $\mathbb{R}^3$ имеет место равенство

$$\omega^2_V(x)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} V^1(x) & V^2(x) & V^3(x) \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix} =$$

$$= V^1(x)\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix} + V^2(x)\begin{vmatrix} \xi_1^3 & \xi_1^1 \\ \xi_2^3 & \xi_2^1 \end{vmatrix} + V^3(x)\begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{vmatrix},$$

откуда следует, что

$$\omega^2_V(x) = V^1(x)\, dx^2 \wedge dx^3 + V^2(x)\, dx^3 \wedge dx^1 + V^3(x)\, dx^1 \wedge dx^2. \tag{12}$$

Аналогично, из разложения по строке определителя n-го порядка для формы ω^{n-1}_V получаем следующее разложение:

$$\omega^{n-1}_V(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} V^i(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n, \tag{13}$$

где знак $\widehat{\ }$ стоит над дифференциалом, который следует опустить в указанном слагаемом.

3. Внешний дифференциал формы. Все, что было до сих пор сказано о дифференциальных формах, пока в сущности относилось к каждой точке x области задания формы в отдельности и имело чисто алгебраический характер. Специфической для анализа операцией над дифференциальными формами является операция их (внешнего) дифференцирования.

Условимся в дальнейшем под *дифференциальными формами нулевого порядка* в области $D \subset \mathbb{R}^n$ понимать функции $f\colon D \to \mathbb{R}$, определенные в этой области.

Определение 2. (*Внешним*) *дифференциалом* от 0-формы f в случае, если f — дифференцируемая функция, называется обычный дифференциал df от этой функции.

Если заданная в области $D \subset \mathbb{R}^n$ дифференциальная p-форма $(p \geq 1)$

$$\omega(x) = a_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

имеет дифференцируемые коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_p}(x)$, то ее (*внешний*) *дифференциал* есть форма

$$d\omega(x) := da_{i_1 \ldots i_p}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

Используя разложение (9) дифференциала функции и опираясь на вытекающую из соотношения (1) дистрибутивность внешнего произведения 1-форм, заключаем, что

$$d\omega(x) = \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^i}(x)\, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = \\ = \alpha_{ii_1 \ldots i_p}(x)\, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

т. е. (внешний) дифференциал от p-формы ($p \geqslant 0$) всегда есть форма степени $p+1$.

Отметим, что данное выше определение 1 дифференциальной p-формы в области $D \subset \mathbb{R}^n$, как теперь можно понять, слишком общо, поскольку никак не связывает формы $\omega(x)$, соответствующие различным точкам области D. Реально в анализе используются лишь формы, коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_p}(x)$ координатного представления которых являются достаточно регулярными (чаще всего бесконечно дифференцируемыми) функциями в области D. *Порядок гладкости формы* ω в области $D \subset \mathbb{R}^n$ принято характеризовать низшим из порядков гладкости ее коэффициентов. Совокупность всех форм степени $p \geqslant 0$ с коэффициентами класса $C^{(\infty)}(D, \mathbb{R})$ чаще всего обозначают символом $\Omega^p(D, \mathbb{R})$ или Ω^p.

Таким образом, определенная нами операция дифференцирования форм осуществляет отображение $d\colon \Omega^p \to \Omega^{p+1}$.

Рассмотрим несколько полезных конкретных примеров.

Пример 9. Для 0-формы $\omega = f(x, y, z)$ — дифференцируемой функции, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^3$, — получаем

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Пример 10. Пусть

$$\omega(x, y) = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

— дифференциальная 1-форма в области D пространства $\mathbb{R}^2$, наделенного координатами x, y. Считая P и Q дифференцируемыми в D функциями, в соответствии с определением 2 получаем

$$d\omega(x, y) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \\ = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy\right) \wedge dy = \\ = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y)\, dx \wedge dy.$$

Пример 11. Для 1-формы

$$\omega = P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$

заданной в области D пространства $\mathbb{R}^3$, получаем

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Пример 12. Подсчет дифференциала 2-формы

$$\omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy,$$

где P, Q, R — дифференцируемые в области $D \subset \mathbb{R}^3$ функции, приводит к соотношению

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Если (x^1, x^2, x^3) — декартовы координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, а $x \longmapsto f(x)$, $x \longmapsto \boldsymbol{F}(x) = (F^1, F^2, F^3)(x)$, $x \longmapsto \boldsymbol{V} = (V^1, V^2, V^3)(x)$ — гладкие скалярное и векторные поля в области $D \subset \mathbb{R}^3$, то вместе с ними (особенно в физических задачах) часто рассматривают соответственно векторные поля

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) \text{ — \textit{градиент} скалярного поля } f, \tag{14}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}, \frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1}, \frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right) \text{ — \textit{ротор} векторного поля } \boldsymbol{F} \tag{15}$$

и скалярное поле

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3} \text{ — \textit{дивергенция} векторного поля } \boldsymbol{V}. \tag{16}$$

О градиенте скалярного поля мы в свое время уже говорили. Не останавливаясь пока на физическом содержании ротора и дивергенции векторного поля, отметим лишь связь этих классических операторов теории поля с операцией дифференцирования форм.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ между векторными полями и один- и два-формами имеется взаимно однозначное соответствие

$$\boldsymbol{F} \leftrightarrow \omega_{\boldsymbol{F}}^1 = \langle \boldsymbol{F}, \cdot \rangle, \quad \boldsymbol{V} \leftrightarrow \omega_{\boldsymbol{V}}^2 = (\boldsymbol{V}, \cdot, \cdot).$$

Заметим также, что любая 3-форма в области $D \subset \mathbb{R}^3$ имеет вид $\rho(x^1, x^2, x^3)\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. Учитывая эти обстоятельства, можно ввести следующие определения для $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{V}$:

$$f \longmapsto \omega^0 \,(= f) \longmapsto d\omega^0 \,(= df) = \omega_{\boldsymbol{g}}^1 \longmapsto \boldsymbol{g} := \operatorname{grad} f, \tag{14'}$$

$$\boldsymbol{F} \longmapsto \omega_{\boldsymbol{F}}^1 \longmapsto d\omega_{\boldsymbol{F}}^1 = \omega_{\boldsymbol{r}}^2 \longmapsto \boldsymbol{r} := \operatorname{rot} \boldsymbol{F}, \tag{15'}$$

$$\boldsymbol{V} \longmapsto \omega_{\boldsymbol{V}}^2 \longmapsto d\omega_{\boldsymbol{V}}^2 = \omega_{\rho}^3 \longmapsto \rho := \operatorname{div} \boldsymbol{V}. \tag{16'}$$

Примеры 9, 11, 12 показывают, что при этом в декартовых координатах мы приходим к выписанным выше выражениям (14), (15), (16) для $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{V}$. Таким образом, перечисленные операторы теории поля можно рассматривать как конкретные проявления операции дифференцирования внешних форм, которая выполняется единообразно на формах любой степени. Подробнее о градиенте, роторе и дивергенции будет сказано в гл. XIV.

4. Перенос векторов и форм при отображениях. Посмотрим внимательнее на то, что происходит с функциями (0-формами) при отображении областей.

Пусть $\varphi\colon U\to V$ — отображение области $U\subset\mathbb{R}^m$ в область $V\subset\mathbb{R}^n$. Под действием отображения φ каждая точка $t\in U$ переходит в определенную точку $x=\varphi(t)$ области V.

Если на V определена функция f, то благодаря отображению $\varphi\colon U\to V$ на области U естественно возникает полученная из f функция φ^*f, которая определяется равенством

$$(\varphi^*f)(t):=f(\varphi(t)),$$

т. е. чтобы найти значение φ^*f в точке $t\in U$ надо отправить t в точку $x=\varphi(t)\in V$ и вычислить там значение функции f.

Таким образом, если при отображении $\varphi\colon U\to V$ точки области U переходят в точки области V, то множество определенных на V функций под действием построенного соответствия $f\longmapsto\varphi^*f$ отображается (в обратную сторону) в множество функций, определенных на U.

Иными словами, мы показали, что при отображении $\varphi\colon U\to V$ естественно возникает отображение $\varphi^*\colon\ \Omega^0(V)\to\Omega^0(U)$, которое преобразует заданные на V нуль-формы в нуль-формы, определенные на U.

Рассмотрим теперь общий случай переноса форм любой степени.

Пусть $\varphi\colon\ U\to V$ — гладкое отображение области $U\subset\mathbb{R}^m_t$ в область $V\subset\mathbb{R}^n_x$, $\varphi'(t)\colon\ TU_t\to TV_{x=\varphi(t)}$ — соответствующее φ отображение касательных пространств, и пусть ω — некоторая p-форма в области V. Тогда форме ω в области U можно сопоставить p-форму $\varphi^*\omega$, которая в точке $t\in U$ на наборе векторов $\tau_1,\ \ldots,\ \tau_p\in TU_t$ определяется равенством

$$\varphi^*\omega(t)(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_p):=\omega(\varphi(t))(\varphi'(t)\tau_1,\ \ldots,\ \varphi'(t)\tau_p). \tag{17}$$

Таким образом, каждому гладкому отображению $\varphi\colon\ U\to V$ соответствует отображение $\varphi^*\colon\ \Omega^p(V)\to\Omega^p(U)$, которое переносит заданные на V формы в область U.

Из соотношения (17), очевидно, следует, что

$$\varphi^*(\omega'+\omega'')=\varphi^*(\omega')+\varphi^*(\omega''), \tag{18}$$

$$\varphi^*(\lambda\omega)=\lambda\varphi^*\omega,\quad \text{если}\quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{19}$$

Вспомнив закон $(\psi\circ\varphi)'=\psi'\circ\varphi'$ дифференцирования композиции отображений $\varphi\colon U\to V$, $\psi\colon\ V\to W$, из (17) заключаем дополнительно, что

$$(\psi\circ\varphi)^*=\varphi^*\circ\psi^* \tag{20}$$

(естественный обратный ход: композиция отображений

$$\psi^*\colon\ \Omega^p(W)\to\Omega^p(V),\quad \varphi^*\colon\ \Omega^p(V)\to\Omega^p(U)).$$

Посмотрим теперь, как практически осуществляется перенос форм.

Пример 13. В области $V \subset \mathbb{R}^n_x$ возьмем 2-форму $\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$. Пусть $x^i = x^i(t^1, \ldots, t^m)$, $i = 1, \ldots, n$, — координатная запись отображения $\varphi\colon U \to V$ области $U \subset \mathbb{R}^m_t$ в V.

Мы хотим найти координатное представление формы $\varphi^*\omega$ в U. Берем точку $t \in U$ и векторы $\tau_1, \tau_2 \in TU_t$. В пространстве $TV_{x=\varphi(t)}$ им отвечают векторы $\xi_1 = \varphi'(t)\tau_1$, $\xi_2 = \varphi'(t)\tau_2$, координаты $(\xi_1^1, \ldots, \xi_1^n)$, $(\xi_2^1, \ldots, \xi_2^n)$ которых выражаются через координаты $(\tau_1^1, \ldots, \tau_1^m)$, $(\tau_2^1, \ldots, \tau_2^m)$ векторов τ_1, τ_2 с помощью матрицы Якоби по формулам

$$\xi_1^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t)\,\tau_1^j, \qquad \xi_2^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t)\,\tau_2^j, \qquad i = 1, \ldots, n$$

(по j суммирование от 1 до m).

Таким образом,

$$\varphi^*\omega(t)(\tau_1, \tau_2) := \omega(\varphi(t))(\xi_1, \xi_2) = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}(\xi_1, \xi_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \xi_1^{i_2} \\ \xi_2^{i_1} & \xi_2^{i_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\tau_1^{j_1} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\tau_1^{j_2} \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\tau_2^{j_1} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\tau_2^{j_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j_1, j_2 = 1}^{m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \begin{vmatrix} \tau_1^{j_1} & \tau_1^{j_2} \\ \tau_2^{j_1} & \tau_2^{j_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j_1, j_2 = 1}^{m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_2}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\, dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}(\tau_1, \tau_2) =$$

$$= \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le m} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} - \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_2}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_1}} \right) dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}(\tau_1, \tau_2) =$$

$$= \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le m} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_1}} \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_2}} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \end{vmatrix} (t)\, dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}(\tau_1, \tau_2).$$

Следовательно, мы показали, что

$$\varphi^*(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le m} \frac{\partial(x^{i_1}, x^{i_2})}{\partial(t^{j_1}, t^{j_2})}(t)\, dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}.$$

Если воспользоваться свойствами (18) и (19) операции переноса форм *) и повторить проведенную в последнем примере

*) Если (19) использовать поточечно, то видно, что

$$\varphi^*(a(x)\,\omega) = a(\varphi(t))\,\varphi^*\omega.$$

выкладку в общем виде, то получим следующее равенство:

$$\varphi^*\left(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n} a_{i_1\ldots i_p}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<\ldots<j_p\leqslant m}} a_{i_1\ldots i_p}(x(t))\frac{\partial\left(x^{i_1},\ldots,x^{i_p}\right)}{\partial\left(t^{j_1},\ldots,t^{j_p}\right)}dt^{j_1}\wedge\ldots\wedge dt^{j_p}. \tag{21}$$

Заметим, что если в форме, стоящей здесь под знаком φ^*, формально сделать замену $x=x(t)$, выразить дифференциалы $dx^1, \ldots, dx^n$ через дифференциалы $dt^1, \ldots, dt^m$ и упростить полученное выражение, пользуясь свойствами внешнего произведения, то мы как раз и получим правую часть равенства (21).

Действительно, для каждого фиксированного набора индексов $i_1, \ldots, i_p$

$$a_{i_1\ldots i_p}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}=$$

$$=a_{i_1\ldots i_p}(x(t))\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}dt^{j_1}\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}}dt^{j_p}\right)=$$

$$=a_{i_1\ldots i_p}(x(t))\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}}dt^{j_1}\wedge\ldots\wedge dt^{j_p}=$$

$$=\sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_p\leqslant m} a_{i_1\ldots i_p}(x(t))\frac{\partial\left(x^{i_1},\ldots,x^{i_p}\right)}{\partial\left(t^{j_1},\ldots,t^{j_p}\right)}dt^{j_1}\wedge\ldots\wedge dt^{j_p}.$$

Суммируя такие равенства по всем упорядоченным наборам $1\leqslant\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n$, получаем правую часть соотношения (21).

Таким образом, мы доказали следующее важное в техническом отношении

Утверждение. *Если в область $V\subset\mathbb{R}^n$ задана дифференциальная форма ω, а $\varphi\colon U\to V$ — гладкое отображение области $U\subset\mathbb{R}^m$ в V, то координатная запись формы $\varphi^*\omega$ может быть получена из координатной записи*

$$\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n} a_{i_1\ldots i_p}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$$

формы ω прямой заменой переменных $x=\varphi(t)$ (с последующим преобразованием в соответствии со свойствами внешнего произведения).

Пример 14. В частности, если $m=n=p$, то соотношение (21) сводится к равенству

$$\varphi^*(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)=\det\varphi'(t)\,dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n. \tag{22}$$

Значит, если под знаком кратного интеграла вместо $f(x)\,dx^1\ldots$ $\ldots dx^n$ писать $f(x)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$, то формула

$$\int\limits_{V=\varphi(U)} f(x)\,dx = \int\limits_{U} f(\varphi(t))\det\varphi'(t)\,dt$$

замены переменных в кратном интеграле при сохраняющих ориентацию диффеоморфизмах (т. е. при $\det\varphi'(t)>0$) получалась бы автоматически формальной подстановкой $x=\varphi(t)$, подобно тому, как это имело место в одномерном случае, и ей можно было бы придать следующий вид:

$$\int\limits_{\varphi(U)} \omega = \int\limits_{U} \varphi^*\omega. \tag{23}$$

Заметим в заключение, что если степень p взятой в области $V\subset\mathbb{R}^n_x$ формы ω больше, чем размерность m области $U\subset\mathbb{R}^m$, которая отображается посредством $\varphi\colon U\to V$ в область V, то соответствующая ω на U форма $\varphi^*\omega$, очевидно, окажется нулевой. Таким образом, отображение $\varphi^*\colon \Omega^p(V)\to\Omega^p(U)$, вообще говоря, не обязано быть инъективным.

С другой стороны, если $\varphi\colon U\to V$ имеет гладкое обратное отображение $\varphi^{-1}\colon V\to U$, то в силу соотношения (20) и равенств $\varphi^{-1}\circ\varphi=e_U$, $\varphi\circ\varphi^{-1}=e_V$ получаем, что $(\varphi)^*\circ(\varphi^{-1})^*=e_U^*$, $(\varphi^{-1})^*\circ\varphi^*=e_V^*$, и поскольку e_U^* и e_V^* — тождественные отображения $\Omega^p(U)$ и $\Omega^p(V)$ соответственно, то отображения $\varphi^*\colon \Omega^p(V)\to\Omega^p(U)$, $(\varphi^{-1})^*\colon \Omega^p(U)\to\Omega^p(V)$, как и следовало ожидать, оказываются взаимно обратными. То есть в этом случае отображение $\varphi^*\colon$ $\Omega^p(V)\to\Omega^p(U)$ биективно.

Отметим, наконец, что наряду с уже указанными выше свойствами (18) — (20) отображение φ^* переноса форм, как можно проверить, удовлетворяет также соотношению

$$\varphi^*(d\omega)=d(\varphi^*\omega). \tag{24}$$

Это принципиально важное равенство показывает, в частности, что определенная нами в координатном виде операция дифференцирования форм на самом деле не зависит от выбора системы координат, в которой записана дифференцируемая форма ω. Подробнее это будет обсуждаться в гл. XV.

5. Формы на поверхностях.

Определение 3. Говорят, что *на гладкой поверхности* $S\subset\mathbb{R}^n$ задана *дифференциальная p-форма* ω, если в каждой точке $x\in S$ на векторах касательной к S плоскости TS_x определена p-форма $\omega(x)$.

Пример 15. Если гладкая поверхность S лежит в области $D\subset\mathbb{R}^n$, в которой определена форма ω, то поскольку в любой точке $x\in S$ имеет место включение $TS_x\subset TD_x$, можно рассмотреть сужение формы $\omega(x)$ на TS_x. Так на S возникает форма

$\omega|_S$, которую естественно назвать *сужением формы ω на поверхность S*

Как мы знаем, поверхность локально или в целом задается параметрически Пусть $\varphi\colon U \to S = \varphi(U) \subset D$ — параметризованная гладкая поверхность в области D, а ω—форма в D. Тогда форму ω можно перенести в область U параметров и записать $\varphi^*\omega$ в координатном виде в соответствии с установленным выше алгоритмом. Ясно, что получаемая при этом в U форма $\varphi^*\omega$ совпадает с формой $\varphi^*(\omega|_S)$.

Заметим, что коль скоро $\varphi'(t)\colon TU_t \to TS_x$ в любой точке $t \in U$ есть изоморфизм между TU_t и TS_x, то можно переносить формы как с S на U, так и с U на S, поэтому как сами гладкие поверхности обычно задают локально или в целом параметрически, так и формы на них в конечном счете обычно задают в областях изменения параметров локальных карт.

Пример 16. Пусть ω^2_V — рассмотренная в примере 8 форма потока, порожденная векторным полем скоростей течения $\boldsymbol{V}$ в области D ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Если S — гладкая ориентированная поверхность в D, то можно рассмотреть сужение $\omega^2_V|_S$ формы ω^2_V на S. Получаемая при этом форма $\omega^2_V|_S$ характеризует поток через каждый элемент поверхности S.

Если $\varphi\colon I \to S$ — локальная карта поверхности S, то, сделав замену переменных $x = \varphi(t)$ в координатном выражении (12) формы ω^2_V, получим координатное выражение определенной на квадрате I формы $\varphi^*\omega^2_V = \varphi^*(\omega^2_V|_S)$ в данных локальных координатах поверхности.

Пример 17. Пусть ω^1_F — рассмотренная в примере 7 форма работы, порожденная действующим в области D евклидова пространства полем сил $\boldsymbol{F}$. Пусть $\varphi\colon I \to \varphi(I) \subset D$ — гладкий путь (φ — не обязательно гомеоморфизм). Тогда в соответствии с общим принципом сужения и переноса форм на отрезке I возникает форма $\varphi^*\omega^1_F$, координатное представление $a(t)\,dt$ которой можно получить, выполнив замену переменных $x = \varphi(t)$ в координатном выражении (11) формы ω^1_F.

Задачи и упражнения

1. Вычислите значения приведенных ниже дифференциальных форм ω в $\mathbb{R}^n$ на указанных наборах векторов:

a. $\omega = x^2\,dx^1$ на векторе $\xi = (1, 2, 3) \in T\mathbb{R}^3_{(3,2,1)}$

b. $\omega = dx^1 \wedge dx^3 + x^1\,dx^2 \wedge dx^4$ на упорядоченной паре векторов $\xi_1, \xi_2 \in T\mathbb{R}^4_{(1,0,0,0)}$, где $\xi_1 = (-1, 0, 1, 1)$, $\xi_2 = (0, -1, 0, 1)$.

c. $\omega = df$, где $f = x^1 + 2x^2 + \ldots + nx^n$, а $\xi = (1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}) \in T\mathbb{R}^n_{(1,1,\ldots,1)}$.

2. a. Проверьте, что форма $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ тождественно равна нулю, если не все индексы $i_1, \ldots, i_k$ различны.

b. Объясните, почему на n-мерном векторном пространстве нет отличных от нуля кососимметрических форм степени $p > n$.

c. Упростите запись формы, заданной в виде

$$2dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 + 3dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1.$$

d. Раскройте скобки и приведите подобные члены

$$(x^1\, dx^2 + x^2\, dx^1) \wedge (x^3\, dx^1 \wedge dx^2 + x^2\, dx^1 \wedge dx^3 + x^1\, dx^2 \wedge dx^3).$$

e. Форму $df \wedge dg$, где $f = \ln(1 + |x|^2)$, $g = \sin|x|$, $x = (x^1, x^2, x^3)$, запишите в виде комбинации форм $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3$.

f. Проверьте, что в $\mathbb{R}^n$

$$df^1 \wedge \ldots \wedge df^n (x) = \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

g. Проведите все выкладки и покажите, что при $1 \leqslant k \leqslant n$

$$df^1 \wedge \ldots \wedge df^k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{i_1}} \cdots \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{i_k}} \\ \dfrac{\partial f^k}{\partial x^{i_1}} \cdots \dfrac{\partial f^k}{\partial x^{i_k}} \end{pmatrix} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

3. a. Покажите, что форма α четной степени коммутирует с любой формой β, т. е. $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$.

b. Пусть $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$ и $\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ (n раз) Проверьте, что

$$\omega^n = n!\; dp_1 \wedge dq^1 \wedge \ldots \wedge dp_n \wedge dq^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\; dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n \wedge dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n.$$

4. a. Форму $\omega = df$, где $f(x) = (x^1) + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^n$, запишите в виде комбинации форм $dx^1, \ldots, dx^n$ и найдите дифференциал $d\omega$ формы ω.

b. Проверьте, что для любой функции $f \in C^{(2)}(D, \mathbb{R})$, $d^2 f \equiv 0$, где $d^2 = d \circ d$, а d — оператор внешнего дифференцирования

c. Покажите, что если коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_k}(x)$ формы $\omega = a_{i_1 \ldots i_k}(x) \times dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ принадлежат классу $C^2(D, \mathbb{R})$, то $d^2\omega \equiv 0$ в области D.

d. Найдите внешний дифференциал формы $\dfrac{y\, dx - x\, dy}{x^2 + y^2}$ в области ее определения.

5. Если под знаком кратного интеграла $\int\limits_D f(x)\, dx^1 \ldots dx^n$ произведение $dx^1 \ldots dx^n$ понимать как форму $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, то, согласно результату примера 14, у нас будет возможность формально получать подынтегральные выражения формулы замены переменных в кратном интеграле. Выполните, согласно этой рекомендации, переход от декартовых координат:

a) к полярным координатам в $\mathbb{R}^2$,
b) к цилиндрическим координатам в $\mathbb{R}^3$,
c) к сферическим координатам в $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите сужение формы:

a. dx^i на гиперплоскость $x^i = 1$.

b. $dx \wedge dy$ на кривую $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a < t < b$.

c. $dx \wedge dy$ на плоскость в $\mathbb{R}^3$, задаваемую уравнением $x = c$.

d. $dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$ на грани стандартного единичного куба в $\mathbb{R}^3$.

e. $\omega_i = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge \widehat{dx^i} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n$ на грани стандартного единичного куба в $\mathbb{R}^n$; знак $\widehat{\ }$ стоит над дифференциалом dx^i, который выбрасывается из написанного произведения.

7. Выразите в сферических координатах $\mathbb{R}^3$ сужение следующих форм на сферу радиуса R с центром в начале координат:

a. dx.
b. dy.
c. $dy \wedge dz$.

8. Отображение φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задано в виде $(u, v) \longmapsto (u \cdot v, 1) = (x, y)$ Найдите:

a. $\varphi^*(dx)$.
b $\varphi^*(dy)$.
c. $\varphi^*(y\,dx)$.

9. Проверьте, что внешний дифференциал d: $\Omega^p(D) \to \Omega^{p+1}(D)$ обладает следующими свойствами:

a. $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.
b. $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$, где $\deg \omega_1$ — степень формы ω_1.
c. $\forall \omega \in \Omega^p \quad d(d\omega) = 0$.
d. $\forall f \in \Omega^0 \quad df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Покажите, что отображение d: $\Omega^p(D) \to \Omega^{p+1}(D)$, обладающее свойствами a, b, c, d, единственно.

10. Проверьте, что отображение φ^*: $\Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$, отвечающее отображению φ: $U \to V$, обладает следующими свойствами:

a. $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2$.
b. $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2$
c. $d\varphi^*\omega = \varphi^*\,d\omega$.
d. Если еще имеется отображение ψ: $V \to W$, то $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

ГЛАВА XIII

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Интеграл от дифференциальной формы

1. Исходные задачи, наводящие соображения, примеры.

а. Работа поля. Пусть $F(x)$ — непрерывное векторное поле сил, действующих в области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Перемещение пробной частицы в поле связано с совершением работы. Требуется вычислить работу, совершаемую полем, при перемещении единичной пробной частицы по заданной траектории, точнее, вдоль гладкого пути $\gamma\colon I \to \gamma(I) \subset G$.

Мы уже касались этого вопроса, рассматривая приложения определенного интеграла, поэтому здесь можно лишь напомнить решение задачи, отмечая некоторые характерные и полезные для дальнейшего элементы конструкции.

Известно, что в постоянном поле F перемещение на вектор ξ связано с работой, равной $\langle F, \xi \rangle$.

Пусть $t \longmapsto x(t)$ — определенное на отрезке $I = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leqslant t \leqslant b\}$ гладкое отображение $\gamma\colon I \to G$.

Возьмем достаточно мелкое разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда на каждом промежутке $I_i = \{t \in I \mid t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}$ разбиения с точностью до бесконечно малых более высокого порядка выполняется равенство $x(t) - x(t_i) \approx x'(t_i)(t - t_i)$. Вектору $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ смещения из t_i в t_{i+1} (рис. 83) в пространстве $\mathbb{R}^n$ отвечает перемещение из точки $x(t_i)$ на вектор $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, который с указанной погрешностью можно считать совпадающим с вектором $\xi_i = \dot{x}(t_i)\tau_i$, касательным к траектории в точке $x(t_i)$. Ввиду непрерывности поля $F(x)$, его можно считать локально постоянным, и потому работу ΔA_i, отвечающую промежутку (времени) I_i, можно с малой относительной погрешностью вычислять в виде

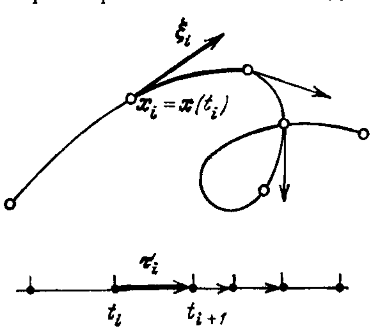

Рис. 83.

$$\Delta A_i \approx \langle F(x_i), \xi_i \rangle$$

или

$$\Delta A_i \approx \langle \boldsymbol{F}(x(t_i)),\ \dot{\boldsymbol{x}}(t_i)\,\tau_i\rangle.$$

Значит,

$$A = \sum_i \Delta A_i \approx \sum_i \langle \boldsymbol{F}(x(t_i)),\ \dot{\boldsymbol{x}}(t_i)\rangle\,\Delta t_i,$$

откуда, переходя к пределу при измельчании разбиения отрезка I, получаем, что

$$A = \int_a^b \langle \boldsymbol{F}(x(t)),\ \dot{\boldsymbol{x}}(t)\rangle\, dt. \tag{1}$$

Если выражение $\langle \boldsymbol{F}(x(t)),\ \dot{\boldsymbol{x}}(t)\rangle\,dt$ переписать в виде $\langle \boldsymbol{F}(x),\ d\boldsymbol{x}\rangle$, то, считая координаты в $\mathbb{R}^n$ декартовыми, ему можно придать вид $F^1\,dx^1 + \ldots + F^n\,dx^n$, после чего формулу (1) можно записать как

$$A = \int_\gamma F^1\,dx^1 + \ldots + F^n\,dx^n \tag{2}$$

или как

$$A = \int_\gamma \omega_F^1. \tag{2'}$$

Точный смысл написанным в (2) и (2′) интегралам от 1-формы работы вдоль пути γ придает формула (1).

Пример 1. Рассмотрим поле сил $\boldsymbol{F} = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2},\ \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, определенное во всех точках плоскости $\mathbb{R}^2$, кроме начала координат. Вычислим работу этого поля вдоль кривой γ_1, заданной в виде $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, и вдоль кривой γ_2, заданной соотношениями $x = 2 + \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

В соответствии с формулами (1), (2), (2′) находим

$$\int_{\gamma_1} \omega_F^1 = \int_{\gamma_1} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t\cdot(-\sin t)}{\cos^2 t+\sin^2 t} + \frac{\cos t\cdot\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\right) dt = 2\pi$$

и

$$\int_{\gamma_2} \omega_F^1 = \int_{\gamma_2} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t\,(-\sin t) + (2+\cos t)\cos t}{(2+\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1+2\cos t}{5+2\cos t}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{1+2\cos t}{5+2\cos t}\,dt + \int_\pi^0 \frac{1+2\cos(2\pi-u)}{5+2\cos(2\pi-u)}\,du =$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{1+2\cos t}{5+2\cos t}\,dt - \int_0^{\pi} \frac{1+2\cos u}{5+2\cos u}\,du = 0.$$

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, а $r = |\boldsymbol{r}|$. Пусть всюду в $\mathbb{R}^3$ вне начала координат задано поле сил вида $\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{r}$. Это — так называемое *центральное поле.* Найдем работу поля $\boldsymbol{F}$ на пути γ: $[0, 1] \to \mathbb{R}^3 \setminus 0$. Используя (2), находим

$$\int\limits_{\gamma} f(r)(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} f(r)\,d(x^2+y^2+z^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(r(t))\,dr^2(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(\sqrt{u(t)}\right)du(t) =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{r_0^2}^{r_1^2} f\left(\sqrt{u}\right)du = \Phi(r_0, r_1).$$

Здесь мы, как видно, положили $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = r^2(t)$, $r^2(t) = u(t)$, $r_0 = r(0)$, $r_1 = r(1)$.

Итак, в любом центральном поле работа на пути γ оказалась зависящей только от расстояний r_0, r_1 начала и конца пути до центра 0 поля.

В частности, для гравитационного поля $\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$ единичной точечной массы, помещенной в начало координат, получаем

$$\Phi(r_0, r_1) = \frac{1}{2}\int\limits_{r_0^2}^{r_1^2} \frac{1}{u^{3/2}}\,du = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}.$$

b. Поток через поверхность. Пусть в области G ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеется установившееся течение жидкости (или газа) и $x \mapsto V(x)$ — поле скоростей этого течения в области G. Пусть, кроме того, в G взята гладкая ориентированная поверхность S. Для определенности будем считать, что ориентация S задана полем нормалей. Требуется определить (объемный) расход или поток жидкости через поверхность S, точнее, требуется найти, какой объем жидкости протекает в единицу времени через поверхность S в указанную ориентирующим полем нормалей сторону этой поверхности.

Для решения задачи заметим, что если поле скоростей течения постоянно и равно V, то поток в единицу времени через натянутый на пару векторов ξ_1, ξ_2 параллелограмм П равен объему параллелепипеда, построенного на векторах V, ξ_1, ξ_2. Если η нормаль к П и ищется поток через П в сторону, указываемую нормалью η, то он равен смешанному произведению (V, ξ_1, ξ_2), если η и репер ξ_1, ξ_2 задают одинаковую ориентацию П (т. е. если η, ξ_1, ξ_2 — репер заданной в $\mathbb{R}^3$ ориентации). Если же репер ξ_1, ξ_2 задает в П ориентацию, противоположную определяемой нормалью $\boldsymbol{\eta}$, то поток в сторону, указанную нормалью $\boldsymbol{\eta}$, равен $-(V, \xi_1, \xi_2)$.

Вернемся теперь к исходной постановке. Предположим для простоты, что поверхность S в целом допускает гладкую параметризацию φ: $I \to S \subset G$, где I — двумерный промежуток плоскости $\mathbb{R}^2$.

Разобъем I на маленькие промежутки I_i (рис. 84). Образ $\varphi(I_i)$ каждого такого промежутка аппроксимируем параллелограммом, натянутым на образы $\xi_1 = \varphi'(t_i)\,\boldsymbol{\tau}_1$, $\xi_2 = \varphi'(t_i)\,\boldsymbol{\tau}_2$ векторов $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ смещения вдоль координатных направлений. Считая,

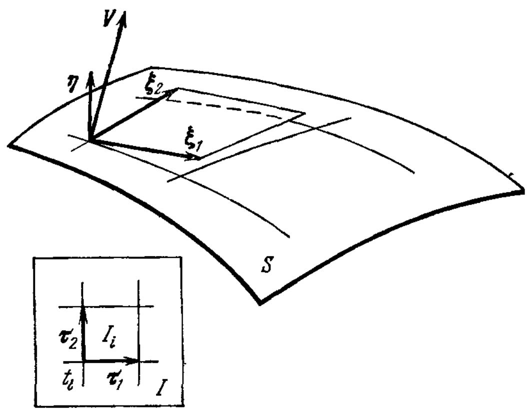

Рис. 84.

что $V(x)$ мало меняется в пределах куска $\varphi(I_i)$ поверхности, и заменяя $\varphi(I_i)$ указанным параллелограммом, можем считать, что поток $\Delta\mathcal{F}_i$ через кусок $\varphi(I_i)$ поверхности с малой относительной погрешностью совпадает с потоком постоянного поля скоростей $V(x_i) = V(\varphi(t_i))$ через параллелограмм, порожденный векторами ξ_1, ξ_2, Считая, что репер ξ_1, ξ_2 задает на S ту же ориентацию, что и $\boldsymbol{\eta}$, находим

$$\Delta\mathcal{F}_i \approx (V(x_i), \xi_1, \xi_2).$$

Суммируя элементарные потоки, получаем

$$\mathcal{F} = \sum_i \Delta\mathcal{F}_i \approx \sum_i \omega_V^2(x_i)(\xi_1, \xi_2),$$

где $\omega_V^2(x) = (V(x), \cdot, \cdot)$ (рассмотренная в примере 8 § 5 гл. XII) 2-форма потока. Если перейти к пределу (беря все более мелкие разбиения P промежутка I), то естественно считать, что

$$\mathcal{F} := \lim_{\lambda(P) \to 0} \sum \omega_V^2(x_i)(\xi_1, \xi_2) =: \int_S \omega_V^2. \tag{3}$$

Последний символ есть интеграл от 2-формы ω_V^2 по ориентированной поверхности S.

Вспомнив (см. формулу (12) § 5 гл. XII) координатное выражение формы потока ω_V^2 в декартовых координатах, мы вправе записать также, что

$$\mathcal{F} = \int_S V^1\, dx^2 \wedge dx^3 + V^2\, dx^3 \wedge dx^1 + V^3 dx^1 \wedge dx^2. \tag{4}$$

Мы обсудили лишь общий принцип решения поставленной задачи. В сущности, мы дали только точное определение (3) потока $\mathcal{F}$ и ввели некоторые обозначения (3), (4), но не получили пока эффективной вычислительной формулы, подобной формуле (1) для работы.

Заметим, что формула (1) получается из выражения (2), если вместо $x^1, \ldots, x^n$ в него подставить функции $(x^1, \ldots, x^n)(t) = x(t)$, задающие путь γ. Напомним (см. § 5 гл. XII), что такая замена интерпретируется как перенос заданной в G формы ω_F^1 на отрезок $I = [a, b]$.

Совершенно аналогично и вычислительная формула для потока может быть получена прямой подстановкой в (4) параметрических уравнений поверхности.

В самом деле,

$$\omega_V^2(x_i)(\xi_1, \xi_2) = \omega_V(\varphi(t_i))(\varphi'(t_i)\tau_1, \varphi'(t_i)\tau_2) = (\varphi^*\omega_V^2)(t_i)(\tau_1, \tau_2)$$

и

$$\sum_i \omega_V^2(x_i)(\xi_1, \xi_2) = \sum_i (\varphi^*\omega_V^2)(t_i)(\tau_1, \tau_2).$$

Форма $\varphi^*\omega_V^2$ определена на двумерном промежутке $I \subset \mathbb{R}^2$. В I любая 2-форма имеет вид $f(t)\, dt^1 \wedge dt^2$, где f — зависящая от формы функция на I, поэтому

$$\varphi^*\omega_V^2(t_i)(\tau_1, \tau_2) = f(t_i)\, dt^1 \wedge dt^2(\tau_1, \tau_2).$$

Но $dt^1 \wedge dt^2(\tau_1, \tau_2) = \tau_1^1 \cdot \tau_2^2$ есть площадь определяемого ортогональными векторами τ_1, τ_2 прямоугольника I_i.

Таким образом,

$$\sum_i f(t_i)\, dt^1 \wedge dt^2(\tau_1, \tau_2) = \sum_i f(t_i)\, |I_i|.$$

При измельчении разбиения в пределе получим

$$\int_I f(t)\, dt^1 \wedge dt^2 = \int_I f(t)\, dt^1\, dt^2, \tag{5}$$

где в левой части, согласно (3), стоит интеграл от 2-формы $\omega^2 = f(t)\, dt^1 \wedge dt^2$ по простейшей ориентированной поверхности I, а в правой части — интеграл от функции f по прямоугольнику I.

Остается вспомнить, что координатное представление $f(t)\,dt^1\wedge dt^2$ формы $\varphi^*\omega_V^2$ получается из координатного выражения формы ω_V^2 прямой заменой переменных $x=\varphi(t)$, где $\varphi\colon I\to G$ — карта поверхности S.

Выполнив эту замену, из (4) получим

$$\mathcal{F}=\int\limits_{S=\varphi(I)}\omega_V^2=\int\limits_I\varphi^*\omega_V^2=$$
$$=\int\limits_I\left(V^1(\varphi(t))\begin{vmatrix}\frac{\partial x^2}{\partial t^1} & \frac{\partial x^3}{\partial t^1}\\ \frac{\partial x^2}{\partial t^2} & \frac{\partial x^3}{\partial t^2}\end{vmatrix}+V^2(\varphi(t))\begin{vmatrix}\frac{\partial x^3}{\partial t^1} & \frac{\partial x^1}{\partial t^1}\\ \frac{\partial x^3}{\partial t^2} & \frac{\partial x^3}{\partial t^2}\end{vmatrix}+\right.$$
$$\left.+V^3(\varphi(t))\begin{vmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial t^1} & \frac{\partial x^2}{\partial t^1}\\ \frac{\partial x^1}{\partial t^2} & \frac{\partial x^2}{\partial t^2}\end{vmatrix}\right)dt^1\wedge dt^2.$$

Последний интеграл, как показывает равенство (5), есть обычный интеграл Римана по прямоугольнику I.

Таким образом, мы нашли, что

$$\mathcal{F}=\int\limits_I\begin{vmatrix}V^1(\varphi(t)) & V^2(\varphi(t)) & V^3(\varphi(t))\\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial t^1}(t) & \frac{\partial\varphi^2}{\partial t^1}(t) & \frac{\partial\varphi^3}{\partial t^1}(t)\\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial t^2}(t) & \frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2}(t) & \frac{\partial\varphi^3}{\partial t^2}(t)\end{vmatrix}dt^1\,dt^2, \tag{6}$$

где $x=\varphi(t)=(\varphi^1,\ \varphi^2,\ \varphi^3)(t^1,\ t^2)$ — карта поверхности S, задающая ту же ориентацию S, что и указанное нам поле нормалей к S. Если карта $\varphi\colon I\to S$ задает на S противоположную ориентацию, то равенство (6), вообще говоря, нарушится, но, как следует из приведенных в начале пункта соображений, в этом случае его левая и правые части будут отличаться только знаком.

Окончательная формула (6), очевидно, есть просто-напросто аккуратно записанный в координатах t^1, t^2 предел сумм знакомых нам элементарных потоков $\Delta\mathcal{F}_i\approx(V(x_i),\ \xi_1,\ \xi_2)$.

Мы рассмотрели случай поверхности, задаваемой одной картой. В общем случае гладкую поверхность S можно разбить на гладкие куски S_i, не имеющие между собой существенных пересечений, и найти поток через S как сумму потоков через куски S_i.

Пример 3. Пусть среда движется поступательно с постоянной скоростью $V=(1,\ 0,\ 0)$. Если в области течения взять любую замкнутую поверхность, то, поскольку плотность среды не меняется, количество вещества в объеме, ограниченном взятой поверхностью, должно оставаться неизменным. Значит, суммарный поток среды через такую поверхность должен быть равен нулю.

Проконтролируем в этом случае формулу (6), взяв в качестве S сферу $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Сферу S с точностью до множества, имеющего площадь нуль и потому пренебрежимого в рассматриваемом вопросе, можно задать параметрически

$$x = R\cos\psi\cos\varphi,$$
$$y = R\cos\psi\sin\varphi,$$
$$z = R\sin\psi,$$

где $0 < \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 < \psi < \pi/2$.

После подстановки в (6) этих соотношений и $V = (1, 0, 0)$, получим

$$\mathcal{F} = \int\limits_I \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} d\varphi\, d\psi = R^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\psi\, d\psi \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0.$$

Поскольку интеграл равен нулю, мы даже не интересовались в какую сторону (внутрь или наружу) ведется расчет потока.

Пример 4. Пусть поле скоростей движущейся в пространстве $\mathbb{R}^3$ среды в декартовых координатах x, y, z определяется равенством $V(x, y, z) = (V^1, V^2, V^3)(x, y, z) = (x, y, z)$. Найдем в этом случае поток через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ внутрь ограниченного ею шара (т. е. в сторону внутренней нормали).

Взяв параметризацию сферы из предыдущего примера и выполнив подстановку в правую часть формулы (6), найдем, что

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{vmatrix} R\cos\psi\cos\varphi & R\cos\psi\sin\varphi & R\sin\psi \\ -R\cos\psi\sin\varphi & R\cos\psi\cos\varphi & 0 \\ R\sin\psi\cos\varphi & -R\sin\psi\sin\varphi & R\cos\psi \end{vmatrix} d\psi =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} R^3\cos\psi\, d\psi = 4\pi R^3.$$

Теперь проверим, согласуется ли задаваемая криволинейными координатами (φ, ψ) ориентация сферы с ориентацией, задаваемой внутренней нормалью. Легко убедиться, что не согласуется. Поэтому искомый поток $\mathcal{F} = -4\pi R^3$.

В данном случае полученный результат легко проверить: вектор V скорости течения в каждой точке сферы равен по величине R, ортогонален сфере и направлен наружу, поэтому поток изнутри во вне равен площади сферы $4\pi R^2$, умноженной на R. Поток в противоположную сторону получается равным $-4\pi R^3$.

2. Определение интеграла от формы по ориентированной поверхности. Решение рассмотренных в п. 1 задач приводит к определению интеграла от k-формы по ориентированной k-мерной поверхности.

Пусть сначала S — гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, заданная одной стандартной картой $\varphi\colon I \to S$. Пусть на S задана k-форма ω. Интеграл от формы ω по параметризованной поверхности $\varphi\colon I \to S$ строится следующим образом.

Берем разбиение P k-мерного стандартного промежутка $I \subset \mathbb{R}^k$, индуцированное разбиениями (отрезков) проекций на координатные оси. В каждом промежутке I_i разбиения P берем вершину t_i, имеющую минимальные значения координат, и связываем с ней k векторов $\tau_1, \ldots, \tau_k$, идущих в направлении координатных осей в k соседних с t_i вершин промежутка I_i (см. рис. 84). Находим векторы $\xi_1 = \varphi'(t_i)\tau_1, \ldots, \xi_k = \varphi'(t_i)\tau_k$ касательного пространства $TS_{x_i=\varphi(t_i)}$, вычисляем $\omega(x_i)(\xi_1, \ldots, \xi_k) =: (\varphi^*\omega)(t_i)(\tau_1, \ldots, \tau_k)$, составляем интегральную сумму $\sum\limits_i \omega(x_i)(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ и переходим к пределу, когда параметр $\lambda(P)$ разбиения стремится к нулю.

Таким образом, мы принимаем

Определение 1 (*интеграла от k-формы ω по заданной картой $\varphi\colon I \to S$ гладкой k-мерной поверхности*).

$$\int\limits_S \omega := \lim_{(P)\to 0} \sum_i \omega(x_i)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \\ = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_i (\varphi^*\omega)(t_i)(\tau_1, \ldots, \tau_k). \tag{7}$$

Если применить это определение к k-форме $f(t)\,dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k$ на I (когда φ — тождественное отображение), то, очевидно, получим, что

$$\int\limits_I f(t)\,dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k = \int\limits_I f(t)\,dt^1 \ldots dt^k. \tag{8}$$

Таким образом, из (7) следует, что

$$\int\limits_{S=\varphi(I)} \omega = \int\limits_I \varphi^*\omega, \tag{9}$$

а последний интеграл, как видно из равенства (8), сводится к обычному кратному интегралу от соответствующей форме $\varphi^*\omega$ функции f на промежутке I.

Важнейшие соотношения (8) и (9) мы вывели из определения 1, но их самих можно было бы принять в качестве исходных определений. В частности, если D — произвольная область в $\mathbb{R}^k$ (не обязательно промежуток), то, чтобы не повторять процедуру суммирования, положим

$$\int\limits_D f(t)\,dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k := \int\limits_D f(t)\,dt^1 \ldots dt^k, \tag{8'}$$

а для гладкой поверхности, заданной в виде $\varphi\colon D \to S$ и k-формы ω на ней, положим

$$\int\limits_{S=\varphi(D)} \omega := \int\limits_D \varphi^*\omega. \tag{9'}$$

Если S — произвольная кусочно гладкая k-мерная поверхность, а ω — определенная на гладких кусках S k-форма, то, представив S как объединение $\bigcup_i S_i$ гладких параметризованных поверхностей, пересекающихся, быть может, лишь по множествам меньшей размерности, полагаем

$$\int_S \omega := \sum_i \int_{S_i} \omega. \tag{10}$$

В отсутствие содержательной физической или иной решаемой соотношением (10) задачи, такое определение вызывает вопрос о независимости полученной величины интеграла от разбиения $\bigcup_i S_i$ и от выбора параметризации отдельных его кусков.

Проверим корректность данного определения.

◀ Рассмотрим сначала простейший случай, когда S есть область D_x в $\mathbb{R}^k$, а φ: $D_t \to D_x$ — диффеоморфизм области $D_t \subset \mathbb{R}^k$ на область D_x. В $D_x = S$ k-форма ω имеет вид $f(x)\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$. Тогда, с одной стороны, в силу (8)

$$\int_{D_x} f(x)\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = \int_{D_x} f(x)\,dx^1 \ldots dx^k.$$

С другой стороны, по (9′) и (8′)

$$\int_{D_x} \omega := \int_{D_t} \varphi^*\omega = \int_{D_t} f(\varphi(t)) \det \varphi'(t)\,dt' \ldots dt^k.$$

Но если $\det \varphi'(t) > 0$ в D_t, то по теореме о замене переменных в кратном интеграле имеет место равенство

$$\int_{D_x = \varphi(D_t)} f(x)\,dx^1 \ldots dt^k = \int_{D_t} f(\varphi(t)) \det \varphi'(t)\,dt^1 \ldots dt^k.$$

Значит, считая, что на $S = D_x$ имелись координаты $x^1, \ldots, x^k$ и криволинейные координаты $t^1, \ldots, t^k$ одного класса ориентации, мы показали, что величина интеграла $\int_S \omega$ не зависит от того, в какой из этих двух систем координат проводить его вычисление.

Отметим, что если бы криволинейные координаты $t^1, \ldots, t^k$ задавали на S другую ориентацию, т. е. при $\det \varphi'(t) < 0$, очевидно, правая и левая части последнего равенства отличались бы знаком. Таким образом, о корректности определения интеграла можно говорить только в случае ориентированной поверхности интегрирования.

Пусть теперь φ_1: $D_x \to S$ и φ_2: $D_t \to S$ — две параметризации одной и той же гладкой k-мерной поверхности S и ω — k-форма на S. Сравним интегралы

$$\int\limits_{D_x} \varphi_x^* \omega \quad \text{и} \quad \int\limits_{D_t} \varphi_t^* \omega. \tag{11}$$

Поскольку $\varphi_t = \varphi_x \circ (\varphi_x^{-1} \circ \varphi_t) = \varphi_x \circ \varphi$, где $\varphi = \varphi_x^{-1} \circ \varphi_t \colon D_t \to D_x$ — диффеоморфизм D_t на D_x, то $\varphi_t^* \omega = \varphi^* (\varphi_x^* \omega)$ (см. равенство (20), § 5, гл. XII). Значит, форму $\varphi_t^* \omega$ в D_t можно получить заменой $x = \varphi(t)$ переменных в форме $\varphi_x^* \omega$. А как мы только что проверили, в этом случае интегралы (11) совпадают, если $\det \varphi'(t) > 0$, и отличаются знаком, если $\det \varphi'(t) < 0$.

Итак, показано, что если $\varphi_t \colon D_t \to S$, $\varphi_x \colon D_x \to S$ — параметризации одного класса ориентации поверхности S, то интегралы (11) совпадают. Независимость интеграла от выбора любой из согласованных систем криволинейных координат на поверхности S проверена.

Независимость интеграла (10) по ориентированной кусочно гладкой поверхности S от способа ее разбиения $\bigcup\limits_i S_i$ на гладкие куски вытекает из аддитивности обычного кратного интеграла (достаточно рассмотреть более мелкое разбиение, получающееся наложением двух разбиений и проверить, что значение интеграла по нему совпадает со значением на каждом из двух исходных разбиений). ►

На основе проведенных рассмотрений теперь разумно принять следующую цепочку формальных определений, соответствующих изложенной в определении 1 конструкции интеграла от формы.

Определение 1′ (*интеграла от формы по ориентированной поверхности* $S \subset \mathbb{R}^n$).

a) Если в области $D \subset \mathbb{R}^k$ задана форма $f(t)\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k$, то

$$\int\limits_D f(t)\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k := \int\limits_D f(t)\, dt^1 \ldots dt^k.$$

b) Если $S \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая k-мерная ориентированная поверхность и $\varphi \colon D \to S$ — ее параметризация, а ω — k-форма на S, то

$$\int\limits_S \omega := \pm \int\limits_D \varphi^* \omega,$$

причем знак $+$ берется, если параметризация φ согласуется с заданной ориентацией S, а знак $-$ берется в противоположном случае.

c) Если S — кусочно гладкая k-мерная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^n$, ω — k-форма на S (определенная там, где S имеет касательную плоскость), то

$$\int\limits_S \omega := \sum_i \int\limits_{S_i} \omega,$$

где $S_1, \ldots, S_m, \ldots$ — разложение S на гладкие параметризуемые k-мерные куски, пересекающиеся разве лишь по кусочно гладким поверхностям меньшей размерности.

Мы видим, в частности, что изменение ориентации поверхности влечет за собой изменение знака интеграла.

Задачи и упражнения

1. a. Пусть x, y — декартовы координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$. Укажите, для какого векторного поля форма $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ является его формой работы.

b. Найдите интеграл от указанной в a формы ω по следующим путям γ_i: $[0, \pi] \ni t \overset{\gamma_1}{\longmapsto} (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$; $[0, \pi] \ni t \overset{\gamma_2}{\longmapsto} (\cos t, -\sin t) \in \mathbb{R}^2$; путь γ_3 состоит в движении по отрезкам, соединяющим последовательно точки $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 0)$; путь γ_4 состоит в движении по отрезкам, соединяющим последовательно точки $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 0)$.

2. Пусть f — гладкая функция в области $D \subset \mathbb{R}^n$, а γ — гладкий путь в D с началом $p_0 \in D$ и концом $p_1 \in D$. Найдите интеграл от формы $\omega = df$ по пути γ.

3. a. Найдите интеграл от формы $\omega = dy \wedge dz + dz \wedge dx$ по границе стандартного единичного куба в $\mathbb{R}^3$, ориентированной внешней нормалью.

b. Укажите поле скоростей, для которого рассмотренная в a форма ω является его формой потока.

4. a. Пусть x, y, z — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$. Укажите поле скоростей, для которого форма

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

была бы его формой потока.

b. Найдите интеграл от указанной в a формы ω по сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$, ориентированной внешней нормалью.

c. Покажите, что поток поля $\frac{(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ через сферу $(x-2)^2+y^2+z^2=1$ равен нулю.

d. Проверьте, что поток указанного в c поля через тор, параметрические уравнения которого даны в примере 4 § 1 гл. XII, также равен нулю.

5. Известно, что между давлением P, объемом V и температурой T данного количества вещества имеется связь $f(P, V, T) = 0$, называемая в термодинамике *уравнением состояния*. Например, для одного моля идеального газа уравнение состояния выражается формулой Клапейрона $\frac{PV}{T} - R = 0$, где R — универсальная газовая постоянная.

Поскольку величины P, V, T связаны уравнением состояния, зная любую пару из них, в принципе можно определить и остающуюся величину. Значит, состояние любой системы можно характеризовать, например, точками (V, P) плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами V, P; тогда эволюции состояния системы как функции времени t будет отвечать некоторый путь γ в этой плоскости.

Пусть газ помещен в цилиндр, в котором без трения может перемещаться поршень. Меняя положение поршня, за счет механической работы мы можем изменить состояние газа, заключенного между поршнем и стенками цилиндра. Наоборот, меняя состояние газа (например, подогревая его), можно заставить газ совершать механическую работу (например, за счет расширения поднимать груз). В этой задаче и следующих задачах 6, 7, 8 все процессы считаются проходящими столь медленно, что в каждый конкретный момент давление и температура успевают усредниться во всем объеме вещества и, таким образом, в каждый момент времени система удовлетворяет уравнению состояния Это так называемые *квазистатические процессы*.

a. Пусть γ — путь в плоскости V, P, отвечающий квазистатическому переходу заключенного между стенками цилиндра и поршнем газа из состояния V_0, P_0 в состояние V_1, P_1 Покажите, что величина A совершаемой на этом пути газом механической работы определяется следующим криволинейным интегралом: $A = \int\limits_{\gamma} P\,dV$

b. Найдите механическую работу, совершаемую одним молем идеального газа при переходе из состояния V_0, P_0 в состояние V_1, P_1 по каждому из следующих путей (рис. 85) γ_{OLI} — изобара OL $(P = P_0)$, затем изохора LI $(V = V_1)$; γ_{OKI} — изохора OK $(V = V_0)$, затем изобара KI $(P = P_1)$; γ_{OI} — изотерма $T = \text{const}$ (в предположении, что $P_0 V_0 = P_1 V_1$).

c Покажите, что полученная в a формула для механической работы, совершаемой заключенным между поршнем и стенками цилиндра газом, на самом деле является общей, т. е. она остается в силе для работы газа, заключенного в любой деформируемой оболочке.

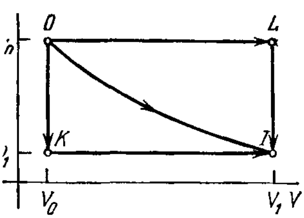

Рис. 85.

6. Количество тепла, получаемого системой в том или ином процессе изменения ее состояний, как и совершаемая системой механическая работа (см. задачу 5), зависит не только от начального и конечного состояний системы, но и от пути перехода Важной характеристикой вещества и совершаемого им (или над ним) термодинамического процесса является теплоемкость — отношение полученного веществом тепла к изменению его температуры. Точное определение теплоемкости можно дать в следующей орме. Пусть x — точка в плоскости состояний F (с координатами V, P или T, или P, V), а $e \in TF_x$ — вектор, указывающий направление смещения з точки x. Пусть t — малый параметр. Рассматриваем смещение из состояния в состояние $x + te$ вдоль отрезка на плоскости F, определяемого этими состояниями. Пусть $\Delta Q(x, te)$ — полученное в этом процессе веществом тепло, а $\Delta T(x, te)$ — изменение температуры вещества

Теплоемкостью $C = C(x, e)$ вещества (системы), отвечающей состоянию x направлению e смещения из этого состояния, называется величина $C(x, e) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Delta Q(x, te)}{\Delta T(x, te)}$.

В частности, если система теплоизолирована, то ее эволюция происходит без омена теплом с внешней средой. Это так называемый *адиабатический процесс*. Этвечающая такому процессу кривая на плоскости состоиний F называется *адиабатой*. Значит, смещению из данного состояния x в направлении адиабаты твечает нулевая теплоемкость системы.

Смещению по изотерме ($T = \text{const}$) отвечает бесконечная теплоемкость.

Особенно часто используются теплоемкости $C_V = C(x, e_V)$, $C_P = C(x, e_P)$, твечающие смещениям по изохоре ($V = \text{const}$) и изобаре ($P = \text{const}$) соответственно. Опыт показывает, что в довольно широком диапазоне состояний данной массы вещества каждую из величин C_V, C_P можно считать практически постоянной Теплоемкости, отвечающие одному молю данного вещества, принято называть *молярными* и обозначать (в отличие от прочих) прописными а не строчными) буквами Мы будем считать, что имеем дело с одним молем ещества.

Между количеством ΔQ полученного веществом в данном процессе тепла, зменением ΔU его внутренней энергии и совершенной им механической работой ΔA в силу закона сохранения энергии имеется связь $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$ Таким образом, при малом смещении te из состояния $x \in F$ полученное веществом тепло можно найти как значение формы $\delta Q = dU + P\,dV$ в точке x на векторе $te \in TF_x$ (формулу $P\,dV$ работы см. в задаче 5c) Значит, если координатами состояния считать T и V, а в качестве параметра при смещении (в неизотермическом направлении) принять T, то можно написать, что

$$C = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U}{\partial V}\cdot\frac{dV}{dT} + P\frac{dV}{dT}.$$

Производная $\frac{dV}{dT}$ определяет направление смещения из состояния $x \in F$ плоскости состояний с координатами T, V В частности, если $\frac{dV}{dT} = 0$, то смещение идет в направлении изохоры $V = \mathrm{const}$, и мы получаем, что $C_V = \frac{\partial U}{\partial T}$. Если $P = \mathrm{const}$, то $\frac{dV}{dT} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P=\mathrm{const}}$ (в общем случае $V = V(P, T)$ — это разрешенное относительно V уравнение состояния $f(P, V, T) = 0$) Значит,

$$C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

где индексы P, V, T в правой части указывают параметр состояния, фиксируемый при отыскании соответствующей частной производной Сопоставляя полученные выражения для C_V и C_P, видим, что

$$C_P - C_V = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Экспериментами на газах (опыты Джоуля* — Томсона) установлено и затем постулировано в модели идеального газа, что его внутренняя энергия U зависит только от температуры T, т е $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ Таким образом, для идеального газа $C_P = C_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$. Учитывая, что для моля идеального газа $PV = RT$, отсюда получаем соотношение $C_P - C_V = R$, называемое в термодинамике *уравнением Майера* **)

То, что для моля газа внутренняя энергия зависит только от температуры, позволяет записать форму δQ в виде

$$\delta Q = \frac{\partial U}{\partial T}\,dT + P\,dV = C_V\,dT + P\,dV.$$

Чтобы вычислить количество тепла, полученное молем газа на пути γ изменения его состояний, надо, следовательно, найти интеграл от формы $C_V\,dT + P\,dV$ по γ Эту форму иногда удобно иметь в переменных V, P. Если воспользоваться уравнением состояния $PV = RT$ и соотношением $C_P - C_V = R$, то получим $\delta Q = C_P\frac{P}{R}\,dV + C_V\frac{V}{R}\,dP$.

a Напишите формулу для количества Q тепла, получаемого молем газа при изменении его состояний вдоль пути γ плоскости состояний F

---

*) Д П. Джоуль (1818—1889) — английский физик; открыл закон теплового действия тока, а также определил независимо от Майера механический эквивалент теплоты

**) Ю Р Майер (1814—1878) — немецкий ученый, врач по образованию, высказал закон сохранения и превращения энергии, нашел механический эквивалент теплоты

b. Считая величины C_p, C_V постоянными, найдите величину Q, отвечающую каждому из путей γ_{OLI}, γ_{OKI}, γ_{OI}, указанных в пункте b задачи 5

c. Найдите (вслед за Пуассоном) *уравнение адиабаты*, проходящей через точку (V_0, P_0) плоскости состояний F_c координатами V, P (Пуассон нашел, что на адиабате $PV^{C_p/C_V} = \text{const}$. Величина C_p/C_V называется *адиабатической постоянной* данного *газа*. Для воздуха $C_p/C_V \approx 1{,}4$) Вычислите после этого работу, которую необходимо совершить, чтобы теплоизолированный от внешней среды моль воздуха, находящегося в состоянии (V_0, P_0), поместить в объем $V_1 = \frac{1}{2} V_0$

7. Напомним, что *цикл Карно* *) изменения состояния рабочего тела тепловой машины (например, газа, находящегося в цилиндре под поршнем) состоит в следующем (рис 86) Имеются два энергоемких тела, нагреватель и холодильник (например, паровой котел и атмосфера), находящиеся при постоянной температуре T_1 и T_2 соответственно ($T_1 > T_2$) Рабочее тело (газ) рассматриваемой тепловой машины, имея в состоянии *1* температуру T_1, приводится в контакт с нагревателем и за счет уменьшения внешнего давления по изотерме квазистатически расширяется и переводится в состояние *2* При этом машина заимствует от нагревателя тепло Q_1 и производит механическую работу A_{12} против внешнего давления В состоянии *2* газ теплоизолируют и заставляют квазистатически расширяться до состояния *3*, пока его температура не достигнет температуры T_2 холодильника При этом машина также совершит некоторую работу A_{23} против внешнего давления В состоянии *3* газ приводят в контакт с холодильником и путем увеличения давления изотермически сжимают до состояния *4* При этом над газом совершается работа (сам газ совершает отрицательную работу A_{34}) и газ отдает холодильнику некоторое количество тепла Q_2 Состояние *4* выбирается так, чтобы из него можно было вернуться в исходное состояние *1* квазистатическим сжатием газа по адиабате Итак, из состояния *4* газ возвращают в состояние *1* При этом над газом придется совершить работу (а сам газ произведет отрицательную работу A_{41}) В результате описанного кругового процесса (цикла Карно) внутренняя энергия газа (рабочего тела машины), очевидно, не изменится (ведь мы вернулись в исходное состояние), поэтому произведенная машиной работа равна $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 - Q_2$

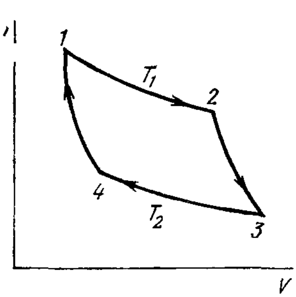

Рис. 86

Полученное от нагревателя тепло Q_1 лишь частично пошло на совершение работы A Величину $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q}$ естественно назвать *коэффициентом полезного действия* рассматриваемой *тепловой машины*.

a. Используя результаты, полученные в пп a и c задачи 6, покажите, что для цикла Карно имеет место равенство $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$.

b. Докажите теперь следующую первую из двух знаменитых теорем Карно. *Коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по циклу Карно, зависит только от температуры T_1 и T_2 нагревателя и холодильника* (но не зависит от устройства машины и вида ее рабочего тела).

8. Пусть γ — замкнутый путь в плоскости F состояний рабочего тела произвольной тепловой машины (см задачу 7), отвечающий замкнутому циклу ее

*) Н Л. С Карно (1796—1832) — французский инженер, один из родоначальников термодинамики.

работы Количество тепла, которым рабочее тело (например, газ) обменивается с внешней средой, и температура, при которой происходит теплообмен, связаны фундаментальным *неравенством Клаузиуса* *) $\int\limits_{\gamma}\frac{\delta Q}{T}\leqslant 0$. Здесь δQ — форма теплообмена, о которой говорилось в задаче 6

a. Покажите, что для цикла Карно (см. задачу 7) неравенство Клаузиуса обращается в равенство.

b Покажите, что если рабочий цикл γ может протекать и в обратном направлении, то для него неравенство Клаузиуса обращается в равенство.

c Пусть γ_1 и γ_2 — те участки пути γ, на которых рабочее тело тепловой машины соответственно получает тепло извне и отдает его в окружающую среду. Пусть T_1 — максимальная температура рабочего тела на участке γ_1, а T_2 — (его) минимальная температура на участке γ_2 цикла γ. Наконец, пусть Q_1 — полученное на участке γ_1 тепло, а Q_2 — тепло, отданное на участке γ_2. Исходя из неравенства Клаузиуса, покажите, что $\frac{Q_2}{Q_1}\leqslant\frac{T_2}{T_1}$.

d. Получите оценку $\eta\leqslant\frac{T_1-T_2}{T_1}$ коэффициента полезного действия (см. задачу 7) любой тепловой машины. Это — *вторая теорема Карно* (Оцените заодно к п. д. паровой машины, в которой максимальная температура пара не превышает 150 °C, т. е. $T_1=423$ K, а температура холодильника — окружающей среды—порядка 20 °C, т. е. $T_2=293$ K.)

e. Сравните результаты задач 7b и 8d и проверьте, что тепловая машина, работающая по циклу Карно, имеет наибольший (в пределах возможного при заданных значениях T_1 и T_2) коэффициент полезного действия.

9. Дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}$ называют *уравнением с разделяющимися переменными*. Обычно его переписывают в виде $g(y)\,dy=f(x)\,dx$, в котором «переменные разделены» и затем «решают», приравнивая первообразные $\int g(y)\,dy=\int f(x)\,dx$

Используя язык дифференциальных форм, дайте теперь развернутую математическую аргументацию этому алгоритму.

§ 2. Форма объема, интегралы первого и второго рода

1. Масса материальной поверхности. Пусть S — материальная поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Предположим, что нам известна (поверхностная) плотность $\rho(x)$ распределения массы на поверхности S. Требуется определить массу всей поверхности S.

Для решения задачи прежде всего надо учесть, что поверхностная плотность $\rho(x)$ в точке $x\in S$ есть предел отношения массы Δm части поверхности, попавшей в окрестность точки x, к площади $\Delta\sigma$ этой же части поверхности, когда окрестность стягивается к точке x.

Разбив поверхность S на мелкие доли S_i и считая ρ непрерывной функцией на S, можно, пренебрегая изменением ρ

*) Р Клаузиус (1822—1888) — немецкий физик, заложивший основы механической теории теплоты; в термодинамике ему принадлежат понятия внутренней энергии и энтропии, а в кинетической теории газов — основное понятие длины свободного пробега молекул.

в пределах каждой малой доли, найти массу S_i из соотношения

$$\Delta m_i \approx \rho(x_i)\,\Delta\sigma_i,$$

в котором $\Delta\sigma_i$ — площадь поверхности S_i, а $x_i \in S_i$.

Суммируя эти приближенные равенства и переходя к пределу при измельчении разбиения, получим, что

$$m = \int_S \rho\,d\sigma. \tag{1}$$

Символ написанного здесь интеграла по поверхности S, очевидно, требует разъяснений, которые позволили бы довести дело до вычислительных формул.

Отметим, что по самой постановке задачи левая часть равенства (1) никак не зависит от ориентации поверхности S и, значит, этим же свойством должен обладать стоящий справа интеграл. Это на первый взгляд контрастирует с тем понятием интеграла по поверхности, о котором мы подробно говорили в § 1. Ответ на возникший вопрос кроется в определении элемента поверхности $d\sigma$, к анализу которого мы и переходим.

2. Площадь поверхности как интеграл от формы. Сопоставляя определение 1 § 1 интеграла от формы с конструкцией, которая привела нас к определению площади поверхности (§ 4 гл. XII), видим, что площадь заданной в параметрическом виде $\varphi\colon D \to S$ гладкой k-мерной поверхности S, лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, является интегралом от некоторой формы Ω, которую мы пока только условно будем называть формой объема или элементом объема на поверхности S. Из соотношения (5) § 4 гл. XII следует, что в криволинейных координатах $\varphi\colon D \to S$ (т. е. будучи снесена в область D) форма Ω (точнее $\varphi^*\Omega$) имеет вид

$$\omega = \sqrt{\det(g_{ij})}\,(t)\,dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k, \tag{2}$$

где $g_{ij}(t) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t^i}, \frac{\partial\varphi}{\partial t^j} \right\rangle(t)$, $i, j = 1, \ldots, k$.

При другой параметризации $\tilde\varphi\colon \tilde D \to S$ той же поверхности для вычисления площади S по области $\tilde D$ надо соответственно интегрировать форму

$$\tilde\omega = \sqrt{\det(\tilde g_{ij})}\,(\tilde t)\,d\tilde t^1 \wedge \ldots \wedge d\tilde t^k, \tag{3}$$

где $\tilde g_{ij}(\tilde t) = \left\langle \frac{\partial\tilde\varphi}{\partial \tilde t^i}, \frac{\partial\tilde\varphi}{\partial \tilde t^j} \right\rangle$, $i, j = 1, \ldots, k$.

Обозначим через ψ диффеоморфизм $\varphi^{-1}\circ\tilde\varphi\colon \tilde D \to D$, осуществляющий переход от координат $\tilde t$ к координатам t поверхности S. В свое время мы уже подсчитали (см. замечание 5 § 4 гл XII), что

$$\sqrt{\det(\tilde g_{ij})}\,(\tilde t) = \sqrt{\det(g_{ij})}\,(\psi(\tilde t)) \cdot |\det \psi'(\tilde t)|. \tag{4}$$

Вместе с тем очевидно, что

$$\psi^*\omega = \sqrt{\det(g_{ij})}\,(\psi(\tilde{t}))\det\psi'(t)\,d\tilde{t}^1\wedge\ldots\wedge d\tilde{t}^k. \tag{5}$$

Сопоставляя равенства (2)—(5), видим, что $\psi^*\omega = \tilde{\omega}$, если $\det\psi'(\tilde{t}) > 0$, и $\psi^*\omega = -\tilde{\omega}$, если $\det\psi'(\tilde{t}) < 0$. Если формы ω и $\tilde{\omega}$ получались переносом φ^* и соответственно $\tilde{\varphi}^*$ из одной и той же формы Ω на S, то всегда должно быть выполнено равенство $\psi^*(\varphi^*\Omega) = \tilde{\varphi}^*\Omega$ или, что то же самое, $\psi^*\omega = \tilde{\omega}$.

Мы приходим, таким образом, к заключению, что формы на параметризованной поверхности S, которые надо интегрировать, чтобы получить площадь этой поверхности, различны — отличаются знаком, если параметризации задают на S различные ориентации; эти формы совпадают для параметризаций, принадлежащих одному классу ориентации поверхности S.

Таким образом, форма объема Ω на S должна определяться не только самой поверхностью S, лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, но и ориентацией S.

Это может показаться парадоксальным: площадь поверхности по нашим представлениям не должна зависеть от ориентации!

Но ведь мы пришли к определению площади параметризованной поверхности через интеграл, интеграл от некоторой формы. Значит, если результат наших вычислений не должен зависеть от ориентации поверхности, то, как следует из свойств интеграла, при разных ориентациях поверхности мы должны интегрировать разные формы.

Доведем высказанные соображения до точных определений.

3. Форма объема.

Определение 1. Если $\mathbb{R}^k$ — ориентированное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$, то *формой объема Ω на* $\mathbb{R}^k$, соответствующей данной ориентации $\mathbb{R}^k$ и скалярному произведению $\langle\ ,\ \rangle$, называется такая кососимметрическая k-форма, которая на ортонормированном репере данного класса ориентации $\mathbb{R}^k$ принимает значение единицы.

Значение k-формы на репере $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, очевидно, вполне определяет эту форму.

Заметим также, что форма Ω определяется не индивидуальным ортонормированным репером, а только их классом ориентации.

◀ В самом деле, если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ и $\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_k$ — два таких репера одного класса ориентации, то матрица O перехода от второго базиса к первому является ортогональной матрицей, причем $\det O = 1$. Значит,

$$\Omega(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k) = \det O\cdot\Omega(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) = \Omega(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) = 1. \ ▶$$

Если в $\mathbb{R}^k$ фиксирован ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, а $\pi^1, \ldots, \pi^k$ — проектирование $\mathbb{R}^k$ на соответствующие координатные оси, то, очевидно, $\pi^1\wedge\ldots\wedge\pi^k(e_1, \ldots, e_k)=1$ и

$$\Omega=\pi^1\wedge\ldots\wedge\pi^k$$

Таким образом,

$$\Omega(\xi_1, \ldots, \xi_k)=\begin{vmatrix}\xi_1^1 & \ldots & \xi_1^k\\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\\ \xi_k^1 & \ldots & \xi_k^k\end{vmatrix}.$$

Это ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на упорядоченные векторы $\xi_1, \ldots, \xi_k$.

Определение 2. Если гладкая k-мерная ориентированная поверхность S лежит в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, то в каждой касательной к S плоскости TS_x имеются ориентация, согласованная с ориентацией S, и скалярное произведение, индуцированное скалярным произведением в $\mathbb{R}^n$, а значит, есть и форма объема $\Omega(x)$. Возникающая при этом на S дифференциальная k-форма Ω называется *формой* (или *элементом*) *объема на поверхности* S, индуцированной вложением S в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. *Площадь ориентируемой гладкой поверхности* есть интеграл по этой поверхности от формы объема, соответствующей выбираемой на поверхности ориентации

Это сформулированное на языке форм и уточненное до деталей определение площади, конечно, согласуется с определением 1 § 4 гл XII, к которому мы пришли, рассматривая заданную в параметрическом виде k-мерную гладкую поверхность $S\subset\mathbb{R}^n$.

◀ Действительно, параметризация ориентирует поверхность и все касательные к ней плоскости TS_x. Если $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — репер в TS_x фиксированного в TS_x класса ориентации, то из определений 2 и 3 формы объема Ω следует, что $\Omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_k)>0$ Но тогда (см равенство (2) § 4 гл XII)

$$\Omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_k)=\sqrt{\det(\langle\xi_i, \xi_j\rangle)} \quad ▶ \tag{6}$$

Отметим, что сама форма $\Omega(x)$ определена на любом наборе $\xi_1, \ldots, \xi_k$ векторов TS_x, но равенство (6) действует только на реперах заданного в TS_x класса ориентации.

Отметим также, что форма объема определена только на ориентированной поверхности, поэтому, например, бессмысленно говорить о форме объема на лежащем в $\mathbb{R}^3$ листе Мёбиуса, хотя можно говорить о такой форме в пределах каждого ориентируемого куска этой поверхности.

Определение 4. Пусть S — k-мерная кусочно гладкая (ориентируемая или неориентируемая) поверхность в $\mathbb{R}^n$, а $S_1, \ldots, S_m, \ldots$ — конечное или счетное число ее гладких параметризуемых кусков, пересекающихся, быть может лишь по поверхностям размерности не выше $k-1$ и таких, что $S=\bigcup\limits_i S_i$.

Площадью (или *k-мерным объемом*) *поверхности* S называется сумма площадей поверхностей S_i.

В этом смысле можно говорить о площади, которую имеет лежащий в $\mathbb{R}^3$ лист Мёбиуса, или, что то же самое, искать его массу, если это материальная поверхность с единичной плотностью распределения вещества.

Традиционными рассуждениями проверяется корректность определения 4 (независимость получаемой величины площади от разбиения $S_1, \ldots, S_m, \ldots$ поверхности S).

4. Выражение формы объема в декартовых координатах. Пусть S — гладкая гиперповерхность (размерности $n-1$) в ориентированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, снабженная ориентирующим ее непрерывным полем единичных нормалей $\eta(x)$, $x \in S$. Пусть V — форма (n-мерного) объема в $\mathbb{R}^n$, а Ω — форма ($(n-1)$-мерного) объема на S.

Если в касательном пространстве TS_x взять репер $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ из класса ориентации, задаваемого единичной нормалью $\eta(x)$ к TS_x, то, очевидно, можно записать следующее равенство:

$$V(x)(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \Omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}). \tag{7}$$

◀ Справедливость его следует из того, что при указанных условиях обе его части неотрицательны, а равны они по величине потому, что объем параллелепипеда, натянутого на векторы η, $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, равен площади основания $\Omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, умноженной на высоту $|\eta| = 1$. ▶

Но

$$V(x)(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \begin{vmatrix} \eta^1 & \ldots & \eta^n \\ \xi_1^1 & \ldots & \xi_1^n \\ \xi_{n-1}^1 & \ldots & \xi_{n-1}^n \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \eta^i(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n\, (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}).$$

Здесь $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в задающем ориентацию ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$, а крышка над дифференциалом dx^i означает, что в этом слагаемом он отсутствует.

Таким образом, получается следующее координатное выражение для формы объема на ориентированной гиперповерхности $S \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \eta^i(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{8}$$

Из тех же геометрических соображений следует, что при фиксированном значении $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\langle \eta(x), e_i \rangle\, \Omega(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = V(e_i, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}). \tag{9}$$

Последнее равенство означает, что

$$\eta^i(x)\,\Omega(x) = (-1)^{i-1}\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^i \wedge \ldots \wedge dx^n \tag{10}$$

Для двумерной поверхности S в $\mathbb{R}^3$ элемент объема чаще всего обозначают символами $d\sigma$ или dS. Их не следует воспринимать как дифференциалы неких форм σ и S, это единые символы. Если x, y, z — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, то в этих обозначениях соотношения (8), (10) запишутся так:

$$d\sigma = \cos\alpha_1\,dy \wedge dz + \cos\alpha_2\,dz \wedge dx + \cos\alpha_3\,dx \wedge dy.$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1\,d\sigma &= dy \wedge dz,\\ \cos\alpha_2\,d\sigma &= dz \wedge dx,\\ \cos\alpha_3\,d\sigma &= dx \wedge dy \end{aligned}$$ (ориентированные площади проекций на координатные плоскости).

Здесь $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)(x)$ — направляющие косинусы (координаты) единичного вектора $\eta(x)$ нормали к S в точке $x \in S$. В этих равенствах, как, впрочем, и в равенствах (8), (10), во избежание недоразумений, конечно, правильнее было бы справа ставить знак $|_S$ сужения соответствующей формы на поверхность S, но чтобы не загромождать формулы, мы ограничимся этим замечанием.

5. Интегралы первого и второго рода. В ряде задач, типичным представителем которых является рассмотренная выше задача об определении массы поверхности по известной плотности, возникают интегралы типа (1). Их часто называют интегралами от функции по поверхности или интегралами первого рода.

Определение 5. *Интегралом от функции ρ по ориентируемой поверхности S* называют интеграл

$$\int_S \rho\Omega \tag{11}$$

от дифференциальной формы $\rho\Omega$, где Ω — форма объема на S (отвечающая выбираемой при вычислении интеграла ориентации S).

Ясно, что так определенный интеграл (11) не зависит от ориентации S, поскольку изменение ориентации сопровождается соответствующей заменой формы объема.

Подчеркнем, что в сущности здесь речь идет не об интегрировании функции, а об интегрировании формы $\rho\Omega$ специального вида по поверхности S с определенной на ней формой объема.

Определение 6. Если S — кусочно гладкая (ориентируемая или неориентируемая) поверхность и ρ — функция на S, то *интегралом* (11) *от функции ρ по поверхности S* называют сумму $\sum\limits_i \int\limits_{S_i} \rho\Omega$ интегралов от функции ρ по параметризуемым кускам

$S_1, \ldots, S_m, \ldots$, описанного в определении 4 разбиения поверхности S.

Интеграл (11) обычно называют *поверхностным интегралом первого рода*.

Например, таковым является интеграл (1), выражающий массу поверхности S через плотность ρ распределения массы по поверхности.

Для выделения интегралов первого рода с их свойством независимости от ориентации, интегралы от форм по ориентированным поверхностям часто называют *поверхностными интегралами второго рода*.

Заметим, что, поскольку на линейном пространстве все кососимметрические формы, степень которых равна размерности пространства, пропорциональны, между любой k-формой ω, заданной на k-мерной ориентируемой поверхности S, и формой объема Ω на S имеется связь $\omega = \rho\Omega$, где ρ — некоторая, зависящая от ω функция на S. Значит,

$$\int\limits_S \omega = \int\limits_S \rho\Omega,$$

т. е. любой интеграл второго рода может быть записан в виде соответствующего интеграла первого рода.

Пример 1. Интеграл (2′) § 1, выражающий работу поля $\boldsymbol{F}$ на пути $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$, можно записать в виде интеграла первого рода

$$\int\limits_\gamma \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{e} \rangle\, ds, \tag{12}$$

где s — натуральный параметр на γ, ds — элемент (1-форма) длины, а $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор скорости, несущий в себе всю информацию об ориентации γ. С точки зрения физического смысла решаемой интегралом (12) задачи он столь же выразителен, как и интеграл (1) § 1.

Пример 2. Поток (3), § 1 поля скоростей $\boldsymbol{V}$ через ориентированную единичными нормалями $\boldsymbol{n}(x)$ поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ можно записать в виде поверхностного интеграла

$$\int\limits_S \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{n} \rangle\, d\sigma \tag{13}$$

первого рода. Информация об ориентации S заключена здесь в направлении поля нормалей $\boldsymbol{n}$.

Геометрическое и физическое содержание подынтегрального выражения в (13) столь же прозрачно, как и соответствующий смысл подынтегрального выражения окончательной вычислительной формулы (6) § 1.

Для сведения читателя отметим, что довольно часто встречаются обозначения $d\boldsymbol{s} := \boldsymbol{e}\, ds$, $d\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{n}\, d\sigma$, вводящие векторный элемент длины и векторный элемент площади соответственно. В этих обозначениях интегралы (12), (13) имеют вид

$$\int\limits_{\gamma} \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s} \rangle \quad \text{и} \quad \int\limits_{S} \langle \boldsymbol{V}, d\boldsymbol{\sigma} \rangle,$$

наиболее удобный с точки зрения физической интерпретации. Для краткости скалярное произведение $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle$ векторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ часто записывают символом $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

Пример 3. *Закон Фарадея**) утверждает, что электродвижущая сила, возникающая в замкнутом проводнике Γ, находящемся в переменном магнитном поле $\boldsymbol{B}$, пропорциональна скорости изменения потока магнитного поля через ограниченную контуром Γ поверхность S. Пусть $\boldsymbol{E}$ — вектор напряженности электрического поля. Точная запись закона Фарадея с учетом принятых выше обозначений может быть представлена в виде равенства

$$\oint\limits_{\Gamma} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Кружок в знаке интеграла по Γ — дополнительное напоминание о том, что интеграл берется по замкнутому контуру. Работу поля вдоль замкнутого контура часто называют *циркуляцией поля вдоль* этого *контура*. Так что по закону Фарадея циркуляция напряженности электрического поля, порожденного в замкнутом проводнике Γ переменным магнитным полем, равна взятой с обратным знаком скорости изменения потока напряженности магнитного поля через натянутую на контур Γ поверхность S.

Пример 4. *Закон Ампера***)

$$\oint\limits_{\Gamma} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \int\limits_{S} \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

(где $\boldsymbol{B}$ — вектор напряженности магнитного поля, $\boldsymbol{j}$ — вектор плотности тока, ε_0, c — размерные постоянные) утверждает, что циркуляция напряженности, порожденного электрическим током магнитного поля вдоль контура Γ, пропорциональна силе тока, протекающего через ограниченную контуром Γ поверхность S.

Мы рассмотрели интегралы первого и второго рода. Читатель мог заметить, что это терминологическое различие очень условно. Реально мы умеем интегрировать и интегрируем только дифференциальные формы. Ни от чего другого интеграл и не берется (если интеграл претендует на независимость от выбора системы координат, используемой при его вычислении).

---

*) М. Фарадей (1791—1867) — выдающийся английский физик, создатель учения об электромагнитном поле.

**) А. М. Ампер (1775—1836) — французский физик и математик, один из основоположников современной электродинамики.

Задачи и упражнения

1. Дайте формальное доказательство равенств (7) и (9)

2. Пусть γ — гладкая кривая, ds — элемент длины на γ

a. Покажите, что $\left|\int\limits_\gamma f(s)\,ds\right| \leqslant \int\limits_\gamma |f(s)|\,ds$ для любой функции f на γ, для которой оба интеграла определены.

b. Проверьте, что если $|f(s)| \leqslant M$ на γ, а l — длина кривой γ, то $\left|\int\limits_\gamma f(s)\,ds\right| \leqslant Ml$.

c. Сформулируйте и докажите аналогичные a и b утверждения в общем случае интеграла первого рода, взятого по k-мерной гладкой поверхности.

3. a. Покажите, что координаты (x_0^1, x_0^2, x_0^3) центра масс, распределенных с линейной плотностью $\rho(x)$ вдоль кривой γ, следует искать из соотношений

$$x_0^i \int\limits_\gamma \rho(x)\,ds = \int\limits_\gamma x^i \rho(x)\,ds, \qquad i = 1, 2, 3$$

b. Запишите уравнение винтовой линии в $\mathbb{R}^3$ и найдите координаты центра масс куска этой линии, считая, что масса распределена вдоль кривой с постоянной плотностью, равной единице.

c Укажите формулы для центра масс, распределенных по поверхности S с поверхностной плотностью ρ, и найдите центр масс, равномерно распределенных по поверхности полусферы

d Укажите формулы для момента инерции массы, распределенной с плотностью ρ по поверхности S.

e Покрышка колеса имеет массу 30 кг и форму тора, внешний диаметр которого 1 м, а внутренний 0,5 м При балансировке колеса его устанавливают на балансировочный станок, раскручивают до скорости, отвечающей скорости движения порядка 100 км/час, и затем останавливают тормозными колодками, трущимися о стальной диск, диаметр которого 40 см, а ширина 2 см Оцените температуру, до которой нагрелся бы этот диск, если бы вся кинетическая энергия раскрученной покрышки при остановке колеса ушла на нагревание диска Удельную теплоемкость стали считать равной $c = 420$ Дж/(кг $\cdot$ K).

4. a. Покажите, что силу, действующую на точечную массу m_0, расположенную в точке (x_0, y_0, z_0), со стороны материальной кривой γ, имеющей линейную плотность ρ, следует искать по формуле

$$F = Gm_0 \int\limits_\gamma \frac{\rho}{|r|^3}\, r\, ds,$$

где G — гравитационная постоянная, а r — вектор с координатами $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

b. Напишите соответствующую формулу в случае, когда масса распределена по поверхности S.

c. Найдите гравитационное поле однородной материальной прямой.

d. Найдите гравитационное поле однородной материальной сферы (Укажите поле как вне шара, ограниченного сферой, так и в самом этом шаре.)

e. Найдите гравитационное поле, создаваемое в пространстве однородным материальным шаром (рассмотрите как внешние, так и внутренние точки шара).

f Считая Землю жидким шаром, найдите давление в нем как функцию расстояния от центра (Радиус Земли 6400 км, средняя плотность 6 г/см^3.)

5. Пусть γ_1 и γ_2 — два замкнутых проводника, по которым текут токи $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ соответственно Пусть ds_1 и ds_2 — векторные элементы этих проводников, отвечающие направлениям тока в них, вектор R_{12} направлен от ds_1 к ds_2, а $R_{21} = -R_{12}$

По *закону Био* и *Савара* *) сила dF_{12}, испытываемая вторым элементом со стороны первого, равна

$$dF_{12} = \frac{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2}{c_0^2 \, |R_{12}|^3} [ds_2 \, [ds_1, \; R_{12}]],$$

где квадратными скобками обозначено векторное произведение векторов, а c_0 — размерная постоянная

a Покажите, что на уровне искусственной дифференциальной формулы Био и Савара может случиться, что $dF_{12} \neq dF_{21}$, т е «действие не равно противодействию»

b. Напишите (интегральные) формулы для полных сил F_{12} и F_{21} взаимодействия проводников γ_1, γ_2 и убедитесь, что $F_{12} = -F_{21}$

§ 3. Основные интегральные формулы анализа

Важнейшей формулой анализа является уже известная нам формула Ньютона — Лейбница. В этом параграфе будут получены формулы Грина, Гаусса — Остроградского и Стокса, которые, с одной стороны, являются развитием формулы Ньютона — Лейбница, а с другой стороны, в совокупности образуют наиболее используемую часть аппарата интегрального исчисления.

В первых трех пунктах параграфа, не стремясь к общности формулировок, на наглядном материале мы получим три классические интегральные формулы анализа. Они будут сведены в одну общую формулу Стокса в четвертом пункте, который формально можно читать независимо от первых трех.

1. Формула Грина **). Формула Грина — это следующее

Утверждение 1. *Пусть* $\mathbb{R}^2$ — *плоскость с фиксированной в ней системой координат* x, y; $\bar{D}$ — *компактная область в этой плоскости, ограниченная кусочно гладкими кривыми*; P, Q — *функции, гладкие в замкнутой области* $\bar{D}$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\iint\limits_{\bar{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\partial \bar{D}} P\, dx + Q\, dy, \tag{1}$$

в котором справа стоит интеграл по границе $\partial\bar{D}$ *области* $\bar{D}$, *ориентированной согласованно с ориентацией самой области* $\bar{D}$.

Рассмотрим сначала простейший вариант формулы (1), когда $\bar{D}$ есть квадрат $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, \; 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, а $Q \equiv 0$ в I. Тогда формула Грина сводится к равенству

$$\iint\limits_{I} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = -\int\limits_{\partial I} P\, dx, \tag{2}$$

которое мы и докажем.

---

*) Био (1774—1862), Савар (1791—1841) — французские физики.

**) Д. Грин (1793—1841) — английский математик.

◀ Сводя двойной интеграл к повторному и применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$\iint\limits_{I} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (P(x,\ 1) - P(x,\ 0))\,dx = -\int\limits_0^1 P(x,\ 0)\,dx + \int\limits_0^1 P(x,\ 1)\,dx.$$

Доказательство закончено. Остальное — дело определений и интерпретации уже полученного соотношения. Дело в том, что разность двух последних интегралов есть как раз то, что стоит в правой части равенства (2).

Действительно, кусочно гладкая кривая ∂I распадается на четыре куска (рис. 87). Их можно рассматривать как параметризованные кривые

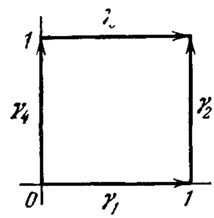

Рис 87.

$$\gamma_1\colon [0,\ 1] \to \mathbb{R}^2, \text{ где } x \overset{\gamma_1}{\longmapsto} (x,\ 0),$$

$$\gamma_2\colon [0,\ 1] \to \mathbb{R}^2, \text{ где } y \overset{\gamma_2}{\longmapsto} (1,\ y),$$

$$\gamma_3\colon [0,\ 1] \to \mathbb{R}^2, \text{ где } x \overset{\gamma_3}{\longmapsto} (x,\ 1),$$

$$\gamma_4\colon [0,\ 1] \to \mathbb{R}^2, \text{ где } y \overset{\gamma_4}{\longmapsto} (0,\ y).$$

По определению интеграла от 1-формы $\omega = P\,dx$ по кривой

$$\int\limits_{\gamma_1} P(x,\ y)\,dx := \int\limits_{[0,\ 1]} \gamma_1^*(P(x,\ y)\,dx) := \int\limits_0^1 P(x,\ 0)\,dx,$$

$$\int\limits_{\gamma_2} P(x,\ y)\,dx := \int\limits_{[0,\ 1]} \gamma_2^*(P(x,\ y)\,dx) := \int\limits_0^1 0\,dy = 0,$$

$$\int\limits_{\gamma_3} P(x,\ y)\,dx := \int\limits_{[0,\ 1]} \gamma_3^*(P(x,\ y)\,dx) := \int\limits_0^1 P(x,\ 1)\,dx,$$

$$\int\limits_{\gamma_4} P(x,\ y)\,dx := \int\limits_{[0,\ 1]} \gamma_4^*(P(x,\ y)\,dx) := \int\limits_0^1 0\,dy = 0$$

и, кроме того, в силу указанного в утверждении 1 выбора ориентации границы области, с учетом ориентации кривых γ_1, γ_2, γ_3 и γ_4, очевидно,

$$\int\limits_{\partial I} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega + \int\limits_{\gamma_2} \omega + \int\limits_{-\gamma_3} \omega + \int\limits_{-\gamma_4} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega + \int\limits_{\gamma_2} \omega - \int\limits_{\gamma_3} \omega - \int\limits_{\gamma_4} \omega,$$

где $-\gamma_i$ есть кривая γ_i, взятая с противоположной задаваемой отображением γ_i ориентацией

Таким образом, равенство (2) проверено ▶

Аналогично проверяется, что

$$\iint_I \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\partial I} Q\,dy. \tag{3}$$

Складывая равенства (2) и (3), получаем формулу Грина

$$\iint_I \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial I} P\,dx + Q\,dy \tag{1'}$$

для квадрата I.

Заметим, что несимметричность P и Q в формуле Грина (1) и равенствах (2), (3) связана с несимметричностью x и y: ведь x и y упорядочены и этим в $\mathbb{R}^2$ и в I задана ориентация

На языке форм доказанное соотношение (1′) можно переписать в виде

$$\int_I d\omega = \int_{\partial I} \omega, \tag{1''}$$

где ω — произвольная гладкая 1-форма на I. Справа здесь стоит интеграл от сужения формы ω на границу ∂I квадрата I.

Проведенное доказательство соотношения (2) допускает очевидное обобщение: если D_y — не квадрат, а «криволинейный четырехугольник», боковые стороны которого — вертикальные отрезки (быть может, даже вырождающиеся в точку), а две другие стороны — графики кусочно гладких функций $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ над отрезком $[a, b]$ оси Ox, то

$$\iint_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial D_y} P\,dx. \tag{2'}$$

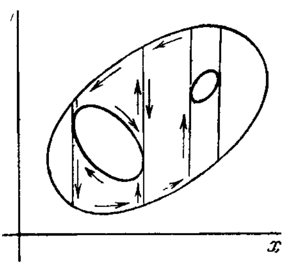

Рис. 88.

Аналогично, если имеется такой же «четырехугольник» D_x, по отношению к оси Oy, т. е. с двумя горизонтальными сторонами, то для него справедливо равенство

$$\iint_{D_x} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\partial D_x} Q\,dy. \tag{3'}$$

Предположим теперь, что область $\bar{D}$ можно разрезать на конечное число областей типа D_y (рис. 88). Тогда для этой области $\bar{D}$ тоже верна формула вида (2′).

◀ В самом деле, двойной интеграл по области $\bar{D}$ в силу его аддитивности есть сумма интегралов по кускам типа D_y, на которые разрезана область $\bar{D}$. Для каждого такого куска справедлива формула (2′), т. е. двойной интеграл по нему равен интегралу от формы $P\,dx$ по ориентированной границе этого куска.

Но соседние куски на общей части их границ индуцируют противоположные ориентации, поэтому при сложении интегралов по границам всех кусков в результате взаимных уничтожений, очевидно, останется только интеграл по границе $\partial\bar{D}$ самой области $\bar{D}$. ▶

Аналогично, если область $\bar{D}$ допускает разбиение на области типа D_x, то для $\bar{D}$ справедливо равенство типа равенства (3′).

Области, которые можно разрезать как на куски вида D_x, так и на куски вида D_y, условимся пока называть *простыми областями.* На самом-то деле это достаточно богатый для всех практических целей класс областей.

Записав для простой области оба соотношения (2′), (3′), после их сложения получим формулу (1).

Итак, для простых областей формула Грина доказана.

Мы не будем здесь заниматься дальнейшими ее уточнениями (см. по этому поводу задачу 2), а продемонстрируем лучше другой весьма плодотворный путь рассуждений, по которому можно было бы пойти, установив равенства (1′), (1″).

Пусть область C получена гладким отображением $\varphi\colon I\to C$ квадрата I. Если ω — гладкая 1-форма на C, то

$$\int\limits_C d\omega := \int\limits_I \varphi^* d\omega = \int\limits_I d\varphi^*\omega \overset{!}{=} \int\limits_{\partial I} \varphi^*\omega =: \int\limits_{\partial C} \omega. \tag{4}$$

Восклицательным знаком здесь отмечено уже доказанное нами равенство (см. (1″)); крайние равенства — определения или их прямые следствия; оставшееся второе слева равенство связано с независимостью внешнего дифференцирования от системы координат.

Значит, для области C тоже справедлива формула Грина.

Наконец, если какую-то ориентированную область $\bar{D}$ удается разрезать на конечное число областей типа области C, то из уже описанных выше соображений о взаимном уничтожении интегралов по тем частям границ областей C_i, которые лежат внутри D, следует, что

$$\int\limits_{\bar{D}} d\omega = \sum_i \int\limits_{C_i} d\omega = \sum_i \int\limits_{\partial C_i} \omega = \int\limits_{\partial\bar{D}} \omega, \tag{5}$$

т. е. для области $\bar{D}$ формула Грина тоже имеет место.

Можно показать, что любая область с кусочно гладкой границей попадает в описанный класс областей, но мы не будем этого делать, поскольку позже (гл. XV) будет описан полезный технический прием, который позволяет избежать подобных геометрических затруднений, заменяя их сравнительно просто решаемым аналитическим вопросом.

Рассмотрим некоторые примеры использования формулы Грина

Пример 1. Положим в (1) $P=-y$, $Q=x$. Тогда получим, что

$$\int_{\partial D} -y\,dx+x\,dy=\int_D 2\,dx\,dy=2\sigma(D),$$

где $\sigma(D)$ — площадь области D. Используя формулу Грина, можно, таким образом, получить следующие, уже встречавшиеся нам выражения для площади области на плоскости через криволинейные интегралы по ориентированной границе этой области:

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\,dx+x\,dy=-\int_{\partial D} y\,dx=\int_{\partial D} x\,dy.$$

В частности, отсюда следует, что работа $A=\int_\gamma P\,dV$, которую тепловая машина совершает при изменении состояния ее рабочего вещества по замкнутому циклу γ, равна площади той области плоскости V, P состояний, которая ограничена кривой γ (см. задачу 5 § 1).

Пример 2. Пусть $\bar{B}=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ — замкнутый круг на плоскости. Покажем, что любое гладкое отображение $f\colon \bar{B}\to\bar{B}$ замкнутого круга в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку (т. е. такую точку $p\in\bar{B}$, что $f(p)=p$).

◀ Предположим, что неподвижных точек у отображения f нет. Тогда для любой точки $p\in\bar{B}$ однозначно определены луч с вершиной $f(p)$, проходящий через точку p, и точка $\varphi(p)\in\partial B$ пересечения этого луча с ограничивающей круг $\bar{B}$ окружностью. Таким образом, возникло бы отображение $\varphi\colon \bar{B}\to\partial\bar{B}$, которое, как легко видеть, тождественно на границе $\partial\bar{B}$ круга, а в целом той же гладкости, что и исходное отображение f. Покажем, что такого отображения φ не существует.

В области $\mathbb{R}^2\setminus 0$ (плоскость с выброшенным началом координат) рассмотрим уже встречавшуюся нам в примере 1 § 1 форму $\omega=\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$. Непосредственно проверяется, что $d\omega=0$. Поскольку $\partial\bar{B}\subset\mathbb{R}^2\setminus 0$, то при наличии отображения $\varphi\colon \bar{B}\to\partial\bar{B}$ можно было бы получить форму $\varphi^*\omega$ на $\bar{B}$, причем $d\varphi^*\omega=$ $=\varphi^*\,d\omega=\varphi^*0=0$. Значит, по формуле Грина

$$\int_{\partial\bar{B}}\varphi^*\omega=\int_{\bar{B}}d\varphi^*\omega=0.$$

Но сужение φ на $\partial\bar{B}$ есть тождественное отображение, поэтому

$$\int_{\partial\bar{B}}\varphi^*\omega=\int_{\partial\bar{B}}\omega.$$

Последний же интеграл, как было проверено в примере 1 § 1, отличен от нуля. Полученное противоречие завершает доказательство сформулированного утверждения. ▶

Это утверждение справедливо, конечно, и для шара $\bar{B}$ любой размерности (см. пример 5). Оно справедливо также не только для гладких, но и для любых непрерывных отображений $f: \bar{B} \to \bar{B}$. В этом общем виде оно называется *теоремой Брауэра*) о неподвижной точке.*

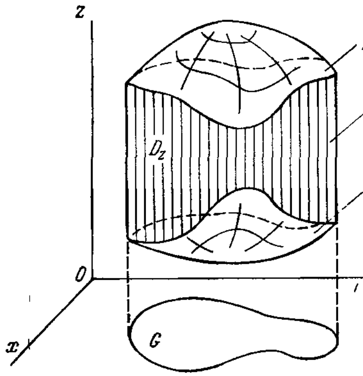

Рис. 89

2. Формула Гаусса — Остроградского. Подобно тому, как формула Грина связывает интеграл по границе плоской области с соответствующим интегралом по самой области, приводимая ниже формула Гаусса — Остроградского связывает интеграл по границе пространственной области с интегралом по самой области.

Утверждение 2. *Пусть $\mathbb{R}^3$ — пространство с фиксированной в нем системой координат x, y, z; $\bar{D}$ — компактная область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная кусочно гладкими поверхностями; P, Q, R — функции, гладкие в замкнутой области $\bar{D}$.*

Тогда имеет место соотношение

$$\boxed{\iiint\limits_{\bar{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial \bar{D}} P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy.} \tag{6}$$

Вывод формулы (6) Гаусса — Остроградского можно провести шаг за шагом повторив с очевидными изменениями вывод формулы Грина. Чтобы это повторение не было дословным, рассмотрим сразу не кубик в $\mathbb{R}^3$, а область D_z, изображенную на рис. 89, которая ограничена боковой цилиндрической поверхностью S с образующей, параллельной оси Oz, и двумя шапочками S_1, S_2 — графиками кусочно гладких функций φ_1, φ_2, определенных в одной и той же области $G \subset \mathbb{R}^2_{xOy}$. Проверим, что для области D_z

---

*) Л. Э Я Брауэр (1881—1966) — известный голландский математик. С его именем связан ряд принципиальных теорем топологии, а также анализ оснований математики, приведший к философско-математическим концепциям, называемым интуиционизмом

выполнено соотношение

$$\iiint\limits_{D} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial D_z} R\,dx \wedge dy. \tag{7}$$

◀ $$\iiint\limits_{D_z} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{G} dx\,dy \int\limits_{\varphi_1(x,\,y)}^{\varphi_2(x,\,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint\limits_{G} (R(x,\, y,\, \varphi_2(x,\, y)) - R(x,\, y,\, \varphi_1(x,\, y)))\,dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_{G} R(x,\, y,\, \varphi_1(x,\, y))\,dx\,dy + \iint\limits_{G} R(x,\, y,\, \varphi_2(x,\, y))\,dx\,dy.$$

Поверхности S_1, S_2 имеют соответственно следующее параметрическое представление:

$$S_1\colon\ (x,\, y) \longmapsto (x,\, y,\, \varphi_1(x,\, y)),$$
$$S_2\colon\ (x,\, y) \longmapsto (x,\, y,\, \varphi_2(x,\, y)).$$

Криволинейные координаты $(x,\, y)$ на S_1 задают ориентацию, противоположную той, которая индуцируется ориентацией области $\bar{D}_z$, а на S_2 — такую же, как и та, которая индуцируется ориентацией $\bar{D}_z$. Значит, если S_1 и S_2 считать частями ориентированной указанным в утверждении 2 образом границы области $\bar{D}_z$, то последние два интеграла (с учетом их знаков) можно интерпретировать соответственно как интегралы по S_1 и S_2 от формы $R\,dx \wedge dy$.

Цилиндрическая поверхность S имеет параметрическое представление вида $(t,\, z) \longmapsto (x(t),\, y(t),\, z)$, поэтому сужение формы $R\,dx \wedge dy$ на S равно нулю, как, следовательно, и интеграл от этой формы по S.

Таким образом, для области D_z соотношение (7) действительно имеет место. ▶

Если ориентированную область $\bar{D}$ можно разрезать на конечное число областей типа области D_z, то, поскольку на поверхности, по которым примыкают друг к другу две такие области, индуцируются противоположные ориентации, при сложении интегралов по границам произойдут взаимные уничтожения, в результате которых останется лишь интеграл по ориентированной границе $\partial\bar{D}$ исходной области $\bar{D}$.

Следовательно, формула (7) верна и для областей, допускающих указанное разбиение на области типа области D_z.

Аналогично можно ввести области D_y и D_x, цилиндрические поверхности которых имеют образующие, параллельные осям Oy и Ox соответственно, и показать, что если некоторую область D можно разрезать на области вида D_y или D_x, то для $\bar{D}$ соответственно имеют место соотношения

$$\iiint\limits_{\bar{D}} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial \bar{D}} Q\, dz \wedge dx, \tag{8}$$

$$\iiint\limits_{\bar{D}} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial \bar{D}} P\, dy \wedge dz. \tag{9}$$

Итак, если $\bar{D}$ — *простая область*, т. е. область, допускающая каждое из трех указанных выше разбиений на области типа D_x, D_y, D_z, то, складывая равенства (7), (8), (9), получаем для $\bar{D}$ равенство (6).

В силу уже указанных при выводе формулы Грина причин, мы не будем сейчас заниматься описанием условий простоты области и дальнейшим уточнением доказанного (см. по этому поводу задачу 8).

Отметим, однако, что на языке форм в бескоординатном виде формулу Гаусса — Остроградского можно записать следующим образом:

$$\int\limits_{\bar{D}} d\omega = \int\limits_{\partial \bar{D}} \omega, \tag{6'}$$

где ω — гладкая 2-форма в области $\bar{D}$.

Поскольку для кубика $I = I^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ формула (6'), как было показано, верна, то ее распространение на более общие классы областей, конечно, можно провести с помощью стандартных выкладок (4) и (5).

Пример 3. *Закон Архимеда.* Вычислим результирующую силу давления однородной жидкости на погруженное в нее тело D.

Декартовы координаты x, y, z в $\mathbb{R}^3$ выберем так, чтобы плоскость x, y совпадала с поверхностью жидкости, а ось z направим в сторону выхода из жидкости. На элемент $d\sigma$ площади поверхности S тела D, находящейся на глубине z, действует сила давления $\rho g z \boldsymbol{n}\, d\sigma$, где ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, а $\boldsymbol{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности S в соответствующей элементу $d\sigma$ точке поверхности. Значит, искомая результирующая сила выражается интегралом

$$\boldsymbol{F} = \iint\limits_{S} \rho g z \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

Если $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x \cos\alpha_x + \boldsymbol{e}_y \cos\alpha_y + \boldsymbol{e}_z \cos\alpha_z$, то $\boldsymbol{n}\, d\sigma = \boldsymbol{e}_x\, dy \wedge dz + \boldsymbol{e}_y\, dz \wedge dx + \boldsymbol{e}_z\, dx \wedge dy$ (см. § 2, п. 4) Используя формулу (6) Гаусса — Остроградского, находим, таким образом, что

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{e}_x \rho g \iint\limits_{S} z\, dy \wedge dz + \boldsymbol{e}_y \rho g \iint\limits_{S} z\, dz \wedge dx + \boldsymbol{e}_z \rho g \iint\limits_{S} z\, dx \wedge dy =$$

$$= \boldsymbol{e}_x \rho g \iiint\limits_{\bar{D}} 0\, dx\, dy\, dz + \boldsymbol{e}_y \rho g \iiint\limits_{\bar{D}} 0\, dx\, dy\, dz + \boldsymbol{e}_z \rho g \iiint\limits_{\bar{D}} dx\, dy\, dz = \rho g V \boldsymbol{e}_z,$$

где V — объем тела D, а значит, $P=\rho g V$ — вес жидкости в объеме, занимаемом телом. Мы пришли к закону Архимеда: $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{e}_z$

Пример 4. Используя формулу (6) Гаусса — Остроградского, можно дать следующие формулы для объема $V(D)$ тела D, ограниченного поверхностью ∂D:

$$V(D)=\frac{1}{3}\iint\limits_{\partial D} x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy=$$

$$=\iint\limits_{\partial D} x\,dy\wedge dz=\iint\limits_{\partial D} y\,dz\wedge dx=\iint\limits_{\partial D} z\,dx\wedge dy.$$

3. Формула Стокса в $\mathbb{R}^3$.

Утверждение 3. *Пусть S — ориентированная кусочно гладкая компактная двумерная поверхность с краем ∂S, лежащая в области $G\subset\mathbb{R}^3$, в которой задана гладкая 1-форма $\omega=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ Тогда имеет место соотношение*

$$\boxed{\begin{aligned}\int\limits_{\partial S} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\\+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy,\end{aligned}}\tag{10}$$

где ориентация края ∂S берется согласованной с ориентацией поверхности S.

В иной записи это означает, что

$$\int\limits_{S} d\omega=\int\limits_{\partial S}\omega.\tag{10'}$$

◀ Если C — стандартная параметризованная поверхность φ: $I\to C$ в $\mathbb{R}^3$, где I — квадрат в $\mathbb{R}^2$, то для C соотношение (10) вытекает из равенств (4), с учетом доказанной для квадрата и используемой в них формулы Грина.

Если ориентируемую поверхность S можно разрезать на простейшие поверхности указанного вида, то для такой поверхности соотношение (10) тоже справедливо, что следует из равенств (5) с заменой в них $\bar{D}$ на S. ▶

Как и в предыдущих случаях, мы не доказываем здесь, что, например, кусочно гладкая поверхность допускает указанное разбиение.

Покажем, как выглядело бы приведенное доказательство формулы (10) в координатной записи. Чтобы избежать уж слишком громоздких выражений, мы распишем только первую и основную из двух его фраз, да и то с некоторыми упрощениями. А именно, введем обозначения x^1, x^2, x^3 для координат точки $x\in\mathbb{R}^3$

и проверим только, что

$$\int\limits_{\partial S} P(x)\,dx^1 = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x^2}\,dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial P}{\partial x^3}\,dx^3 \wedge dx^1,$$

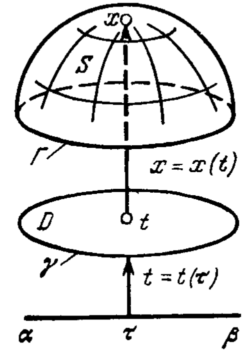

Рис 90

поскольку остальные два слагаемых левой части формулы (10) можно исследовать аналогично. Будем для простоты считать, что S получается при гладком отображении $x = x(t)$ области D, лежащей в плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных t^1, t^2 и ограниченной одной гладкой кривой $\gamma = \partial D$, параметризованной с помощью отображения $t = t(\tau)$ точками отрезка $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ (рис. 90). Тогда край $\Gamma = \partial S$ поверхности S можно записать в виде $x = x(t(\tau))$, где τ пробегает отрезок $[\alpha, \beta]$. Используя определение интеграла по кривой, формулу Грина для плоской области D и определение интеграла по параметризованной поверхности, последовательно находим

$$\int\limits_{\Gamma} P(x)\,dx^1 := \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t(\tau)))\left(\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\frac{dt^1}{d\tau} + \frac{\partial x^1}{\partial t^2}\frac{dt^2}{d\tau}\right)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\gamma}\left(P(x(t))\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\right)dt^1 + \left(P(x(t))\frac{\partial x^1}{\partial t^2}\right)dt^2 \overset{!}{=} \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial t^1}\left(P\frac{\partial x^1}{\partial t^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial t^2}\left(P\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\right)\right]dt^1 \wedge dt^2 = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial t^1}\frac{\partial x^1}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial t^2}\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\right)dt^1 \wedge dt^2 =$$

$$= \iint\limits_D \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial P}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t^1}\frac{\partial x^1}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t^2}\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\right)dt^1 \wedge dt^2 =$$

$$= \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial t^1} + \frac{\partial P}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial t^1}\right)\frac{\partial x^1}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial t^2} + \frac{\partial P}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\right]dt^1 \wedge dt^2 =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial t^1} & \frac{\partial x^2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t^1} & \frac{\partial x^1}{\partial t^2}\end{vmatrix} + \frac{\partial P}{\partial x^3}\begin{vmatrix} \frac{\partial x^3}{\partial t^1} & \frac{\partial x^3}{\partial t^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial t^1} & \frac{\partial x^1}{\partial t^2}\end{vmatrix}\right)dt^1 \wedge dt^2 =$$

$$=: \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial x^2}\,dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial P}{\partial x^3}\,dx^3 \wedge dx^1\right).$$

Двоеточием здесь обозначены равенства по определению, а восклицательным знаком — переход, использующий уже доказанную формулу Грина. Остальное — тождественные преобразования.

Используя основную идею доказательства формулы (10′), мы, таким образом, непосредственно проверили (не ссылаясь на то, что $\varphi^* d = d\varphi^*$, но фактически доказав это в рассматриваемом случае), что формула (10) для простой параметризованной поверхности действительно имеет место. Формально мы провели рассуждение только для члена $P\,dx$, но ясно, что это можно сделать и для двух оставшихся слагаемых 1-формы, стоящей под знаком интеграла в левой части равенства (10).

4. Общая формула Стокса. При всем внешнем различии формул (1), (6), (10) их бескоординатная запись (1″), (5), (6′), (10′) оказывается просто идентичной. Это дает основание считать, что мы имели дело с частными проявлениями некоторого общего закона, который теперь легко угадать.

Утверждение 4. *Пусть S — ориентированная кусочно гладкая k-мерная компактная поверхность с краем ∂S, лежащая в области $G \subset \mathbb{R}^n$, в которой задана гладкая $(k-1)$-форма ω.*

Тогда имеет место соотношение

$$\boxed{\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega,} \tag{11}$$

в котором ориентация края ∂S берется согласованной с ориентацией поверхности S.

◀ Формула (11), очевидно, доказывается теми же общими выкладками (4), (5), что и формула Стокса (10′), если только она справедлива для стандартного k-мерного промежутка $I^k = \{x = (x^1, \ldots, x^k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leqslant x^i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, k\}$. Проверим, что для I^k формула (11) действительно имеет место.

Поскольку на I^k $(k-1)$-форма ω имеет вид $\omega = a_i(t)\,dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt^i} \wedge \ldots \wedge dt^k$ (суммирование по $i = 1, \ldots, k$, с выпусканием дифференциала dt^i), то (11) достаточно доказать для каждого слагаемого в отдельности Пусть $\omega = a(t)\,dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt^i} \wedge \ldots \wedge dt^k$. Тогда $d\omega = (-1)^{i-1}\frac{\partial a}{\partial t^i}\,dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^i \wedge \ldots \wedge dt^k$. Теперь проведем выкладку:

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{I^k} (-1)^{i-1}\frac{\partial a}{\partial t^i}\,dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} dt^1 \ldots \widehat{dt^i} \ldots dt^n \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t^i}(t)\,dt^i =$$

$$= (-1)^i \int_{I^{k-1}} \left(a(t^1, \ldots, t^{i-1}, 1, t^{i+1}, \ldots, t^k) - \right.$$

$$\left. - a(t^1, \ldots, t^{i-1}, 0, t^{i+1}, \ldots, t^k)\right) dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt^i} \wedge \ldots \wedge dt^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} a(\tilde{t}^1, \ldots, \tilde{t}^{i-1}, 1, \tilde{t}^i, \ldots, \tilde{t}^{k-1})\,d\tilde{t}^1 \ldots d\tilde{t}^{k-1} +$$

$$+ (-1)^i \int_{I^{k-1}} a(\tilde{t}^1, \ldots, \tilde{t}^{i-1}, 0, \tilde{t}^i, \ldots, \tilde{t}^{k-1})\,d\tilde{t}^1 \ldots d\tilde{t}^{k-1}.$$

Здесь I^{k-1} такой же, только $k-1$-мерный куб в $\mathbb{R}^{k-1}$, как и куб I^k в $\mathbb{R}^k$; кроме того, мы здесь сделали замену переменных $t^1=\tilde{t}^1, \dots, t^{i-1}=\tilde{t}^{i-1}, t^{i+1}=\tilde{t}^i, \dots, t^k=\tilde{t}^{k-1}$.

Отображения

$$I^{k-1} \ni \tilde{t} = (\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^{k-1}) \longmapsto (\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^{i-1}, 1, \tilde{t}^i, \dots, \tilde{t}^{k-1}) \in I^k,$$

$$I^{k-1} \ni \tilde{t} = (\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^{k-1}) \longmapsto (\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^{i-1}, 0, \tilde{t}^i, \dots, \tilde{t}^{k-1}) \in I^k$$

суть параметризации соответственно верхней Γ_{i1} и нижней Γ_{i0} граней куба I^k, ортогональных оси Ox^i. Эти координаты на обеих гранях задают один и тот же ориентирующий грань репер $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_k$, отличающийся от репера $e_1, \dots, e_k$ пространства $\mathbb{R}^k$ отсутствием вектора e_i. Вектор e_i на грани Γ_{i1} является внешней по отношению к I^k нормалью, как и вектор $-e_i$ для грани Γ_{i0}. Репер $e_i, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_k$ переходит в репер $e_1, \dots, e_k$ пространства $\mathbb{R}^k$ после $i-1$ перестановки соседних векторов, т. е. совпадение или несовпадение ориентации этих реперов определяется знаком числа $(-1)^{i-1}$. Таким образом, указанная параметризация задает на Γ_{i1} ориентацию, которая превращается в ориентацию Γ_{i1}, согласованную с ориентацией I^k, если ее взять с поправочным коэффициентом $(-1)^{i-1}$ (т. е. не менять при нечетном i и менять при четном i).

Аналогичные рассуждения показывают, что для грани Γ_{i0} придется взять поправочный коэффициент $(-1)^i$ к ориентации, заданной предъявленной параметризацией грани Γ_{i0}.

Итак, последние два интеграла (вместе со стоящими при них коэффициентами) можно интерпретировать соответственно как интегралы от формы ω по граням Γ_{i1} и Γ_{i0} куба I^k, взятым с ориентацией, индуцированной на них ориентацией куба I^k.

Теперь заметим, что остальная часть Γ границы куба I^k есть цилиндрическая поверхность с образующей параллельной оси Ox^i, поэтому сужение на нее формы $a(t)\,dt^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt^i} \wedge \dots \wedge dt^k$ есть $(k-1)$-форма, тождественно равная нулю на Γ. Действительно, ведь Γ имеет параметризацию вида $(u^1, \dots, u^{k-2}, x^i) =: (u, x^i) \longmapsto (x^1(u), \dots, x^{i-1}(u), x^i, x^{i+1}(u), \dots, x^k(u))$, поэтому после взятия дифференциалов $dx^1, \dots, dx^{i-1}, dx^{i+1}, \dots, dx^k$ их внешнее произведение окажется произведением $(k-1)$ форм от $k-2$ переменных $u^1, \dots, u^{k-2}$, что тождественно равно нулю

Значит, сумму последних интегралов можно интерпретировать как интеграл от формы ω, взятый по краю ∂I^k куба I^k, ориентированному согласованно с ориентацией самого куба I^k.

Формула

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega,$$

а вместе с ней и формула (11) доказаны. ▶

Как видно, формула (11) является следствием формулы Ньютона — Лейбница, теоремы о сведении кратного интеграла к повторному и серии определений таких понятий, как поверхность, край поверхности, ориентация, дифференциальная форма, ее дифференцирование и перенос.

Формулы (1), (6), (10) Грина, Гаусса — Остроградского и Стокса являются частными случаями общей формулы (11). Более того, если заданную на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функцию F интерпретировать как 0-форму ω, интегралом по точке от 0-формы считать значение функции в этой точке, то саму формулу Ньютона — Лейбница тоже можно рассматривать как простейший (но независимый) вариант формулы (11).

Формулу (11) обычно называют *общей формулой Стокса*. В качестве исторической справки процитируем здесь несколько строк из предисловия М. Спивака к его книге, упомянутой в списке литературы.

«Впервые формулировка теоремы*) появилась в виде приписки к письму сэра Уильяма Томсона (лорда Кельвина) к Стоксу, датированному 2 июля 1850 г. Опубликована она была в качестве восьмого вопроса к экзаменам на смитовскую премию 1854 г Этот конкурсный экзамен, которому ежегодно подвергались лучшие студенты — математики Кембриджского университета, с 1849 по 1882 г., проводился профессором Стоксом Ко времени его смерти результат был повсеместно известен как теорема Стокса Современниками Стокса были даны по крайней мере три доказательства: одно опубликовал Томсон, другое было изложено в «Трактате о натуральной философии» Томсона и Тейта и третье предложил Максвелл в «Электричестве и магнетизме» С тех пор именем Стокса были названы значительно более общие результаты, сыгравшие столь заметную роль в развитии некоторых разделов математики, что теорема Стокса вполне может дать материал для размышлений о ценности обобщений».

Отметим, что язык форм и вид (11) общей формулы Стокса для поверхностей в $\mathbb{R}^n$, по-видимому, впервые предложил Пуанкаре Для областей n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ формулу знал уже Остроградский.

Таким образом, общую формулу Стокса (11) не случайно порой называют формулой Ньютона — Лейбница — Грина — Гаусса — Остроградского — Стокса — Пуанкаре Из сказанного можно заключить. что это еще далеко не полное ее название.

Используем эту формулу, чтобы обобщить результат, полученный в примере 1.

Пример 5. Покажем, что любое гладкое отображение f $\bar{B} \to \bar{B}$ замкнутого шара $\bar{B} \subset \mathbb{R}^m$ в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку

*) Имеется в виду классическая формула Стокса (10)

◀ Если бы отображение f не имело неподвижных точек, то, как и в примере 1, можно было бы построить гладкое отображение $\varphi\colon \bar{B}\to\partial\bar{B}$, тождественное на сфере $\partial\bar{B}$. В области $\mathbb{R}^m\setminus 0$ рассмотрим векторное поле $\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^m}$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $x=(x^1, \ldots, x^n)\in\mathbb{R}^m\setminus 0$, и отвечающую этому полю форму потока

$$\omega=\left\langle\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^m}, \boldsymbol{n}\right\rangle\Omega=\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^i x^i\,dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^m}{((x^1)^2+\ldots+(x^m)^2)^{m/2}}$$

(см формулу (8) из § 2). Поток такого поля через границу шара $\bar{B}=\{x\in\mathbb{R}^m \mid |x|=1\}$ в сторону внешней нормали к сфере $\partial\bar{B}$, очевидно, равен площади сферы $\partial\bar{B}$, т. е. $\int\limits_{\partial B}\omega\neq 0$. Но, как легко проверить прямой выкладкой, $d\omega=0$ в $\mathbb{R}^m\setminus 0$, откуда с использованием общей формулы Стокса, как и в примере 1, следует, что

$$\int\limits_{\partial\bar{B}}\omega=\int\limits_{\partial\bar{B}}\varphi^*\omega=\int\limits_{\bar{B}}d\varphi^*\omega=\int\limits_{\bar{B}}\varphi^*\,d\omega=\int\limits_{\bar{B}}\varphi^*0=0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. ▶

Задачи и упражнения

1. a Изменится ли формула (1) Грина, если перейти от системы координат x, y к системе координат y, x?

b. Изменится ли при этом формула (1")?

2. a Докажите, что формула (1) остается в силе, если функции P, Q непрерывны в замкнутом квадрате I, их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial D}{\partial x}$ непрерывны во внутренних точках квадрата I а двойной интеграл из формулы (1′) существует хотя бы как несобственный

b Проверьте, что если граница компактной области $\bar{D}$ состоит из кусочно гладких кривых, то в аналогичных указанным в а предположениях формула (1) остается в силе

3. a Проведите подробно доказательство равенства (2′).

b Покажите, что если граница компактной области $D\subset\mathbb{R}^2$ состоит из конечного числа гладких кривых, имеющих лишь конечное число точек перегиба, то D — простая область по отношению к любой паре координатных осей.

c. Верно ли, что если граница плоской области состоит из гладких кривых, то в $\mathbb{R}^2$ можно так выбрать оси координат, что по отношению к ним она окажется простой областью?

4. a. Покажите, что если функции P, Q в формуле Грина таковы, что $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$, то площадь $\sigma(D)$ области D можно находить по формуле $\sigma(D)=$ $=\int\limits_{\partial D}P\,dx+Q\,dy$.

b Выясните геометрический смысл интеграла $\int\limits_{\gamma}y\,dx$, взятого по некоторой (быть может и незамкнутой) кривой на плоскости с декартовыми координатами x, y. Исходя из этого, вновь истолкуйте формулу $\sigma(D)=-\int\limits_{\partial D}y\,dx$.

c. В качестве проверки последней формулы найдите с ее помощью площадь области $D=\left\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

5. a Пусть $x=x(t)$ — диффеоморфизм области $D_t\subset\mathbb{R}^2_t$ на область $D_x\subset\mathbb{R}^2_x$. Используя результаты задачи 4, а также независимость криволинейного интеграла от допустимого изменения параметризации пути, докажите, что

$$\int\limits_{D_x} dx=\int\limits_{D_t} |x'(t)|\,dt,$$

где $dx=dx^1\,dx^2$, $dt=dt^1\,dt^2$, $|x'(t)|=\det x'(t)$

b. Выведите из a формулу

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx=\int\limits_{D_t} f(x(t))\,|\det x'(t)|\,dt$$

замены переменных в двойном интеграле.

6. Пусть $f(x, y, t)$ — гладкая функция, удовлетворяющая в области определения условию $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\neq 0$ Тогда при каждом фиксированном значении параметра t уравнение $f(x, y, t)=0$ задает кривую γ_t в плоскости $\mathbb{R}^2$ Так на плоскости возникает семейство $\{\gamma_t\}$ кривых, зависящих от параметра t. Гладкая кривая $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$, задаваемая параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, называется *огибающей семейства кривых* $\{\gamma_t\}$, если при любом значении t_0 из совместной области определения $\{\gamma_t\}$ и функций $x(t)$, $y(t)$, точка $x(t_0)$, $y(t_0)$ лежит на соответствующей кривой γ_{t_0} и кривые Γ и γ_{t_0} касаются в этой точке

a Считая, что x, y — декартовы координаты на плоскости, покажите, что задающие огибающую функции $x(t)$, $y(t)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} f(x, y, t)=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x, y, t)=0,\end{cases}$$

а сама огибающая с геометрической точки зрения есть граница проекции (тени) поверхности $f(x, y, t)=0$ пространства $\mathbb{R}^3_{(x, y, t)}$ на плоскость $\mathbb{R}^2_{(x, y)}$.

b В плоскости с декартовыми координатами x, y дано семейство прямых $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p(\alpha)=0$ Роль параметра здесь играет полярный угол α Укажите геометрический смысл величины $p(\alpha)$ и найдите огибающую этого семейства, если $p(\alpha)=c+a\cos\alpha+b\sin\alpha$, a, b, c — постоянные.

c Опишите зону досягаемости снаряда, который может быть выпущен из зенитного орудия под любым углом $\varphi\in[0, \pi/2]$ к горизонту

d. Покажите, что если функция $p(\alpha)$ из b 2π-периодическая, то соответствующая огибающая Γ является замкнутой кривой.

e. Используя задачу 4, покажите, что длина L полученной в d замкнутой кривой Γ может быть найдена по формуле

$$L=\int\limits_0^{2\pi} p(\alpha)\,d\alpha$$

(Считайте, что $p\in C^{(2)}$.)

f Покажите также, что площадь σ области, ограниченной полученной в d замкнутой кривой Γ, может быть вычислена по формуле

$$\sigma=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(p^2-\dot p^2)(\alpha)\,d\alpha,$$

где $\dot p(\alpha)=\frac{dp}{d\alpha}(\alpha)$

7. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r} ds$, в котором γ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $(x, y) \in \gamma$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\boldsymbol{n}$ — единичный нормальный вектор к γ в точке (x, y), меняющийся непрерывно вдоль γ; ds — элемент длины кривой. Этот интеграл называется *интегралом Гаусса*.

a. Запишите интеграл Гаусса как поток $\int\limits_{\gamma} \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}\rangle ds$ плоского векторного поля $\boldsymbol{V}$ через кривую γ.

b. Покажите, что в декартовых координатах x, y интеграл Гаусса имеет знакомый нам по примеру 1 § 1 вид $\pm \int\limits_{\gamma} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$, где выбор знака определяется выбором поля нормалей $\boldsymbol{n}$.

c. Вычислите интеграл Гаусса для замкнутой кривой γ, один раз обходящей начало координат, и для кривой γ, ограничивающей область, которая не содержит начала координат.

d. Покажите, что $\frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r} ds = d\varphi$, где φ — полярный угол радиус-вектора $\boldsymbol{r}$, и укажите геометрический смысл значения интеграла Гаусса для замкнутой и для произвольной кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$.

8. При выводе формулы Гаусса—Остроградского мы считали, что $\bar{D}$ — простая область, а функции P, Q, R принадлежат классу $C^{(1)}(\bar{D}, \mathbb{R})$. Покажите, усовершенствовав рассуждения, что формула (6) верна, если $\bar{D}$ — компактная область с кусочно гладкой границей, $P, Q, R \in C(\bar{D}, \mathbb{R})$, $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z} \in C(D, \mathbb{R})$, а тройной интеграл сходится хотя бы как несобственный.

9. a. Если функции P, Q, R в формуле (6) такие, что $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$, то объем $V(D)$ области D можно найти по формуле

$$V(D) = \iint\limits_{\partial D} P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$$

b. Пусть $f(x, t)$ — гладкая функция переменных $x \in D_x \subset \mathbb{R}^n_x$, $t \in D_t \subset \mathbb{R}^n_t$, причем $\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) \neq 0$. Напишите систему уравнений, которой должна удовлетворять $(n-1)$-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n_x$, являющаяся огибающей семейства поверхностей $\{S_t\}$, задаваемых условиями $f(x, t) = 0$, $t \in D_t$ (см. задачу 6).

c. Выбирая в качестве параметра t точку на единичной сфере, укажите такое семейство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, зависящих от параметра t, огибающей которого был бы эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

d. Покажите, что если замкнутая поверхность S является огибающей семейства плоскостей

$$\cos\alpha_1(t)\,x + \cos\alpha_2(t)\,y + \cos\alpha_3(t)\,z - p(t) = 0,$$

где α_1, α_2, α_3 — углы, которые нормаль к плоскости образует с осями координат, а параметром t является переменная точка единичной сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, то площадь σ поверхности S можно найти по формуле $\sigma = \int\limits_{S^2} p(t)\,d\sigma$.

e. Покажите, что объем тела, ограниченного рассмотренной в d поверхностью S, можно найти по формуле $V = \frac{1}{3}\int\limits_{S} p(t)\,d\sigma$.

f. Опробуйте указанную в e формулу, отыскав по ней объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

g. Как выглядит n-мерный аналог формул, указанных в d и e.

10. a Используя формулу Гаусса — Остроградского, проверьте, что поток поля $\boldsymbol{r}/r^3$ (где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $x\in\mathbb{R}^3$, а $r=|\boldsymbol{r}|$) через гладкую, гомеоморфную сфере поверхность S, охватывающую начало координат, равен потоку этого же поля через поверхность сколь угодно малой сферы $|x|=\varepsilon$

b. Покажите, что указанный в a поток равен 4π.

c. Проинтерпретируйте интеграл Гаусса $\int\limits_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{n})}{r^2}\,d\sigma$ в $\mathbb{R}^3$ как поток поля $\boldsymbol{r}/r^3$ через поверхность S.

d. Вычислите интеграл Гаусса по границе компактной области $D\subset\mathbb{R}^3$, рассмотрев как случай, когда D содержит внутри себя начало координат, так и случай, когда начало координат лежит вне области D.

e Сопоставляя задачи 7 и 10 a—d, укажите n мерный вариант интеграла Гаусса и соответствующего векторного поля Дайте n-мерную формулировку задач a — d и проверьте ее

11. a Покажите, что замкнутая жесткая поверхность $S\subset\mathbb{R}^3$ остается в равновесии при действии равномерно по ней распределенного давления. (На основании принципов статики задача сводится к проверке равенств $\iint\limits_S \boldsymbol{n}\,d\sigma=0$, $\iint\limits_S [\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{n}]\,d\sigma=0$, где $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной нормали, $\boldsymbol{r}$ — радиус вектор, $[\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{n}]$ — векторное произведение $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{n}$.)

b. Твердое тело объема V полностью погружено в жидкость, имеющую удельный вес 1 Покажите, что полный статический эффект давления жидкости на тело сводится к одной силе $\boldsymbol{F}$ величины V, направленной вертикально вверх и приложенной к центру массы C объемной области, занимаемой телом.

12. Пусть $\Gamma\colon I^k\to D\subset\mathbb{R}^n$ — гладкое (не обязательно гомеоморфное) отображение промежутка $I^k\subset\mathbb{R}^k$ в область D пространства $\mathbb{R}^n$, в которой определена k-форма ω. По аналогии с одномерным случаем отображение Γ будем называть *k-путем* и положим по определению $\int\limits_\Gamma \omega=\int\limits_{I^k}\Gamma^*\omega$. Просмотрите доказательство общей формулы Стокса и убедитесь, что она верна не только для k-мерных поверхностей, но и для k-путей.

13. Используя общую формулу Стокса, докажите по индукции формулу замены переменных в кратном интеграле (принцип доказательства указан в задаче 5 a)

ГЛАВА XIV

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. Дифференциальные операции векторного анализа

1. Скалярные и векторные поля. В теории поля рассматриваются функции $x \longmapsto T(x)$, которые каждой точке x фиксированной области D сопоставляют некоторый специальный объект $T(x)$, называемый *тензором*. Если в области D задана такая функция, то говорят, что в D задано *тензорное поле*. Мы не намерены здесь давать определение тензора — оно будет рассмотрено в алгебре и дифференциальной геометрии. Скажем только, что числовые функции $D \ni x \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}$, а также вектор-функции $\mathbb{R}^n \supset D \ni x \longmapsto V(x) \in T\mathbb{R}^n_x \approx \mathbb{R}^n$ являются частными случаями тензорных полей и называются соответственно *скалярным* и *векторным полем в области* D (эту терминологию мы употребляли и раньше).

Дифференциальная p-форма ω в D есть функция $\mathbb{R}^n \supset D \ni x \longmapsto \omega(x) \in \mathscr{L}((\mathbb{R}^n)^p, \mathbb{R})$, которую можно назвать *полем форм* степени p в области D. Это тоже частный случай тензорного поля

Здесь мы прежде всего будем интересоваться скалярными и векторными полями в областях ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Эти поля играют первостепенную роль во многих естественнонаучных приложениях анализа.

2. Векторные поля и формы в $\mathbb{R}^3$. Напомним, что в евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$ между линейными функциями A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ и векторами $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^3$ имеется соответствие, состоящее в том, что каждая такая функция имеет вид $A(\xi) = \langle \boldsymbol{A}, \xi \rangle$, где $\boldsymbol{A}$ — вполне определенный вектор из $\mathbb{R}^3$.

Если пространство еще и ориентировано, то каждая билинейная функция B: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ однозначно записывается в виде $B(\xi_1, \xi_2) = (\boldsymbol{B}, \xi_1, \xi_2)$, где $\boldsymbol{B}$ — некоторый, вполне определенный вектор из $\mathbb{R}^3$, а $(\boldsymbol{B}, \xi_1, \xi_2)$, как всегда, — смешанное произведение векторов $\boldsymbol{B}$, ξ_1, ξ_2 или, что то же самое, значение формы объема на этих векторах.

Таким образом, в ориентированном евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ с каждым его вектором можно указанным способом связать линейную или билинейную форму, а задание линейной или билинейной формы равносильно заданию соответствующего вектора в $\mathbb{R}^3$.

Если в $\mathbb{R}^3$ имеется скалярное произведение, то оно естественным образом возникает и в любом касательном пространстве $T\mathbb{R}^3_x$, состоящем из векторов, приложенных к точке $x \in \mathbb{R}^3$, а ориентация $\mathbb{R}^3$ ориентирует каждое пространство $T\mathbb{R}^3_x$.

Значит, если в $T\mathbb{R}^3_x$ задать 1-форму $\omega^1(x)$ или 2-форму $\omega^2(x)$, то при перечисленных условиях это равносильно заданию в $T\mathbb{R}^3_x$ некоторого вектора $A(x) \in T\mathbb{R}^3_x$, соответствующего форме $\omega^1(x)$ или вектора $B(x) \in T\mathbb{R}^3_x$, отвечающего форме $\omega^2(x)$.

Следовательно, задание в некоторой области D ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ 1-формы ω^1 или 2-формы ω^2 равносильно заданию в D соответствующего форме векторного поля A или B.

В явном виде это соответствие состоит в том, что

$$\omega^1_A(x)(\xi) = \langle A(x), \xi\rangle, \tag{1}$$

$$\omega^2_B(x)(\xi_1, \xi_2) = (B(x), \xi_1, \xi_2), \tag{2}$$

где $A(x)$, $B(x)$. ξ, ξ_1, $\xi_2 \in TD_x$.

Мы видим уже знакомые нам форму работы $\omega^1 = \omega^1_A$ векторного поля A и форму потока $\omega^2 = \omega^2_B$ векторного поля B.

Скалярному полю $f: D \to \mathbb{R}$ можно следующим образом сопоставить 0-форму и 3-форму в D:

$$\omega^0_f = f, \tag{3}$$

$$\omega^3_f = f\,dV, \tag{4}$$

где dV — элемент объема (форма объема) в ориентированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Ввиду соответствий (1) — (4) операциям над формами отвечают определенные операции над векторными и скалярными полями. Это наблюдение, как мы вскоре убедимся, технически очень полезно.

Утверждение 1. *Линейной комбинации форм одинаковой степени отвечает линейная комбинация соответствующих им векторных или скалярных полей.*

◀ Утверждение 1 очевидно. Приведем, однако, например, для 1-форм полную запись доказательства:

$$\alpha_1\omega^1_{A_1} + \alpha_2\omega^1_{A_2} = \alpha_1\langle A_1, \cdot\rangle + \alpha_2\langle A_2, \cdot\rangle =$$
$$= \langle \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, \cdot\rangle = \omega^1_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2}. \;\blacktriangleright$$

Из доказательства видно, что α_1 и α_2 можно считать функциями (не обязательно постоянными) в области D задания форм и полей.

Для сокращения записи условимся, наряду с уже используемыми символами $\langle\ ,\ \rangle$, $[\ ,\ ]$, скалярное и векторное произведения векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в $\mathbb{R}^3$, когда это будет удобно, обозначать соответственно через $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$.

Утверждение 2. *Если $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ — векторные поля в евклидовом ориентированном пространстве $\mathbb{R}^3$, то*

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}_1}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{A}_2}=\omega^2_{\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2}, \tag{5}$$

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^2_{\boldsymbol{B}}=\omega^3_{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}. \tag{6}$$

Иными словами, внешнему произведению 1-форм, порожденных полями $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, отвечает векторное произведение $\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2$ этих полей, поскольку именно оно порождает получаемую в результате 2-форму.

В этом же смысле внешнему произведению 1-формы $\omega^1_{\boldsymbol{A}}$ и 2-формы $\omega^2_{\boldsymbol{B}}$, порожденных векторными полями $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ соответственно отвечает скалярное произведение $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ этих полей.

◀ Для доказательства фиксируем в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный базис и отвечающую ему декартову систему координат x^1, x^2, x^3. В декартовых координатах

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}(x)(\xi)=\boldsymbol{A}(x)\cdot\xi=\sum_{i=1}^{3}A^i(x)\,\xi^i=\sum_{i=1}^{3}A^i(x)\,dx^i(\xi),$$

т. е.

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}=A^1\,dx^1+A^2\,dx^2+A^3\,dx^3, \tag{7}$$

и

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}}(x)(\xi_1,\ \xi_2)=\begin{vmatrix} B^1(x) & B^2(x) & B^3(x)\\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3\\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3\end{vmatrix}=$$

$$=(B^1(x)\,dx^2\wedge dx^3+B^2(x)\,dx^3\wedge dx^1+B^3(x)\,dx^1\wedge dx^2)(\xi_1,\ \xi_2),$$

т. е.

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}}=B^1\,dx^2\wedge dx^3+B^2\,dx^3\wedge dx^1+B^3\,dx^1\wedge dx^2. \tag{8}$$

Поэтому в декартовых координатах, с учетом выражений (7) и (8), получаем

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}_1}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{A}_2}=(A_1^1\,dx^1+A_1^2\,dx^2+A_1^3\,dx^3)\wedge(A_2^1\,dx^1+A_2^2\,dx^2+A_2^3\,dx^3)=$$
$$=(A_1^2A_2^3-A_1^3A_2^2)\,dx^2\wedge dx^3+(A_1^3A_2^1-A_1^1A_2^3)\,dx^3\wedge dx^1+$$
$$+(A_1^1A_2^2-A_1^2A_2^1)\,dx^1\wedge dx^2=\omega^2_{\boldsymbol{B}},$$

где $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2$.

Координаты были использованы при доказательстве лишь для того, чтобы проще было найти вектор $\boldsymbol{B}$ соответствующей 2-формы. Само же равенство (5) от координат, разумеется, не зависит.

Аналогично, перемножив равенства (7) и (8), получим

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^2_{\boldsymbol{B}}=(A^1B^1+A^2B^2+A^3B^3)\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3=\omega^3_{\rho}.$$

В декартовых координатах $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ есть форма объема в $\mathbb{R}^3$, а стоящая в скобке перед формой объема сумма попарных произведений координат векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ есть скалярное произведение этих векторов в соответствующих точках области, откуда следует, что $\rho(x) = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{B}(x)$. ►

3. Дифференциальные операторы grad, rot, div и ∇.

Определение 1. Внешнему дифференцированию 0-форм (функций), 1-форм и 2-форм в ориентированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ отвечают соответственно операции нахождения *градиента* (grad) скалярного поля, *ротора* (rot) и *дивергенции* (div) векторного поля, определенные соотношениями

$$d\omega_f^0 =: \omega_{\operatorname{grad} f}^1, \tag{9}$$
$$d\omega_{\boldsymbol{A}}^1 =: \omega_{\operatorname{rot} \boldsymbol{A}}^2, \tag{10}$$
$$d\omega_{\boldsymbol{B}}^2 =: \omega_{\operatorname{div} \boldsymbol{B}}^3. \tag{11}$$

В силу установленного равенствами (1)—(4) соответствия между формами, скалярными и векторными полями в $\mathbb{R}^3$, соотношения (9)—(11) являются корректным определением операций grad, rot и div, выполняемых соответственно над скалярным полем и векторными полями. Эти операции, или, как говорят, *операторы теории поля*, отвечают одной операции внешнего дифференцирования форм, только применяемой к формам различной степени.

Укажем сразу же явный вид этих операторов в декартовых координатах x^1, x^2, x^3 пространства $\mathbb{R}^3$.

Как мы выяснили, в этом случае

$$\omega_f^0 = f, \tag{3'}$$
$$\omega_{\boldsymbol{A}}^1 = A^1\,dx^1 + A^2\,dx^2 + A^3\,dx^3, \tag{7'}$$
$$\omega_{\boldsymbol{B}}^2 = B^1\,dx^2 \wedge dx^3 + B^2\,dx^3 \wedge dx^1 + B^3\,dx^1 \wedge dx^2, \tag{8'}$$
$$\omega_\rho^3 = \rho\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{4'}$$

Поскольку

$$\omega_{\operatorname{grad} f}^1 := d\omega_f^0 = df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}dx^3,$$

то из (7') следует, что в этих координатах

$$\operatorname{grad} f = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial f}{\partial x^1} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial f}{\partial x^2} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial f}{\partial x^3}, \tag{9'}$$

где $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — фиксированный в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный базис.

Поскольку

$$\omega_{\operatorname{rot} \boldsymbol{A}}^2 := d\omega_{\boldsymbol{A}}^1 = d(A^1\,dx^1 + A^2\,dx^2 + A^3\,dx^3) =$$
$$= \left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}\right)dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}\right)dx^3 \wedge dx^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2}\right)dx^1 \wedge dx^2,$$

то из (8′) следует, что в декартовых координатах

$$\operatorname{rot} A = e_1\left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}\right) + e_2\left(\frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}\right) + e_3\left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2}\right). \qquad (10')$$

Для запоминания последнее соотношение часто записывают в следующем символическом виде:

$$\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ A^1 & A^2 & A^3 \end{vmatrix}. \qquad (10'')$$

Далее, поскольку

$$\omega^3_{\operatorname{div} B} := d\omega^2_B = d\left(B^1\, dx^2 \wedge dx^3 + B^2\, dx^3 \wedge dx^1 + B^3\, dx^1 \wedge dx^2\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

то из (4′) следует, что в декартовых координатах

$$\operatorname{div} B = \frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3}. \qquad (11')$$

Из полученных формул (9′), (10′), (11′) видно, что grad, rot и div являются линейными дифференциальными операциями (операторами). Оператор grad определен на дифференцируемых скалярных полях и сопоставляют им векторные поля. Оператор rot тоже векторнозначен, но определен на дифференцируемых векторных полях. Оператор div определен на дифференцируемых векторных полях и он ставит им в соответствие скалярные поля.

Отметим, что в других координатах эти операторы будут иметь выражения, вообще говоря, отличные от полученных выше их выражений в декартовых координатах. Об этом мы еще скажем в п. 5 этого параграфа.

Заметим еще, что векторное поле $\operatorname{rot} A$ обычно называют *ротором* A, *ротацией поля* A или *вихрем поля* A. В последнем случае вместо символа $\operatorname{rot} A$ иногда пишут символ $\operatorname{curl} A$.

В качестве примера использования рассмотренных операторов приведем запись через них знаменитой *) системы уравнений Максвелла **), описывающей состояние компонент электромагнитного поля как функций точки $x = (x^1, x^2, x^3)$ пространства и времени t.

*) По этому поводу известный современный американский физик и математик Р. Фейнман в своих лекциях по физике (см. русский перевод: М., Мир, 1966, т. 5, с. 27) с присущим ему темпераментом пишет: «В истории человечества (если посмотреть на нее, скажем, через десять тысяч лет) самым значительным событием XIX столетия, несомненно, будет открытие Максвеллом законов электродинамики. На фоне этого важного научного открытия гражданская война в Америке в том же десятилетии будет выглядеть мелким провинциальным происшествием».

**) Д. К. Максвелл (1831—1879) — выдающийся шотландский физик; создал математическую теорию электромагнитного поля, известен также исследованиями по кинетической теории газов, оптике и механике.

Пример 1 (система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме).

$$\begin{aligned} &1.\ \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. && 2.\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \\ &3.\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. && 4.\ \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\rho(x, t)$ — плотность электрического заряда (количество заряда, отнесенное к единице объема), $\boldsymbol{j}(x, t)$ — вектор плотности электрического тока (скорость протекания заряда через единичную площадку), $\boldsymbol{E}(x, t)$ и $\boldsymbol{B}(x, t)$ — векторы напряженности электрического и магнитного поля соответственно, ε_0 и c — размерные постоянные (при этом c — скорость света в вакууме).

В математической и особенно физической литературе наряду с введенными операторами grad, rot, div широко используется предложенный Гамильтоном символический векторный дифференциальный *оператор набла* (*оператор Гамильтона* *))

$$\nabla = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \tag{13}$$

где $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, а x^1, x^2, x^3 — соответствующие ему декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$.

По определению применение оператора ∇ к скалярному полю f (т. е. к функции) дает векторное поле

$$\nabla f = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

что совпадает с полем (9′), т. е. оператор набла есть попросту записанный в других обозначениях оператор grad.

Используя, однако, векторную структуру записи оператора ∇, Гамильтон предложил систему формальных операций с ним, копирующую соответствующие алгебраические операции с векторами.

Прежде чем демонстрировать эти операции, отметим, что в обращении с оператором ∇ надо придерживаться тех же принципов и соблюдать те же правила предосторожности, что и в обращении с обычным оператором дифференцирования $D = \frac{d}{dx}$. Например, $\varphi D f$ равно $\varphi \frac{df}{dx}$, а не $\frac{d}{dx}(\varphi f)$ или не $f \frac{d\varphi}{dx}$. Значит, оператор действует на то, что ему подставляют справа; левое умножение в данном случае играет роль коэффициента, т. е. φD есть новый

*) У. Р. Гамильтон (1805—1865) — знаменитый ирландский математик и механик; сформулировал вариационный принцип (Гамильтона) и построил феноменологическую теорию оптических явлений; создатель теории кватернионов и родоначальник векторного анализа (кстати, ему принадлежит сам термин «вектор»)

дифференциальный оператор $\varphi\frac{d}{dx}$, а не функция $\frac{d\varphi}{dx}$. Далее $D^2 = D \circ D$, т. е. $D^2 f = D(Df) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f\right) = \frac{d^2}{dx^2}f$.

Если теперь, следуя Гамильтону, обращаться с ∇ как с заданным в декартовых координатах векторным полем, то, сопоставляя соотношения (12), (10″) и (11′), получаем

$$\operatorname{grad} f = \nabla f, \tag{14}$$

$$\operatorname{rot} A = \nabla \times A, \tag{15}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = \nabla \cdot \boldsymbol{B}. \tag{16}$$

Так через оператор Гамильтона и векторные операции в $\mathbb{R}^3$ записываются операторы grad, rot и div.

Пример 2. В записи (12) системы уравнений Максвелла участвовали только операторы rot и div. Используя описанные принципы обращения с оператором $\nabla = \operatorname{grad}$, мы в качестве компенсации для оператора grad перепишем систему Максвелла в следующем виде:

$$\begin{aligned} &1.\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. && 2.\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \\ &3.\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}. && 4.\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{j}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}. \end{aligned} \tag{12′}$$

4. Некоторые дифференциальные формулы векторного анализа. В евклидовом ориентированном пространстве $\mathbb{R}^3$ мы установили связь (1)—(4) между формами, с одной стороны, и векторными и скалярными полями — с другой. Это позволило внешнему умножению и дифференцированию форм сопоставить соответствующие операции над полями (см. формулы (5), (6) и (9)—(11)).

Этим соответствием можно пользоваться для получения ряда основных дифференциальных формул векторного анализа.

Например, имеют место следующие соотношения:

$$\operatorname{rot}(fA) = A \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{rot} A, \tag{17}$$

$$\operatorname{div}(fA) = A \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div} A, \tag{18}$$

$$\operatorname{div}(A \times B) = \boldsymbol{B} \cdot \operatorname{rot} A - A \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{B}. \tag{19}$$

◀ Проверим последнее равенство:

$$\omega^3_{\operatorname{div} A\times B} = d\omega^2_{A\times B} = d(\omega^1_A \wedge \omega^1_B) = d\omega^1_A \wedge \omega^1_B - \omega^1_A \wedge d\omega^1_B =$$
$$= \omega^2_{\operatorname{rot} A} \wedge \omega^1_B - \omega^1_A \wedge \omega^2_{\operatorname{rot} B} = \omega^3_{B\cdot \operatorname{rot} A} - \omega^3_{A\cdot \operatorname{rot} B} = \omega^3_{B\cdot\operatorname{rot} A - A\cdot\operatorname{rot} B}.$$

Аналогично проверяются и первые два соотношения. Разумеется, проверку всех этих равенств можно осуществить и непосредственным дифференцированием в координатах. ▶

Если учесть, что $d^2\omega = 0$ для любой формы ω, то можно также утверждать, что справедливы равенства

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0, \tag{20}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} A = 0. \tag{21}$$

◀ Действительно:

$$\omega^2_{\operatorname{rot}\operatorname{grad} f} = d\omega^1_{\operatorname{grad} f} = d\,(d\omega^0_f) = d^2\omega^0_f = 0,$$

$$\omega^3_{\operatorname{div}\operatorname{rot} A} = d\omega^2_{\operatorname{rot} A} = d\,(d\omega^1_A) = d^2\omega^1_A = 0. \ ▶$$

В формулах (17) — (19) операторы grad, rot, div применяются однократно, в то время как в (20) и (21) рассматриваются операции второго порядка, получающиеся последовательным выполнением каких-то двух из трех исходных операций. Кроме приведенных в (20) и (21), можно рассмотреть также следующие парные комбинации этих операторов:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} A, \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot} A, \quad \operatorname{div}\operatorname{grad} f \tag{22}$$

Оператор div grad применяется, как видно, к скалярному полю. Этот оператор обозначают буквой Δ («дельта») и называют *оператором Лапласа* *) или *лапласианом*.

Из формул (9′), (11′) следует, что в декартовых координатах

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^3)^2}. \tag{23}$$

Поскольку оператор Δ действует на числовые функции, его можно применять покомпонентно к координатам векторных полей $A = e_1A^1 + e_2A^2 + e_3A^3$. В этом смысле

$$\Delta A = e_1\,\Delta A^1 + e_2\,\Delta A^2 + e_3\,\Delta A^3$$

С учетом последнего соглашения, для тройки операторов второго порядка (22) можно выписать следующее соотношение:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} A = \operatorname{grad}\operatorname{div} A - \Delta A, \tag{24}$$

на доказательстве которого мы не останавливаемся (см. задачу 2).

Используя язык векторной алгебры и формулы (14) — (16), все операторы второго порядка (20) — (22) можно записать через оператор Гамильтона ∇:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \nabla\times\nabla f = 0,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} A = \nabla\cdot(\nabla\times A) = 0,$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} A = \nabla\,(\nabla\cdot A),$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} A = \nabla\times(\nabla\times A),$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla\cdot\nabla f$$

---

*) П. С. Лаплас (1749—1827) — знаменитый французский астроном, математик и физик; внес фундаментальный вклад в развитие небесной механики, математической теории вероятностей, экспериментальной и математической физики

С точки зрения векторной алгебры обращение в нуль первых двух из этих операторов представляется вполне естественным.

Последнее равенство означает, что между оператором Гамильтона ∇ и лапласианом Δ имеется простая связь:

$$\Delta = \nabla^2.$$

***5. Векторные операции в криволинейных координатах.**

а. Подобно тому, как, например, сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$ имеет особенно простое уравнение $R=a$ в сферических координатах, векторные поля $x \longmapsto A(x)$ в $\mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^n$) часто приобретают наиболее простую запись в системе координат, отличной от декартовой. Поэтому мы хотим теперь найти явные формулы, по которым можно было бы находить grad, rot и div в достаточно широком классе криволинейных координат.

Но прежде надо уточнить, что понимается под координатной записью поля A в той или иной системе криволинейных координат.

Начнем с двух наводящих примеров описательного характера.

Пример 3. Пусть на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ фиксированы декартовы координаты x^1, x^2. Когда мы говорим, что в $\mathbb{R}^2$ задано векторное поле $(A^1, A^2)(x)$, то мы имеем в виду, что с каждой точкой $x=(x^1, x^2)\in\mathbb{R}^2$ связан некоторый вектор $A(x)\in T\mathbb{R}^2_x$, который в базисе пространства $T\mathbb{R}^2_x$, состоящем из ортов $e_1(x)$, $e_2(x)$ координатных направлений, имеет разложение $A(x)=A^1(x)e_1(x)+ A^2(x)e_2(x)$ (рис. 91).

В данном случае базис $\{e_1(x), e_2(x)\}$ пространства $T\mathbb{R}^2_x$, по существу, не зависит от точки x.

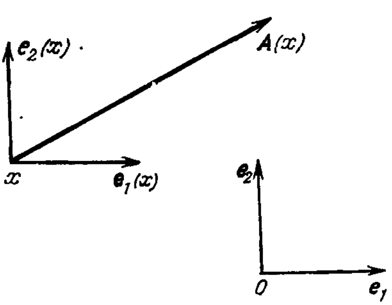

Рис 91

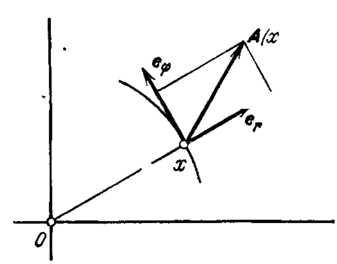

Рис. 92

Пример 4. В случае, когда в той же плоскости $\mathbb{R}^2$ задается полярная система координат (r, φ), с каждой точкой $x\in\mathbb{R}^2\setminus 0$ тоже можно связать орты $e_1(x)=e_r(x)$, $e_2(x)=e_\varphi(x)$ (рис. 92) координатных направлений. Они тоже образуют базис в $T\mathbb{R}^2_x$, по которому можно разложить связанный с точкой x вектор $A(x)$ поля A: $A(x)=A^1(x)e_1(x)+A^2(x)e_2(x)$. Тогда упорядоченную пару функций $(A^1, A^2)(x)$ естественно считать записью поля A в полярной системе координат.

Так, если $(A^1, A^2)(x) \equiv (1, 0)$, то это поле единичных векторов в $\mathbb{R}^2$, идущих в радиальном направлении в сторону от центра 0.

Поле $(A^1, A^2)(x) \equiv (0, 1)$ получается из предыдущего поля поворотом каждого его вектора против часовой стрелки на угол $\pi/2$.

Это не постоянные поля в $\mathbb{R}^2$, хотя компоненты их координатного представления постоянны. Дело все в том, что базис, по которому идет разложение, синхронно с вектором поля меняется при переходе от точки к точке.

Ясно, что компоненты координатного представления этих полей в декартовых координатах вовсе не были бы постоянными. С другой стороны, действительно постоянное поле (состоящее из параллельно разнесенного по точкам плоскости вектора), которое в декартовых координатах имеет постоянные компоненты, в полярных координатах имело бы переменные компоненты.

b. После этих наводящих соображений рассмотрим вопрос о задании векторных полей в криволинейных системах координат более формально.

Прежде всего напомним, что система криволинейных координат t^1, t^2, t^3 в области $D \subset \mathbb{R}^3$ — это диффеоморфизм $\varphi\colon D_t \to D$ области D_t евклидова пространства параметров $\mathbb{R}^3_t$ на область D, в результате которого каждая точка $x = \varphi(t) \in D$ приобретает декартовы координаты t^1, t^2, t^3 соответствующей точки $t \in D_t$.

Поскольку φ — диффеоморфизм, касательное отображение $\varphi'(t)\colon T\mathbb{R}^3_t \to T\mathbb{R}^3_{x=\varphi(t)}$ является изоморфизмом векторных пространств. Каноническому базису $\xi_1(t) = (1, 0, 0)$, $\xi_2(t) = (0, 1, 0)$, $\xi_3(t) = (0, 0, 1)$ пространства $T\mathbb{R}^3_t$ отвечает базис пространства $T\mathbb{R}^3_{x=\varphi(t)}$, состоящий из векторов $\xi_i(x) = \varphi'(t)\,\xi_i(t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t^i}$, $i = 1, 2, 3$, координатных направлений. Разложению $A(x) = \alpha_1\xi_1(x) + \alpha_2\xi_2(x) + \alpha_3\xi_3(x)$ любого вектора $A(x) \in T\mathbb{R}^3_x$ по этому базису отвечает такое же разложение $A(t) = \alpha_1\xi_1(t) + \alpha_2\xi_2(t) + \alpha_3\xi_3(t)$ (с теми же компонентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$!) вектора $A(t) = (\varphi')^{-1}A(x)$ по каноническому базису $\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$ в $T\mathbb{R}^3_t$. При отсутствии евклидовой структуры в $\mathbb{R}^3$ числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ составили бы наиболее естественную координатную запись вектора $A(x)$, связанную с рассматриваемой системой криволинейных координат.

c. Однако принятие такого координатного представления не вполне соответствовало бы тому, о чем мы договорились в примере 4. Дело в том, что базис $\xi_1(x), \xi_2(x), \xi_3(x)$ пространства $T\mathbb{R}^3_x$, соответствующий каноническому базису $\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$ в $T\mathbb{R}^3_t$, хотя и состоит из векторов координатных направлений, вовсе не обязан состоять из **ортов** этих направлений, т. е., вообще говоря, $\langle\xi_i, \xi_i\rangle(x) \neq 1$.

Теперь мы учтем это обстоятельство, связанное с наличием структуры евклидова пространства в $\mathbb{R}^3$ и, следовательно, в каждом векторном пространстве $T\mathbb{R}^3_x$.

Благодаря изоморфизму $\varphi'(t)$: $T\mathbb{R}^3_t \to T\mathbb{R}^3_{x=\varphi(t)}$ в $T\mathbb{R}^3_t$ можно перенести евклидову структуру пространства $T\mathbb{R}^3_x$, положив для любой пары векторов $\tau_1, \tau_2 \in T\mathbb{R}^3_t$ $\langle\tau_1, \tau_2\rangle := \langle\varphi'\tau_1, \varphi'\tau_2\rangle$. В частности для квадрата длины вектора отсюда получается следующее выражение:

$$\langle\tau, \tau\rangle = \langle\varphi'(t)\tau, \varphi'(t)\tau\rangle = \left\langle\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t^i}\tau^i, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t^j}\tau^j\right\rangle =$$
$$= \left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial t^i}, \frac{\partial\varphi}{\partial t^j}\right\rangle(t)\tau^i\tau^j = \langle\xi_i, \xi_j\rangle(t)\tau^i, \tau^j = g_{ij}(t)\,dt^i(\tau)\,dt^j(\tau).$$

Квадратичная форма

$$ds^2 = g_{ij}(t)\,dt^i\,dt^j, \tag{25}$$

коэффициенты которой суть попарные скалярные произведения векторов канонического базиса, вполне определяет скалярное произведение в $T\mathbb{R}^3_t$. Если такая форма задана в каждой точке некоторой области $D_t \subset \mathbb{R}^3_t$, то, как известно из геометрии, говорят, что в этой области задана *риманова метрика*. Риманова метрика позволяет, оставаясь в прямолинейных координатах t^1, t^2, t^3 пространства $\mathbb{R}^3_t$, в каждом касательном пространстве $T\mathbb{R}^3_t$ $(t \in D_t)$ ввести свою евклидову структуру, что соответствует «кривому» вложению φ: $D_t \to D$ области D_t в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$.

Если векторы $\xi_i(x) = \varphi'(t)\,\xi_i(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t^i}(t)$, $i = 1, 2, 3$, ортогональны в $T\mathbb{R}^3_x$, то $g_{ij}(t) = 0$ при $i \neq j$. Это значит, что мы имеем дело с *триортогональной сеткой координат*. В терминах пространства $T\mathbb{R}^3_t$ это означает, что векторы $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, канонического базиса взаимно ортогональны в смысле определяемого квадратичной формой (25) скалярного произведения в $T\mathbb{R}^3_t$. Дальше мы будем рассматривать для простоты только триортогональные системы криволинейных координат. Для них, как было отмечено, квадратичная форма (25) имеет следующий специальный вид:

$$ds^2 = E_1(t)(dt^1)^2 + E_2(t)(dt^2)^2 + E_3(t)(dt^3)^2, \tag{26}$$

где $E_i(t) = g_{ii}(t)$, $i = 1, 2, 3$.

Пример 5. В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ квадратичная форма (25) имеет соответственно вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \tag{26'}$$
$$= dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + dz^2 = \tag{26''}$$
$$= dR^2 + R^2\cos^2\theta\,d\varphi^2 + R^2\,d\theta^2. \tag{26'''}$$

Таким образом, каждая из этих систем является триортогональной системой координат в области своего определения.

Векторы $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ канонического базиса $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ в $T\mathbb{R}^3_t$, как и отвечающие им векторы $\xi_i(x) \in T\mathbb{R}^3_x$, имеют следующую норму *): $|\xi_i| = \sqrt{g_{ii}}$. Значит, орты (единичные в смысле скалярного квадрата векторы) координатных направлений имеют для триортогональной системы (26) следующее координатное представление в $T\mathbb{R}^3_t$:

$$e_1(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}, 0, 0\right), \quad e_2(t) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{E_2}}, 0\right), \quad e_3(t) = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{E_3}}\right). \tag{27}$$

Пример 6. Из формул (27) и результатов примера 5 вытекает, что для декартовых, цилиндрических и сферических координат тройки ортов координатных направлений имеют соответственно следующий вид:

$$e_x = (1, 0, 0), \quad e_y = (0, 1, 0), \quad e_z = (0, 0, 1); \tag{27'}$$

$$e_r = (1, 0, 0), \quad e_\varphi = \left(0, \frac{1}{r}, 0\right), \quad e_z = (0, 0, 1); \tag{27''}$$

$$e_R = (1, 0, 0), \quad e_\varphi = \left(0, \frac{1}{R\cos\theta}, 0\right), \quad e_\theta = \left(0, 0, \frac{1}{R}\right). \tag{27'''}$$

Разобранные выше примеры 3, 4 подразумевали, что вектор поля раскладывается по базису, состоящему из ортов координатных направлений. Значит, отвечающий вектору $A(x) \in T\mathbb{R}^3_x$ поля вектор $A(t) \in T\mathbb{R}^3_t$ следует раскладывать не по каноническому базису $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$, а по базису $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$, состоящему из ортов координатных направлений.

Таким образом, отвлекаясь от исходного пространства $\mathbb{R}^3$, можно считать, что в области $D_t \subset \mathbb{R}^3_t$ задана риманова метрика (25) или (26) и векторное поле $t \mapsto A(t)$, координатное представление $(A^1, A^2, A^3)(t)$ которого в каждой точке $t \in D_t$ получается разложением $A(t) = A^i(t)\, e_i(t)$ соответствующего этой точке вектора $A(t)$ поля по ортам координатных направлений.

d. Теперь разберемся с формами. Любая форма в D при диффеоморфизме $\varphi: D_t \to D$ автоматически переносится в область D_t. Этот перенос, как нам известно, происходит в каждой точке $x \in D$ из пространства $T\mathbb{R}^3_x$ в соответствующее пространство $T\mathbb{R}^3_t$. Поскольку мы перенесли в $T\mathbb{R}^3_t$ евклидову структуру из $T\mathbb{R}^3_x$, то из определения переноса векторов и форм следует, что, например, определенной в $T\mathbb{R}^3_x$ форме $\omega^1_A(x) = \langle A(x), \cdot\rangle$ соответствует точно такая же форма $\omega^1_A(t) = \langle A(t), \cdot\rangle$ в $T\mathbb{R}^3_t$, где $A(x) = \varphi'(t)\, A(t)$. Это же можно сказать и о формах вида ω^2_B, ω^3_ρ, не говоря уж о формах ω^0_f — функциях.

После сделанных разъяснений все дальнейшие рассмотрения уже можно ввести только в облáсти $D_t \subset \mathbb{R}^3_t$, отвлекаясь от исход-

---

*) В триортогональной системе (26) $|\xi_i| = \sqrt{E_i} = H_i$, $i = 1, 2, 3$. Величины H_1, H_2, H_3 обычно называют *коэффициентами* или *параметрами Ламе*.

Г. Ламе (1795—1870) — французский инженер, математик и физик.

ного пространства $\mathbb{R}^3$, считая, что в D_t задана риманова метрика (25), заданы скалярные поля f, ρ и векторные поля $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, а также формы ω_f^0, $\omega_{\boldsymbol{A}}^1$, $\omega_{\boldsymbol{B}}^2$, ω_ρ^3, которые в каждой точке $t \in D_t$ определяются в соответствии с евклидовой структурой в $T\mathbb{R}_t^3$, задаваемой римановой метрикой.

Пример 7. Форма объема dV в криволинейных координатах t^1, t^2, t^3, как мы знаем, имеет вид

$$dV = \sqrt{\det g_{ij}}\,(t)\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3.$$

Для триортогональной системы

$$dV = \sqrt{E_1E_2E_3}\,(t)\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3. \tag{28}$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах соответственно получаем

$$dV = dx \wedge dy \wedge dz = \tag{28'}$$

$$= r\, dr \wedge d\varphi \wedge dz = \tag{28''}$$

$$= R^2 \cos\theta\, dR \wedge d\varphi \wedge d\theta. \tag{28'''}$$

Сказанное позволяет записать форму $\omega_\rho^3 = \rho\, dV$ в различных системах криволинейных координат.

e. Наша основная (и теперь уже легко решаемая) задача состоит в том, чтобы, зная разложение $\boldsymbol{A}(t) = A^i(t)\, \boldsymbol{e}_i(t)$ вектора $\boldsymbol{A}(t) \in T\mathbb{R}_t^3$ по ортам $\boldsymbol{e}_i(t) \in T\mathbb{R}_t^3$, $i = 1, 2, 3$, триортогональной системы координат, определяемой римановой метрикой (26), найти разложение форм $\omega_{\boldsymbol{A}}^1(t)$ и $\omega_{\boldsymbol{A}}^2(t)$ по каноническим 1-формам dt^i и 2-формам $dt^i \wedge dt^j$ соответственно.

Поскольку все рассуждения будут относиться к любой, но фиксированной точке t, для сокращения записи мы позволим себе опускать символ t, отмечающий привязку рассматриваемых векторов и форм к касательному пространству в точке t.

Итак, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — базис в $T\mathbb{R}_t^3$, состоящий из ортов (27) координатных направлений; $\boldsymbol{A} = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$ — разложение вектора $\boldsymbol{A} \in T\mathbb{R}_t^3$ по этому базису.

Заметим прежде всего, что из формул (27) следует, что

$$dt^j(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{\sqrt{E_i}}\,\delta_i^j, \quad \text{где} \quad \delta_i^j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \tag{29}$$

$$dt^i \wedge dt^j(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) = \frac{1}{\sqrt{E_iE_j}}\,\delta_{kl}^{ij}, \quad \text{где} \quad \delta_{kl}^{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } (i, j) \neq (k, l), \\ 1, & \text{если } (i, j) = (k, l). \end{cases} \tag{30}$$

f. Таким образом, если $\omega_{\boldsymbol{A}}^1 := \langle \boldsymbol{A}, \cdot\rangle = a_1\, dt^1 + a_2\, dt^2 + a_3\, dt^3$, то, с одной стороны,

$$\omega_{\boldsymbol{A}}^1(\boldsymbol{e}_i) = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_i\rangle = A^i,$$

а с другой стороны, как видно из (29),

$$\omega_{\boldsymbol{A}}^1(\boldsymbol{e}_i) = (a_1\, dt^1 + a_2\, dt^2 + a_3\, dt^3)(\boldsymbol{e}_i) = a_i \cdot \frac{1}{\sqrt{E_i}}.$$

Следовательно, $a_i = A^i\sqrt{E_i}$, и мы нашли разложение

$$\omega^1_A = A^1\sqrt{E_1}\,dt^1 + A^2\sqrt{E_2}\,dt^2 + A^3\sqrt{E_3}\,dt^3 \tag{31}$$

формы ω^1_A, отвечающее разложению $A = A^1e_1 + A^2e_2 + A^3e_3$ вектора A.

Пример 8. Поскольку в декартовых, сферических и цилиндрических координатах соответственно

$$\begin{aligned} A &= A_xe_x + A_ye_y + A_ze_z = \\ &= A_re_r + A_\varphi e_\varphi + A_ze_z = \\ &= A_Re_R + A_\varphi e_\varphi + A_\theta e_\theta, \end{aligned}$$

то, как следует из результатов примера 6,

$$\omega^1_A = A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz = \tag{31'}$$
$$= A_r\,dr + A_\varphi r\,d\varphi + A_z\,dz = \tag{31''}$$
$$= A_R\,dR + A_\varphi R\cos\theta\,d\varphi + A_\theta R\,d\theta. \tag{31'''}$$

g. Пусть теперь $B = B^1e_1 + B^2e_2 + B^3e_3$, а $\omega^2_B = b_1\,dt^2\wedge dt^3 + b_2\,dt^3\wedge dt^1 + b_3\,dt^1\wedge dt^2$. Тогда, с одной стороны,

$$\omega^2_B(e_2, e_3) := dV(B_1, e_2, e_3) = \sum_{i=1}^{3} B^i\,dV(e_i, e_2, e_3) = B^1\cdot(e_1, e_2, e_3) = B^1,$$

где dV — форма объема в $T\mathbb{R}^3_t$ (см. (28) и (27)).

С другой стороны, из (30) получаем

$$\omega^2_B(e_2, e_3) = (b_1\,dt^2\wedge dt^3 + b_2\,dt^3\wedge dt^1 + b_3\,dt^1\wedge dt^2)(e_2, e_3) = b_1\,dt^2\wedge dt^3(e_2, e_3) = \frac{b_1}{\sqrt{E_2E_3}}.$$

Сравнивая результаты, заключаем, что $b_1 = B^1\sqrt{E_2E_3}$. Аналогично, убеждаемся в том, что $b_2 = B^2\sqrt{E_1E_3}$ и $b_3 = B^3\sqrt{E_1E_2}$.

Таким образом, мы нашли координатное представление

$$\omega^2_B = B^1\sqrt{E_2E_3}\,dt^2\wedge dt^3 + B^2\sqrt{E_3E_1}\,dt^3\wedge dt^1 + B^3\sqrt{E_1E_2}\,dt^1\wedge dt^2 = \sqrt{E_1E_2E_3}\left(\frac{B^1}{\sqrt{E_1}}dt^2\wedge dt^3 + \frac{B^2}{\sqrt{E_2}}dt^3\wedge dt^1 + \frac{B^3}{\sqrt{E}}dt^1\wedge dt^2\right)$$

формы ω^2_B, отвечающей вектору $B = B^1e_1 + B^2e_2 + B^3e_3$.

Пример 9. Используя обозначения, введенные в примере 8, и формулы (26′), (26″), (26‴), в декартовых, цилиндрических и сферических координатах получаем соответственно

$$\omega^2_B = B_x\,dy\wedge dz + B_y\,dz\wedge dx + B_z\,dx\wedge dy = \tag{32'}$$
$$= B_r r\,d\varphi\wedge dz + B_\varphi\,dz\wedge dr + B_z r\,dr\wedge d\varphi = \tag{32''}$$
$$= B_R R^2\cos\theta\,d\varphi\wedge d\theta + B_\varphi R\,d\theta\wedge dR + B_\theta R\cos\theta\,dR\wedge d\varphi. \tag{32'''}$$

h. Добавим еще, что на основании формулы (28) можно написать, что

$$\omega_\rho^3 = \rho\sqrt{E_1E_2E_3}\,dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3. \tag{33}$$

Пример 10. В частности, для декартовых, цилиндрических и сферических координат формула (33) имеет соответственно следующий вид:

$$\omega_\rho^3 = \rho\, dx \wedge dy \wedge dz = \tag{33'}$$

$$= \rho r\, dr \wedge d\varphi \wedge dz = \tag{33''}$$

$$= \rho R^2 \cos\theta\, dR \wedge d\varphi \wedge d\theta. \tag{33'''}$$

Теперь, когда получены формулы (31) — (33), легко, исходя из определений (9) — (11) операторов grad, rot и div, найти их координатное представление в триортогональной системе криволинейных координат.

Пусть $\operatorname{grad} f = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$. Опираясь на определения, запишем

$$\omega^1_{\operatorname{grad} f} := d\omega_f^0 := df := \frac{\partial f}{\partial t^1}dt^1 + \frac{\partial f}{\partial t^2}dt^2 + \frac{\partial f}{\partial t^3}dt^3.$$

На основании формулы (31) отсюда заключаем, что

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial f}{\partial t^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}}\frac{\partial f}{\partial t^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}}\frac{\partial f}{\partial t^3}\boldsymbol{e}_3. \tag{34}$$

Пример 11. В декартовых, полярных и сферических координатах соответственно

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z = \tag{34'}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z = \tag{34''}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial R}\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{R\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{R^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta. \tag{34'''}$$

Пусть задано поле $\boldsymbol{A}(t) = (A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3)(t)$. Найдем координаты B^1, B^2, B^3 поля $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{B}(t) = (B^1\boldsymbol{e}_1 + B^2\boldsymbol{e}_2 + B^3\boldsymbol{e}_3)(t)$.

Исходя из определения (10) и формулы (31), получаем

$$\omega^2_{\operatorname{rot} \boldsymbol{A}} := d\omega^1_{\boldsymbol{A}} = d\left(A^2\sqrt{E_1}\,dt^1 + A^2\sqrt{E_2}\,dt^2 + A^3\sqrt{E_3}\,dt^3\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^2} - \frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^3}\right)dt^2 \wedge dt^3 +$$

$$+ \left(\frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^3} - \frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^1}\right)dt^3 \wedge dt^1 + \left(\frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^1} - \frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^2}\right)dt^1 \wedge dt^2.$$

На основании соотношения (32) теперь заключаем, что

$$B^1=\frac{1}{\sqrt{E_2E_3}}\left(\frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^2}-\frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^3}\right),$$

$$B^2=\frac{1}{\sqrt{E_3E_1}}\left(\frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^3}-\frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^1}\right),$$

$$B^3=\frac{1}{\sqrt{E_1E_2}}\left(\frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^1}-\frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^2}\right),$$

т. е.

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\begin{vmatrix}\sqrt{E_1}\,\boldsymbol{e}_1 & \sqrt{E_2}\,\boldsymbol{e}_2 & \sqrt{E_3}\,\boldsymbol{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial t^1} & \frac{\partial}{\partial t^2} & \frac{\partial}{\partial t^3}\\ \sqrt{E_1}\,A^1 & \sqrt{E_2}\,A^2 & \sqrt{E_3}\,A^3\end{vmatrix}. \tag{35}$$

Пример 12. В декартовых, цилиндрических и сферических координатах соответственно

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z= \tag{35'}$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial rA_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\varphi}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z= \tag{35''}$$

$$=\frac{1}{R\cos\theta}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}-\frac{\partial A_\varphi\cos\theta}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_R+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial A_R}{\partial \theta}-\frac{\partial RA_\theta}{\partial R}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+$$
$$+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial RA_\varphi}{\partial R}-\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial A_R}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_\theta. \tag{35'''}$$

i. Пусть теперь задано поле $\boldsymbol{B}(t)=(B^1\boldsymbol{e}_1+B^2\boldsymbol{e}_2+B^3\boldsymbol{e}_3)(t)$. Найдем выражение для $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$.

Исходя из определения (11) и формулы (32), получаем

$$\omega^3_{\operatorname{div}\boldsymbol{B}}:=d\omega^2_{\boldsymbol{B}}=d\big(B^1\sqrt{E_2E_3}\,dt^2\wedge dt^3+$$
$$+B^2\sqrt{E_3E_1}\,dt^3\wedge dt^1+B^3\sqrt{E_1E_2}\,dt^1\wedge dt^2\big)=$$
$$=\left(\frac{\partial\sqrt{E_2E_3}\,B^1}{\partial t^1}+\frac{\partial\sqrt{E_3E_1}\,B^2}{\partial t^2}+\frac{\partial\sqrt{E_1E_2}\,B^3}{\partial t^3}\right)dt^1\wedge dt^2\wedge dt^3.$$

На основании формулы (33) теперь заключаем, что

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=\frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\left(\frac{\partial\sqrt{E_2E_3}\,B^1}{\partial t^1}+\frac{\partial\sqrt{E_3E_1}\,B^2}{\partial t^2}+\frac{\partial\sqrt{E_1E_2}\,B^3}{\partial t^3}\right). \tag{36}$$

В декартовых, цилиндрических и сферических координатах отсюда соответственно получаем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}= \tag{36'}$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r\,B_r}{\partial r}+\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial B_z}{\partial z}= \tag{36''}$$

$$=\frac{1}{R^2\cos\theta}\left(\frac{\partial R^2\cos\theta B_R}{\partial R}+\frac{\partial RB_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial R\cos\theta B_\theta}{\partial \theta}\right). \tag{36'''}$$

j. Соотношения (34), (36) можно использовать для получения записи оператора Лапласа $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ в произвольной триортогональной системе координат:

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{div}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial f}{\partial t^1}e_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}}\frac{\partial f}{\partial t^2}e_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}}\frac{\partial f}{\partial t^3}e_3\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\left(\frac{\partial}{\partial t^1}\left(\sqrt{\frac{E_2E_3}{E_1}}\frac{\partial f}{\partial t^1}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial t^2}\left(\sqrt{\frac{E_3E_1}{E_2}}\frac{\partial f}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial t^3}\left(\sqrt{\frac{E_1E_2}{E_3}}\frac{\partial f}{\partial t^2}\right)\right). \tag{37}$$

Пример 13. В частности, для декартовых, полярных и сферических координат из (37) получаем соответственно

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \tag{37'}$$
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \tag{37''}$$
$$= \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial f}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right). \tag{37'''}$$

Задачи и упражнения

1. Операторы grad, rot, div и алгебраические операции.

Проверьте следующие соотношения:

для grad:

a. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$,

b. $\nabla(f\cdot g) = f\nabla g + g\nabla f$,

c. $\nabla(A\cdot B) = (B\cdot\nabla)A + (A\cdot\nabla)B + B\times(\nabla\times A) + A\times(\nabla\times B)$,

d. $\nabla\left(\frac{1}{2}A^2\right) = (A\cdot\nabla)A + A\times(\nabla\times A)$;

для rot:

e. $\nabla\times(fA) = f\nabla\times A + \nabla f\times A$,

f. $\nabla\times(A\times B) = (B\cdot\nabla)A - (A\cdot\nabla)B + (\nabla\cdot B)A - (\nabla\cdot A)B$;

для div:

g. $\nabla\cdot(fA) = \nabla f\cdot A + f\nabla\cdot A$,

h. $\nabla\cdot(A\times B) = B\cdot(\nabla\times A) - A\cdot(\nabla\times B)$

и перепишите их в символах grad, rot, div.

(Указания. $A\cdot\nabla = A^1\frac{\partial}{\partial x^1} + A^2\frac{\partial}{\partial x^2} + A^3\frac{\partial}{\partial x^3}$; $B\cdot\nabla \neq \nabla\cdot B$; $A\times(B\times C) = B(A\cdot C) - (A\cdot C)C$).

2. a. Запишите в декартовых координатах операторы (20)—(22).

b. Проверьте прямым вычислением соотношения (20), (21).

c. Проверьте формулу (24)

d Запишите формулу (24) через оператор ∇ и докажите ее, используя формулы векторной алгебры

3. Из рассмотренной в примере 2 системы уравнений Максвелла выведите, что $\nabla\cdot j = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$.

4. a. Укажите параметры Ламе H_1, H_2, H_3 декартовых, цилиндрических и сферических координат в $\mathbb{R}^3$.

b. Перепишите формулы (28), (34)—(37), используя параметры Ламе.

5. Поле $A=\operatorname{grad}\frac{1}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, запишите в

a) декартовых координатах x, y, z;
b) цилиндрических координатах;
c) сферических координатах.
d) Найдите $\operatorname{rot} A$ и $\operatorname{div} A$,

6. В цилиндрических координатах (r, φ, z) функция f имеет вид $\ln\frac{1}{r}$. Запишите поле $A=\operatorname{grad} f$ в

a) декартовых координатах;
b) цилиндрических координатах;
c) сферических координатах.
d: Найдите $\operatorname{rot} A$ и $\operatorname{div} A$.

7. Напишите формулы преобразования координат в фиксированном касательном пространстве $T\mathbb{R}^3_p$, $p\in\mathbb{R}^3$, при переходе от декартовой системы координат в $\mathbb{R}^3$ к

a) цилиндрическим координатам;
b) сферическим координатам;
c) произвольной триортогональной системе криволинейных координат.
d Применяя полученные в c формулы и формулы (34)—(37), проверьте непосредственно инвариантность векторных полей $\operatorname{grad} A$, $\operatorname{rot} A$ и величин $\operatorname{div} A$, Δf относительно выбора системы координат, в которой происходило их вычисление

8. Пространство $\mathbb{R}^3$, как твердое тело, вращается вокруг некоторой оси с постоянной угловой скоростью ω Пусть $\boldsymbol{v}$ — поле линейных скоростей точек в фиксированный момент времени

a Запишите поле $\boldsymbol{v}$ в соответствующих цилиндрических координатах.
b. Найдите $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$.
c. Укажите, как направлено поле $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ по отношению к оси вращения.
d. Проверьте, что $|\operatorname{rot}\boldsymbol{v}|=2\omega$ в любой точке пространства.
e. Истолкуйте геометрический смысл $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ и геометрический смысл обнаруженного в d постоянства этого вектора во всех точках пространства.

§ 2. Интегральные формулы теории поля

1. Классические интегральные формулы в векторных обозначениях

a. Векторная запись форм ω^1_A, ω^2_B. В предыдущей главе мы уже отметили (см. там § 2, формулы (23), (24)), что сужение формы ω^1_F работы поля F на ориентированную гладкую кривую (путь) γ или сужение формы ω^2_V потока поля V на ориентированную поверхность S можно записать соответственно в следующем виде:

$$\omega^1_F|_\gamma=\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{e}\rangle\, ds, \quad \omega^2_V|_S=\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}\rangle\, d\sigma,$$

где $\boldsymbol{e}$ — ориентирующий γ единичный вектор, сонаправленный с вектором скорости движения вдоль γ, ds — элемент (форма) длины на γ, $\boldsymbol{n}$ — ориентирующий поверхность S вектор единичной нормали к поверхности, а $d\sigma$ — элемент (форма) площади на поверхности S.

В векторном анализе часто используют векторный элемент длины кривой $d\boldsymbol{s}:=\boldsymbol{e}\,ds$ и векторный элемент площади поверхности $d\boldsymbol{\sigma}:=\boldsymbol{n}\,d\sigma$. Используя эти обозначения, можем теперь писать:

$$\omega_A^1|_\gamma = \langle A,\ e\rangle ds = \langle A,\ ds\rangle = A\ ds, \tag{1}$$

$$\omega_B^2|_S = \langle B,\ n\rangle d\sigma = \langle B,\ d\sigma\rangle = B\cdot d\sigma. \tag{2}$$

b. Формула Ньютона — Лейбница. Пусть $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$ а γ: $[a, b] \to D$ — путь в области D.

В применении к 0-форме ω_f^0 формула Стокса

$$\int_{\partial\gamma} \omega_f^0 = \int_\gamma d\omega_f^0,$$

с одной стороны, означает равенство

$$\int_{\partial\gamma} f = \int_\gamma df,$$

что совпадает с классической формулой

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b df(\gamma(t))$$

Ньютона — Лейбница, а с другой стороны, по определению градиента она означает, что

$$\int_{\partial\gamma} \omega_f^0 = \int_\gamma \omega_{\operatorname{grad} f}^1. \tag{3}$$

Таким образом, используя соотношения (1), формулу Ньютона — Лейбница можно переписать в виде

$$\boxed{f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_\gamma (\operatorname{grad} f)\cdot ds.} \tag{3'}$$

В такой записи она означает, что

приращение функции на пути равно работе на этом пути поля градиента этой функции.

Это довольно удобная и информативная запись. Кроме очевидного вывода о том, что работа поля $\operatorname{grad} f$ вдоль пути γ зависит только от начала и конца пути, формула позволяет сделать и несколько более тонкое наблюдение. А именно, движение по поверхности $f = c$ уровня функции f происходит без совершения работы полем $\operatorname{grad} f$, поскольку в этом случае $\operatorname{grad} f\ ds = 0$. Далее, как показывает левая часть формулы, работа поля $\operatorname{grad} f$ зависит даже не столько от начала и конца пути, сколько от того, на каких поверхностях уровня функции f лежат эти точки.

c. Формула Стокса. Напомним, что работа поля на замкнутом пути называется *циркуляцией поля на* этом *пути*.

Чтобы отметить, что интеграл берется по замкнутому пути, вместо традиционного обозначения $\int_\gamma F\ ds$ часто пишут $\oint_\gamma F\cdot ds$.

Если γ — кривая на плоскости, то иногда употребляют еще и символы $\oint\limits_{\gamma}$, $\oint\limits_{\gamma}$, в которых указано направление движения по кривой γ.

Термин циркуляция употребляется и тогда, когда речь идет об интеграле по некоторому конечному набору замкнутых путей. Например, таковым может служить интеграл по краю некоторой компактной поверхности с краем.

Пусть A — гладкое векторное поле в области D ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, а S — (кусочно) гладкая ориентированная компактная поверхность с краем в области D. В применении к 1-форме ω_A^1, с учетом определения ротора векторного поля, формула Стокса означает равенство

$$\int\limits_{\partial S} \omega_A^1 = \int\limits_{S} \omega_{\operatorname{rot} A}^2. \tag{4}$$

Используя соотношения (2), формулу (4) можно переписать в виде классической формулы Стокса

$$\boxed{\oint\limits_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint\limits_{S} (\operatorname{rot} \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}.} \tag{4'}$$

В такой записи она означает, что

циркуляция векторного поля на границе поверхности равна потоку ротора этого поля через саму поверхность.

Как всегда, при этом на ∂S выбирается ориентация, согласованная с ориентацией S.

d. Формула Гаусса — Остроградского. Пусть V — компактная область ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, ограниченная (кусочно) гладкой поверхностью ∂V — краем V. Если $\boldsymbol{B}$ — гладкое поле в V, то в соответствии с определением дивергенции поля формула Стокса дает равенство

$$\int\limits_{\partial V} \omega_B^2 = \int\limits_{V} \omega_{\operatorname{div} B}^3. \tag{5}$$

Используя соотношение (2) и запись $\rho\, dV$ формы ω_ρ^3 через форму объема dV в $\mathbb{R}^3$, равенство (5) можно переписать в виде классической формулы Гаусса — Остроградского

$$\boxed{\iint\limits_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{B}\, dV.} \tag{5'}$$

В такой записи она означает, что

поток векторного поля через границу области равен интегралу от дивергенции этого поля по самой области.

е. Сводка классических интегральных формул. В итоге мы пришли к следующей векторной записи трех классических интегральных формул анализа:

$$\int_{\partial\gamma} f = \int_{\gamma} (\nabla f) \cdot d\boldsymbol{s} \quad \text{(формула Ньютона — Лейбница)}, \tag{3''}$$

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{S} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad \text{(формула Стокса)}, \tag{4''}$$

$$\int_{V} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{V} (\nabla \cdot \boldsymbol{B})\, dV \quad \text{(формула Гаусса — Остроградского)}. \tag{5''}$$

2. Физическая интерпретация div, rot, grad.

а. Дивергенция. Формулу (5′) можно использовать для выяснения физического смысла величины $\operatorname{div} \boldsymbol{B}(x)$ — дивергенции векторного поля $\boldsymbol{B}$ в некоторой точке x области V задания поля. Пусть $V(x)$ — содержащаяся в V окрестность (например, шаровая) точки x. Объем этой окрестности позволим себе обозначать тем же символом $V(x)$, а ее диаметр буквой d.

Из формулы (5′) по теореме о среднем для тройного интеграла получаем

$$\iint_{\partial V(x)} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{div} \boldsymbol{B}(x')\, V(x),$$

где x' — некоторая точка окрестности $V(x)$. Если $d \to 0$, то $x' \to x$, а коль скоро $\boldsymbol{B}$ — гладкое поле, то и $\operatorname{div} \boldsymbol{B}(x') \to \operatorname{div} \boldsymbol{B}(x)$. Значит,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(x) = \lim_{d \to 0} \frac{\iint\limits_{\partial V(x)} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{V(x)}. \tag{6}$$

Будем считать $\boldsymbol{B}$ полем скоростей течения (жидкости или газа). Тогда поток поля через границу области $V(x)$ или, что то же самое, объемный расход среды через границу этой области, в силу закона сохранения массы возникает только за счет стоков или источников (в том числе связанных с изменением плотности среды) и равен суммарной интенсивности всех этих факторов, которые мы будем называть одним словом «источники» в области $V(x)$. Значит, дробь в правой части соотношения (6) есть средняя (отнесенная к единице объема) интенсивность источников в области $V(x)$, а предел этой величины, т. е. $\operatorname{div} \boldsymbol{B}(x)$ есть удельная (отнесенная к единице объема) интенсивность источника в точке x. Но предел отношения общего количества некоторой величины в области $V(x)$ к объему этой области, когда $d \to 0$, принято называть *плотностью этой величины* в точке x, а плотность как функцию точки обычно называют *плотностью распределения* данной *величины* в той или иной части пространства.

Таким образом, дивергенцию $\operatorname{div} \boldsymbol{B}$ векторного поля $\boldsymbol{B}$ можно интерпретировать как плотность распределения источников в области течения, т. е. в области задания поля $\boldsymbol{B}$.

Пример 1. Если, в частности, $\operatorname{div} \boldsymbol{B} \equiv 0$, т. е. никаких источников нет, то поток через границу любой области должен бы быть нулевым: сколько втекает в область — столько из нее и вытекает. И, как показывает формула (5′), это действительно так.

Пример 2. Точечный электрический заряд величины q создает в пространстве электрическое поле. Пусть этот заряд помещен в начало координат. По *закону Кулона* *) напряженность $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x)$ поля в точке $x \in \mathbb{R}^3$ (т. е. сила, действующая на пробный единичный заряд в точке x) представляется в виде

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3},$$

где ε_0 — размерная постоянная, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки x.

Поле $\boldsymbol{E}$ определено всюду вне начала координат. В сферических координатах $\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\boldsymbol{e}_R$, поэтому из формулы (36‴) предыдущего параграфа сразу видно, что $\operatorname{div} \boldsymbol{E}=0$ всюду в области определения поля $\boldsymbol{E}$.

Значит, если взять любую область V, не содержащую начала координат, то в силу формулы (5′) поток поля $\boldsymbol{E}$ через границу ∂V области V окажется нулевым.

Возьмем теперь сферу $S_R=\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x|=R\}$ радиуса R с центром в начале координат и найдем поток поля $\boldsymbol{E}$ через эту поверхность в сторону внешней (по отношению к ограничиваемому сферой шару) нормали. Поскольку вектор $\boldsymbol{e}_R$ как раз и является единичной внешней нормалью к сфере, то

$$\int\limits_{S_R} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\int\limits_{S_R}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\,d\sigma=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot 4\pi R^2=\frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Таким образом (с точностью до размерной константы ε_0, зависящей от выбора системы физических единиц), мы получили величину заряда, содержащегося в ограниченном сферой объеме.

Заметим, что в условиях разобранного примера 2 левая часть формулы (5′) корректно определена на сфере $\partial V=S_R$, а подынтегральная функция правой части определена и равна нулю всюду в шаре V, кроме всего лишь одной точки — начала координат. И тем не менее проведенные вычисления показывают, что интеграл в правой части формулы (5′) нельзя трактовать как интеграл от тождественного нуля

С формальной точки зрения можно было бы отмахнуться от разбора этой ситуации, сказав, что поле $\boldsymbol{E}$ не определеио в точке $0 \in V$, и потому мы не имеем права говорить о равенстве

---

*) Ш. О Кулон (1736—1806)—французскнй физик С помощью нзобретенных им же крутильных весов опытным путем открыл закон (Кулона) взаимодействия покоящихся зарядов и магнитных полюсов

(5′), доказанном для гладких, определенных во всей области V интегрирования полей. Однако физическая интерпретация равенства (5′) как закона сохранения массы подсказывает, что при правильной трактовке оно должно быть справедливо всегда.

Посмотрим внимательнее, в чем состояла неопределенность в начале координат величины $\operatorname{div}\boldsymbol{E}$ из примера 2. Формально в начале координат не определено и исходное поле $\boldsymbol{E}$, но, если искать $\operatorname{div}\boldsymbol{E}$, исходя из формулы (6), то, как показывает пример 2, надо было бы считать, что $\operatorname{div}\boldsymbol{E}(0)=+\infty$. Значит, под интегралом в правой части (5)оказалась бы «функция», равная нулю всюду, кроме одной точки, где она равна бесконечности. Это соответствует тому, что вне начала координат вообще нет зарядов, а весь заряд q мы умудрились поместить в нулевой объем — в одну точку O, в которой плотность заряда, естественно, стала бесконечной. Мы сталкиваемся здесь с так называемой δ (дельта)-функцией Дирака *).

Плотности физических величин в конечном счете нужны, чтобы, взяв от них интеграл, найти значения самих величин Поэтому нет нужды определять отдельно δ-функцию как функцию точки, важнее определить интеграл от нее. Если считать, что физически «функция» $\delta_{x_0}(x)=\delta(x_0;\ x)$ должна отвечать плотности такого распределения, например массы в пространстве, при котором вся масса, равная по величине единице, сосредоточена только в одной точке x_0, то естественно положить, что

$$\int\limits_V \delta(x_0;\ x)\,dV=\begin{cases}1, & \text{когда } x_0\in V,\\ 0, & \text{когда } x_0\notin V.\end{cases}$$

Таким образом, с точки зрения математической идеализации представлений о возможном распределении физической величины (массы, заряда, и т. п.) в пространстве, следует считать, что ее плотность распределения есть сумма обычной конечной функции, отвечающей непрерывному распределению величины в пространстве, и некоторого набора сингулярных «функций» (типа δ-функции Дирака), отвечающих сосредоточению величины в отдельных точках пространства.

Значит, с этих позиций результаты проведенных в примере 2 вычислений можно было бы выразить в виде одного равенства $\operatorname{div}\boldsymbol{E}(x)=\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(0;\ x)$. Тогда применительно к полю $\boldsymbol{E}$ интеграл в правой части соотношения (5′) действительно оказывается равным либо q/ε_0, либо 0 в зависимости от того, содержит ли область V начало координат (и сосредоточенный в нем заряд) или не содержит.

*) П. А. М. Дирак (1902)—английский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Подробнее о δ-функции Дирака будет сказано в гл. XVII, § 4, п. 4 и § 5, п. 4.

В этом смысле можно (вслед за Гауссом) утверждать, что поток напряженности электрического поля через поверхность тела равен (с точностью до коэффициента, зависящего от системы единиц) сумме электрических зарядов, содержащихся в теле. В этом же смысле надо трактовать плотность ρ распределения электрического заряда в системе уравнений Максвелла, рассмотренной в § 1 (формулы (12)).

b. Ротор. Рассмотрение физического смысла ротора векторного поля начнем со следующего примера.

Пример 3. Пусть все пространство, как твердое тело, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг фиксированной оси (пусть это ось Oz). Найдем ротор поля $\boldsymbol{v}$ линейных скоростей точек пространства (поле рассматривается в любой, но фиксированный момент времени).

В цилиндрических координатах (r, φ, z) поле $\boldsymbol{v}(r, \varphi, z)$ имеет простую запись: $\boldsymbol{v}(r, \varphi, z) = \omega r \boldsymbol{e}_\varphi$. Тогда по формуле (35″) из § 1 сразу находим, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\omega \boldsymbol{e}_z$. То есть $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ в данном случае является вектором, направленным вдоль оси вращения. Его величина 2ω с точностью до коэффициента совпадает с угловой скоростью вращения, а направление вектора, с учетом ориентации всего пространства $\mathbb{R}^3$, вполне определяет и направление вращения.

Описанное в примере 3 поле в малом напоминает поле скоростей жидкости у воронки (стока) или поле вихреобразного движения воздуха в области смерча (тоже сток, но вверх). Таким образом, ротор векторного поля в точке характеризует степень завихренности поля в окрестности этой точки.

Заметим, что циркуляция поля по замкнутому контуру меняется пропорционально изменению величины векторов поля и, как можно убедиться на том же примере 3, ее можно тоже использовать в качестве характеристики завихренности поля. Только теперь, чтобы вполне описать завихренность поля в окрестности точки, придется считать циркуляцию по контурам, лежащим в трех различных плоскостях. Реализуем сказанное.

Возьмем круг $S_i(x)$ с центром в точке x, лежащей в плоскости, перпендикулярной к направлению i-й координатной оси $i = 1, 2, 3$. Ориентируем $S_i(x)$ с помощью нормали, в качестве которой возьмем орт $\boldsymbol{e}_i$ этой координатной оси. Пусть d — диаметр $S_i(x)$. Из формулы (4) для гладкого поля $\boldsymbol{A}$ сразу получаем, что

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{e}_i = \lim_{d \to 0} \frac{\oint\limits_{\partial S_i(x)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}}{S_i(x)}, \tag{7}$$

где через $S_i(x)$ обозначена площадь рассматриваемого круга. Таким образом, отнесенная к единице площади циркуляции поля $\boldsymbol{A}$ на окружности S_i в плоскости, ортогональной i-й координатной оси, характеризует i-ю компоненту вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$.

Чтобы полнее уяснить себе смысл ротора векторного поля, вспомним, что любое линейное преобразование пространства есть композиция растяжений в трех взаимно ортогональных направлениях, переноса пространства как твердого тела и его вращения как твердого тела. При этом любое вращение можно реализовать как вращение вокруг некоторой оси. Любая гладкая деформация среды (течение жидкости или газа, оползание грунта, изгибание стального стержня) локально линейна. С учетом сказанного и примера 3 можно заключить, что если имеется векторное поле, описывающее движение среды (поле скоростей точек среды), то ротор этого поля в каждой точке дает мгновенную ось вращения окрестности точки, величину мгновенной угловой скорости и направление вращения вокруг мгновенной оси. То есть ротор полностью характеризует вращательную часть движения среды. Это будет несколько уточнено ниже, когда будет выяснено, что ротор следует рассматривать как некоторую плотность распределения локальных вращений среды.

с. Градиент. О градиенте скалярного поля, т. е. попросту о градиенте функции, мы в свое время уже довольно подробно говорили, поэтому здесь остается только напомнить главное.

Поскольку $\omega^1_{\operatorname{grad} f}(\xi) = \langle \operatorname{grad} f, \xi\rangle = df(\xi) = D_\xi f$, где $D_\xi f$ — производная функции f по вектору ξ, то вектор $\operatorname{grad} f$ ортогонален поверхностям уровня функции f, указывает в каждой точке направление наиболее быстрого роста значений функции, а его величина $|\operatorname{grad} f|$ дает скорость этого роста (относительно единицы длины, которой измеряются смещения в пространстве изменения аргумента).

О градиенте как плотности будет сказано ниже.

3. Некоторые дальнейшие интегральные формулы.

а. Векторные варианты формулы Гаусса — Остроградского. Истолкование ротора и градиента как некоторых плотностей, аналогичное истолкованию (6) дивергенции как плотности, можно получить из следующих классических формул векторного анализа, связанных с формулой Гаусса — Остроградского:

$$\int\limits_V \nabla\cdot \boldsymbol{B}\,dV = \int\limits_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma}\cdot \boldsymbol{B} \text{ (теорема о дивергенции)}, \tag{8}$$

$$\int\limits_V \nabla\times \boldsymbol{A}\,dV = \int\limits_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma}\times \boldsymbol{A} \text{ (теорема о роторе)}, \tag{9}$$

$$\int\limits_V \nabla f\,dV = \int\limits_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} f \text{ (теорема о градиенте)}. \tag{10}$$

Первое из этих трех соотношений с точностью до обозначений совпадает с равенством (5′) и является формулой Гаусса — Остроградского. Векторные равенства (9), (10) вытекают из (8), если применить эту формулу к каждой компоненте соответствующего векторного поля.

Сохраняя те же обозначения $V(x)$, d, что и в равенстве (6), из формул (8) — (10) единообразно получаем

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(x) = \lim_{d \to 0} \frac{\int\limits_{\partial V(x)} d\sigma \cdot \boldsymbol{B}}{V(x)}, \tag{6'}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A}(x) = \lim_{d \to 0} \frac{\int\limits_{\partial V(x)} d\sigma \times \boldsymbol{A}}{V(x)}, \tag{11}$$

$$\nabla f(x) = \lim_{d \to 0} \frac{\int\limits_{\partial V(x)} d\sigma f}{V(x)}. \tag{12}$$

Правые части равенств (8) — (10) можно интерпретировать соответственно как скалярный поток векторного поля $\boldsymbol{B}$, как векторный поток векторного поля $\boldsymbol{A}$ и как векторный поток скалярного поля f через поверхность dV, ограничивающую область V. Тогда величины $\operatorname{div} \boldsymbol{B}$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, $\operatorname{grad} f$, стоящие в левых частях равенств (6′), (11), (12), можно интерпретировать как соответствующие плотности распределения источников этих полей.

Заметим, что правые части соотношений (6′), (11), (12) не зависят от системы координат. Отсюда вновь можно сделать вывод об инвариантности градиента, ротора и дивергенции.

b. Векторные варианты формулы Стокса. Подобно тому, как формулы (8) — (10) были результатом совмещения формулы Гаусса — Остроградского с алгебраическими операциями над векторными и скалярными полями, следующая тройка формул получается совмещением этих же операций с классической формулой Стокса (которая выступает в качестве первого из этих трех соотношений).

Пусть S — (кусочно) гладкая компактная ориентированная поверхность с согласованно ориентированным краем dS, $d\boldsymbol{\sigma}$ — векторный элемент площади на поверхности S, а $d\boldsymbol{s}$ — векторный элемент длины на ∂S. Тогда для гладких полей $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, f имеют место соотношения

$$\int\limits_{S} d\sigma \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \int\limits_{\partial S} d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{A}, \tag{13}$$

$$\int\limits_{S} (d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla) \times B = \int\limits_{\partial S} d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}, \tag{14}$$

$$\int\limits_{S} d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla f = \int\limits_{\partial S} d\boldsymbol{s}\, f. \tag{15}$$

Формулы (14), (15) вытекают из формулы Стокса (13). На их доказательстве мы здесь не останавливаемся.

c. Формулы Грина. Если S — некоторая поверхность, а $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к S, то производную $D_{\boldsymbol{n}} f$ функции f по вектору $\boldsymbol{n}$ в теории поля чаще всего записывают символом

$\frac{\partial f}{\partial n}$. Например, $\langle \nabla f, d\boldsymbol{\sigma}\rangle = \langle \nabla f, \boldsymbol{n}\rangle d\sigma = \langle \operatorname{grad} f, \boldsymbol{n}\rangle d\sigma = D_{\boldsymbol{n}} f\, d\sigma = \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma$. Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial n} d\sigma$ есть поток поля $\operatorname{grad} f$ через элемент $d\sigma$ поверхности.

В этих обозначениях можно записать следующие достаточно широко используемые в векторном анализе и теории поля формулы Грина:

$$\int\limits_V \nabla f \cdot \nabla g\, dV + \int\limits_V g \nabla^2 f\, dV = \int\limits_{\partial V} (g \nabla f) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \left(= \int\limits_{\partial V} g \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma \right), \tag{16}$$

$$\int\limits_V (g \nabla^2 f - f \nabla^2 g)\, dV = \int\limits_{\partial V} (g \nabla f - f \nabla g) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \left(= \int\limits_{\partial V} \left(g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) d\sigma \right). \tag{17}$$

В частности, если в (16) положить $f = g$, а в (17) положить $g \equiv 1$, то соответственно получим

$$\int\limits_V |\nabla f|^2\, dV + \int\limits_V f \Delta f\, dV = \int\limits_{\partial V} f \nabla f \cdot d\boldsymbol{\sigma} \left(= \int\limits_{\partial V} f \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma \right), \tag{16'}$$

$$\int\limits_V \Delta f\, dV = \int\limits_{\partial V} \nabla f \cdot d\boldsymbol{\sigma} \left(= \int\limits_{\partial V} \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma \right). \tag{17'}$$

Последнее равенство часто называют *теоремой Гаусса*. Докажем, например, второе из равенств (16), (17):

◀ $$\int\limits_{\partial V} (g \nabla f - f \nabla g) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int\limits_V \nabla \cdot (g \nabla f - f \nabla g)\, dV =$$
$$= \int\limits_V (\nabla g \cdot \nabla f + g \nabla^2 f - \nabla f \cdot \nabla g - f \nabla^2 g)\, dV =$$
$$= \int\limits_V (g \nabla^2 f - f \nabla^2 g)\, dV = \int\limits_V (g \Delta f - f \Delta g)\, dV.$$

Мы воспользовались формулой Гаусса—Остроградского и тем, что $\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{A} + \varphi \nabla \cdot \boldsymbol{A}$. ▶

Задачи и упражнения

1. Исходя из формулы Гаусса—Остроградского (8), докажите соотношения (9), (10).

2. Исходя из формулы Стокса (13), докажите соотношения (14), (15)

3. a. Проверьте, что формулы (8), (9), (10) остаются в силе и для неограниченной области V, если подынтегральные функции в поверхностных интегралах имеют порядок $O\left(\frac{1}{r^3}\right)$ при $r \to \infty$. (Здесь $r = |\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точек пространства $\mathbb{R}^3$.)

b. Проверьте, остаются ли в силе формулы (13), (14), (15) для некомпактной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, если подынтегральные функции в криволинейных интегралах имеют порядок $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ при $r \to \infty$.

c. Приведите примеры, показывающие, что для неограниченных поверхностей и областей формулы Стокса (4′) и Гаусса—Остроградского (5′), вообще говоря, несправедливы.

4. a. Исходя из интерпретации дивергенции как плотности источников, объясните, что уравнение 2 системы (12) § 1 уравнений Максвелла подразумевает отсутствие у магнитного поля точечных источников (т. е. магнитных зарядов не бывает).

b. Используя формулу Гаусса—Остроградского и систему (12) § 1 уравнений Максвелла, покажите, что никакая жесткая конфигурация пробных зарядов (например, один заряд) не может находиться в состоянии устойчивого равновесия в области электростатического поля, свободной от (других) зарядов, создающих это поле. (Предполагается, что никакие иные силы, кроме создаваемых полем, при этом на систему не действуют.)

5. Если электромагнитное поле стационарно, т. е не зависит от времени, то система (12), § 1 уравнений Максвелла распадается на две независимые части — *систему* $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ *уравнений электростатики* и *систему* $\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{j}{\varepsilon_0c^2}$, $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ *уравнений магнитостатики.*

Уравнение $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$, где ρ — плотность распределения зарядов, по формуле Гаусса—Остроградского преобразуется в соотношение $\int\limits_S\nabla\cdot\boldsymbol{E}\,d\sigma=Q/\varepsilon_0$, где слева стоит поток напряженности электрического поля через замкнутую поверхность S, а справа — сумма Q зарядов, попавших в область, ограниченную поверхностью S, деленная на размерную постоянную ε_0. В электростатике это соотношение обычно называется *законом Гаусса* Используя закон Гаусса, найдите электрическое поле $\boldsymbol{E}$

a) создаваемое однородно заряженной сферой, и убедитесь, что вне сферы оно совпадает с полем точечного заряда той же величины, помещенного в центре сферы;

b) однородно заряженной прямой;

c) однородно заряженной плоскости;

d) пары параллельных и однородно заряженных зарядами противоположного знака плоскостей;

e) однородно заряженного шара.

6. a. Докажите формулу Грина (16)

b. Пусть f — *гармоническая* в ограниченной области V *функция* (т е f удовлетворяет в V уравнению Лапласа $\Delta f=0$). Покажите, исходя из равенства (17′), что поток градиента этой функции через границу области V равен нулю

c. Проверьте, что гармоническая в ограниченной связной области функция определяется с точностью до аддитивной постоянной значениями своей нормальной производной на границе этой области.

d. Исходя из равенства (16), докажите, что если гармоническая в ограниченной области функция на границе области всюду равна нулю, то она тождественно равна нулю во всей этой области.

e. Покажите, что если на границе ограниченной области значения двух гармонических в этой области функций совпадают, то эти функции совпадают во всей области.

7. a. Пусть $r(p,q)=|p-q|$ — расстояние между точками p, q евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ Фиксировав точку p, получим функцию $r_p(q)$ точки $q\in\mathbb{R}^3$ Покажите, что $\Delta r_p(q)=4\pi\delta(p;q)$, где δ — дельта-функция.

b. Пусть g — гармоническая в области V функция. Полагая в формуле (17) $f=1/r_p$, с учетом предыдущего результата получаем

$$4\pi g(p)=\int\limits_S\left(g\nabla\frac{1}{r_p}-\frac{1}{r_p}\nabla g\right)\cdot d\sigma$$

Докажите это равенство аккуратно.

c. Выведите из предыдущего равенства, что если S — сфера радиуса R с центром в точке p, то

$$g(p)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_S g\,d\sigma.$$

Это так называемая *теорема о среднем для гармонических функций.*

d. Исходя из предыдущего результата, покажите, что если B — шар, ограниченный рассмотренной там сферой S, а $V(B)$ — его объем, то справедливо также равенство

$$g(p)=\frac{1}{V(B)}\int_B g\,dV.$$

e. Если p, q — точки евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, то вместо рассмотренной в a функции $\frac{1}{r_p}$ (отвечающей потенциалу точечного заряда, помещенного в точку p) возьмем теперь функцию $\ln\frac{1}{r_p}$ (отвечающую в пространстве потенциалу равномерно заряженной прямой) Покажите, что $\Delta\ln\frac{1}{r_p}=2\pi\delta(p;\,q)$, где $\delta(p;\,q)$ в данном случае есть дельта-функция в $\mathbb{R}^2$.

f. Повторив проведенные в b, c, d рассуждения, получите теорему о среднем для функций, гармонических в плоских областях.

§ 3. Потенциальные поля

1. Потенциал векторного поля.

Определение 1. Пусть $\boldsymbol{A}$ — векторное поле в области $D\subset\mathbb{R}^n$. Функция $U\colon D\to\mathbb{R}$ называется *потенциалом поля $\boldsymbol{A}$* в области D, если в этой области $\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}U$.

Определение 2. Поле, обладающее потенциалом, называется *потенциальным полем.*

Поскольку в связной области частные производные определяют функцию с точностью до константы, то в такой области потенциал поля определен с точностью до аддитивной постоянной.

В первой части курса мы уже вскользь говорили о потенциале. Здесь мы обсудим это важное понятие несколько подробнее. Отметим в связи с данными определениями, что в физике при рассмотрении разного рода силовых полей потенциалом поля $\boldsymbol{F}$ обычно называют такую функцию U, что $\boldsymbol{F}=-\operatorname{grad}U$. Такой потенциал отличается от введенного определением 1 только знаком.

Пример 1. Напряженность $\boldsymbol{F}$ гравитационного поля, создаваемого помещенной в начало координат точечной массой M, в точке пространства, имеющей радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, вычисляется по закону Ньютона в виде

$$\boldsymbol{F}=-GM\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{1}$$

где $r=|\boldsymbol{r}|$.

Это сила, с которой поле действует на единичную массу в соответствующей точке пространства. Гравитационное поле (1) потенциально. Его потенциалом в смысле определения 1 является функция

$$U = GM\frac{1}{r}. \tag{2}$$

Пример 2. Напряженность $\boldsymbol{E}$ электрического поля точечного заряда q, помещенного в начале координат, в точке пространства, имеющей радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, вычисляется по закону Кулона

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Таким образом, такое электростатическое поле, как и гравитационное поле, потенциально. Его потенциал φ, в смысле физической терминологии, определяется соотношением

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

2. Необходимое условие потенциальности. На языке дифференциальных форм равенство $A = \operatorname{grad} U$ означает, что $\omega_A^1 = d\omega_U^0 = dU$, откуда вытекает, что

$$d\omega_A^1 = 0, \tag{3}$$

поскольку $d^2\omega_U^0 = 0$. Это необходимое условие потенциальности поля $\boldsymbol{A}$.

В декартовых координатах оно имеет совсем простое выражение. Если $A = (A^1, \ldots, A^n)$ и $A = \operatorname{grad} U$, то в декартовых координатах $A^i = \frac{\partial U}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, и при достаточной гладкости потенциала U (например, непрерывность вторых частных производных) должно быть

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^j} = \frac{\partial A^j}{\partial x^i}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{3'}$$

что попросту означает равенство смешанных производных

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^j \partial x^i}.$$

В декартовых координатах $\omega_A^1 = \sum\limits_{i=1}^{n} A^i dx^i$, поэтому равенство (3) и соотношения (3′) действительно в этом случае равносильны.

В случае $\mathbb{R}^3$ по определению ротора $d\omega_A^1 = \omega_{\operatorname{rot} A}^2$, поэтому необходимое условие (3) потенциальности поля A для $\mathbb{R}^3$ можно переписать в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0,$$

что соответствует уже знакомому нам соотношению $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$.

Пример 3. Заданное в декартовых координатах пространства $\mathbb{R}^3$ поле $A=(x, xy, xyz)$ не может иметь потенциал, так как, например, $\frac{\partial (xy)}{\partial x} \neq \frac{\partial x}{\partial y}$.

Пример 4. Рассмотрим поле $A=(A_x, A_y)$ вида

$$A=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), \tag{4}$$

заданное в декартовых координатах во всех точках плоскости, кроме начала координат. Необходимое условие потенциальности $\frac{\partial A_x}{\partial y}=\frac{\partial A_y}{\partial x}$ здесь выполнено. Однако, как мы сейчас убедимся, это поле не потенциально в области своего определения.

Таким образом, необходимое условие (3) или, в декартовых координатах, условия (3′), вообще говоря, не являются достаточными для потенциальности поля.

3. Критерий потенциальности векторного поля.

Утверждение 1. *Непрерывное в области $D \subset \mathbb{R}^n$ векторное поле A потенциально в D тогда и только тогда, когда его циркуляция на любом лежащем в D замкнутом пути γ равна нулю:*

$$\oint_\gamma A \cdot ds = 0. \tag{5}$$

◀ Необходимость. Пусть $A=\operatorname{grad} U$. Тогда по формуле Ньютона — Лейбница (§ 2, формула (3′))

$$\oint_\gamma A \cdot ds = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)),$$

где γ: $[a, b] \to D$. Если $\gamma(a)=\gamma(b)$, т. е. когда путь γ замкнутый, очевидно, правая, а вместе с ней и левая часть последнего равенства обращаются в нуль.

Достаточность. Пусть условие (5) выполнено. Тогда интеграл по любому (не обязательно замкнутому) пути в области D зависит только от его начала и конца, а в остальном от пути не зависит. Действительно, если γ_1 и γ_2 — два пути с общим началом и концом, то, пройдя сначала путь γ_1, а затем путь $-\gamma_2$, (т. е. γ_2 в обратном направлении), мы получим замкнутый путь γ, интеграл по которому, с одной стороны, в силу (5) равен нулю, а с другой стороны, есть разность интегралов по γ_1 и γ_2. Значит, эти интегралы действительно равны.

Фиксируем в D некоторую точку x_0 и положим теперь

$$U(x) = \int_{x_0}^{x} A \cdot ds, \tag{6}$$

где справа стоит интеграл по любому пути, идущему в области D из точки x_0 в точку $x \in D$. Проверим, что определенная так функция U является искомым потенциалом поля A. Для удобства будем считать, что в $\mathbb{R}^n$ взята декартова система координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда $A \cdot ds = A^1 dx^1 + \ldots + A^n dx^n$. Если от точки x прямолинейно сместиться на вектор he_i, где e_i — орт соответствующей координатной оси, то при этом функция U получит приращение

$$U(x+he_i) - U(x) = \int\limits_{x^i}^{x^i+h} A^i(x^i, \ldots, x^{i-1}, t, x^{i+1}, \ldots, x^n)\, dt;$$

равное интегралу от формы $A\, ds$ по указанному пути перехода из x в $x+he_i$. Ввиду непрерывности поля A последнее равенство по теореме о среднем можно записать в виде

$$U(x+he_i) - U(x) = A^i(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i+\theta h, x^{i+1}, \ldots, x^n)\, h,$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Поделив это равенство на h и устремив h к нулю, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x^i}(x) = A^i(x),$$

т. е. действительно $A = \operatorname{grad} U$. ►

Замечание 1. Как видно из доказательства, для потенциальности поля A достаточно, чтобы условие (5) выполнялось для гладких путей или, например, хотя бы для ломаных, звенья которых параллельны координатным осям.

Теперь вернемся к примеру 4. В свое время (см. пример 1 § 1 гл. VIII) мы подсчитали, что циркуляция поля (4) на окружности $x^2+y^2=1$, пробегаемой один раз против часовой стрелки, равна $2\pi\ (\neq 0)$.

Таким образом, на основании утверждения 1 можно заключить, что поле (4) не потенциально в рассматриваемой области $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.

Но ведь, например,

$$\operatorname{grad} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

и, казалось бы, функция $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ является потенциалом поля (4). Что это — противоречие?! Противоречия пока нет, поскольку единственный правильный вывод, который следовало бы в этой ситуации сделать, состоит в том, что функция $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ не определена во всей области $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. И это действительно так: возьмите, например, точки оси Oy. Но тогда, скажете вы, можно рассмотреть функцию $\varphi(x, y)$ — полярный угол точки (x, y). Практически это та же функция $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, но $\varphi(x, y)$ определена и при $x=0$, лишь бы точка (x, y) не совпадала с началом координат.

Всюду в области $\mathbb{R}^2\setminus 0$

$$d\varphi = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Однако и теперь противоречия никакого нет, хотя сейчас уже ситуация более деликатная. Обратите внимание на то, что φ на самом-то деле не является непрерывной однозначной функцией точки в нашей области $\mathbb{R}^2\setminus 0$. При обходе точки вокруг начала координат против часовой стрелки ее полярный угол, непрерывно меняясь, увеличится на 2π, когда точка вернется в начальное положение. То есть мы приходим в исходную точку не с тем же, а с новым значением функции. Следовательно, либо надо отказаться от непрерывности φ в области $\mathbb{R}^2\setminus 0$, либо надо отказаться от однозначности φ.

В малой окрестности (не содержащей начала координат) каждой точки области $\mathbb{R}^2\setminus 0$ можно выделить непрерывную однозначную ветвь функции φ. Все такие ветви отличаются лишь на аддитивную постоянную, кратную 2π. Именно поэтому все они имеют одинаковый дифференциал и могут служить локальными потенциалами нашего поля (4). Тем не менее во всей области $\mathbb{R}^2\setminus 0$ поле (4) потенциала не имеет.

Разобранная на примере 4 ситуация оказывается типичной в том смысле, что необходимое условие (3) или (3′) потенциальности поля A локально является и достаточным. Имеет место

Утверждение 2. *Если необходимое условие потенциальности поля выполняется в некотором шаре, то в этом шаре поле имеет потенциал.*

◀ Для наглядности сначала проведем доказательство в случае круга $D = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < r^2\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ В точку (x, y) круга из начала координат можно прийти по двум различным двузвенным ломаным γ_1, γ_2, звенья которых параллельны координатным осям (рис. 93). Поскольку D — выпуклая область, весь ограниченный этими ломаными прямоугольник I содержится в D.

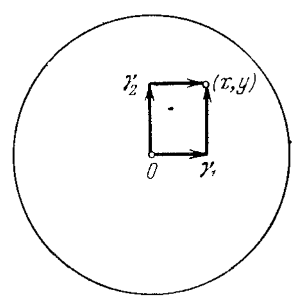

Рис 93

По формуле Стокса с учетом условия (3) получаем

$$\int_{\partial I} \omega_A^1 = \int_I d\omega_A^1 = 0.$$

На основе замечания к утверждению 1 отсюда уже можно сделать вывод о потенциальности поля A в D. Кроме того, на основе доказательства достаточности в утверждении 1 в качестве потенциала вновь можно взять функцию (6), понимая при этом интеграл как интеграл по пути, ведущему из центра в рассматриваемую точку вдоль ломаной, звенья которой параллельны координатным осям. В рассмотренном случае независимость такого интеграла от выбора пути γ_1, γ_2 непосредственно вытекала из формулы Стокса для прямоугольника.

В высших размерностях из формулы Стокса для двумерного прямоугольника следует, что замена двух соседних звеньев ломаного пути на два звена, составляющие параллельные исходным стороны соответствующего прямоугольника, не меняет интеграла по пути. Поскольку такими перестройками последовательно можно перейти от одного ломаного пути к любому другому, ведущему в ту же точку, то и в общем случае потенциал оказывается определенным корректно. ▶

4. Топологическая структура области и потенциал. Сопоставляя пример 4 и утверждение 2, можно заключить, что при выполнении необходимого условия (3) потенциальности поля вопрос о том, всегда ли оно потенциально, связан с устройством (топологической структурой) области, в которой поле задано. Следующие рассмотрения (здесь и в п. 5) дают первоначальное представление о том, какие именно характеристики области отвечают за это.

Оказывается, если область D такова, что любой замкнутый путь, лежащий в D, можно, не выходя за пределы области D, стянуть в некоторую точку этой области, то в D необходимое условие (3) потенциальности поля уже будет и достаточным. Ниже мы назовем такие области односвязными. Шар — односвязная область (и потому имеет место утверждение 2), а вот плоскость с проколом $\mathbb{R}^2\setminus 0$ не является односвязной, так как охватывающий начало координат путь нельзя стянуть в точку этой же области, не выходя за ее пределы. Именно поэтому не всякое удовлетворяющее условиям (3′) поле в $\mathbb{R}^2\setminus 0$, как мы видели в примере 4, обязано быть потенциальным в области $\mathbb{R}^2\setminus 0$.

Перейдем теперь от описаний к точным формулировкам. Прежде всего поясним, что мы имеем в виду, когда говорим о деформации или стягивании пути.

Определение 3. Говорят, что в области D имеется *гомотопия* (или *деформация*) *замкнутого пути* γ_0: $[0, 1]\to D$ *в замкнутый путь* γ_1: $[0, 1]\to D$, если указано такое непрерывное отображение Γ: $I^2\to D$ квадрата $I^2=\{(t^1, t^2)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leqslant t^i\leqslant 1, i=1, 2\}$ в область D, что $\Gamma(t^1, 0)=\gamma_0(t^1)$, $\Gamma(t^1, 1)=\gamma_1(t^1)$ и $\Gamma(0, t^2)=\Gamma(1, t^2)$ при любом $t^2\in[0, 1]$.

Таким образом, гомотопия и есть отображение Γ: $I^2\to D$ (рис. 94).

Если переменную t считать временем t, то согласно определению 3 в каждый момент времени $t=t^2$ мы имеем свой замкнутый путь $\Gamma(t^1, t)=\gamma_t$ (рис. 94) *). Изменение этого пути со временем таково, что в начальный момент $t=t^2=0$ он совпадает с путем γ_0, а в момент $t=t^2=1$ он преобразуется в путь γ_1.

Поскольку в любой момент $t\in[0, 1]$ выполняются соотношения $\gamma_t(0)=\Gamma(0, t)=\Gamma(1, t)=\gamma_t(1)$, означающие, что путь γ_t — замкнутый, отображение Γ: $I^2\to D$ индуцирует на боковых сторонах квадрата I^2 одинаковые отображения $\beta_0(t^1):=\Gamma(t^1, 0)=$ $=\Gamma(t^1, 1)=:\beta_1(t^1)$.

Отображение Γ является формализацией нашего представления о том, как постепенно путь γ_0 деформируется в путь γ_1 Изменение этого пути со временем таково, что в начальный момент $t^2=0$ он совпадает с путем γ_0, а в момент $t^2=1$ он преобразуется в путь γ_1.

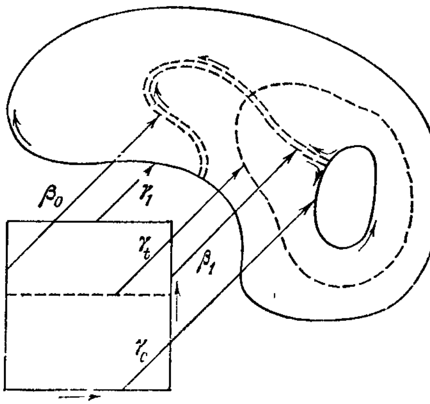

Рис. 94.

Ясно, что время можно пустить в обратную сторону, и тогда мы из пути γ_1 получим путь γ_0.

Определение 4. Два замкнутых пути называются *гомотопными* в области, если их можно гомотопировать друг в друга в пределах этой области, т. е. построить в этой области гомотопию одного пути в другой.

Замечание 2. Поскольку пути, с которыми нам придется в анализе иметь дело, это, как правило, пути интегрирования, то без дополнительных оговорок мы будем рассматривать только гладкие или кусочно гладкие пути и их гладкие или кусочно гладкие гомотопии.

Для областей, лежащих в $\mathbb{R}^n$, можно проверить, что наличие непрерывной гомотопии (кусочно) гладких путей в них, обеспечивает и наличие (кусочно) гладкой гомотопии этих же путей.

Утверждение 3. *Если 1-форма ω_A^1 в области D такова, что $d\omega_A^1=0$, а замкнутые пути γ_0 и γ_1 гомотопны в D, то*

$$\int_{\gamma_0}\omega_A^1=\int_{\gamma_1}\omega_A^1.$$

◀ Пусть Γ: $I^2\to D$ — гомотопия γ_0 в γ_1 (см. рис. 94). Если I_0, I_1 — основания квадрата I^2, а J_0, J_1 — его боковые стороны,

*) На рис. 94 вдоль некоторых кривых стоят ориентирующие их стрелки, которые будут использованы несколько позже и на которые читатель пока не должен обращать внимания.

то, по определенню гомотопии замкнутых путей, сужение Γ на I_0 и I_1 совпадает с γ_0 и γ_1 соответственно, а сужение Γ на J_0 и J_1 дает некоторые пути β_0 и β_1 в D и, поскольку $\Gamma(0, t^2) = \Gamma(1, t^2)$, пути β_0 и β_1 просто совпадают. В результате замены переменных $x = \Gamma(t)$ форма ω_A^1 перенесется в квадрат I^2 в виде некоторой 1-формы $\omega = \Gamma^*\omega_A^1$. При этом $d\omega = d\Gamma^*\omega_A^1 = \Gamma^* d\omega_A^1 = 0$, так как $d\omega_A^1 = 0$. Значит, по формуле Стокса

$$\int_{\partial I^2} \omega = \int_{I^2} d\omega = 0.$$

Но

$$\int_{\partial I^2} \omega = \int_{I_0} \omega + \int_{J_1} \omega - \int_{I_1} \omega - \int_{J_0} \omega =$$
$$= \int_{\gamma_0} \omega_A^1 + \int_{\beta_1} \omega_A^1 - \int_{\gamma_1} \omega_A^1 - \int_{\beta_0} \omega_A^1 = \int_{\gamma_0} \omega_A^1 - \int_{\gamma_1} \omega_A^1. \blacktriangleright$$

Определение 5. Область называется *односвязной*, если любой замкнутый путь в ней гомотопен точке (т. е. постоянному пути).

Итак, именно в односвязной области любой замкнутый путь можно стянуть в точку.

Утверждение 4. *Если заданное в односвязной области D поле $\boldsymbol{A}$ удовлетворяет необходимому условию* (3) *или* (3′) *потенциальности, то оно потенциально в D.*

◀ В силу утверждения 1 и замечания 1 к нему нам достаточно проверить, что равенство (5) имеет место для любого гладкого пути γ в области D. Путь γ по условию гомотопен постоянному пути, носитель которого состоит из одной точки. Интеграл по такому одноточечному пути, очевидно, равен нулю. Но в силу утверждения 3 при гомотопии интеграл не меняется, значит, и для пути γ должно быть выполнено равенство (5). ▶

Замечание 3. В случае векторных полей и отвечающих им 1-форм утверждение 4 может рассматриваться как обобщение утверждения 2. Однако, с точки зрения некоторого естественного расширения постановки вопроса, о чем будет сказано ниже, утверждение 2 желательно иметь в чистом виде независимо от утверждения 4.

Замечание 4. Утверждение 2 было доказано без ссылки на возможность гладкой гомотопии гладких путей.

5. Векторный потенциал. Точные и замкнутые формы.

Определение 6. Поле $\boldsymbol{A}$ называется *векторным потенциалом поля $\boldsymbol{B}$* в области $D \subset \mathbb{R}^3$, если в этой области выполняется соотношение $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$.

Если вспомнить связь между векторными полями и формами в евклидовом ориентированном пространстве $\mathbb{R}^3$, а также определение ротора векторного поля, то соотношение $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ можно переписать в виде $\omega^2_B = d\omega^1_A$. Отсюда следует, что $\omega^3_{\operatorname{div} B} = d\omega^2_B = d^2\omega^1_A = 0$. Таким образом, мы получаем следующее необходимое условие

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{7}$$

которому в области D должно удовлетворять поле $\boldsymbol{B}$, чтобы оно могло иметь векторный потенциал, т. е. чтобы оно могло быть ротором некоторого векторного поля $\boldsymbol{A}$ в этой области.

Поле, удовлетворяющее условию (7), часто, особенно в физике, называют *соленоидальным полем*.

Пример 5. В § 1 мы выписали систему (12) уравнений Максвелла. Второе из уравнений этой системы как раз совпадает с равенством (7). Таким образом, естественно появляется желание считать магнитное поле $\boldsymbol{B}$ ротором некоторого векторного поля $\boldsymbol{A}$ — векторного потенциала поля $\boldsymbol{B}$. Именно к такому векторному потенциалу и переходят при решении системы уравнений Максвелла.

Как видно из определений 1 и 6, вопросы о скалярном и векторном потенциале векторных полей (последний вопрос при этом мы ставили только в $\mathbb{R}^3$) являются частными случаями общего вопроса о том, когда дифференциальная p-форма ω^p является дифференциалом $d\omega^{p-1}$ некоторой формы ω^{p-1}.

Определение 7. Дифференциальная форма ω^p называется *точной* в области D, если в этой области существует такая форма ω^{p-1}, что $\omega^p = d\omega^{p-1}$.

Если форма ω^p точна в D, то $d\omega^p = d^2\omega^{p-1} = 0$. Таким образом, условие

$$d\omega = 0 \tag{8}$$

является необходимым условием точности формы ω.

Как мы уже видели (пример 4), не всякая форма, удовлетворяющая этому условию, является точной, поэтому вводится

Определение 8. Дифференциальная форма ω называется *замкнутой* в области D, если в этой области она удовлетворяет условию (8).

Имеет место

Теорема (лемма Пуанкаре). *Если форма замкнута в шаре, то она и точна в нем.*

Здесь уже речь идет о шаре в $\mathbb{R}^n$ и о форме любого порядка, поэтому утверждение 2 является простейшим частным случаем этой теоремы.

Лемму Пуанкаре можно истолковать и так: необходимое условие (8) точности формы локально является и достаточным, т. е. для любой точки области, где выполнено условие (8), найдется такая ее окрестность, в которой форма ω точна.

В частности, если векторное поле $\boldsymbol{B}$ удовлетворяет условию (7), то из леммы Пуанкаре следует, что по крайней мере локально оно является ротором некоторого векторного поля $\boldsymbol{A}$.

Мы не останавливаемся здесь на доказательстве этой важной теоремы (желающие прочитают его в гл. XV), а предпочтем в заключение (опираясь на сведения об 1-формах) пояснить в общих чертах связь вопроса о точности замкнутых форм с топологией области их задания.

Пример 6. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с двумя выколотыми точками p_1, p_2 (рис. 95) и изображенные на рисунке их носителями пути γ_0, γ_1 и γ_2. Путь γ_2 в пределах рассматриваемой области D можно стянуть в точку, поэтому если в D задана замкнутая форма ω, то интеграл от нее по γ_2 равен нулю. Путь γ_0 нельзя стянуть в точку, но, не меняя значения интеграла от формы ω, этот путь можно прогомотопировать в путь γ_1. Интеграл по пути γ_1, очевидно, сводится к интегралу по одному циклу, обходящему по часовой стрелке точку p_1, и удвоенному интегралу по циклу, обходящему точку p_2 против часовой стрелки. Если через T_1 и T_2 обозначить интегралы от нашей формы ω по малым окружностям, охватывающим соответственно точки p_1 и p_2 и проходимым, например, против часовой стрелки, то можно понять, что интеграл от формы ω по любому замкнутому пути в области D будет равен $n_1T_1+n_2T_2$, где n_1 и n_2 — некоторые целые числа, указывающие, сколько раз и в каком направлении мы обошли каждую из дырок p_1, p_2 плоскости $\mathbb{R}^2$.

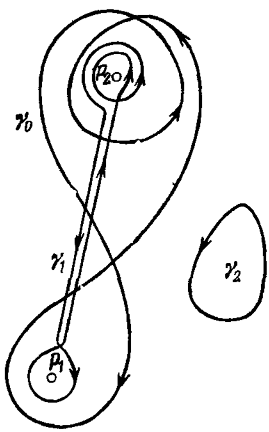

Рис. 95

Окружности c_1, c_2, зацепляющие p_1 и p_2, служат как бы базисом, в котором любой замкнутый путь $\gamma\subset D$, с точностью до не влияющей на интеграл гомотопии, имеет вид $\gamma=n_1c_1+n_2c_2$. Величины $\int\limits_{c_i}\omega=T_i$ называют *циклическими постоянными* или *периодами интеграла*. Если область более сложная и в ней имеется k штук независимых простейших циклов, то в соответствии с разложением $\gamma=n_1c_1+\ldots+n_kc_k$ получится, что $\int\limits_{\gamma}\omega=n_1T_1+\ldots$ $\ldots+n_kT_k$. Оказывается для любого набора $T_1, \ldots, T_k$ чисел в такой области можно построить замкнутую 1-форму, которая будет иметь именно такой набор периодов (это частный случай теоремы Де Рама; см. гл. XV).

Для наглядности мы обратились к рассмотрению плоской области, но все сказанное можно повторить и для любой области $D\subset\mathbb{R}^n$.

Пример 7. В полнотории (области, ограниченной в $\mathbb{R}^3$ тором) все замкнутые пути, очевидно, гомотопны сколько-то раз пробегаемой окружности, охватывающей дырку. Эта окружность и составит здесь единственный не точечный базисный цикл c.

Более того, все сказанное можно повторить и для путей высших размерностей. Если вместо одномерных замкнутых путей — отображений окружности или, что то же самое, отображений одномерной сферы, брать отображения k-мерной сферы, ввести для них понятие гомотопии и смотреть, сколько таких негомотопных между собой отображений k-мерной сферы в данную область $D \subset \mathbb{R}^n$ существует, то получится некоторая характеристика области D, которая в топологии оформляется в так называемую k-ю гомотопическую группу области D и обозначается $\pi_k(D)$. Если все отображения k-мерной сферы в D гомотопны постоянному отображению, то считается, что группа $\pi_k(D)$ тривиальна (состоит только из одного элемента). Может так случиться, что $\pi_1(D)$ тривиальна, а $\pi_2(D)$ не тривиальна.

Пример 8. Если в качестве D взять пространство $\mathbb{R}^3$ с выброшенной из него точкой O, то, очевидно, любой замкнутый путь в такой области стягивается в точку, а сферу, охватывающую выброшенную из $\mathbb{R}^3$ точку O, нельзя в пределах этой области прогомотопировать в точку.

Оказывается, за периоды замкнутой k-формы ответственна не совсем гомотопическая группа $\pi_k(D)$, а так называемая *группа гомологий* $H_k(D)$ (см. гл. XV), но в примерах, которые мы приводим, эти группы совпадают.

Пример 9. Из сказанного можно заключить, что, например, в области $D = \mathbb{R}^3 \setminus 0$ всякая замкнутая 1-форма точна ($\mathbb{R}^3 \setminus 0$ односвязная область), но не всякая замкнутая 2-форма является точной. На языке векторных полей это означает, что любое безвихревое поле $\boldsymbol{A}$ в $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ является градиентом некоторой функции, но не всякое поле $\boldsymbol{B}$ без источников ($\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$) является в этой области ротором некоторого поля.

Пример 10. В противовес примеру 9 возьмем в качестве области D полноторие. Для полнотория группа $\pi_1(D)$ не тривиальна (см. пример 7), а $\pi_2(D)$ тривиальна, поскольку любое отображение $f\colon S^2 \to D$ двумерной сферы в D в пределах D стягивается в постоянное (образ сферы стягивается в точку). В этой области не всякое безвихревое поле потенциально, но всякое поле без источников является ротором некоторого поля.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что любое центральное поле $\boldsymbol{A} = f(r)\,\boldsymbol{r}$ потенциально.

2. Пусть $\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U$ — потенциальное силовое поле.

Покажите, что положения устойчивого равновесия частицы в таком поле находятся в точках минимума потенциала U этого поля.

3. Для электростатического поля $\boldsymbol{E}$ система уравнений Максвелла (§ 1, (12)), как уже отмечалось, сводится к паре уравнений $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$.

Условие $\nabla\times E=0$, по крайней мере локально, подразумевает, что $E=-\operatorname{grad}\varphi$ Поле точечного заряда потенциально, а поскольку любое электростатическое поле есть сумма (или интеграл) таких полей, то оно тоже всегда потенциально. Подставляя $E=-\nabla\varphi$ в первое из уравнений электростатического поля, получим, что его потенциал φ удовлетворяет *уравнению Пуассона* *) $\Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Потенциал φ полностью определяет поле E, поэтому описание поля E сводится к отысканию функции φ — решения уравнения Пуассона.

Зная потенциал точечного заряда (пример 2), решите следующую задачу

a. Два заряда $-q$, $+q$ находятся в точках $(0, 0, -d/2)$, $(0, 0, d/2)$ пространства $\mathbb{R}^3$, наделенного декартовыми координатами (x, y, z). Покажите, что на большом по сравнению с величиной d удалении от этих зарядов потенциал создаваемого ими электростатического поля имеет вид

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}qd+o\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

где r — модуль радиус-вектора r точки (x, y, z).

b. Удаление от зарядов на большое расстояние равносильно сближению зарядов, т. е. уменьшению величины d. Если теперь величину $qd=:p$ фиксировать и уменьшать d, то в пределе в области $\mathbb{R}^3\setminus 0$ получится функция $\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}p$ Удобно ввести вектор p, равный по величине p и направленный от $-q$ к $+q$. Пару зарядов $-q$, $+q$ и получаемую описанным предельным переходом конструкцию называют *диполем*, а вектор p — *дипольным моментом*. Полученная в пределе функция φ называется *потенциалом диполя*. Найдите асимптотику потенциала диполя при уходе от диполя по лучу, составляющему угол θ с направлением дипольного момента.

c. Пусть φ_0 — потенциал единичного точечного заряда, а φ_1 — потенциал диполя, имеющего дипольный момент p_1. Покажите, что $\varphi_1=-(p_1\cdot\nabla)\varphi_0$.

d. Конструкцию с предельным переходом, которую мы провели для пары зарядов при получении диполя, можно повторить для четверки зарядов (точнее, для двух диполей с дипольными моментами p_1, p_2) и получить *квадруполь* и соответствующий ему потенциал. В общем случае можно получить *мультиполь порядка* j с потенциалом $\varphi_j=(-1)^j(p_j\cdot\nabla)(p_{j-1}\cdot\nabla)\ldots(p_1\cdot\nabla)\varphi_0=\sum\limits_{i+k+l=j}Q^j_{ikl}\frac{\partial^j\varphi_0}{\partial x^i\,\partial y^k\,\partial z^l}$, где Q^j_{ikl} — так называемые *компоненты момента мультиполя*. Проведите выкладки и проверьте формулу для потенциала мультиполя в случае квадруполя

e. Покажите, что главный член асимптотики потенциала скопления зарядов при удалении от этого скопления равен $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$, где Q — суммарный заряд скопления

f. Покажите, что главный член асимптотики потенциала электрически нейтрального тела, состоящего из зарядов противоположного знака (например, молекула), на большом по сравнению с размерами тела расстоянии от него, равен $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cdot e_r}{r^2}$. Здесь e_r — единичный вектор, направленный из тела на наблюдателя, $p=\sum q_i d_i$, где q_i — величина i-го заряда, а d_i — его радиус-вектор; начало координат выбрано в одной из точек тела.

g. Потенциал любого скопления зарядов на большом расстоянии от скопления раскладывается (в смысле асимптотики) по функциям типа потенциа

---

*) С. Д Пуассон (1781—1840) — французский механик, математик и физик; основные работы по теоретической и небесной механике, математической физике и теории вероятностей Уравнение Пуассона появилось в его исследованиях гравитационного потенциала и притяжения сфероидами

лов мультиполей. Покажите это на примере первых двух членов такого потенциала (см. d, e и f).

4. Проверьте, односвязны ли следующие области:

a) круг $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$;

b) круг с выколотым центром $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 < 1\}$;

c) шар с выколотым центром $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2+y^2+z^2 < 1\}$;

d) кольцо $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{2} < x^2+y^2 < 1\right\}$;

e) шаровое кольцо $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{2} < x^2+y^2+z^2 < 1\right\}$;

f) полноторие в $\mathbb{R}^3$.

5. a. Дайте определение гомотопии пути с закрепленными концами.

b. Докажите, что область односвязна тогда и только тогда, когда любые два пути в ней, имеющие общее начало и общий конец, гомотопны в смысле определения a.

6. Покажите, что:

a) любое непрерывное отображение $f: S^1 \to S^2$ окружности S^1 (одномерной сферы) в двумерную сферу S^2 стягивается по S^2 в точку (в постоянное отображение);

b) любое непрерывное отображение $f: S^2 \to S^1$ тоже гомотопно отображению в одну точку;

c) любое отображение $f: S^1 \to S^1$ гомотопно при некотором $n \in \mathbb{Z}$ отображению $\varphi \mapsto n\varphi$, где φ — полярный угол точки окружности;

d) любое непрерывное отображение сферы S^2 в полноторие гомотопно отображению в одну точку;

e) любое отображение окружности S^1 в полноторие гомотопно при некотором $n \in \mathbb{Z}$ замкнутому пути, пробегающему n раз окружность, охватывающую дырку полнотория.

7. В области $\mathbb{R}^3 \setminus O$ (пространство с выброшенной точкой O) постройте:

a) замкнутую, но не точную 2-форму;

b) векторное поле без источников, которое не является ротором какого-либо векторного поля в этой области.

8. a. Могут ли в области $D = \mathbb{R}^n \setminus O$ (пространство $\mathbb{R}^n$ с выброшенной точкой O) быть замкнутые, но не точные формы степени $p < n-1$?

b. Постройте в области $D = \mathbb{R}^n \setminus O$ замкнутую, но не точную форму степени $p = n-1$

9. Если 1-форма ω замкнута в области $D \subset \mathbb{R}^n$, то в силу утверждения 2 любая точка $x \in D$ имеет окрестность $U(x)$, в пределах которой форма ω точна. Далее ω — замкнутая форма

a. Покажите, что если два пути γ_i: $[0, 1] \to D$, $i = 1, 2$, имеют одинаковые начала и концы и отличаются лишь на промежутке $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$, образ которого при каждом из отображений γ_i лежит в пределах одной и той же окрестности $U(x)$, то $\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$

b. Покажите, что для любого пути $[0, 1] \ni t \mapsto \gamma(t) \in D$ можно указать такое число $\delta > 0$, что если путь $\tilde{\gamma}$ имеет те же начало и конец, что и путь γ, и уклоняется от γ не больше чем на δ, т. е. $\max\limits_{0 \leq t \leq 1} |\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| \leq \delta$, то $\int\limits_{\tilde{\gamma}} \omega = \int\limits_{\gamma} \omega$

c. Покажите, что если два пути γ_1, γ_2 с общими началом и концом гомотопны в области D как пути с закрепленными концами, то для замкнутой в D формы ω имеет место равенство $\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$

10. a Позднее будет доказано, что любое непрерывное отображение Γ: $I^2 \to D$ квадрата I^2 можно сколь угодно точно равномерно аппроксимировать гладким отображением (даже с полиномиальными компонентами) Выведите

отсюда, что если пути γ_1, γ_2 в области D гомотопны, то при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такие гладко гомотопные между собой пути $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, что $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t)| \leqslant \varepsilon$, $i = 1, 2$.

b. Используя результаты задачи 9, покажите теперь, что если интегралы по гладко гомотопным путям от замкнутой в области D формы равны между собой, то они равны и для любых гомотопных в этой области путей (без предположения о гладкости этой гомотопии). Сами пути, разумеется, предполагаются настолько регулярными, насколько это нужно для интегрирования по ним.

11. a Покажите, что если формы ω^p, ω^{p-1}, $\tilde{\omega}^{p-1}$ таковы, что $\omega^p = d\omega^{p-1} = d\tilde{\omega}^{p-1}$, то (по крайней мере локально) можно указать форму ω^{p-2} такую, что $\tilde{\omega}^{p-1} = \omega^{p-1} + d\omega^{p-2}$. (То, что любые две формы, отличающиеся на дифференциал некоторой формы, имеют одинаковый дифференциал, очевидно, вытекает из равенства $d^2\omega = 0$.)

b. Покажите, что потенциал φ электростатического поля (задача 3) определяется с точностью до аддитивной постоянной, которая фиксируется, если потребовать, чтобы на бесконечности потенциал стремился к нулю.

12. Из системы уравнений Максвелла (§ 1, (12)) получается следующая пара уравнений магнитостатики: $\nabla \cdot B = 0$, $\nabla \times B = -\dfrac{j}{\varepsilon_0 c^2}$. Первое из этих уравнений показывает, что, по крайней мере локально, поле B имеет векторный потенциал A, т е $B = \nabla \times A$.

a Опишите произвол в выборе потенциала A магнитного поля B (см задачу 11 a).

b Пусть x, y, z — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$. Найдите потенциал A однородного магнитного поля B, направленного вдоль оси Oz, при соблюдении каждого (в отдельности) из следующих дополнительных требований: поле A должно иметь вид $(0, A_y, 0)$, поле A должно иметь вид $(A_x, 0, 0)$, поле A должно иметь вид $(A_x, A_y, 0)$; поле A должно быть инвариантно относительно поворотов вокруг оси Oz

c. Покажите, что выбор потенциала A, удовлетворяющего дополнительному требованию $\nabla \cdot A = 0$, сводится к решению уравнения Пуассона, точнее к отысканию скалярной функции ψ, которая при заданной скалярной функции f удовлетворяет уравнению $\Delta\psi = f$.

d Покажите, что если потенциал A статического магнитного поля B выбрать так, что $\nabla \cdot A = 0$, то он будет удовлетворять следующему векторному уравнению Пуассона: $\Delta A = -\dfrac{j}{\varepsilon_0 c^2}$. Таким образом, привлечение потенциалов позволяет свести отыскание электростатических (задача 3) и магнитостатических полей к решению уравнения Пуассона

13. Известна следующая *теорема Гельмгольца* *): *любое гладкое в области D евклидова ориентированного пространства $\mathbb{R}^3$ поле F можно разложить в сумму $F = F_1 + F_2$ безвихревого поля F_1 и соленоидального поля F_2* Покажите, что построение такого разложения можно свести к решению некоторого уравнения Пуассона

14. Пусть данная масса некоторого вещества переходит из состояния, характеризуемого термодинамическими параметрами V_0, P_0, (T_0), в состояние V, P, (T). Предположим, что процесс протекает медленно (квазистатически) и идет по пути γ плоскости состояний (с координатами V, P) В термодинамике доказывается, что величина $S = \displaystyle\int_\gamma \frac{\delta Q}{T}$, где δQ — форма теплообмена,

*) Г. Л. Ф. Гельмгольц (1821—1894) — немецкий физик и математик, один из первооткрывателей общего закона сохранения энергии Кстати, именно он впервые четко разделил понятия силы и энергии

зависит только от начала (V_0, P_0) и конца (V, P) пути, т. е. после фиксирования одной из этих точек, например (V_0, P_0), S становится функцией состояния (V, P) рассматриваемой системы Эта функция называется *энтропией* системы.

a Выведите отсюда, что форма $\omega=\frac{\delta Q}{T}$ является точной, причем $\omega=dS$

b. Используя указанный в задаче 6 § 1 гл. XIII вид формы δQ для идеального газа, найдите энтропию идеального газа.

§ 4. Примеры приложений

Чтобы показать введенные выше понятия в работе, а также пояснить физический смысл формулы Гаусса — Остроградского — Стокса как закона сохранения, мы рассмотрим здесь в качестве иллюстрации вывод некоторых важных уравнений математической физики.

1. Уравнение теплопроводности. Изучается скалярное поле $T=T(x, y, z, t)$ температуры наблюдаемого тела как функция точки (x, y, z) тела и времени t. В результате теплообмена между различными частями тела поле T может как-то меняться. Однако это изменение не произвольно, а подчинено определенному закону, который мы и хотим в явном виде выписать.

Пусть D — некоторая объемная часть наблюдаемого тела, ограниченная поверхностью S. Если в D нет источников тепла, то изменение внутренней энергии содержащегося в D вещества может происходить только в результате теплообмена, т. е. в данном случае путем переноса энергии через границу S области D.

Подсчитав отдельно изменение внутренней энергии в объеме D и поток энергии через поверхность S, мы на основе закона сохранения энергии приравняем эти величины и получим нужное соотношение.

Известно, что для увеличения на ΔT температуры однородной массы m требуется тепловая энергия в количестве $cm\Delta T$, где c — удельная теплоемкость рассматриваемого вещества. Значит, если за промежуток времени Δt наше поле T изменилось на величину $\Delta T=\Delta T(x, y, z, t+\Delta t)-T(x, y, z, t)$, то внутренняя энергия в области D изменилась на величину

$$\iiint\limits_D c\rho\,\Delta T\,dV, \tag{1}$$

где $\rho=\rho(x, y, z)$ — плотность вещества.

Из эксперимента известно, что в достаточно большом диапазоне изменения температур количество тепла, протекающее в результате теплообмена через выделенную в теле площадку $d\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{n}\,d\sigma$ за единицу времени, пропорционально потоку $-\operatorname{grad}T\cdot d\boldsymbol{\sigma}$ поля $-\operatorname{grad}T$ через эту площадку (grad берется по пространственным переменным x, y, z) Коэффициент k пропорциональности зависит от вещества и называется его *коэффициентом теплопроводности*. Знак минус перед $\operatorname{grad} T$ отвечает тому, что энергия переходит от более нагретых частей тела к менее нагретым. Таким образом, за промежуток времени Δt через границу S области D в сторону внешней нормали пройдет следующая энергия (с точностью до $o(\Delta t)$):

$$dt \iint_S -k \operatorname{grad} T \cdot d\sigma. \tag{2}$$

Приравнивая величину (1) ко взятой с противоположным знаком величине (2) после деления на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем

$$\iiint_D c\rho \frac{\partial T}{\partial t}\, dV = \iint_S k \operatorname{grad} T \cdot d\sigma. \tag{3}$$

Это равенство и является уравнением на функцию T. Считая T достаточно гладкой, преобразуем равенство (3), используя формулу Гаусса — Остроградского:

$$\iiint_D c\rho \frac{\partial T}{\partial t}\, dV = \iiint_D \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)\, dV.$$

Отсюда ввиду произвольности области D, очевидно, следует, что

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T). \tag{4}$$

Мы получили дифференциальный вариант интегрального равенства (3).

Если бы в области D были источники (или стоки) тепла, интенсивность которых имела бы плотность $F(x, y, z, t)$, то вместо равенства (3) мы должны были бы написать равенство

$$\iiint_D c\rho \frac{\partial T}{\partial t}\, dV = \iint_S k \operatorname{grad} T \cdot d\sigma + \iiint_D F\, dV \tag{3'}$$

и тогда вместо (4) мы получили бы уравнение

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + F. \tag{4'}$$

Если тело считать изотропным и однородным в смысле его теплопроводности, то коэффициент k будет постоянной и уравнение (4) преобразуется к следующему каноническому виду:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + f, \tag{5}$$

где $f = \frac{F}{c\rho}$, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ — *коэффициент температуропроводности*. Уравнение (5) называется обычно *уравнением теплопроводности*.

В случае установившегося режима теплообмена, когда поле T не зависит от времени, это уравнение превращается в *уравнение Пуассона*

$$\Delta T = \varphi, \tag{6}$$

где $\varphi = -\frac{1}{a^2} f$, а если еще и тепловых источников в теле не было, то получается *уравнение Лапласа*

$$\Delta T = 0. \tag{7}$$

Решения уравнения Лапласа, как уже отмечалось, называют *гармоническими функциями*. В теплофизической интерпретации гармонические функции отвечают установившимся температурным полям в телах, тепловые потоки в которых идут без стоков и источников в самих телах, т. е. источники тепла находятся вне тела. Например, если на границе ∂V тела V поддерживать заданный тепловой режим $T|_{\partial V} = \tau$, то со временем температурное поле в теле V стабилизируется в виде некоторой гармонической функции T. Такая интерпретация решений уравнения Лапласа (7) позволяет предугадать ряд свойств гармонических функций. Например, надо полагать, что гармоническая в области V функция не может иметь внутри этой области локальных максимумов, иначе бы из этих более нагретых участков тепло только утекало и они бы охлаждались вопреки предположению о том, что поле стационарно.

2. Уравнение неразрывности. Пусть $\rho = \rho(x, y, z, t)$ — плотность некоторой материальной среды, заполняющей наблюдаемое пространство, а $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ — поле скоростей движения среды как функция точки (x, y, z) пространства и времени t.

Исходя из закона сохранения количества вещества, пользуясь формулой Гаусса — Остроградского, укажем взаимосвязь этих величин.

Пусть D — область в наблюдаемом пространстве, ограниченная поверхностью S. За промежуток времени Δt количество вещества в области D изменяется на величину

$$\iiint\limits_D (\rho(x, y, z, t+\Delta t) - \rho(x, y, z, t))\, dV.$$

За малый промежуток времени Δt поток вещества через поверхность S в сторону внешней нормали к S равен (с точностью до $o(\Delta t)$) величине

$$\Delta t \cdot \iint\limits_S \rho \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Если в области D не было источников и стоков, то в силу закона сохранения количества вещества

$$\iiint\limits_D \Delta\rho\, dV = -\Delta t \iint\limits_S \rho \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

или в пределе при $\Delta t \to 0$

$$\iiint\limits_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\iint\limits_S \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Применяя к правой части этого равенства формулу Гаусса — Остроградского и учитывая, что D — произвольная область, заключаем, что для достаточно гладких функций ρ, $\boldsymbol{v}$ должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}), \tag{8}$$

называемое *уравнением неразрывности* сплошной среды.

В векторных обозначениях уравнение неразрывности запишется в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{8'}$$

или, в более развернутом виде,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{8''}$$

Если среда несжимаема (жидкость), то объемный расход среды через замкнутую поверхность S должен быть нулевым:

$$\iint\limits_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

откуда (на основании той же формулы Гаусса — Остроградского) следует, что для несжимаемой среды

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{9}$$

Значит, для несжимаемой среды переменной плотности (вода и масло) уравнение (8″) приводится к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho. \tag{10}$$

Если среда еще и однородна, то $\nabla \rho = 0$, и потому $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

3. Основные уравнения динамики сплошной среды. Выведем теперь уравнения динамики движущейся в пространстве сплошной среды. Наряду с уже рассмотренными выше функциями ρ, $\boldsymbol{v}$, которые и здесь будут обозначать плотность и скорость среды в данной точке (x, y, z) пространства в момент времени t, рассмотрим давление $p = p(x, y, z, t)$ как функцию точки пространства и времени.

Выделим в пространстве, занятом средой, область D, ограниченную поверхностью S, и рассмотрим силы, действующие на выделенный объем среды в фиксированный момент времени.

На каждый элемент $\rho\, dV$ массы среды могут действовать некоторые силовые поля (например, гравитационное). Эти поля создают так называемые *массовые силы*. Пусть $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x, y, z, t)$ — плотность создаваемых внешними полями массовых сил. Тогда со стороны таких полей на элемент массы $\rho\, dV$ действует сила $\boldsymbol{F}\rho\, dV$. Если указанный элемент в рассматриваемый момент времени имеет ускорение $\boldsymbol{a}$, то по закону Ньютона это эквивалентно наличию еще массовой силы инерции, равной $-\boldsymbol{a}\rho\, dV$.

Наконец, на каждый элемент $d\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{n}\, d\sigma$ поверхности S со стороны частиц среды, соседних с попавшими в D, действует поверхностная сила $-p\, d\boldsymbol{\sigma}$, вызванная давлением (здесь $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к S).

По принципу Даламбера в каждый момент движения любой материальной системы все силы, приложенные к ней, включая и силы инерции, взаимно уравновешиваются, т. е. их равнодействующая должна быть равна нулю. В нашем случае это означает, что

$$\iiint\limits_D (\boldsymbol{F}-\boldsymbol{a})\rho\, dV - \iint\limits_S p\, d\boldsymbol{\sigma} = 0. \tag{11}$$

Первый член этой суммы есть равнодействующая массовых сил и сил инерции, а второй дает равнодействующую давления на поверхность S, ограничивающую рассматриваемый объем. Мы для простоты считаем, что имеем дело с идеальной (не вязкой) жидкостью или газом, в которых давление на площадку $d\boldsymbol{\sigma}$ имеет вид $p\, d\boldsymbol{\sigma}$, где число p не зависит от ориентации площадки в пространстве.

Применяя формулу (10) из § 2, на основании равенства (11) получаем

$$\iiint\limits_D (\boldsymbol{F}-\boldsymbol{a})\rho\, dV - \iiint\limits_D \operatorname{grad} p\, dV = 0,$$

откуда ввиду произвольности области D, очевидно, следует, что

$$\rho\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p. \tag{12}$$

В таком локальном виде уравнение движения среды вполне соответствует уравнению Ньютона движения материальной частицы.

Ускорение $\boldsymbol{a}$ частицы среды есть производная $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ от скорости $\boldsymbol{v}$ этой частицы. Если $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ — закон движения частицы в пространстве, а $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ — поле скоростей среды, то для любой индивидуальной частицы получаем

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

или

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}.$$

Таким образом, уравнение движения (12) приобретает следующую форму:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \tag{13}$$

или

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{14}$$

Уравнение (14) обычно называется *гидродинамическим уравнением Эйлера.*

Векторное уравнение (14) равносильно системе трех скалярных уравнений на три компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ и еще на пару функций ρ, p.

Таким образом, уравнение Эйлера еще не вполне определяет движение идеальной сплошной среды. К нему, правда, естественно добавить уравнение неразрывности (8), но и тогда система еще будет недоопределена.

Чтобы движение среды стало определенным, к уравнениям (8) и (14) следует добавить еще информацию о термодинамическом состоянии среды (например, уравнение состояния $f(p, \rho, T)=0$ и уравнение на теплообмен). Представление о том, что могут дать эти соотношения, читатель получит из следующего заключительного пункта этого параграфа.

4. Волновое уравнение. Рассмотрим теперь движение среды, соответствующее распространению в ней звуковой волны. Ясно, что такое движение тоже подчиняется уравнению (14), но благодаря специфике явления это уравнение в данном случае можно упростить.

Звук есть чередующиеся состояния разрежения и уплотнения среды, причем отклонения давления от его среднего значения в звуковой волне очень малы — порядка 1%. Поэтому звуковое движение состоит в малых отклонениях элементов объема среды от положения равновесия, совершаемых с малыми скоростями. Однако скорость распространения возбуждения (волны) по среде соизмерима со средней скоростью движения молекул среды и обычно значительно превышает скорость теплообмена между различными частями рассматриваемой среды. Таким образом, звуковое движение объема газа можно рассматривать как малые колебания около положения равновесия, совершаемые без теплообмена (адиабатический процесс).

Ввиду малости самих макроскопических скоростей $\boldsymbol{v}$, пренебрегая в уравнении движения (14) членом $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{v}$, получаем равенство

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p.$$

Если по той же причине пренебречь членом вида $\frac{\partial\rho}{\partial t}\boldsymbol{v}$, то последнее равенство приводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p.$$

Применив к нему оператор ∇ (по координатам x, y, z), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v})=\nabla\cdot\rho\boldsymbol{F}-\Delta p.$$

Используя уравнение неразрывности (8′) и введя обозначение $\nabla\cdot\rho\boldsymbol{F}=-\Phi$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\Phi+\Delta p. \tag{15}$$

Если влиянием внешних полей можно пренебречь, то уравнение (15) сводится к соотношению

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\Delta p \tag{16}$$

между плотностью и давлением в звучащей среде. Поскольку процесс адиабатический, уравнение состояния $f(p,\ \rho,\ T)=0$ сводится к некоторому соотношению $\rho=\psi(p)$, из которого следует, что $\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\psi'(p)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\psi''(p)\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2$. Ввиду малости колебания давления в звуковой волне можно считать, что $\psi'(p)\equiv\psi'(p_0)$, где p_0 — равновесное давление. Тогда $\psi''=0$ и $\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\approx\psi'(p)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$. Учитывая это, из (16) получаем окончательно

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=a^2\,\Delta p, \tag{17}$$

где $a=(\psi''(p_0))^{-1/2}$. Это уравнение описывает изменение давления в среде, находящейся в состоянии звукового движения. Уравнение (17) описывает простейший волновой процесс в сплошной среде. Оно называется *однородным волновым уравнением*. Величина a имеет простой физический смысл: это скорость распространения звукового возбуждения в данной среде, т. е. скорость звука в ней (см. задачу 4).

В случае вынужденных колебаний, когда на каждый элемент объема среды действуют некоторые силы, объемная плотность распределения которых задана, уравнение (17) заменяется соответствующим уравнению (15) соотношением

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=a^2\,\Delta p+f, \tag{18}$$

которое при $f\not\equiv 0$ называют *неоднородным волновым уравнением*.

Задачи и упражнения

1. Пусть поле скоростей $\boldsymbol{v}$ движущейся сплошной среды потенциально. Покажите, что если среда несжимаема, то потенциал φ поля $\boldsymbol{v}$ является гармонической функцией, т. е. $\Delta\varphi=0$ (см (9)).

2. a. Покажите, что уравнение Эйлера (14) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right)-\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p$$

(см. задачу 1 к § 1)

b Проверьте, исходя из полученного в a уравнения, что безвихревое течение ($\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=0$) однородной несжимаемой жидкости возможно только в потенциальном ноле $\boldsymbol{F}$.

c. Оказывается (теорема Лагранжа), если в какой-то момент течение в потенциальном поле $\boldsymbol{F}=\operatorname{grad}U$ было безвихревым, то оно было и будет безвихревым всегда Такое течение, следовательно, по крайней мере локально потенциально, т е. $\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\varphi$. Проверьте, что для потенциального течения однородной несжимаемой жидкости, происходящего в потенциальном поле $\boldsymbol{F}$, в каждый момент времени выполняется соотношение

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}+\frac{p}{\rho}-U\right)=0.$$

d. Выведите из полученного равенства так называемый *интеграл Коши*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}+\frac{p}{\rho}-U=\Phi(t)$$

— соотношение, утверждающее независимость левой его части от пространственных координат.

e. Покажите, что если течение к тому же и установившееся, т. е. поле $\boldsymbol{v}$ не зависит от времени, то имеет место соотношение

$$\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}+\frac{p}{\rho}-U=\text{const},$$

называемое *интегралом Бернулли*

3. Течение, поле скоростей которого имеет вид $\boldsymbol{v}=(v_x,\ v_y,\ 0)$, естественно назвать *плоскопараллельным* или просто *плоским течением*.

a Покажите, что условия $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=0$ несжимаемости и потенциальности для плоского течения имеют соответственно следующий вид·

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial x}=0$$

b Покажите, что эти уравнения по крайней мере локально гарантируют существование функций $\psi(x,\ y)$ и $\varphi(x,\ y)$ таких, что $(-v_y,\ v_x)=\operatorname{grad}\psi$ и $(v_x,\ v_y)=\operatorname{grad}\varphi$

c. Проверьте, что линии уровня $\varphi=c_1$, $\psi=c_2$ этих функций ортогональны и покажите, что в установившемся потоке линии $\psi=c$ совпадают с траекториями движущихся частиц среды Именно поэтому функцию ψ называют *функцией тока*, в отличие от функции φ — *потенциала скоростей*.

d Покажите, в предположении достаточной гладкости функций φ, ψ, что обе они являются гармоническими функциями и удовлетворяют *системе уравнений Коши—Римана*·

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Гармонические функции, удовлетворяющие системе Коши—Римана, называют *сопряженными гармоническими функциями*

e. Проверьте, что функция $f(x)=(\varphi+i\psi)(x, y)$, где $z=x+iy$, является дифференцируемой функцией комплексного переменного z. Это и определяет связь плоских задач гидромеханики с теорией функций комплексного переменного.

4. Рассмотрим простейший вариант $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ волнового уравнения (17). Это случай плоской волны, в которой давление зависит только от координаты x точки (x, y, z) пространства.

a. Сделав замену переменных $u=x-at$, $v=x+at$, приведите это уравнение к виду $\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v}=0$ и покажите, что общий вид решения исходного уравнения таков: $p=f(x+at)+g(x-at)$, где f, g — произвольные функции класса $C^{(2)}$.

b. Истолкуйте полученное решение как две волны $f(x)$ и $g(x)$, распространяющиеся соответственно влево и вправо вдоль оси Ox со скоростью a.

c. Считая, что и в общем случае (17) величина a есть скорость распространения возбуждения, и учитывая соотношение $a=(\psi'(\rho_0))^{-1/2}$, найдите, вслед за Ньютоном, скорость c_N звука в воздухе, полагая, что температура в звуковой волне постоянна, т. е. полагая, что процесс звуковых колебаний является изотермическим $\Bigl($Уравнение состояния $\rho=\frac{\mu p}{RT}$; $R=8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{град}\cdot\text{моль}}$ — универсальная газовая постоянная; $\mu=28{,}8\ \frac{\text{г}}{\text{моль}}$ — молекулярный вес воздуха. Расчет проведите для воздуха, находящегося при температуре 0 °С, т. е. $T=273$ К. Ньютон нашел, что $c_N=280$ м/с$\Bigr)$.

d. Считая процесс звуковых колебаний адиабатическим, найдите, вслед за Лапласом, скорость c_L звука в воздухе и уточните тем самым результат c_N Ньютона (При адиабатическом процессе $p=c\rho^\gamma$. Это формула Пуассона из задачи 6 к § 1 гл. XIII. Покажите, что если $c_N=\sqrt{\frac{p}{\rho}}$, то $c_L=\gamma\sqrt{\frac{p}{\rho}}$. Для воздуха $\gamma\approx 1{,}4$. Лаплас нашел $c_L=330$ м/с, что превосходно согласуется с опытом.)

5. Используя скалярный и векторный потенциалы, систему уравнений Максвелла ((12) § 1) можно свести к волновому уравнению (точнее, к нескольким однотипным волновым уравнениям). Решив эту задачу, вы убедитесь в сказанном.

a. Из уравнения $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ вытекает, что, по крайней мере локально, $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$, где поле $\boldsymbol{A}$ — векторный потенциал поля $\boldsymbol{B}$.

b. Зная, что $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$, покажите, что из уравнения $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ следует, что, по крайней мере локально, найдется скалярная функция φ такая, что $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$.

c. Проверьте, что поля $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$ и $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ не изменятся, если вместо пары φ, $\boldsymbol{A}$ взять другую пару потенциалов $\tilde\varphi$, $\tilde{\boldsymbol{A}}$, такую, что $\tilde\varphi=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}$, $\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}+\nabla\psi$, где ψ — произвольная функция класса $C^{(2)}$.

d. Из уравнения $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ вытекает первое соотношение $-\nabla^2\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ между потенциалами φ и $\boldsymbol{A}$.

e. Из уравнения $c^2\nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}$ вытекает второе соотношение

$$c^2\nabla^2\boldsymbol{A}+c^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi+\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}$$

между потенциалами φ и $\boldsymbol{A}$.

f. Используя с, покажите, что, решив вспомогательное волновое уравнение $\Delta\psi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, не меняя полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, можно выбрать потенциалы φ и $\boldsymbol{A}$ так, чтобы они удовлетворяли дополнительному (так называемому *калибровочному*) условию $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$.

g. Покажите, что если потенциалы φ и $\boldsymbol{A}$ выбраны так, как сказано в f, то из d и e получаются искомые неоднородные волновые уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=c^2\Delta\varphi+\frac{\rho c^2}{\varepsilon_0},\quad \frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=c^2\Delta\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}$$

на потенциалы φ и $\boldsymbol{A}$. Найдя φ и $\boldsymbol{A}$, найдем и поля $\boldsymbol{E}=\nabla\varphi$, $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$.

✱ ГЛАВА XV

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ НА МНОГООБРАЗИЯХ

§ 1. Некоторые напоминания из линейной алгебры

1. Алгебра форм. Пусть X — линейное пространство, а $F^k\colon X^k \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная k-форма на X. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис в X, а $x_1 = x^{i_1} e_{i_1}, \ldots, x_k = x^{i_k} e_{i_k}$ — разложение векторов $x_1, \ldots, x_k \in X$ по этому базису, то в силу линейности F^k по каждому аргументу

$$F^k(x_1, \ldots, x_k) = F^k\left(x^{i_1} e_{i_1}, \ldots, x^{i_k} e_{i_k}\right) = \\ = F^k\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\right) x^{i_1} \cdot \ldots \cdot x^{i_k} = a_{i_1 \ldots i_k} x^{i_1} \cdot \ldots \cdot x^{i_k}. \tag{1}$$

Таким образом, после задания базиса в X, k-форму $F^k\colon X^k \to \mathbb{R}$ можно отождествить с набором определяющих ее чисел $a_{i_1 \ldots i_k} = F^k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$.

Если $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ — другой базис в X и $\tilde{a}_{j_1 \ldots j_k} = F^k(\tilde{e}_{j_1}, \ldots, \tilde{e}_{j_k})$, то, полагая $\tilde{e}_j = c_j^i e_i$, $j = 1, \ldots, n$, находим (тензорный) закон

$$\tilde{a}_{j_1 \ldots j_k} = F^k\left(c_{j_1}^{i_1} e_{i_1}, \ldots, c_{j_k}^{i_k} e_{i_k}\right) = a_{i_1 \ldots i_k} c_{j_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{j_k}^{i_k} \tag{2}$$

преобразования числовых наборов $a_{i_1 \ldots i_k}$, $\tilde{a}_{j_1 \ldots j_k}$, отвечающих одной и той же форме F^k.

Множество $\mathcal{F}^k := \{F^k\colon X^k \to \mathbb{R}\}$ k-форм на линейном пространстве X само является линейным пространством относительно стандартных операций

$$(F_1^k + F_2^k)(x) := F_1^k(x) + F_2^k(x), \tag{3}$$

$$(\lambda F^k)(x) := \lambda F^k(x) \tag{4}$$

сложения k-форм и умножения k-формы на число.

Для форм F^k, F^l произвольных степеней k и l определяется следующая операция $\otimes$ их *тензорного произведения*:

$$(F^k \otimes F^l)(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) := \\ = F^k(x_1, \ldots, x_k) F^l(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}). \tag{5}$$

Таким образом, $F^k \otimes F^l$ является формой F^{k+l} степени $k+l$. Очевидны соотношения:

$$(\lambda F^k) \otimes F^l = \lambda (F^k \otimes F^l), \tag{6}$$

$$(F_1^k + F_2^k) \otimes F^l = F^k \otimes F^l + F_2^k \otimes F^l, \tag{7}$$

$$F^k \otimes (F_1^l + F_2^l) = F^k \otimes F_1^l + F^k \otimes F_2^l, \tag{8}$$

$$(F^k \otimes F^l) \otimes F^m = F^k \otimes (F^l \otimes F^m). \tag{9}$$

Итак, множество $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}^k\}$ форм на линейном пространстве X относительно введенных операций является градуированной алгеброй $\mathcal{F} = \bigoplus\limits_k \mathcal{F}^k$, в которой линейные операции выполняются в пределах каждого входящего в прямую сумму пространства $\mathcal{F}^k$, и если $F^k \in \mathcal{F}^k$, $F^l \in \mathcal{F}^l$, то $F^k \otimes F^l \in \mathcal{F}^{k+l}$.

Пример 1. Пусть X^* — сопряженное к X пространство (состоящее из линейных функций на X) и $e^1, \ldots, e^n$ — базис в X^*, взаимный с базисом $e_1, \ldots, e_n$ в X, т. е. $e^i(e_j) = \delta_j^i$.

Поскольку $e^i(x) = e^i(x^j e_j) = x^j e^i(e_j) = x^j \delta_j^i = x^i$, то, учитывая (1) и (9), любую k-форму F^k: $X \to \mathbb{R}$ можно записать в виде

$$F^k = a_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}. \tag{10}$$

2. Алгебра кососимметрических форм. Рассмотрим теперь в $\mathcal{F}^k$ подпространство Ω^k кососимметрических k-форм, т. е. $\omega \in \Omega^k$, если для любых различных индексов $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место равенство

$$\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) = -\omega(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k).$$

Из любой формы $F^k \in \mathcal{F}^k$ можно получить кососимметрическую форму с помощью операции A: $\mathcal{F}^k \to \Omega^k$ *альтернирования форм*, определяемой соотношением

$$AF^k(x_1, \ldots, x_k) := \frac{1}{k!} F^k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \delta_{1 \ldots k}^{i_1 \ldots i_k}, \tag{11}$$

где

$$\delta_{1 \ldots k}^{i_1 \ldots i_k} = \begin{cases} 1, & \text{если подстановка } \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_k \\ 1 & \ldots & k \end{pmatrix} \text{ четная,} \\ -1, & \text{если подстановка } \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_k \\ 1 & \ldots & k \end{pmatrix} \text{ нечетная,} \\ 0, & \text{если } \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_k \\ 1 & \ldots & k \end{pmatrix} \text{ — не подстановка.} \end{cases}$$

Если F^k — кососимметрическая форма, то, как видно из (11), $AF^k = F^k$. Таким образом, $A(AF^k) = AF^k$ и $A\omega = \omega$, если $\omega \in \Omega^k$. Значит, A: $\mathcal{F}^k \to \Omega^k$ является отображением $\mathcal{F}^k$ *на* Ω^k.

Сопоставляя определения (3), (4), (11), получаем

$$A\left(F_1^k+F_2^k\right)=AF_1^k+AF_2^k, \tag{12}$$

$$A\left(\lambda F^k\right)=\lambda AF^k. \tag{13}$$

Пример 2. С учетом соотношений (12), (13) из разложения (10) получается, что

$$AF^k=a_{i_1\ldots i_k}A\left(e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_k}\right),$$

поэтому интересно найти $A\left(e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_k}\right)$.

Из определения (11) с учетом того, что $e^i(x)=x^i$, находим

$$A\left(e^{j_1}\otimes\ldots\otimes e^{j_k}\right)(x_1,\ \ldots,\ x_k)=\frac{1}{k!}e^{j_1}\left(x_{i_1}\right)\cdot\ldots\cdot e^{j_k}\left(x_{i_k}\right)\delta_{1\ldots k}^{i_1\ldots i_k}=$$

$$=\frac{1}{k!}x_{i_1}^{j_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}^{j_k}\delta_{1\ldots k}^{i_1\ldots i_k}=\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} x_1^{j_1} & \ldots & x_1^{j_k}\\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\\ x_k^{j_1} & \ldots & x_k^{j_k}\end{vmatrix}. \tag{14}$$

Тензорное произведение кососимметрических форм, вообще говоря, уже не является кососимметрической формой, поэтому в классе кососимметрических форм вводится следующая операция $\wedge$ их *внешнего произведения*:

$$\omega^k\wedge\omega^l:=\frac{(k+l)!}{k!\,l!}A\left(\omega^k\otimes\omega^l\right). \tag{15}$$

Таким образом, $\omega^k\wedge\omega^l$ есть кососимметрическая форма ω^{k+l} степени $k+l$.

Пример 3. Опираясь на результат (14) примера 2, из определения (15) находим

$$e^{i_1}\wedge e^{i_2}(x_1,\ x_2)=\frac{2!}{1!\,1!}A\left(e^{i_1}\otimes e^{i_2}\right)(x_1,\ x_2)=$$

$$=\begin{vmatrix} e^{i_1}(x_1) & e^{i_2}(x_1)\\ e^{i_1}(x_2) & e^{i_2}(x_2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & x_1^{i_2}\\ x_2^{i_1} & x_2^{i_2}\end{vmatrix}. \tag{16}$$

Пример 4. Используя полученное в примере 3 равенство, соотношение (14) и определения (11), (15), можно написать, что

$$e^{i_1}\wedge\left(e^{i_2}\wedge e^{i_3}\right)(x_1,\ x_2,\ x_3)=$$

$$=\frac{(1+2)!}{1!\,2!}A\left(e^{i_1}\otimes\left(e^{i_2}\wedge e^{i_3}\right)\right)(x_1,\ x_2,\ x_3)=$$

$$=\frac{3!}{2!\,3!}e^{i_1}\left(x_{j_1}\right)\left(e^{i_2}\wedge e^{i_3}\right)\left(x_{j_2},\ x_{j_3}\right)\delta_{1\,2\,3}^{j_1j_2j_3}=$$

$$=\frac{1}{2!}x_{j_1}^{i_1}\begin{vmatrix} x_{j_2}^{i_2} & x_{j_2}^{i_3}\\ x_{j_3}^{i_2} & x_{j_3}^{i_3}\end{vmatrix}\delta_{1\,2\,3}^{j_1j_2j_3}=x_1^{i_1}\begin{vmatrix} x_2^{i_2} & x_2^{i_3}\\ x_3^{i_2} & x_3^{i_3}\end{vmatrix}-x_2^{i_1}\begin{vmatrix} x_1^{i_2} & x_1^{i_3}\\ x_3^{i_2} & x_3^{i_3}\end{vmatrix}+x_3^{i_1}\begin{vmatrix} x_1^{i_2} & x_1^{i_3}\\ x_2^{i_2} & x_2^{i_3}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & x_1^{i_2} & x_1^{i_3}\\ x_2^{i_1} & x_2^{i_2} & x_2^{i_3}\\ x_3^{i_1} & x_3^{i_2} & x_3^{i_3}\end{vmatrix}.$$

Аналогичная выкладка показывает, что

$$e^{i_1}\wedge(e^{i_2}\wedge e^{i_3})=(e^{i_1}\wedge e^{i_2})\wedge e^{i_3}. \tag{17}$$

Используя разложение определителя по столбцу, на основании принципа индукции заключаем, что

$$e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}(x_1, \ldots, x_k)=\begin{vmatrix} e^{i_1}(x_1) & \ldots & e^{i_k}(x_1)\\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\\ e^{i_1}(x_k) & \ldots & e^{i_k}(x_k)\end{vmatrix}, \tag{18}$$

причем, как видно из проведенных выкладок, формула (18) справедлива для любых 1-форм $e^{i_1}, \ldots, e^{i_k}$ (не обязательно базисных форм пространства X^*).

Учитывая перечисленные выше свойства тензорного произведения и альтернирования форм, получаем следующие свойства внешнего произведения кососимметрических форм:

$$(\omega_1^k+\omega_2^k)\wedge\omega^l=\omega_1^k\wedge\omega^l+\omega_2^k\wedge\omega^l, \tag{19}$$

$$(\lambda\omega^k)\wedge\omega^l=\lambda(\omega^k\wedge\omega^l), \tag{20}$$

$$\omega^k\wedge\omega^l=(-1)^{kl}\omega^l\wedge\omega^k, \tag{21}$$

$$(\omega^k\wedge\omega^l)\wedge\omega^m=\omega^k\wedge(\omega^l\wedge\omega^m). \tag{22}$$

◀ Равенства (19), (20), очевидно, следуют из соотношений (6)—(8) и (12), (13).

Из соотношений (10)—(14) и (17) для любой кососимметрической формы $\omega=a_{i_1\ldots i_k}e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_k}$ получаем

$$\omega=A\omega=a_{i_1\ldots i_k}A(e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_k})=\frac{1}{k!}a_{i_1\ldots i_k}e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}.$$

Используя уже доказанные равенства (19), (20), теперь для доказательства равенств (21), (22) их достаточно проверить лишь для форм вида $e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}$.

Ассоциативность (22) для таких форм уже установлена равенством (17).

Из равенства (18) и свойств определителей для указанных специальных форм немедленно получаем соотношение (21). ▶

Заодно мы показали, что любая форма $\omega\in\Omega^k$ может быть представлена в виде

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} a_{i_1\ldots i_k}e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}. \tag{23}$$

Итак, множество $\Omega=\{\Omega^k\}$ кососимметрических форм на векторном пространстве X относительно линейных операций (3), (4) и внешнего умножения (15) является градуированной алгеброй $\Omega=\bigoplus\limits_{k=0}^{\dim X}\Omega^k$. Линейные операции на Ω выполняются в пределах каждого линейного пространства Ω^k, и если $\omega^k \in \Omega^k$, $\omega^l \in \Omega^l$, то $\omega^k \wedge \omega^l \in \Omega^{k+l}$.

В прямой сумме $\bigoplus \Omega^k$ суммирование ведется от нуля до размерности пространства X, поскольку кососимметрические формы ω^k: $X^k \to \mathbb{R}$, степень которых выше размерности линейного пространства X, обязательно тождественно равны нулю, что видно из соотношения (21) (или из соотношений (23) и (18)).

3. Линейные отображения линейных пространств и сопряженные отображения сопряженных пространств. Пусть X и Y — линейные пространства над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел (или над любым иным, но одним и тем же для X и Y полем) и пусть l: $X \to Y$ — линейное отображение X в Y, т. е. для любых x, x_1, $x_2 \in X$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено

$$l(x_1+x_2)=l(x_1)+l(x_2) \quad \text{и} \quad l(\lambda x)=\lambda l(x). \tag{24}$$

Линейное отображение l: $X \to Y$ естественным образом порождает сопряженное с ним отображение l^*: $\mathcal{F}_Y \to \mathcal{F}_X$ множества $\mathcal{F}_Y$ заданных на Y полилинейных форм в аналогичное множество $\mathcal{F}_X$. Если F_Y^k — k-форма на Y, то по определению

$$\left(l^* F_Y^k\right)(x_1, \ldots, x_k) := F_Y^k(lx_1, \ldots, lx_k). \tag{25}$$

Из (24) и (25) видно, что $l^*F_Y^k$ есть k-форма F_X^k на пространстве X, т. е. $l^*\left(\mathcal{F}_Y^k\right) \subset \mathcal{F}_X^k$. Более того, если форма F_Y^k была кососимметрической, то форма $\left(l^*F_Y^k\right)=F_X^k$ тоже кососимметрическая, т. е. $l^*\left(\Omega_Y^k\right) \subset \Omega_X^k$. Отображение l^* в пределах каждого линейного пространства $\mathcal{F}_Y^k$ или Ω_Y^k, очевидно, линейно, т. е.

$$l^*\left(F_1^k+F_2^k\right)=l^*F_1^k+l^*F_2^k \quad \text{и} \quad l^*(\lambda F^k)=\lambda l^*F^k. \tag{26}$$

Сопоставляя теперь определение (25) с определениями (5), (11), (15) тензорного произведения, альтернирования и внешнего произведения форм, заключаем, что

$$l^*(F^p \otimes F^q)=(l^*F^p) \otimes (l^*F^q), \tag{27}$$

$$l^*(AF^p)=A(l^*F^p), \tag{28}$$

$$l^*(\omega^p \wedge \omega^q)=(l^*\omega^p) \wedge (l^*\omega^q). \tag{29}$$

Пример 5. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — базис в X, $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ — базис в Y, а $l(e_i)=c_i^j\tilde{e}_j$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Если k-форма F_Y^k в базисе $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ имеет координатное представление

$$F_Y^k(y_1, \ldots, y_k)=b_{j_1 \ldots j_k} y_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot y_k^{j_k},$$

где $b_{j_1 \ldots j_k}=F_Y^k\left(\tilde{e}_{j_1}, \ldots, \tilde{e}_{j_k}\right)$, то

$$\left(l^*F_Y^k\right)(x_1, \ldots, x_k)=a_{i_1 \ldots i_k} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k},$$

где $a_{i_1 \dots i_k} = b_{j_1 \dots j_k} c_{i_1}^{j_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}^{j_k}$, поскольку

$$a_{i_1 \dots i_k} =: (l^* F_Y^k)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) := F_Y^k(le_{i_1}, \dots, le_{i_k}) =$$
$$= F_Y^k\left(c_{i_1}^{j_1}\tilde{e}_{j_1}, \dots, c_{i_k}^{j_k}\tilde{e}_{j_k}\right) = F_Y^k(\tilde{e}_{j_1}, \dots, \tilde{e}_{j_k}) c_{i_1}^{j_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}^{j_k}.$$

Пример 6. Пусть $e^1, \dots, e^m$ и $\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n$ — базисы сопряженных пространств X^*, Y^*, взаимные (или сопряженные) с указанными в примере 5 базисами пространств X и Y соответственно. В условиях примера 5 получаем

$$(l^*\tilde{e}^j)(x) = (l^*\tilde{e}^j)(x^i e_i) = \tilde{e}^j(x^i l e_i) = x^i \tilde{e}^j(c_i^k \tilde{e}_k) =$$
$$= x^i c_i^k \tilde{e}^j(\tilde{e}_k) = x^i c_i^k \delta_k^j = c_i^j x^i = c_i^j e^i(x).$$

Пример 7. Сохраняя обозначения примера 6 и учитывая соотношения (22), (29), теперь получаем

$$l^*(\tilde{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{e}^{j_k}) = l^*\tilde{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge l^*\tilde{e}^{j_k} =$$
$$= \left(c_{i_1}^{j_1} e^{i_1}\right) \wedge \ldots \wedge \left(c_{i_k}^{j_k} e^{i_k}\right) = c_{i_1}^{j_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}^{j_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} =$$
$$= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} \begin{vmatrix} c_{i_1}^{j_1} & \dots & c_{i_1}^{j_k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{i_k}^{j_1} & \dots & c_{i_k}^{j_k} \end{vmatrix} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}.$$

Принимая во внимание равенства (26), отсюда можно сделать вывод, что вообще

$$l^*\left(\sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} b_{j_1 \dots j_k} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_k}\right) =$$
$$= \sum_{\substack{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m \\ 1 \le j_1 < \dots < j_k \le n}} b_{j_1 \dots j_k} \begin{vmatrix} c_{i_1}^{j_1} & \dots & c_{i_1}^{j_k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{i_k}^{j_1} & \dots & c_{i_k}^{j_k} \end{vmatrix} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} =$$
$$= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} a_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}.$$

Задачи и упражнения

1. Покажите на примерах, что, вообще говоря,
a) $F^k \otimes F^l \ne F^l \otimes F^k$;
b) $A(F^k \otimes F^l) \ne AF^k \otimes AF^l$;
c) если $F^k, F^l \in \Omega$, то не всегда $F^k \otimes F^l \in \Omega$.

2. a. Покажите, что если $e_1, \dots, e_n$ — базис линейного пространства X, а линейные функции $e^1, \dots, e^n$ на X (т. е. элементы сопряженного к X пространства X^*) таковы, что $e^j(e_i) = \delta_i^j$, то $e^1, \dots, e^n$ — базис в X^*.

b. Проверьте, что из k-форм вида $e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}$ можно образовать базис пространства $\mathcal{F}^k = \mathcal{F}^k(X)$ и найдите размерность $(\dim \mathcal{F}^k)$ этого пространства, зная, что $\dim X = n$.

c. Проверьте, что из форм вида $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$ можно образовать базис пространства $\Omega^k = \Omega^k(X)$ и найдите $\dim \Omega^k$, зная, что $\dim X = n$

d. Покажите, что если $\Omega = \bigoplus\limits_{k=0}^{k=n} \Omega^k$ то $\dim \Omega = 2^n$

3. *Внешняя* (*грассманова* *)) *алгебра* G над линейным пространством X и полем P (обозначаемая обычно символом $\bigwedge(X)$ в соответствии с символом $\wedge$ операции умножения в G) определяется как ассоциативная алгебра с единицей 1, обладающая следующими свойствами:

1° G порождается единицей 1 и X, т. е любая подалгебра в G, содержащая 1 и X, совпадает с G;

2° $x \wedge x = 0$ для любого вектора $x \in X$;

3° $\dim G = 2^{\dim X}$.

a. Покажите, что если $e_1, \ldots, e_n$ — базис в X, то совокупность $1, e_1, \ldots, e_n, e_1 \wedge e_2, \ldots, e_{n-1} \wedge e_n, \ldots, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ элементов G вида $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} =: e_I$, где $I = \{i_1 < \ldots < i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, образует базис в G.

b Исходя из полученного в a результата, можно провести следующее формальное построение алгебры $G = \bigwedge(X)$.

Для указанных в a подмножеств $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ образуем формальные элементы e_I (отождествляя $e_{\{i\}}$ с e_i, а $e_\varnothing$ с 1), которые примем за базис линейного пространства G над полем P. Умножение в G определим формулой

$$\left(\sum_I a_I e_I\right)\left(\sum_J b_J e_J\right) = \sum_{I,\,J} a_I b_J \varepsilon(I, J)\, e_{I \cup J},$$

где $\varepsilon(I, J) = \operatorname{sgn} \prod\limits_{i \in I,\, j \in J} (j - i)$. Проверьте, что при этом получается грассманова алгебра $\bigwedge(X)$.

c. Докажите единственность (с точностью до изоморфизма) алгебры $\bigwedge(X)$

d. Покажите, что алгебра $\bigwedge(X)$ градуирована $\bigwedge(X) = \bigoplus\limits_{k=0}^{k=n} \bigwedge^k(X)$, где $\bigwedge^k(X)$ — линейная оболочка элементов вида $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$; при этом, если $a \in \bigwedge^p(X)$, а $b \in \bigwedge^q(X)$, то $a \wedge b \in \bigwedge^{p+q}(X)$ Проверьте, что $a \wedge b = (-1)^{pq}\, b \wedge a$.

4. Пусть A: $X \to Y$ — линейное отображение пространства X в пространство Y. Покажите, что существует единственный гомоморфизм $\bigwedge(A)$: $\bigwedge(X) \to \bigwedge(Y)$ из $\bigwedge(X)$ в $\bigwedge(Y)$, совпадающий с A на подпространстве $\bigwedge^1(X) \subset \bigwedge(X)$, отождествляемом с X.

b. Покажите, что гомоморфизм $\bigwedge(A)$ переводит $\bigwedge^k(X)$ в $\bigwedge^k(Y)$. Сужение $\bigwedge(A)$ на $\bigwedge^k(X)$ обозначают через $\bigwedge^k(A)$.

c Пусть $\{e_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ — базис в X, а $\{\tilde{e}_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ — базис в Y, и пусть оператору A в этих базисах отвечает матрица $\left(a_j^i\right)$. Покажите, что если $\left\{e_I,\ I \subset \{1, \ldots, m\}\right\}$, $\left\{\tilde{e}_J,\ J \subset \{1, \ldots, n\}\right\}$ — соответствующие базисы пространств $\bigwedge(X)$ и $\bigwedge(Y)$, то матрица оператора $\bigwedge^k(A)$ имеет вид $a_J^I = \det\left(a_j^i\right)$, $i \in I$, $j \in J$, где $\operatorname{card} I = \operatorname{card} J = k$

d. Проверьте, что если A: $X \to Y$, B: $Y \to Z$ — линейные операторы, то справедливо равенство $\bigwedge(B \circ A) = \bigwedge(B) \circ \bigwedge(A)$

---

*) Г. Грассман (1809—1877) — немецкий математик, физик и филолог; ему, в частности, принадлежит первое систематическое построение учения о многомерном линейном и евклидовом векторном пространствах, а также само определение скалярного произведения векторов

§ 2. Многообразие

1. Определение многообразия.

Определение 1. Хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой топологии*) называется *n-мерным многообразием*, если любая его точка имеет окрестность U, гомеоморфную либо всему пространству $\mathbb{R}^n$, либо полупространству $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \leqslant 0\}$.

Определение 2. Отображение φ: $\mathbb{R}^n \to U \subset M$ (или φ: $H^n \to U \subset M$), осуществляющее указанный в определении 1 гомеоморфизм, называется *локальной картой многообразия* M, $\mathbb{R}^n$ (H^n) — *областью параметров*, а U — *районом* или *областью действия* карты на многообразии M.

Локальная карта наделяет каждую точку $x \in U$ координатами соответствующей ей точки $t = \varphi^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, в районе U действия карты вводится локальная система координат, и потому отображение φ или, в более развернутой записи, пара (U, φ) в самом привычном смысле слова является картой района U.

Определение 3. Набор карт, районы действия которых в совокупности покрывают все многообразие, называется *атласом многообразия*.

Пример 1. Сфера $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ является двумерным многообразием. Если S^2 интерпретировать как поверхность Земли, то атлас географических карт будет атласом многообразия S^2.

Одномерная сфера $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$ — окружность в $\mathbb{R}^2$, очевидно, является одномерным многообразием. Вообще, сфера $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ является n-мерным многообразием. (См гл. XII, § 1.)

Замечание 1. Вводимый определением 1 объект (многообразие M), очевидно, не изменится, если вместо $\mathbb{R}^n$ и H^n брать любые гомеоморфные $\mathbb{R}^n$ и H^n области параметров в пространстве $\mathbb{R}^n$ Например, это могут быть открытый куб $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x^i < 1, = 1, \ldots, n\}$ и куб с присоединенной к нему гранью $\tilde{I}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x^1 \leqslant 1$ и $0 < x^i < 1,\ i = 2, \ldots, n\}$. Такими стандартными областями параметров довольно часто пользуются.

Нетрудно также проверить, что вводимый определением 1 объект не изменится, если потребовать лишь, чтобы каждая точка $x \in M$ имела в M окрестность U, гомеоморфную некоторому открытому подмножеству полупространства H^n.

Пример 2. Если X — m-мерное многообразие с атласом карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, а Y — n-мерное многообразие с атласом $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$, то $X \times Y$ можно рассматривать как $(m+n)$-мерное многообразие с атласом $\{(W_{\alpha\beta}, \chi_{\alpha\beta})\}$, где $W_{\alpha\beta} = U_\alpha \times V_\beta$, а отображение $\chi_{\alpha\beta} =$

*) См гл IX, § 2, а также замечания 2, 3 настоящего параграфа.

$=(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)$ переводит в $W_{\alpha\beta}$ прямое произведение областей определение φ_α и φ_β.

В частности, двумерный тор $T^2 = S^1 \times S^1$ (рис. 69) или n-мерный тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ раз}}$ являются многообразиями соответствующей размерности.

Если районы U_i, U_j действия двух карт (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) многообразия M пересекаются, т. е. $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, то между множествами $I_{ij} = \varphi_i^{-1}(U_j)$, $I_{ji} = \varphi_j^{-1}(U_i)$ естественно устанавливаются взаимно обратные гомеоморфизмы φ_{ij}: $I_{ij} \to I_{ji}$, $\varphi_{ji} = I_{ji} \to I_{ij}$, где $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i|_{I_{ij}}$, $\varphi_{ji} = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j|_{I_{ji}}$. Эти гомеоморфизмы часто называют *функциями замены координат*, поскольку они осуществляют переход от одной системы локальных координат к другой такой же системе в общей области $U_i \cap U_j$ их действия (рис. 96).

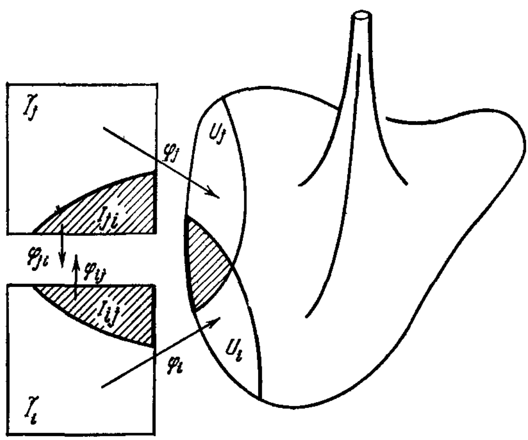

Рис. 96.

Определение 4. Число n в определении 1 называется *размерностью многообразия* M и обычно обозначается символом $\dim M$.

Определение 5. Если при указанном в определении 1 гомеоморфизме $\varphi: H^n \to U$ точке $x \in U$ соответствует точка $\varphi^{-1}(x)$ на границе ∂H^n полупространства H^n, то x называют *точкой края многообразия* M (и окрестности U). Совокупность всех точек края многообразия M называется *краем* этого *многообразия* и обычно обозначается символом ∂M.

В силу топологической инвариантности внутренних точек (теорема Брауэра *)) понятия размерности и точки края многооб-

*) Теорема утверждает, что при гомеоморфном отображении φ: $E \longmapsto \varphi(E)$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ на множестве $\varphi(E) \subset \mathbb{R}^n$ внутренние точки множества E преобразуются во внутренние точки множества $\varphi(E)$.

разия определены корректно, т. е. не зависят от используемых в определениях 4 и 5 индивидуальных локальных карт. Теорему Брауэра мы не доказывали, но инвариантность внутренних точек относительно диффеоморфизмов нам хорошо известна (это следствие теоремы об обратной функции). Поскольку в дальнейшем нам придется иметь дело именно с диффеоморфизмами, мы не останавливаемся здесь на теореме Брауэра.

Пример 3. Замкнутый шар $\bar{B}^n=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x|\leqslant 1\}$ или, как говорят, замкнутый *n-мерный диск*, является n-мерным многообразием, краем которого является $(n-1)$-мерная сфера $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x|=1\}$.

Замечание 2. Многообразие M, множество точек края которого непусто, обычно называют *многообразием с краем*, оставляя термин *многообразие* (в собственном смысле слова) за многообразиями без края. В определении 1 эти случаи не разделены.

Утверждение 1. *Край ∂M n-мерного многообразия с краем M является $(n-1)$-мерным многообразием без края.*

◀ Действительно, $\partial H^n=\mathbb{R}^{n-1}$, а сужение на ∂H^n карт вида φ_i: $H^n\to U_i$ атласа многообразия M порождает атлас ∂M. ▶

Пример 4. Рассмотрим плоский двойной маятник (рис. 97), плечо a которого много меньше плеча b и может вращаться свободно, а размах колебаний плеча b ограничен упорами. Конфигурация такой системы в любой конкретный момент характеризуется двумя углами α, β. Если бы ограничений не было, то конфигурационное пространство двойного маятника, очевидно, можно было бы отождествить с двумерным тором $T^2=S^1_\alpha\times S^1_\beta$.

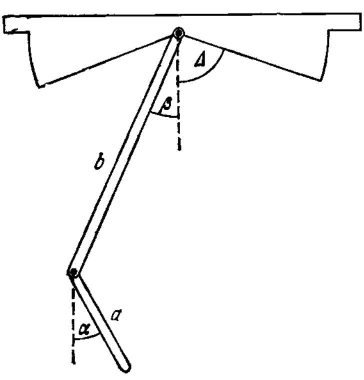

Рис. 97.

При наличии указанных ограничений конфигурационное пространство двойного маятника параметризуется точками цилиндра $S^1_\alpha\times I^1_\beta$, где S^1_α — окружность, отвечающая возможным положениям плеча a, а $I^1_\beta=\{\beta\in\mathbb{R}\,|\,|\beta|\leqslant\Delta\}$ — отрезок, в пределах которого может меняться угол β, характеризующий положение плеча b.

В этом случае мы получаем многообразие с краем. Край этого многообразия состоит из двух окружностей $S^1_\alpha\times\{-\Delta\}$, $S^1_\alpha\times\{\Delta\}$, являющихся произведением окружности S^1_α и концов $\{-\Delta\}$, $\{\Delta\}$ отрезка I^1_β.

Замечание 3. На рассмотренном примере 4 видно, что порой координаты на множестве M (в примере это α, β) возникают естественным образом и они сами вводят на M топологию. Значит, в определении 1 многообразия нет нужды всегда заранее требовать, чтобы на M уже была топология. Суть понятия многообразия в том, что точки некоторого множества M параметризуются точками некоторого набора подобластей пространства $\mathbb{R}^n$. Между появляющимися при этом на частях M системами координат возникает естественная связь, которая выражается в отображениях соответствующих областей пространства $\mathbb{R}^n$. Значит, можно считать, что M получается из набора областей пространства $\mathbb{R}^n$ указанием закона отождествления их точек или, описательно говоря, путем указания закона их подклейки друг к другу. Итак, задать многообразие по существу означает — задать набор подобластей $\mathbb{R}^n$ и закон соответствия точек этих подобластей. На дальнейших уточнениях сказанного (формализации понятия склеивания или отождествления точек, введении топологии на M и т. п.) мы не задерживаемся.

Определение 6. Многообразие называется *компактным* (*связным*), если оно является компактом (связно) как топологическое пространство.

Рассмотренные в примерах 1—4 многообразия компактны и связны. Край появившегося в примере 4 цилиндра $S^1_\alpha \times I^1_\beta$ состоит из двух независимых окружностей и является одномерным компактным, но несвязным многообразием. Край $S^{n-1} = \partial\bar{B}^n$ n-мерного диска из примера 3 является компактным многообразием, которое связно при $n > 1$ и несвязно (состоит из двух точек) при $n = 1$.

Пример 5. Само пространство $\mathbb{R}^n$, очевидно, является связным, некомпактным многообразием без края, а полупространство H^n доставляет простейший пример связного некомпактного многообразия с краем. (И в том и в другом случае атлас можно взять состоящим из единственной карты, отвечающей тождественному отображению.)

Утверждение 2. *Если многообразие M связно, то оно линейно связно.*

◀ Фиксировав точку $x_0 \in M$ рассмотрим множество E_{x_0} тех точек многообразия M, которые можно соединить с x_0 в пределах M некоторым путем. Множество E_{x_0}, как видно из определения многообразия, непусто, открыто и замкнуто в M Но тогда $E_{x_0} = M$. ▶

Пример 6. Если каждой квадратной вещественной матрице порядка n сопоставить точку пространства $\mathbb{R}^{n^2}$, координаты которой получаются выписыванием в определенном порядке всех элементов матрицы, то группа $GL(n, \mathbb{R})$ всех невырожденных матриц порядка n превращается в n^2-мерное многообразие. Это многообразие некомпактно (элементы матриц никак не ограничены) и несвязно. Последнее вытекает из того, что $GL(n, \mathbb{R})$ содержит матрицы как с положительным, так и с отрицательным определителем. Точки $GL(n, \mathbb{R})$, отвечающие двум таким матрицам, нельзя соединить путем (на котором бы тогда появилась точка, соответствующая матрице, имеющей определитель, равный нулю).

Пример 7. Группа $SO(2, \mathbb{R})$ ортогональных преобразований плоскости $\mathbb{R}^2$, имеющих определитель, равный единице, состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ и, таким образом, может считаться многообразием, которое отождествляется с окружностью — областью изменения углового параметра α. Таким образом, $SO(2, \mathbb{R})$ — одномерное компактное связное многообразие. Если допустить и отражения относительно прямых в плоскости $\mathbb{R}^2$, то мы получим группу $O(2, \mathbb{R})$ всех вещественных ортогональных матриц второго порядка. Ее естественно можно отождествить с двумя различными окружностями, отвечающими матрицам с определителем 1 и -1 соответственно. То есть $O(2, \mathbb{R})$ — одномерное компактное, но несвязное многообразие.

Пример 8. Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор плоскости $\mathbb{R}^2$ и T_a — группа движений плоскости, порожденная вектором a. Элементами группы T_a являются сдвиги на векторы вида na, где $n \in \mathbb{Z}$. Под действием элементов g группы T_a каждая точка x плоскости смещается в точки $g(x)$ вида $x + na$. Совокупность точек, в которые данная точка $x \in \mathbb{R}^2$ переходит под действием элементов данной группы преобразований, называется *орбитой этой точки*. Свойство точек $\mathbb{R}^2$ принадлежать одной орбите, очевидно, является отношением эквивалентиости на $\mathbb{R}^2$ и орбиты являются классами эквивалентных в этом смысле точек. Область в $\mathbb{R}^2$, содержащая по одной точке каждой орбиты, называют *фундаментальной областью* данной группы автоморфизмов (уточнение см. в задаче 5d).

В нашем случае в качестве фундаментальной области можно взять полосу ширины $|a|$, ограниченную двумя параллельными прямыми, ортогональными вектору $\boldsymbol{a}$. Следует только учесть, что сами эти прямые получаются друг из друга сдвигом на a и $-\boldsymbol{a}$ соответственно. В пределах ортогональной a полосы ширины, меньшей чем $|\boldsymbol{a}|$, нет эквивалентных точек, поэтому все орбиты, имеющие представителей в такой полосе, однозначно наделяются координатами своих представителей. Так фактор-множество $\mathbb{R}^2/T_a$ орбит данной группы T_a превращается в многообразие. Из сказанного выше о фундаментальной области легко понять, что это многообразие гомеоморфно цилиндру, который получается склеиванием по эквивалентным точкам граничных прямых полосы ширины $|\boldsymbol{a}|$.

Пример 9. Пусть теперь $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — пара ортогональных векторов плоскости $\mathbb{R}^2$ и $T_{a,b}$ — группа сдвигов, порожденная этими векторами. Фундаментальной областью в данном случае будет прямоугольник со сторонами $a, \boldsymbol{b}$. В пределах этого прямоугольника эквивалентными будут лишь точки, лежащие на его противоположных сторонах. После соответствующей склейки сторон фундаментального прямоугольника убеждаемся, что возникающее многообразие $\mathbb{R}^2/T_{a,b}$ гомеоморфно двумерному тору.

Пример 10. Рассмотрим еще группу $G_{a,b}$ движений плоскости $\mathbb{R}^2$, порожденную следующими преобразованиями: $a(x, y) = (x+1, 1-y)$, $b(x, y) = (x, y+1)$.

Фундаментальной областью для группы $G_{a,b}$ будет единичный квадрат, горизонтальные стороны которого отождествляются по точкам, лежащим на одной вертикали, а боковые стороны квадрата отождествляются по точкам, симметричным относительно его центра. Таким образом, возникающее многообразие $\mathbb{R}^2/G_{a,b}$ оказывается гомеоморфно бутылке Клейна (см. гл. XII, § 1).

Мы не останавливались здесь на полезных и важных примерах, которые были разобраны в § 1 гл. XII.

2. Гладкие многообразия и гладкие отображения.

Определение 7. Атлас многообразия называется *гладким* (*класса* $C^{(k)}$ или *аналитическим*), если все функции замены координат для карт данного атласа являются гладкими отображениями (диффеоморфизмами) соответствующего класса гладкости.

Два атласа данной (одной и той же) гладкости считаются *эквивалентными*, если их объединение является атласом той же гладкости.

Пример 11. Атлас, состоящий из единственной карты, можно считать сколь угодно гладким. Рассмотрим в этой связи на прямой $\mathbb{R}^1$ один атлас, порожденный тождественным отображением $\mathbb{R}^1 \ni x \longmapsto \varphi(x) = x \in \mathbb{R}^1$, а другой атлас, порожденный любой строго монотонной функцией $\mathbb{R}^1 \ni x \longmapsto \tilde{\varphi}(x) \in \mathbb{R}^1$, отображающей $\mathbb{R}^1$ на $\mathbb{R}^1$. Объединением этих атласов будет атлас, который, очевидно, имеет наименьшую из гладкостей функций $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}^{-1}$.

В частности, если $\tilde{\varphi}(x) = x^3$, то атлас из карт $\{x, x^3\}$ не является гладким, так как $\tilde{\varphi}^{-1}(x) = x^{1/3}$. Используя сказанное, можно построить на $\mathbb{R}^1$ бесконечно гладкие атласы, объединенне которых будет атласом наперед заданного класса гладкости $C^{(k)}$.

Определение 8. *Гладким многообразием* (*класса* $C^{(k)}$, *аналитическим*) называется многообразие M с заданным на M классом эквивалентности атласов даниой гладкости.

После этого определения понятна следующая терминология: *топологическое многообразие* (класса $C^{(0)}$); *многообразие класса* $C^{(k)}$; *аналитическое многообразие*.

Для того чтобы задать весь класс эквивалентности атласов данной гладкости на многообразии M, достаточно задать любой атлас A из этого класса эквивалентности. Таким образом, можно считать, что гладкое многообразие есть пара (M, A), где M — многообразие, а A — атлас данной гладкости на M.

Совокупность эквивалентных атласов данной гладкости на многообразии часто называют *структурой данной гладкости на этом многообразии*. На одном и том же топологическом многообразии могут существовать различные гладкие структуры даже одной и той же гладкости (см. пример 11 и задачу 3).

Рассмотрим еще несколько примеров, в которых мы обратим основное внимание на гладкость функций замены координат.

Пример 12. Одномерное многообразие $\mathbb{R}P^1$, называемое *вещественной проективной прямой*, есть пучок прямых в $\mathbb{R}^2$, проходящих через начало координат, с естественным отношением близости прямых (измеряемой, например, величиной меньшего угла между прямыми). Каждая прямая пучка однозначно определяется ненулевым направляющим вектором (x^1, x^2), причем два таких вектора задают одну и ту же прямую в том и только в том случае, когда они коллинеарны. Значит, $\mathbb{R}P^1$ можно рассматривать как совокупность классов эквивалентных упорядоченных пар (x^1, x^2) вещественных чисел. При этом по крайней мере одно из чисел пары должно быть отлично от нуля и две пары считаются эквивалентными (отождествляются), если они пропорциональны. Пары (x^1, x^2) обычно называют *однородными координатами* на $\mathbb{R}P^1$. Используя интерпретацию $\mathbb{R}P^1$ в однородных координатах, легко построить атлас из двух карт на $\mathbb{R}P^1$. Пусть U_i, $i=1, 2,$ — те прямые (классы пар (x^1, x^2)) из $\mathbb{R}P^1$, для которых $x^i \neq 0$. Каждой точке (прямой) $p \in U_1$ взаимно однозначно соответствует пара $\left(1, \frac{x^2}{x^1}\right)$, определяемая числом $t_1^2 = \frac{x^2}{x^1}$. Аналогично точки района U_2 находятся во взаимно однозначном соответствии с парами вида $\left(\frac{x^1}{x^2}, 1\right)$ и задаются одним числом $t_2^1 = \frac{x^1}{x^2}$. Таким образом, в U_1 и U_2 возникают локальные координаты, которые, очевидно, соответствуют введенной выше в $\mathbb{R}P^1$ топологии. В общей области $U_1 \cap U_2$ действия построенных локальных карт вводимые ими координаты связаны соотношениями $t_2^1 = (t_1^2)^{-1}$, $t_1^2 = (t_2^1)^{-1}$, показывающими, что построенный атлас принадлежит не только классу $C^{(\infty)}$, но даже является аналитическим.

Полезно иметь в виду также следующую интерпретацию многообразия $\mathbb{R}P^1$. Каждая прямая исходного пучка прямых вполне определяется точкой пересечения с единичной окружностью. Но таких точек ровно две, причем они являются диаметрально противоположными точками окружности. Близость прямых равносильна близости соответствующих пар точек окружности. Значит, $\mathbb{R}P^1$ можно интерпретировать как окружность с отождествленными (склеенными) диаметрально противоположными точками. Если взять только полуокружность, то на ней окажется лишь одна пара отождествляемых точек — концы полуокружности. Склеив их, мы получим снова топологически окружность. Таким образом, $\mathbb{R}P^1$ как топологическое пространство гомеоморфно окружности.

Пример 13. Если рассмотреть теперь пучок прямых, проходящих через начало координат в $\mathbb{R}^3$, или, что то же самое, совокупность классов пропорциональных упорядоченных троек (x^1, x^2, x^3) вещественных чисел, не обращающихся в нуль одновременно, то мы получим *вещественную проективную плоскость* $\mathbb{RP}^2$. В районах U_1, U_2, U_3, где соответственно $x^1 \neq 0$, $x^2 \neq 0$, $x^3 \neq 0$, вводятся локальные системы координат $\left(1, \frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}\right) = (1, t_1^2, t_1^3) \sim (t_1^2, t_1^3)$, $\left(\frac{x^1}{x^2}, 1, \frac{x^3}{x^2}\right) = (t_2^1, 1, t_2^3) \sim (t_2^1, t_2^3)$, $\left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}, 1\right) = (t_3^1, t_3^2, 1) \sim (t_3^1, t_3^2)$, которые, очевидно, связаны между собой соотношениями $t_i^j = (t_j^i)^{-1}$, $t_i^j = t_k^j (t_k^i)^{-1}$, относящимся к общим частям районов действия локальных карт.

Например, переход от координат (t_1^2, t_1^3) к координатам (t_2^1, t_2^3) в области $U_1 \cap U_2$ выражается формулами

$$t_2^1 = (t_1^2)^{-1}, \quad t_2^3 = t_1^3 \cdot (t_1^2)^{-1}.$$

Якобиан этого преобразования равен $-(t_1^2)^{-3}$ и, поскольку $t_1^2 = \frac{x^2}{x^1}$, он определен и отличен от нуля в точках, отвечающих точкам рассматриваемого множества $U_1 \cap U_2$.

Итак, $\mathbb{RP}^2$ — двумерное многообразие, обладающее аналитическим атласом из трех карт.

По тем же соображениям, что и в примере 12, где была рассмотрена проективная прямая $\mathbb{RP}^1$, проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$ можно интерпретировать как двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ с отождествленными диаметрально противоположными точками или как полусферу с отождествленными диаметрально противоположными точками граничной окружности. Проектируя полусферу на плоскость, мы получаем возможность интерпретировать $\mathbb{RP}^2$ как круг (двумерный диск) с отождествленными диаметрально противоположными точками его граничной окружности.

Пример 14. Совокупность всех прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$ можно разбить на два множества: U — невертикальные прямые, V — негоризонтальные прямые. Каждая прямая из U имеет уравнение вида $y = u_1 x + u_2$ и тем самым характеризуется координатами (u_1, u_2), в то время как любая прямая из V имеет уравнение $x = v_1 y + v_2$ и задается координатами (v_1, v_2). Для кривых из пересечения $U \cap V$ действуют функции преобразования координат $v_1 = u_1^{-1}$, $v_2 = -u_2 u_1^{-1}$ и $u_1 = v_1^{-1}$, $u_2 = -v_2 \cdot v_1^{-1}$. Таким образом, рассматриваемое множество наделяется аналитическим атласом из двух карт.

Любая прямая на плоскости имеет уравнение $ax + by + c = 0$ и характеризуется тройкой чисел (a, b, c), причем пропорциональные тройки задают одну и ту же прямую. Может поэтому показаться, что здесь мы вновь имеем дело с проективной плоскостью $\mathbb{RP}^2$, рассмотренной в примере 13. Однако если в $\mathbb{RP}^2$ допускались любые тройки чисел, не равных одновременно нулю, то теперь не допускаются тройки вида $(0, 0, c)$, где $c \neq 0$. Всем таким тройкам в $\mathbb{RP}^2$ отвечает одна и та же точка. Значит, полученное в настоящем примере многообразие гомеоморфно тому, что получается удалением из $\mathbb{RP}^2$ одной точки. Если интерпретировать $\mathbb{RP}^2$ как круг с отождествленными диаметрально противоположными точками граничной окружности, то, выколов центр круга, мы с точностью до гомеоморфизма получим кольцо, внешняя окружность которого склеивается по диаметрально противоположным точкам. Простым разрезанием легко показать, что при этом получается не что иное, как знакомый лист Мёбиуса.

Определение 9. Пусть M и N — гладкие многообразия класса $C^{(k)}$. Отображение $f\colon M \to N$ называется *l-гладким* (класса $C^{(l)}$), если локальные координаты точки $f(x) \in N$ являются функциями класса $C^{(l)}$ от локальных координат точки $x \in M$.

Приведенное определение имеет смысл и корректно (не зависит от выбора локальной карты), если $l \leqslant k$.

В частности, гладкие отображения M в $\mathbb{R}^1$ — это гладкие функции на M, а гладкие отображения $\mathbb{R}^1$ (или промежутка $\mathbb{R}^1$) в M — это гладкие пути на M.

Итак, степень гладкости функции $f\colon M \to \mathbb{R}^1$ на многообразии M не может превышать степени гладкости самого многообразия.

3. Ориентация многообразия и его края.

Определение 10. Две карты гладкого многообразия называются *согласованными*, если переход от локальных координат одной карты к локальным координатам другой карты в их общей области действия осуществляется диффеоморфизмом, имеющим всюду положительный якобиан.

В частности, если районы действия локальных карт имеют пустое пересечение, то такие карты признаются согласованными.

Определение 11. Атлас A гладкого многообразия (M, A) называется *ориентирующим атласом многообразия* M, если он состоит из попарно согласованных карт.

Определение 12. Многообразие называется *ориентируемым*, если оно обладает ориентирующим атласом. В противном случае многообразие называется *неориентируемым*.

Два ориентирующих атласа многообразия будем считать *эквивалентными* (в смысле рассматриваемого сейчас вопроса об ориентации многообразия), если их объединение также является ориентирующим атласом этого многообразия. Легко видеть, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности.

Определение 13. Класс эквивалентности ориентирующих атласов многообразия по указанному отношению эквивалентности называется *классом ориентации атласов многообразия* или *ориентацией многообразия*.

Определение 14. *Ориентированным многообразием* называется многообразие с указанным классом ориентации его атласов, т. е. с фиксированной на многообразии ориентацией.

Значит, ориентировать многообразие — это указать на нем (тем или иным способом) определенный класс ориентации его атласов. Для этого, например, достаточно указать любой конкретный ориентирующий атлас данного класса ориентации.

Различные используемые на практике способы задания ориентации на лежащих в $\mathbb{R}^n$ многообразиях описаны в §§ 2, 3 гл. XII.

Утверждение 3. *Связное многообразие либо неориентируемо, либо допускает две ориентации.*

◀ Пусть A и $\tilde{A}$ — два ориентирующих атласа данного многообразия M с диффеоморфными переходами от локальных координат карт одного из них к другому. Предположим, что нашлась точка $p_0 \in M$ и такие две карты этих атласов, районы U_{i_0}, $\tilde{U}_{j_0}$ действия которых содержат p_0, а якобиан преобразования координат этих карт в соответствующих точке p_0 точках областей параметров положителен. Покажем, что тогда для любой точки $p \in M$ и любых карт атласов A, $\tilde{A}$, районы действия которых содержат точку p, якобиан преобразования координат в соответствующих координатных точках тоже будет положителен.

Сделаем прежде всего очевидное наблюдение, что если в точке $p \in M$ якобиан преобразования положителен (отрицателен) для какой-то пары включающих p карт из атласов A и $\tilde{A}$, то он в p положителен (отрицателен) для любой такой пары карт, поскольку в пределах одного атласа преобразования координат происходят с положительным якобианом, а якобиан композиции отображений равен произведению их якобианов.

Пусть теперь E — подмножество M, состоящее из тех точек $p \in M$, в которых преобразования координат от карт одного атласа к картам другого происходят с положительным якобианом.

Множество E непусто, так как $p_0 \in E$. Множество E открыто в M. Действительно, для любой точки $p \in E$ найдутся содержащие p районы U_i, $\tilde{U}_j$ некоторых карт атласов A и $\tilde{A}$. Множества U_i, $\tilde{U}_j$ открыты в M, поэтому открыто в M и множество $U_i \cap \tilde{U}_j$. На содержащей p связной компоненте множества $U_i \cap \tilde{U}_j$, являющейся открытым в $U_i \cap \tilde{U}_j$ и в M множеством, якобиан преобразования не может менять знак, не обращаясь в нуль. То есть в некоторой окрестности точки p якобиан остается положительным, что и доказывает открытость множества E. Но множество E еще и замкнуто в M. Это следует из непрерывности якобиана диффеоморфизма и того обстоятельства, что якобиан диффеоморфизма не обращается в нуль.

Итак, E — непустое открыто-замкнутое подмножество связного множества M. Значит, $E = M$ и атласы A, $\tilde{A}$ задают на M одну и ту же ориентацию.

Заменив во всех картах атласа A одну из координат, например t^1 на $-t^1$, получим ориентирующий атлас $-A$, принадлежащий другому классу ориентации. Поскольку якобиан преобразования координат из произвольной карты в карты атласов A и $-A$ имеет противоположный знак, то на M любой ориентирующий M атлас эквивалентен либо A, либо $-A$. ▶

Определение 15. Конечную последовательность карт данного атласа назовем *цепочкой карт*, если районы действия любой пары карт с соседними номерами имеют непустое пересечение ($U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$).

Определение 16. Цепочка карт называется *противоречивой* или *дезориентирующей*, если якобиан преобразования координат от любой карты цепочки к следующей ее карте положителен, районы действия первой и последней карт цепочки пересекаются, но преобразование координат от последней карты к первой имеет отрицательные значения якобиана.

Утверждение 4. *Многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда на нем не существует противоречивой цепочки карт.*

◀ Поскольку любое многообразие распадается на связные компоненты, ориентация которых задается независимо, достаточно доказать утверждение 4 для связного многообразия M.

Необходимость. Пусть связное многообразие M ориентируемо и A — задающий ориентацию M атлас. По доказанному в утверждении 3 любая гладко связанная с картами атласа A локальная карта многообразия M либо согласована со всеми картами атласа A, либо согласована со всеми картами атласа $-A$. Это легко усмотреть из самого утверждения 3, если сузить карты атласа A на район действия взятой карты, который можно рассматривать как связное ориентированное одной картой многообразие. Отсюда следует, что противоречивой цепочки карт на многообразии M не существует.

Достаточность. Из определения 1 следует, что на многообразии существует атлас из конечного или счетного числа карт. Возьмем такой атлас A и занумеруем его карты. Рассмотрим карту (U_1, φ_1) и любую карту (U_i, φ_i) такую, что $U_1 \cap U_i \neq \varnothing$. Тогда якобиан преобразований координат φ_{1i}, φ_{i1} либо всюду отрицателен, либо всюду в области определения преобразований положителен. Он не может иметь значения разных знаков, поскольку иначе в множестве $U_1 \cup U_i$ можно было бы указать связные подмножества отрицательности и положительности якобиана U_-, U_+ и цепочка карт (U_1, φ_1), (U_+, φ_1), (U_i, φ_i), (U_-, φ_i) оказалась бы противоречивой.

Итак, меняя, если потребуется, знак одной из координат в карте (U_i, φ_i), можно получить карту с тем же районом действия U_i, согласованную с картой (U_1, φ_1). После описанной процедуры две карты (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) такие, что $U_1 \cap U_i \neq \varnothing$, $U_1 \cap U_j \neq 0$, $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, сами окажутся согласованными: иначе мы построили бы противоречивую цепочку из трех карт.

Таким образом, все карты атласа, районы действия которых пересекаются с U_1, уже можно считать согласованными между собой. Принимая теперь каждую из этих карт за эталон, можно согласовать с нею новые, не охваченные на первом этапе карты атласа. Противоречивых ситуаций при этом не возникнет, поскольку противоречивых цепочек на многообразии по условию не существует. Продолжая этот процесс и учитывая связность многообразия, мы построим на нем атлас, состоящий из попарно согласованных карт, что и доказывает ориентируемость данного многообразия. ►

Полученный критерий ориентируемости многообразия, как, впрочем, и соображения, используемые при его доказательстве, можно с успехом применять при исследовании конкретных многообразий. Так, рассмотренное в примере 12 многообразие $\mathbb{RP}^1$ ориентируемо. Из указанного там атласа легко получить ориентирующий атлас $\mathbb{RP}^1$. Для этого достаточно изменить знак локальной координаты одной из двух построенных там карт. Впрочем, ориентируемость проективной прямой $\mathbb{RP}^1$, очевидно, следует также из того, что многообразие $\mathbb{RP}^1$ гомеоморфно окружности.

Проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ неориентируема: любая пара карт построенного в примере 13 атласа $\mathbb{RP}^2$ такова, что преобразования координат в пределах пары имеют как области положительности, так и области отрицательности якобиана. Как мы видели при доказательстве утверждения 4, отсюда следует существование противоречивой цепочки карт на $\mathbb{RP}^2$.

По той же причине неориентируемо и рассмотренное в примере 14 многообразие, которое, кстати, как отмечалось, гомеоморфно листу Мёбиуса.

Утверждение 5. *Край ориентируемого гладкого n-мерного многообразия является ориентируемым $(n-1)$-мерным многообразием, допускающим структуру той же гладкости, что и исходное многообразие.*

◄ Доказательство утверждения 5 проводится дословно так же, как и рассмотренное в гл. XII, § 3, п. 2 доказательство аналогичного утверждения 2 для поверхностей, лежащих в $\mathbb{R}^n$. ►

Определение 17. Если $A(M)=\{(H^n, \varphi_i, U_i)\}\cup\{(\mathbb{R}^n, \varphi_j, U_j)\}$ — ориентирующий многообразие M атлас, то $A(\partial M)=$ $=\{(\mathbb{R}^{n-1}, \varphi_i|_{\partial H^n=\mathbb{R}^{n-1}}, \partial U_i)\}$ есть ориентирующий атлас края ∂M многообразия M. Задаваемая этим атласом ориентация края называется *ориентацией края, согласованной с ориентацией многообразия.*

Важные и часто используемые на практике способы задания ориентации лежащей в $\mathbb{R}^n$ поверхности и согласованной ориентации ее края подробно описаны в §§ 2, 3 гл. XII.

4. Разбиение единицы и реализация многообразий в виде поверхностей в $\mathbb{R}^n$. Здесь будет изложена одна специальная конструкция, называемая в математике *разбиением единицы.* **Эта**

конструкция часто бывает основным приемом сведения глобальных вопросов к локальным. В дальнейшем мы продемонстрируем это при выводе формулы Стокса на многообразии, а здесь используем разбиение единицы для пояснения возможности реализации любого многообразия в виде некоторой поверхности в пространстве $\mathbb{R}^n$ достаточно большой размерности n.

Лемма. *На $\mathbb{R}$ можно построить функцию $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ такую, что $f(x) \equiv 0$ при $|x| \geqslant 3$, $f(x) \equiv 1$ при $|x| \leqslant 1$ и $0 < f(x) < 1$ при $1 < |x| < 3$.*

◀ Проведем построение одной такой функции, исходя из знакомой нам функции $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ В свое время (см. часть I, стр. 232) мы проверили, что $g \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, показав, что $g^{(n)}(0) = 0$ при любом значении $n \in \mathbb{N}$.

В таком случае неотрицательная функция

$$G(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} \cdot e^{-(x+1)^{-2}} & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

также принадлежит классу $C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, а вместе с нею и функция

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} G(t)\,dt \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)\,dt$$

принадлежит этому классу, поскольку $F'(x) = G(x) \Big| \int_{-\infty}^{\infty} G(t)\,dt$.

Функция F строго возрастает на промежутке $[-1, 1]$, $F(x) \equiv 0$ при $x \leqslant -1$ и $F(x) \equiv 1$ при $x \geqslant 1$.

В качестве искомой функции можно теперь взять

$$f(x) = \frac{1}{2}(F(x+2) + F(-x-2)). \ ▶$$

Замечание. Если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — построенная в доказательстве леммы функция, то определенная в $\mathbb{R}^n$ функция

$$\theta(x^1, \ldots, x^n) = f(x^1 - a^1) \cdot \ldots \cdot f(x^n - a^n),$$

такова, что $\theta \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta(x) \equiv 1$ на промежутке $I(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^i - a^i| \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n\}$ и носитель $(\operatorname{supp} \theta)$ функции θ содержится в промежутке $\tilde{I}(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^i - a^i| \leqslant 3,\ i = 1, \ldots, n\}$.

Определение 18. Пусть M — многообразие класса гладкости $C^{(k)}$, а X — подмножество M. Говорят, что система $E = \{e_\alpha, \alpha \in A\}$ функций $e_\alpha \in C^{(k)}(M, \mathbb{R})$ является *k-гладким разбиением единицы* на множестве X, если

1° $0 \leqslant e_\alpha(x) \leqslant 1$ для любой функции $e_\alpha \in E$ и любого $x \in M$;

2° каждая точка $x \in X$ обладает такой окрестностью $U(x)$ в M, что только конечное число функций системы E отлично от тождественного нуля на $U(x)$;

3° $\sum\limits_{e_\alpha \in E} e_\alpha(x) \equiv 1$ на X.

Заметим, что в силу условия 2° при любом $x \in X$ в последней сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

Определение 19. Пусть $\mathscr{O} = \{o_\beta,\ \beta \in B\}$ — открытое покрытие множества $X \subset M$. Говорят, что *разбиение единицы* $E = \{e_\alpha,\ \alpha \in A\}$ на X *подчинено покрытию* $\mathscr{O}$, если носитель любой функции из системы E содержится по крайней мере в одном из множеств системы $\mathscr{O}$.

Утверждение 6. *Пусть* $\{(U_i,\ \varphi_i),\ i = 1, \ldots, m\}$ — *конечный набор карт некоторого* k*-гладкого атласа многообразия* M, *районы* U_i, $i = 1, \ldots, m$, *действия которых образуют покрытие компакта* $\mathscr{K} \subset M$. *Тогда на* $\mathscr{K}$ *существует разбиение единицы класса* $C^{(k)}$, *подчиненное покрытию* $\{U_i,\ i = 1, \ldots, m\}$.

◀ Для любой точки $x_0 \in \mathscr{K}$ проведем сначала следующее построение. Берем последовательно область U_i, содержащую x_0 соответствующую карту φ_i: $\mathbb{R}^n(H^n) \to U_i$, точку $t_0 = \varphi_i^{-1}(x_0) \in \mathbb{R}^n(H^n)$, функцию $\theta(t - t_0)$ (где $\theta(t)$ указанная в замечании к лемме функция) и сужение θ_{t_0} функции $\theta(t - t_0)$ на область параметров карты φ_i.

Пусть I_{t_0} — пересечение единичного куба с центром $t_0 \in \mathbb{R}^n$ и области параметров карты φ_i. Реально θ_{t_0} отличается от $\theta(t - t_0)$, а I_{t_0} от соответствующего единичного куба, только когда областью параметров карты φ_i является полупространство H^n. Открытые в M множества $\varphi_i(I_t)$, построенные по каждой точке $x \in \mathscr{K}$ и соответствующей ей точке $t = \varphi_i^{-1}(x)$ для всех допустимых значений $i = 1, 2, \ldots, m$, в совокупности образуют открытое покрытие компакта $\mathscr{K}$. Пусть $\{\varphi_{i_j}(I_{t_j}),\ j = 1, 2, \ldots, l\}$ — извлеченное из него конечное покрытие компакта $\mathscr{K}$. Очевидно, $\varphi_{i_j}(I_{t_j}) \subset U_{i_j}$. Определим на U_{i_j} функцию $\tilde{\theta}_j(x) = \theta_{t_j} \circ \varphi_{i_j}^{-1}(x)$. Распространим $\tilde{\theta}_j(x)$ на все многообразие M, полагая функцию равной нулю вне U_{i_j}. Сохраним за этой распространенной на M функцией прежнее обозначение $\tilde{\theta}_j$. По построению $\tilde{\theta}_j \in C^{(k)}(M, \mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \tilde{\theta}_j \subset U_{i_j}$, $0 \leqslant \tilde{\theta}_j(x) \leqslant 1$ на M и $\tilde{\theta}_j(x) \equiv 1$ на $\varphi_{i_j}(I_{t_j}) \subset U_{i_j}$. Тогда функции $e_1(x) = \tilde{\theta}_1(x)$, $e_2(x) = \tilde{\theta}_2(x)(1 - \tilde{\theta}_1(x))$, $\ldots e_l(x) = \tilde{\theta}_l(x) \cdot (1 - \tilde{\theta}_{l-1}(x)) \cdot \ldots \cdot (1 - \tilde{\theta}_1(x))$ составят искомое разбиение единицы. Проверим лишь, что $\sum\limits_{j=1}^{l} e_j(x) \equiv 1$ на $\mathscr{K}$, поскольку остальным требованиям к разбиению единицы на $\mathscr{K}$, подчиненному покрытию $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_l}\} \subset \{U_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ компакта $\mathscr{K}$, система функций

$\{e_1, \ldots, e_l\}$, очевидно, удовлетворяет. Но

$$1-\sum_{j=1}^{l} e_j(x)=(1-\tilde\theta_1(x))\cdot\ldots\cdot(1-\tilde\theta_l(x))\equiv 0 \text{ на } \mathscr{K},$$

поскольку каждая точка $x\in\mathscr{K}$ покрыта некоторым множеством $\varphi_{i_j}(\tilde I_{t_j})$, на котором соответствующая функция $\tilde\theta_j$ тождественно равна единице. ▶

Следствие 1. *Если M — компактное многообразие и A — атлас класса $C^{(k)}$ на M, то на M существует конечное разбиение единицы $\{e_1, \ldots, e_l\}$, подчиненное покрытию многообразия районами действия карт атласа A.*

◀ Поскольку M — компакт, атлас A можно считать конечным. Теперь мы оказываемся в условиях утверждения 6, если положить в нем $\mathscr{K}=M$. ▶

Следствие 2. *Для любого лежащего на многообразии M компакта $\mathscr{K}$ и любого содержащего $\mathscr{K}$ открытого множества $G\subset M$ существует функция $f\colon M\to\mathbb{R}$ класса гладкости многообразия M такая, что $f(x)\equiv 1$ на $\mathscr{K}$ и $\operatorname{supp} f\subset G$.*

◀ Покроем каждую точку $x\in\mathscr{K}$ окрестностью $U(x)$, лежащей в G и в пределах района действия некоторой карты многообразия M. Из открытого покрытия $\{U(x),\ x\in\mathscr{K}\}$ компакта $\mathscr{K}$ извлекаем конечное покрытие и строим подчиненное ему разбиение единицы $\{e_1, \ldots, e_l\}$ на $\mathscr{K}$. Функция $f=\sum_{i=1}^{l} e_i$ будет искомой. ▶

Следствие 3. *Каждое (абстрактно заданное) компактное гладкое n-мерное многообразие M диффеоморфно некоторой компактной гладкой поверхности, лежащей в пространстве $\mathbb{R}^N$ достаточно большой размерности N.*

◀ Чтобы не осложнять идею доказательства несущественными деталями, проведем его для случая компактного многообразия M без края. В этом случае на M есть гладкий конечный атлас $A=\{\varphi_i\colon I\to U_i,\ i=1, \ldots, m\}$, где I — открытый n-мерный куб в $\mathbb{R}^n$. Подберем чуть меньший куб I' такой, что $\bar I'\subset I$, а множества $\{U_i'=\varphi_i(I'),\ i=1, \ldots, m\}$ все еще образуют покрытие M. Полагая в следствии 2 $\mathscr{K}=\bar I'$, $G=I$, $M=\mathbb{R}^n$, построим функцию $f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ такую, что $f(t)\equiv 1$ при $t\in\bar I'$ и $\operatorname{supp} f\subset I$.

Рассмотрим теперь координатные функции $t_i^1(x), \ldots, t_i^n(x)$ отображений $\varphi_i^{-1}\colon U_i\to I$, $i=1, \ldots, m$, и введем с их помощью на M следующие функции:

$$y_i^k(x)=\begin{cases}(f\circ\varphi_i^{-1})(x)\cdot t_i^k(x) & \text{при } x\in U_i,\\ 0 & \text{при } x\notin U_i,\end{cases}$$

$$i=1, \ldots, m;\quad k=1, \ldots, n.$$

В любой точке $x \in M$ ранг отображения $M \ni x \longmapsto y(x) = (y_1^1, \ldots, y_1^n, \ldots, y_m^1, \ldots, y_m^n)(x) \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ максимален и равен n. Действительно, если $x \in U_i'$, то $\varphi_i^{-1}(x) = t \in I'$, $f \circ \varphi_i^{-1}(x) = 1$ и $y_i^k(\varphi_i(t)) = t_i^k$, $k = 1, \ldots, n$.

Если, наконец, рассмотреть отображение $M \ni x \longmapsto Y(x) = (y(x), f \circ \varphi_1^{-1}(x), \ldots, f \circ \varphi_m^{-1}(x)) \in \mathbb{R}^{m \cdot n + m}$, полагая $f \circ \varphi_i^{-1}(x) \equiv 0$ вне U_i, $i = 1, \ldots, m$, то это отображение, с одной стороны, очевидно, будет иметь тот же ранг n, что и отображение $x \longmapsto y(x)$, а с другой стороны, будет заведомо взаимно однозначным отображением M на образ M в $\mathbb{R}^{m \cdot n + m}$. Проверим последнее утверждение. Пусть p, q — различные точки M. Найдем область U_i' из системы $\{U_i', i = 1, \ldots, m\}$, покрывающей M, которая содержит точку p. Тогда $f \circ \varphi_i^{-1}(p) = 1$. Если $f \circ \varphi_i^{-1}(q) < 1$, то уже $Y(p) \neq Y(q)$. Если же $f \circ \varphi_i^{-1}(q) = 1$, то $p, q \in U_i$, $y_i^k(p) = t^k(p)$, $y_i^k(q) = t^k(q)$ и $t_i^k(p) \neq t_i^k(q)$ хотя бы для одного значения $k \in \{1, \ldots, n\}$. То есть и в этом случае $Y(p) \neq Y(q)$. ▶

По поводу общей теоремы Уитни о реализации произвольного многообразия в виде поверхности в $\mathbb{R}^n$ читатель может обратиться к специальной геометрической литературе.

Задачи и упражнения

1. Проверьте, что вводимый определением 1 объект (*многообразие*) не изменится, если потребовать лишь, чтобы каждая точка $x \in M$ имела окрестность $U(x) \subset M$, гомеоморфную открытому подмножеству полупространства H^n

2. Покажите, что

a) многообразие $GL(n, \mathbb{R})$ из примера 6 некомпактно, и имеет точно две связные компоненты;

b) многообразие $SO(n, \mathbb{R})$ (см. пример 7) связно;

c) многообразие $O(n, \mathbb{R})$ компактно и имеет точно две связные компоненты

3. Пусть (M, A) и $(\tilde{M}, \tilde{A})$ — многообразия с заданными на них гладкими структурами одной и той же степени гладкости $C^{(k)}$ Гладкие многообразия (M, A), $(\tilde{M}, \tilde{A})$ (*гладкие структуры*) считаются *изоморфными*, если существует такое отображение $f: M \to \tilde{M}$ класса $C^{(k)}$, которое имеет обратное отображение $f^{-1}: \tilde{M} \to M$ того же класса гладкости $C^{(k)}$ в атласах A, $\tilde{A}$.

a. Покажите, что на $\mathbb{R}^1$ все структуры одинаковой гладкости изоморфны

b. Проверьте высказанные в примере 11 утверждения и выясните, не противоречат ли они задаче a.

c. Покажите, что на окружности S^1 (одномерной сфере) любые две $C^{(\infty)}$-структуры изоморфны. Отметим, что это утверждение остается в силе и для сфер, размерность которых не превосходит 6, а уже на S^7, как показал Милнор *), существуют неизоморфные $C^{(\infty)}$-структуры.

4. Пусть S — подмножество n-мерного многообразия M такое, что для любой точки $x_0 \in S$ найдется такая карта $x = \varphi(t)$ многообразия M, район U действия которой содержит x_0, а множеству $S \cap U$ в области параметров $t = (t^1, \ldots, t^n)$ карты φ отвечает k-мерная поверхность, задаваемая соотноше-

---

*) Д Милнор (1931) — один из наиболее крупных современных американских математиков; основные работы относятся к алгебраической топологии и топологии многообразий.

ниями $t^{n-k}=0, \dots, t^n=0$. В этом случае S называется *k-мерным подмногообразием многообразия* M.

a. Покажите, что на S естественным образом возникает структура k-мерного многообразия, индуцированная структурой многообразия M и имеющая ту же гладкость, что и гладкость структуры многообразия M.

b. Убедитесь в том, что k-мерные поверхности S в $\mathbb{R}^n$ в точности и являются k-мерными подмногообразиями $\mathbb{R}^n$.

c. Покажите, что при гладком гомеоморфном отображении $f\colon \mathbb{R}^1 \to T^2$ прямой $\mathbb{R}^1$ в тор T^2 образ $f(\mathbb{R}^1)$ может быть всюду плотным подмножеством T^2 и в этом случае не будет одномерным подмногообразием тора, хотя и будет абстрактным одномерным многообразием.

d. Проверьте, что объем понятия «подмногообразие» не изменится, если считать $S \subset M$ k-мерным подмногообразием n-мерного многообразия M в том случае, когда для любой точки $x_0 \in S$ найдется локальная карта многообразия M, район U действия которой содержит x_0, а множеству $S \cap U$ в области параметров карты отвечает некоторая k-мерная поверхность пространства $\mathbb{R}^n$.

5. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство (многообразие), а G — группа гомеоморфных преобразований пространства X. Группа G называется *дискретной группой преобразований пространства* X, если для любых (быть может, и совпадающих) точек $x_1, x_2 \in X$ найдутся такие их окрестности U_1, U_2 соответственно, что множество $\{g \in G \mid g(U_1) \cap U_2 \neq \varnothing\}$ — конечно.

a. Отсюда следует, что *орбита* $\{g(x) \in X \mid g \in G\}$ любой точки $x \in X$ дискретна, а *стабилизатор* $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ любой точки $x \in X$ конечен.

b. Проверьте, что если G — группа изометрий метрического пространства X, обладающая двумя указанными в a свойствами, то G — дискретная группа преобразований X.

c. Введите естественную структуру топологического пространства (многообразия) на множестве X/G орбит дискретной группы G.

d. Замкнутое подмножество F топологического пространства (многообразия) X с дискретной группой G преобразований называют *фундаментальной областью группы* G, если оно является замыканием открытого подмножества X и если множества $g(F)$, где $g \in G$, не имеют попарно общих внутренних точек и образуют локально конечное покрытие пространства X. Покажите на приведенных в основном тексте примерах 8—10 как фактор-пространство X/G (орбит) группы G получается из F «склеиванием» некоторых граничных точек.

6. a. Используя конструкции примеров 12, 13, постройте n-мерное вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$.

b. Покажите, что $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо, если n нечетно, и неориентируемо, если n четно.

c. Проверьте, что многообразия $SO(3, \mathbb{R})$ и $\mathbb{R}P^3$ гомеоморфны.

7. Проверьте, что построенное в примере 14 многообразие действительно гомеоморфно листу Мёбиуса.

8. a. *Группа Ли* *) — это группа G, наделенная структурой аналитического многообразия так, что отображение $(g_1, g_2) \longmapsto g_1 \cdot g_2$ является аналитическим отображением $G \times G$ в G. Покажите, что рассмотренные в примерах 6, 7 многообразия являются группами Ли.

b. *Топологическая группа* (или *непрерывная группа*) — это группа G, наделенная структурой топологического пространства так, что групповые операции умножения и перехода к обратному элементу непрерывны как отображения $G \times G \to G$, $G \to G$ в рассматриваемой топологии G. На примере группы $\mathbb{Q}$ ра-

*) С. М. Ли (1842—1899) — выдающийся норвежский математик, родоначальник теории непрерывных групп (групп Ли), которая имеет теперь фундаментальное значение в геометрии, топологии и математических методах физики; один из лауреатов Международной премии имени Лобачевского (награжден в 1897 г. за работу по применению теории групп к обоснованию геометрии).

циональных чисел покажите, что не всякая топологическая группа является группой Ли.

c. Покажите, что каждая группа Ли является топологической группой в смысле данного в b определения.

d. Доказано *), что любая топологическая группа G, являющаяся многообразием, есть группа Ли (т. е. G как многообразие допускает аналитическую структуру, в которой группа становится группой Ли). Покажите, что любое групповое многообразие (т. е. любая группа Ли) является ориентируемым многообразием.

9. Система подмножеств топологического пространства называется *локально конечной*, если каждая точка пространства имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом множеств системы В частности, можно говорить о локально конечном покрытии пространства.

Одна система множеств называется *вписанной* в другую, если любое множество первой системы содержится по крайней мере в одном из множеств второй системы В частности, можно говорить о том, что одно покрытие некоторого множества вписано в другое такое покрытие.

a. Покажите, что в любое открытое покрытие $\mathbb{R}^n$ можно вписать открытое локально конечное покрытие $\mathbb{R}^n$,

b Решите задачу a с заменой $\mathbb{R}^n$ произвольным многообразием M.

c. Покажите, что на $\mathbb{R}^n$ существует разбиение единицы, подчиненное любому наперед заданному открытому покрытию $\mathbb{R}^n$.

d. Проверьте, что утверждение c остается в силе для произвольного многообразия

§ 3. Дифференциальные формы и их интегрирование на многообразиях

1. Касательное пространство к многообразию в точке. Напомним, что каждому гладкому пути $\mathbb{R} \ni t \overset{\gamma}{\longmapsto} x(t) \in \mathbb{R}^n$ (движению в $\mathbb{R}^n$), проходящему в некоторый момент t_0 через точку $x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n$, мы сопоставили вектор $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ мгновенной скорости: $\xi = \dot{x}(t) = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)(t_0)$. Совокупность таких векторов ξ, связанных с точкой $x_0 \in \mathbb{R}^n$, естественно отождествляется с арифметическим пространством $\mathbb{R}^n$ и обозначается символом $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ (или $T_{x_0}(\mathbb{R}^n)$). В $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ вводятся те же линейные операции над элементами $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$, что и над соответствующими элементами линейного пространства $\mathbb{R}^n$. Так возникает линейное пространство $T\mathbb{R}^n_{x_0}$, называемое *касательным пространством к $\mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$*.

Забыв мотивировки и наводящие соображения, можно теперь сказать, что формально $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ есть пара $(x_0, \mathbb{R}^n)$, состоящая из точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и связанного с нею экземпляра линейного пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть теперь M — гладкое n-мерное многообразие с атласом A класса гладкости не ниже, чем $C^{(1)}$. Мы хотим определить касательный вектор ξ и касательное пространство TM_{p_0} к многообразию M в точке $p_0 \in M$.

---

*) Это ответ на так называемую пятую проблему Гильберта.

Воспользуемся для этого указанной выше интерпретацией касательного вектора как мгновенной скорости движения. Возьмем гладкий путь $\mathbb{R} \ni t \overset{\gamma}{\longmapsto} p(t) \in M$ на многообразии M, проходящий в момент t_0 через точку $p_0 = p(t_0) \in M$ Параметры карт (т. е. локальные координаты) многообразия M будем здесь обозначать буквой x, снабжая их снизу индексом соответствующей карты, а сверху номером координаты. Итак, в области параметров каждой карты (U_i, φ_i), район U_i действия которой содержит точку p_0, пути γ отвечает свой путь $t \overset{\gamma_i}{\longmapsto} \varphi_i^{-1} \circ p(t) = x_i(t) \in \mathbb{R}^n (H^n)$, который является гладким по определению гладкого отображения $\mathbb{R} \ni \overset{\gamma}{\longmapsto} p(t) \in M$.

Таким образом, в области параметров карты (U_i, φ_i), где φ_i есть отображение $p = \varphi_i(x_i)$, возникает точка $x_i(t_0) = \varphi_i^{-1}(p_0)$ и вектор $\xi_i = \dot{x}_i(t_0) \in T\mathbb{R}^n_{x_i(t_0)}$. В другой такой карте (U_j, φ_j) это будут соответственно точка $x_j(t_0) = \varphi_j^{-1}(p_0)$ и вектор $\xi_j = \dot{x}_j(t_0) \in T\mathbb{R}^n_{x_j(t_0)}$. Естественно считать, что это координатные выражения в различных картах того, что мы хотели бы назвать касательным вектором ξ к многообразию M в точке $p_0 \in M$.

Между координатами x_i, x_j действуют гладкие взаимно обратные функции перехода

$$x_i = \varphi_{ji}(x_j), \quad x_j = \varphi_{ij}(x_i), \tag{1}$$

в результате чего пары $(x_i(t_0), \xi_i)$, $(x_j(t_0), \xi_j)$ оказываются связанными соотношениями

$$x_i(t_0) = \varphi_{ji}(x_j(t_0)), \quad x_j(t_0) = \varphi_{ij}(x_i(t_0)), \tag{2}$$

$$\xi_i = \varphi'_{ji}(x_j(t_0))\,\xi_j, \quad \xi_j = \varphi'_{ij}(x_i(t_0))\,\xi_i. \tag{3}$$

Равенства (3), очевидно, вытекают из формул

$$\dot{x}_i(t) = \varphi'_{ji}(x_j(t))\,\dot{x}_j(t), \quad \dot{x}_j(t) = \varphi'_{ij}(x_i(t))\,\dot{x}_i(t),$$

получающихся из (1) в результате дифференцирования.

Определение 1. Будем говорить, что задан *вектор* ξ, *касательный к многообразию* M *в точке* $p \in M$, если в каждом пространстве $T\mathbb{R}^n_{x_i}$, касательном к $\mathbb{R}^n$ в точке x_i, отвечающей точке p в области параметров карты (U_i, φ_i), где $U_i \ni p$, фиксирован вектор ξ_i, причем так, что выполняются соотношения (3).

Если элементы матрицы Якоби φ'_{ji} отображения φ_{ji} записать в явном виде $\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^m}$, то получаем, таким образом, следующую явную формулу связи двух координатных представлений одного и того же вектора ξ:

$$\xi_i^k = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^m} \xi_j^m, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где частные производные вычисляются в соответствующей p точке $x_j = \varphi_j^{-1}(p)$.

Обозначим через TM_p совокупность векторов, касательных к многообразию M в точке $p \in M$.

Определение 2. Если линейную структуру на множестве TM_p ввести, отождествляя TM_p с соответствующим пространством $T\mathbb{R}^n_{x_i}\left(TH^n_{x_i}\right)$, т. е. суммой векторов из TM_p считать вектор, координатное представление которого в $T\mathbb{R}^n_{x_i}\left(TH^n_{x_i}\right)$ отвечает сумме координатных представлений слагаемых, и аналогично определить умножение вектора на число, то получаемое при этом линейное пространство обозначается обычно одним из символов TM_p, $T_p(M)$ и называется ***касательным пространством к многообразию M в точке $p \in M$***.

Из формул (3), (4) видно, что введенная в TM_p линейная структура не зависит от выбора индивидуальной карты, т. е. в этом смысле определение 2 корректно

Итак, мы определили касательное пространство к многообразию. Интерпретации касательного вектора и касательного пространства могут быть различными (см. задачу 1). Например, одной из таких интерпретаций является отождествление касательного вектора с линейным функционалом Это отождествление основано на следующем наблюдении, которое мы сделаем в $\mathbb{R}^n$

Каждый вектор $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ есть вектор скорости, отвечающий некоторому гладкому пути $x = x(t)$, т. е. $\xi = \dot{x}(t)|_{t=t_0}$, причем $x_0 = x(t_0)$ Это позволяет определить производную $D_\xi f(x_0)$ в точке x_0 по вектору $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ от гладкой функции f, заданной в $\mathbb{R}^n$ (или в окрестности точки x_0). А именно:

$$D_\xi f(x_0) := \frac{d}{dt}(f \circ x)(t)\Big|_{t=t_0}, \tag{5}$$

т. е.

$$D_\xi f(x_0) = f'(x_0)\,\xi, \tag{6}$$

где $f'(x_0)$ — касательное к f отображение (дифференциал f) в точке x_0.

Функционал D_ξ $C^{(1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, сопоставляемый формулами (5), (6) вектору $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$, очевидно, линеен по f. Из формулы (6) видно также, что величина $D_\xi f(x_0)$ при фиксированной функции f линейно зависит от ξ, т е. сумме векторов отвечает сумма соответствующих линейных функционалов, а умножение вектора ξ на число отвечает умножение функционала D_ξ на это же число. Таким образом, между линейным пространством $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ и линейным пространством соответствующих линейных функционалов D_ξ имеется изоморфизм. Остается определить линейный функционал D_ξ, указав набор его характеристических свойств, чтобы получить новую, но, конечно, изоморфную прежней, интерпретацию касательного пространства $T\mathbb{R}^n_{x_0}$.

Заметим, что, кроме указанной выше линейности, функционал D_ξ обладает следующим свойством:

$$D_\xi (f\cdot g)(x_0) = D_\xi f(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot D_\xi g(x_0). \tag{7}$$

Это закон дифференцирования произведения.

В дифференциальной алгебре аддитивное отображение $a \longmapsto a'$ кольца A, удовлетворяющее соотношению $(a\cdot b)' = a'\cdot b + a\cdot b'$, называют *дифференцированием* (точнее, *дифференцирование кольца* A). Таким образом, функционал D_ξ: $C^{(1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ является дифференцированием кольца $C^{(1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Но D_ξ еще и линеен относительно линейной структуры пространства $C^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Можно проверить, что всякий линейный функционал l: $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, обладающий свойствами

$$l(\alpha f + \beta g) = \alpha l(f) + \beta l(g), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$l(f\cdot g) = l(f)\, g(x_0) + f(x_0)\, l(g), \tag{9}$$

имеет вид D_ξ, где $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$. Таким образом, касательное пространство $T\mathbb{R}^n_x$ к $\mathbb{R}^n$ в точке x_0 можно трактовать как линейное пространство функционалов (дифференцирований) на $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, удовлетворяющих условиям (8), (9).

Базисным векторам $e_1, \ldots, e_n$ пространства $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ отвечают функционалы $D_{e_k} f(x_0) = \left.\dfrac{\partial}{\partial x^k} f(x)\right|_{x=x_0}$ вычисления соответствующей частной производной от функции f в точке x_0. Таким образом, при функциональной интерпретации пространства $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ можно сказать, что функционалы $\left.\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}\right\}\right|_{x=x_0}$ образуют базис $T\mathbb{R}^n_{x_0}$.

Если $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$, то соответствующий вектору ξ оператор D_ξ имеет вид $D_\xi = \xi^k \dfrac{\partial}{\partial x^k}$.

Совершенно аналогично касательный вектор ξ к n-мерному многообразию M класса $C^{(\infty)}$ в точке $p_0 \in M$ можно интерпретировать (или определить) как элемент пространства дифференцирований l на $C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$, обладающих свойствами (8), (9), при этом в соотношении (9) x_0, естественно, заменяется на p_0 и тем самым функционал l связывается именно с точкой $p_0 \in M$. Такое определение касательного вектора ξ и касательного пространства TM_{p_0} формально не требует привлечения локальных координат и в этом смысле, очевидно, инвариантно. В координатах $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$ локальной карты (U_i, φ_i) оператор l имеет вид $\xi_i^1 \dfrac{\partial}{\partial x_i^1} + \ldots + \xi_i^n \dfrac{\partial}{\partial x_i^n} = D_{\xi_i}$. Набор чисел $(\xi_i^1, \ldots, \xi_i^n)$ естественно называется координатами касательного вектора $l \in TM_{p_0}$ в координатах карты (U_i, φ_i). Координатные представления одного и того же функционала $l \in TM_{p_0}$ в картах (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) в силу законов дифференцирования связаны соотношениями

$$\xi_i^k \frac{\partial}{\partial x_i^k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^m} \xi_j^m \frac{\partial}{\partial x_j^m}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4'}$$

которые, естественно, повторяют соотношения (4).

2. Дифференциальная форма на многообразии. Рассмотрим теперь пространство T^*M_p, сопряженное к касательному пространству TM_p; то есть T^*M_p есть пространство линейных вещественнозначных функционалов на TM_p.

Определение 3. Пространство T^*M_p, сопряженное пространству TM_p, касательному к многообразию M в точке $p \in M$, называется *кокасательным пространством к многообразию M в точке p*.

Если многообразие M — класса $C^{(\infty)}$, $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$, а l_ξ — отвечающее вектору $\xi \in TM_p$ дифференцирование, то при фиксированной функции $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$ отображение $\xi \longmapsto l_\xi f$, очевидно, будет элементом пространства T^*M_p. В случае $M = \mathbb{R}^n$ получается $\xi \longmapsto D_\xi f(p) = f'(p)\xi$, поэтому построенное отображение $\xi \longmapsto l_\xi f$, естественно, называется дифференциалом функции f в точке p и обозначается обычным символом $df(p)$.

Если $T\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$ $\left(\text{или } TH^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)} \text{ при } p \in \partial M\right)$ — пространство, отвечающее в карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ многообразия M касательному пространству TM_p, то пространство $T^*\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$, сопряженное к $T\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$, естественно считать изображением (представителем) пространства T^*M_p в этой локальной карте. В координатах $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ локальной карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ базису $\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}\right\}$ пространства $T\mathbb{R}^n_{\varphi^{-1}(p)}$ $\left(\text{или } TH^n_{\varphi^{-1}(p)}, \text{ если } p \in \partial M\right)$ отвечает взаимный с ним базис $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ в сопряженном пространстве. $\Big($Напомним, что $dx^i(\xi) = \xi^i$, поэтому $dx^i\left(1 \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_j^i$. Выражения этих взаимных базисов в другой карте (U_β, φ_β) могут оказаться не столь простыми, ибо $\frac{\partial}{\partial x_\beta^j} = \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$, $dx_\alpha^i = \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} dx_\beta^j$.$\Big)$

Определение 4. Говорят, что на гладком n-мерном многообразии M задана дифференциальная форма ω^m степени m, если на каждом касательном к M пространстве TM_p, $p \in M$, определена кососимметрическая форма $\omega^m(p)$: $(TM_p)^m \to \mathbb{R}$.

Практически это означает, всего-навсего, что в каждом пространстве $T\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$ $\left(\text{или } TH^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}\right)$, отвечающем пространству TM_p в карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ многообразия M, задана соответствующая m-форма $\omega_\alpha(x_\alpha)$, где $x_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(p)$. То, что две такие формы $\omega_\alpha(x_\alpha)$, $\omega_\beta(x_\beta)$ являются представителями одной и той же формы $\omega(p)$, выражается соотношением

$$\omega_\alpha(x_\alpha)((\xi_1)_\alpha, \ldots, (\xi_m)_\alpha) = \omega_\beta(x_\beta)((\xi_1)_\beta, \ldots, (\xi_m)_\beta), \tag{10}$$

в котором x_α, x_β — представители точки $p \in M$, а $(\xi_1)_\alpha, \ldots, (\xi_m)_\alpha$, $(\xi_1)_\beta, \ldots, (\xi_m)_\beta$ — представители векторов $\xi_1, \ldots, \xi_m \in TM_p$ в картах $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) соответственно.

В более формальной записи это означает, что

$$x_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}(x_\beta), \quad x_\beta = \varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha), \tag{2'}$$

$$\xi_\alpha = \varphi'_{\beta\alpha}(x_\beta)\,\xi_\beta, \quad \xi_\beta = \varphi'_{\alpha\beta}(x_\alpha)\,\xi_\alpha, \tag{3'}$$

где, как обычно, $\varphi_{\beta\alpha}$ и $\varphi_{\alpha\beta}$ являются соответственно функциями $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$, $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ преобразования координат, а касательные к ним отображения $\varphi'_{\beta\alpha} =: (\varphi_{\beta\alpha})_*$, $\varphi'_{\alpha\beta} =: (\varphi_{\alpha\beta})_*$ осуществляют изоморфизм касательных к $\mathbb{R}^n$ (H^n) пространств в соответствующих точках x_α, x_β. Как было сказано в § 1, п. 3, сопряженные отображения $(\varphi'_{\beta\alpha})^* =: \varphi^*_{\beta\alpha}$, $(\varphi'_{\alpha\beta})^* =: \varphi^*_{\alpha\beta}$ осуществляют при этом перенос форм, и соотношение (10) в точности означает, что

$$\omega_\alpha(x_\alpha) = \varphi^*_{\alpha\beta}(x_\alpha)\,\omega_\beta(x_\beta), \tag{10'}$$

где α и β — равноценные индексы (которые можно поменять местами).

Матрица (c_i^j) отображения $\varphi'_{\alpha\beta}(x_\alpha)$ известна: $(c_i^j) = \left(\dfrac{\partial x^j_\beta}{\partial x^i_\alpha}\right)(x_\alpha)$. Таким образом, если

$$\omega_\alpha(x_\alpha) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} a_{i_1, \ldots, i_m}\, dx_\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{i_m} \tag{11}$$

и

$$\omega_\beta(x_\beta) = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_m \le n} b_{j_1, \ldots, j_m}\, dx_\beta^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_\beta^{j_m}, \tag{12}$$

то в соответствии с формулой (30) из § 1 получаем, что

$$\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} a_{i_1 \ldots i_m}\, dx_\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{i_m} =$$

$$= \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n \\ 1 \le j_1 < \ldots < j_m \le n}} b_{j_1 \ldots j_m} \frac{\partial\left(x_\beta^{j_1}, \ldots, x_\beta^{j_m}\right)}{\partial\left(x_\alpha^{i_1}, \ldots, x_\alpha^{i_m}\right)}(x_\alpha)\, dx_\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{i_m}, \tag{13}$$

где $\frac{\partial(\ )}{\partial(\ )}$, как всегда, означает определитель матрицы из соответствующих частных производных.

Итак, различные координатные выражения одной и той же формы ω получаются друг из друга прямой заменой переменных (с раскрытием соответствующих дифференциалов координат и последующими алгебраическими преобразованиями в соответствии с законами внешнего умножения).

Если условиться форму ω_α считать переносом заданной на многообразии формы ω в область параметров карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, то естественно писать, что $\omega_\alpha = \varphi_\alpha^*\omega$ и считать, что $\omega_\alpha = \varphi_\alpha^* \circ (\varphi_\beta^{-1})^* \omega_\beta = \varphi_{\alpha\beta}^*\omega_\beta$, где композиция $\varphi_\alpha^* \circ (\varphi_\beta^{-1})^*$ в данном случае играет роль формальной детализации отображения $\varphi_{\alpha\beta}^* = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha)^*$.

Определение 5. Дифференциальная m-форма ω на n-мерном многообразии M *принадлежит классу гладкости* $C^{(k)}$, если коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_m}(x_\alpha)$ ее координатного представления

$$\omega_\alpha = \varphi_\alpha^*\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_m}(x_\alpha)\, dx_\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{i_m}$$

в любой карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ атласа, задающего на M гладкую структуру, являются функциями соответствующего класса $C^{(k)}$.

Из формулы (13) видно, что определение 5 корректно, если само многообразие M имеет гладкость класса $C^{(k+1)}$; например, когда M есть многообразие класса $C^{(\infty)}$.

Для заданных на многообразии дифференциальных форм естественным образом (поточечно) определены операции сложения, умножения на число и внешнего умножения (в частности, умножения на функцию $f: M \to \mathbb{R}$, которая по определению считается формой степени нуль). Первые две из этих операций превращают множество Ω_k^m m-форм класса $C^{(k)}$ на M в линейное пространство. В случае $k = \infty$ это линейное пространство обычно обозначают символом Ω^m. Ясно, что внешнее произведение форм $\omega^{m_1} \in \Omega_k^{m_1}$, $\omega^{m_2} \in \Omega_k^{m_2}$ дает форму $\omega^{m_1+m_2} = \omega^{m_1} \wedge \omega^{m_2} \in \Omega_k^{m_1+m_2}$.

3. Внешний дифференциал.

Определение 6. *Внешним дифференциалом* называется линейный оператор $d: \Omega_k^m \to \Omega_{k-1}^{m+1}$, обладающий следующими свойствами:

1° $d: \Omega_k^0 \to \Omega_{k-1}^1$ на любой функции $f \in \Omega_k^0$ совпадает с обычным дифференциалом df этой функции.

2° $d: (\omega^{m_1} \wedge \omega^{m_2}) = d\omega^{m_1} \wedge \omega^{m_2} + (-1)^{m_1} \omega^{m_1} \wedge d\omega^{m_2}$, где $\omega^{m_1} \in \Omega_k^{m_1}$, $\omega^{m_2} \in \Omega_k^{m_2}$.

3° $d^2 := d \circ d = 0$.

Последнее равенство означает, что для любой формы ω форма $d(d\omega)$ нулевая.

Наличие требования 3° подразумевает, таким образом, что речь идет о формах гладкости не ниже чем класса $C^{(2)}$.

Практически это означает, что рассматривается C^{∞}-многообразие M и оператор d, действующий из Ω^m в Ω^{m+1}.

Формула для вычисления оператора d в локальных координатах конкретной карты (а вместе с нею и единственность оператора d) вытекает из соотношения

$$d\left(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} c_{i_1\ldots i_m}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_m}\right)=$$
$$=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} dc_{i_1\ldots i_m}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_m} \tag{14}$$
$$\left(+\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} c_{i_1\ldots i_m}\,d\left(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_m}\right)=0\right).$$

Существование оператора d вытекает теперь из того, что определенный в локальной системе координат соотношением (14) оператор удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3° определения 6.

Из сказанного, в частности, следует, что если $\omega_\alpha=\varphi_\alpha^*\omega$ и $\omega_\beta=\varphi_\beta^*\omega$ — координатные представления одной и той же формы ω, т. е. $\omega_\alpha=\varphi_{\alpha\beta}^*\omega_\beta$, то $d\omega_\alpha$ и $d\omega_\beta$ также будут координатными представлениями одной и той же формы $(d\omega)$, т. е. $d\omega_\alpha=\varphi_{\alpha\beta}^*\,d\omega_\beta$. Таким образом, справедливо соотношение $d(\varphi_{\alpha\beta}^*\omega_\beta)=\varphi_{\alpha\beta}^*(d\omega_\beta)$, что в абстрактной записи означает коммутативность

$$d\varphi^*=\varphi^*d \tag{15}$$

оператора d и операции φ^* переноса форм.

4. Интеграл от формы по многообразию.

Определение 7. Пусть M — n-мерное гладкое ориентированное многообразие, на котором координаты $x^1, \ldots, x^n$ и ориентация задаются одной картой $\varphi_x\colon D_x\to M$ с областью параметров $D_x\subset\mathbb{R}^n$. Пусть ω — n-форма на M и $a(x)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ — ее координатное представление в области D_x. Тогда

$$\int_M \omega := \int_{D_x} a(x)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n, \tag{16}$$

где слева стоит определяемый *интеграл от формы* ω *по ориентированному многообразию* M, а справа — интеграл от функции $a(x)$ по области D_x.

Если $\varphi_t\colon D_t\to M$ — другой состоящий из одной карты атлас M, задающий на M ту же ориентацию, что и атлас $\varphi_x\colon D_x\to M$, то якобиан $\det\varphi'(t)$ функции $x=\varphi(t)$ преобразования координат всюду положителен в области D_t. Форме ω в D_t отвечает форма

$$\varphi^*(a(x)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)=a(x(t))\det\varphi'(t)\,dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n.$$

По теореме о замене переменных в кратном интеграле имеет место равенство

$$\int_{D_x} a(x)\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n = \int_{D_t} a(x(t)) \det \varphi'(t)\, dt^1 \cdot \ldots dt^n,$$

показывающее независимость левой части соотношения (16) от выбора системы координат на M.

Итак, определение 7 корректно.

Определение 8. *Носителем* определенной на многообразии M *формы* ω называется замыкание множества тех точек $x \in M$, где $\omega(x) \neq 0$.

Носитель формы ω обозначается символом $\operatorname{supp} \omega$. В случае 0-форм, т. е. функций, мы уже с этим понятием встречались. Вне носителя координатное представление формы в любой локальной системе координат является нулевой формой данной степени.

Определение 9. Заданная на многообразии M форма ω называется *финитной формой*, если $\operatorname{supp} \omega$ — компакт в M.

Определение 10. Пусть ω — финитная форма степени n на n-мерном гладком многообразии M, ориентированном атласом A. Пусть φ_i: $D_i \to U_i$ $\{(U_i, \varphi_i),\ i=1, \ldots, m\}$ — конечный набор карт атласа A, районы $U_1, \ldots, U_m$ действия которых покрывают $\operatorname{supp} \omega$, а $e_1, \ldots, e_k$ — подчиненное этому покрытию разбиение единицы на $\operatorname{supp} \omega$. Повторяя некоторые карты по нескольку раз, можно считать, что $m=k$ и что $\operatorname{supp} e_i \subset U_i$, $i=1, \ldots, m$.

Интегралом от финитной формы ω *по ориентированному многообразию* M называется величина

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{m} \int_{D_i} \varphi_i^*(e_i\omega), \tag{17}$$

где $\varphi_i^*(e_i\omega)$ — координатное представление формы $e_i\omega|_{U_i}$ в области D_i изменения координат соответствующей локальной карты.

Докажем корректность этого определения.

◀ Пусть $\tilde{A} = \{\tilde{\varphi}_j: \tilde{D}_j \to \tilde{U}_j\}$ — другой атлас, задающий на M ту же гладкую структуру и ориентацию, что и атлас A, и пусть $\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_{\tilde{m}}$, $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{\tilde{m}}$ — соответствующее покрытие $\operatorname{supp} \omega$ и подчиненное ему разбиение единицы на $\operatorname{supp} \omega$. Введем функции $f_{ij} = e_i \tilde{e}_j$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, \tilde{m}$, и положим $\omega_{ij} = f_{ij}\omega$.

Заметим, что $\operatorname{supp} \omega_{ij} \subset W_{ij} = U_i \cap \tilde{U}_j$. Отсюда и из корректности определения 7 интеграла по задаваемому одной картой ориентированному многообразию вытекает, что

$$\int_{D_i} \varphi_i^*(\omega_{ij}) = \int_{\varphi_i^{-1}(W_{ij})} \varphi_i^*(\omega_{ij}) = \int_{\tilde{\varphi}_j^{-1}(W_{ij})} \tilde{\varphi}_j^*(\omega_{ij}) = \int_{\tilde{D}_j} \tilde{\varphi}_j^*(\omega_{ij}).$$

Суммируя эти равенства по i от 1 до m и по j от 1 до $\tilde{m}$ с учетом того, что $\sum\limits_{i=1}^{m} f_{ij}=\tilde{e}_j$, $\sum\limits_{i=1}^{\tilde{m}} f_{ij}=e_i$, получим интересующее нас тождество. ▶

5. Формула Стокса.

Теорема. *Пусть M — ориентированное гладкое n-мерное многообразие и ω — гладкая финитная дифференциальная форма степени $n-1$ на нем. Тогда*

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{M} d\omega, \tag{18}$$

где ориентация края ∂M многообразия M берется согласованной с ориентацией многообразия M. Если же $\partial M = \varnothing$, то $\int\limits_{M} d\omega = 0$.

◀ Без ограничения общности можно считать, что областями изменения координат (параметров) всех локальных карт многообразия M являются либо открытый куб $I=\{x\in\mathbb{R}^n \mid 0<x^i<1,\ i=1, \ldots, n\}$, либо куб $\tilde{I}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid 0<x^1\leq 1 \wedge 0<x^i<1,\ i=2, \ldots, n\}$ с одной (определенной!) присоединяемой к кубу I гранью.

С помощью разбиения единицы утверждение теоремы сводится к случаю, когда $\operatorname{supp}\omega$ лежит в районе U действия одной карты вида $\varphi\colon I\to U$ или $\varphi\colon \tilde{I}\to U$. В координатах этой карты форма ω имеет вид

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^n,$$

где символ $\widehat{\ }$, как обычно, означает пропуск соответствующего множителя.

В силу линейности интеграла утверждение достаточно доказать для одного члена

$$\omega_i=a_i(x)\, dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^n \tag{19}$$

суммы. Дифференциалом такой формы является n-форма

$$d\omega_i=(-1)^{i-1}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}(x)\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n. \tag{20}$$

Для карты вида $\varphi\colon I\to U$ оба интеграла в (18) от соответствующих форм (19), (20) равны нулю: первый потому, что $\operatorname{supp} a_i\subset I$, а второй — по той же причине, если учесть теорему Фубини и соотношение $\int\limits_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial x^i}\, dx^i=a_i(1)-a_i(0)=0$. Этим заодно исчерпывается случай, когда $\partial M=\varnothing$.

Таким образом, остается проверить равенство (18) для карты $\varphi\colon \tilde{I} \to U$.

Если $i > 1$, то и для такой карты оба интеграла равны нулю, что следует из приведенных выше соображений.

Если же $i = 1$, то

$$\int\limits_M \omega_1 = \int\limits_U \omega_1 = \int\limits_{\tilde{I}} \frac{\partial a_1}{\partial x^1}(x)\, dx^1 \ldots dx^n =$$

$$= \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{\partial a_1}{\partial x^1}(x)\, dx^1 \right) dx^2 \ldots dx^n =$$

$$= \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 a_1(1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \ldots dx^n = \int\limits_{\partial U} \omega_1 = \int\limits_{\partial M} \omega_1 .$$

Итак, при $n > 1$ формула (18) доказана.

Случай $n = 1$ совпадает с формулой Ньютона — Лейбница, если принять, что концы α, β ориентированного отрезка $[\alpha, \beta]$ отмечаются знаками α_- и β_+, а интеграл от 0-формы $g(x)$ по такой ориентированной точке полагается равным $-g(\alpha)$ и $+g(\beta)$ соответственно. ▶

По поводу доказанной теоремы сделаем некоторые замечания.

Замечание 1. В формулировке теоремы ничего не говорится о гладкости многообразия M и формы ω. В таких случаях обычно подразумевают, что каждый из этих объектов имеет гладкость $C^{(\infty)}$. Из доказательства теоремы видно, однако, что формула (18) верна и для форм класса $C^{(2)}$ на многообразии M, допускающем формы такой гладкости.

Замечание 2. Из доказательства теоремы, как, впрочем, и из самой формулы (18), видно также, что если $\operatorname{supp} \omega$ — компакт, лежащий строго внутри M, т. е. $\operatorname{supp} \omega \cap \partial M = \varnothing$, то $\int\limits_M d\omega = 0$.

Замечание 3. Если M — компактное многообразие, то для любой формы ω на M ее носитель $\operatorname{supp} \omega$, как замкнутое подмножество компакта M, является компактом. Следовательно, в этом случае любая форма ω на M является финитной и имеет место равенство (18). В частности, если M — компактное многообразие без края, то для любой гладкой формы на M имеет место равенство $\int\limits_M d\omega = 0$.

Замечание 4. Для произвольных (не финитных) форм ω на многообразии, не являющемся само по себе компактом, формула (18), вообще говоря, не имеет места.

Рассмотрим, например, знакомую нам форму $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ в круговом кольце $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$, наделенном стандартными декартовыми координатами. В этом случае M —

компактное двумерное ориентированное многообразие, край ∂M которого состоит из двух окружностей $C_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=i\}$, $i=1, 2$. Поскольку $d\omega = 0$, то по формуле (18) находим, что

$$0 = \int_M d\omega = \int_{C_2} \omega - \int_{C_1} \omega,$$

где обе окружности C_1 и C_2 пробегаются против часовой стрелки. Мы знаем, что

$$\int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega = 2\pi \neq 0.$$

Значит, если вместо M рассмотреть многообразие $\tilde{M} = M \setminus C_1$, то $\partial\tilde{M} = C_2$ и

$$\int_{\tilde{M}} d\omega = 0 \neq 2\pi = \int_{\partial\tilde{M}} \omega.$$

Задачи и упражнения

1. a. Два гладких пути $\gamma_i\colon \mathbb{R} \to M$, $i=1, 2$, на гладком многообразии M назовем *касающимися* в точке $p \in M$, если $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ и в каждой локальной системе координат $\varphi\colon \mathbb{R}^n (H^n) \to U$, район U действия которой содержит точку p, выполняется соотношение

$$|\varphi^{-1} \circ \gamma_1(t) - \varphi^{-1} \circ \gamma_2(t)| = o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0. \tag{19}$$

Покажите, что если равенство (19) выполнено в одной из указанных систем координат, то оно будет выполнено и в другой такой же локальной системе координат гладкого многообразия M.

b. Свойство путей касаться в некоторой точке $p \in M$ является отношением эквивалентности на множестве гладких путей, проходящих на M через точку p. Класс эквивалентности по этому отношению назовем *пучком касающихся путей в точке* $p \in M$. Установите намеченное в § 3, п. 1 взаимно однозначное соответствие между векторами пространства TM_p и пучками касающихся в точке $p \in M$ путей.

c. Покажите, что если пути γ_1, γ_2 касаются в точке $p \in M$, а $f \in C^{(1)}(M, \mathbb{R})$, то

$$\frac{df \circ \gamma_1}{dt}(0) = \frac{df \circ \gamma_2}{dt}(0).$$

d. Покажите, как каждому вектору $\xi \in TM_p$ сопоставляется функционал $l = l_\xi (= D_\xi)\colon C^{(\infty)}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, обладающий свойствами (8), (9), где $x_0 = p$. Обладающий этими свойствами функционал назовем дифференцированием в точке $p \in M$.

Проверьте, что дифференцирование l в точке p есть локальная операция, т. е. если $f_1, f_2 \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$ и $f_1(x) \equiv f_2(x)$ в некоторой окрестности точки p, то $lf_1 = lf_2$.

e. Покажите, что если $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты в окрестности точки p, то $l = \sum_{i=1}^{n} (lx_i) \frac{\partial}{\partial x^i}$, где $\frac{\partial}{\partial x^i}$ — операция вычисления частной производной по x^i в точке x, отвечающей точке p. (Указание. Запишите функцию $f|_{U(p)}\colon M \to \mathbb{R}$ в локальных координатах; вспомните, что для функции

$f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ имеет место разложение $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x^i g_i(x)$, где $g_i \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ и $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$, $i = 1, \ldots, n$.)

f. Проверьте, что если M — многообразие класса $C^{(\infty)}$, то линейное пространство дифференцирований в точке $p \in M$ изоморфно построенному в п. 1 настоящего параграфа пространству TM_p, касательному к M в точке p

2. a. Если в каждой точке $p \in M$ гладкого многообразия M фиксирован вектор $\xi(p) \in TM_p$, то говорят, что *на многообразии M* задано *векторное поле*. Пусть X — векторное поле на M. Поскольку в силу предыдущей задачи любой вектор $X(p) = \xi \in TM_p$ можно интерпретировать как дифференцирование в соответствующей точке p, то по любой функции $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$ можно построить функцию $X(p)$, значение которой в любой точке $p \in M$ вычисляется применением $X(p)$ к f, т. е дифференцированием f по вектору $X(p)$ поля X. Поле X на M называется *гладким* (класса $C^{(\infty)}$), если для любой функции $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$ функция Xf тоже принадлежит классу $C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$.

Дайте локальную координатную запись векторного поля и эквивалентное приведенному, но координатное определение гладкого (класса $C^{(\infty)}$) векторного поля на гладком многообразии

b. Пусть X и Y — два гладких векторных поля на многообразии M. Для функций $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$ построим следующий функционал: $[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf)$. Проверьте, что $[X, Y]$ — тоже гладкое векторное поле на M. Оно называется *скобкой Пуассона векторных полей* X и Y.

c Наделите гладкие векторные поля на многообразии структурой алгебры Ли.

3. a. Пусть X и ω — гладкое векторное поле и гладкая 1-форма на гладком многообразии M. Пусть ωX означает применение ω к вектору поля X в соответствующих точках многообразия M Покажите, что ωX — гладкая функция на M.

b. Учитывая задачу 2, покажите, что имеет место следующее соотношение:

$$d\omega^1(X, Y) = X(\omega^1 Y) - Y(\omega^1 X) - \omega^1([X, Y]),$$

где X, Y — гладкие векторные поля, $d\omega^1$ — дифференциал формы ω^1, $d\omega^1(X, Y)$ — применение $d\omega^1$ к парам связанных с одной точкой векторов полей X, Y.

c. Проверьте, что в общем случае формы ω порядка m справедливо соотношение

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{m+1}) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{m+1}),$$

где символ $\widehat{\ }$ отмечает выпускаемый член, $[X_i, X_j]$ — скобка Пуассона полей X_i, X_j, а $X_i\omega$ — дифференцирование функции $\omega(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{m+1})$ по векторам поля X_i. Поскольку скобка Пуассона определена инвариантно, то полученное соотношение можно расценить как довольно сложное, но инвариантное определение оператора d: $\Omega \to \Omega$ внешнего дифференцирования.

d. Пусть ω — гладкая m-форма на гладком n-мерном многообразии M. Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_m)_i$ — векторы в $\mathbb{R}^n$, отвечающие в карте φ_i: $\mathbb{R}^n \to U \subset M$ векторам $\xi_1, \ldots, \xi_m \in TM_p$. Обозначим через Π_i образованный векторами $(\xi_1, \ldots, \xi_m)_i$ в $\mathbb{R}^n$ параллелепипед, и пусть $\lambda\Pi_i$ — параллелепипед, натянутый на векторы $(\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_m)_i$. Образы $\varphi(\Pi_i)$, $\varphi(\lambda\Pi_i)$ этих параллелепипедов в M обозначим через Π и $\lambda\Pi$ соответственно Покажите, что

$$d\omega(p)(\xi_1, \ldots, \xi_{m+1}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} \int_{\partial(\lambda\Pi)} \omega.$$

4. a. Пусть f: $M \to N$ — гладкое отображение гладкого m-мерного многообразия M в гладкое n-мерное многообразие N. Используя интерпретацию касательного вектора к многообразию как пучка касающихся путей (см. задачу 1), постройте индуцируемое отображением f отображение $f_*(p)$: $TM_p \to TN_{f(p)}$.

b. Покажите, что отображение f_* линейно и запишите его в соответствующих локальных координатах многообразий M и N. Объясните, почему $f_*(p)$ называют дифференциалом отображения f в точке p или отображением, касательным к f в этой точке.

c. Касательное отображение $f_*(p)$: $TM_p \to TN_{q=f(p)}$ касательных пространств, как известно из § 1, порождает сопряженное отображение $f^*(p)$ сопряженных пространств и вообще определенных на $TN_{f(p)}$ и TM_p пространств k-форм.

Пусть ω — k-форма на N; k-форма $f^*\omega$ на M определяется соотношением

$$(f^*\omega)(p)(\xi_1, \ldots, \xi_k) := \omega(f(p))(f_*\xi_1, \ldots, f_*\xi_k),$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_k \in TM_p$. Так возникает отображение f^*: $\Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ пространства $\Omega^k(N)$ заданных на N k-форм в пространство $\Omega^k(M)$ k-форм на M.

Проверьте следующие свойства отображения f^*, считая M и N многообразиями класса гладкости $C^{(\infty)}$:

1° f^* — линейное отображение;

2° $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2$;

3° $d \circ f^* = f^* \circ d$, т. е. $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$;

4° $(f_2 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_2^*$.

d. Пусть M и N — гладкие n-мерные ориентированные многообразия, а φ: $M \to N$ — диффеоморфизм M на N. Покажите, что если ω — n-форма на N с компактным носителем, то

$$\int\limits_{\varphi(M)} \omega = \varepsilon \int\limits_{M} \varphi^*\omega,$$

где $\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \text{ сохраняет ориентацию,} \\ -1, & \text{если } \varphi \text{ меняет ориентацию.} \end{cases}$

e. Пусть $A \supset B$. Отображение i: $B \to A$, которое каждой точке $x \in B$ ставит в соответствие ее же как точку множества A называют *каноническим вложением B в A*.

Если ω — форма на многообразии M, а M' — подмногообразие M, то каноническое вложение i: $M' \to M$ порождает на M' форму $i^*\omega$, которую называют *сужением* или *ограничением формы ω на M'*. Покажите, что правильная запись формулы Стокса (18) должна иметь вид

$$\int\limits_{M} d\omega = \int\limits_{\partial M} i^*\omega,$$

где i^*: $\partial M \to M$ — каноническое вложение ∂M в M, а ориентация на ∂M берется согласованной с ориентацией M.

5. a. Пусть M — гладкое ($C^{(\infty)}$) ориентируемое n-мерное многообразие, а $\Omega_c^n(M)$ — пространство гладких ($C^{(\infty)}$) n-форм с компактным носителем на M. Покажите, что существует и притом единственное отображение $\int\limits_M$: $\Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

1° отображение $\int\limits_M$ линейно;

2° если φ: $I^n(\tilde{I}^n) \to U \subset M$ — карта задающего ориентацию M атласа, $\operatorname{supp} \omega \subset U$ и в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ этой карты $\omega = a(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, то

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_{I^n(\tilde{I}^n)} a(x)\, dx^1 \ldots dx^n,$$

где справа стоит интеграл Римана от функции a по соответствующему кубу I^n ($\tilde{I}^n$)

b Всегда ли указанное выше отображение можно продолжить до обладающего теми же свойствами отображения $\int\limits_M : \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$ пространства $\Omega^n(M)$ всех гладких n-форм на M?

c Используя то, что в любое открытое покрытие многообразия M можно вписать не более чем счетное локально конечное покрытие M и то, что для любого такого покрытия на M существует подчиненное этому покрытию разбиение единицы (см. задачу 9 из § 2), определите интеграл от n-формы по ориентированному гладкому n-мерному (не обязательно компактному) многообразию так, чтобы он обладал указанными выше свойствами 1°, 2° применительно к формам, для которых интеграл конечен Покажите, что для этого интеграла формула (18), вообще говоря, не имеет места, и дайте условия на ω, достаточные для справедливости формулы (18) в случае, когда $M=\mathbb{R}^n$, и в случае, когда $M=H^n$.

6. a. Используя теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения $\dot{x}=v(x)$, а также гладкую зависимость решения от начальных данных, покажите, что гладкое векторное поле $v(x)$ в $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать как поле скоростей установившегося течения. Точнее, покажите, что существует такое гладко зависящее от параметра (времени) t семейство диффеоморфизмов φ_t. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, что $\varphi_t(x)$ при фиксированном значении $x \in \mathbb{R}^n$ является интегральной кривой нашего уравнения, т е $\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t}=v(\varphi_t(x))$, причем $\varphi_0(x)=x$ Отображение φ_t: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, очевидно, характеризует перемещение частиц среды за время Проверьте, что семейство отображений φ_t: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является однопараметрической группой диффеоморфизмов, т. е $(\varphi_t)^{-1}=\varphi_{-t}$, $\varphi_{t_2} \circ \varphi_{t_1}=\varphi_{t_2+t_1}$.

b. Пусть v — векторное поле в $\mathbb{R}^n$, а φ_t — однопараметрическая группа диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$, порожденная полем v. Проверьте, что для любой гладкой функции $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ имеет место соотношение

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(\varphi_t(x))-f(x)\right)=D_{v(x)}f.$$

Если ввести обозначение $v(f)=D_v f$, согласованное с обозначениями из задачи 2, и вспомнить, что $f\circ\varphi_t=\varphi_t^* f$, то можно написать, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\varphi_t^* f-f\right)(x)=v(f)(x)$$

c. Теперь естественно определяется и дифференцирование заданной в $\mathbb{R}^n$ гладкой формы ω любой степени вдоль поля v. А именно, положим

$$v(\omega)(x):=\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\varphi_t^*\omega-\omega\right)(x).$$

Форма $v(\omega)$ называется *производной Ли* от формы ω вдоль поля v и чаще всего обозначается специальным символом $L_v\omega$ Определите производную Ли $L_X\omega$ формы ω вдоль поля X на произвольном гладком многообразии M.

d Покажите, что производная Ли на $C^{(\infty)}$-многообразии M обладает следующими свойствами:

1° L_X — локальная операция, т. е. если в окрестности $U \subset M$ рассматриваемой точки $x \in M$ поля X_1, X_2 и формы ω_1, ω_2 соответственно совпадают, то $(L_{X_1}\omega_1)(x)=(L_{X_2}\omega_2)(x)$.

2° $L_X\ \Omega^k(M) \subset \Omega^k(M)$.

3° L_X: $\Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ — линейное отображение при любом $k=0, 1, 2, \ldots$

4° $L_X(\omega_1 \wedge \omega_2)=(L_X\omega_1) \wedge \omega_2+\omega_1 \wedge L_X\omega_2$.

5° если $f \in \Omega^0(M)$, то $L_X f = df(X) =: Xf$.

6° если $f \in \Omega^0(M)$, то $L_X\, df = d(Xf)$

e. Проверьте, что указанные выше свойства 1°—6° однозначно определяют операцию L_X.

7. Пусть X — векторное поле, а ω — форма степени k на гладком многообразии M.

Внутренним произведением поля X и формы ω называется $(k-1)$-форма, обозначаемая через $i_X\omega$ или через $X \rfloor \omega$ и определяемая соотношением $(i_X\omega)(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{k-1})$, где $X_1, \ldots, X_{k-1}$ — векторные поля на M. Для 0-форм, т. е. функций на M, положим $X \rfloor f = 0$.

a. Покажите, что если в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ карты $\varphi: \mathbb{R}^n \to U \subset M$ форма ω (точнее $\omega|_U$) имеет вид $\sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} a_{i_1 \ldots i_k}(x) \times$ $\times\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = \frac{1}{k!} a_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, а $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, то $i_X\omega = \frac{1}{(k-1)!} \times$ $\times\, X^i a_{i i_2, \ldots, i_k} dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge x^{i_k}$.

b. Проверьте далее, что если $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, то $i_X\, df = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = X(f) \equiv D_X f$

c. Пусть $\mathcal{X}(M)$ — пространство векторных полей на многообразии M, а $\Omega(M)$ — кольцо кососимметрических форм на M Покажите, что существует только одно отображение $i: \mathcal{X}(M) \times \Omega(M) \to \Omega(M)$, обладающее следующими свойствами.

1° i — локальная операция, т. е. если поля X_1, X_2 и формы ω_1, ω_2 соответственно совпадают в окрестности U точки $x \in M$, то $(i_{X_1}\omega_1)(x) = (i_{X_2}\omega_2)(x)$;

2° $i_X(\Omega^k(M)) \subset \Omega^{k-1}(M)$;

3° i_X: $\Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ — линейное отображение;

4° если $\omega_1 \in \Omega^{k_1}(M)$, $\omega_2 \in \Omega^{k_2}(M)$, то $i_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = i_X\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1}\omega_1 \wedge i_X\omega_2$;

5° если $\omega \in \Omega^1(M)$, то $i_X\omega = \omega(X)$, а если $f \in \Omega^0(M)$, то $i_X f = 0$

8. Докажите следующие утверждения:

a. Операторы d, i_X и L_X (см задачи 6, 7) удовлетворяют так называемому *тождеству гомотопии*

$$L_X = i_X d + d i_X, \tag{20}$$

где X — любое гладкое векторное поле на многообразии.

b. Производная Ли коммутирует с d и i_X, т. е

$$L_X \circ d = d \circ L_X, \quad L_X \circ i_X = i_X \circ L_X.$$

c. $[L_X, i_Y] = i_{[X, Y]}$, $[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}$, где как всегда $[A, B] = A \circ B - B \circ A$ для любых операторов A, B, для которых выражение $A \circ B - B \circ A$ определено. В данном случае все скобки [,] определены.

d. $L_X f\omega = fL_X\omega + df \wedge i_X\omega$, где $f \in \Omega^0(M)$, а $\omega \in \Omega^k(M)$.

(Указание Основным в задаче является п. а. Его можно проверить, например, индукцией по степени формы, на которую действуют операторы.)

§ 4. Замкнутые и точные формы на многообразии

1. Теорема Пуанкаре. В этом параграфе будут дополнены сведения о замкнутых и точных дифференциальных формах, которые были изложены в гл. XIV, § 3 в связи с теорией векторных полей в области пространства $\mathbb{R}^n$. Как и прежде, символ $\Omega^p(M)$ будет означать пространство всех гладких вещественнозначных форм степени p на гладком многообразии M, а $\Omega(M) = \bigcup\limits_p \Omega^p(M)$.

Определение 1. Форма $\omega \in \Omega^p(M)$ называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$.

Определение 2. Форма $\omega \in \Omega^p(M)$, $p > 0$, называется *точной*, если существует такая форма $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$, что $\omega = d\alpha$.

Множество всех замкнутых p-форм на многообразии M обозначим через $Z^p(M)$, а множество всех точных p-форм на M обозначим символом $B^p(M)$.

Для любой формы $\omega \in \Omega(M)$ имеет место соотношение *) $d(d\omega) = 0$, которое показывает, что $Z^p(M) \supset B^p(M)$. Нам уже известно из гл. XIV, § 3, что, вообще говоря, это включение является строгим.

Важный вопрос о разрешимости (относительно α) уравнения $d\alpha = \omega$ при выполнении необходимого условия $d\omega = 0$ на форму ω оказывается тесно связан с топологической структурой многообразия M. Более полно сказанное будет расшифровано ниже.

Определение 3. Многообразие M будем называть *стягиваемым* (в точку $x_0 \in M$) или *гомотопным точке*, если существует такое гладкое отображение $h\colon M \times I \to M$, где $I = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, что $h(x, 1) = x$ и $h(x, 0) = x_0$.

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ стягивается в точку посредством отображения $h(x, t) = tx$.

Теорема 1 (Пуанкаре). *Любая замкнутая* $(p+1)$*-форма* $(p \geqslant 0)$ *на стягиваемом в точку многообразии M является точной.*

◀ Нетривиальная часть доказательства состоит в следующей «цилиндрической» конструкции, сохраняющей силу для любого многообразия M.

Рассмотрим «цилиндр» $M \times I$ — прямое произведение M на единичный отрезок I, и два отображения $j_i\colon M \to M \times I$, $j_i(x) = (x, i)$, $i = 0, 1$, отождествляющие M с основаниями цилиндра $M \times I$. Тогда естественно возникают соответствующие отображения $j_i^*\colon \Omega^p(M \times I) \to \Omega^p(M)$, которые сводятся к тому, что в форме из $\Omega^p(M \times I)$ переменная t заменяется значением i $(= 0, 1)$, при этом, разумеется, $di = 0$.

Построим линейный оператор $K\colon \Omega^{p+1}(M \times I) \to \Omega^p(M)$, который на мономах определим следующим образом:

$$K\left(a(x, t)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p+1}}\right) := 0,$$

$$K\left(a(x, t)\, dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\right) := \left(\int\limits_0^1 a(x, t)\, dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

*) В зависимости от способа введения оператора d это свойство или доказывается, и тогда его часто называют *леммой Пуанкаре*, или включается в определение оператора d.

Основное нужное нам свойство оператора K состоит в том, что для любой формы $\omega \in \Omega^{p+1}(M \times I)$ имеет место соотношение

$$K(d\omega) + d(K\omega) = j_1^*\omega - j_0^*\omega. \tag{1}$$

Это соотношение достаточно проверить для мономов, поскольку все операторы K, d, j_1^*, j_0^* линейны.

Если $\omega = a(x, t)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p+1}}$, то $K\omega = 0$, $dK\omega = 0$,

$$d\omega = \frac{\partial a}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p+1}} + [\text{члены без } dt],$$

$$K(d\omega) = \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t} dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p+1}} =$$

$$= (a(x, 1) - a(x, 0))\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p+1}} = j_1^*\omega - j_0^*\omega,$$

и соотношение (1) справедливо.

Если $\omega = a(x, t)\, dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, то $j_1^*\omega = j_0^*\omega = 0$. Далее,

$$K(d\omega) = K\left(-\sum_{i_0} \frac{\partial a}{\partial x^{i_0}} dt \wedge dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\right) =$$

$$= -\sum_{i_0} \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^{i_0}} dt\right) dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

$$d(K\omega) = d\left(\left(\int_0^1 a(x, t)\, dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\right) =$$

$$= \sum_{i_0} \frac{\partial}{\partial x^{i_0}} \left(\int_0^1 a(x, t)\, dt\right) dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} =$$

$$= \sum_{i_0} \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^{i_0}} dt\right) dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Таким образом, и в этом случае соотношение (1) справедливо *).

Пусть теперь M — стягиваемое в точку $x_0 \in M$ многообразие, $h\colon M \times I \to M$ — указанное в определении 3 отображение, ω — $(p+1)$-форма на M. Тогда, очевидно, $h \cdot j_1\colon M \to M$ — тождественное отображение, а $h \cdot j_0\colon M \to x_0$ — отображение M в точку x_0, поэтому $(j_1^{*\circ} h^*)\,\omega = \omega$ и $(j_0^{*\circ} h^*)\,\omega = 0$. Значит, в этом случае из (1) следует, что

$$K(d(h^*\omega)) + d(K(h^*\omega)) = \omega. \tag{2}$$

*) По поводу обоснования проведенного в последнем равенстве дифференцирования интеграла по переменной x^{i_0} см., например, гл. XVII, § 1.

Если к тому же ω — замкнутая форма на M, то, поскольку $d(h^*\omega)=h^*(d\omega)=0$, из (2) получаем, что

$$d(K(h^*\omega))=\omega$$

Таким образом, замкнутая форма ω является внешним дифференциалом формы $\alpha=K(h^*\omega)\in\Omega^p(M)$, т. е. ω — точная форма на M. ▶

Пример 2. Пусть A, B, C — гладкие вещественнозначные функции переменных x, y, z в $\mathbb{R}^3$. Требуется решить относительно функций P, Q, R систему уравнений

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=A,\\ &\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=B,\\ &\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=C. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Для совместности системы (3), очевидно, необходимо, чтобы функции A, B, C удовлетворяли соотношению

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0,$$

которое равносильно замкнутости в $\mathbb{R}^3$ формы

$$\omega=A\,dy\wedge dz+B\,dz\wedge dx+C\,dx\wedge dy.$$

Система (3) будет решена, если будет найдена такая форма

$$\alpha=P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

что $d\alpha=\omega$.

В соответствии с изложенной при доказательстве теоремы 1 рецептурой и с учетом построенного в примере 1 отображения h после простых вычислений получим

$$\alpha=K(h^*\omega)=\left(\int_0^1 A(tx,\ ty,\ tz)\,t\,dt\right)(y\,dz-z\,dy)+$$
$$+\left(\int_0^1 B(tx,\ ty,\ tz)\,t\,dt\right)(z\,dx-x\,dz)+$$
$$+\left(\int_0^1 C(tx,\ ty,\ tz)\,t\,dt\right)(x\,dy-y\,dx).$$

Можно и непосредственно проверить, что $d\alpha=\omega$.

Замечание. Произвол в выборе формы α, удовлетворяющей условию $d\alpha=\omega$, обычно довольно большой. Так, вместе с формой α любая форма вида $\alpha+d\eta$, очевидно, тоже будет удовлетворять этому же уравнению.

В силу теоремы 1 на стягиваемом многообразии M любые две формы α, β, удовлетворяющие условию $d\alpha = d\beta = \omega$, отличаются на точную форму. Действительно, $d(\alpha - \beta) = 0$, т. е. форма $(\alpha - \beta)$ — замкнутая на M, а значит, по теореме 1 она точная.

2. Гомологии и когомологии. В силу теоремы Пуанкаре любая замкнутая форма на многообразии локально является точной. Склеить эти локальные первообразные в одну форму на всем многообразии удается далеко не всегда, и это зависит от топологической структуры многообразия. Например, замкнутая в проколотой плоскости $\mathbb{R}^2\setminus 0$ форма $\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$, рассмотренная в § 3 гл. XIV, локально является дифференциалом функции $\varphi = \varphi(x, y)$ — полярного угла точки (x, y), — однако, продолжение этой функции в области $\mathbb{R}^2\setminus 0$ приводит к многозначностям, если замкнутый путь, по которому идет продолжение, охватывает дырку — точку 0. Примерно так же обстоит дело и с формами других степеней. «Дырки» в многообразиях могут быть различные — не только проколы, но и такие, как, например, у тора или кренделя. Структура многообразий высших размерностей может быть довольно сложной. Связь между устройством многообразия как топологического пространства и взаимоотношением замкнутых и точных форм на нем описывается так называемыми группами (ко)гомологий многообразия.

Замкнутые и точные вещественнозначные формы на многообразии M образуют линейные пространства $Z^p(M)$ и $B^p(M)$ соответственно, причем $Z^p(M) \supset B^p(M)$.

Определение. 4. Фактор-пространство

$$H^p(M) := Z^p(M)/B^p(M) \tag{4}$$

называется *группой p-мерных когомологий* (с вещественными коэффициентами) *многообразия M*.

Таким образом, две замкнутые формы ω_1, $\omega_2 \in Z^p(M)$ лежат в одном классе когомологий или *когомологичны*, если $\omega_1 - \omega_2 \in B^p(M)$, т. е. если они отличаются на точную форму. Класс когомологий формы $\omega \in Z^p(M)$ будем обозначать символом $[\omega]$.

Поскольку $Z^p(M)$ есть ядро оператора d^p: $\Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$, а $B^p(M)$ есть образ оператора d^{p-1}: $\Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)$, то вместо (4), часто пишут

$$H^p(M) = \operatorname{Ker} d^p/\operatorname{Im} d^{p-1}.$$

Подсчет когомологий дело, как правило, трудное. Можно, однако, сделать некоторые тривиальные общие наблюдения.

Из определения 4 следует, что если $p > \dim M$, то, очевидно, $H^p(M) = 0$.

Из теоремы Пуанкаре вытекает, что если M стягиваемо, то при $p>0$ $H^p(M)=0$.

На любом связном многообразии M группа $H^0(M)$ изоморфна $\mathbb{R}$, так как $H^0(M)=Z^0(M)$, а если для функции $f\colon M\to\mathbb{R}$ на связном многообразии M выполнено соотношение $df=0$, то $f=\text{const}$.

Таким образом, например, для пространства $\mathbb{R}^n$ получается $H^p(\mathbb{R}^n)=0$ при $p>0$ и $H^0(\mathbb{R}^n)\sim\mathbb{R}$. Это утверждение (с точностью до тривиального последнего соотношения) эквивалентно теореме 1 при $M=\mathbb{R}^n$ и тоже называется теоремой Пуанкаре.

Более наглядную геометрическую связь с многообразием M имеют так называемые группы гомологий.

Определение 5. Гладкое отображение $c\colon I^p\to M$ p-мерного куба $I\subset\mathbb{R}^p$ в многообразие M называют *сингулярным кубом* на многообразии M.

Это прямое обобщение понятия гладкого пути на случай произвольной размерности p. В частности, сингулярный куб может состоять в преобразовании куба I в одну точку.

Определение 6. *Цепью* (сингулярных кубов) *размерности* p на многообразии M называется любая конечная формальная линейная комбинация $\sum\limits_k \alpha_k c_k$ сингулярных p-мерных кубов на M с вещественными коэффициентами.

Как и пути, сингулярные кубы, получающиеся друг из друга диффеоморфным изменением параметризации с положительным якобианом, считаются эквивалентными и отождествляются. Если же такая замена параметризации происходит с отрицательным якобианом, то соответствующие (противоположно ориентированные) сингулярные кубы c, c_- считаются противоположными и полагают $c_-=-c$.

Цепи размерности p на многообразии M, очевидно, образуют линейное пространство относительно стандартных операций сложения и умножения на вещественное число. Это пространство мы обозначим через $C_p(M)$.

Определение 7. *Границей* ∂I p-мерного куба I^p в $\mathbb{R}^p$ называется $(p-1)$-мерная цепь

$$\partial I := \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{i+j}c_{ij} \tag{5}$$

в $\mathbb{R}^p$, где $c_{ij}\colon I^{p-1}\to\mathbb{R}^p$ — отображение $(p-1)$-мерного куба в $\mathbb{R}^p$, индуцированное каноническим вложением соответствующей грани куба I^p в $\mathbb{R}^p$. Точнее, если $I^{p-1}=\{\tilde{x}\in\mathbb{R}^{p-1}\mid 0\leqslant\tilde{x}^m\leqslant 1,\ m=1,\dots$ $\dots,p-1\}$, то $c_{ij}(\tilde{x})=(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^{j-1},i,\tilde{x}^j,\dots,\tilde{x}^p)\in\mathbb{R}^p$.

Легко проверить, что это формальное определение границы куба в точности совпадает с операцией взятия края стандартно ориентированного куба I^p (см. гл. XII § 3).

Определение 8. Граница ∂c *сингулярного* p-мерного *куба* есть $(p-1)$-мерная цепь

$$\partial c := \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=1}^{p} (-1)^{i+j} c \circ c_{ij}.$$

Определение 9. Граница p-мерной цепи $\sum\limits_k \alpha_k c_k$ на многообразии M есть $(p-1)$-мерная цепь.

$$\partial\left(\sum_k \alpha_k c_k\right) := \sum_k \alpha_k \, \partial c_k.$$

Таким образом, на любом пространстве цепей $C_p(M)$ определен линейный оператор

$$\partial = \partial_p : C_p(M) \to C_{p-1}(M).$$

Исходя из соотношения (5), можно проверить, что для куба имеет место соотношение $\partial(\partial I) = 0$. Следовательно, вообще $\partial \circ \partial = \partial^2 = 0$.

Определение 10. *Циклом* z *размерности* p или p-*циклом* на многообразии называется такая цепь, для которой $\partial z = 0$.

Определение 11. *Граничным циклом* b *размерности* p на многообразии называется цепь, являющаяся границей некоторой $(p+1)$-мерной цепи.

Пусть $Z_p(M)$ и $B_p(M)$ — совокупности p-мерных циклов и p-мерных граничных циклов на многообразии M. Ясно, что $Z_p(M)$ и $B_p(M)$ являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$ и что $Z_p(M) \supset B_p(M)$.

Определение 12. Фактор-пространство

$$H_p(M) := Z_p(M)/B_p(M) \tag{6}$$

называется *p-мерной группой гомологий* (с вещественными коэффициентами) *многообразия* M.

Таким образом, два цикла $z_1, z_2 \in Z_p(M)$ лежат в одном классе гомологий или *гомологичны*, если $z_1 - z_2 \in B_p(M)$, т. е. если они отличаются на границу некоторой цепи. Класс гомологий цикла $z \in Z_p(M)$ будем обозначать через $[z]$.

Как и в случае когомологий, соотношение (6) можно переписать в виде

$$H_p(M) = \operatorname{Ker} \partial_p / \operatorname{Im} \partial_{p+1}.$$

Определение 13. Если c: $I \to M$ — сингулярный p-мерный куб, а ω — p-форма на многообразии M, то *интегралом от формы* ω *по этому сингулярному кубу* называется величина

$$\int_c \omega := \int_I c^* \omega. \tag{7}$$

Определение 14. Если $\sum\limits_k \alpha_k c_k$ — цепь размерности p, а ω — p-форма на многообразии M, то интеграл от формы по такой цепи понимается как линейная комбинация $\sum\limits_k \alpha_k \int\limits_{c_k} \omega$ интегралов по соответствующим сингулярным кубам.

Из определений 5—8 и 13, 14 следует, что для интеграла по сингулярному кубу справедлива формула Стокса

$$\int\limits_c d\omega = \int\limits_{\partial c} \omega, \tag{8}$$

где c и ω имеют размерность p и степень $p-1$ соответственно. Если учесть еще определение 9, то можно заключить, что вообще формула Стокса (8) остается в силе для интегралов по цепям.

Теорема 2. a) *Интеграл от точной формы по циклу равен нулю.*

b) *Интеграл от замкнутой формы по границе цепи равен нулю.*

c) *Интеграл от замкнутой формы по циклу зависит только от класса гомологий цикла.*

d) *Интеграл от замкнутой формы по циклу зависит только от класса когомологий формы.*

e) *Если замкнутые p-формы ω_1, ω_2 и циклы z_1, z_2 размерности p таковы, что $[\omega_1]=[\omega_2]$ и $[z_1]=[z_2]$, то*

$$\int\limits_{z_1} \omega_1 = \int\limits_{z_2} \omega_2.$$

◀ a) По формуле Стокса $\int\limits_z d\omega = \int\limits_{\partial z} \omega = 0$, так как $\partial z = 0$.

b) По формуле Стокса $\int\limits_{\partial c} \omega = \int\limits_c d\omega = 0$, так как $d\omega = 0$.

c) Вытекает из b).

d) Вытекает из a).

e) Вытекает из c) и d). ▶

Следствие. *Билинейное отображение $\Omega^p(M)\times C_p(M)\to\mathbb{R}$, задаваемое формулой $(\omega, c)\longmapsto\int\limits_c \omega$, индуцирует билинейное отображение $Z^p(M)\times Z_p(M)\to\mathbb{R}$ и билинейное отображение $H^p(M)\times\times H_p(M)\to\mathbb{R}$. Последнее задается формулой*

$$([\omega], [z])\longmapsto\int\limits_z \omega, \tag{9}$$

где $\omega\in Z^p(M)$ и $z\in Z_p(M)$.

Теорема 3 (де Рам*)). *Задаваемое формулой* (9) *билинейное отображение* $H^p(M)\times H_p(M)\to\mathbb{R}$ *невырождено***).

Мы не останавливаемся здесь на доказательстве этой теоремы де Рама, но дадим несколько ее переформулировок, позволяющих в явном виде представить используемые в анализе ее следствия.

Прежде всего заметим, что каждый класс когомологий $[\omega]\in H^p(M)$ в силу (9) можно интерпретировать как линейную функцию $[\omega]([z])=\int\limits_z\omega$ на $H_p(M)$. Таким образом, возникает естественное отображение $H^p(M)\to H_p^*(M)$, где $H_p^*(M)$ — сопряженное к $H_p(M)$ пространство. Теорема де Рама утверждает, что это отображение является изоморфизмом, и в этом смысле $H^p(M)=H_p^*(M)$.

Определение 15. Если ω — замкнутая p-форма, а z — цикл размерности p на многообразии M, то величина $\operatorname{per}(z):=\int\limits_z\omega$ называется *периодом* (или *циклической постоянной*) *формы* ω *на цикле* z.

В частности, если цикл z гомологичен нулю, то, как следует из утверждения b) теоремы 2, $\operatorname{per}(z)=0$. По этой причине между периодами имеется следующая связь:

$$\left[\sum_k \alpha_k z_k\right]=0\Rightarrow\sum_k\alpha_k\operatorname{per}(z_k)=0, \tag{10}$$

т. е. если линейная комбинация циклов является граничным циклом, или, что то же самое, гомологична нулю, то соответствующая линейная комбинация периодов равна нулю.

Имеют место следующие две теоремы де Рама, которые в совокупности равносильны теореме 3.

Теорема 4 (первая теорема де Рама). *Замкнутая форма точна тогда и только тогда, когда все ее периоды равны нулю.*

Теорема 5 (вторая теорема де Рама). *Если каждому p-циклу* $z\in Z_p(M)$ *на многообразии* M *сопоставить число* $\operatorname{per}(z)$ *с соблюдением условия* (10), *то на* M *найдется такая замкнутая p-форма* ω, *что* $\int\limits_z\omega=\operatorname{per}(z)$ *для любого цикла* $z\in Z_p(M)$.

Задачи и упражнения

1. Проверьте прямым вычислением, что полученная в примере 2 форма α действительно удовлетворяет уравнению $d\alpha=\omega$.

2. a. Докажите, что любая односвязная область в $\mathbb{R}^2$ стягиваема по себе в точку.

---

*) Ж. де Рам (1903—1969) — бельгийский математик; основные работы относятся к алгебраической топологии.

**) Напомним, что билинейная форма $L(x, y)$ называется невырожденной, если при любом фиксированном значении одной из переменных получается не равная нулю тождественно линейная форма по другой переменной.

b. Покажите, что в $\mathbb{R}^3$ предыдущее утверждение, вообще говоря, не имеет места.

3. Проанализируйте доказательство теоремы Пуанкаре и покажите, что если гладкое отображение $h\colon M\times I\to M$ рассматривать как семейство зависящих от параметра $t\in I$ отображений h_t $M\to M$, то для любой замкнутой на M формы ω, все формы $h_t^*\omega$, $t\in I$ будут лежать в одном классе когомологий.

4. a. Пусть $t\longmapsto h_t\in C^{(\infty)}(M, N)$ — гладко зависящее от параметра $t\in I\subset\mathbb{R}$ семейство отображений многообразия M в многообразие N. Проверьте, что для любой формы $\omega\in\Omega(N)$ справедлива следующая *формула гомотопии*

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_t^*\omega)(x)=dh_t^*(i_X\omega)(x)+h_t^*(i_X\,d\omega)(x). \tag{11}$$

Здесь $x\in M$; X — векторное поле на N, причем $X(x, t)\in TN_{h_t(x)}$ и $X(x, t)$ есть вектор скорости для пути $t'\longmapsto h_{t'}(x)$ при $t'=t$; оператор i_X внутреннего произведения формы и векторного поля определен в задаче 7 предыдущего параграфа.

b. Из формулы (11) получите утверждение, высказанное в задаче 3.

c. Опираясь на формулу (11), докажите вновь теорему 1 Пуанкаре.

d. Покажите, что если K — стягиваемое в точку многообразие, то для любого многообразия M и при любом целом значении p имеет место равенство $H^p(K\times M)=H^p(M)$.

e. Получите из формулы (11) соотношение (20) предыдущего параграфа.

5. a. Используя теорему 4, а также непосредственно покажите, что если замкнутая 2-форма на сфере S^2 такова, что $\int\limits_{S^2}\omega=0$, то форма ω — точная.

b. Покажите, что группа $H^2(S^2)$ изоморфна $\mathbb{R}$.

c. Покажите, что $H^1(S^2)=0$.

6. a. Пусть $\varphi\colon S^2\to S^2$ — отображение, которое каждой точке $x\in S^2$ ставит в соответствие диаметрально противоположную ей точку $-x\in S^2$ (антипод). Покажите, что между формами на проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ и формами на сфере S^2, инвариантными относительно отображения φ (т. е. $\varphi^*\omega=\omega$), имеется взаимно однозначное соответствие.

b. Представим $\mathbb{RP}^2$ как фактор-многообразие S^2/Γ, где Γ — группа преобразований сферы S^2, состоящая из тождественного отображения и антиподального отображения φ. Пусть $\pi\colon S^2\to\mathbb{RP}^2=S^2/\Gamma$ — естественная проекция, т. е. $\pi(x)=\{x, -x\}$. Покажите, что $\pi\circ\varphi=\pi$, и проверьте, что

$$\forall\eta\in\Omega^p(S^2)\quad(\varphi^*\eta=\eta)\Longleftrightarrow\exists\omega\in\Omega^p(\mathbb{RP}^2)\quad(\pi^*\omega=\eta)$$

c. Используя задачу 5a, покажите теперь, что $H^2(\mathbb{RP}^2)=0$.

d. Докажите, что если функция $f\in C(S^2, \mathbb{R})$ такова, что $f(x)-f(-x)\equiv\mathrm{const}$, то $f\equiv 0$. Учитывая задачу 5c, выведите отсюда, что $H^1(\mathbb{RP}^2)=0$

7. a. Представив $\mathbb{RP}^2$ в виде стандартного прямоугольника Π с отождествлением противоположных сторон, указанным на рис. 98 ориентирующими стороны стрелками, покажите, что $\partial\Pi=2c'-2c$; $\partial c=P-Q$; $\partial c'=P-Q$.

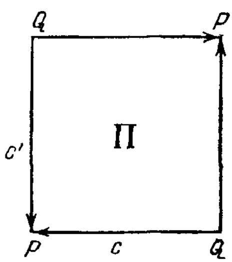

Рис. 98.

b. Выведите из сделанного в предыдущем задании наблюдения, что на $\mathbb{RP}^2$ нет нетривиальных двумерных циклов и, используя теорему де Рама, покажите, что $H^2(\mathbb{RP}^2)=0$.

c. Покажите, что единственным (с точностью до множителя) нетривиальным одномерным циклом на $\mathbb{RP}^2$ является цикл $c'-c$ и, поскольку $c'-c=\frac{1}{2}\partial\Pi$, выведите из теоремы де Рама, что $H^1(\mathbb{RP}^2)=0$.

8. Найдите группы $H^0(M)$, $H^1(M)$, $H^2(M)$, если:
a) $M=S^1$ — окружность;
b) $M=T^2$ — двумерный тор;
c) $M=K^2$ — бутылка Клейна.

9. a. Докажите, что диффеоморфные многообразия имеют изоморфные группы (ко)гомологий соответствующей размерности.

b. На примере $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}P^2$ покажите, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

10. Пусть X и Y — линейные пространства над полем $\mathbb{R}$, а $L(x, y)$ — невырожденная билинейная форма $L\colon X\times Y\to\mathbb{R}$. Рассмотрим отображение $X\to Y^*$, осуществляемое соответствием $X\ni x\longmapsto L(x, \cdot)\in Y^*$.

a. Докажите, что построенное отображение инъективно.

b. Покажите, что для любой системы $y_1, \dots, y_k$ линейно независимых векторов пространства Y в X найдутся такие векторы $x^1, \dots, x^k$, что $x^i(y_j) := L(x^i, y_j)=\delta^i_j$ где $\delta^i_j=0$ при $i\neq j$ и $\delta^i_j=1$ при $i=j$.

c. Проверьте, что построенное отображение $X\to Y^*$ является изоморфизмом линейных пространств X и Y^*.

d. Покажите, что первая и вторая теоремы де Рама означают в совокупности, что с точностью до изоморфизма $H^p(M)=H^*_p(M)$.

ГЛАВА XVI

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ АНАЛИЗА НАД РЯДАМИ И СЕМЕЙСТВАМИ ФУНКЦИЙ

§ 1. Поточечная и равномерная сходимость

1. Поточечная сходимость.

Определение 1. Говорят, что *последовательность* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *функций* $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ *сходится в точке* $x \in X$, если сходится последовательность $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ значений этих функций в точке x.

Определение 2. Множество $E \subset X$ точек, в которых последовательность $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ функций $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ сходится, называется *множеством сходимости последовательности функций*.

Определение 3. На множестве E сходимости последовательности функций $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ естественно возникает функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, задаваемая соотношением $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$. Эта функция называется *предельной функцией последовательности* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ или *пределом последовательности функций* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Определение 4. Если $f\colon E \to \mathbb{R}$ — предельная функция последовательности $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, то говорят, что эта *последовательность функций сходится* (или *сходится поточечно*) *к функции* f *на множестве* E.

В этом случае пишут $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ на E, или $f_n \to f$ на E при $n \to \infty$.

Пример 1. Пусть $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, а функции $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ заданы соотношением $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Множеством сходимости этой последовательности функций, очевидно, является отрезок $I = [0, 1]$, а предельной является функция $f\colon I \to \mathbb{R}$, задаваемая условиями

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{если} \quad x = 1. \end{cases}$$

Пример 2. Рассматриваемая на $\mathbb{R}$ последовательность функций $f_n(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}$ сходится на $\mathbb{R}$ к функции $f\colon \mathbb{R} \to 0$, тождественно равной нулю.

Пример 3. Последовательность $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n^2}$ тоже имеет своим пределом функцию $f\colon \mathbb{R}\to 0$, тождественнс равную нулю.

Пример 4. Рассмотрим на отрезке $I=[0, 1]$ последовательность функций $f_n(x)=2(n+1)x(1-x^2)^n$. Поскольку $nq^n\to 0$ при $|q|<1$, эта последовательность на всем отрезке I стремится к нулю.

Пример 5. Пусть $m, n\in\mathbb{N}$, и пусть $f_m(x):=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n}$. Если $m!\,x$ — целое, то $f_m(x)=1$, если же $m!\,x\notin\mathbb{Z}$, то, очевидно, $f_m(x)=0$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{f_m, m\in\mathbb{N}\}$ и покажем, что на всей числовой оси она сходится к функции Дирихле

$$\mathscr{D}(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\notin\mathbb{Q}, \\ 1, & \text{если } x\in\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Действительно, если $x\in\mathbb{Q}$, то $m!\,x\in\mathbb{Z}$ и $f_m(x)=0$ при любом значении $m\in\mathbb{N}$, значит, $f(x)=0$. Если же $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, где $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$, то уже при $m\geqslant q$ будет $m!\,x\in\mathbb{Z}$ и $f_m(x)=1$, что влечет $f(x)=1$.

Итак, $\lim\limits_{m\to\infty}f_m(x)=\mathscr{D}(x)$.

2. Постановка основных вопросов. Предельный переход встречается в анализе на каждом шагу и часто бывает важно знать, какими функциональными свойствами обладает предельная функция. Главные из таких свойств для анализа — непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Значит, важно выяснить, будет ли предельная функция непрерывной, дифференцируемой или интегрируемой, если соответствующим свойством обладали допредельные функции. При этом особенно важно найти достаточно удобные в работе условия, при выполнении которых из сходимости функций следует сходимость производных или интегралов от этих функций к производной или интегралу от предельной функции.

Как показывают разобранные выше простейшие примеры, без каких-либо дополнительных условий соотношение «$f_n\to f$ на $[a, b]$ при $n\to\infty$», вообще говоря, не влечет ни непрерывности предельной функции, даже при непрерывности функций f_n, ни соотношений $f'_n\to f'$ или $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx\to\int\limits_a^b f(x)\,dx$, даже, если все указанные производные и интегралы определены.

Действительно,

в примере 1 предельная функция разрывна на отрезке $[0, 1]$, хотя допредельные функции непрерывны на нем;

в примере 2 производные $n \cos n^2x$ допредельных функций вообще не сходятся, а значит, не сходятся и к производной от предельной функции, которая в данном случае тождественно равна нулю;

в примере 4 $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ при любом значении $n \in \mathbb{N}$, в то время как $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$;

в примере 5 каждая из функций f_n равна нулю всюду, кроме конечного числа точек, поэтому $\int\limits_a^b f_m(x)\,dx = 0$ на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, в то время как предельная функция $\mathscr{D}$ вообще не интегрируема ни на каком отрезке числовой оси.

Вместе с тем:

в примерах 2, 3, 4 непрерывны как допредельные, так и предельные функции;

в примере 3 предел производных $\frac{\cos nx}{n}$ функций последовательности $\frac{\sin nx}{n^2}$ совпадает с производной от предельной функции этой последовательности;

в примере 1 $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx \to \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ при $n \to \infty$.

Наша основная цель — выяснить, в каких же случаях предельные переходы под знаком интеграла или под знаком дифференцирования законны.

Рассмотрим в этой связи еще

Пример 6. Мы знаем, что при любом $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \ldots, \tag{1}$$

но после приведенных примеров мы понимаем, что соотношения

$$\sin' x = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right)', \tag{2}$$

$$\int\limits_a^b \sin x\,dx = \sum_{m=0}^{\infty} \int\limits_a^b \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}\,dx, \tag{3}$$

вообще говоря, нуждаются в проверке.

В самом деле, если равенство

$$S(x) = a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_m(x) + \ldots$$

понимать в том смысле, что $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = \sum\limits_{m=1}^{n} a_m(x)$, то соотношения

$$S'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a'_m(x),$$

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b a_m(x)\,dx$$

в силу линейности операций дифференцирования и интегрирования равносильны равенствам

$$S'(x) = \lim_{n\to\infty} S'_n(x),$$

$$\int_a^b S(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx,$$

к которым мы теперь должны относиться с осторожностью.

В данном случае оба соотношения (2), (3) легко проверяются, поскольку известно, что при любом $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + \ldots$$

Однако представьте себе, что равенство (1) является определением функции $\sin x$. Ведь именно так обстояло дело с определением функций $\sin z$, $\cos z$, e^z для комплексных значений аргумента. Тогда нам нужно было бы свойства возникшей новой функции (ее непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость), как и законность равенств (2), (3), извлекать непосредственно из того, что эта функция является пределом последовательности частичных сумм написанного ряда.

Главным понятием, с помощью которого в § 3 будут получены достаточные условия законности указанных предельных переходов, является понятие равномерной сходимости.

3. Сходимость и равномерная сходимость семейства функций, зависящих от параметра. При обсуждении постановки вопросов мы ограничились выше рассмотрением предела последовательностей функций. Последовательность функций — это важнейший частный случай семейства функций $f_t(x)$, зависящих от параметра t, когда $t \in \mathbb{N}$. Последовательности функций, таким образом, занимают здесь то же место, какое в теории предела функций занимает теория предела последовательности. О пределе последовательности функций и связанной с ней теорией сходимости рядов функций мы будем подробно говорить в § 2, а здесь обсудим основные для всего дальнейшего понятия сходимости и равномерной сходимости семейства функций, зависящих от параметра.

Определение 5. Функцию $(x, t) \longmapsto F(x, t)$ двух переменных x, t, определенную на множестве $X \times T$, называют *семейством функций, зависящих от параметра* t, если по тем или иным причинам переменная $t \in T$ выделяется и называется *параметром*.

Множество T при этом называют *множеством* или *областью значений параметра*, а само семейство часто записывают в виде $f_t(x)$ или $\{f_t, t \in T\}$, явно выделяя параметр.

Нам, как правило, придется в этой книге рассматривать такие семейства функций, для которых областью параметров T являются множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ натуральных, действительных или комплексных чисел соответственно или их подмножества, хотя, вообще говоря, множество T может быть любой природы. Так, в рассмотренных выше примерах 1—5 было $T = \mathbb{N}$. В примерах 1—4 при этом можно было бы без потери их содержательности считать, что параметр n есть любое положительное число, а предел берется по базе $n \to \infty$, $n \in \mathbb{R}_+$.

Определение 6. Пусть $\{f_t\colon X \to \mathbb{R},\ t \in T\}$ — семейство функций, зависящих от параметра, и пусть $\mathcal{B}$ — база в множестве T значений параметра.

Если при фиксированном значении $x \in X$ существует предел $\lim\limits_{\mathcal{B}} f_t(x)$, то говорят, что *семейство функций сходится в точке* x.

Множество всех таких точек сходимости называется *множеством сходимости семейства функций при данной базе* $\mathcal{B}$.

Определение 7. Говорят, что *семейство функций сходится на множестве* $E \subset X$ *при базе* $\mathcal{B}$, если оно сходится при этой базе в каждой точке $x \in E$.

Функция $f(x) := \lim\limits_{\mathcal{B}} f_t(x)$ на E называется *предельной функцией* или *пределом семейства функций* f_t *на множестве* E *при базе* $\mathcal{B}$.

Пример 7. Пусть $f_t(x) = e^{-\left(\frac{x}{t}\right)^2}$, $x \in X = \mathbb{R}$, $t \in T = \mathbb{R} \setminus 0$, $\mathcal{B}$ — база $t \to 0$. Это семейство сходится на всем множестве $\mathbb{R}$, причем $\lim\limits_{t \to 0} f_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$

Теперь дадим два основных определения.

Определение 8. Говорят, что семейство $\{f_t, t \in T\}$ функций $f_t\colon X \to \mathbb{R}$ *сходится поточечно* (или просто *сходится*) *на множестве* $E \subset X$ *при базе* $\mathcal{B}$ к функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, если $\lim\limits_{\mathcal{B}} f_t(x) = f(x)$ в любой точке $x \in E$.

В этом случае мы часто будем писать $(f_t \underset{\mathcal{B}}{\to} f$ на $E)$.

Определение 9. Говорят, что семейство $\{f_t, t \in T\}$ функций $f_t\colon X \to \mathbb{R}$ *сходится равномерно на множестве* $E \subset X$ *при базе* $\mathcal{B}$ к функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент B базы $\mathcal{B}$, что при любом значении $t \in B$ в любой точке $x \in E$ выполняется неравенство $|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon$.

В этом случае мы часто будем писать $\left(f_t \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f \text{ на } E\right)$.

Приведем еще формальную запись этих важных определений:

$$\left(f_t \underset{\mathcal{B}}{\longrightarrow} f \text{ на } E\right) := $$
$$:= (\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in E \ \exists B \in \mathcal{B} \ \forall t \in B \ (|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon),$$
$$\left(f_t \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f \text{ на } E\right) := $$
$$:= \forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathcal{B} \ \forall x \in E \ \forall t \in B \ (|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon).$$

Соотношение между сходимостью и равномерной сходимостью напоминает соотношение между непрерывностью и равномерной непрерывностью функции на множестве.

Чтобы лучше уяснить взаимоотношение сходимости и равномерной сходимости семейства функций, введем величину $\Delta_t(x) = |f(x) - f_t(x)|$, измеряющую отклонение значения функции f_t от значения функции f в точке $x \in E$. Рассмотрим также величину $\Delta_t = \sup_{x \in E} \Delta_t(x)$, характеризующую, грубо говоря, максимальное (хотя его может и не быть) по всем точкам $x \in E$ отклонение значений функции f_t от соответствующих значений функции f. Таким образом, в любой точке $x \in E$ имеем $\Delta_t(x) \leqslant \Delta_t$.

В этих обозначениях приведенные определения, очевидно, можно записать следующим образом:

$$\left(f_t \underset{\mathcal{B}}{\longrightarrow} f \text{ на } E\right) := \forall x \in E \ \ (\Delta_t(x) \to 0 \text{ при } \mathcal{B}),$$
$$\left(f_t \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f \text{ на } E\right) := \qquad (\Delta_t \to 0 \text{ при } \mathcal{B}).$$

Теперь ясно, что

$$\left(f_t \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f \text{ на } E\right) \Rightarrow \left(f_t \underset{\mathcal{B}}{\longrightarrow} f \text{ на } E\right),$$

т. е. если семейство f_t сходится равномерно к функции f на множестве E, то оно и поточечно сходится к f на этом множестве.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 8. Рассмотрим семейство функций $f_t\colon I \to \mathbb{R}$, определенных на отрезке $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ и зависящих от параметра $t \in]0, 1]$. График функции $y = f_t(x)$ изображен на рис. 99. Ясно, что в любой точке $x \in I$ $\lim_{t \to 0} f_t(x) = 0$, т. е. $f_t \to f = 0$ при $t \to 0$. Вместе с тем $\Delta_t = \sup_{x \in I} |f(x) - f_t(x)| = \sup_{x \in I} |f_t(x)| = 1$, т. е. $\Delta_t \not\to 0$ при $t \to 0$ и, значит, семейство сходится, но не сходится равномерно.

Будем для удобства в таких случаях говорить, что семейство *сходится* к предельной функции *неравномерно.*

Если параметр t интерпретировать как время, то сходимость семейства функций f_t на множестве E к функции f означает, что при любой заданной точности $\varepsilon>0$ для любой точки $x\in E$ можно указать момент t_ε, начиная с которого, т. е. при $t>t_\varepsilon$, значения всех функций f_t в точке x будут отличаться от значения $f(x)$ меньше чем на ε.

Равномерная же сходимость означает, что наступит момент t_ε, начиная с которого, т. е. при $t>t_\varepsilon$, уже сразу во всех точках $x\in E$ будет выполнено соотношение $|f(x)-f_t(x)|<\varepsilon$.

Для неравномерной сходимости типична изображенная на рис. 99 картина бегущего горба большого уклонения.

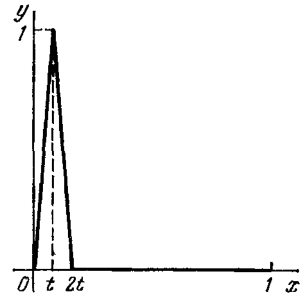

Рис. 99

Пример 9. Последовательность заданных на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$ функций $f_n(x)=x-x^n$, как легко видеть, в любой точке x этого отрезка стремится к нулю при $n\to\infty$. Чтобы выяснить, равномерная ли эта сходимость, найдем величину $\Delta_n=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)|$.

Поскольку $f_n'(x)=1-nx^{n-1}=0$ при $x=n^{-\frac{1}{n-1}}$, то ясно, что $\Delta_n=$ $=f_n\left(n^{-\frac{1}{n-1}}\right)=n^{-\frac{1}{n-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Но $\Delta_n\to 1\neq 0$ при $n\to\infty$, значит, наша последовательность сходится к предельной функции неравномерно.

Пример 10. Рассмотренная в примере 1 последовательность функций $f_n(x)=x^n$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$ сходится к функции $f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } 0\leqslant x<1,\\ 1, & \text{если } \quad x=1\end{cases}$ неравномерно, так как при любом $n\in\mathbb{N}$

$$\Delta_n=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-f_n(x)|=\sup_{0\leqslant x<1}|f(x)-f_n(x)|=$$
$$=\sup_{0\leqslant x<1}|f_n(x)|=\sup_{0\leqslant x<1}|x^n|=1.$$

Пример 11. Рассмотренная в примере 2 последовательность функций $f_n(x)=\frac{\sin n^2x}{n}$ сходится к нулю равномерно на всем множестве $\mathbb{R}$ при $n\to\infty$, так как в данном случае

$$|f(x)-f_n(x)|=|f_n(x)|=\left|\frac{\sin n^2x}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

т. е. $\Delta_n\leqslant 1/n$ и, значит, $\Delta_n\to 0$ при $n\to\infty$.

4. Критерий Коши равномерной сходимости. В определении 9 мы сказали, что значит, что семейство функций f_t равномерно на некотором множестве сходится к заданной на этом множестве функции. Обычно, когда задается семейство функций, предельная функция еще неизвестна, поэтому разумно принять

Определение 10. Будем говорить, что *семейство* $\{f_t, t \in T\}$, *функций* $f_t\colon X \to \mathbb{R}$ *сходится на множестве* $E \subset X$ *равномерно при базе* $\mathcal{B}$, если оно сходится на этом множестве и сходимость к возникающей при этом на E предельной функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ является равномерной в смысле определения 9.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости). *Пусть* $\{f_t, t \in T\}$ — *семейство функций* $f_t\colon X \to \mathbb{R}$, *зависящих от параметра* $t \in T$, *и* $\mathcal{B}$ — *база в* T. *Для того чтобы семейство* $\{f_t, t \in T\}$ *сходилось на множестве* $E \subset X$ *равномерно при базе* $\mathcal{B}$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашелся такой элемент* B *базы* $\mathcal{B}$, *что при любых значениях параметров* $t_1, t_2 \in B$ *в любой точке* $x \in E$ *было выполнено неравенство* $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$.

В формальной записи это означает, что f_t сходится равномерно на E при базе $\mathcal{B} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \forall t_1, \ t_2 \in B \quad \forall x \in E \, (|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon)$.

◀ Необходимость приведенных условий очевидна, ибо если $f\colon E \to \mathbb{R}$ — предельная функция и $f_t \rightrightarrows f$ на E при $\mathcal{B}$, то найдется элемент B базы $\mathcal{B}$ такой, что при любом $t \in B$ и любом $x \in E$ будет $|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon/2$. Тогда при любых $t_1, t_2 \in B$ и любом $x \in E$ будет

$$|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| \leqslant |f(t) - f_{t_1}(x)| + |f(t) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Достаточность. При каждом фиксированном значении $x \in E$ величину $f_t(x)$ можно рассматривать как функцию переменной $t \in T$. Если выполнены условия теоремы, то для этой функции выполнены условия критерия Коши существования ее предела при базе $\mathcal{B}$.

Значит, семейство $\{f_t, t \in T\}$ по крайней мере поточечно сходится к некоторой функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ на множестве E при базе $\mathcal{B}$.

Если теперь перейти к пределу в неравенстве $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$, справедливом при любых $t_1, t_2 \in B$ и любых $x \in E$, то можно получить, что $|f(x) - f_{t_2}(x)| \leqslant \varepsilon$ при любом $t_2 \in B$ и любом $x \in E$, а это с точностью до несущественных переобозначений и замены строгого неравенства нестрогим как раз совпадает с определением равномерной сходимости семейства $\{f_t, t \in T\}$ к функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ на множестве E при базе $\mathcal{B}$. ▶

Замечание 1. Определения сходимости и равномерной сходимости, которые мы привели для семейств вещественнозначных функций $f_t\colon X \to \mathbb{R}$, разумеется, остаются в силе для семейств функций $f_t\colon X \to Y$ со значениями в любом метрическом пространстве Y. Естественное изменение, которое при этом следует сделать в приведенных определениях, состоит в замене $|f(x) - f_t(x)|$ на $d_Y(f(x), f_t(x))$, где d_Y означает метрику в пространстве Y.

Для векторных нормированных пространств Y, в частности для $Y = \mathbb{C}$, или $Y = \mathbb{R}^m$, или $Y = \mathbb{C}^m$, не приходится делать даже этих формальных изменений.

Замечание 2. Критерий Коши, конечно, тоже остается в силе для семейств функций $f_t\colon X \to Y$ со значениями в метрическом пространстве Y, если Y — полное метрическое пространство.

Как видно из доказательства, условие полноты Y нужно лишь в пункте, относящемся к достаточности условий критерия.

Задачи и упражнения

1. Выясните, равномерно ли сходятся рассмотренные в примерах 3—5 последовательности функций.

2. Докажите равенства (2), (3).

3. a. Покажите, что рассмотренная в примере 1 последовательность функций сходится равномерно на любом отрезке $[0, 1-\delta] \subset [0, 1[$, но на множестве $[0, 1[$ сходится неравномерно.

b. Покажите, что это же справедливо и для последовательности, рассмотренной в примере 9.

c. Покажите, что рассмотренное в примере 8 семейство функций f_t, при $t \to 0$ сходится равномерно на любом отрезке $[\delta, 1] \subset]0, 1]$, но на множестве $]0, 1]$ сходится неравномерно.

d. Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость семейство функций $f_t(x) = \sin tx$ при $t \to 0$, а затем при $t \to \infty$

e. Охарактеризуйте сходимость семейства функций $f_t(x) = e^{-tx^2}$ при $t \to +\infty$ на произвольном фиксированном множестве $E \subset \mathbb{R}$.

4. a. Проверьте, что если семейство функций сходится (сходится равномерно) на множестве, то оно сходится (сходится равномерно) и на любом подмножестве этого множества.

b. Покажите, что если семейство функций $f_t\colon X \to \mathbb{R}$ сходится (сходится равномерно) на множестве E при базе $\mathcal{B}$, а $g\colon X \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, то и семейство $g \cdot f_t\colon X \to \mathbb{R}$ тоже будет сходиться (равномерно сходиться) на E при базе $\mathcal{B}$.

c. Докажите, что если семейства функций $f_t\colon X \to \mathbb{R}$, $g_t\colon X \to \mathbb{R}$ равномерно сходятся на множестве $E \subset X$ при базе $\mathcal{B}$, то и семейство $h_t = \alpha f_t + \beta g_t$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тоже сходится равномерно на множестве E при базе $\mathcal{B}$.

5. a. При доказательстве достаточности условий критерия Коши мы совершили предельный переход $\lim\limits_{\mathcal{B}} f_{t_1}(x) = f(x)$ по базе $\mathcal{B}$ в T. Но $t_1 \in B$, а $\mathcal{B}$ — база в T, а не в B. Можем ли мы совершить этот предельный переход так, чтобы t_1 оставалось в B?

b. Поясните, где в доказательстве критерия Коши равномерной сходимости семейства функций $f_t\colon X \to \mathbb{R}$ использована полнота $\mathbb{R}$.

c. Заметьте, что если все функции семейства $\{f_t\colon X \to \mathbb{R}, t \in T\}$ постоянные, то доказанная теорема в точности дает критерий Коши существования предела функции $\varphi\colon T \to \mathbb{R}$ при базе $\mathcal{B}$ в T.

6. Докажите, что если семейство функций $f_t \in C(I, \mathbb{R})$, непрерывных на отрезке $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ сходится равномерно на интервале $]a, b[$, то оно сходится и причем равномерно на всем отрезке $[a, b]$.

§ 2. Равномерная сходимость рядов функций

1. Основные определения и критерий равномерной сходимости ряда.

Определение 1. Пусть $\{a_n\colon X \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность комплекснозначных (в частности, вещественнозначных) функций. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится* или *равномерно сходится* *на множестве* $E \subset X$, если на E сходится или соответственно равномерно сходится последовательность $\left\{s_m(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n(x),\ m \in \mathbb{N}\right\}$.

Определение 2. Функция $s_m(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n(x)$, как и в случае числовых рядов, называется *частичной суммой* или, точнее, *m-й частичной суммой ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$.

Определение 3. *Суммой ряда* называется предел последовательности его частичных сумм.

Таким образом, запись

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ на } E$$

означает, что $s_m(x) \to s(x)$ на E при $m \to \infty$, а запись

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ равномерно сходится на } E$$

означает, что $s_m(x) \rightrightarrows s(x)$ на E при $m \to \infty$.

Исследование поточечной сходимости ряда в сущности есть исследование сходимости числового ряда и с этим мы уже знакомы.

Пример 1. Функцию $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ мы в свое время определили соотношением

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \tag{1}$$

убедившись предварительно, что стоящий справа ряд сходится при каждом значении $z \in \mathbb{C}$.

На языке определений 1—3 можно теперь сказать, что ряд (1) функций $a_n(z) = \frac{1}{n!} z^n$ сходится на всей комплексной плоскости и функция $\exp z$ является его суммой.

В силу принятых определений 1, 2 между рядами и последовательностями их частичных сумм устанавливается обратимая связь: зная члены ряда, получаем последовательность частичных сумм, а зная последовательность частичных сумм, восстанавливаем все члены ряда; характер сходимости ряда отождествляется с характером сходимости последовательности его частичных сумм.

Пример 2. В примере 5 из § 1 была построена последовательность $\{f_m, m \in \mathbb{N}\}$ функций, сходящаяся на $\mathbb{R}$ к функции Дирихле $\mathscr{D}(x)$. Если положить $a_1(x) = f_1(x)$ и $a_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$

при $n>1$, то мы получим ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_n(x)$, который будет сходиться на всей числовой оси и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)=\mathscr{D}(x)$.

Пример 3. В примере 9 из § 1 было показано, что последовательность функций $f_n(x)=x-x^n$ сходится, но неравномерно к нулю на отрезке $[0, 1]$. Значит, полагая $a_1(x)=f_1(x)$, $a_n(x)=$ $=f_n(x)-f_{n-1}(x)$ при $n>1$, получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}-x^n)$, который сходится к нулю на отрезке $[0, 1]$, но сходится неравномерно.

Прямая связь между рядами и последовательностями функций позволяет каждое утверждение о последовательностях функций переформулировать в виде соответствующего утверждения о рядах функций.

Так, применительно к последовательности $\{s_n\colon X\to\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}\}$ доказанный в § 1 критерий Коши равномерной сходимости последовательности на множестве $E\subset X$ означает, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n_1,\ n_2>N\ \forall x\in E\ (|s_{n_1}(x)-s_{n_2}(x)|<\varepsilon). \tag{2}$$

Отсюда с учетом определения 1 получается

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $N\in\mathbb{N}$, что при любых натуральных m, n, удовлетворяющих условию $m\geqslant n>N$, в любой точке $x\in E$ выполнено неравенство*

$$|a_n(x)+\ldots+a_m(x)|<\varepsilon. \tag{3}$$

◀ Действительно, полагая в (2) $n_1=m$, $n_2=n-1$ и считая $s_n(x)$ частичной суммой нашего ряда, получаем неравенство (3), из которого в свою очередь при тех же обозначениях и условиях теоремы вытекает соотношение (2). ▶

Замечание 1. Мы не указали в формулировке теоремы 1 область значений функций $a_n(x)$, подразумевая, что это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. На самом деле областью значений, очевидно, может быть любое векторное нормированное пространство, например $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, если только оно является полным.

Замечание 2. Если в условиях теоремы 1 все функции $a_n(x)$ постоянны, мы получаем уже знакомый нам критерий Коши сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Следствие 1 (необходимый признак равномерной сходимости ряда). *Для того чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходился равномерно на некотором множестве* E, *необходимо, чтобы* $a_n(x) \rightrightarrows 0$ *на* E *при* $n \to \infty$.

◀ Это вытекает из определения равномерной сходимости последовательности к нулю и неравенства (3), если положить в нем $m = n$. ▶

Пример 4. Ряд (1) сходится на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ неравномерно, поскольку $\sup\limits_{z \in \mathbb{C}} \left| \frac{1}{n!} z^n \right| = \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$, в то время как по необходимому условию равномерной сходимости при наличии таковой величина $\sup\limits_{x \in E} |a_n(x)|$ должна стремиться к нулю.

Пример 5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, как мы знаем, сходится в круге $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Поскольку $\left|\frac{z^n}{n}\right| < \frac{1}{n}$, при $z \in K$, то $\frac{z^n}{n} \rightrightarrows 0$ на K при $n \to \infty$. Необходимое условие равномерной сходимости выполнено, однако этот ряд сходится неравномерно на K. В самом деле, при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$, считая z достаточно близким к единице, можно в силу непрерывности членов ряда добиться выполнения неравенства

$$\left| \frac{z^n}{n} + \ldots + \frac{z^{2n}}{2n} \right| > \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{2n} \right| > \frac{1}{4}.$$

По критерию Коши отсюда заключаем, что рассматриваемый ряд не сходится равномерно на множестве K.

2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.

Определение 4. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится абсолютно* на множестве E, если в любой точке $x \in E$ соответствующий числовой ряд сходится абсолютно.

Утверждение 1. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *таковы, что* $|a_n(x)| \leqslant b_n(x)$ *при любом* $x \in E$ *и при всех достаточно больших номерах* $n \in \mathbb{N}$, *то из равномерной сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *на* E *вытекает абсолютная и равномерная сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *на том же множестве* E.

◀ В силу принятых условий при всех достаточно больших номерах n и m (пусть $n \leqslant m$) в любой точке $x \in E$ выполнены неравенства

$$|a_n(x)+\ldots+a_m(x)| \leqslant |a_n(x)|+\ldots+|a_m(x)| \leqslant \\ \leqslant b_n(x)+\ldots+b_m(x) = |b_n(x)+\ldots+b_m(x)|.$$

По критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ можно в силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ указать номер $N \in \mathbb{N}$ так, что при любых $m \geqslant n > N$ и любом $x \in E$ $|b_n(x)+\ldots+b_m(x)| < \varepsilon$. Но тогда из написанных неравенств следует, что в силу того же критерия Коши должен равномерно сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$. ▶

Следствие 2 (мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда). *Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ можно указать такой сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, что $\sup\limits_{x \in E} |a_n(x)| \leqslant M_n$ при всех достаточно больших номерах $n \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится на множестве E абсолютно и равномерно.*

◀ Сходящийся числовой ряд можно рассматривать как ряд из постоянных на множестве E функций, который в силу критерия Коши сходится равномерно на E. Значит, признак Вейерштрасса вытекает из утверждения 1, если положить в последнем $b_n(x) = M_n$. ▶

Признак Вейерштрасса является наиболее простым и вместе с тем наиболее часто используемым достаточным условием равномерной сходимости ряда.

В качестве примера его применения докажем следующее полезное

Утверждение 2. *Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится в точке $\zeta \neq z_0$, то он сходится абсолютно и равномерно в любом круге $K_q = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < q|\zeta - z_0|\}$, где $0 < q < 1$.*

◀ Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(\zeta - z_0)^n$ в силу необходимого признака сходимости числового ряда следует, что $c_n(\zeta - z)^n \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, в рассматриваемом круге K_q при всех достаточно больших значениях $n \in \mathbb{N}$ справедливы оценки $|c_n(z-z_0)^n| = |c_n(\zeta - z_0)^n| \cdot \left|\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right|^n \leqslant |c_n(\zeta - z_0)^n| \cdot q^n < q^n$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ при $|q|<1$ сходится, из оценок $|c_n(z-z_0)^n| < q^n$ на основе мажорантного признака равномерной сходимости получаем высказанное утверждение 2. ▶

Сопоставляя это утверждение с формулой Коши — Адамара для радиуса сходимости степенного ряда (см. гл. V, § 5, (17)), приходим к заключению, что имеет место

Теорема 2 (о характере сходимости степенного ряда). *Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится в круге $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$, радиус которого определяется по формуле**) $R = \left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$ *Коши — Адамара. Вне этого круга ряд расходится. На любом замкнутом круге, лежащем строго внутри круга K сходимости ряда, степенной ряд сходится абсолютно и равномерно.*

Замечание 3. Как показывают примеры 1 и 5, на всем круге K степенной ряд не обязан при этом сходиться равномерно. Вместе с тем может случиться, что степенной ряд равномерно сходится даже на замкнутом круге $\bar{K}$.

Пример 6. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ равен единице. Но если $|z| \leqslant 1$, то $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ и по признаку Вейерштрасса рассматриваемый ряд сходится абсолютно и равномерно в замкнутом круге $\bar{K} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.

3. Признак Абеля — Дирихле. Следующие пары родственных достаточных условий равномерной сходимости ряда несколько более специальны и существенно связаны с вещественнозначностью определенных компонент рассматриваемых рядов. Но эти условия тоньше, чем признак Вейерштрасса, поскольку они позволяют исследовать и такие ряды, которые сходятся, но неабсолютно.

Определение 5. Говорят, что семейство $\mathcal{F}$ функций $f\colon X \to \mathbb{C}$ *равномерно ограничено* на некотором множестве $E \subset X$, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что для любой функции $f \in \mathcal{F}$ справедливо соотношение $\sup\limits_{x \in E} |f(x)| \leqslant M$.

Определение 6. Последовательность функций $\{b_n\colon X \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) *на множестве*

---

*) В исключительном случае, когда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$, считается, что $R = 0$, а круг K вырождается в единственную точку z_0.

$E \subset X$, если для любого $x \in E$ таковой является числовая последовательность $\{b_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$. Неубывающие и невозрастающие на множестве последовательности функций называются *монотонными последовательностями* на этом множестве.

Напомним (в случае необходимости см. гл. VI, § 2, п. 3) следующее тождество, называемое *преобразованием Абеля*:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = A_m b_m - A_{n-1} b_n + \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}), \tag{4}$$

где $a_k = A_k - A_{k-1}$, $k = n, \ldots, m$.

Если $b_n, b_{n+1}, \ldots, b_m$ — монотонная последовательность вещественных чисел, то, даже если $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m$ комплексные числа или векторы какого-то нормированного пространства, на основании тождества (4) можно получить следующую нужную нам оценку:

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k b_k \right| \leqslant 4 \max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k| \cdot \max\{|b_n|, |b_m|\}. \tag{5}$$

◀ В самом деле,

$$|A_m b_m| + |A_{n-1} b_n| + \left| \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k| \cdot \left(|b_m| + |b_n| + \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| \right) =$$

$$= \max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k| \cdot (|b_m| + |b_n| + |b_n - b_m|) \leqslant$$

$$\leqslant 4 \max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k| \cdot \max\{|b_n|, |b_m|\}.$$

В участвующем в этой выкладке равенстве как раз и использована монотонность последовательности чисел b_k. ▶

Утверждение 3 (признак Абеля — Дирихле равномерной сходимости ряда). *Для равномерной сходимости на множестве E ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$, члены которого являются произведениями комплекснозначных функций $a_n\colon X \to \mathbb{C}$ и вещественнозначных функций $b_n\colon X \to \mathbb{R}$ достаточно, чтобы выполнялась любая пара следующих условий:*

α_1) *частичные суммы $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} a_n(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно ограничены на E;*

β_1) *последовательность функций $b_n(x)$ монотонна и равномерно стремится к нулю на множестве E; или*

α_2) *ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на E,*

β_2) *последовательность функций* $b_n(x)$ *монотонна и равномерно ограничена на* E.

◀ Монотонность последовательности $b_n(x)$ позволяет при каждом $x \in E$ записать аналогичную (5) оценку

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k(x)\, b_k(x)\right| \leqslant 4 \max_{n-1\leqslant k\leqslant m} |A_k(x)| \cdot \max\{|b_n(x)|,\ |b_m(x)|\}, \tag{5'}$$

где в качестве $A_k(x)$ возьмем $s_k(x) - s_{n-1}(x)$.

Если выполнена пара условий α_1), β_1), то, с одной стороны, существует такая постоянная M, что $|A_k(x)| \leqslant M$ при любом $k \in \mathbb{N}$ и любом $x \in E$, а с другой стороны, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших значениях n и m и любом $x \in E$ будет выполнено неравенство $\max\{|b_n(x)|,\ b_m(x)|\} < \frac{\varepsilon}{4M}$. Значит, из (5) следует, что при всех достаточно больших значениях n и m и любом $x \in E$ будет $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k(x)\, b_k(x)\right| < \varepsilon$, т. е. для рассматриваемого ряда выполнен критерий Коши равномерной сходимости.

В случае пары условий α_2), β_2) ограниченной оказывается величина $\max\{|b_n(x), |b_m(x)|\}$. В то же время в виду равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ при любых достаточно больших значениях n и $k > n$ в любой точке $x \in E$ будет $|A_k(x)| = |s_k(x) - s_{n-1}(x)| < \varepsilon$. Учитывая это, из неравенства (5) вновь заключаем, что для рассматриваемого ряда выполнен критерий Коши равномерной сходимости. ▶

Замечание 4. В случае, когда функции a_n и b_n постоянные, утверждение 3 превращается в так называемый признак Абеля — Дирихле сходимости числовых рядов.

Пример 7. Исследуем при $x \in \mathbb{R}$ сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} e^{inx}. \tag{6}$$

Поскольку

$$\left|\frac{1}{n^{\alpha}} e^{inx}\right| = \frac{1}{n^{\alpha}}, \tag{7}$$

то при $\alpha \leqslant 0$ для ряда (6) не выполнено необходимое условие сходимости и он расходится при любом значении $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, в дальнейшем можно считать, что $\alpha > 0$.

Если $\alpha > 1$, то из (7) на основании признака Вейерштрасса заключаем, что ряд (6) сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси $\mathbb{R}$.

Для исследования сходимости при $0<\alpha\leqslant 1$ воспользуемся признаком Абеля — Дирихле, полагая $a_n(x)=e^{inx}$ и $b_n(x)=\frac{1}{n^\alpha}$. Поскольку при $\alpha>0$ постоянные функции $b_n(x)$ монотонно и, очевидно, равномерно относительно $x\in\mathbb{R}$ стремятся к нулю, то остается исследовать частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{inx}$.

Для удобства дальнейших ссылок мы рассмотрим суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikx}$, отличающиеся от частичных сумм нашего ряда только начальным слагаемым 1.

Используя формулу геометрической прогрессии и формулу Эйлера, последовательно находим при $x\neq 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}=\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}e^{i\frac{n}{2}x}=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{n}{2}+i\sin\frac{n}{2}x\right). \tag{8}$$

Значит, для любого $n\in\mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \tag{9}$$

откуда по признаку Абеля — Дирихле вытекает, что ряд (6) при $0<\alpha\leqslant 1$ сходится равномерно на любом множестве $E\subset\mathbb{R}$ на котором $\inf\limits_{x\in E}\left|\sin\frac{x}{2}\right|>0$. В частности, ряд (6) просто сходится при любом $x\neq 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$. Если же $x=2\pi m$, то $e^{in2\pi m}=1$ и ряд (6) превращается в числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, который при $0<\alpha<1$ расходится.

Покажем, что из сказанного уже можно заключить, что при $0<\alpha<1$ ряд (6) не может сходиться равномерно ни на каком множестве E, замыкание которого содержит точки вида $2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$. Положим для определенности, что $0\in\bar{E}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ при $0<\alpha<1$ расходится. По критерию Коши найдется число $\varepsilon_0>0$

такое, что, какое бы $N \in \mathbb{N}$ ни взять, можно будет подобрать числа $m \geqslant n > N$ так, что $\left|\frac{1}{n^\alpha} + \ldots + \frac{1}{m^\alpha}\right| > \varepsilon_0 > 0$. В силу непрерывности функций e^{ikx} на $\mathbb{R}$ отсюда следует, что в E можно выбрать точку x, столь близкую к нулю, что

$$\left|\frac{e^{inx}}{n^\alpha} + \ldots + \frac{e^{imx}}{m^\alpha}\right| > \varepsilon_0.$$

Но это в силу критерия Коши равномерной сходимости ряда означает, что на указанном множестве E ряд (6) не может сходиться равномерно.

В дополнение к сказанному можно отметить, что, как видно из равенства (7), ряд (6) сходится неабсолютно при $0 < \alpha \leqslant 1$,

Замечание 5. Для дальнейшего полезно заметить, что, отделяя в (8) действительную и мнимую части, получаем следующие соотношения:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx \frac{\cos \frac{n}{2} x \cdot \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}, \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx \frac{\sin \frac{n}{2} x \cdot \sin \frac{n+1}{n} x}{\sin \frac{x}{2}}, \tag{11}$$

справедливые при $x \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

В качестве еще одного примера использования признака Абеля — Дирихле докажем следующее

Утверждение 4 (так называемая вторая теорема Абеля о степенных рядах). *Если степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)$ *сходится в некоторой точке* $\zeta \in \mathbb{C}$, *то он сходится равномерно на отрезке с концами* z_0, ζ.

◀ Точки указанного отрезка представим в виде $z = z_0 + (\zeta - z_0) t$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Подставив это выражение для z в данный степенной ряд, получим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\zeta - z_0)^n t^n$. По условию числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\zeta - z_0)^n$ сходится, а последовательность функций t^n монотонна и равномерно ограничена единицей на отрезке $[0, 1]$. Значит, выполнены условия α_2), β_3) признака Абеля — Дирихле и утверждение 4 доказано. ▶

Задачи и упражнения

1. Исследуйте характер сходимости на множествах $E \subset \mathbb{R}$ при различных значениях действительного параметра α следующих рядов

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$.

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$.

2. Докажите, что следующие ряды сходятся равномерно на указанных множествах:

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$ при $0 \leqslant x < +\infty$.

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)}$ при $0 \leqslant x < +\infty$

3. Покажите, что если *ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^x}$ сходится в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то он сходится равномерно на множестве $x \geqslant x_0$, причем, если $x > x_0 + 1$, то ряд сходится абсолютно.

4. Проверьте, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ хотя и сходится на $\mathbb{R}$, но неравномерно

5. a. На примере рядов из задачи 2 покажите, что признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда является достаточным, но не необходимым условием равномерной сходимости ряда.

b. Постройте ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ с неотрицательными непрерывными на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ членами, который сходится равномерно на этом отрезке, и в то же время ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, составленный из величин $M_n = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |a_n(x)|$, расходится.

§ 3. Функциональные свойства предельной функции

1. Конкретизация задачи. В этом параграфе будут даны ответы на поставленные в § 1 вопросы о том, когда предел семейства непрерывных, дифференцируемых или интегрируемых функций является функцией, обладающей тем же свойством, и когда предел производных или интегралов от функций семейства совпадает с производной или интегралом от предельной функции этого семейства.

Чтобы разъяснить математическое содержание обсуждаемых вопросов, рассмотрим, например, связь непрерывности и предельного перехода.

Пусть $f_n(x) \to f(x)$ на $\mathbb{R}$ при $n \to \infty$, и пусть все функции последовательности $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ непрерывны в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Мы интересуемся непрерывностью предельной функции f в той же точке x_0. Для ответа на этот вопрос нам нужно проверить равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, которое в терминах исходной последовательности переписывается в виде соотношения $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_0)$ или, с учетом данной нам непрерывности функций f_n в точке x_0, записывается в форме следующего подлежащего проверке соотношения:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x)\right). \tag{1}$$

В левой части этого соотношения сначала делается предельный переход по базе $n \to \infty$, а затем предельный переход по базе $x \to x_0$, а в правой части предельные переходы по тем же базам проводятся в другом порядке.

Изучая функции нескольких переменных, мы видели, что равенство (1) имеет место далеко не всегда. Видели мы это и на разобранных в предыдущих двух параграфах примерах, показывающих, что предел последовательности непрерывных функций не всегда является функцией непрерывной.

Дифференцирование и интегрирование являются некоторыми специальными операциями предельного перехода. Значит, вопрос о том, получим ли мы одно и то же, если сначала продифференцируем (проинтегрируем) функции семейства, а затем перейдем к пределу по параметру семейства или сначала найдем предельную функцию семейства, а затем будем ее дифференцировать (интегрировать), снова сводится к проверке возможности изменения порядка двух предельных переходов.

2. Условия коммутирования двух предельных переходов.

Теорема 1. *Пусть $\{F_t, t \in T\}$ — семейство функций $F_t: X \to \mathbb{C}$, зависящих от параметра t; $\mathcal{B}_X$ — база в X, $\mathcal{B}_T$ — база в T. Если при базе $\mathcal{B}_T$ семейство сходится равномерно на X к функции $F: X \to \mathbb{C}$, а при каждом $t \in T$ существует предел $\lim\limits_{\mathcal{B}_X} f_t(x) = A_t$, то существуют оба повторных предела $\lim\limits_{\mathcal{B}_X} \left(\lim\limits_{\mathcal{B}_T} F_t(x)\right)$, $\lim\limits_{\mathcal{B}_T} \left(\lim\limits_{\mathcal{B}_X} F_t(x)\right)$*

и имеет место равенство

$$\lim_{\mathscr{B}_X}\left(\lim_{\mathscr{B}_T} F_t(x)\right) = \lim_{\mathscr{B}_T}\left(\lim_{\mathscr{B}_X} F_t(x)\right). \tag{2}$$

Эту теорему удобно записать в виде следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} F_t(x) \arrow[r, Rightarrow, "\mathscr{B}_T"'] \arrow[d, "\mathscr{B}_X"'] & F(x) \arrow[d, "\exists"', "\mathscr{B}_X"] \arrow[dl, dashed, no head] \\ A_t \arrow[r, "\exists", "\mathscr{B}_T"'] & A \end{tikzcd} \tag{3}$$

в которой над диагональю указаны условия, а под диагональю их следствия. Равенство (2) означает, что эта диаграмма коммутативна, т. е. окончательный результат A не зависит от того, выполнить ли сначала операции, отвечающие переходу по верхней и правой стороне диаграммы, или в том же смысле сначала пройти по левой, а затем по нижней ее стороне.

Докажем сформулированную теорему.

◀ Поскольку $F_t \rightrightarrows F$ на X при базе $\mathscr{B}_T$, по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент B_T базы $\mathscr{B}_T$, что при любых t_1, $t_2 \in B_T$ и любом $x \in X$ будет выполнено неравенство

$$|F_{t_1}(x) - F_{t_2}(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по базе $\mathscr{B}_X$, получим соотношение

$$|A_{t_1} - A_{t_2}| \leqslant \varepsilon, \tag{5}$$

справедливое для любых t_1, $t_2 \in B_T$. По критерию Коши существования предела функции отсюда следует, что функция A_t имеет некоторый предел A по базе $\mathscr{B}_T$. Проверим теперь, что $A = \lim\limits_{\mathscr{B}_X} F(x)$.

Фиксировав $t_2 \in B_T$, найдем такой элемент B_X базы $\mathscr{B}_X$, что при любом $x \in B_X$ имеет место неравенство

$$|F_{t_2}(x) - A_{t_2}| < \varepsilon. \tag{6}$$

Не меняя t_2, совершим в (4) и (5) предельный переход по базе $\mathscr{B}_T$ относительно параметра t_1. Тогда получим, что

$$|F(x) - F_{t_2}(x)| \leqslant \varepsilon, \tag{7}$$

$$|A - A_{t_2}| \leqslant \varepsilon, \tag{8}$$

причем неравенство (7) справедливо при любом $x \in X$.

Сопоставляя соотношения (6)—(8), пользуясь неравенством треугольника, получаем, что

$$|F(x) - A| < 3\varepsilon$$

при любом $x \in B_X$. Тем самым проверено, что $A = \lim\limits_{\mathscr{B}_X} F(x)$. ▶

Замечание 1. Как видно из приведенного доказательства, теорема 1 остается в силе для функций F_t: $X \to Y$ со значениями в любом полном метрическом пространстве Y.

Замечание 2. Если к условиям теоремы 1 добавить требование существования предела $\lim\limits_{\mathscr{B}_T} A_t = A$, то, как видно из доказательства, равенство $\lim\limits_{\mathscr{B}_X} F(x) = A$ можно получить, даже не предполагая полноту пространства Y значений функций F_t: $X \to Y$.

3. Непрерывность и предельный переход.

Теорема 2. *Пусть $\{f_t, t \in T\}$ — семейство функций f_t: $X \to \mathbb{C}$, зависящих от параметра t; $\mathscr{B}$ — база в T. Если $f_t \rightrightarrows f$ на X при базе $\mathscr{B}$ и функции f_t непрерывны в точке $x_0 \in X$, то функция f: $X \to \mathbb{C}$ тоже непрерывна в этой точке.*

◀ В нашем случае диаграмма (3) приобретает следующий конкретный вид:

$$\begin{tikzcd}
f_t(x) \arrow[r, Rightarrow, "\mathscr{B}"'] \arrow[d, "x \to x_0"'] & f(x) \arrow[d, "x \to x_0"] \\
f_t(x_0) \arrow[r, "\mathscr{B}"'] \arrow[ur, dashed, no head] & f(x_0)
\end{tikzcd}$$

Здесь все предельные переходы, кроме правого вертикального, заданы самими условиями теоремы 2. Нетривиальное нужное нам следствие теоремы 1 состоит именно в том, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ▶

Замечание 3. Мы не конкретизировали природу множества X. На самом деле это может быть любое топологическое пространство лишь бы в X была определена база $x \to x_0$. Значения функций f_t могут лежать в любом метрическом пространстве, которое, как следует из замечания 2, даже не обязано быть полным.

Следствие 1. *Если последовательность функций, непрерывных на множестве, сходится на нем равномерно, то предельная функция тоже непрерывна на этом множестве.*

Следствие 2. *Если ряд из функций, непрерывных на некотором множестве, сходится на нем равномерно, то сумма ряда тоже непрерывна на этом множестве.*

В качестве иллюстрации возможного использования полученных результатов рассмотрим

Пример 1. *Метод Абеля суммирования рядов.*

Сопоставляя следствие 2 со второй теоремой Абеля (утверждения 4 из § 2), приходим к заключению, что справедливо

Утверждение 1. *Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится в некоторой точке ζ, то он сходится равномерно на от-*

резке $[z_0, \zeta]$, *идущем из* z_0 *в точку* ζ *и сумма ряда непрерывна на этом отрезке.*

В частности, это означает, что если числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ сходится, то степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится равномерно на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ действительной оси и его сумма $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ непрерывна на этом отрезке. Поскольку $s(1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, можно, таким образом, сказать, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ сходится, то справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{9}$$

Интересно, что в соотношении (9) правая часть порой может иметь смысл даже тогда, когда ряд, стоящий слева, в традиционном его понимании является расходящимся. Например, ряду $1-1+1-\ldots$ соответствует ряд $x - x^2 + x^3 - \ldots$, который при $|x| < 1$ сходится к функции $x/(1+x)$. При $x \to 1$ эта функция имеет предел $1/2$.

Метод суммирования ряда, называемый *методом Абеля*, состоит в приписывании левой части равенства (9) значения правой части этого равенства, если последнее значение определено. Мы видели, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ в традиционном смысле сходится, то по методу Абеля ему будет сопоставлена его же классическая сумма. Вместе с тем, например, расходящемуся в традиционном смысле ряду $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ метод Абеля сопоставляет естественную усредненную величину $1/2$.

Дальнейшие вопросы в связи с разобранным примером 1 можно найти в задачах $5-8$.

Пример 2. В свое время, обсуждая формулу Тейлора, мы показали, что при $|x| < 1$ имеет место разложение

$$(1+x)^\alpha = \\ = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \tag{10}$$

Можно проверить, что при $\alpha > 0$ числовой ряд

$$1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}+\ldots$$

сходится. Значит, по теореме Абеля, если $\alpha > 0$, ряд (10) сходится равномерно на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Но функция $(1+x)^\alpha$ непрерывна в точке $x=1$, поэтому можно утверждать, что если $\alpha > 0$, то равенство (10) имеет место и при $x=1$.

В частности, можно утверждать, что при $\alpha > 0$

$$(1-t^2)^\alpha = 1-\frac{\alpha}{1!}t^2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^4-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\cdot\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}t^{2n}+\ldots \qquad (11)$$

и этот ряд сходится к функции $(1-t^2)^\alpha$ равномерно на отрезке $[-1, 1]$.

Полагая в (11) $\alpha=\frac{1}{2}$ и $t^2=1-x^2$ при $|x| \leqslant 1$, получаем, что

$$|x| = 1-\frac{\frac{1}{2}}{1!}(1-x^2)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(1-x^2)^2-\ldots \qquad (12)$$

и стоящий справа ряд многочленов сходится к функции $|x|$ равномерно на отрезке $[-1, 1]$.

Таким образом, какую бы точность $\varepsilon > 0$ ни задать, найдется такой многочлен $P(x)$, что

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \big||x|-P(x)\big| < \varepsilon. \qquad (13)$$

Вернемся теперь к общей теории.

Мы показали, что непрерывность функций сохраняется при равномерном предельном переходе. Условие равномерности предельного перехода является, однако, только достаточным для того, чтобы пределом непрерывных функций была непрерывная же функция (см. по этому поводу примеры 8, 9 из § 1). Вместе с тем имеется конкретная ситуация, в которой из сходимости непрерывных функций к непрерывной же следует, что эта сходимость является равномерной.

Утверждение 2 (теорема Дини *)). *Если последовательность $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ функций $f_n\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$, непрерывных на компакте $\mathcal{K}$, монотонна и сходится к непрерывной функции $f\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$, то сходимость $f_n \to f$ является равномерной на $\mathcal{K}$.*

◀ Пусть для определенности f_n стремятся к f не убывая. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и для любой точки $x \in \mathcal{K}$ найдем

---

*) У. Ди́ни (1845—1918) — итальянский математик, наиболее известные его работы относятся к теории функций.

такой номер n_x, что $0 \leqslant f(x) - f_{n_x}(x) < \varepsilon$. Поскольку функции f и f_{n_x} непрерывны на $\mathcal{K}$, неравенства $0 \leqslant f(\xi) - f_{n_x}(\xi) < \varepsilon$ останутся в силе и в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in \mathcal{K}$. Из покрытия компакта $\mathcal{K}$ такими окрестностями можно извлечь конечное покрытие $U(x_1), \ldots, U(x_k)$ и затем фиксировать номер $n(\varepsilon) = \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_k}\}$. Тогда при любом $n > n(\varepsilon)$ в силу неубывания последовательности $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ будем иметь $0 \leqslant f(\xi) - f_n(\xi) < \varepsilon$ в любой точке $\xi \in \mathcal{K}$. ►

Следствие 3. *Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ суть неотрицательные непрерывные на компакте $\mathcal{K}$ функции a_n: $\mathcal{K} \to \mathbb{R}$ и ряд сходится на $\mathcal{K}$ к непрерывной функции, то он сходится на $\mathcal{K}$ равномерно.*

◄ Частичные суммы $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ данного ряда удовлетворяют условиям теоремы Дини. ►

Пример 3. Покажем, что последовательность функций $f_n(x) = n(1-x)^{1/n}$ при $n \to +\infty$ сходится к функции $f(x) = \ln\frac{1}{x}$ равномерно на каждом отрезке $[a, b]$, лежащем в промежутке $0 < x < 1$.

◄ Положим $g(t) := t(1 - x^{1/t})$. Тогда $g'(t) = 1 - x^{1/t} + x^{1/t}\ln x^{1/t} > 0$ при $0 < x < 1$ и $0 < t$. В самом деле, если $0 < x < 1$ и $0 < t$, то $0 < u := x^{1/t} < 1$, а $\varphi(u) := 1 - u + u\ln u > 0$ при $0 < u < 1$, так как $\varphi'(u) = \ln u < 0$, если $0 < u < 1$, в то время как $\varphi(1) = 0$. Итак, при любом фиксированном значении $x \in]0, 1[$ функция $g(t)$ монотонно возрастает при $t \to +\infty$.

Заметим теперь, что

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = -\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}\ln x} - 1}{\frac{1}{t}\ln x} \cdot \ln x = -\ln x.$$

Таким образом, $f_n(x) \nearrow \ln\frac{1}{x}$ на промежутке $0 < x \leqslant 1$ при $n \to +\infty$. По теореме Дини отсюда следует, что указанная сходимость $f_n(x)$ к $\ln\frac{1}{x}$ является равномерной на каждом отрезке $[a, b] \subset]0, 1]$.

Отметим, что при этом на промежутке $0 < x \leqslant 1$ равномерной сходимости, очевидно, нет, поскольку функция $\ln\frac{1}{x}$ неограничена на нем, в то время как каждая из функций $f_n(x)$ ограничена на этом промежутке (зависящей от n константой). ►

4. Интегрирование и предельный переход.

Теорема 3. *Пусть $\{f_t, t\in T\}$ — семейство функций $f_t\colon [a, b]\to\mathbb{C}$, определенных на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и зависящих от параметра $t\in T$; $\mathcal{B}$ — база в T. Если функции семейства интегрируемы на $[a, b]$ и $f_t\rightrightarrows f$ на $[a, b]$ при базе $\mathcal{B}$, то предельная функция $f\colon [a, b]\to\mathbb{C}$ тоже интегрируема на отрезке $[a, b]$ и*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\mathcal{B}}\int_a^b f_t(x)\,dx.$$

◀ Пусть $p=(P, \xi)$ — разбиение P отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками $\xi=\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Рассмотрим интегральные суммы $F_t(p)=\sum_{i=1}^{n} f_t(\xi_i)\,\Delta x_i$, $t\in T$ и $F(p)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$. Оценим разность $F(p)-F_t(p)$. Поскольку $f_t\rightrightarrows f$ на $[a, b]$ при базе $\mathcal{B}$, для любого $\varepsilon>0$ можно найти такой элемент B базы $\mathcal{B}$, что при любом $t\in B$ в любой точке $x\in[a, b]$ будет выполнено неравенство $|f(x)-f_t(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит, при $t\in B$

$$|F(p)-F_t(p)|=\left|\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)-f_t(\xi_i))\,\Delta x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)-f_t(\xi_i)|\,\Delta x_i<\varepsilon,$$

и эта оценка справедлива не только при любом значении $t\in B$, но и при любом разбиении p из множества $\mathcal{P}=\{(P, \xi)\}$ разбиений отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками. Таким образом, $F_t\rightrightarrows F$ на $\mathcal{P}$ при базе $\mathcal{B}$. Теперь, взяв в $\mathcal{P}$ традиционную базу $\lambda(P)\to 0$, по теореме 1 находим, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{i=1}^{n} f_t(\xi_i)\,\Delta x_i =: F_t(p) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\lambda(P)\to 0"'] & F(p) := \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \arrow[d, "\exists\ \lambda(P)\to 0"] \\
\int_a^b f_t(x)\,dx =: A_t \arrow[r] \arrow[ur, dashed, no head] & A = \int_a^b f(x)\,dx,
\end{tikzcd}$$

что и доказывает сформулированную теорему 3. ▶

Следствие 4. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ из интегрируемых на отрезке $[a, b]\subset\mathbb{R}$ функций сходится равномерно на этом отрезке, то его сумма тоже интегрируема на отрезке $[a, b]$ и*

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Пример 4. В этом примере, записывая $\frac{\sin x}{x}$, будем считать, что при $x=0$ это отношение равно единице.

В свое время мы отмечали, что функция $\operatorname{Si}(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ не является элементарной. Используя доказанные теоремы, можно, тем не менее, получить достаточно простое представление этой функции в виде степенного ряда.

Для этого заметим, что

$$\frac{\sin t}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}, \tag{14}$$

и стоящий справа ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-a, a]\subset\mathbb{R}$. Равномерная сходимость ряда следует из мажорантного признака Вейерштрасса равномерной сходимости ряда, поскольку $\frac{|t|^{2n}}{(2n+1)!}\leqslant\frac{a^{2n}}{(2n+1)!}$ при $|t|\leqslant a$, в то время как числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{(2n+1)!}$ сходится.

На основании следствия 4 теперь можно написать

$$\operatorname{Si}(x)=\int\limits_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_0^x\frac{(-1)^{2n}}{(2n+1)!}t^{2n}\,dt\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}.$$

Полученный ряд, кстати, тоже сходится равномерно на любом отрезке числовой оси, поэтому, какой бы отрезок $[a, b]$ изменения аргумента x ни указать и какую бы ни назначить допустимую абсолютную погрешность, можно подобрать многочлен — частичную сумму полученного ряда, который в любой точке отрезка $[a, b]$ позволит вычислить $\operatorname{Si}(x)$ с погрешностью, не превышающей заданной.

5. Дифференцирование и предельный переход.

Теорема 4. *Пусть $\{f_t, t\in T\}$ — семейство функций $f_t\colon X\to\mathbb{C}$, определенных на выпуклом ограниченном множестве X (лежащем в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или ином линейном нормированном пространстве) и зависящих от параметра $t\in T$; $\mathcal{B}$ — база в T. Если функции семейства дифференцируемы на X, семейство $\{f_t', t\in T\}$ производных сходится равномерно на X к некоторой функции $\varphi\colon X\to\mathbb{C}$, а исходное семейство $\{f_t, t\in T\}$ сходится хотя бы в одной точке*

$x_0 \in X$, то оно сходится равномерно на всем множестве X к дифференцируемой функции $f\colon X \to \mathbb{C}$, причем $f' = \varphi$.

◀ Покажем сначала, что семейство $\{f_t,\ t \in T\}$ равномерно сходится на множестве X при базе $\mathcal{B}$. Воспользуемся теоремой о конечном приращении в следующих оценках:

$$|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| \leqslant |(f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)) - (f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0))| + \\ + |f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)| \leqslant \sup_{\xi \in [x_0, x]} |f'_{t_1}(\xi) - f'_{t_2}(\xi)|\,|x - x_0| + \\ + |f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)| = \Delta(x, t_1, t_2).$$

По условию семейство $\{f'_t,\ t \in T\}$ сходится равномерно на X при базе $\mathcal{B}$, величина $f_t(x_0)$ как функция t при той же базе $\mathcal{B}$ имеет предел, а $|x - x_0|$ — ограниченная величина при $x \in X$. Ввиду необходимости условий критерия Коши для равномерной сходимости семейства функции f'_t и существования предела функции $f_t(x_0)$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент B базы $\mathcal{B}$, что для любых $t_1, t_2 \in B$ и любого $x \in X$ будет $\Delta(x, t_1, t_2) < \varepsilon$. А это в силу написанных оценок означает, что семейство функций $\{f_t,\ t \in T\}$ тоже удовлетворяет условиям критерия Коши и, следовательно, равномерно сходится на X при базе $\mathcal{B}$ к некоторой функции $f\colon X \to \mathbb{C}$.

Вновь используя теорему о конечном приращении, получим теперь следующие оценки:

$$|(f_{t_1}(x+h) - f_{t_1}(x) - f'_{t_1}(x)h) - (f_{t_2}(x+h) - f_{t_2}(x) - f'_{t_2}(x)h)| = \\ = |(f_{t_1} - f_{t_2})(x+h) - (f_{t_1} - f_{t_2})(x) - (f_{t_1} - f_{t_2})'(x)h| \leqslant \\ \leqslant \sup_{0<\theta<1} |(f_{t_1} - f_{t_2})'(x+\theta h)|\,|h| + |(f_{t_1} - f_{t_2})'(x)|\,|h| = \\ = \Big(\sup_{0<\theta<1} |f'_{t_1}(x+\theta h) - f'_{t_2}(x+\theta h)| + |f'_{t_1}(x) - f'_{t_2}(x)|\Big)|h|.$$

Эти оценки, справедливые при $x, x+h \in X$, ввиду равномерной сходимости семейства $\{f'_t,\ t \in T\}$ на X, показывают, что семейство $\{F_t,\ t \in T\}$ функций

$$F_t(h) = \frac{f_t(x+h) - f_t(x) - f'_t(x)h}{|h|},$$

которые мы будем рассматривать при фиксированном значении $x \in X$, сходится при базе $\mathcal{B}$ равномерно относительно всех значений $h \neq 0$ таких, что $x + h \in X$.

Заметим, что $F_t(h) \to 0$ при $h \to 0$ ввиду дифференцируемости функции f_t в точке $x \in X$, а ввиду того, что $f_t \to f$ и $f'_t \to \varphi$ при базе $\mathcal{B}$, имеем $F_t(h) \to F(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x) - \varphi(x)h}{|h|}$ при базе $\mathcal{B}$

Применяя теорему 1, можно теперь записать коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{f_t(x+h)-f_t(x)-f_t'(x)h}{|h|} =: F_t(h) \arrow[r, Rightarrow, "\mathscr{B}"'] \arrow[d, "h\to 0"'] & F(h) := \dfrac{f(x+h)-f(x)-\varphi(x)h}{|h|} \arrow[d, "h\to 0"] \\
0 \arrow[r, "\mathscr{B}"'] \arrow[ur, dashed, no head] & 0
\end{tikzcd}$$

Правый предельный переход при $h\to 0$ показывает, что функция f дифференцируема в точке $x\in X$ и $f'(x)=\varphi(x)$. ▶

Следствие 5. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *из функций* $f_n\colon X\to\mathbb{C}$, *дифференцируемых на ограниченном выпуклом множестве* X (*лежащем в* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *или любом линейном нормированном пространстве*), *сходится хотя бы в одной точке* $x_0\in X$, *а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *сходится равномерно на* X, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *тоже сходится равномерно на* X, *его сумма дифференцируема на* X *и*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Это вытекает из теоремы 4 и определений суммы и равномерной сходимости ряда с учетом линейности операции дифференцирования.

Замечание 4. Приведенные доказательства теорем 3 и 4, как и сами теоремы и их следствия, остаются в силе для функций $f_t\colon X\to Y$ со значениями в любом полном линейном нормированном пространстве Y. Например, Y может быть $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $C[a, b]$ и т. д. Областью X определения функций f_t в теореме 4 тоже может быть соответствующее подмножество любого линейного нормированного пространства. В частности, X может лежать в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Для вещественнозначных функций вещественного аргумента (при дополнительных требованиях к сходимости) доказательства этих теорем можно сделать еще более простыми (см. задачу 11).

В качестве иллюстрации использования теорем 2—4 докажем следующее широко используемое и в теории и в конкретных вычислениях

Утверждение 3. *Если круг* $K\subset\mathbb{C}$ *сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *не сводится к единственной точке* $z=z_0$, *то* *внутри K сумма $f(z)$ этого ряда дифференцируема, причем*

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}. \tag{15}$$

Кроме того, функцию $f\colon K\to\mathbb{C}$ можно интегрировать по любому гладкому пути $\gamma\colon [0,1]\to K$ и если $[0,1]\ni t\overset{\gamma}{\longmapsto} z(t)\in K$, $z(0)=z_0$ и $z(1)=z$, то

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{(n+1)}(z-z_0)^{n+1}. \tag{16}$$

Замечание 5. Здесь $\int\limits_\gamma f(z)\,dz:=\int\limits_0^1 f(z(t))\,z'(t)\,dt$. В частности, если на интервале $-R<x-x_0<R$ действительной оси $\mathbb{R}$ имеет место равенство $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, то

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

◀ Поскольку $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n-1]{n|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$, то из формулы Коши — Адамара (теорема из § 2) вытекает, что степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$, полученный почленным дифференцированием ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, имеет тот же круг сходимости K, что и исходный степенной ряд. Но по той же теореме из § 2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$ сходится равномерно в любом круге K_q таком, что $K_q\subset K$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, очевидно, сходится при $z=z_0$, к нему теперь применимо следствие 5, чем и обосновывается равенство (15). Итак, показано, что степенной ряд можно дифференцировать почленно.

Проверим теперь, что его можно и интегрировать почленно.

Если $\gamma\colon [0,1]\to K$ — гладкий путь в K, то найдется круг K_q такой, что $\gamma\subset K_q$ и $\bar{K}_q\subset K$. На $\bar{K}_q$ исходный степенной ряд сходится равномерно, поэтому в равенстве

$$f(z(t))=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z(t)-z_0)^n$$

стоящий справа ряд из непрерывных на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ функций сходится равномерно на этом отрезке к непрерывной же функции $f(z(t))$.

Умножение этого равенства на функцию $z'(t)$, непрерывную на отрезке $[0, 1]$, не нарушит ни самого равенства, ни равномерной сходимости ряда. Значит, по теореме 3 получаем

$$\int_0^1 f(z(t))\, z'(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 c_n (z(t) - z_0)^n z'(t)\, dt.$$

Но

$$\int_0^1 (z(t) - z(0))^n z'(t)\, dt = \frac{1}{n+1} \int_0^1 d(z(t) - z(0))^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} (z(1) - z(0))^{n+1} = \frac{1}{n+1} (z - z_0)^{n+1},$$

и мы приходим к равенству (16). ▶

Поскольку в разложении $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, очевидно, $c_0 = f(z_0)$, то, последовательно применяя равенство (15), вновь получаем знакомые соотношения $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, которые показывают, что степенной ряд однозначно определяется своей суммой и он является ее рядом Тейлора.

Пример 5. *Бесселева функция* $J_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, *есть решение уравнения Бесселя**)

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0.$$

Попробуем найти решение этого уравнения, например, при $n = 0$, в виде степенного ряда $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Последовательно, используя формулу (15), после элементарных преобразований приходим к соотношению

$$c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 c_k + c_{k-2})\, x^{k-1} = 0,$$

из которого в силу указанной единственности степенного ряда с данной суммой, находим

$$c_1 = 0, \quad k^2 c_k + c_{k-2} = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Отсюда легко вывести, что $c_{2k-1} = 0$, $k \in \mathbb{N}$, и $c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{(k!)^2\, 2^{2k}}$. Если считать $J_0(0) = 1$, то мы приходим

*) Ф В Бессель (1784—1846) — немецкий астроном.

к соотношению

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

Написанный ряд сходится на всей прямой $\mathbb{R}$ (и во всей плоскости $\mathbb{C}$), поэтому проведенные выше до конкретизации его вида операции над этим рядом являются законными.

Пример 6. В примере 5 мы искали решение уравнения в виде степенного ряда. Если же ряд задан, то, используя формулу (15), можно непосредственно проверить, является ли сумма ряда решением данного уравнения. Так, прямым вычислением можно убедиться в том, что введенная Гауссом функция

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n$$

(*гипергеометрический ряд*) корректно определена при $|x| < 1$ и удовлетворяет так называемому *гипергеометрическому дифференциальному уравнению*

$$x(x-1)y'' - [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\cdot y' + \alpha\beta\cdot y = 0.$$

Отметим в заключение, что, в отличие от теорем 2, 3, в теореме 4 требуется, чтобы не исходное семейство, а семейство производных сходилось равномерно. Мы уже видели (см. пример 2 § 1), что последовательность функций $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin n^2 x$ может сходиться к дифференцируемой функции $f(x) \equiv 0$ равномерно, в то время как последовательность производных $f'_n(x)$ не сходится к $f'(x)$. Дело в том, что производная — это характеристика скорости изменения функции, а не величины значений функции. Даже при очень малых по абсолютной величине изменениях значений функции производная формально может меняться очень сильно, как это имеет место в рассмотренном случае малых колебаний большой частоты. Именно это обстоятельство легло в основу построенного Вейерштрассом примера непрерывной нигде не дифференцируемой функции, которую он задал в виде ряда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, очевидно, равномерно сходящегося на всей прямой $\mathbb{R}$, если $0 < a < 1$. Вейерштрасс показал, что если параметр b выбрать удовлетворяющим условию $a\cdot b > 1 + \frac{3}{2}\pi$, то, с одной стороны, f будет непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, а с другой стороны, она не будет иметь производную ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$. Формальная проверка последнего утверждения довольно утомительна, поэтому желающие получить более простой пример непрерывной функции без производной могут посмотреть задачу 5 из § 1 гл. V.

Задачи и упражнения

1. Используя степенные ряды, найдите решение уравнения $y''(x)-y(x)=0$, удовлетворяющее условиям

a. $y(0)=0,\ y(1)=1.$

b. $y(0)=1,\ y(1)=0$

2. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n(n+1)}$.

3. a. Проверьте, что задаваемая в виде ряда функция

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

является решением уравнения Бесселя с индексом $n\geqslant 0$ из примера 5.

b Проверьте, что гипергеометрический ряд из примера 6 доставляет решение гипергеометрического уравнения.

4. Получите и обоснуйте следующие пригодные для вычислений разложения полных эллиптических интегралов первого и второго рода при $0<k<1$

a. $$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\cdot k^{2n}\right).$$

b. $$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right).$$

5. Найдите

a $\sum\limits_{k=0}^{n} r^k e^{ik\varphi}$

b. $\sum\limits_{k=0}^{n} r^k\cos k\varphi.$

c $\sum\limits_{k=0}^{n} r^k\sin k\varphi.$

Покажите, что при $|r|<1$

d. $$\sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ik\varphi}=\frac{1}{1-r\cos\varphi-ir\sin\varphi}.$$

e. $$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos k\varphi=\frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}.$$

f $$\sum_{k=1}^{\infty} r^k\sin k\varphi=\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}.$$

Проверьте, что в смысле суммирования ряда методом Абеля

g $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\varphi=0$, если $\varphi\neq 2\pi n$, $n\in\mathbb{N}$

h. $\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\varphi$, если $\varphi\neq 2\pi n$, $n\in\mathbb{N}$.

6. Рассмотрев произведение рядов

$$(a_0+a_1+\ldots)(b_0+b_1+\ldots)=(c_0+c_1+\ldots),$$

где $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0$, и используя утверждение 1, покажите, что если ряды $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ сходятся соответственно к A, B и C, то $A\cdot B=C$

7. Пусть $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ и $\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k$ Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется *суммируемым по Чезаро* *), точнее $(c,1)$-суммируемым к A, если $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=A$ В этом случае пишут $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=A\,(c,1)$

a. Проверьте, что $\frac{1}{2}=1-1+1-1+\ldots\,(c,1)$.

b. Покажите, что $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_k$.

c. Проверьте, что если $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=A$ в обычном смысле, то и $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=$ $=A\,(c,1)$

d $(c,2)$-суммой ряда $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называют величину $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sigma_1+\ldots+\sigma_n)$ если этот предел существует Так можно определить сумму (c,r) любого порядка r. Покажите, что если $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=A\,(c,r)$, то $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=A\,(c,r+1)$

e Докажите, что если $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=A\,(c,1)$, то и методом Абеля этот ряд суммируется к той же величине A

8. a *«Теорема тауберова типа»* — это собирательное название для теорем, дающих возможность при тех или иных дополнительных условиях регулярности судить о поведении самих величин по поведению некоторых их средних Примером такой теоремы относящейся к методу Чезаро суммирования рядов,

---

*) Э Чезаро (1859—1906) — итальянский математик, занимался анализом и геометрией

является следующее утверждение, которое вы можете попробовать доказать вслед за Харди *).

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ $(c, 1)$ *и если* $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится в обычном смысле и к той же сумме.*

b. Сама теорема Таубера **) относится к методу Абеля суммирования рядов и состоит в следующем.

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится при* $0 < x < 1$ *и* $\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$. *Если* $\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n} = 0$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится в обычном смысле и при чем к* A.

9. Полезно иметь в виду, что в отношении предельного перехода под знаком интеграла существуют теоремы, дающие гораздо более свободные достаточные условия для возможности такого перехода, чем те, которые предоставляет теорема 3. Эти теоремы составляют одно из основных достижений так называемой теории интеграла Лебега. В случае, когда функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, т. е. $f \in \mathcal{R}[a, b]$, эта функция принадлежит также пространству $\mathcal{L}[a, b]$ функций, интегрируемых по Лебегу, причем значения интегралов $(R)\int_a^b f(x)\,dx$, $(L)\int_a^b f(x)\,dx$ Римана и Лебега от f совпадают.

Вообще пространство $\mathcal{L}[a, b]$ есть пополнение пространства $\mathcal{R}[a, b]$ (точнее $\tilde{\mathcal{R}}[a, b]$) по интегральной метрике, а интеграл $(L)\int_a^b$ есть продолжение линейной функции $(R)\int_a^b$ с $\mathcal{R}[a, b]$ на $\mathcal{L}[a, b]$.

Итоговая теорема Лебега «об ограниченной сходимости» утверждает, что *если последовательность* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *функций* $f_n \in \mathcal{L}[a, b]$ *такова, что существует неотрицательная функция* $F \in \mathcal{L}[a, b]$ *мажорирующая функции последовательности, т. е.* $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ *почти всюду на* $[a, b]$, *то из сходимости* $f_n \to f$ *почти во всех точках отрезка* $[a, b]$ *вытекает, что* $f \in \mathcal{L}[a, b]$ *и* $\lim_{n \to \infty} (L)\int_a^b f_n(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx$.

a. Покажите на примере, что даже если все функции последовательности $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ ограничены одной и той же константой M на отрезке $[a, b]$, из условий $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, и $f_n \to f$ поточечно на $[a, b]$ не следует, что $f \in \mathcal{R}[a, b]$ (см. пример 5 из § 1).

b. Основываясь на сказанном о взаимоотношении интегралов $(R)\int_a^b$, $(L)\int_a^b$ и теореме Лебега, покажите, что если в условиях предыдущего пункта задачи известно, что все же $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то $(R)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} (R)\int_a^b f_n(x)\,dx$. Это существенное усиление теоремы 3.

---

*) Т. Г. Харди (1877—1947) — английский математик; основные труды посвящены теории чисел и теории функций.

**) А. Таубер (1866 — год смерти неизвестен) — австрийский математик; основные исследования относятся к теории чисел и теории функций.

c. Применительно к интегралу Римана можно сформулировать еще следующий вариант теоремы Лебега о монотонной сходимости.

Если последовательность $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *функций* $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ *сходится к нулю монотонно, т. е.* $0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n$ и $f_n(x) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для любого* $x \in [a, b]$, *то* $(R)\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \to 0$.

Докажите это утверждение, используя при необходимости следующее полезное наблюдение.

d. Пусть $f \in \mathcal{R}[0, 1]$, $|f| \leqslant M$ и $\int\limits_0^1 f(x)\,dx \geqslant \alpha > 0$. Тогда множество $E = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geqslant \alpha/2\}$ содержит конечное число таких интервалов, сумма l длин которых не меньше, чем $\alpha/(4M)$.

Докажите это, используя, например, интервалы такого разбиения P отрезка $[0, 1]$, которому отвечает нижняя сумма Дарбу $s(f, P)$, удовлетворяющая соотношению $0 \leqslant \int\limits_0^1 f(x)\,dx - s(f, P) < \alpha/4$.

10. a. Покажите на примерах из § 1, что не всегда из сходящейся на отрезке последовательности функций можно извлечь подпоследовательность, которая сходилась бы равномерно на этом отрезке.

b. Гораздо труднее непосредственно проверить, что из последовательности $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ функций $f_n(x) = \sin nx$ нельзя извлечь подпоследовательность, которая сходилась бы в любой точке отрезка $[0, 2\pi]$. Докажите, что это, однако, именно так (используйте результат задачи 9b и то обстоятельство, что $\int\limits_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1}x)^2\,dx = 2\pi \neq 0$ при $n_k < n_{k+1}$).

c. Пусть $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ — равномерно ограниченная последовательность функций $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$. Пусть

$$F_n(x) = \int\limits_a^x f_n(t)\,dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Покажите, что из последовательности $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[a, b]$.

11. a. Покажите, что если $f, f_n \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ при $n \to \infty$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при любом $n > N$ будет выполнено соотношение

$$\left|\int\limits_a^b (f - f_n)(x)\,dx\right| < \varepsilon(b - a).$$

b. Пусть $f_n \in C^{(1)}([a, b], \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Используя формулу $f_n(x) = f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^x f_n'(t)\,dt$, докажите, что если $f_n' \rightrightarrows \varphi$ на отрезке $[a, b]$ и существует точка $x_0 \in [a, b]$, для которой последовательность $\{f_n(x_0), n \in \mathbb{N}\}$ сходится, то последовательность $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ функций f_n сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции $f \in C^{(1)}([a, b], \mathbb{R})$, причем $f_n' \rightrightarrows f' = \varphi$.

* § 4. Компактные и плотные подмножества пространства непрерывных функций

Этот параграф посвящен более специальным вопросам, относящимся, однако, к вездесущему для анализа пространству непрерывных функций. Все эти вопросы, как впрочем, и сама метрика пространства непрерывных функций, тесно связаны с понятием равномерной сходимости *).

1. Теорема Арцела — Асколи **).

Определение 1. Семейство B функций $f\colon X \to Y$, определенных на множестве X и принимающих значения в метрическом пространстве Y, называется *равномерно ограниченным на множестве* X, если множество $V = \{y \in Y \mid \exists f \in B\ \exists x \in X\ (y = f(x))\}$ значений функций семейства ограничено в Y.

Для числовых функций или для функций $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ это попросту означает существование такой константы $M \in \mathbb{R}$, что для любого $x \in X$ и любой функции $f \in B$ будет $|f(x)| \leqslant M$.

Определение 2. Пусть X и Y — метрические пространства. Семейство $\mathcal{F}$ функций $f\colon X \to Y$ называется *равностепенно непрерывным на множестве* X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $x_1, x_2 \in X$ соотношение $d_X(x_1, x_2) < \delta$ влечет $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, какова бы ни была функция f семейства.

Пример 1. Семейство функций $\{x^n, n \in \mathbb{N}\}$ не является равностепенно непрерывным на отрезке $[0, 1]$, но оно равностепенно непрерывно на любом отрезке вида $[0, q]$, где $0 < q < 1$.

Пример 2. Семейство функций $\{\sin nx, n \in \mathbb{N}\}$ не равностепенно непрерывно ни на каком невырожденном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Пример 3. Если семейство $\{f_\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}, \alpha \in A\}$ дифференцируемых функций f_α таково, что семейство $\{f'_\alpha, \alpha \in A\}$ их производных f'_α равномерно ограничено постоянной, то, как следует из формулы конечных приращений, $|f_\alpha(x_2) - f_\alpha(x_1)| \leqslant M\ |x_2 - x_1|$, и, значит, исходное семейство равностепенно непрерывно на отрезке $[a, b]$.

Связь введенных понятий с равномерной сходимостью непрерывных функций демонстрирует уже следующая

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{K}$ и Y — метрические пространства, причем $\mathcal{K}$ — компакт. Для того чтобы последовательность $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ непрерывных функций $f_n\colon \mathcal{K} \to Y$ сходилась на компакте $\mathcal{K}$ равномерно, необходимо, чтобы семейство $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.*

◀ Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathcal{K}$. По теореме 2 из § 3 заключаем, что $f \in C(K, Y)$. Из равномерной непрерывности f на компакте $\mathcal{K}$ вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$ $(d_K(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon)$. По этому же $\varepsilon > 0$ найдем такой номер $N \in \mathbb{N}$, чтобы при $n > N$ в любой точке $x \in \mathcal{K}$ иметь $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$. Сопоставляя эти неравенства,

---

*) Если вы еще не вполне освоились с общими понятиями из главы 1, то без потери содержательности дальнейшего можете считать, что всюду речь идет о функциях, действующих из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, или из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, или из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$.

**) Ч. Арцела (1847—1912), Д. Асколи (1843—1896) — итальянские математики, работавшие в области теории функций действительного переменного пользуясь неравенством треугольника, находим, что при любом $n > N$ и $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$ из $d_X(x_1, x_2) < \delta$ следует $d_Y(f_n(x_1), f_n(x_2)) < 3\varepsilon$. Значит, семейство $\{f_n, n > N\}$ равностепенно непрерывно. Добавляя к нему равностепенно непрерывное семейство $\{f_1, \ldots, f_N\}$, состоящее из конечного числа непрерывных на компакте $\mathcal{K}$ функций, получим равностепенно непрерывное семейство $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$.

То, что оно равномерно ограничено, вытекает из ограниченности компакта $f(\mathcal{K}) \subset Y$ неравенства $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$, справедливого при $x \in \mathcal{K}$ и $n > N$, а также из ограниченности множества $\bigcup\limits_{n=1}^{N} f_n(\mathcal{K})$. ►

На самом деле справедлива следующая общая

Теорема 1 (Арцела — Асколи) *Пусть $\mathcal{F}$ — семейство функций $f: \mathcal{K} \to Y$, определенных на метрическом компакте $\mathcal{K}$ со значениями в полном метрическом пространстве Y*

Для того чтобы любая последовательность $\{f_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}\}$ содержала равномерно сходящуюся подпоследовательность, необходимо и достаточно, чтобы семейство $\mathcal{F}$ было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.

◄ Необходимость. Если бы $\mathcal{F}$ не было равномерно ограниченным семейством, то, очевидно, можно было бы построить такую последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}$ с неограниченным в совокупности множеством $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\mathcal{K})$ значений, из которой (см. лемму) уже нельзя было бы извлечь равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Если семейство $\mathcal{F}$ не равностепенно непрерывно, то найдутся число $\varepsilon > 0$ и такие последовательность функций $\{f_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}\}$ и последовательность $\{(x_n', x_n''), n \in \mathbb{N}\}$ пар (x_n', x_n'') точек x_n', x_n'', сходящихся при $n \to \infty$ к некоторой точке $x_0 \in \mathcal{K}$, что $d_Y(f_n(x_n'), f_n(x_n'')) \geq \varepsilon_0 > 0$. Тогда из последовательности $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ уже нельзя извлечь сходящуюся равномерно подпоследовательность: ведь по лемме 1 функции такой подпоследовательности должны были бы составлять равностепенно непрерывное семейство.

Достаточность Компакт $\mathcal{K}$ будем считать бесконечным множеством, иначе утверждение тривиально. Фиксируем в $\mathcal{K}$ счетное всюду плотное подмножество E — последовательность $\{x_n \in \mathcal{K}, n \in \mathbb{N}\}$. Такое множество E легко получить, взяв, например, объединение точек конечных ε-сетей в $\mathcal{K}$, получаемых при $\varepsilon = 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots$

Пусть $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ — произвольная последовательность функций семейства $\mathcal{F}$

Последовательность $\{f_n(x_1), n \in \mathbb{N}\}$ значений этих функций в точке x_1 по условию ограничена в Y и, поскольку Y — полное пространство, из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k}(x_1),\ k\in\mathbb{N}\}$. Функции полученной последовательности, как будет видно, удобно обозначить через f_n^1, $n\in\mathbb{N}$. Индекс 1 показывает, что это последовательность, построенная по точке x_1.

Из полученной последовательности извлечем подпоследовательность $\{f_{n_k}^1,\ k\in\mathbb{N}\}$, которую обозначим через $\{f_n^2,\ n\in\mathbb{N}\}$, такую, что последовательность $\{f_{n_k}^1(x_2),\ k\in\mathbb{N}\}$ является сходящейся.

Продолжая этот процесс, получим серию $\{f_n^k,\ n\in\mathbb{N}\}$, $k=1, 2, \ldots$, последовательностей. Если теперь взять «диагональную» последовательность $\{g_n=f_n^n,\ n\in\mathbb{N}\}$, то она, как легко видеть, будет сходиться в любой точке всюду плотного множества $E\subset\mathcal{K}$.

Покажем, что последовательность $\{g_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ сходится в любой точке компакта $\mathcal{K}$ и что ее сходимость равномерная на $\mathcal{K}$. Для этого фиксируем $\varepsilon>0$ и подберем $\delta>0$ в соответствии с определением 2 равностепенной непрерывности семейства $\mathcal{F}$. Пусть $E_1=\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ — конечное подмножество E, образующее δ-сеть в $\mathcal{K}$. Поскольку последовательности $\{g_n(\xi_i),\ n\in\mathbb{N}\}$, $i=1, 2, \ldots, k$, сходятся, найдется такой номер N, что при $m, n\geqslant N$ будет $d_Y(g_m(\xi_i), g_n(\xi_i))<\varepsilon$ для $i=1, 2, \ldots, k$.

Для каждой точки $x\in\mathcal{K}$ найдется такая точка $\xi_j\in E_1$, что $d_X(x, \xi_j)<\delta$. В силу равностепенной непрерывности семейства $\mathcal{F}$ отсюда следует, что $d_Y(g_n(x), g_n(\xi_j))<\varepsilon$ при любом $n\in\mathbb{N}$. Используя полученные неравенства, теперь находим, что при любых $m, n>N$

$$d_Y(g_m(x), g_n(x))\leqslant d_Y(g_n(x), g_n(\xi_j))+d_Y(g_m(\xi_j), g_n(\xi_j))+$$
$$+d_Y(g_m(x), g_m(\xi_j))<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.$$

Но x — произвольная точка компакта $\mathcal{K}$, значит, по критерию Коши последовательность $\{g_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ действительно равномерно сходится на $\mathcal{K}$. ►

2. Метрическое пространство $C(K, Y)$. Одной из наиболее естественных метрик на множестве $C(K, Y)$ функций $f\colon \mathcal{K}\to Y$, непрерывных на компакте $\mathcal{K}$ и принимающих значения в метрическом пространстве Y, является следующая *метрика равномерной сходимости*

$$d(f, g)=\max_{x\in\mathcal{K}} d_Y(f(x), g(x)),$$

где $f, g\in C(\mathcal{K}, Y)$, а максимум существует, так как $\mathcal{K}$ — компакт. Происхождение названия метрики связано с тем, что, очевидно, $d(f_n, f)\to 0 \Leftrightarrow f_n\rightrightarrows f$ на $\mathcal{K}$.

Учитывая последнее соотношение, на основании теоремы 2 из § 3 и критерия Коши равномерной сходимости можно заключить, что метрическое пространство $C(\mathcal{K}, Y)$ с метрикой равномерной сходимости является полным.

Напомним, что *компактным подмножеством* метрического пространства называется такое подмножество, из любой последовательности точек которого можно извлечь последовательность Коши (или, что то же самое, фундаментальную последовательность). Если исходное метрическое пространство полное, то такая последовательность будет даже сходящейся.

Теорема Арцела — Асколи дает описание компактных подмножеств метрического пространства $C(\mathscr{K}, Y)$.

Следующая важная теорема, которую мы собираемся доказать, даст описание достаточно разнообразных всюду плотных подмножеств пространства $C(\mathscr{K}, Y)$. Естественный интерес, который представляют такие подмножества, связан с тем, что функциями, составляющими их, можно равномерно, т. е. со сколь угодно малой абсолютной погрешностью на всем $\mathscr{K}$, аппроксимировать любую функцию $f\colon \mathscr{K} \to Y$, непрерывную на $\mathscr{K}$.

Пример 4. Классический результат Вейерштрасса, к которому мы будем еще не раз возвращаться и который обобщает приведенная ниже теорема Стоуна, состоит в следующем.

Теорема 2 (Вейерштрасс). *Если $f \in C([a, b], \mathbb{C})$, то существует такая последовательность $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ многочленов $P_n\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, что $P_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$. При этом, если $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, то и многочлены P_n можно выбрать из $C([a, b], \mathbb{R})$.*

На геометрическом языке это означает, например, что многочлены с вещественными коэффициентами образуют всюду плотное подмножество в пространстве $C([a, b], \mathbb{R})$.

Пример 5. Если теорема 2 требует все-таки нетривиального доказательства (оно дано ниже), то на основании равномерной непрерывности любой функции $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ легко заключить, что множество кусочно линейных непрерывных вещественнозначных на отрезке $[a, b]$ функций является всюду плотным подмножеством в $C([a, b], \mathbb{R})$.

Замечание. Отметим, что если E_1 всюду плотно в E_2, а E_2 всюду плотно в E_3, то в смысле той же метрики E_1, очевидно, будет всюду плотным в E_3.

Это означает, например, что для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что кусочно линейную функцию можно сколь угодно хорошо приблизить многочленом на соответствующем отрезке.

3. Теорема Стоуна. Прежде чем переходить к общей теореме Стоуна, приведем следующее, полезное для восприятия дальнейшего доказательство теоремы 2 (Вейерштрасса) в случае вещественнозначных функций.

◀ Заметим сначала, что если $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и функции f, g допускают равномерную (сколь угодно точную) аппроксимацию многочленами, то ее допускают и непрерывные на $[a, b]$ функции $f+g$, $f \cdot g$, αf.

На отрезке $[-1, 1]$, как было показано в примере 2, § 3, функция $|x|$ допускает равномерное приближение полиномами $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Значит, соответствующая последовательность полиномов $M\ P_n(x/M)$ дает равномерную аппроксимацию функции $|x|$ уже на отрезке $|x| \leqslant M$.

Если $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ и $M = \max |f(x)|$, то из $\left| |y| - \sum_{k=0}^{n} c_k y^k \right| < \varepsilon$ при $|y| \leqslant M$ следует $\left| |f(x)| - \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^k(x) \right| < \varepsilon$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Значит, если f допускает равномерную аппроксимацию многочленами на отрезке $[a, b]$, то $\sum_{k=0}^{n} c_k f^k$ и $|f|$ тоже допускают такую аппроксимацию.

Наконец, если f и g допускают равномерную аппроксимацию многочленами на отрезке $[a, b]$, то в силу сказанного ее допускают и функции $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}((f+g) + |f-g|)$, $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}((f+g) - |f-g|)$.

Пусть $a \leqslant \xi_1 < \xi_2 \leqslant b$, $f(x) \equiv 0$, $g_{\xi_1\xi_2}(x) = \frac{x - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}$, $h(x) \equiv 1$, $\Phi_{\xi_1\xi_2} = \max\{f, g\}$, $F_{\xi_1\xi_2} = \min\{h, \Phi_{\xi_1\xi_2}\}$. Линейные комбинации функций вида $F_{\xi_1\xi_2}$, очевидно, порождают все множество непрерывных кусочно линейных функций на отрезке $[a, b]$, откуда в силу примера 5 и следует теорема Вейерштрасса. ▶

Прежде чем формулировать теорему Стоуна определим несколько новых понятий.

Определение 3. Совокупность A вещественно (комплексно)-значных функций на множестве X называется *вещественной* (*комплексной*) *алгеброй функций* на X, если из $f, g \in A$ и $\alpha \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ следует, что

$$(f+g) \in A; \quad (f \cdot g) \in A; \quad (\alpha f) \in A.$$

Пример 6. Пусть $X \subset \mathbb{C}$. Многочлены $P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, очевидно, образуют комплексную алгебру функций на X.

Если взять $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ и многочлены брать только с действительными коэффициентами, то получим вещественную алгебру функций на отрезке $[a, b]$.

Пример 7. Линейные комбинации с коэффициентами из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ функций e^{nx}, $n = 0, 1, 2$, очевидно, тоже образуют алгебру (соответственно вещественную или комплексную) на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

То же можно сказать и о линейных комбинациях функций $\{e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Определение 4. Будем говорить, что некоторая совокупность S функций, определенных на множестве X, *разделяет точки* множества X, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ найдется функция $f \in S$ такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Пример 8. Совокупность $\{e^{nx},\ n \in \mathbb{N}\}$ функций и даже каждая из них разделяет точки $\mathbb{R}$.

Вместе с тем совокупность $\{e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\}$ 2π-периодических функций разделяет точки отрезка, если его длина меньше 2π и, очевидно, не разделяет точки отрезка длины, большей или равной 2π.

Пример 9. Вещественные многочлены в совокупности образуют множество функций, разделяющее точки любого отрезка $[a, b]$, так как это делает уже один многочлен $P(x) = x$. Сказанное можно повторить относительно множества $X \subset \mathbb{C}$ и совокупности комплексных полиномов на X. В качестве одной разделяющей функции теперь можно взять $P(z) = z$.

Определение 5. Будем говорить, что *семейство* $\mathscr{F}$ функций $f\colon X \to \mathbb{C}$ *не исчезает на множестве* X, если для любой точки $x_0 \in X$ найдется функция $f_0 \in \mathscr{F}$ такая, что $f_0(x_0) \neq 0$.

Пример 10. Семейство $\mathscr{F} = \{1, x, x^2, \ldots\}$ на отрезке $[0, 1]$ не исчезает, а вот все функции семейства $\mathscr{F}_0 = \{x, x^2, \ldots\}$ обращаются в нуль при $x = 0$.

Лемма 2. *Если алгебра A вещественных (или комплексных) на множестве X функций не исчезает на X, то для любых различных точек $x_0, x_1 \in X$ и любых вещественных (или соответственно комплексных) чисел c_0, c_1 в A найдется такая функция f, что $f(x_0) = c_0$, $f(x_1) = c_1$.*

◀ Очевидно, лемму достаточно доказать, лишь когда $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ и когда $c_0 = 1$, $c_1 = 0$.

По условию в A найдется такая функция g, что $g(x_0) \neq g(x_1)$. Если $g(x_0) = 0$, то уже функция $f = \frac{1}{g(x_1)} g$ будет удовлетворять первой паре условий: $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$.

Если $g(x_0) \neq 0$, то $g^2(x_0) - g(x_0)g(x_1) \neq 0$ и тогда первой паре условий будет удовлетворять функция $f(x) = \frac{g^2(x) - g(x_0)g(x)}{g^2(x_0) - g(x_0)g(x_1)}$, очевидно, принадлежащая алгебре A.

Для того чтобы построить функцию из A, удовлетворяющую требованиям $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0$, придется использовать то обстоятельство, что A не вырождается на K.

Если разделяющая точки x_1, x_2 функция g такова, что $g(x_0) \neq 0$, то в качестве f можно взять $\frac{g^2(x) - g(x_1)g(x)}{g^2(x_1) - g(x_1)g(x_0)}$ при $g(x_1) \neq 0$ или $f = \frac{1}{g(x_0)} g$, если $g(x_1) = 0$.

Остается показать, что в A существует такая специальная разделяющая точки x_0, x_1 функция S, которая, наряду с условием $s(x_0) \neq s(x_1)$, удовлетворяет требованию $s(x_0) \neq 0$.

Пусть g, $h \in A$, $g(x_0) \neq g(x_1)$, $g(x_0) = 0$, $h(x_0) \neq 0$. Очевидно, найдется такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\lambda(h(x_0) - h(x_1)) \neq g(x_1)$. Тогда функция $s = g + \lambda h$ и будет искомой. ▶

Теорема 3 (Стоун *)). *Пусть A — алгебра определенных на компакте $\mathscr{K}$ непрерывных вещественнозначных функций. Если A разделяет точки компакта $\mathscr{K}$ и не исчезает на $\mathscr{K}$, то A является всюду плотным подмножеством пространства $C(\mathscr{K}, \mathbb{R})$.*

◀ Пусть $\bar{A}$ — замыкание в $C(\mathscr{K}, \mathbb{R})$ множества $A \subset C(\mathscr{K}, \mathbb{R})$, т. е. $\bar{A}$ состоит из тех непрерывных функций $f \in C(\mathscr{K}, \mathbb{R})$, которые можно сколь угодно точно равномерно приближать функциями из A. Теорема утверждает, что $\bar{A} = C(\mathscr{K}, \mathbb{R})$.

Повторяя проведенные при доказательстве теоремы Вейерштрасса рассуждения, замечаем, что если f, $g \in \bar{A}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, то функции $f+g$, $f\cdot g$, αf, $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ тоже принадлежат $\bar{A}$. По индукции можно проверить, что вообще, если $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \bar{A}$, то $\max\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ и $\min\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ тоже лежат в $\bar{A}$.

Теперь покажем, что для любой функции $f \in C(\mathscr{K}, \mathbb{R})$, любой точки $x \in \mathscr{K}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $g_x \in \bar{A}$, что $g_x(x) = f(x)$ и $g_x(t) > f(t) - \varepsilon$ при любом $t \in \mathscr{K}$.

Чтобы в этом убедиться, для каждой точки $y \in \mathscr{K}$ возьмем в соответствии с леммой 2 функцию $h_y \in A$ такую, что $h_y(x) = f(x)$ и $h_y(y) = f(y)$. В силу непрерывности на $\mathscr{K}$ функций f и h_y найдется такая открытая окрестность U_y точки y, что $h_y(t) > f(t) - \varepsilon$ при любом $t \in U_y$. Из покрытия компакта $\mathscr{K}$ открытыми множествами U_y извлекаем конечное покрытие $\{U_{y_1}, U_{y_2}, \ldots, U_{y_n}\}$. Тогда функция $g_x = \max\{h_{y_1}, h_{y_2}, \ldots, h_{y_n}\} \in \bar{A}$ будет искомой.

Взяв теперь для каждой точки $x \in \mathscr{K}$ такую функцию g_x, заметим, что ввиду непрерывности функции g_x и f найдется такая открытая окрестность V_x точки $x \in \mathscr{K}$, что $g_x(t) < f(t) + \varepsilon$ при любом $t \in V_x$. Поскольку $\mathscr{K}$ — компакт, найдется его конечное покрытие $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_m}\}$ такими окрестностями. Функция $g = \min\{g_{x_1}, g_{x_2}, \ldots, g_{x_m}\}$ принадлежит алгебре $\bar{A}$ и по построению в любой точке удовлетворяет двойному неравенству

$$f(t) - \varepsilon < g(t) < f(t) + \varepsilon.$$

Но число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, поэтому доказано, что любую функцию $f \in C(\mathscr{K}, \mathbb{R})$ можно сколь угодно точно равномерно приблизить на $\mathscr{K}$ функциями из алгебры $\bar{A}$. ▶

---

*) М. Х. Стоун (1903) — известный современный американский математик; основные труды относятся к топологии и функциональному анализу.

Задачи и упражнения

1. Семейство $\mathcal{F}$ функций $f: X \to Y$, определенных на метрическом пространстве X и принимающих значения в метрическом пространстве Y, называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой функции $f \in \mathcal{F}$ соотношение $d_X(x_0, x) < \varepsilon$ влечет $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

a. Покажите, что если семейство $\mathcal{F}$ функций $f: X \to Y$ равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in X$, то любая функция $f \in \mathcal{F}$ непрерывна в точке x_0, но утверждение, обратное к этому, неверно.

b. Докажите, что если семейство $\mathcal{F}$ функций $f: \mathcal{K} \to Y$ равностепенно непрерывно в любой точке компакта $\mathcal{K}$, то оно равностепенно непрерывно на $\mathcal{K}$ в смысле определения 2.

c. Покажите, что если метрическое пространство X не является компактом, то из равностепенной непрерывности семейства $\mathcal{F}$ функций $f: X \to Y$ в каждой точке $x \in X$ еще не вытекает равностепенная непрерывность $\mathcal{F}$ на X.

По этой причине, если семейство $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно на множестве X в смысле определения 2, его часто называют *равномерно равностепенно непрерывным* на множестве. Таким образом, между равностепенной непрерывностью в точке и равномерной равностепенной непрерывностью семейства функций на множестве X соотношение такое же, как между непрерывностью и равномерной непрерывностью отдельной функции $f: X \to Y$ на множестве X.

d. Пусть $\omega(f; E)$ — колебание функции $f: X \to Y$ на множестве $E \subset X$, а $B(x, \delta)$ — шар радиуса δ с центром в точке $x \in X$ Определением каких понятий являются следующие записи:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in \mathcal{F}\ \ \omega(f; B(x, \delta)) < \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in \mathcal{F}\ \forall x \in X \quad \omega(f; B(x, \delta)) < \varepsilon?$$

e. Покажите на примере, что теорема Арцела — Асколи, вообще говоря, не имеет места, если $\mathcal{K}$ не является компактом: постройте на $\mathbb{R}$ равномерно ограниченную и равностепенно непрерывную последовательность $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ функций $f_n(x) = \varphi(x+n)$, из которой нельзя извлечь равномерно сходящуюся на $\mathbb{R}$ подпоследовательность

f. Опираясь на теорему Арцела — Асколи, решите задачу 10 с из § 3.

2. a. Объясните подробно, почему любую непрерывную кусочно линейную функцию на отрезке $[a, b]$ можно представить в виде линейной комбинации функций вида F_{ξ_1, ξ_2}, указанных в доказательстве теоремы Вейерштрасса.

b. Докажите теорему Вейерштрасса для комплекснозначных непрерывных функций $f: [a, b] \to \mathbb{C}$.

c. Величину $M_n = \int\limits_a^b f(x) x^n\, dx$ часто называют *n-м моментом функции* $f: [a, b] \to \mathbb{C}$ на отрезке $[a, b]$. Покажите, что если $f \in C([a, b], \mathbb{C})$ и $M_n = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

3. a. Покажите, что алгебра, порожденная парой функций $\{1, x^2\}$, плотна в множестве всех четных, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций.

b. Решите предыдущий вопрос для алгебры, порожденной одной функцией $\{x\}$, и множества нечетных функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$.

c Любую ли функцию $f \in C([0, \pi], \mathbb{C})$ можно сколь угодно точно равномерно аппроксимировать функциями алгебры, порожденной парой функций $\{1, e^{ix}\}$?

d. Ответьте на предыдущий вопрос в случае $f \in C([-\pi, \pi] \mathbb{C})$.

e. Покажите, что ответ на предыдущий вопрос будет положительным тогда и только тогда, когда $f(-\pi) = f(\pi)$.

f. Любую ли функцию $f \in C([a, b], \mathbb{C})$ можно равномерно аппроксимировать линейными комбинациями функций системы $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots\}$, если $[a, b] \subset]-\pi, \pi[$?

g. Любую ли четную функцию $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ можно равномерно аппроксимировать функциями системы $\{1, \cos x, \ldots, \cos nx, \ldots\}$?

h. Пусть $[a, b]$ — произвольный отрезок прямой $\mathbb{R}$. Покажите, что алгебра, порожденная на $[a, b]$ любой не обращающейся в нуль строго монотонной функцией $\varphi(x)$ (например, e^x), плотна в $C([a, b], \mathbb{R})$.

i. При каком расположении отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ порожденная функцией $\varphi(x) = x$ алгебра плотна в $C([a, b], \mathbb{R})$?

4. a. Комплексная алгебра A называется *самосопряженной*, если из $f \in A$ следует, что $\bar{f} \in A$, где $\bar{f}(x)$ — значение, сопряженное к $f(x)$. Покажите, что если комплексная алгебра A не вырождается на X и разделяет точки X, то при условии самосопряженности алгебры A можно утверждать, что подалгебра A_R вещественнозначных функций алгебры A тоже не вырождается на X и тоже разделяет точки множества X.

b. Докажите следующий комплексный вариант теоремы Стоуна.

Если комплексная алгебра A функций $f: X \to \mathbb{C}$ не вырождается на X и разделяет точки X, то при условии самосопряженности алгебры A можно утверждать, что она плотна в $C(X, \mathbb{C})$.

c. Пусть $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ — единичная окружность, A — алгебра на X, порожденная функцией $e^{i\varphi}$, где φ — полярный угол точки $z \in X$. Эта алгебра не вырождается на X и разделяет точки X, но не является самосопряженной.

Докажите, что для любой функции $f: X \to \mathbb{C}$, допускающей равномерную аппроксимацию элементами алгебры A, должно выполняться равенство $\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) e^{in\varphi} \, d\varphi = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Используя это обстоятельство, проверьте, что сужение на окружность X функции $f(z) = \bar{z}$ есть непрерывная на X функция, которая не входит в замыкание указанной алгебры A.

ГЛАВА XVII

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

В этой главе общие теоремы о семействах функций, зависящих от параметра, будут применены к одному из наиболее часто встречающихся в анализе виду таких семейств — к интегралу, зависящему от параметра.

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1. Понятие интеграла, зависящего от параметра. *Интеграл, зависящий от параметра*, — это функция вида

$$F(t) = \int_{E_t} f(x, t)\, dx, \tag{1}$$

где t играет роль параметра, пробегающего некоторое множество T, а каждому значению $t \in T$ отвечает множество E_t и интегрируемая на нем в собственном или несобственном смысле функция $\varphi_t(x) = f(x, t)$.

Природа множества T может быть самой разнообразной, но важнейшими, разумеется, являются случаи, когда T — подмножество пространств $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$.

Если при каждом значении параметра $t \in T$ интеграл (1) является собственным, то принято говорить, что функция F в (1) есть *собственный интеграл, зависящий от параметра.*

Если же при всех или при некоторых значениях $t \in T$ интеграл в (1) существует только в несобственном смысле, то функцию F обычно называют *несобственным интегралом, зависящим от параметра.*

Но это, конечно, всего лишь терминологические условности.

В том случае, когда $x \in \mathbb{R}^m$, $E_t \subset \mathbb{R}^m$ и $m > 1$ говорят, что имеют дело с *кратным* (двойным, тройным и т. д.) *интегралом* (1), *зависящим от параметра.*

Главное внимание мы сосредоточим, однако, на одномерном случае, составляющем основу любых обобщений. Более того, для простоты мы сначала в качестве E_t будем брать только не зависящие от параметра промежутки числовой прямой $\mathbb{R}$, и к тому же будем считать, что на них интеграл (1) существует в собственном смысле.

2. Непрерывность интеграла, зависящего от параметра.

Утверждение 1. *Пусть* $P=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x\leqslant b \wedge c\leqslant y\leqslant d\}$ — *прямоугольник в плоскости* $\mathbb{R}^2$. *Если функция* $f\colon P\to\mathbb{R}$ *непрерывна, т. е. если* $f\in C(P, \mathbb{R})$, *то функция*

$$F(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx \tag{2}$$

непрерывна в любой точке $y\in[c, d]$.

◀ Из равномерной непрерывности функции f на компакте P вытекает, что $\varphi_y(x):=f(x, y)\rightrightarrows f(x, y_0)=:\varphi_{y_0}(x)$ на $[a, b]$ при $y\to y_0$, $y, y_0\in[c, d]$. При каждом $y\in[c, d]$ функция $\varphi_y(x)=f(x, y)$ непрерывна по x на отрезке $[a, b]$, а значит, и интегрируема на нем. По теореме о предельном переходе под знаком интеграла теперь можно утверждать, что

$$F(y_0)=\int_a^b f(x, y_0)\,dx=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\,dx=\lim_{y\to y_0}F(y). \ ▶$$

Замечание 1. Как видно из приведенного доказательства, утверждение 1 о непрерывности функции (2) остается в силе, если в качестве множества значений параметра y взять любой компакт $\mathscr{K}$, конечно, при условии, что $f\in C(I\times\mathscr{K}, \mathbb{R})$, где $I=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leqslant x\leqslant b\}$.

Отсюда, в частности, можно сделать вывод, что если $f\in C(I\times D, \mathbb{R})$, где D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то $F\in C(D, \mathbb{R})$, поскольку любая точка $y_0\in D$ имеет компактную окрестность $\mathscr{K}\subset D$, а сужение функции f на $I\times\mathscr{K}$ является непрерывной функцией на компакте $I\times\mathscr{K}$.

Мы сформулировали утверждение 1 для вещественнозначных функций, но, конечно, оно вместе с доказательством сохраняет силу и для векторнозначных функций, например для функций, принимающих значения в $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$.

Пример 1. При доказательстве леммы Морса (см. часть I) мы упоминали о следующем утверждении, называемом леммой Адамара.

Если функция f в окрестности U точки x_0 принадлежит классу $C^{(1)}(U, \mathbb{R})$, то в некоторой окрестности точки x_0 ее можно представить в виде

$$f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0), \tag{3}$$

где φ — функция, непрерывная в x_0, причем $\varphi(x_0)=f'(x_0)$.

Равенство (3) легко следует из формулы

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^1 f'(x_0+th)\,dt\cdot h \tag{4}$$

Ньютона — Лейбница и утверждения 1, применяемого к функции $F(h)=\int\limits_0^1 f'(x_0+th)\,dt$: остается сделать замену $h=x-x_0$ и положить $\varphi(x)=F(x-x_0)$.

Полезно заметить, что равенство (4) имеет место для $x_0, h\in\mathbb{R}^n$, где n не обязано быть только единицей. Раскрывая символ f' подробнее и полагая для простоты записи $x_0=0$, можно вместо (4) написать

$$f(x^1, \ldots, x^n)-f(0, \ldots, 0)=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \ldots, tx^n)\,dt\cdot x^i$$

и тогда в равенстве (3) следует положить

$$\varphi(x)\,x=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\,x^i,$$

где $\varphi_i(x)=\int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx)\,dt$.

3. Дифференцирование интеграла, зависящего от параметра.

Утверждение 2. *Если на прямоугольнике* $P=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\mid a\leqslant x\leqslant b\wedge c\leqslant y\leqslant d\}$ *функция* $f\colon P\to\mathbb{R}$ *непрерывна и имеет непрерывную частную производную по* y, *то интеграл* (2) *принадлежит классу* $C^{(1)}([c, d], \mathbb{R})$, *причем*

$$F'(y)=\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx. \tag{5}$$

Формулу (5) дифференцирования собственного интеграла (2) по параметру часто называют *формулой* или *правилом Лейбница*.

◀ Проверим непосредственно, что если $y_0\in[c, d]$, то $F'(y_0)$ можно вычислить по формуле (5):

$$\left|F(y_0+h)-F(y_0)-\left(\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\,dx\right)h\right|=$$
$$=\left|\int\limits_a^b\left(f(x, y_0+h)-f(x, y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\,h\right)dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_a^b\left|f(x, y_0+h)-f(x, y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\,h\right|dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_a^b \sup_{0<\theta<1}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0+\theta h)-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right|dx\,|h|=\varphi(y_0, h)\cdot|h|.$$

По условию $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(P, \mathbb{R})$, поэтому $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \rightrightarrows \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ при $y \to y_0$, откуда следует, что $\varphi(y_0, h) \to 0$ при $h \to 0$. ►

Замечание 2. Непрерывность исходной функции f использована в доказательстве лишь как достаточное условие существования всех участвующих в нем интегралов.

Замечание 3. Проведенное доказательство и использованная в нем форма теоремы о конечном приращении показывают, что утверждение 2 остается в силе, если вместо отрезка $[c, d]$ взять выпуклый компакт в любом векторном нормированном пространстве. При этом, очевидно, можно еще считать, что f принимает значения в некотором полном векторном нормированном пространстве.

В частности, и это порой бывает весьма полезно, формула (5) применима и к комплекснозначным функциям F комплексного переменного $y \in \mathbb{C}$ и к функциям $F(y) = F(y^1, \ldots, y^n)$ от векторного параметра $y = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{C}^n$.

В последнем случае $\frac{\partial f}{\partial y}$, конечно, можно расписать покоординатно в виде $\left(\frac{\partial f}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^n}\right)$ и получить из (5) соответствующие частные производные $\frac{\partial F}{\partial y^i}(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y^i}(x, y^1, \ldots, y^n)\,dx$ функции F.

Пример 2. Проверим, что функция $u(x) = \int\limits_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin n\varphi)\,d\varphi$ удовлетворяет уравнению Бесселя $x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0$.

Действительно, выполнив дифференцирования в соответствии с формулой (5), после простых преобразований находим

$$-x^2\int\limits_0^\pi \sin^2\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,dx + x\int\limits_0^\pi \sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi +$$
$$+(x^2 - n^2)\int\limits_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,dx =$$
$$= \int\limits_0^\pi ((x^2\sin^2\varphi + n^2 - x^2)\cos(n\varphi - x\sin\varphi) -$$
$$- x\sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi))\,d\varphi =$$
$$= -(n + x\cos\varphi)\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\Big|_0^\pi = 0.$$

Пример 3. Полные эллиптические интегралы

$$E(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \tag{6}$$

как функции параметра k, $0<k<1$, называемого *модулем* соответствующего *эллиптического интеграла*, связаны соотношениями

$$\frac{dE}{dk}=\frac{E-K}{k},\quad \frac{dK}{dk}=\frac{E}{k(1-k^2)}-\frac{K}{k}.$$

Проверим, например, первое из них. По формуле (5)

$$\frac{dE}{dk}=-\int_0^{\pi/2} k\sin^2\varphi\cdot(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\,d\varphi=$$
$$=\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi-\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\,d\varphi=\frac{E-K}{k}.$$

Пример 4. Иногда применение формулы (5) позволяет даже вычислить интеграл. Пусть

$$F(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\ln(\alpha^2-\sin^2\varphi)\,d\varphi\qquad(\alpha>1).$$

Согласно формуле (5)

$$F'(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{2\alpha\,d\varphi}{\alpha^2-\sin^2\varphi}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}},$$

откуда $F(\alpha)=\pi\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)+c$.

Величину c тоже легко найти, если заметить, что при $\alpha\to+\infty$, с одной стороны, $F(\alpha)=\pi\ln\alpha+\pi\ln 2+c+o(1)$, а, с другой стороны, из определения $F(\alpha)$ с учетом равенства $\ln(\alpha^2-\sin^2\varphi)=2\ln\alpha+o(1)$ при $\alpha\to+\infty$ получается, что $F(\alpha)=\pi\ln\alpha+o(1)$. Значит, $\pi\ln 2+c=0$ и $F(\alpha)=\pi\ln\frac{1}{2}\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)$.

Утверждение 2 можно несколько усилить

Утверждение 2′. *Пусть на прямоугольнике $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\leqslant x\leqslant b\wedge c\leqslant y\leqslant d\}$ функция $f\colon P\to\mathbb{R}$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$; пусть далее $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ такие непрерывные на $[c,d]$ функции, что при любом $y\in[c,d]$ их значения лежат на отрезке $[a,b]$. Тогда интеграл*

$$F(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dy \tag{7}$$

определен при любом $y\in[c,d]$, принадлежит классу $C^{(1)}([c,d],\mathbb{R})$ и справедлива формула

$$F'(y)=f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y)+\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx. \tag{8}$$

◀ В соответствии с правилом дифференцирования интеграла по пределам интегрирования и с учетом формулы (5) можно сказать, что функция

$$\Phi(\alpha, \beta, y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\, dx$$

при условиях, что $\alpha, \beta \in [a, b]$ и $y \in [c, d]$ имеет следующие частные производные:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = f(\beta, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = -f(\alpha, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx.$$

С учетом утверждения 1 заключаем, что все частные производные функции Φ непрерывны в ее области определения. Значит, Φ — непрерывно дифференцируемая функция. Теперь формула (8) получается дифференцированием сложной функции $F(y) = \Phi(\alpha(y), \beta(y), y)$. ▶

Пример 5. Пусть

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\, dt,$$

где $n \in \mathbb{N}$, а f — непрерывная на промежутке интегрирования функция. Проверим, что $F_n^{(n)}(x) = f(x)$.

При $n = 1$ $F_1(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ и $F_1'(x) = f(x)$.

По формуле (8) при $n > 1$ находим

$$F_n'(x) = \frac{1}{(n-1)!}(x-x)^{n-1} f(x) + \frac{1}{(n-2)!} \int_{0}^{x} (x-t)^{n-2} f(t)\, dt = F_{n-1}(x).$$

Применяя принцип индукции, заключаем, что действительно $F_n^{(n)}(x) = f(x)$ при любом $n \in \mathbb{N}$

4. Интегрирование интеграла, зависящего от параметра.

Утверждение 3. *Если функция $f\colon P \to \mathbb{R}$ непрерывна в прямоугольнике $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$, то интеграл* (2) *интегрируем на отрезке $[c, d]$ и имеет место равенство*

$$\int_{c}^{d} \left(\int_{a}^{b} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_{a}^{b} \left(\int_{c}^{d} f(x, y)\, dy \right) dx. \tag{9}$$

◀ С точки зрения кратных интегралов равенство (9) есть простейший вариант теоремы Фубини.

Приведем, однако, доказательство соотношения (9), позволяющее обосновать его независимо от теоремы Фубини.

Рассмотрим функции

$$\varphi(u)=\int_c^u\left(\int_a^b f(x,\ y)\,dx\right)dy,\quad \psi(u)=\int_a^b\left(\int_c^u f(x,\ y)\,dy\right)dx.$$

Ввиду того, что $f\in C(P,\ \mathbb{R})$ на основании утверждения 1 и непрерывной зависимости интеграла от верхнего предела интегрирования, заключаем, что $\varphi,\ \psi\in C([c,\ d],\ \mathbb{R})$. Далее, ввиду непрерывности функции (2), находим, что $\varphi'(u)=\int\limits_a^b f(x,\ u)\,dx$, а по формуле (5) получаем, что $\psi'(u)=\int\limits_a^b f(x,\ u)\,dx$ при $u\in[c,\ d]$. Таким образом, $\varphi'(u)=\psi'(u)$ и, значит, $\varphi(u)=\psi(u)+c$ на отрезке $[c,\ d]$. Но, поскольку $\varphi(0)=\psi(0)=0$, то на отрезке $[c,\ d]$ имеет место равенство $\varphi(u)=\psi(u)$, из которого при $u=d$ получается соотношение (9). ►

Задачи и упражнения

1. a. Объясните, почему функция $F(y)$ из соотиошения (2) имеет предел $\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx$, если зависящее от параметра $y\in Y$ семейство функций $\varphi_y(x)=f(x,\ y)$, интегрируемых иа отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, равномерно сходится на нем к функции $\varphi(x)$ при некоторой базе $\mathcal{B}$ в Y (например, при базе $y\to y_0$)

b Докажите, что если E — измеримое множество в $\mathbb{R}^m$, а функция $f\colon E\times I^n\to\mathbb{R}$, определенная иа прямом произведении $E\times I^n=\{(x,\ t)\in\mathbb{R}^{m+n}\mid x\in E\wedge t\in I^n\}$ множества E и n-мерного промежутка I^n, непрерывна, то определенная равенством (1) при $E_t=E$ функция F непрерывна на I^n.

c. Пусть $P=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\mid a\leqslant x\leqslant b\wedge c\leqslant y\leqslant d\}$, и пусть $f\in C(P,\ \mathbb{R})$, $\alpha,\ \beta\in C([c,\ d],\ [a,\ b])$. Докажите, что тогда функция (7) непрерывна на отрезке $[c,\ d]$.

2. a. Покажите, что если $f\in C(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$, то функция $F(x)=\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a}f(x+t)\,dt$ не только непрерывна, но и дифференцируема на $\mathbb{R}$.

b. Найдите производную указанной фуикции $F(x)$ и убедитесь, что $F\in C^{(1)}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$.

3. Используя дифференцирование по параметру, покажите, что при $|r|<1$

$$F(r)=\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx=0$$

4. Проверьте, что следующие функции удовлетворяют уравнению Бесселя, указанному в примере 2.

a. $u=x^n\int\limits_0^\pi\cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi\,d\varphi$.

b. $J_n(x)=\dfrac{x^n}{(2n-1)!!\,\pi}\int\limits_{-1}^{+1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos xt\,dt$.

c. Покажите, что отвечающие различным значениям $n \in \mathbb{N}$ функции J_n связаны соотношением $J_{n+1} = J_{n-1} - 2J'_n$.

5. Развивая пример 3 и полагая $\tilde{k} := \sqrt{1-k^2}$, $\tilde{E}(k) := E(\tilde{k})$, $\tilde{K}(k) := K(\tilde{k})$, покажите, вслед за Лежандром, что

a $\frac{d}{dk}(E\tilde{K} + \tilde{E}K - K\tilde{K}) = 0$

b. $E\tilde{K} + \tilde{E}K - K\tilde{K} = \pi/2$

6. Вместо интеграла (2) рассмотрим интеграл

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b f(x, y)\, g(x)\, dx,$$

где g — интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция ($g \in \mathcal{R}[a, b]$)

Повторив приведенные выше доказательства утверждений 1—3, последовательно проверьте, что

a. Если функция f удовлетворяет условиям утверждения 1, то функция $\mathcal{F}$ непрерывна на отрезке $[c, d]$ ($\mathcal{F} \in C[c, d]$).

b. Если функция f удовлетворяет условиям утверждения 2, то функция $\mathcal{F}$ непрерывно дифференцируема на $[c, d]$ ($\mathcal{F} \in C^{(1)}[c, d]$), причем

$$\mathcal{F}'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, g(x)\, dx.$$

c. Если функция f удовлетворяет условиям утверждения 3, то $\mathcal{F}$ интегрируема на $[c, d]$ ($\mathcal{F} \in \mathcal{R}[c, d]$), причем

$$\int_c^d \mathcal{F}(y)\, dy = \int_b^a \left(\int_c^d f(x, y)\, g(x)\, dy\right) dx.$$

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

1. Равномерная сходимость несобственного интеграла относительно параметра.

a. Основное определение и примеры. Пусть при каждом значении $y \in Y$ сходится несобственный интеграл

$$F(y) = \int_a^\omega f(x, y)\, dx \tag{1}$$

по промежутку $[a, \omega[\subset \mathbb{R}$. Для определенности будем считать, что интеграл (1) имеет единственную особенность, связанную с верхним пределом интегрирования (т. е. или $\omega = +\infty$ или функция f неограничена как функция x в окрестности точки ω).

Определение. Говорят, что *несобственный интеграл* (1), зависящий от параметра $y \in Y$, *сходится равномерно на множестве* $E \subset Y$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U_{[a, \omega[}(\omega)$ точки ω в множестве $[a, \omega[$, что при любом $b \in U_{[a, \omega[}(\omega)$ и любом значении $y \in E$ имеет место следующая оценка:

$$\left|\int_b^\omega f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon \tag{2}$$

остатка интеграла (1).

Если ввести обозначение

$$F_b(y) := \int_a^b f(x, y)\,dx \tag{3}$$

для собственного приближения несобственного интеграла (1), то приведенное основное определение этого параграфа можно (и, как будет видно из дальнейшего, весьма полезно) переформулировать также в иной, равносильной прежней форме:

равномерная сходимость интеграла (1) *на множестве* $E \subset Y$ по определению означает, что

$$F_b(y) \rightrightarrows F(y) \text{ на } E \text{ при } b \to \omega,\ b \in [a, \omega[. \tag{4}$$

Действительно, ведь

$$F(y) = \int_a^\omega f(x, y)\,dx := \lim_{\substack{b \to \omega \\ b \in [a, \omega[}} \int_a^b f(x, y)\,dx = \lim_{\substack{b \to \omega \\ b \in [a, \omega[}} F_b(y),$$

поэтому соотношение (2) можно переписать в виде

$$|F(y) - F_b(y)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Последнее неравенство справедливо при любом $b \in U_{[a, b[}(\omega)$ и любом $y \in E$, что и указано в соотношении (4).

Итак, соотнощения (2), (4), (5) означают, что если интеграл (1) сходится равномерно на некотором множестве E значений параметра, то с любой наперед заданной точностью и одновременно для всех $y \in E$ этот несобственный интеграл (1) можно заменить некоторым собственным, зависящим от того же параметра y интегралом (3).

Пример 1. Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2}$$

сходится равномерно на всем множестве $\mathbb{R}$ значений параметра $y \in \mathbb{R}$, поскольку при любом $y \in \mathbb{R}$

$$\int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2} \leqslant \int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{b} < \varepsilon,$$

как только $b > 1/\varepsilon$.

Пример 2. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx,$$

очевидно, сходится, лишь когда $y > 0$. При этом на любом множестве $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant y_0 > 0\}$ он сходится равномерно.

В самом деле, если $y \geqslant y_0 > 0$, то

$$0 \leqslant \int\limits_b^{+\infty} e^{-xy}\,dx = \frac{1}{y} e^{-by} \leqslant \frac{1}{y_0} e^{-by_0} \to 0 \text{ при } b \to +\infty.$$

Вместе с тем на всем множестве $\mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ равномерной сходимости нет. Действительно, отрицание равномерной сходимости интеграла (1) на множестве E означает, что

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall B \in [a, \omega[\ \exists b \in [B, \omega[\ \exists y \in E \left(\left| \int\limits_b^{\omega} f(x, y)\,dx \right| > \varepsilon_0 \right).$$

В нашем случае в качестве ε_0 можно взять любое действительное число, поскольку

$$\int\limits_b^{+\infty} e^{-xy}\,dx = \frac{1}{y} e^{-by} \to +\infty, \text{ когда } y \to +0,$$

каково бы ни было фиксированное значение $b \in [0, +\infty[$.

Рассмотрим еще один менее тривиальный пример, которым мы в дальнейшем воспользуемся.

Пример 3. Покажем, что каждый из интегралов

$$\Phi(x) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\,dy,$$

$$F(y) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\,dx,$$

в которых α и β — фиксированные положительные числа, сходится равномерно на множестве неотрицательных значений параметра.

Для остатка интеграла $\Phi(x)$ сразу получаем, что

$$0 \leqslant \int\limits_b^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\,dy =$$

$$= \int\limits_b^{+\infty} (xy)^{\alpha} e^{-(xy)} y^{\beta+1} e^{-y}\,dy < M_{\alpha} \int\limits_b^{+\infty} y^{\beta+1} e^{-y}\,dy,$$

где $M_{\alpha} = \max\limits_{0 \leqslant u < +\infty} u^{\alpha} e^{-u}$. Поскольку последний интеграл сходится, то при достаточно больших значениях $b \in \mathbb{R}$ он может быть сделан меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Но это и означает равномерную сходимость интеграла $\Phi(x)$.

Теперь рассмотрим остаток второго интеграла $F(y)$:

$$0 \leqslant \int\limits_b^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\,dx = y^{\beta} e^{-y} \int\limits_b^{\infty} (xy)^{\alpha} e^{-xy} y\,dx = y^{\beta} e^{-y} \int\limits_{by}^{+\infty} u^{\alpha} e^{-u}\,du.$$

Поскольку при $y \geqslant 0$

$$\int_{by}^{+\infty} u^{\alpha}e^{-u}\,du \leqslant \int_{0}^{+\infty} u^{\alpha}e^{-u}\,du < +\infty,$$

а $y^{\beta}e^{-y} \to 0$ при $y \to 0$, то для $\varepsilon > 0$, очевидно, найдется такое число $y_0 > 0$, что при любом $y \in [0, y_0]$ остаток интересующего нас интеграла будет меньше ε независимо даже от значения $b \in [0, +\infty[$.

Если же $y \geqslant y_0 > 0$, то, учитывая, что $M_{\beta} = \max\limits_{0 \leqslant y < -\infty} y^{\beta}e^{-y} < +\infty$, а $0 \leqslant \int_{by}^{+\infty} u^{\alpha}e^{-u}\,du \leqslant \int_{by_0}^{+\infty} u^{\alpha}e^{-u}\,du \to 0$ при $b \to +\infty$, заключаем, что при всех достаточно больших значениях $b \in [0, +\infty[$ одновременно для всех значений $y \geqslant y_0 > 0$ остаток интеграла $F(y)$ можно сделать меньшим чем ε.

Объединяя участки $[0, y_0]$, $[y_0 + \infty[$, заключаем, что, действительно, по любому $\varepsilon > 0$ можно так подобрать число B, что при любом $b > B$ и любом $y \geqslant 0$ соответствующий остаток интеграла $F(y)$ будет меньше чем ε.

b. Критерий Коши равномерной сходимости интеграла.

Утверждение 1 (критерий Коши). *Для того чтобы несобственный интеграл* (1), *зависящий от параметра $y \in Y$, сходился равномерно на множестве $E \subset Y$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U_{[a, \omega[}(\omega)$ точки ω, что при любых b_1, $b_2 \in U_{[a, \omega[}(\omega)$ и любом $y \in E$ выполняется неравенство*

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

◀ Неравенство (6) равносильно соотношению $|F_{b_2}(y) - F_{b_1}(y)| < \varepsilon$, поэтому утверждение 1 является прямым следствием записи (4) определения равномерной сходимости интеграла (1) и критерия Коши равномерной сходимости на E семейства функций $F_b(y)$, зависящих от параметра $b \in [a, \omega[$. ▶

В качестве иллюстрации использования этого критерия Коши рассмотрим следующее иногда полезное его.

Следствие 1. *Если функция f в интеграле* (1) *непрерывна на множестве $[a, \omega[\times [c, d]$, а сам интеграл* (1) *сходится при любом $y \in]c, d[$, но расходится при $y = c$ или $y = d$, то он сходится неравномерно на интервале $]c, d[$, равно как и на любом множестве $E \subset]c, d[$, замыкание которого содержит точку расходимости.*

◀ Если при $y = c$ интеграл (1) расходится, то на основании критерия Коши сходимости несобственного интеграла существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что в любой окрестности $U_{[a,\omega[}(\omega)$ найдутся числа b_1, b_2, для которых

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x, c)\,dx\right| > \varepsilon_0. \tag{7}$$

Собственный интеграл

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\,dx$$

является в нашем случае непрерывной функцией параметра y на всем отрезке $[c, d]$ (см. утверждение 1 из § 1), поэтому при всех значениях y, достаточно близких к c, вместе с неравенством (7) будет выполняться неравенство

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\,dx\right| > \varepsilon_0.$$

На основании критерия Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, теперь заключаем, что рассматриваемый интеграл не может сходиться равномерно ни на каком подмножестве $E \subset]c, d[$, замыкание которого содержит точку c.

Аналогично рассматривается случай, когда интеграл расходится при $y = d$. ▶

Пример 4. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx$$

сходится при $t > 0$ и расходится при $t = 0$, поэтому он заведомо сходится неравномерно на любом множестве положительных чисел, имеющем нуль предельной точкой. В частности, он сходится неравномерно на всем множестве $\{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ положительных чисел.

В данном случае сказанное легко проверить и непосредственно:

$$\int_b^{+\infty} e^{-tx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{b\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du \to +\infty \text{ при } t \to +0.$$

Подчеркнем, что тем не менее на любом отделенном от нуля множестве $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq t_0 > 0\}$ наш интеграл сходится равномерно, поскольку

$$0 < \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{b\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du \leq \frac{1}{\sqrt{t_0}} \int_{b\sqrt{t_0}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du \to 0 \text{ при } b \to +\infty.$$

c. Достаточные условия равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Утверждение 2 (признак Вейерштрасса). *Пусть функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ интегрируемы по x на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega[$ при каждом значении $y \in Y$.*

Если при каждом значении $y \in Y$ и любом $x \in [a, \omega[$ имеет место неравенство $|f(x, y)| \leqslant g(x, y)$, а интеграл

$$\int_a^\omega g(x, y)\, dx$$

сходится равномерно на Y, то интеграл

$$\int_a^\omega f(x, y)\, dx$$

сходится абсолютно при каждом $y \in Y$ и равномерно на множестве Y

◀ Это следует из оценок

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\, dx\right| \leqslant \int_{b_1}^{b_2} \left|f(x, y)\right| dx \leqslant \int_{b_1}^{b_2} g(x, y)\, dx$$

и критерия Коши равномерной сходимости интеграла (утверждение 1). ▶

Наиболее часто встречается тот случай утверждения 2, когда функция g вообще не зависит от параметра y. Именно в этом случае доказанное утверждение 2 обычно называют *мажорантным признаком* Вейерштрасса *равномерной сходимости интеграла.*

Пример 5. Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x_2}\, dx$$

сходится равномерно на всем множестве $\mathbb{R}$ значений параметра α, поскольку $\left|\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x_2}$, а интеграл $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ сходится.

Пример 6. Ввиду неравенства $|\sin x e^{-tx^2}| \leqslant e^{-tx^2}$ интеграл

$$\int_0^\infty \sin x e^{-tx^2}\, dx,$$

как следует из утверждения 2 и результатов примера 3, сходится равномерно на любом множестве вида $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geqslant t_0 > 0\}$. Поскольку при $t = 0$ интеграл расходится, на основании следствия критерия Коши заключаем, что он не может сходиться равномерно ни на каком множестве E, имеющем нуль своей предельной точкой.

Утверждение 3 (признак Абеля — Дирихле) *Пусть функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ при каждом значении $y \in Y$ интегрируемы по x на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega[$.*

Для равномерной сходимости интеграла

$$\int_a^{\omega} (f\cdot g)(x,\ y)\,dx$$

на множестве Y достаточно, чтобы была выполнена любая из следующих двух пар условий:

α_1) *Существует постоянная $M\in\mathbb{R}$ такая, что при любом $b\in[a,\ \omega[$ и любом $y\in Y$ выполнено неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x,\ y)\,dx\right| < M;$$

β_1) *при каждом $y\in Y$ функция $g(x,\ y)$ монотонна по x на промежутке $[a,\ \omega[$ и $g(x,\ y)\rightrightarrows 0$ на Y при $x\to\omega$, $x\in[a,\ \omega[$.*

α_2) *Интеграл*

$$\int_a^{\omega} f(x,\ y)\,dx$$

сходится равномерно на множестве Y;

β_2) *при каждом $y\in Y$ функция $g(x,\ y)$ монотонна по x на промежутке $[a,\ \omega[$ и существует постоянная $M\in\mathbb{R}$ такая, что при любом $x\in[a,\ \omega[$ и любом $y\in Y$ выполнено неравенство*

$$|g(x,\ y)| < M.$$

◀ Применяя вторую теорему о среднем для интеграла, запишем, что

$$\int_{b_1}^{b_2} (f\cdot g)(x,\ y)\,dx = g(b_1,\ y)\int_{b_1}^{\xi} f(x,\ y)\,dx + g(b_2,\ y)\int_{\xi}^{b_2} f(x,\ y)\,dx,$$

где $\xi\in[b_1,\ b_2]$. Если b_1 и b_2 брать в достаточно малой окрестности $U_{[a,\ \omega[}(\omega)$ точки ω, то правую часть написанного равенства можно сделать по модулю меньшей любого наперед заданного числа $\varepsilon>0$, причем сразу для всех значений $y\in Y$. В случае первой пары условий α_1) β_1) это очевидно В случае второй пары α_2), β_2) это становится очевидным, если воспользоваться критерием Коши равномерной сходимости интеграла (утверждение 1).

Таким образом, вновь ссылаясь на критерий Коши, заключаем, что исходный интеграл от произведения $f\ g$ по промежутку $[a,\ \omega[$ действительно сходится равномерно на множестве Y значений параметра. ▶

Если в утверждении 3 функции f и g не зависят от параметра y, то мы вновь возвращаемся к соответствующему признаку сходимости несобственных интегралов.

Пример 7. Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,dx,$$

как следует из критерия Коши и признака Абеля — Дирихле сходимости несобственных интегралов, сходится лишь при $\alpha>0$. Полагая $f(x, \alpha)=\sin x$, $g(x, \alpha)=x^{-\alpha}$, видим, что при $\alpha \geqslant \alpha_0>0$ для рассматриваемого интеграла выполнена пара α_1), β_1) условий утверждения 3. Следовательно, на любом множестве вида $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geqslant \alpha_0>0\}$ данный интеграл сходится равномерно. На множестве $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha>0\}$ всех положительных значений параметра интеграл сходится неравномерно, поскольку он расходится при $\alpha=0$.

Пример 8. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\, dx$$

сходится и притом равномерно на множестве $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$.

◀ Прежде всего, на основании критерия Коши сходимости несобственного интеграла легко заключить, что при $y<0$ данный интеграл вообще расходится. Считая теперь $y \geqslant 0$ и полагая $f(x, y)=\frac{\sin x}{x}$, $g(x, y)=e^{-xy}$, видим, что выполнена вторая пара α_2), β_2) условий утверждения 3, откуда и вытекает равномерная сходимость рассматриваемого интеграла на множестве $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$. ▶

Итак, мы ввели понятие равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, и указали некоторые наиболее важные признаки такой сходимости, вполне аналогичные соответствующим признакам равномерной сходимости рядов функций. Прежде чем переходить к дальнейшему, сделаем два замечания.

Замечание 1. Чтобы не отвлекать вннмание читателя от основного введенного здесь понятия равномерной сходимости интеграла мы всюду подразумевали, что речь идет об интегрировании вещественнозначных функций Вместе с тем, как теперь легко проанализировать, полученные результаты распространяются и на интегралы от векторнозначных функций, в частности на интегралы от комплекснозначных функций. Здесь стоит только отметить, что, как всегда, в критерии Коши необходимо дополнительно предполагать, что соответствующее векторное пространство значений подынтегральной функции является полным (для $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ это выполнено), а в признаке Абеля — Дирихле, как и в соответствующем признаке равномерной сходимости рядов функций, надо считать вещественнозначным тот сомножитель произведения $f \cdot g$, относительно которого предполагается, что он является монотонной функцией.

Все сказанное в равной степени относится и к основным результатам последующих пунктов этого параграфа.

Замечание 2. Мы рассмотрели несобственный интеграл (1), единственная особенность которого была связана с верхним пределом интегрирования ω. Аналогично определяется и исследуется равномерная сходимость интеграла, единственная особенность которого связана с нижним пределом интегрирования Если же интеграл имеет особенности на обоих концах промежутка интегрирования, то его представляют в виде

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x,\ y)\,dx = \int_{\omega_1}^{c} f(x,\ y)\,dx + \int_{c}^{\omega_2} f(x,\ y)\,dx,$$

где $c \in\,]\omega_1,\ \omega_2[$, и считают сходящимся равномерно на множестве $E \subset Y$, если на E сходятся равномерно оба стоящие в правой части равенства интеграла. Легко проверить, что такое определение корректно, т. е. не зависит от выбора точки $c \in\,]\omega_1,\ \omega_2[$.

2. Предельный переход под знаком несобственного интеграла и непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Утверждение 4. *Пусть $f(x,\ y)$ — семейство зависящих от параметра $y \in Y$ функций, интегрируемых хотя бы в несобственном смысле на промежутке $a \leqslant x < \omega$, и пусть $\mathcal{B}_Y$ — база в Y.*

Если:

a) *для любого $b \in [a,\ \omega[$*

$$f(x,\ y) \rightrightarrows \varphi(x) \ \text{на}\ [a,\ b]\ \text{при базе}\ \mathcal{B}_Y,$$

и

b) *интеграл $\int_a^\omega f(x,\ y)$ сходится равномерно на Y,*

то предельная функция φ несобственно интегрируема на $[a,\ \omega[$ и справедливо равенство

$$\lim_{\mathcal{B}_Y} \int_a^\omega f(x,\ y)\,dx = \int_a^\omega \varphi(x)\,dx. \tag{8}$$

◀ Доказательство сводится к проверке следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
F_b(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx \arrow[r, rightrightarrows, "b \to \omega"', "b \in [a,\omega["'] \arrow[d, "\mathcal{B}_Y"'] & \int_a^\omega f(x,y)\,dx =: F(y) \arrow[d, "\mathcal{B}_Y"] \\
\int_a^b \varphi(x)\,dx \arrow[r, "b \to \omega"', "b \in [a,\omega["'] \arrow[ur, dashed, no head] & \int_a^\omega \varphi(x)\,dx
\end{tikzcd}$$

Левый вертикальный предельный переход следует из условия a) и теоремы о предельном переходе под знаком собственного интеграла (см. теорему 3 из § 3 гл. XVI).

Верхний горизонтальный переход есть запись условия b).

По теореме о коммутировании двух предельных переходов отсюда следует существование и совпадение стоящих под диагональю пределов.

Правый вертикальный предельный переход есть то, что стоит в левой части доказываемого равенства (8), а нижний горизонтальный предельный переход дает по определению несобственный интеграл, стоящий в правой части равенства (8) ▶

Следующий пример показывает, что в рассматриваемом случае несобственного интеграла одного условия a) для обеспечения равенства (8), вообще говоря, недостаточно.

Пример 9. Пусть $Y=\{y\in\mathbb{R}\mid y>0\}$, а

$$f(x,\ y)=\begin{cases} 1/y, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant y, \\ 0, & \text{если } y<x. \end{cases}$$

Очевидно, $f(x,\ y)\rightrightarrows 0$ на промежутке $0\leqslant x<+\infty$ при $y\to+\infty$. Вместе с тем при любом $y\in Y$

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x,\ y)\,dy=\int\limits_0^{y} f(x,\ y)\,dx=\int\limits_0^{y}\frac{1}{y}\,dx=1,$$

поэтому равенство (8) в данном случае не имеет места.

Используя теорему Дини (утверждение 2 § 3 гл. XVI). из только что доказанного утверждения 4 можно получить иногда весьма полезное

Следствие 2. *Пусть при каждом значении вещественного параметра $y\in Y\subset\mathbb{R}$ вещественнозначная функция $f(x, y)$ неотрицательна и непрерывна на промежутке $a\leqslant x<\omega$.*

Если:

a) *с ростом y функции $f(x,\ y)$, монотонно возрастая, стремятся на $[a,\ \omega[$ к функции $\varphi(x)$,*

b) $\varphi\in C([a,\ \omega[,\ \mathbb{R})$ *и*

c) *интеграл* $\int\limits_a^{\omega}\varphi(x)\,dx$ *сходится,*

то справедливо равенство (8)

◀ Из теоремы Дини следует, что $f(x,\ y)\rightrightarrows\varphi(x)$ на каждом отрезке $[a,\ b]\subset[a,\ \omega[$.

Из неравенств $0\leqslant f(x,\ y)\leqslant\varphi(x)$ и мажорантного признака равномерной сходимости вытекает равномерная относительно параметра y сходимость интеграла от $f(x,\ y)$ по промежутку $a\leqslant x<$ $<\omega$.

Таким образом, оба условия утверждения 4 выполнены и, значит, имеет место равенство (8). ▶

Пример 10. В примере 3 из § 3 гл. XVI мы проверили, что последовательность функций $f_n(x)=n(1-x^{1/n})$ является монотонно возрастающей на промежутке $0<x\leqslant 1$, причем $f_n(x)\nearrow\ln\frac{1}{x}$ при $n\to+\infty$.

Значит, по следствию 2

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n\,(1-x^{1/n})\,dx=\int_0^1 \ln\frac{1}{x}\,dx.$$

Утверждение 5. *Если*:

a) *функция* $f(x, y)$ *непрерывна по* y *на множестве* $\{(x, y)\in\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x<\omega \wedge c\leqslant y\leqslant d\}$,

b) *интеграл* $F(y)=\int\limits_a^\omega f(x, y)\,dx$ *сходится равномерно на* Y,

то функция $F(y)$ *непрерывна на* $[c, d]$.

◀ Из условия a) следует, что при любом $b\in[a, \omega[$ собственный интеграл

$$F_b(y)=\int_a^b f(x, y)\,dy$$

является функцией непрерывной на $[c, d[$ (см. утверждение 1 § 1),

По условию b) $F_b(y)\rightrightarrows F(y)$ на $[c, d]$ при $b\to\omega$, $b\in[a, \omega[$. откуда теперь и следует непрерывность на $[c, d]$ функции $F(y)$. ▶

Пример 11. В примере 8 было показано, что интеграл

$$F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx \tag{9}$$

сходится равномерно на промежутке $0\leqslant y<+\infty$. Значит, на основании утверждения 5 можно заключить, что функция $F(y)$ непрерывна на каждом отрезке $[0, d]\subset[0, +\infty[$, т. е. непрерывна и на всем промежутке $0\leqslant y<+\infty$. В частности, отсюда следует, что

$$\lim_{y\to+0}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{10}$$

3. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру.

Утверждение 6. *Если*:

a) *функции* $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ *непрерывны на множестве* $\{(x, y)\in\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x<\omega \wedge c\leqslant y\leqslant d\}$,

b) *интеграл* $\Phi(y)=\int\limits_a^\omega f'_y(x, y)\,dx$ *сходится равномерно на множестве* $Y=[c, d]$, *а*

c) *интеграл* $F(y)=\int\limits_a^\omega f(x, y)\,dx$ *сходится хотя бы при одном значении* $y_0\in Y$, *то он сходится и даже равномерно на всем множестве Y; при этом функция $F(y)$ оказывается дифференцируемой и справедливо равенство*

$$F'(y)=\int_a^\omega f'_y(x,\ y)\,dx.$$

◀ В силу условия a) при любом $b\in[a,\ \omega[$ функция

$$F_b(y)=\int_a^b f(x,\ y)\,dy$$

определена и дифференцируема на промежутке $c\leqslant y\leqslant d$ и по правилу Лейбница

$$(F_b)'_y(y)=\int_a^b f'_y(x,\ y)\,dx.$$

В силу условия b) семейство зависящих от параметра $b\in\in[a,\ \omega[$ функций $(F_b)'_y(y)$ сходится равномерно на $[c,\ d]$ к функции $\Phi(y)$ при $b\to\omega$, $b\in[a,\ \omega[$.

По условию c) величина $F_b(y_0)$ имеет предел при $b\to\omega$, $b\in\in[a,\ \omega[$.

Отсюда следует (см. теорему 4 § 3 гл. XVI), что само семейство функций $F_b(y)$ сходится на $[c,\ d]$ равномерно к предельной функции $F(y)$, когда $b\to\omega$, $b\in[a,\ \omega[$, при этом функция F оказывается дифференцируемой на промежутке $c\leqslant y\leqslant d$ и имеет место равенство $F'(y)=\Phi(y)$. Но это как раз то, что и требовалось доказать. ▶

Пример 12. При фиксированном значении $\alpha>0$ интеграл

$$F(y)=\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-xy}\,dx$$

сходится равномерно относительно параметра y на любом промежутке вида $\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqslant y_0>0\}$: это следует из оценки $0\leqslant x^\alpha e^{-xy}<<x^\alpha e^{-xy_0}<e^{-x\frac{y_0}{2}}$, справедливой при всех достаточно больших значениях $x\in\mathbb{R}$.

Значит, по утверждению 6 функция

$$F(y)=\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx$$

бесконечно дифференцируема при $y>0$ и

$$F^{(n)}(y)=(-1)^n\int_0^{+\infty} x^n e^{-xy}\,dx.$$

Но $F(y)=\frac{1}{y}$, поэтому $F^{(n)}(y)=(-1)^n\frac{(n-1)!}{y^{n+1}}$, и, следовательно, можно заключить, что

$$\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-xy}\,dx=\frac{(n-1)!}{y^{n+1}}.$$

В частности, при $y=1$ получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx=(n-1)!$$

Пример 13. Вычислим *интеграл Дирихле*

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Для этого вернемся к интегралу (9) и заметим, что при $y>0$

$$F'(y)=-\int\limits_0^{+\infty}\sin x e^{-xy}\,dx, \tag{11}$$

поскольку интеграл (11) сходится равномерно на любом множестве вида $\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqslant y_0>0\}$.

Интеграл (11) легко вычисляется через первообразную подынтегральной функции и получается, что

$$F'(y)=-\frac{1}{1+y^2}\quad\text{при } y>0,$$

откуда следует, что

$$F(y)=-\operatorname{arctg} y+c\quad\text{при } y>0. \tag{12}$$

При $y\to+\infty$, как видно из соотношения (9), $F(y)\to 0$, поэтому из (12) следует, что $c=\pi/2$. Теперь из (10) и (12) получается, что $F(0)=\pi/2$. Итак,

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

Заметим, что использованное при выводе равенства (13) соотношение «$F(y)\to 0$ при $y\to+\infty$» не является прямым следствием утверждения 4, поскольку $\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\rightrightarrows 0$ при $y\to+\infty$ лишь на промежутках вида $\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant x_0>0\}$, а на промежутках вида $0<x<x_0$ равномерной сходимости нет: ведь $\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\to 1$ при $x\to 0$. Но при $x_0>0$

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx=\int\limits_0^{x_0}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx+\int\limits_{x_0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx$$

и, если задано $\varepsilon > 0$, то сначала выберем x_0 столь близко к нулю, что $\sin x \geqslant 0$ при $x \in [0, x_0]$ и

$$0 < \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\, dx < \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{x}\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

при любом $y > 0$, а затем, фиксировав x_0, на основании утверждения 4, устремляя y к $+\infty$, сделаем интеграл по промежутку $[x_0, +\infty[$ тоже по модулю меньшим чем $\varepsilon/2$.

4. Интегрирование несобственного интеграла по параметру. Утверждение 7. *Если:*

a) *функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x < \omega \wedge c \leqslant y \leqslant d\}$ и*

b) *интеграл $F(y) = \int_a^\omega f(x, y)\, dx$ сходится равномерно на промежутке $[c, d]$,*

то функция F интегрируема на $[c, d]$ и справедливо равенство

$$\int_c^d dy \int_a^\omega f(x, y)\, dx = \int_a^\omega dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{14}$$

◀ При $b \in [a, \omega[$ на основе условия a) и утверждения 3 из § 1 для собственных интегралов можно записать, что

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{15}$$

Используя условие b) и теорему 3 § 3 гл. XVI о предельном переходе под знаком интеграла, в левой части равенства (15) делаем предельный переход при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$ и получаем левую часть равенства (14). Правая часть равенства (14) по самому определению несобственного интеграла является пределом при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$ правой части равенства (15). Таким образом, благодаря условию b) из (15) при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$ получаем равенство (14). ▶

Следующий пример показывает, что, в отличие от случая перестановки двух собственных интегралов одного условия a), вообще говоря, недостаточно для справедливости равенства (14).

Пример 14. Рассмотрим функцию $f(x, y) = (2 - xy)\, xye^{-xy}$ на множестве $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x < +\infty \wedge 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Используя первообразную u^2e^{-u} функции $(2 - u)\, ue^{-u}$, легко подсчитать непосредственно, что

$$0 = \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} (2 - xy)\, xye^{-xy}\, dx \neq \int_0^{+\infty} dx \int_0^1 (2 - xy)\, xye^{-xy}\, dy = 1.$$

Следствие 3. *Если:*

a) *функция* $f(x, y)$ *непрерывна на множестве* $P=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x<\omega\wedge c\leqslant y\leqslant d\}$,

b) *неотрицательна на* P *и*

c) *интеграл* $F(y)=\int\limits_a^\omega f(x, y)\,dx$ *как функция* y *непрерывен на промежутке* $[c, d]$,

то имеет место равенство (14).

◀ Из условия a) следует, что при любом $b\in[a, \omega[$ интеграл

$$F_b(y)=\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$$

является непрерывной по y функцией на отрезке $[c, d]$.

Из условия b) вытекает, что $F_{b_1}(y)\leqslant F_{b_2}(y)$ при $b_1\leqslant b_2$.

На основании теоремы Дини и условия c) теперь заключаем, что $F_b\rightrightarrows F$ на $[c, d]$ при $b\to\omega$, $b\in[a, \omega[$.

Таким образом, выполнены условия утверждения 7 и, следовательно, в рассматриваемом случае равенство (14) действительно имеет место. ▶

Следствие 3 показывает, что пример 14 связан с тем, что в нем функция $f(x, y)$ не является знакопостоянной.

В заключение докажем теперь одно достаточное условие перестановочности двух несобственных интегралов.

Утверждение 8. *Если:*

a) *функция* $f(x, y)$ *непрерывна на множестве* $\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x<\omega\wedge c\leqslant y<\tilde{\omega}\}$,

b) *оба интеграла*

$$F(y)=\int\limits_a^\omega f(x, y)\,dx, \quad \Phi(x)=\int\limits_c^{\tilde{\omega}} f(x, y)\,dy$$

сходятся равномерно, первый — относительно y, *на любом отрезке* $[c, d]\subset[c, \tilde{\omega}[$, *а второй — относительно* x *на любом отрезке* $[a, b]\subset[a, \omega[$,

c) *существует хотя бы один из двух повторных интегралов*

$$\int\limits_c^{\tilde{\omega}} dy\int\limits_a^\omega |f|(x, y)\,dx, \quad \int\limits_a^\omega dx\int\limits_c^{\tilde{\omega}} |f|(x, y)\,dy,$$

то имеет место равенство

$$\int\limits_c^{\tilde{\omega}} dy\int\limits_a^\omega f(x, y)\,dx=\int\limits_a^\omega dx\int\limits_c^{\tilde{\omega}} f(x, y)\,dy. \tag{16}$$

◀ Пусть для определенности существует второй из двух указанных в c) повторных интегралов.

Ввиду условия a) и первого из условий b) на основании утверждения 7 можно сказать, что при любом $d \in [c, \tilde{\omega}[$ для функции f справедливо равенство (14).

Если мы покажем, что при $d \to \tilde{\omega}$, $d \in [c, \tilde{\omega}[$ правая часть равенства (14) стремится к правой части соотношения (16), то равенство (16) будет доказано, поскольку тогда его левая часть тоже будет существовать и являться пределом левой части равенства (14) по самому определению несобственного интеграла.

Положим

$$\Phi_d(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

При любом фиксированном $d \in [c, \tilde{\omega}[$ функция Φ_d определена и ввиду непрерывности f непрерывна на промежутке $a \leqslant x < \omega$.

В силу второго из условия b) на любом отрезке $[a, b] \subset \subset [a, \omega[$ $\Phi_d(x) \rightrightarrows \Phi(x)$ при $d \to \tilde{\omega}$, $d \in [c, \tilde{\omega}[$.

Поскольку $|\Phi_d(x)| \leqslant \int_c^{\tilde{\omega}} |f|(x, y)\, dy =: G(x)$, а интеграл $\int_a^{\omega} G(x)\, dx$, совпадающий со вторым из интегралов условия c), по предположению сходится, на основе мажорантного признака равномерной сходимости заключаем, что интеграл $\int_a^{\omega} \Phi_d(x)\, dx$ относительно параметра d сходится равномерно.

Таким образом, выполнены условия утверждения 4 и можно заключить, что

$$\lim_{\substack{d \to \tilde{\omega} \\ d \in [c, \tilde{\omega}[}} \int_a^{\omega} \Phi_d(x)\, dx = \int_a^{\omega} \Phi(x)\, dx;$$

а именно это нам и оставалось проверить. ►

Следующий пример показывает, что появление в утверждении 8 дополнительного по сравнению с утверждением 7 условия c) не является случайным.

Пример 15. Вычисление при $A > 0$ интеграла

$$\int_A^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = -\frac{x}{x^2 + y^2}\Big|_A^{+\infty} = \frac{A}{A^2 + y^2} < \frac{1}{A}$$

показывает заодно, что при любом фиксированном значении $A > > 0$ он сходится равномерно относительно параметра на всем множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел. То же самое можно было бы сказать об интеграле, отличающемся от написанного заменой dx на dy. Значения этих интегралов, кстати, отличаются только знаком. Прямое вычисление показывает, что

$$-\frac{\pi}{4}=\int_{A}^{+\infty}dx\int_{A}^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\neq\int_{A}^{+\infty}dy\int_{A}^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

Пример 16. При $\alpha>0$ и $\beta>0$ повторный интеграл

$$\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}x^{\alpha}y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}\,dx=\int_0^{+\infty}y^{\beta}e^{-y}\,dy\int_0^{+\infty}(xy)^{\alpha}e^{-(xy)}y\,dx$$

от неотрицательной непрерывной функции, как показывает написанное тождество, существует: он равен нулю при $y=0$ и равен $\int\limits_0^{+\infty}y^{\beta}e^{-y}\,dy\cdot\int\limits_0^{+\infty}u^{\alpha}e^{-u}\,du$ при $y>0$. Таким образом, в этом случае выполнены условия a) и c) утверждения 8. То, что для рассматриваемого интеграла выполнены оба условия b), было проверено в примере 3. Значит, в силу утверждения 8 имеет место равенство

$$\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}x^{\alpha}y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}\,dx=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}x^{\alpha}y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}\,dy.$$

Подобно тому как из утверждения 7 вытекало следствие 3, из утверждения 8 можно вывести

Следствие 4. *Если*

a) *функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве*

$$P=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2\mid a\leqslant x<\omega\wedge c\leqslant y<\tilde{\omega}\},$$

b) *неотрицательна на P,*

c) *оба интеграла*

$$F(y)=\int_a^{\omega}f(x, y)\,dx,\quad \Phi(x)=\int_c^{\tilde{\omega}}f(x, y)\,dy$$

являются непрерывными функциями на промежутках $[a, \omega[$, $[c, \tilde{\omega}[$ соответственно и

d) *существует хотя бы один из повторных интегралов*

$$\int_c^{\tilde{\omega}}dy\int_a^{\omega}f(x, y)\,dx,\quad \int_a^{\omega}dx\int_c^{\tilde{\omega}}f(x, y)\,dy,$$

то существует и другой повторный интеграл, причем их значения совпадают.

◀ Рассуждая, как и при доказательстве следствия 3), из условий a), b), c) на основе теоремы Дини заключаем, что в рассматриваемом случае выполнено условие b) утверждения 8. Поскольку $f\geqslant 0$, наше условие d) совпадает с условием c) утверждения 8. Таким образом, все условия утверждения 8 выполнены и; значит, имеет место равенство (15). ▶

Замечание 3. Как указывалось в замечании 2, интеграл, имеющий особенности на обоих концах промежутка интегрирования, сводится к сумме двух интегралов, каждый из которых имеет по одной особенности. Это позволяет применять доказанные здесь утверждения и их следствия также к интегралам по интервалам $]\omega_1, \omega_2[\subset\mathbb{R}$. При этом, естественно, те условия, которые раньше выполнялись на отрезках $[a, b]\subset[a, \omega[$, теперь должны быть выполнены на отрезках $[a, b]\subset]\omega_1, \omega_2[$.

Пример 17. Используя изменения порядка двух несобственных интегрирований, покажем, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{17}$$

Это известный *интеграл Эйлера — Пуассона.*

◄ Заметим сначала, что при $y>0$

$$\mathcal{J}:=\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du=y\int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}\,dx$$

и что значение интеграла в равенстве (17) не изменится от того, понимать ли интеграл взятым по полуинтервалу $[0, +\infty[$ или по интервалу $]0, +\infty[$.

Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} ye^{-y^2}\,dy\int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}\,dx=\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du=\mathcal{J}^2,$$

при этом считаем, что интегрирование по y ведется в пределах интервала $]0, +\infty[$.

Как мы проверим, в указанном повторном интеграле допустимо изменение порядка интегрирований по переменным x и y, поэтому

$$\mathcal{J}^2=\int_0^{+\infty} dx\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4},$$

откуда и следует равенство (17).

Обоснуем теперь законность изменения порядка интегрирований.

Функция

$$\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\,dy=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}$$

непрерывна при $x\geqslant 0$, а функция

$$\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\,dx=e^{-y^2}\cdot\mathcal{J}$$

непрерывна при $y>0$. Учитывая сделанное выше общее замечание 3, на основе следствия 4 заключаем теперь, что проведенное изменение порядка интегрирований действительно законно. ▶

Задачи и упражнения

1. Пусть $a=a_0<a_1<\ldots<a_n<\ldots<\omega$. Представим интеграл (1) в виде суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(y)$, где $\varphi_n(y)=\int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x, y)\,dx$. Докажите, что интеграл (1) сходится равномерно на множестве $E\subset Y$ тогда и только тогда, когда любой последовательности $\{a_n\}$ указанного вида отвечает ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(y)$, сходящийся равномерно на множестве E.

2. a. В соответствии с замечанием 1 проведите все построения п. 1 в случае комплекснозначной подынтегральной функции f.

b. Проверьте высказанные в замечании 2 утверждения.

3. Проверьте, что функция $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ удовлетворяет уравнению Бесселя $y''+\frac{1}{x}y'+y=0$.

4. a. Исходя из равенства $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{x}$, покажите, что $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{(x^2+y^2)^n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}}$.

b. Проверьте, что $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}$.

c. Покажите, что $\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-n}\searrow e^{-y^2}$ на $\mathbb{R}$ при $n\to+\infty$ и что

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-y^2}\,dy.$$

d. Получите следующую формулу Валлиса:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

5. Учитывая равенство (17), покажите, что

a. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2xy\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-y^2}$.

b. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin 2xy\,dx=e^{-y^2}\int\limits_0^{y}e^{t^2}\,dt$.

6. При условии $t > 0$ докажите тождество

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2}\,dx = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{x}\,dx,$$

используя то обстоятельство, что оба эти интеграла как функции параметра t удовлетворяют уравнению $\ddot{y}+y=1/t$ и стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

7. Покажите, что

$$\int_0^1 K(k)\,dk = \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi \quad \left(= \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx\right),$$

где $K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ — полный эллиптический интеграл первого рода

8. a. Считая, что $a > 0$ и $b > 0$ и используя равенство

$$\int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy}\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx,$$

вычислите последний интеграл.

b. При $a > 0$, $b > 0$ вычислите интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos x\,dx.$$

c. Используя интеграл Дирихле (13) и равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} \int_a^b \sin xy\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx,$$

вычислите последний интеграл.

9. a. Докажите, что при $k > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-kt}\sin t\,dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\,du = \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t}\sin t\,dt.$$

b. Покажите, что предыдущее равенство остается в силе и при значении $=0$.

c. Используя интеграл Эйлера — Пуассона (17), проверьте, что

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\,du$$

d. Используя последнее равенство и соотношения

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt, \qquad \int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt,$$

получите значение $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ интегралов Френеля

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx.$$

10. a. Используя равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$$

и обосновав возможность изменения порядка интегрирований в повторном интеграле, получите вновь найденное в примере 13 значение интеграла Дирихле (13).

b. Покажите, что при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\cos \beta x\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } \beta < \alpha, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{если } \beta = \alpha, \\ 0, & \text{если } \beta > \alpha. \end{cases}$$

Этот интеграл часто называют *разрывным множителем Дирихле.*

c. Считая $\alpha > 0$, $\beta > 0$, проверьте равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,\frac{\sin \beta x}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\beta, & \text{если } \beta \leqslant \alpha, \\ \frac{\pi}{2}\alpha, & \text{если } \alpha \geqslant \beta. \end{cases}$$

d. Докажите, что если числа $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ положительны и $\alpha > \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,\frac{\sin \alpha_1 x}{x}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin \alpha_n x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.$$

11. Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{F}(y) = \int\limits_a^{\omega} f(x, y)\,g(x)\,dx,$$

где g — локально интегрируемая на промежутке $[a, \omega[$ функция (значит, при любом $b \in [a, \omega[$ $g|_{[a, b]} \in \mathcal{R}[a, b]$). Пусть функция f удовлетворяет порознь условиям α) утверждений 5—8. Если в остальных условиях этих утверждений под знаком интеграла $f(x, y)$ заменить на $f(x, y)\cdot g(x)$, то получатся условия, при которых можно, используя задачу 6 из § 1 и дословно повторяя доказательства утверждений 5 — 8, заключить соответственно, что

a. $\mathcal{F} \in C[c, d]$.

b. $\mathcal{F} \in C^{(1)}[c, d]$, причем

$$\mathcal{F}'(y) = \int\limits_a^{\omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,g(x)\,dx.$$

c. $\mathcal{F} \in \mathcal{R}[c, d]$, причем

$$\int_c^d \mathcal{F}(y)\,dy = \int_a^\omega \left(\int_c^d f(x, y)\, g(x)\, dy\right) dx$$

d. $\mathcal{F}$ несобственно интегрируема на $[c, \tilde{\omega}[$, причем

$$\int_c^{\tilde{\omega}} \mathcal{F}(y)\,dy = \int_a^\omega \left(\int_c^{\tilde{\omega}} f(x, y)\, g(x)\, dy\right) dx.$$

Проверьте это

§ 3. Эйлеровы интегралы

В этом и следующем параграфах будет продемонстрировано приложение развитой выше теории к некоторым важным для анализа конкретным интегралам, зависящим от параметра.

Эйлеровыми интегралами первого и *второго рода* соответственно называют, следуя Лежандру, две следующие специальные функции:

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \tag{1}$$

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx. \tag{2}$$

Первую из них называют *бета-функцией*, а вторую, особенно часто используемую, — *гамма-функцией Эйлера*.

1. Бета-функция.

a. Область определения. Для сходимости интеграла (1) на нижнем пределе интегрирования необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\alpha > 0$. Аналогично, сходимости интеграла (1) в единице отвечает условие $\beta > 0$.

Таким образом, функция $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ определена при одновременном выполнении двух условий:

$$\alpha > 0 \quad \text{и} \quad \beta > 0.$$

Замечание. Мы здесь всюду считаем α и β действительными числами. Следует, однако, иметь в виду, что наиболее полная картина свойств функций B и Γ и наиболее глубокие приложения этих функций связаны с выходом в область комплексных значений параметров.

b. Симметричность. Проверим, что

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \mathrm{B}(\beta, \alpha). \tag{3}$$

◀ Для доказательства достаточно в интеграле (1) сделать замену переменной $x = 1 - t$. ▶

c. Формула понижения. Если $\alpha > 1$, то имеет место равенство

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 1} \mathrm{B}(\alpha - 1, \beta). \tag{4}$$

◀ Выполняя при $\alpha > 1$ и $\beta > 0$ интегрирование по частям и тождественные преобразования, получаем

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = -\frac{1}{\beta} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1 + \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}\,dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}\left((1-x)^{\beta-1} - (1-x)^{\beta-1}x\right)dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\mathrm{B}(\alpha-1, \beta) - \frac{\alpha-1}{\beta}\mathrm{B}(\alpha, \beta),$$

откуда и следует формула понижения (4). ▶

Учитывая формулу (3), можно теперь записать формулу понижения

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\beta - 1}{\alpha + \beta - 1} \mathrm{B}(\alpha, \beta - 1) \tag{4'}$$

по параметру β, считая, разумеется, что $\beta > 1$.

Непосредственно из определения функции B видно, что $\mathrm{B}(\alpha, 1) = \frac{1}{\alpha}$, поэтому при $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\mathrm{B}(\alpha, n) = \frac{n-1}{\alpha+n-1} \cdot \frac{n-2}{\alpha+n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(n-1)}{\alpha+n-(n-1)} \mathrm{B}(\alpha, 1) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+n-1)}. \tag{5}$$

В частности, при $m, n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{B}(m, n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}. \tag{6}$$

d. Другое интегральное представление функции B. Иногда бывает полезно следующее представление бета-функции:

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy. \tag{7}$$

◀ Оно получается из (1) заменой переменной $x = \frac{y}{1+y}$. ▶

2. Гамма-функция.

a. Область определения. Из формулы (2) видно, что задающий функцию Γ интеграл сходится в нуле лишь при $\alpha > 0$, а на бесконечности, за счет быстро убывающего множителя e^{-x}, сходится при любом значении $\alpha \in \mathbb{R}$.

Таким образом, функция Γ определена при $\alpha > 0$.

b. Гладкость и формула для производных. Функция Γ бесконечно дифференцируема, причем

$$\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\ln^n x e^{-x}\,dx. \tag{8}$$

◀ Проверим сначала, что при любом фиксированном значении $n\in\mathbb{N}$ интеграл (7) сходится равномерно относительно параметра α на каждом отрезке $[a, b]\subset]0, +\infty[$.

Если $0<a\leqslant\alpha$, то (поскольку $x^{a/2}\ln^n x\to 0$ при $x\to+0$) найдется число $c_n>0$ такое, что

$$|x^{\alpha-1}\ln^n x e^{-x}|<x^{\frac{a}{2}-1},$$

при $0<x\leqslant c_n$. Значит, на основании мажорантного признака равномерной сходимости можно заключить, что интеграл

$$\int_0^{c_n} x^{\alpha-1}\ln^n x e^{-x}\,dx$$

сходится равномерно по α на промежутке $[a, +\infty[$.

Если же $\alpha\leqslant b<+\infty$, то при $x\geqslant 1$

$$|x^{\alpha-1}\ln^n x e^{-x}|\leqslant x^{b-1}|\ln^n x|e^{-x},$$

и аналогично заключаем, что интеграл

$$\int_{c_n}^{+\infty} x^{\alpha-1}\ln^n x e^{-x}\,dx$$

сходится равномерно по α на промежутке $]0, b]$.

Совмещая эти выводы, получаем, что интеграл (7) сходится равномерно на любом отрезке $[a, b]\subset]0, +\infty[$.

Но при этих условиях дифференцирование под знаком интеграла (1) законно. Значит, на любом таком отрезке $[a, b]$, а следовательно и на всем промежутке $0<\alpha$, функция Γ бесконечно дифференцируема и справедлива формула (8). ▶

c. Формула понижения. Имеет место соотношение

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha), \tag{9}$$

называемое *формулой понижения* для гамма-функции.

◀ Интегрируя по частям, находим, что при $\alpha>0$

$$\Gamma(\alpha+1):=\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}\,dx=-x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx=$$

$$=\alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx=:\alpha\Gamma(\alpha). \ \blacktriangleright$$

Поскольку $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=1$, заключаем, что при $n\in\mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{10}$$

Таким образом, функция Γ оказалась тесно связанной с теоретико-числовой арифметической функцией $n!$

d. Формула Эйлера — Гаусса. Так обычно называют следующее равенство:

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\cdot\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}. \tag{11}$$

◀ Для его доказательства сделаем в интеграле (2) замену переменной $x=\ln\frac{1}{u}$ и получим новое интегральное представление функции Γ:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^1 \ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{u}\right)du. \tag{12}$$

В примере 3 § 3 гл. XVI было показано, что последовательность функций $f_n(u)=n(1-u^{1/n})$, монотонно возрастая, сходится на промежутке $0<u<1$ к функции $\ln\left(\frac{1}{u}\right)$ при $n\to\infty$. Используя следствие 2 из § 2 (см. также пример 10 из § 2), заключаем, что при $\alpha\geqslant 1$

$$\int_0^1 \ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{u}\right)du=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\int_0^1 (1-u^{1/n})^{\alpha-1}\,du. \tag{13}$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $u=v^n$, из (12), (13), (1), (3) и (5), получаем

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\int_0^1 v^{n-1}(1-v)^{\alpha-1}\,dv=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\mathrm{B}(n,\alpha)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\mathrm{B}(\alpha,n)=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\cdot\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}.\ ▶$$

Применяя к уже доказанному для $\alpha\geqslant 1$ соотношению $\Gamma(\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\mathrm{B}(\alpha,n)$ формулы понижения (4) и (9), убеждаемся в справедливости формулы (11) при всех $\alpha>0$. ▶

e. Формула дополнения. При $0<\alpha<1$ значения α и $1-\alpha$ аргумента функции Γ называют взаимно дополнительными, поэтому равенство

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\qquad(0<\alpha<1) \tag{14}$$

называют *формулой дополнения для гамма-функции.*

◀ Используя формулу Эйлера — Гаусса (11), после простых тождественных преобразований находим, что

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}\cdot n^{1-\alpha}\frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdot\ldots\cdot(n-\alpha)}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{1}{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{\alpha}{n-1}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\alpha}{n-1}\right)(n-\alpha)}\right)=$$
$$=\frac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)}.$$

Итак, при $0<\alpha<1$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{n^2}}. \tag{15}$$

Но имеет место классическое разложение

$$\sin\pi\alpha=\pi\alpha\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right). \tag{16}$$

(Сейчас мы не останавливаемся на его доказательстве, поскольку позже, при рассмотрении рядов Фурье, оно будет получено в качестве простого примера использования общей теории; см. гл. XVIII, § 2, пример 6.)

Сопоставляя соотношения (15) и (16), приходим к формуле (14). ▶

Из формулы (14), в частности, следует, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{17}$$

Заметим, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}x^{-1/2}e^{-x}\,dx=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,du,$$

и, таким образом, мы вновь получаем значение интеграла Эйлера — Пуассона:

$$\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,du=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

3. Связь между функциями B и Г. Сопоставляя формулы (6) и (10), можно заподозрить следующую взаимосвязь:

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{18}$$

между функциями B и Г. Докажем эту формулу.

◀ Заметим, что при $y>0$

$$\Gamma(\alpha)=y^{\alpha}\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-xy}\,dx;$$

поэтому справедливо также равенство

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\cdot y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}=y^{\alpha-1}\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dx,$$

используя которое с учетом формулы (7), получаем

$$\Gamma(\alpha+\beta)\cdot\mathrm{B}(\alpha,\ \beta)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\,y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\left(y^{\alpha-1}\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dx\right)dy\overset{!}{=}$$

$$\overset{!}{=}\int_{0}^{+\infty}\left(y^{\alpha-1}\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dy\right)dx=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\left(x^{\beta-1}e^{-x}\int_{0}^{+\infty}(xy)^{\alpha-1}e^{-(xy)}x\,dy\right)dx=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\left(x^{\beta-1}e^{-x}\int_{0}^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}\,du\right)dx=\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)$$

Нам остается объяснить отмеченное восклицательным знаком равенство. Вместо того чтобы объяснять законность перестановки указанных несобственных интегралов при любых $\alpha>0$ и $\beta>0$, воспользуемся примером 16 из § 2, где интересующее нас равенство доказано в условиях, которые отвечают значениям $\alpha>1$ и $\beta>1$ наших параметров α, β. Таким образом, при $\alpha>1$ и $\beta>1$ формула (18) доказана.

Используя теперь формулы понижения (4), (4′), (9), убеждаемся, что равенство (18) остается в силе при любых значениях $\alpha>0$ и $\beta>0$. ▶

4. Некоторые примеры. Рассмотрим в заключение небольшую группу взаимосвязных примеров, в которых встречаются введенные здесь специальные функции B и Г.

Пример 1.

$$\int_{0}^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\beta-1}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2}\right). \tag{19}$$

◀ Для доказательства достаточно в интеграле сделать замену переменной $\sin^2\varphi = x$. ▶

Используя формулу (18), интеграл (19) можно выразить через функцию Г. В частности, с учетом (17) получаем

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1}\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}. \tag{20}$$

Пример 2. Одномерный шар радиуса r — это попросту отрезок, а его (одномерный) объем $V_1(r)$ — это длина $2r$ такого отрезка. Итак, $V_1(r) = 2r$.

Если считать, что (($n-1$)-мерный) объем ($n-1$)-мерного шара радиуса r выражается формулой $V_{n-1}(r) = c_{n-1}r^{n-1}$, то, интегрируя по сечениям (см. пример 3 § 4 гл. XI), получаем

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} c_{n-1}(r^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dx = \left(c_{n-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n\varphi\, d\varphi\right)\cdot r^n,$$

т. е. $V_n(r) = c_n r^n$, где

$$c_n = 2c_{n-1}\int_0^{\pi/2} \cos^n\varphi\, d\varphi.$$

Благодаря соотношениям (20) последнее равенство можно переписать в виде

$$c_n = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}c_{n-1},$$

таким образом,

$$c_n = (\sqrt{\pi})^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}\cdot c_1$$

или, короче,

$$c_n = \pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}c_1.$$

Но $c_1 = 2$, а $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, поэтому

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

Следовательно,

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} r^n,$$

или, что то же самое,

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^n. \tag{21}$$

Пример 3. Из геометрических соображений ясно, что $dV_n(r) = S_{n-1}(r)\,dr$, где $S_{n-1}(r)$ — $(n-1)$-мерная площадь сферы, ограничивающей в $\mathbb{R}^n$ n-мерный шар радиуса r.

Таким образом, $S_{n-1}(r) = \frac{dV_n}{dr}(r)$ и с учетом формулы (21) получаем

$$S_{n-1}(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1}.$$

Задачи и упражнения

1. Покажите, что:

a. $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$.

b. $B(\alpha, 1-\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$.

c. $\frac{\partial B}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln x\,dx$.

d. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p\,dx}{(a+bx^q)^r} = \frac{a^{-r}}{q}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p+1}{q}} B\left(\frac{p+1}{q}, r-\frac{p+1}{q}\right)$.

e. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$.

f. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

g. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ $(0<\alpha<1)$.

h. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\ln^n x}{1+x}\,dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\right)$ $(0<\alpha<1)$.

1. Длина кривой, задаваемой в полярных координатах уравнением $r^n = a^n \cos n\varphi$, где $n \in \mathbb{N}$ и $a > 0$, выражается формулой $aB\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right)$.

2. Покажите, что:

a) $\Gamma(1) = \Gamma(2)$;

b) производная Γ' функции Γ в некоторой точке $x_0 \in]1, 2[$ обращается в нуль;

c) функция Γ' является монотонно возрастающей на промежутке $]0, +\infty[$;

d) функция Γ монотонно убывает на промежутке $]0, x_0]$ и возрастает на промежутке $[x_0, +\infty[$;

e) интеграл $\int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{u}\right)^{x-1} \ln \ln \frac{1}{u}\, du$ равен нулю при $x = x_0$;

f) $\Gamma(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$ при $\alpha \to +0$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\, dx = 1$.

3. *Формула Эйлера* $E := \prod\limits_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$.

a. Покажите, что $E^2 = \prod\limits_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right)$.

b. Проверьте, что $E^2 = \dfrac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n} \sin 2\frac{\pi}{n} \cdot \ldots \cdot \sin(n-1)\frac{\pi}{n}}$.

c. Исходя из тождества $\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(z - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$, получите при $z \to 1$ последовательно соотношение

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right),$$

а из него соотношение

$$n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}.$$

d. Используя последнее равенство, получите формулу Эйлера.

4. *Формула Лежандра* $\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\Gamma(2\alpha)$

a. Покажите, что $B(\alpha, \alpha) = 2\int\limits_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right)^{\alpha-1} dx$

b. Сделав в предыдущем интеграле замену переменной, докажите, что $B(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2^{2\alpha-1}} B\left(\frac{1}{2}, \alpha\right)$.

c. Получите теперь формулу Лежандра.

5. Сохраняя обозначения задачи 5 из § 1, укажите путь, на котором с использованием интегралов Эйлера может быть выполнена вторая, более деликатная часть указанной задачи.

a. Заметьте, что при $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ будет $\tilde{k}=k$ и

$$\tilde{E}=E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi, \qquad \tilde{K}=K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

b. После соответствующей замены переменных эти интегралы приводятся к виду, из которого следует, что при $k=1/\sqrt{2}$

$$K=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \quad 2E-K=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{2}\right).$$

c. Теперь получается, что при $k=1/\sqrt{2}$

$$E\tilde{K}+\tilde{E}K-K\tilde{K}=\pi/2.$$

6. *Интеграл Раабе* *) $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx$.

Покажите, что:

a. $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx=\int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,dx.$

b. $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx.$

c. $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx=\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\,dx-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

d. $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

e. $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx=\ln\sqrt{2\pi}.$

7. Используя равенство

$$\frac{1}{x^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} y^{s-1}e^{-xy}\,dy$$

и обосновав возможность изменения порядка соответствующих интегрирований, проверьте, что:

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^\alpha}\,dx=\frac{\pi a^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \quad (0<\alpha<1).$

---

*) Ж. Л. Раабе (1801—1859) — швейцарский математик и физик.

b. $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^{\beta}}\,dx = \frac{\pi b^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta)\sin\frac{\pi\beta}{2}} \quad (0<\beta<2)$$

c. Получите теперь еще раз значение интеграла Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ и значение интегралов Френеля $\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$, $\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$.

8. Покажите, что при $\alpha>1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}\,dx = \Gamma(\alpha)\cdot\zeta(\alpha),$$

где $\zeta(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ — *дзета-функция Римана*.

9. *Формула Гаусса*. В примере 6 § 3 гл. XVI была указана введенная Гауссом функция

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x) := 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n,$$

являющаяся суммой написанного гипергеометрического ряда. Оказывается имеет место следующая формула Гаусса:

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

a Раскладывая функцию $(1-tx)^{-\beta}$ в ряд, покажите, что при $\alpha>0$, $\gamma-\alpha>0$ и $0<x<1$ интеграл

$$P(x)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tx)^{-\beta}\,dt$$

можно представить в виде

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n\cdot x^n,$$

где $P_n=\frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta+n-1)}{n!}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+n)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)}$.

b. Покажите, что

$$P_n=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}.$$

c. Докажите теперь, что при $\alpha>0$, $\gamma-\alpha>0$ и $0<x<1$

$$P(x)=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\cdot F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x).$$

d. При дополнительном условии $\gamma-\alpha-\beta>0$ обоснуйте возможность перехода к пределу при $x\to 1-0$ в обеих частях последнего равенства и покажите, что

$$\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)}=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ 1),$$

откуда и следует формула Гаусса.

10. *Формула Стирлинга* *).

Покажите, что:

a. $\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{2m+1}$ при $|x|<1$

b. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\frac{1}{7}\frac{1}{(2n+1)^6}+\dots$

c. $1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)}$ при $n\in\mathbb{N}$.

d. $1<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}}{e}<\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}$.

e. $a_n=\frac{n!e^n}{n^{(n+1/2)}}$ — монотонно убывающая последовательность.

f. $b_n=a_ne^{-\frac{1}{12n}}$ — монотонно возрастающая последовательность.

g. $n!=cn^{n+1/2}e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$, где $0<\theta_n<1$, а $c=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

h. Из соотношения $\sin\pi x=\pi x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$ при $x=1/2$ вытекает формула Валлиса

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

i. Имеет место *формула Стирлинга*

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}},\quad 0<\theta_n<1$$

j. $\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$ при $x\to+\infty$.

§ 4. Свертка функций и начальные сведения об обобщенных функциях

1. Свертка в физических задачах (наводящие соображения). Разнообразные приборы и системы живой и неживой природы осуществляют свои функции, отвечая соответствующим сигналом $\tilde{f}$ на воздействие f. Иными словами, каждый такой прибор или

*) Д. Стирлинг (1692—1770) — шотландский математик

система является оператором A, преобразующим входной сигнал f в сигнал $\tilde{f}=Af$ на выходе Разумеется, у каждого такого оператора своя область воспринимаемых сигналов (область определения) и своя форма ответа на них (область значений). Удобной математической моделью для большого класса реальных процессов и аппаратов является линейный оператор A, сохраняющий сдвиги.

Определение 1. Пусть A — линейный оператор, действующий на линейном пространстве определенных на $\mathbb{R}$ вещественно- или комплекснозначных функций. Обозначим через T_{t_0} *оператор сдвига*, действующий на том же пространстве по закону

$$(\mathrm{T}_{t_0}f)(t):=f(t-t_0).$$

Говорят, что оператор A *инвариантен относительно сдвигов* (или *сохраняет сдвиги*), если для любой функции f из области определения оператора A справедливо равенство

$$A(\mathrm{T}_{t_0}f)=\mathrm{T}_{t_0}(Af).$$

Если t — время, то соотношение $A\circ\mathrm{T}_{t_0}=\mathrm{T}_{t_0}\circ A$ можно трактовать как предположение о том, что свойства прибора A неизменны во времени: реакции прибора на сигналы $f(t)$ и $f(t-t_0)$ отличаются только сдвигом на t_0 по времени и больше ничем.

Для любого прибора A возникают две следующие основные задачи: во-первых, предугадать реакцию $\tilde{f}$ прибора на произвольное входное воздействие f и, во-вторых, зная сигнал $\tilde{f}$ на выходе прибора, определить, если это возможно, поступивший на прибор входной сигнал f.

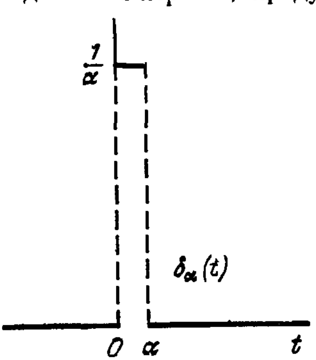

Рис. 100.

Сейчас на эвристическом уровне мы решим первую из этих двух задач применительно к инвариантному относительно сдвигов линейному оператору A. Простой, но очень важный факт состоит в том, что оказывается для описания отклика $\tilde{f}$ такого прибора A на любой входной сигнал f достаточно знать отклик E прибора A на импульсное воздействие δ.

Определение 2. Отклик $E(t)$ прибора A на единичное импульсное воздействие δ называют *аппаратной функцией прибора* (в оптике) или *импульсной переходной функцией прибора* (в электротехнике).

Мы будем, как правило, пользоваться более коротким термином «аппаратная функция».

Не вдаваясь пока в детали, скажем, что импульс имитируется, например, функцией $\delta_\alpha(t)$, изображенной на рис. 100, причем эта имитация считается все более точной по мере уменьшения длительности α «импульса» при сохранении его общей «энергии» $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$. Вместо ступенчатых функций для имитации импульса можно использовать гладкие функции (рис. 101) с соблюдением естественных условий:

$$f_\alpha \geqslant 0, \quad \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(t)\,dt = 1, \qquad \int_{U(0)} f_\alpha(t)\,dt \to 1 \text{ при } \alpha \to 0,$$

где $U(0)$ — произвольная окрестность точки $t = 0$.

Откликом прибора A на идеальный единичный импульс (обозначаемый вслед за Дираком через δ) следует считать функцию $E(t)$, к которой стремятся отклики прибора A на имитирующие импульс δ входные сигналы по мере того, как эта имитация улучшается.

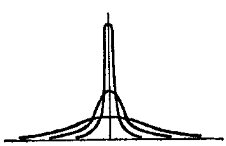

Рис. 101

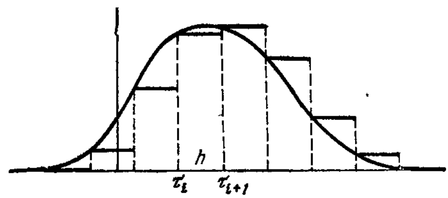

Рис. 102

Разумеется при этом подразумевается некоторая (не уточняемая пока) непрерывность оператора A, т. е. непрерывность изменения отклика $\tilde{f}$ прибора при непрерывном изменении входного воздействия f.

Например, если взять последовательность $\{\Delta_n(t)\}$ ступенчатых функций $\Delta_n(t) := \delta_{1/n}(t)$ (рис. 100), то, полагая $A\Delta_n =: E_n$, получаем $A\delta := E = \lim\limits_{n\to\infty} E_n = \lim\limits_{n\to\infty} A\Delta_n$.

Рассмотрим теперь входной сигнал f, рис. 102 и изображенную на этом же рисунке кусочно постоянную функцию $l_h(t) = \sum\limits_i f(\tau_i)\,\delta_h(t-\tau_i)\,h$. Поскольку $l_h \to f$ при $h \to 0$, то надо считать, что

$$\tilde{l}_h = Al_h \to Af = \tilde{f} \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Но если оператор A — линейный и сохраняющий сдвиги, то

$$\tilde{l}_h(t) = \sum_i f(\tau_i)\,E_h(t-\tau_i)\,h,$$

где $E_h = A\delta_h$. Таким образом, при $h \to 0$ окончательно получаем

$$\tilde{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\,E(t-\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

Формула (1) решает первую из двух указанных выше задач. Она представляет отклик $\tilde{f}(t)$ прибора A в виде специального интеграла, зависящего от параметра t. Этот интеграл полностью определяется входным сигналом $f(t)$ и аппаратной функцией $E(t)$ прибора A. С математической точки зрения прибор A и интеграл (1) просто одно и то же.

Отметим заодно, что задача определения входного сигнала f по выходу $\tilde{f}$ сводится теперь к решению относительно f интегрального уравнения (1).

Определение 3. *Сверткой функций* $u: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ и $v: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется функция $u * v: R \to \mathbb{C}$, определяемая соотношением

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}} u(y)\, v(x-y)\, dy, \tag{2}$$

в предположении, что указанный несобственный интеграл существует при всех $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, формула (1) утверждает, что отклик линейного прибора A, сохраняющего сдвиги, на входное воздействие, задаваемое функцией f, является сверткой $f * E$ функции f и аппаратной функции E прибора A.

2. Некоторые общие свойства свертки. Рассмотрим теперь с математической точки зрения основные свойства свертки.

а. Достаточные условия существования. Напомним сначала некоторые определения и обозначения.

Пусть $f: G \to \mathbb{C}$ — вещественно или комплекснозначная функция, определенная на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}$.

Функция f называется *локально интегрируемой на* G, если любая точка $x \in G$ имеет окрестность $U(x) \subset G$, в которой функция $f|_{U(x)}$ абсолютно интегрируема хотя бы в несобственном смысле. В частности, если $G = \mathbb{R}$ и f локально ограничена, условие локальной интегрируемости функции f, очевидно, равносильно тому, что $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}[a, b]$ для любого отрезка $[a, b]$.

Носителем функции f (обозначение $\operatorname{supp} f$) называется замыкание в G множества $\{x \in G \mid f(x) \neq 0\}$.

Функция f называется *финитной* (в G), если ее носитель — компакт.

Множество функций $f: G \to \mathbb{C}$, имеющих в G непрерывные производные до порядка m $(0 \leqslant m \leqslant \infty)$ включительно, принято обозначать символом $C^{(m)}(G)$, а его подмножество, состоящее из финитных функций, — символом $C_0^{(m)}(G)$. В случае, когда $G = \mathbb{R}$, вместо $C^{(m)}(\mathbb{R})$ и $C_0^{(m)}(\mathbb{R})$ принято употреблять сокращения $C^{(m)}$ и $C_0^{(m)}$ соответственно.

Укажем теперь наиболее часто встречающиеся случаи свертки функций, в которых без труда обосновывается ее существование.

Утверждение 1. *Каждое из перечисленных ниже трех условий является достаточным для существования свертки $u * v$ локально интегрируемых функций $u: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ и $v: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.*

1) *Функции* $|u|$ *и* $|v|$ *интегрируемы в квадрате на* $\mathbb{R}$.

2) *Одна из функций* $|u|$, $|v|$ *интегрируема на* $\mathbb{R}$, *а другая ограничена на* $\mathbb{R}$.

3) *Одна из функций* u, v *финитна.*

◀ 1) По неравенству Коши — Буняковского

$$\int_{\mathbb{R}} |u(y)\, v(x-y)|\, dy \leqslant \int_{\mathbb{R}} |u|^2(y)\, dy \int_{\mathbb{R}} |v|^2(x-y)\, dy,$$

откуда и следует существование интеграла (2), поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v|^2(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |v|^2(y)\, dy.$$

2) Если, например, $|u|$ — интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, а $|v| \leqslant M$ на $\mathbb{R}$, то

$$\int_{\mathbb{R}} |u(y)\, v(x-y)|\, dy \leqslant M \int_{\mathbb{R}} |u|(y)\, dy < +\infty.$$

3) Пусть $\operatorname{supp} u \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$. Тогда, очевидно,

$$\int_{\mathbb{R}} u(y)\, v(x-y)\, dy = \int_a^b u(y)\, v(x-y)\, dy.$$

Поскольку u и v локально интегрируемы, последний интеграл существует при любом значении $x \in \mathbb{R}$.

Случай, когда финитной является функция v, сводится к разобранному заменой переменной $x-y=z$. ▶

b. Симметричность.

Утверждение 2. *Если свертка* $u*v$ *существует, то существует также свертка* $v*u$ *и имеет место равенство*

$$u*v = v*u. \tag{3}$$

◀ Выполнив в интеграле (2) замену переменной $x-y=z$, получаем

$$u*v(x) := \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\, v(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} v(z)\, u(x-z)\, dz =: v*u(x). \ ▶$$

c. Сохранение сдвигов. Пусть, как и выше, T_{x_0} — оператор сдвига, т. е. $(T_{x_0}f)(x) = f(x-x_0)$.

Утверждение 3. *Если свертка* $u*v$ *функций* u *и* v *существует, то справедливы следующие равенства:*

$$T_{x_0}(u*v) = T_{x_0}u * v = u * T_{x_0}v. \tag{4}$$

◀ Если вспомнить физический смысл формулы (1), то первое из написанных равенств становится очевидным, а второе тогда получается из симметричности свертки. Проведем, однако, формальную проверку первого равенства:

$$(\mathrm{T}_{x_0}(u*v))(x):=(u*v)(x-x_0):=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}u(y)\,v(x-x_0-y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}u(y-x_0)\,v(x-y)\,dy=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(T_{x_0}u)(y)\,v(x-y)\,dy=:((\mathrm{T}_{x_0}u)*v)(x).\ \blacktriangleright$$

d. Дифференцирование свертки. Свертка функций является интегралом, зависящим от параметра, и ее дифференцирование проводится в соответствии с общими законами дифференцирования таких интегралов, разумеется, при выполнении соответствующих условий.

Условия, при которых свертка (2) функций u и v непрерывно дифференцируема, заведомо выполнены, если, например, u — непрерывная, а v — гладкая функция и одна из функций u, v — финитна.

◀ Действительно, если ограничить изменение параметра любым конечным промежутком, то при указанных условиях весь интеграл (2) сведется к интегралу по некоторому, не зависящему от x конечному отрезку. А такой интеграл уже можно дифференцировать по параметру в соответствии с классическим правилом Лейбница. ▶

Вообще справедливо следующее

Утверждение 4. *Если u — локально интегрируемая функция, а v — финитная функция класса $C_0^{(m)}(0)$ $(0\leqslant m\leqslant+\infty)$, то $(u*v)\in C^{(m)}$, причем* *)

$$D^k(u*v)=u*(D^kv). \tag{5}$$

◀ Когда u — непрерывная функция, утверждение непосредственно следует из только что доказанного выше. В общем виде оно получается, если еще принять во внимание наблюдение, сделанное в задаче 6 § 1. ▶

Замечание 1. Ввиду коммутативности свертки (формула (3)) утверждение 4, разумеется, останется в силе, если в нем поменять местами u и v, сохранив, однако, левую часть равенства (5).

Формула (5) показывает, что свертка коммутирует с оператором дифференцирования, подобно тому как она коммутирует с оператором сдвига (формула (4)). Но если формула (4) симметрична по u и v, то в правой части формулы (5) u и v, вообще говоря, нельзя поменять местами, поскольку функция u может просто не иметь соответствующей производной. То, что свертка $u*v$, как видно из (5), при этом все же может оказаться дифференцируемой функцией, наводит на мысль, что приведенные в утверждении 4 условия являются достаточными, но не необходимыми для дифференцируемости свертки.

*) Здесь D — оператор дифференцирования и, как обычно, $D^kv=v^{(k)}$.

Пример 1. Пусть f — локально интегрируемая функция, а δ_α — «ступенька», изображенная на рис. 100. Тогда

$$(f*\delta_\alpha)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\delta_\alpha(x-y)\,dy=\frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x} f(y)\,dy, \tag{6}$$

и, следовательно, в любой точке непрерывности функции f свертка $f*\delta_\alpha$ уже оказывается дифференцируемой — усредняющее действие интеграла.

Условия дифференцируемости свертки, сформулированные в утверждении 4, являются, однако, вполне достаточными практически для всех встречающихся случаев применения формулы (5). По этой причине мы не будем здесь заниматься дальнейшим их уточнением, а предпочтем продемонстрировать некоторые новые красивые возможности, которые открываются благодаря обнаруженному сглаживающему действию свертки.

3. Дельтаобразные семейства функций и аппроксимационная теорема Вейерштрасса. Заметим, что интеграл в соотношении (6) дает среднее значение функции f на промежутке $[x-\alpha, x]$, поэтому, если f непрерывна в точке x, то, очевидно, $(f*\delta_\alpha)(x)\to f(x)$ при $\alpha\to 0$. Последнее соотношение, следуя наводящим соображениям п. 1, относящимся к представлению о δ-функции, хотелось бы записать в виде предельного равенства

$$(f*\delta)(x)=f(x),\ \text{если } f \text{ непрерывна в } x. \tag{7}$$

Это равенство показывает, что δ-функцию можно трактовать как единичный (нейтральный) элемент по отношению к операции свертки. Равенство (7) можно считать вполне осмысленным, если будет показано, что любое семейство функций, сходящихся к δ-функции, обладает тем же свойством, что и рассмотренное в (6) специальное семейство δ_α.

Перейдем к точным формулировкам и введем следующее полезное

Определение 4. Семейство $\{\Delta_\alpha,\ \alpha\in A\}$ функций $\Delta_\alpha\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, зависящих от параметра $\alpha\in A$, называют *δ-образным* или *аппроксимативной единицей* при базе $\mathcal{B}$ в A, если выполнены следующие три условия:

a) все функции семейства неотрицательны $(\Delta_\alpha(x)\geqslant 0)$;

b) для любой функции Δ_α семейства $\int\limits_{\mathbb{R}}\Delta_\alpha(x)\,dx=1$;

c) для любой окрестности U точки $0\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_U\Delta_\alpha(x)\,dx=1$.

Последнее условие с учетом первых двух, очевидно, равносильно тому, что $\lim\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus U}\Delta_\alpha(x)\,dx=0$.

Рассмотренное в п. 1 и примере 1 исходное семейство «ступенек» δ_α, конечно, является δ-образным при $\alpha\to 0$. Приведем другие примеры δ-образных семейств функций.

Пример 2. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — произвольная неотрицательная интегрируемая на $\mathbb{R}$ финитная функция такая, что $\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx=1$. При $\alpha>0$ построим функции $\Delta_\alpha(x):=\frac{1}{\alpha}\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Семейство этих функций при $\alpha\to+0$, очевидно, является аппроксимативной единицей (см. рис. 101).

Пример 3. Рассмотрим последовательность функций

$$\Delta_n(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x^2)^n}{\int\limits_{|x|<1}(1-x^2)^n\,dx} & \text{при}\quad |x|\le 1,\\[2ex] 0 & \text{при}\quad |x|>1.\end{cases}$$

Для того чтобы установить δ-образность этой последовательности, надо лишь проверить, что, кроме условий a), b) для нее при базе $n\to\infty$ выполнено и условие c) определения 4. Но ведь при любом $\varepsilon\in\,]0,\ 1]$

$$0\le\int\limits_\varepsilon^1(1-x^2)^n\,dx\le\int\limits_\varepsilon^1(1-\varepsilon^2)^n\,dx=$$
$$=(1-\varepsilon^2)^n(1-\varepsilon)\to 0,\quad \text{когда}\quad n\to\infty,$$

откуда и следует, что условие c) выполнено.

Пример 4. Пусть

$$\Delta_n(x)=\begin{cases}\cos^{2n}(x)\Big/\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx & \text{при}\quad |x|\le\pi/2,\\[2ex] 0 & \text{при}\quad |x|>\pi/2.\end{cases}$$

Как и в примере 3, здесь остается проверить лишь условие c). Заметим сначала, что

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n}>\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2n}.$$

С другой стороны, при $\varepsilon\in\,]0,\ \pi/2[$

$$\int\limits_\varepsilon^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx\le\int\limits_\varepsilon^{\pi/2}\cos^{2n}\varepsilon\,dx<\frac{\pi}{2}(\cos\varepsilon)^{2n}.$$

Сопоставляя полученные неравенства, заключаем, что, каково бы ни было число $\varepsilon\in\,]0,\ \pi/2]$,

$$\int\limits_\varepsilon^{\pi/2}\Delta_n(x)\,dx\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty,$$

откуда и следует, что условие c) определения 4 выполнено.

Определение 5. Будем говорить, что функция $f: G \to \mathbb{C}$ *равномерно непрерывна на множестве* $E \subset G$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\rho > 0$ такое, что при любом $x \in E$ и любом $y \in G$ из ρ-окрестности $U_G^{\rho}(x)$ точки x в G выполнено соотношение $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

В частности, если $E = G$, мы возвращаемся к определению функции, равномерно непрерывной на всей своей области определения.

Теперь докажем следующее основное

Утверждение 5. *Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — ограниченная функция, а $\{\Delta_\alpha, \alpha \in A\}$ — δ-образное семейство функций при $\alpha \to \omega$. Если при любом $\alpha \in A$ свертка $f * \Delta_\alpha$ существует и функция f равномерно непрерывна на множестве $E \subset \mathbb{R}$, то*

$$(f * \Delta_\alpha)(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } E \text{ при } \alpha \to \omega.$$

Итак, утверждается, что семейство функций $f * \Delta_\alpha$ равномерно сходится к функции f на множестве E ее равномерной непрерывности. В частности, если E состоит только из одной точки x, условие равномерной непрерывности f на E сводится к условию непрерывности функции f в точке x, и мы получаем, что $(f * \Delta_\alpha)(x) \to f(x)$ при $\alpha \to \omega$. Это и послужило нам в свое время поводом для записи соотношения (7).

Докажем утверждение 5.

◀ Пусть $|f(x)| \leq M$ на $\mathbb{R}$. По числу $\varepsilon > 0$ подберем в соответствии с определением 5 число $\rho > 0$ и обозначим через $U(0)$ ρ-окрестность нуля в $\mathbb{R}$.

Учитывая симметричность свертки, получаем следующие оценки, справедливые одновременно для всех точек $x \in E$:

$$|(f * \Delta_\alpha)(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\Delta_\alpha(y)\,dy - f(x) \right| =$$
$$= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x))\Delta_\alpha(y)\,dy \right| \leq$$
$$\leq \int_{U(0)} |f(x-y) - f(x)|\,\Delta_\alpha(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}\setminus U(0)} |f(x-y) - f(x)|\,\Delta_\alpha(y)\,dy <$$
$$< \varepsilon \int_{U(0)} \Delta_\alpha(y)\,dy + 2M \int_{\mathbb{R}\setminus U(0)} \Delta_\alpha(y)\,dy \leq \varepsilon + 2M \int_{\mathbb{R}\setminus U(0)} \Delta_\alpha(y)\,dy.$$

При $\alpha \to \omega$ последний интеграл стремится к нулю, значит, начиная с какого-то момента, при всех $x \in E$ будет выполнено неравенство

$$|(f * \Delta_\alpha)(x) - f(x)| < 2\varepsilon,$$

что и завершает доказательство утверждения 5. ▶

Следствие 1. *Любую финитную непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию можно равномерно аппроксимировать финитными бесконечно дифференцируемыми функциями.*

◀ Проверим, что в указанном смысле $C_0^{(\infty)}$ всюду плотно в C_0. Пусть, например,

$$\varphi(x)=\begin{cases} k\cdot\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{при } |x|<1,\\ 0 & \text{при } |x|\geqslant 1,\end{cases}$$

где коэффициент k выбран так, что $\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx=1$.

Функция φ финитна и бесконечно дифференцируема. В таком случае семейство бесконечно дифференцируемых функций $\Delta_\alpha = \frac{1}{\alpha}\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, как отмечалось в примере 2, является δ-образным при $\alpha\to+0$. Если $f\in C_0$, то ясно, что и $f*\Delta_\alpha\in C_0$. Кроме того, по утверждению 4 $f*\Delta_\alpha\in C_0^{(\infty)}$. Наконец, из утверждения 5 вытекает, что $f*\Delta_\alpha\rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$ при $\alpha\to+0$. ▶

Замечание 2. Если рассматриваемая функция $f\in C_0$ принадлежит классу $C_0^{(m)}$, то, каково бы ни было значение $n\in\{0, 1, \ldots, m\}$, можно гарантировать, что $(f*\Delta_\alpha)^{(n)}\rightrightarrows f^{(n)}$ на $\mathbb{R}$ при $\alpha\to+0$.

◀ Действительно, в этом случае $(f*\Delta_\alpha)^{(n)}=f^{(n)}*\Delta_\alpha$ (см. утверждение 4 и замечание 1). Остается сослаться на доказанное следствие 1. ▶

Следствие 2 (аппроксимационная теорема Вейерштрасса). *Каждую непрерывную на отрезке функцию можно равномерно приблизить на этом отрезке алгебраическим многочленом.*

◀ Поскольку при линейной замене переменной многочлен переходит в многочлен, а непрерывность и равномерность аппроксимации функций сохраняются, следствие 2 достаточно проверить на любом удобном нам отрезке $[a, b]\subset\mathbb{R}$. Будем поэтому считать, что $0<a<b<1$, и пусть $\rho=\min\{a, 1-b\}$. Заданную нам функцию $f\in C[a, b]$ продолжим до непрерывной на $\mathbb{R}$ функции F, полагая $F(x)=0$ при $x\in\mathbb{R}\setminus]0, 1[$ и, например, линейно сопрягая 0 с $f(a)$, $f(b)$ с 0 на участках $[0, a]$ и $[b, 1]$ соответственно.

Если теперь взять δ-образную последовательность функций Δ_n из примера 3, то на основании утверждения 5 можно заключить, что $F*\Delta_n\rightrightarrows f=F|_{[a,b]}$ на $[a, b]$ при $n\to\infty$. Но при $x\in[a, b]\subset[0, 1]$

$$F*\Delta_n(x):=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(y)\,\Delta_n(x-y)\,dy=\int\limits_0^1 F(y)\,\Delta_n(x-y)\,dy=$$
$$=\int\limits_0^1 F(y)\,p_n\cdot(1-(x-y)^2)^n\,dy=\int\limits_0^1 F(y)\left(\sum_{k=0}^{n}a_k(y)\,x^{2k}\right)dy=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\int\limits_0^1 F(y)\,a_k(y)\,dy\right)x^{2k}.$$

Последнее выражение является многочленом $P_{2n}(x)$ степени $2n$, и мы показали, что $P_{2n} \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ при $n \to \infty$. ▶

Замечание 3. Несколько развив проведенные рассуждения, можно показать, что теорема Вейерштрасса остается в силе, даже если отрезок $[a, b]$ заменить произвольным, лежащим в $\mathbb{R}$ компактом.

Замечание 4. Нетрудно также проверить, что для любого открытого в $\mathbb{R}$ множества G и любой функции $f \in C^{(m)}(G)$ существует последовательность $\{P_k\}$ полиномов такая, что при каждом $n \in \{0, 1, \ldots, m\}$ $P_k^{(n)} \rightrightarrows f^{(n)}$ на любом компакте $\mathcal{K} \subset G$, когда $k \to \infty$.

Если, кроме того, множество G ограничено и $f \in C^{(m)}(\bar{G})$, то можно добиться, чтобы $P_k^{(n)} \rightrightarrows f^{(n)}$ на $\bar{G}$ при $k \to \infty$.

Замечание 5. Подобно тому, как для доказательства следствия 2 была использована δ-образная последовательность примера 3, можно использовать последовательность из примера 4 и доказать, что любая 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$ равномерно приближается тригонометрическими полиномами вида

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Выше использовались лишь δ-образные семейства финитных функций. Следует, однако, иметь в виду, что во многих случаях важную роль играют δ-образные семейства не финитных функций Приведем только два примера.

Пример 5. Семейство функций $\Delta_y(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{x^2+y^2}$ при $y \to +0$ является δ-образным на $\mathbb{R}$, так как $\Delta_y(x) > 0$ при $y > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_y(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{x=-\infty}^{+\infty} = 1$$

и при любом $\rho > 0$ справедливо соотношение

$$\int_{-\rho}^{\rho} \Delta_y(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\rho}{y} \to 1,$$

когда $y \to +0$.

Если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная и ограниченная функция, то функция

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)\, y}{(x-\xi)^2 + y^2}\, d\xi, \tag{8}$$

представляющая собой свертку $f * \Delta_y$, определена при любых $x \in \mathbb{R}$ и $y > 0$.

Интеграл (8), называемый *интегралом Пуассона для полуплоскости*, как легко проверить (используя мажорантный признак равномерной сходимости), является ограниченной бесконечно дифференцируемой функцией в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$. Дифференцируя под знаком интеграла, убеждаемся, что при $y > 0$

$$\Delta y := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f * \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Delta_y = 0,$$

т. е. u — гармоническая функция.

На основании утверждения 5 можно гарантировать также, что $u(x, y) \to f(x)$ при $y \to 0$. Таким образом, интеграл (8) решает задачу построения ограниченной функции, гармонической в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ и принимающей заданные граничные значения f на $\partial\mathbb{R}^2_+$.

Пример 6. Семейство функций $\Delta_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ является δ-образным на $\mathbb{R}$ при $t \to +0$. Действительно, $\Delta_t(x) > 0$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t(x) = 1$, поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\,dv = \sqrt{\pi}$ (интеграл Эйлера — Пуассона); наконец, при любом $\rho > 0$ выполнено соотношение

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\rho/2\sqrt{t}}^{\rho/2\sqrt{t}} e^{-v^2}\,dv \to 1, \text{ когда } t \to +0.$$

Если f — непрерывная и, например, ограниченная функция на $\mathbb{R}$, то функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi, \tag{9}$$

представляющая собой свертку $f * \Delta_t$, очевидно, бесконечно дифференцируема при $t > 0$.

Дифференцируя под знаком интеграла при $t > 0$, получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f * \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Delta_t = 0,$$

т. е. функция u удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности с начальным условием $u(x, 0) = f(x)$. Последнее равенство следует трактовать как предельное соотношение $u(x, t) \to f(x)$ при $t \to +0$, вытекающее из утверждения 5.

✱ 4. Начальные представления о распределениях.

а. Определение обобщенных функций. В п. 1 настоящего параграфа мы на эвристическом уровне вывели формулу (1), дающую возможность определить отклик линейного преобразователя A на входной сигнал f по известной аппаратной функции E прибора A. При определении аппаратной функции прибора существенно использовалось некоторое интуитивное представление о единичном импульсном воздействии и описывающей его δ-функции. Ясно, однако, что δ-функция на самом-то деле не является функцией в классическом понимании этого термина, поскольку она должна обладать следующим противоречивым с классической точки зрения набором свойств: $\delta(x) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$; $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$; $\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x)\, dx = 1$.

Понятия, связанные с линейными операторами, сверткой, δ-функцией и аппаратной функцией прибора приобретают точные математические описания в так называемой теории обобщенных функций или, иначе, теории распределений. Исходные посылки этой теории и начальные сведения о все шире используемом ее аппарате мы собираемся сейчас изложить.

П р и м е р 7. Рассмотрим материальную точку массы m, способную перемещаться вдоль оси и связанную с началом координат упругой пружиной; k — коэффициент упругости пружины. На покоящуюся в начале координат точку начинает действовать зависящая от времени сила $f(t)$, смещающая точку вдоль оси. В силу закона Ньютона

$$m\ddot{x} + kx = f, \tag{10}$$

где $x(t)$ — координата точки (смещение от положения равновесия) в момент t.

При указанных условиях функция $x(t)$ однозначно определяется функцией f и решение $x(t)$ дифференциального уравнения (10), очевидно, линейно зависит от его правой части f. Таким образом, мы имеем дело с линейным оператором $f \overset{A}{\longmapsto} x$, обратным к дифференциальному оператору $x \overset{B}{\longmapsto} f$ $\left(B = m\dfrac{d^2}{dt^2} + k\right)$, связывающему $x(t)$ и $f(t)$ соотношением $Bx = f$. Поскольку оператор A, очевидно, сохраняет сдвиги по времени, то, чтобы найти отклик $x(t)$ описанной механической системы на функцию $f(t)$, достаточно ввиду формулы (1) знать отклик на единичное импульсное воздействие δ, т. е. достаточно знать (так называемое *фундаментальное*) решение E уравнения

$$m\ddot{E} + kE = \delta. \tag{11}$$

Соотношение (11) не вызвало бы вопроса, если бы δ действительно обозначало функцию. Однако пока равенство (11) неясно. Но формально неясно и фактически неверно — совсем разные ситуации. В нашем случае надо лишь уяснить смысл равенства (11).

Один путь к такому разъяснению нам уже знаком: δ можно понимать как имитирующее δ-функцию δ-образное семейство классических функций $\Delta_\alpha(t)$, а E — как предел, к которому стремятся решения $E_\alpha(t)$ уравнения

$$m\ddot{E}_\alpha + kE_\alpha = \Delta_\alpha \tag{10'}$$

при соответствующем изменении параметра α.

Другой, имеющий свои значительные преимущества подход к обсуждаемому вопросу состоит в принципиальном расширении представления о функции. Он исходит из того, что вообще объекты наблюдения характеризуются их взаимодействием с другими («пробными») объектами. Так и функцию предлагается рассматривать не как набор значений в различных точках, а как объект, способный определенным образом действовать на другие (пробные) функции. Конкретизируем это пока слишком общее высказывание.

Пример 8. Пусть $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. В качестве пробных возьмем функции класса C_0 (непрерывные финитные на $\mathbb{R}$). Функция f порождает следующий, действующий на C_0 функционал

$$\langle f, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{12}$$

Используя δ-образные семейства финитных функций, легко понять, что $\langle f, \varphi\rangle \equiv 0$ на C_0 в том и только в том случае, когда $f(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$.

Таким образом, каждая функция $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ порождает в силу (12) линейный функционал $A\colon C_0 \to \mathbb{R}$, и, подчеркнем, при этом различным функциям f_1, f_2 соответствуют различные функционалы A_{f_1}, A_{f_2}.

Значит, формула (12) осуществляет вложение (инъективное отображение) множества $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ функций в множество $\mathscr{L}(C_0, \mathbb{R})$ линейных функционалов на C_0 и, следовательно, каждую функцию $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ можно интерпретировать как некоторый функционал $A_f \in \mathscr{L}(C_0, \mathbb{R})$.

Если вместо множества $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ непрерывных функций рассмотреть множество функций, локально интегрируемых на $\mathbb{R}$, то по той же формуле (12) получается отображение указанного множества в пространство $\mathscr{L}(C_0, \mathbb{R})$. При этом $(\langle f, \varphi\rangle \equiv 0$ на $C_0) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow (f(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции f на $\mathbb{R}$, т е. $f(x) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R})$ Значит, в рассматриваемом случае получается вложение в $\mathscr{L}(C_0, \mathbb{R})$ классов эквивалентных функций, если в один класс отнести локально интегрируемые функции, отличающиеся лишь на множестве меры нуль.

Итак, локально интегрируемые на $\mathbb{R}$ функции f (точнее, классы их эквивалентности) в силу формулы (12) можно интерпретировать как линейные функционалы $A_f \in \mathscr{L}(C_0, \mathbb{R})$. Осуществляемое по формуле (12) отображение $f \longmapsto A_f = \langle f, \cdot\rangle$ локально интегрируемых функций в пространство $\mathscr{L}(C_0, \mathbb{R})$ не является отображением на все $\mathscr{L}(C_0, \mathbb{R})$, поэтому, интерпретируя функции как элементы $\mathscr{L}(C_0, \mathbb{R})$ (т. е. как функционалы), мы, кроме классических функций, интерпретируемых как функционалы вида (12), получим и новые функции (функционалы), не имеющие прообраза в классических функциях.

Пример 9. *Функционал* $\delta \in \mathscr{L}(C_0, \mathbb{R})$ определяется соотношением

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \delta(\varphi) := \varphi(0), \tag{13}$$

которое должно быть выполнено для любой функции $\varphi \in C_0$.

Можно проверить (см. задачу 7), что никакая локально интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция f неспособна представить функционал δ в виде (12).

Итак, мы вложили множество классических локально интегрируемых функций в более широкое множество линейных функционалов. Эти линейные функционалы и называют обобщенными функциями или распределениями (точное определение дано ниже). Распространенный термин «распределение» имеет физическое происхождение.

Пример 10. Пусть на $\mathbb{R}$ распределена единичная масса (или единичный заряд). Если это распределение достаточно регулярно, в том смысле, что оно имеет, например, непрерывную или интегрируемую на $\mathbb{R}$ плотность $\rho(x)$, то взаимодействие массы M с другими объектами, описываемыми функциями $\varphi \in C_0^{(\infty)}$, может задаваться в виде функционала

$$M(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Если распределение сингулярно, например вся масса M сосредоточена в одной точке, то, «размазывая» массу и интерпретируя предельную точечную ситуацию с помощью δ-образного семейства регулярных распределений, получаем, что взаимодействие массы M с указанными выше другими объектами должно выражаться формулой

$$M(\varphi) = \varphi(0),$$

показывающей, что такое распределение массы на $\mathbb{R}$ следует отождествить с δ-функцией (13) на $\mathbb{R}$.

Проведенные предварительные рассмотрения делают осмысленным следующее общее

Определение 6. Пусть P — линейное пространство функций, называемое в дальнейшем *пространством основных* или *пробных функций* с определенной в P сходимостью функций.

Пространством обобщенных функций или *распределений* над P назовем линейное пространство P' линейных непрерывных (вещественно- или комплекснозначных) функционалов на P. При этом предполагается, что каждый элемент $f \in P$ порождает некоторый функционал $A_f = \langle f, \cdot \rangle \in P'$ и что отображение $f \to A_f$ является непрерывным вложением P в P', если сходимость в P' вводится как *слабая* («поточечная») *сходимость функционалов*, т. е.

$$P' \ni A_n \to A \in P' := \forall \varphi \in P \quad (A_n(\varphi) \to A(\varphi)).$$

Уточним это определение в конкретном случае, когда P есть линейное пространство $C_0^{(\infty)}(G, \mathbb{C})$ бесконечно дифференцируемых финитных в G функций, где G — произвольное открытое подмножество $\mathbb{R}$ (быть может, и совпадающее с $\mathbb{R}$).

Определение 7 (*пространств* $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$). *Сходимость в* $C_0^{(\infty)}(G, \mathbb{C})$ введем следующим образом: последовательность $\{\varphi_n\}$ функций $\varphi_n \in C_0^{(\infty)}(G, \mathbb{C})$ будет считаться сходящейся к функции $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G, \mathbb{C})$, если существует компакт $\mathscr{K} \subset G$, в котором содержатся носители всех функций последовательности $\{\varphi_n\}$ и при любом значении $m = 0, 1, 2, \ldots$ $\varphi_n^{(m)} \rightrightarrows \varphi^{(m)}$ на $\mathscr{K}$ (а значит, и на G), когда $n \to \infty$.

Получаемое при этом линейное пространство с заданной в нем сходимостью принято обозначать символом $\mathscr{D}(G)$, а когда $G = \mathbb{R}$ — символом $\mathscr{D}$.

Соответствующее этому пространству основных (пробных) функций пространство обобщенных функций (распределений) обозначают символом $\mathscr{D}'(G)$ или $\mathscr{D}'$ соответственно.

В этом и следующем параграфах мы не будем рассматривать никаких других обобщенных функций, кроме элементов введенного пространства $\mathscr{D}'(G)$, поэтому без специальных оговорок будем употреблять термин распределение или обобщенная функция, имея в виду элементы $\mathscr{D}'(G)$.

Определение 8. Распределение $F \in \mathscr{D}'(G)$ называется *регулярным*, если его можно представить в виде

$$F(\varphi) = \int_G f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(G),$$

где f — локально интегрируемая в G функция.

Нерегулярные распределения называют *сингулярными распределениями* или *сингулярными обобщенными функциями*.

В соответствии с этим определением δ-функция (из примера 9) является сингулярной обобщенной функцией.

Действие обобщенной функции (распределения) F на основную (пробную) функцию φ, т. е. спаривание F и φ будем, как и прежде, обозначать одним из двух равнозначных символов $F(\varphi)$ или $\langle F, \varphi \rangle$.

Прежде чем переходить к техническому аппарату, связанному с обобщенными функциями, ради которого мы и привели определение обобщенной функции, отметим, что само понятие обобщенной функции, как и большинство математических понятий, имело определенный период внутриутробного развития, когда оно лишь неявно зарождалось в трудах ряда математиков.

Физики, вслед за Дираком, уже в конце двадцатых — начале тридцатых годов активно использовали δ-функцию и оперировали с сингулярными обобщенными функциями, не смущаясь отсутствием должной математической теории.

В явном виде идея обобщенной функции была высказана С. Л. Соболевым *), заложившим в середине тридцатых годов математические основы теории обобщенных функций. Современное состояние аппарата теории распределений в значительной степени связано с выполненными в конце сороковых годов работами Л. Шварца **). Сказанное поясняет, почему, например, пространство $\mathcal{D}'$ обобщенных функций часто называют *пространством обобщенных функций Соболева — Шварца.*

Изложим теперь некоторые элементы аппарата теории распределений. Развитие и расширение использования этого аппарата продолжается и в наши дни, в основном в связи с потребностями теории дифференциальных уравнений, уравнений математической физики и их приложений.

Для упрощения записи мы будем рассматривать дальше только обобщенные функции класса $\mathcal{D}'$, хотя все их свойства, как будет видно из определений и доказательств, остаются в силе для распределений любого класса $\mathcal{D}'(G)$, где G — произвольное открытое подмножество $\mathbb{R}$.

Действия с распределениями определяются, исходя из интегральных соотношений, справедливых для классических функций, т. е. для регулярных обобщенных функций.

b. Умножение распределения на функцию. Если f — локально интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, а $g \in C^{(\infty)}$, то при любой функции $\varphi \in C_0^{(\infty)}$, с одной стороны, $g\varphi \in C_0^{(\infty)}$, а с другой стороны, имеет место очевидное равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (f \cdot g)(x)\, \varphi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, (g \cdot \varphi)(x)\, dx$$

или в других обозначениях

$$\langle f \cdot g, \varphi \rangle = \langle f, g \cdot \varphi \rangle.$$

Это соотношение, справедливое для регулярных обобщенных функций, лежит в основе следующего определения распределения $F \cdot g$, получаемого *умножением распределения* $F \in \mathcal{D}'$ *на функцию* $g \in C^{(\infty)}$:

$$\langle F \cdot g, \varphi \rangle := \langle F, g \cdot \varphi \rangle. \tag{14}$$

*) С. Л Соболев (1908) — один из наиболее крупных современных советских математиков

**) Л Шварц (1915) — известный современный французский математик За упомянутые работы на Международном математическом конгрессе 1950 г удостоен Филдсовской премии, присуждаемой молодым математикам

Правая часть равенства (14) определена, и тем самым задается значение функционала $F\cdot g$ на любой функции $\varphi\in\mathscr{D}$, т. е. задается сам функционал $F\cdot g$.

Пример 11. Посмотрим, как действует распределение $\delta\cdot g$, где $g\in C^{(\infty)}$. В соответствии с определением (14) и определением распределения δ получаем

$$\langle\delta\cdot g,\ \varphi\rangle:=\langle\delta,\ g\cdot\varphi\rangle:=(g\cdot\varphi)(0):=g(0)\cdot\varphi(0).$$

c. **Дифференцирование обобщенных функций.** Если $f\in C^{(1)}$, а $\varphi\in C_0^{(\infty)}$, то интегрированием по частям получаем равенство

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\varphi(x)\,dx=-\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx. \tag{15}$$

Это равенство является отправной точкой для следующего основного определения *дифференцирования обобщенной функции* $F\in\mathscr{D}'$:

$$\langle F',\ \varphi\rangle:=-\langle F,\ \varphi'\rangle. \tag{16}$$

Пример 12. Если $f\in C^{(1)}$, то производная от f в классическом смысле совпадает с производной от f в смысле теории распределений (разумеется, если, как всегда, отождествлять классическую функцию с соответствующей ей регулярной обобщенной функцией). Это следует из сопоставления соотношений (15) и (16), в которых правые части совпадают, если распределение F порождается функцией f.

Пример 13. Возьмем *функцию Хевисайда* *)

$$H(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1 & \text{при } x\geqslant 0,\end{cases}$$

называемую иногда *единичной ступенькой* и, рассматривая ее как обобщенную функцию, найдем производную H' этой разрывной в классическом смысле функции.

Из определения регулярной обобщенной функции H, отвечающей функции Хевисайда, и на основании соотношения (16) находим

$$\langle H',\ \varphi\rangle:=-\langle H,\ \varphi'\rangle:=-\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\varphi'(x)\,dx=-\int_{0}^{+\infty}\varphi'(x)\,dx=\varphi(0),$$

поскольку $\varphi\in C_0^{(\infty)}$. Таким образом, $\langle H',\ \varphi\rangle=\langle\delta,\ \varphi\rangle$, какова бы ни была функция $\varphi\in C_0^{(\infty)}$. Значит, $H'=\delta$.

*) О Хевисайд (1850—1925) — английский физик и инженер, разработавший на символическом уровне важный математический аппарат, который теперь называется *операционным исчислением*

Пример 14. Вычислим $\langle\delta', \varphi\rangle$:

$$\langle\delta', \varphi\rangle := -\langle\delta, \varphi'\rangle := -\varphi'(0).$$

Естественно, что в теории обобщенных функций, как и в классическом случае, для определения высших производных полагают, что $F^{(n+1)} := (F^{(n)})'$.

Сопоставляя результаты последних двух примеров, можно, следовательно, записать, что

$$\langle H'', \varphi\rangle = -\varphi'(0).$$

Пример 15. Покажем, что $\langle\delta^{(n)}, \varphi\rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$.

◀ При $n=0$ это — определение δ-функции.

Мы видели в примере 14, что написанное равенство справедливо и при $n=1$.

Докажем его по индукции, считая, что для фиксированного значения $n \in \mathbb{N}$ оно уже установлено. Опираясь на определение (16), находим

$$\langle\delta^{(n+1)}, \varphi\rangle := \langle(\delta^{(n)})', \varphi\rangle := -\langle\delta^{(n)}, \varphi'\rangle =$$
$$= -(-1)^n (\varphi')^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \varphi^{(n+1)}(0). \ ▶$$

Пример 16. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ непрерывно дифференцируема при $x<0$ и при $x>0$, и пусть существуют односторонние пределы $f(-0)$, $f(+0)$ функции в точке 0. Обозначим через $\mathrm{J} f(0)$ величину $f(+0)-f(-0)$ скачка функции в точке 0, а через f' и $\{f'\}$ соответственно производную функции f в смысле теории распределений и распределение, определяемое функцией, которая равна обычной производной от f при $x<0$ и $x>0$. При $x=0$ последняя функция не определена, но это и не важно для интеграла, которым она определяет регулярное распределение $\{f'\}$.

В примере 1 мы отмечали, что если $f \in C^{(1)}$, то $f' = \{f'\}$. Покажем, что в общем случае это не так, а справедлива следующая важная формула:

$$f' = \{f'\} + \mathrm{J} f(0) \cdot \delta. \tag{17}$$

◀ Действительно,

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$
$$= -\left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}\right)(f(x)\varphi'(x))\,dx = -\Bigg((f\cdot\varphi)(x)\Big|_{x=-\infty}^{0} -$$
$$- \int_{-\infty}^{0} f'(x)\varphi(x)\,dx + (f\cdot\varphi)(x)\Big|_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx\Bigg) =$$
$$= \Big(f(+0) - f(-0)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx =$$
$$= \langle \mathrm{J} f(0)\cdot\delta, \varphi\rangle + \langle\{f'\}, \varphi\rangle. \ ▶$$

Если все производные до порядка m функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ на промежутках $x<0$ и $x>0$ существуют, непрерывны и имеют односторонние пределы при $x=0$, то повторным дифференцированием из (17) получаем соотношение

$$f^{(m)}=\{f^{(m)}\}+\mathrm{J}f(0)\cdot\delta^{(m-1)}+\mathrm{J}f'(0)\cdot\delta^{(m-2)}+\ldots$$
$$\ldots+\mathrm{J}f^{(m-1)}(0)\cdot\delta. \qquad (18)$$

Укажем теперь некоторые свойства операции дифференцирования обобщенных функций.

Утверждение 6.

a) *Любая обобщенная функция $F\in\mathcal{D}'$ бесконечно дифференцируема.*

b) *Операция $D\colon \mathcal{D}'\to\mathcal{D}'$ дифференцирования линейна.*

c) *Если $F\in\mathcal{D}'$, $g\in C^{(\infty)}$, то $(F\cdot g)\in\mathcal{D}'$ и справедлива формула Лейбница*

$$(F\cdot g)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}C_m^kF^{(k)}\cdot g^{(m-k)}.$$

d) *Операция $D\colon \mathcal{D}'\to\mathcal{D}'$ дифференцирования непрерывна.*

e) *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)=S(x)$, составленный из локально интегрируемых функций $f_k\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ сходится равномерно на каждом лежащем в $\mathbb{R}$ компакте, то в смысле обобщенных функций его можно дифференцировать почленно любое число раз и получаемые при этом ряды будут сходиться в $\mathcal{D}'$.*

◀ a) $\langle F^{(m)},\varphi\rangle:=-\langle F^{(m-1)},\varphi'\rangle:=(-1)^m\langle F,\varphi^{(m)}\rangle$.

b) Очевидно.

c) Проверим формулу при $m=1$:

$$\langle (F\cdot g)',\varphi\rangle:=-\langle Fg,\varphi'\rangle:=-\langle F,g\cdot\varphi'\rangle=-\langle F,(g\cdot\varphi)'-g'\cdot\varphi\rangle=$$
$$=\langle F',g\varphi\rangle+\langle F,g'\cdot\varphi\rangle=\langle F'\cdot g,\varphi\rangle+\langle F\cdot g',\varphi\rangle=\langle F'\cdot g+F\cdot g',\varphi\rangle.$$

В общем случае формулу можно получить теперь методом индукции.

d) Пусть $F_m\to F$ в $\mathcal{D}'$ при $m\to\infty$, т. е. для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}$ $\langle F_m,\varphi\rangle\to\langle F,\varphi\rangle$ при $m\to\infty$. Тогда

$$\langle F'_m,\varphi\rangle:=-\langle F_m,\varphi'\rangle\to-\langle F,\varphi'\rangle=:\langle F',\varphi\rangle.$$

e) При указанных условиях сумма $S(x)$ ряда как равномерный на компактах предел локально интегрируемых функций $S_m(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}f_k(x)$ сама является локально интегрируемой. Остается заметить, что для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}$ (т. е. финитной и бесконечно дифференцируемой) имеет место соотношение

$$\langle S_m,\varphi\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}}S_m(x)\varphi\,dx\to\int\limits_{\mathbb{R}}S(x)\varphi(x)\,dx=\langle S,\varphi\rangle.$$

Теперь на основании доказанного в d) заключаем, что $S'_m \to S'$ при $m \to \infty$. ▶

Мы видим, что, сохраняя важнейшие свойства классического дифференцирования, операция дифференцирования обобщенных функций приобретает ряд новых замечательных свойств, открывающих большую оперативную свободу, которой не было в классическом случае из-за наличия там недифференцируемых функций и неустойчивости (отсутствия непрерывности) классического дифференцирования относительно предельных переходов.

d. Фундаментальное решение и свертка. Мы начали этот пункт с интуитивных представлений о единичном импульсе и аппаратной функции прибора. В примере 7 была указана простейшая механическая система, которая естественным образом порождает линейный оператор, сохраняющий сдвиги по времени. Рассматривая ее, мы пришли к уравнению (11), которому должна удовлетворять аппаратная функция E этого оператора.

Мы закончим пункт, снова вернувшись к этим вопросам, но теперь с целью продемонстрировать их адекватное математическое описание на языке обобщенных функций.

Начнем с осмысления уравнения (11). В правой его части стоит обобщенная функция δ, поэтому соотношение (11) следует трактовать как равенство обобщенных функций. Поскольку нам известны операция дифференцирования обобщенных функций и линейные операции над распределениями, то левая часть уравнения (11) теперь тоже понятна, даже если ее трактовать в смысле обобщенных функций.

Попробуем решить уравнение (11).

При $t<0$ система находилась в покое. При $t=0$ точка получила единичный импульс, поэтому в момент $t=0$ она приобрела такую скорость $v=v(0)$, что $mv=1$. При $t>0$ на систему не действуют внешние силы и ее закон движения $x=x(t)$ подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению

$$m\ddot{x}+kx=0, \tag{19}$$

которое следует решать при начальных данных $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=$ $=v=1/m$.

Такое решение единственно и немедленно выписывается:

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t, \qquad t \geq 0.$$

Поскольку в нашем случае при $t<0$ система покоится, то можно заключить, что

$$E(t)=\frac{H(t)}{\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

где H — функция Хевисайда (см. пример 13).

Проверим теперь, пользуясь законами дифференцирования обобщенных функций и результатами рассмотренных выше примеров, что задаваемая равенством (20) функция $E(t)$ удовлетворяет уравнению (11).

Для упрощения записи проверим, что функция

$$e(x)=H(x)\frac{\sin\omega x}{\omega} \tag{21}$$

удовлетворяет в смысле теории распределений уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)e=\delta. \tag{22}$$

Действительно,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)e=\frac{d^2}{dx^2}\left(H\frac{\sin\omega x}{\omega}\right)+\omega^2\left(H\frac{\sin\omega x}{\omega}\right)=$$
$$=H''\frac{\sin\omega x}{\omega}+2H'\cos\omega x-\omega H(x)\sin\omega x+$$
$$+\omega H(x)\sin\omega x=\delta'\frac{\sin\omega x}{\omega}+2\delta\cos\omega x.$$

Далее, для любой функции $\varphi\in\mathscr{D}$

$$\left\langle\delta'\frac{\sin\omega x}{\omega}+2\delta\cos\omega x,\ \varphi\right\rangle=\left\langle\delta',\ \frac{\sin\omega x}{\omega}\varphi\right\rangle+\langle\delta,\ 2\cos\omega x\varphi\rangle=$$
$$=-\left\langle\delta,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin\omega x}{\omega}\varphi\right)\right\rangle+2\varphi(0)=$$
$$=-\left(\cos\omega x\varphi(x)+\frac{\sin\omega x}{\omega}\varphi'(x)\right)\Big|_{x=0}+2\varphi(0)=\varphi(0)=\langle\delta,\ \varphi\rangle,$$

тем самым проверено, что функция (21) удовлетворяет уравнению (22).

Введем, наконец, следующее определение, формализующее понятие аппаратной функции прибора.

Определение 9. *Фундаментальным решением* (*аппаратной функцией* или *функцией влияния*) *оператора* A: $\mathscr{D}'\to\mathscr{D}'$ называется такая обобщенная функция $E\in\mathscr{D}'$, которая под действием оператора A переходит в функцию $\delta\in\mathscr{D}'$, т. е. $A(E)=\delta$.

Пример 17. В соответствии с этим определением функция (21) является фундаментальным решением для оператора $A=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)$, поскольку она удовлетворяет уравнению (22).

Функция (20) удовлетворяет уравнению (11), т. е. является функцией влияния для оператора $A=\left(m\frac{d^2}{dt^2}+k\right)$. Фундаментальная роль аппаратной функции оператора, сохраняющего сдвиги, уже обсуждалась в п. 1, где была получена формула (1), на основании которой можно теперь записать соответствующее указанным в примере 7 начальным условиям решение уравнения (10):

$$x(t)=(f*E)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\,H(\tau)\,\frac{\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,\tau}{\sqrt{km}}\,d\tau,$$

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{km}}\int_{0}^{+\infty} f(t-\tau)\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,\tau\,d\tau.$$

Учитывая продемонстрированную важную роль свертки и фундаментального решения, ясно, что желательно определить также свертку обобщенных функций. Это делается в теории распределений, но мы на этом останавливаться не будем. Отметим лишь, что в случае регулярных распределений определение свертки обобщенных функций равносильно рассмотренному выше классическому определению свертки функций.

Задачи и упражнения

1. a. Проверьте ассоциативность свертки: $u*(v*w)=(u*v)*w$.

b. Пусть, как всегда, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, а $H(x)$ — функция Хевисайда Положим

$$H_\lambda^\alpha(x):=H(x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda x},\quad \text{где}\quad \alpha>0,\quad \text{а}\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Покажите, что $H_\lambda^\alpha * H_\lambda^\beta=H_\lambda^{\alpha+\beta}$.

c. Проверьте, что функция $F=H(x)\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}$ является n-й сверточной степенью функции $f=H(x)e^{\lambda x}$, т. е $F=\underbrace{f*f*\ldots*f}_{n}$

2. Функция $G_\sigma(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma>0$, задает плотность распределения вероятностей в гауссовском нормальном законе распределения вероятностей.

a. Нарисуйте график функции $G_\sigma(x)$ при различных значениях параметра σ.

b Проверьте, что математическое ожидание (среднее значение) случайной величины с распределением вероятностей G_σ равно нулю $\left(\text{т. е. } \int_{\mathbb{R}} xG_\sigma(x)dx=0\right)$.

c. Проверьте, что среднее квадратическое уклонение величины x от своего среднего значения (дисперсия x) равно σ $\left(\text{т. е } \left(\int_{\mathbb{R}} x^2G_\sigma(x)\,dx\right)^{1/2}=\sigma\right)$.

d. В теории вероятностей доказывается, что плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин является сверткой плотностей распределения вероятностей самих этих величин Проверьте, что $G_\alpha * G_\beta=G_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

e. Покажите, что сумма n однотипных случайных величин (например, n независимых измерений одного и того же объекта), распределенных по нормальному закону G_σ, распределена по закону $G_{\sigma\sqrt{n}}$. Отсюда, в частности, следует, что ожидаемый порядок погрешности среднего арифметического n таких измерений, взятого в качестве значения измеряемой величины, равен $\sigma/\sqrt{n}$, где σ — вероятная погрешность отдельного измерения

3. Напомним, что функция $A(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется производящей функцией последовательности $a_0, a_1, \ldots$

Пусть даны две последовательности $\{a_k\}$, $\{b_k\}$. Если считать, что $a_k=b_k=0$ при $k<0$, то свертку последовательностей $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ естественно определить как последовательность $\left\{c_k=\sum\limits_m a_m b_{k-m}\right\}$. Покажите, что производящая функция свертки двух последовательностей равна произведению производящих функций этих последовательностей.

4. a. Проверьте, что если свертка $u*v$ определена и одна из функций u, v периодична с периодом T, то $u*v$ — тоже T-периодическая функция.

b. Докажите теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной периодической функции тригонометрическими полиномами (см. замечание 5).

c. Докажите усиленные варианты аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, указанные в замечании 4

5. a. Пусть компакт $\mathscr{K}\subset\mathbb{R}$ содержит строго внутри себя замыкание $\bar{E}$ множества E из утверждения 5. Покажите, что в этом случае $\int\limits_{\mathscr{K}} f(y)\,\Delta_k(x-y)\,dy \rightrightarrows f(x)$ на E.

b. Из разложения $(1-z)^{-1}=1+z+z^2+\ldots$ выведите, что $g(\rho,\ \theta):=\dfrac{1+\rho e^{i\theta}}{2(1-\rho e^{i\theta})}=\dfrac{1}{2}+\rho e^{i\theta}+\rho^2e^{i2\theta}+\ldots$ при $0\leqslant\rho<1$.

c. Проверьте, что при $0\leqslant\rho<1$

$$P_\rho(\theta):=\operatorname{Re} g(\rho,\ \theta)=\frac{1}{2}+\rho\cos\theta+\rho^2\cos 2\theta+\ldots;$$

функция $P_\rho(\theta)$ имеет вид

$$P_\rho(\theta)=\frac{1}{2}\,\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

и называется *ядром Пуассона для круга*

d. Покажите, что семейство зависящих от параметра $\rho\in[0,\ 1[$ функций $P_\rho(\theta)$ обладает следующим набором свойств: $P_\rho(\theta)\geqslant 0$, $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_\rho(\theta)\,d\theta=1$, $\int\limits_{\varepsilon>0}^{2\pi-\varepsilon} P_\rho(\theta)\,d\theta\to 0$ при $\rho\to 1-0$.

e. Докажите, что если $f\in C[0,\ 2\pi]$, то функция

$$u(\rho,\ \theta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_\rho(\theta-t)\,f(t)\,dt$$

— гармоническая в круге $\rho<1$ и $u(\rho,\ \theta)\rightrightarrows f(\theta)$ при $\rho\to 1-0$. Таким образом, ядро Пуассона позволяет строить гармоническую в круге функцию, имеющую заданные граничные значения на границе круга.

f. Для локально интегрируемых функций u и v в случае, когда они периодические, причем с одинаковым периодом T, можно корректно определить операцию свертки (свертки по периоду) следующим образом

$$(u \underset{T}{*} v)(x):=\int\limits_a^{a+T} u(y)\,v(x-y)\,dy$$

Периодические функции на $\mathbb{R}$ можно интерпретировать как функции, заданные на окружности, поэтому введенную операцию естественно считать определением свертки двух функций, заданных на окружности

Покажите, что если $f(\theta)$ — локально интегрируемая 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$ (или, что то же самое, f — функция на окружности), а семейство $P_\rho(\theta)$ зависящих от параметра ρ функций обладает свойствами ядра Пуассона, перечисленными в d, то $\left(f \underset{2\pi}{*} P_\rho\right)(\theta) \to f(\theta)$ при $\rho \to 1-0$ в любой точке θ непрерывности функции f.

6. a Пусть $\varphi(x) = a \cdot \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)$ при $|x| < 1$ и $\varphi(x) := 0$ при $|x| \geq 1$; a — постоянная, выбираемая из условия $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$ Проверьте, что при $\alpha \to +0$ семейство функций $\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ является δ-образным семейством функций класса $C_0^{(\infty)}$ на $\mathbb{R}$.

b Для любого промежутка $I \subset \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ постройте функцию $e(x)$ класса $C_0^{(\infty)}$ такую, что $0 \leq e(x) \leq 1$ на $\mathbb{R}$, $e(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in I$ и, наконец, $\operatorname{supp} e \subset I_\varepsilon$, где I_ε — ε-окрестность (или ε-раздутие) множества I в $\mathbb{R}$. (Проверьте, что при соответствующем значении $\alpha > 0$ в качестве $e(x)$ можно взять $\chi_I * \varphi_\alpha$.)

c Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой счетный набор $\{e_k\}$ функций $e_k \in C_0^{(\infty)}$ (ε-разбиение единицы на $\mathbb{R}$), который обладает следующими свойствами: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(0 \leq e_k(x) \leq 1)$, диаметр носителя $\operatorname{supp} e_k$ любой функции семейства не превосходит $\varepsilon > 0$; любая точка $x \in \mathbb{R}$ принадлежит лишь конечному числу множеств $\operatorname{supp} e_k$; $\sum_k e_k(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}$

d Покажите, что, каково бы ни было открытое покрытие $\{U_\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}$ открытого множества $G \subset \mathbb{R}$ и какова бы ни была функция $\varphi \in C^{(\infty)}(G)$, существует такая последовательность $\{\varphi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ функций $\varphi_k \in C_0^{(\infty)}(G)$, которая обладает следующими свойствами. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists \gamma \in \Gamma$ $(\operatorname{supp} \varphi_k \subset U_\gamma)$; любая точка $x \in G$ принадлежит лишь конечному числу множеств $\operatorname{supp} \varphi_k$; $\sum_k \varphi_k(x) = \varphi(x)$ на G.

e. Докажите, что множество функций $C_0^{(\infty)}(G)$, интерпретируемых как обобщенные функции, всюду плотно в соответствующем $C^{(\infty)}(G)$ множестве регулярных обобщенных функций.

f. Две обобщенные функции F_1, F_2 из $\mathscr{D}'(G)$ считаются совпадающими на открытом множестве $U \subset G$, если для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(G)$, носитель которой лежит в U, выполняется равенство $\langle F_1, \varphi\rangle = \langle F_2, \varphi\rangle$. Обобщенные функции F_1, F_2 считаются локально совпадающими в точке $x \in G$, если они совпадают в некоторой окрестности $U(x) \subset G$ этой точки. Докажите, что $(F_1 = F_2) \Longleftrightarrow (F_1 = F_2$ локально в любой точке $x \in G)$.

7. a Пусть $\varphi(x) := \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)$ при $|x| < 1$ и $\varphi(x) := 0$ при $|x| \geq 1$ Покажите, что для любой локально интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f выполняется соотношение $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx \to 0$ при $\varepsilon \to +0$, где $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

b. Учитывая предыдущий результат и то обстоятельство, что $\langle \delta, \varphi_\varepsilon\rangle = \varphi(0) \neq 0$, докажите, что обобщенная функция δ не является регулярной.

c. Покажите, что существует последовательность регулярных обобщенных функций (даже отвечающих функциям класса $C_0^{(\infty)}$), которая сходится в $\mathscr{D}'$ к обобщенной функции δ (На самом-то деле любая обобщенная функция является пределом регулярных обобщенных функций, отвечающих функциям из $\mathcal{D}=C_0^{(\infty)}$. В этом смысле регулярные обобщенные функции образуют всюду плотное в $\mathcal{D}'$ множество, подобно тому как рациональные числа $\mathbb{Q}$ всюду плотны в множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.)

8. a. Вычислите значение $\langle F, \varphi\rangle$ обобщенной функции $F\in\mathcal{D}'$ на функции $\varphi\in\mathcal{D}$, если $F=\sin x\delta$; $F=2\cos x\delta$; $F=(1+x^2)\,\delta$.

b. Проверьте, что операция $F\longmapsto\psi F$ умножения на функцию $\psi\in C^{(\infty)}$ является непрерывной операцией в $\mathcal{D}'$.

c. Проверьте, что линейные операции над обобщенными функциями непрерывны в $\mathcal{D}'$.

9. a. Покажите, что если F — регулярное распределение, порожденное функцией $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ x & \text{при } x>0,\end{cases}$ то $F'=H$, где H — распределение, отвечающее функции Хевисайда.

b. Вычислите производную от распределения, отвечающего функции $|x|$.

10. a. Проверьте справедливость следующих предельных переходов в $\mathcal{D}'$:

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}=\pi\delta,\quad \lim_{\alpha\to+0}\frac{\alpha x}{\alpha^2+x^2}=\pi x\delta;\quad \lim_{\alpha\to+0}\frac{x}{x^2+\alpha^2}=\ln|x|$$

b. Покажите, что если $f=f(x)$ — локально интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, а $f_\varepsilon=f(x+\varepsilon)$, то $f_\varepsilon\to f$ в $\mathcal{D}'$ при $\varepsilon\to 0$.

c. Докажите, что если $\{\Delta_\alpha\}$ — δ-образное семейство гладких функций при $\alpha\to 0$, то $F_\alpha=\int\limits_{-\infty}^{x}\Delta_\alpha(t)\,dt\to H$ при $\alpha\to 0$, где H — обобщенная функция, отвечающая функции Хевисайда.

11. a. Через $\delta(x-a)$ обычно обозначают *«сдвинутую* в точку a *δ-функцию»*, т. е. обобщенную функцию, действующую на функции $\varphi\in\mathcal{D}$ по правилу $\langle\delta(x-a), \varphi\rangle=\varphi(a)$. Покажите, что ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(x-k)$ сходится в $\mathcal{D}'$

b. Найдите производную функции $[x]$ ($[x]$ — целая часть числа x)

c. 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$ в пределах промежутка $]0, 2\pi]$ задана формулой $f|_{]0,\,2\pi]}(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}$. Покажите, что $f'=-\frac{1}{2\pi}+\sum\limits_{k\in Z}\delta(x-2\pi k)$

c. Проверьте, что $\delta(x-\varepsilon)\to\delta(x)$ при $\varepsilon\to 0$.

d. Обозначая, как и прежде, сдвинутую в точку ε δ-функцию через $\delta(x-\varepsilon)$, покажите прямым вычислением, что $\frac{1}{\varepsilon}(\delta(x-\varepsilon)-\delta(x))\to-\delta'(x)=-\delta'$.

e. Исходя из предыдущего предельного перехода, интерпретируйте $-\delta'$ как распределение зарядов, соответствующее диполю с электрическим моментом $+1$, расположенному в точке $x=0$. Проверьте, что $\langle-\delta', 1\rangle=0$ (полный заряд диполя равен нулю) и что $\langle-\delta', x\rangle=1$ (его момент действительно равен 1)

12. a. Для обобщенной функции F, заданной в виде $\langle F, \varphi\rangle=\int\limits_0^\infty\sqrt{x}\,\varphi(x)\,dx$, проверьте следующие равенства:

$$\langle F', \varphi\rangle=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\,dx;$$

$$\langle F'', \varphi\rangle=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{3/2}}\,dx;$$

$$\langle F''', \varphi\rangle = \frac{3}{8}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^{5/2}}\,dx$$

. . . .

$$\langle F^{(n)}, \varphi\rangle = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n+1}{2}}}\,dx$$

b Покажите, что если $n-1<p<n$ и обобщенная функция x_+^{-p} задана соотношением

$$\langle x_+^{-p}, \varphi\rangle := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^p}\,dx,$$

то ее производной является функция $-px_+^{-(p+1)}$, определяемая соотношением

$$\langle -px_+^{-(p+1)}, \varphi\rangle = -p\int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^{p+1}}\,dx.$$

13. Определяемая равенством

$$\langle F, \varphi\rangle = \text{V. P.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\left(:=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right),$$

обобщенная функция обозначается символом $\mathscr{P}\frac{1}{x}$. Покажите, что:

a. $\left\langle \mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx.$

b. $(\ln|x|)' = \mathscr{P}\frac{1}{x}.$

c. $\left\langle \left(\mathscr{P}\frac{1}{x}\right)', \varphi\right\rangle = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx.$

d. $\frac{1}{x+i0} := \lim\limits_{y\to+0}\frac{1}{x+iy} = -i\pi\delta+\mathscr{P}\frac{1}{x}.$

14. С определением произведения обобщенных функций могут возникнуть сложности например, функция $|x|^{-2/3}$ абсолютно интегрируема (в несобственном смысле) на $\mathbb{R}$; она порождает соответствующую обобщенную функцию $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^{-2/3}\varphi(x)\,dx$, но квадрат ее $|x|^{-4/3}$ уже не является интегрируемой функцией даже в несобственном смысле Ответы на следующие вопросы показывают, что в $\mathscr{D}'$ принципиально нельзя определить естественную ассоциативную и коммутативную операцию умножения любых обобщенных функций

a. Покажите, что для любой функции $f \in C^{(\infty)}$ имеет место равенство $f(x)\delta = f(0)\delta$.

b. Проверьте, что $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$ в $\mathcal{D}'$

c. Если бы операция умножения была распространена на любые пары обобщенных функций, то она по крайней мере не была бы ассоциативной и коммутативной, иначе

$$0 = 0\mathcal{P}\frac{1}{x} = (x\delta(x))\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\delta(x)\,x)\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta(x)\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = \delta(x)\,1 = 1\delta(x) = 1$$

15. a. Покажите, что фундаментальное решение E для линейного оператора A: $\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$, вообще говоря, определено неоднозначно — с точностью до любого решения однородного уравнения $Af = 0$

b. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P\left(x, \frac{d}{dx}\right) := \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x).$$

Покажите, что если $u_0 = u_0(x)$ такое решение уравнения $P\left(x, \frac{d}{dx}\right)u_0 = 0$, которое удовлетворяет начальным условиям $u_0(0) = \ldots = u_0^{(n-2)}(0) = 0$, $u_0^{(n-1)}(0) = 1$, то функция $E(x) = H(x)\,u_0(x)$ (где $H(x)$ — функция Хевисайда) является фундаментальным решением для оператора $P\left(x, \frac{d}{dx}\right)$.

c. Найдите указанным способом фундаментальные решения для операторов

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right), \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} + a^2\right), \quad \frac{d^m}{dx^m}, \quad \left(\frac{d}{dx} + a\right)^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

d. Используя полученные результаты и свертку, найдите решения уравнений $\frac{d^m u}{dx^m} = f$, $\left(\frac{d}{dx} + a\right)^m = f$, где $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

§ 5. Кратные интегралы, зависящие от параметра

В первых двух пунктах этого параграфа будут указаны свойства собственных и несобственных кратных интегралов, зависящих от параметра. Общий итог этих пунктов состоит в том, что основные свойства кратных интегралов, зависящих от параметра, по существу не отличаются от соответствующих свойств подробно рассмотренных выше одномерных интегралов, зависящих от параметра. В третьем пункте мы рассмотрим важный для приложений случай несобственного интеграла, особенность которого сама зависит от параметра. Наконец, в четвертом пункте будет рассмотрена свертка функций многих переменных и некоторые специфически многомерные вопросы обобщенных функций, тесно связанные с интегралами, зависящими от параметра, и классическими интегральными формулами анализа.

1. Собственные кратные интегралы, зависящие от параметра. Пусть X — измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$, например ограниченная область с гладкой или кусочно гладкой границей; Y — некоторое подмножество $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим зависящий от параметра $y \in Y$ интеграл

$$F(y) = \int_X f(x, y)\, dx, \tag{1}$$

где функция f предполагается определенной на множестве $X \times Y$ и интегрируемой на X при любом фиксированном значении $y \in Y$.

Для интеграла (1) справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *Если $X \times Y$ — компакт в $\mathbb{R}^{n+m}$, и $f \in C(X \times Y)$, то $F \in C(Y)$.*

Утверждение 2. *Если Y — область в $\mathbb{R}^m$, $f \in C(X \times Y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y^i} \in C(X \times Y)$, то функция F дифференцируема в Y по переменной y^i, где $y = (y^1, \ldots, y^i, \ldots, y^m)$ и*

$$\frac{\partial F}{\partial y^i}(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y^i}(x, y)\, dx. \tag{2}$$

Утверждение 3. *Если X и Y — измеримые компакты в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, а $f \in C(X \times Y)$, то $F \in C(Y) \subset \mathcal{R}(Y)$ и*

$$\int_Y F(y)\, dy := \int_Y dy \int_X f(x, y)\, dx = \int_X dx \int_Y f(x, y)\, dy. \tag{3}$$

Отметим, что значения функции f могут при этом лежать в любом векторном нормированном пространстве Z. Важнейшие частные случаи — когда Z есть $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. В этих случаях проверка утверждений 1—3, очевидно, сводится к их доказательству при $Z = \mathbb{R}$. Но при $Z = \mathbb{R}$ доказательства утверждений 1 и 2 дословно повторяют доказательства соответствующих утверждений для одномерного интеграла (см. гл. XVII, § 1), а утверждение 3 является простым следствием утверждения 1 и теоремы Фубини (гл. XI, § 4)

2. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметра. Если в интеграле (1) неограничены множество $X \subset \mathbb{R}^n$ или функция f, то он понимается как несобственный кратный интеграл (см. гл. XI, § 6), т. е. как предел собственных интегралов, взятых по множествам соответствующего исчерпания X. При исследовании кратных несобственных интегралов, зависящих от параметра, как правило, интересуются специальными исчерпаниями, подобными тем, которые мы рассматривали в одномерном случае. В полном соответствии с одномерным случаем из области интегрирования X при этом удаляют ε-окрестность множества особых точек *), находят интеграл по оставшейся части X_ε множества X и затем находят предел значений интегралов по X_ε при $\varepsilon \to +0$.

---

*) То есть точек, в любой окрестности которых функция f неограничена. Если и множество X неограничено, то из X удаляется также окрестность бесконечности.

Если указанный предельный переход является равномерным относительно параметра $y \in Y$, то говорят, что несобственный интеграл (1) сходится равномерно на Y.

Пример 1. Интеграл

$$F(\lambda) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

получается предельным переходом

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}\, dx\, dy := \lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1/\varepsilon^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

и, как легко проверить, используя полярные координаты, он сходится при $\lambda > 0$. Далее, на множестве $E_{\lambda_0} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geqslant \lambda_0 > 0\}$ он сходится равномерно, поскольку при $\lambda \in E_{\lambda_0}$

$$0 < \iint_{x^2+y^2 \geqslant 1/\varepsilon^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}\, dx\, dy \leqslant \iint_{x^2+y^2 \geqslant 1/\varepsilon^2} e^{-\lambda_0(x^2+y^2)}\, dx\, dy,$$

а последний интеграл стремится к нулю, когда $\varepsilon \to 0$ (исходный интеграл $F(\lambda)$ сходится при $\lambda = \lambda_0 > 0$).

Пример 2. Пусть, как всегда, $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < r\}$ — шар радиуса r с центром $a \in \mathbb{R}^n$, и пусть $y \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим интеграл

$$F(y) = \int_{B(0,\,1)} \frac{|x-y|}{(1-|x|)^\alpha}\, dx := \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{B(0,\,1-\varepsilon)} \frac{|x-y|}{(1-|x|)^\alpha}\, dx.$$

Переходя к полярным координатам в $\mathbb{R}^n$, убеждаемся, что данный интеграл сходится лишь при $\alpha < 1$. Если значение $\alpha < 1$ фиксировано, то по параметру y интеграл сходится равномерно на любом компакте $Y \subset \mathbb{R}^n$, поскольку в этом случае $|x-y| \leqslant \leqslant M(Y) \in \mathbb{R}$.

Отметим, что в рассмотренных примерах множество особых точек интеграла не зависело от параметра. Таким образом, если принять указанное выше понимание равномерной сходимости несобственного интеграла с фиксированным множеством особых точек, то ясно, что все основные свойства таких кратных несобственных интегралов, зависящих от параметра, получаются из соответствующих свойств собственных кратных интегралов и теорем о предельном переходе для семейств функций, зависящих от параметра.

Мы не останавливаемся на переизложении этих в принципе уже знакомых нам фактов, а предпочтем использовать развитый аппарат при рассмотрении следующей весьма важной и часто встречающейся ситуации, когда особенность несобственного интеграла (одномерного или кратного) сама зависит от параметра.

3. Несобственные интегралы с переменной особенностью.

Пример 3. Как известно, потенциал помещенного в точку $x \in \mathbb{R}^3$ единичного заряда выражается формулой $U(x, y) = \frac{1}{|x-y|}$, где y — переменная точка пространства $\mathbb{R}^3$. Если теперь заряд распределен в ограниченной области $X \subset \mathbb{R}^3$ с ограниченной плотностью $\mu(x)$ (равной нулю вне X), то потенциал $U(y)$ так распределенного заряда (в силу аддитивности потенциала), очевидно, запишется в виде

$$U(y) = \int_{\mathbb{R}^3} U(x, y)\,\mu(x)\,dx = \int_X \frac{\mu(x)\,dx}{|x-y|}. \tag{4}$$

Роль параметра в последнем интеграле играет переменная точка $y \in \mathbb{R}^3$. Если точка y лежит вне множества X, то интеграл (4) собственный; если же $y \in \overline{X}$, то $|x-y| \to 0$ при $X \ni x \to y$ и точка y оказывается особой для интеграла. С изменением y эта особая точка, таким образом, перемещается.

Поскольку $U(y) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} U_\varepsilon(y)$, где

$$U_\varepsilon(y) = \int_{X \setminus B(y,\, \varepsilon)} \frac{\mu(x)}{|x-y|}\,dx,$$

то естественно, как и прежде, считать, что рассматриваемый интеграл (4) с переменной особенностью сходится равномерно на множестве Y, если $U_\varepsilon(y) \rightrightarrows U(y)$ на Y при $\varepsilon \to +0$.

Мы приняли, что $|\mu(x)| \leq M \in \mathbb{R}$ на X, поэтому

$$\left| \int_{X \cap B(y,\, \varepsilon)} \frac{\mu(x)\,dx}{|x-y|} \right| \leq M \int_{B(y,\, \varepsilon)} \frac{dx}{|x-y|} = 2\pi M \varepsilon^2.$$

Эта оценка показывает, что $|U(y) - U_\varepsilon(y)| \leq 2\pi M\varepsilon^2$ при любом $y \in \mathbb{R}^3$, т. е. в указанном смысле интеграл (4) сходится равномерно на множестве $Y = \mathbb{R}^3$.

В частности, если проверить, что функция $U_\varepsilon(y)$ непрерывна по y, то отсюда уже можно будет из общих соображений сделать вывод о непрерывности потенциала $U(y)$. Но непрерывность функции $U_\varepsilon(y)$ формально не вытекает из утверждения 1 о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра, так как в нашем случае с изменением y меняется область интегрирования $X \setminus B(y, \varepsilon)$. Рассмотрим поэтому внимательнее вопрос о непрерывности функции $U_\varepsilon(y)$.

Заметим, что при $|y - y_0| < \varepsilon$

$$U_\varepsilon(y) = \int_{X \setminus B(y_0,\, 2\varepsilon)} \frac{\mu(x)\,dx}{|x-y|} + \int_{(X \setminus B(y,\, \varepsilon)) \cap B(y_0,\, 2\varepsilon)} \frac{\mu(x)\,dx}{|x-y|}.$$

Первый из этих двух интегралов при условии, что $|y - y_0| < \varepsilon$, непрерывен по y (как собственный интеграл с фиксированной областью интегрирования). Второй же интеграл по абсолютной величине не превосходит

$$\int\limits_{B(y_0,\ 2\varepsilon)} \frac{M\,dx}{|x-y|} = 8\pi M\varepsilon^2.$$

Значит, при всех значениях y, достаточно близких к y_0, будет выполнено неравенство $|U_\varepsilon(y)-U_\varepsilon(y_0)|<\varepsilon+16\pi M\varepsilon^2$, устанавливающее непрерывность $U_\varepsilon(y)$ в точке $y_0\in\mathbb{R}^3$.

Таким образом, показано, что потенциал $U(y)$ является непрерывной функцией во всем пространстве $\mathbb{R}^3$.

Разобранные примеры дают основание принять следующее общее

Определение 1. Пусть интеграл (1) является несобственным и как таковой сходится при каждом значении $y\in Y$. Пусть X_ε — часть множества X, полученная удалением из X ε-окрестности множества особых точек интеграла *), а $F_\varepsilon(y)=\int\limits_{X_\varepsilon} f(x,\ y)\,dx$.

Будем говорить, что *интеграл* (1) *сходится равномерно на множестве* Y, если $F_\varepsilon(y)\rightrightarrows F(y)$ на Y при $\varepsilon\to+0$.

Из этого определения и соображений, аналогичных тем, которые были продемонстрированы в примере 3, немедленно вытекает следующее полезное

Утверждение 4. *Если функция f в интеграле* (1) *допускает оценку* $|f(x,\ y)|\leqslant\frac{M}{|x-y|^\alpha}$, *где* $M\in\mathbb{R}$, $x\in X\subset\mathbb{R}^n$, $y\in Y\subset\mathbb{R}^n$ *и* $\alpha<n$, *то интеграл сходится равномерно на множестве* Y.

Пример 4. В частности, на основании утверждения 4 заключаем, что интеграл

$$V_i(y)=\int\limits_X \frac{\mu(x)(x^i-y^i)}{|x-y|^3}\,dx,$$

полученный формальным дифференцированием потенциала (4) по переменной y^i $(i=1,\ 2,\ 3)$, сходится равномерно на множестве $Y=\mathbb{R}^3$, поскольку $\left|\frac{\mu(x)(x^i-y^i)}{|x-y|^3}\right|\leqslant\frac{M}{|x-y|^2}$.

Как и в примере 3, отсюда следует непрерывность функции $V_i(y)$ на $\mathbb{R}^3$.

Убедимся теперь в том, что на самом-то деле функция $U(y)$ — потенциал (4) — имеет частную производную $\frac{\partial U}{\partial y^i}$ и что $\frac{\partial U}{\partial y^i}(y)=$ $=V_i(y)$.

Для этого, очевидно, достаточно проверить, что

$$\int\limits_a^b V_i(y^1,\ y^2,\ y^3)\,dy^i=U(y^1,\ y^2,\ y^3)\Big|_{y^i=a}^{b}.$$

---

*) См. сноску на стр. 467.

Но действительно,

$$\int_a^b V_i(y)\,dy^i = \int_a^b dy^i \int_X \frac{\mu(x)(x^i - y^i)}{|x-y|^3}\,dx =$$

$$= \int_X \mu(x)\,dx \int_a^b \frac{(x^i - y^i)}{|x-y|^3}\,dy^i = \int_X \mu(x)\,dx \int_a^b \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)dy^i =$$

$$= \left(\int_X \frac{\mu(x)\,dx}{|x-y|}\right)\Bigg|_{y^i=a}^{b} = U(y)\Big|_{y^i=a}^{b}.$$

Единственное нетривиальное место в этой выкладке — изменение порядка интегрирований. В общем случае для перестановки несобственных интегрирований достаточно иметь абсолютно сходящийся по совокупности переменных кратный интеграл. В нашем случае это условие удовлетворено, поэтому выполненная перестановка законна. Ее, конечно, можно обосновать и непосредственно благодаря простоте рассматриваемой функции.

Итак, показано, что потенциал $U(y)$, порожденный распределенным в пространстве $\mathbb{R}^3$ зарядом ограниченной плотности, является функцией, непрерывно дифференцируемой во всем пространстве.

Использованные в примерах 3 и 4 приемы и рассуждения позволяют вполне аналогично рассмотреть следующую более общую ситуацию.

Пусть

$$F(y) = \int_X K(y - \varphi(x))\,\psi(x, y)\,dx, \tag{5}$$

где X — ограниченная измеримая область в $\mathbb{R}^n$; параметр y пробегает область $Y \subset \mathbb{R}^m$, причем $n \leqslant m$; $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, удовлетворяющее условиям $\operatorname{rang}\varphi'(x) = n$, и $\|\varphi'(x)\| \geqslant c > 0$, т. е. φ задает n-мерную параметризованную поверхность, точнее, n — путь в $\mathbb{R}^m$; $K \in C(\mathbb{R}^m \setminus 0;\ \mathbb{R})$, т. е. функция $K(z)$ непрерывна в $\mathbb{R}^m$ всюду, кроме точки $z = 0$, около которой она может быть и неограниченной; $\psi\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — ограниченная непрерывная функция. Будем считать, что при каждом $y \in Y$ интеграл (5) (вообще говоря, несобственный) существует.

В рассмотренном нами выше интеграле (4), в частности, было

$$n = m, \quad \varphi(x) = x, \quad \psi(x, y) = \mu(x), \quad K(z) = |z|^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что при указанных ограничениях на функцию φ определение 1 равномерной сходимости для интеграла (5) означает, что по любому $\alpha > 0$ можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, что при любом $y \in Y$ будет

$$\left| \int\limits_{|y-\varphi(x)|<\varepsilon} K(y-\varphi(x))\,\psi(x,\ y)\,dx \right| < \alpha, \tag{6}$$

где интеграл берется по множеству *) $\{x \in X \mid |y-\varphi(x)| < \varepsilon\}$.

Для интеграла (5) справедливы следующие утверждения.

Утверждение 5. *Если интеграл* (5) *с указанными при его описании условиями на функции* φ, ψ, K *сходится равномерно на* Y, *то* $F \in C(Y, \mathbb{R})$.

Утверждение 6. *Если про интеграл* (5) *известно дополнительно, что функция* ψ *не зависит от параметра* y (*т. е.* $\psi(x, y) = \psi(x)$), *а* $K \in C^{(1)}(\mathbb{R}^m \setminus 0, \mathbb{R})$, *то при условии равномерной сходимости интеграла*

$$\int\limits_X \frac{\partial K}{\partial y^i}(y-\varphi(x))\,\psi(x)\,dx$$

на множестве $y \in Y$, *можно утверждать, что функция* F *имеет непрерывную частную производную* $\frac{\partial F}{\partial y^i}$, *причем*

$$\frac{\partial F}{\partial y^i}(y) = \int\limits_X \frac{\partial K}{\partial y^i}(y-\varphi(x))\,\psi(x)\,dx. \tag{7}$$

Доказательства этих утверждений, как было сказано, вполне аналогичны проведенным в примерах 3 и 4, поэтому мы на них не останавливаемся. В случае необходимости читатель может найти их в учебнике математического анализа С. М. Никольского (часть II, стр. 127—129), который мы указали в списке литературы.

Отметим лишь, что сходимость несобственного интеграла (при произвольном исчерпании) влечет его абсолютную сходимость. В примерах 3, 4 условие абсолютной сходимости использовалось нами в оценках и при перестановке порядка интегрирований.

В качестве иллюстрации возможного использования утверждений 5, 6 рассмотрим еще один пример из теории потенциала.

Пример 5. Пусть заряд распределен на гладкой компактной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ с поверхностной плотностью заряда $\nu(x)$. Потенциал такого распределения заряда называется *потенциалом простого слоя* и, очевидно, представляется поверхностным интегралом

$$U(y) = \int\limits_S \frac{\nu(x)\,d\sigma(x)}{|x-y|}. \tag{8}$$

---

*) Здесь мы считаем, что само множество X ограничено в $\mathbb{R}^n$. В противном случае к неравенству (6) надо еще приписать аналогичное неравенство, в котором интеграл берется по множеству $\{x \in X \mid |x| > 1/\varepsilon\}$.

Пусть ν — ограниченная функция; тогда при $y \notin S$ этот интеграл собственный и функция $U(y)$ бесконечно дифференцируема вне S.

Если же $y \in S$, то интеграл имеет в точке y интегрируемую особенность. Особенность интегрируема, так как поверхность S гладкая и в окрестности точки $y \in S$ мало отличается от куска плоскости $\mathbb{R}^2$, на которой, как мы знаем, особенность типа $1/r^\alpha$ интегрируема при $\alpha < 2$. Это общее соображение, используя утверждение 5, можно превратить в формальное доказательство, если локально в окрестности V_y точки $y \in S$ представить S в виде $x = \varphi(t)$, где $t \in V_t \subset \mathbb{R}^2$ и $\operatorname{rang} \varphi' = 2$. Тогда

$$\int\limits_{V_y} \frac{\nu(x)\, d\sigma(x)}{|x-y|} = \int\limits_{V_t} \frac{\nu(\varphi(t))}{|y-\varphi(t)|} \sqrt{\det\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t^j} \right\rangle}\, dt$$

и, применяя утверждение 2, убеждаемся еще и в том, что интеграл (8) представляет функцию $U(y)$, непрерывную во всем пространстве $\mathbb{R}^3$.

Вне носителя заряда, как уже отмечалось, объемный потенциал (4) и потенциал простого слоя (8) бесконечно дифференцируемы. Проводя это дифференцирование под знаком интеграла, единообразно убеждаемся в том, что вне носителя заряда потенциал, как и функция $1/|x-y|$, в $\mathbb{R}^3$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U = 0$, т. е. является в указанной области гармонической функцией.

∗ 4. Свертка, фундаментальное решение и обобщенные функции в многомерном случае.

а. Свертка в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2. *Свертка* $u * v$ определенных на $\mathbb{R}^n$ вещественно или комплекснозначных функций u, v задается соотношением

$$(u * v)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)\, v(x-y)\, dy. \tag{9}$$

Пример 6. Сопоставляя формулы (4) и (9), можно заключить, что, например, потенциал U распределенного в пространстве $\mathbb{R}^3$ с плотностью $\mu(x)$ заряда есть свертка $(\mu * E)$ функции μ и потенциала E единичного заряда, помещенного в начало координат пространства $\mathbb{R}^3$.

Соотношение (9) есть прямое обобщение рассмотренного в § 4 определения свертки. По этой причине все разобранные в § 4 для случая $n = 1$ свойства свертки вместе с их выводами остаются в силе, если там всюду заменить $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^n$

Дельтаобразное семейство в $\mathbb{R}^n$ определяется так же, как и в $\mathbb{R}$ с заменой $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^n$ и с пониманием $U(0)$ как окрестности в $\mathbb{R}^n$ точки $0 \in \mathbb{R}^n$.

Понятие равномерной непрерывности функции $f: G \to \mathbb{C}$ на множестве $E \subset G$, а вместе с ним и основное утверждение 5 § 4, о сходимости свертки $f * \Delta_\alpha$ к f тоже со всеми деталями и следствиями переносится на многомерный случай.

Отметим лишь, что в примере 3 и доказательстве следствия 1 из § 4 при определении функций $\Delta_n(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно следует заменить x на $|x|$. Небольшие видоизменения δ-образного семейства, приведенного в примере 4 § 4, потребуются для доказательства теоремы Вейерштрасса об аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами. В этом случае речь идет о приближении функции $f(x^1, \ldots, x^n)$, непрерывной и периодической с периодами $T_1, T_2, \ldots, T_n$ по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно.

Утверждение состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ можно предъявить тригонометрический полином от n переменных с соответствующими периодами $T_1, T_2, \ldots, T_n$, который равномерно с точностью до ε приближает f на $\mathbb{R}^n$.

Мы ограничимся этими замечаниями. Самостоятельная проверка доказанных в § 4 для $n=1$ свойств свертки (9) в случае произвольного $n \in \mathbb{N}$ будет для читателя простым, но полезным упражнением, способствующим адекватному пониманию изложенного в § 4.

b. Обобщенные функции многих переменных. Остановимся теперь на некоторых многомерных элементах введенных в § 4 понятий, связанных с обобщенными функциями.

Пусть, как и прежде, $C^{(\infty)}(G)$ и $C_0^{(\infty)}(G)$ — соответственно обозначения множеств бесконечно дифференцируемых и финитных бесконечно дифференцируемых в области $G \subset \mathbb{R}^n$ функций. Если $G = \mathbb{R}^n$, то будем применять сокращения $C^{(\infty)}$ и $C_0^{(\infty)}$ соответственно. Пусть $m := (m_1, \ldots, m_n)$ — мультииндекс, а

$$\varphi^{(m)} := \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{m_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{m_n} \varphi.$$

В $C_0^{(\infty)}(G)$ вводится *сходимость функций*; как и в определении 7, § 4 считается, что $\varphi_k \to \varphi$ в $C_0^{(\infty)}(G)$ при $k \to \infty$, если носители всех функций последовательности $\{\varphi_k\}$ содержатся в одном и том же лежащем в G компакте и для любого мультииндекса m $\varphi_k^{(m)} \rightrightarrows \varphi^{(m)}$ на G при $k \to \infty$, т. е. имеет место равномерная сходимость функций и всех их производных.

После этого принимается

Определение 3. Линейное пространство $C_0^{(\infty)}(G)$ с введенной сходимостью обозначается через $\mathscr{D}(G)$ (при $G = \mathbb{R}^n$ через $\mathscr{D}$) и называется *пространством основных* или *пробных функций*.

Линейные непрерывные функционалы на $\mathscr{D}(G)$ называются *обобщенными функциями* или *распределениями*. Они образуют линейное *пространство обобщенных функций*, обозначаемое через $\mathcal{D}'(G)$ (или $\mathcal{D}'$, если $G=\mathbb{R}^n$).

Сходимость в $\mathcal{D}'(G)$, как и в одномерном случае, определяется как слабая (поточечная) сходимость функционалов (см. § 4, определение 6).

Определение регулярной обобщенной функции дословно переносится на многомерный случай.

Остается прежним и определение δ-функции и смещенной в точку $x_0 \in G$ δ-функции, обозначаемой через $\delta(x_0)$ или чаще, но не всегда удачно через $\delta(x-x_0)$.

Рассмотрим теперь некоторые примеры.

Пример 7. Положим

$$\Delta_t(x) := \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}},$$

где $a>0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^n$. Покажем, что эти функции, рассматриваемые как регулярные распределения в $\mathbb{R}^n$, сходятся в $\mathcal{D}'$ при $t\to+0$ к δ-функции $\mathbb{R}^n$.

Для доказательства достаточно проверить, что семейство функций Δ_t является δ-образным в $\mathbb{R}^n$ при $t\to+0$.

Используя замену переменной, сведение кратного интеграла к повторному и значение интеграла Эйлера — Пуассона, находим

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_t(x)\,dx = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left|\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right|^2} d\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du\right)^n = 1.$$

Далее при любом фиксированном значении $r>0$

$$\int_{B(0,\,r)} \Delta_t(x)\,dx = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\int_{B\left(0,\,\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right)} e^{-|\xi^2|}\,d\xi \to 1,$$

когда $t\to+0$.

Учитывая, наконец, неотрицательность функций $\Delta_t(x)$, заключаем, что они действительно составляют δ-образное семейство функций в $\mathbb{R}^n$.

Пример 8. Обобщением δ-функции (отвечающей, например, единичному заряду, помещенному в начало координат пространства $\mathbb{R}^n$), является следующая обобщенная функция δ_S (отвечающая распределению заряда по кусочно гладкой поверхности S с единичной поверхностной плотностью распределения). Действие δ_S на функции $\varphi\in\mathcal{D}$ определяется соотношением

$$\langle\delta_S, \varphi\rangle := \int_S \varphi(x)\,d\sigma.$$

Распределение δ_S, так же как и распределение δ, не является регулярной обобщенной функцией.

Умножение распределения на функцию из $\mathscr{D}$ определяется в $\mathbb{R}^n$ так же, как и в одномерном случае.

Пример 9. Если $\mu \in \mathscr{D}$, то $\mu\delta_S$ есть обобщенная функция, действующая по закону

$$\langle \mu\delta_S, \varphi\rangle = \int\limits_S \varphi(x)\,\mu(x)\,d\sigma. \tag{10}$$

Если бы функция $\mu(x)$ была определена только на поверхности S, то равенство (10) можно было бы рассматривать как определение обобщенной функции $\mu\delta_S$. Так вводимая обобщенная функция по естественной аналогии называется *простым слоем на поверхности S с плотностью* μ.

Дифференцирование обобщенных функций в многомерном случае определяется по тому же принципу, что и в одномерном, но имеет некоторую специфику.

Если $F \in \mathscr{D}'(G)$ и $G \subset \mathbb{R}^n$, то обобщенная функция $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ определяется соотношением

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}, \varphi\right\rangle := -\left\langle F, \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$\langle F^{(m)}, \varphi\rangle = (-1)^{|m|}\langle F, \varphi^{(m)}\rangle, \tag{11}$$

где $m = (m_1, \ldots, m_m)$ — мультииндекс и $|m| = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$.

Естественно проверить, что $\frac{\partial^2 F}{\partial x^i\,\partial x^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^j\,\partial x^i}$. Но это следует из равенства правых членов соотношений

$$\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x^i\,\partial x^j}, \varphi\right\rangle = \left\langle F, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j\,\partial x^i}\right\rangle,$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x^j\,\partial x^i}, \varphi\right\rangle = \left\langle F, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i\,\partial x^j}\right\rangle,$$

вытекающего из классического равенства $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i\,\partial x^j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j\,\partial x^i}$, справедливого для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$.

Пример 10. Рассмотрим дифференциальный оператор $D = \sum\limits_m a_m D^m$, где $m = (m_1, \ldots, m_n)$ — мультииндекс, $D^m = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{m_n}$, a_m — числовые коэффициенты, а сумма распространяется на некоторый конечный набор мультииндексов.

Транспонированным по отношению к оператору D или *сопряженным* к D называется оператор, обозначаемый обычно символом

${}^{t}D$ или D^* и определяемый соотношением

$$\langle DF, \varphi\rangle =: \langle F, {}^{t}D\varphi\rangle,$$

которое должно быть выполнено при любых $\varphi \in \mathcal{D}$ и $F \in \mathcal{D}'$.

Исходя из равенства (11), можно теперь написать явную формулу

$${}^{t}D = \sum_m (-1)^{|m|} a_m D^m$$

для оператора, сопряженного к указанному дифференциальному оператору D.

В частности, если все значения $|m|$ четны, оператор D оказывается *самосопряженным*, т. е. для него ${}^{t}D = D$.

Ясно, что операция дифференцирования в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ сохраняет все свойства дифференцирования в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Рассмотрим, однако, следующий специфически многомерный и важный

Пример 11. Пусть S — гладкое $(n-1)$-мерное подмногообразие $\mathbb{R}^n$, т. е. S — гладкая гиперповерхность. Предположим, что определенная на $\mathbb{R}^n \setminus S$ функция f бесконечно дифференцируема и все ее частные производные имеют предел в каждой точке $x \in S$ при одностороннем подходе к x с любой стороны (локально) поверхности S. Разность между этими пределами будет скачком $\Gamma \frac{\partial f}{\partial x^i}$ рассматриваемой частной производной в точке x, соответствующим определенному направлению прохода сквозь поверхность S в точке x. При изменении этого направления меняется знак скачка. Скачок, таким образом, можно считать функцией на ориентированной поверхности, если, например, условиться, что направление прохода задается ориентирующей поверхность нормалью.

Функция $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ определена, непрерывна и локально ограничена вне S, причем в силу сделанных допущений f локально является финально ограниченной при подходе к самой поверхности S. Поскольку S — подмногообразие $\mathbb{R}^n$, как бы мы ни доопределили $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ на S, мы получим функцию с разрывами разве что на S, и потому локально интегрируемую в $\mathbb{R}^n$. Но интегрируемые функции, отличающиеся на множестве меры нуль, имеют равные интегралы, поэтому, не заботясь о значениях на S, можно считать, что $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ порождает некоторую регулярную обобщенную функцию $\left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}$, действующую по закону

$$\left\langle\left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}, \varphi\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \varphi\right)(x)\, dx.$$

Покажем теперь, что если f рассматривать как обобщенную функцию, то в смысле дифференцирования обобщенных функций имеет место следующая важная формула:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}+(\int f)_S \cos\alpha_i\delta_S, \tag{12}$$

где последний член понимается в смысле равенства (10); $(\int f)_S$ — скачок функции f в точке $x\in S$, соответствующий любому (из двух возможных) направлению единичной нормали $\boldsymbol{n}$ к S в точке x, а $\cos\alpha_i$ — проекция $\boldsymbol{n}$ на ось x^i (т. е. $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_k)$).

◀ Формула (12) обобщает равенство (17) из § 4, которое мы и используем при ее выводе.

Рассмотрим для определенности случай, когда $i=1$. Тогда

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x^1}, \varphi\right\rangle:=-\left\langle f, \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right\rangle=-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(f\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)(x)\,dx=$$

$$=-\int\limits_{x^2}\dots\int\limits_{x^n}dx^2\dots dx^n\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,dx^1=$$

$$=\int\limits_{x^2}\dots\int\limits_{x^n}dx^2\dots dx^n\left[(\int f)\varphi+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x^1}\varphi\,dx^1\right]=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f}{\partial x^1}\varphi\,dx+\int\limits_{x^2}\dots\int\limits_{x^n}(\int f)\varphi\,dx^2\dots dx^n.$$

Здесь скачок $\int f$ функции f берется в точке $x=(x^1, x^2, \dots, x^n)\in S$ при прохождении через нее в направлении i-й координатной оси. В этой же точке берется значение функции φ при вычислении произведения $(\int f)\varphi$. Значит, последний интеграл можно записать в виде поверхностного интеграла первого рода

$$\int\limits_S(\int f)\varphi\cos\alpha_1\,d\sigma,$$

где α_1 — угол между направлением оси x_1 и нормалью к S в точке x, направленной так, что при прохождении через точку $x\in S$ в направлении этой нормали функция f имеет именно полученный нами скачок $\int f$. Это означает всего-навсего, что $\cos\alpha_1\geqslant 0$. Остается заметить, что если выбрать другое направление нормали, то для него одновременно изменят знак и скачок функции и косинус угла между направлением оси x^1 и направлением нормали, значит, произведение $(\int f)\cos\alpha_1$ при этом не изменится. ▶

Замечание 1. Как видно из проведенного доказательства, формула (12) имеет место уже тогда, когда для функции f определен скачок $(\int f)_S$ в любой точке $x\in S$, а вне S существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, локально интегрируемая в $\mathbb{R}^n$ хотя бы в несобственном смысле, порождающая регулярную обобщенную функцию $\left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}$.

Замечание 2. В точках $x \in S$, в которых направление оси x^1 не трансверсально S, т. е. касательно к S, могут возникнуть затруднения в определении скачка Γf по такому направлению. Но из доказательства формулы (12) видно, что последний ее член получен в связи с интегралом

$$\int\limits_{x^2 \ldots x^n} \ldots \int (\Gamma f)\, \varphi\, dx^2 \ldots dx^n.$$

Проекция на плоскость $x^2, \ldots, x^n$ множества E указанных точек имеет $(n-1)$-мерную меру нуль и потому не влияет на значение интеграла. Значит, форму (12) можно считать имеющей смысл и справедливой всегда, если при $\cos\alpha_i = 0$ символу $(\Gamma f)_S \cos\alpha_i$ приписывать значение нуль.

Замечание 3. Аналогичные соображения позволяют пренебрегать и множествами, имеющими площадь нуль, поэтому формулу (12) можно считать доказанной и для кусочно гладких поверхностей.

В качестве следующего примера покажем, как из дифференциального соотношения (12) непосредственно получается классическая интегральная формула Гаусса—Остроградского, причем в том наиболее свободном от излишних аналитических требований виде, о котором мы в свое время поставили читателя в известность.

Пример 12. Пусть G — конечная область в $\mathbb{R}^n$, ограниченная кусочно гладкой, поверхностью S; $\boldsymbol{A} = (A^1, \ldots, A^n)$ — векторное поле, непрерывное в $\bar{G}$ и такое, что функция $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial A^i}{\partial x^i}$ определена в G и интегрируема в G хотя бы в несобственном смысле.

Если считать, что вне $\bar{G}$ поле $\boldsymbol{A}$ равно нулю, то скачок такого поля в любой точке x границы S области G при выходе из области G равен $-\boldsymbol{A}(x)$. Полагая, что $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S, применяя формулу (12) к каждой компоненте A^i поля $\boldsymbol{A}$ и суммируя эти равенства, приходим к соотношению

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \{\operatorname{div} \boldsymbol{A}\} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n})\, \delta_S, \tag{13}$$

в котором $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{n}$ в соответствующей точке $x \in S$.

Соотношение (13) — это равенство обобщенных функций. Применим его к функции $\psi \in C_0^{(\infty)}$, равной единице на $\bar{G}$ (существование и построение такой функции уже неоднократно обсуждалось). Поскольку для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$

$$\langle \operatorname{div} \boldsymbol{A}, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{A} \cdot \nabla\varphi)\, dx \tag{14}$$

(что вытекает непосредственно из определения дифференцирования обобщенной функции), то для нашего поля $\boldsymbol{A}$ и функции ψ, очевидно, $\langle \operatorname{div} \boldsymbol{A}, \psi \rangle = 0$. Но с учетом равенства (13) это дает соотношение

$$0 = \langle \{\operatorname{div} \boldsymbol{A}\}, \psi \rangle - \langle (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n})\, \delta_S, \psi \rangle,$$

которое в классической записи

$$0 = \int_G \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dx - \int_S (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n})\, d\sigma \tag{15}$$

совпадает с формулой Гаусса — Остроградского.

Разберем еще несколько важных примеров, связанных с дифференцированием обобщенных функций.

Пример 13. Рассмотрим векторное поле $\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}$, определенное в $\mathbb{R}^3 \setminus 0$, и покажем, что в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ обобщенных функций имеет место равенство

$$\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3} = 4\pi\delta. \tag{16}$$

Заметим сначала, что при $\boldsymbol{x} \neq 0$ $\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3} = 0$ в классическом смысле.

Теперь, используя последовательно определение $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ в виде соотношения (14), определение несобственного интеграла, равенство $\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3} = 0$ при $\boldsymbol{x} \neq 0$, формулу (15) Гаусса — Остроградского и финитность функции φ, получаем

$$\left\langle \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}, \varphi \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3} \cdot \nabla\varphi(x) \right) dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} -\int_{\varepsilon < |x| < 1/\varepsilon} \left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3} \cdot \nabla\varphi(x) \right) dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} -\int_{\varepsilon < |x| < 1/\varepsilon} \operatorname{div} \left(\frac{\boldsymbol{x}\varphi(x)}{|\boldsymbol{x}|^3} \right) dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} -\int_{|x| = \varepsilon} \varphi(x) \frac{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{x}|^3}\, d\sigma = 4\pi\varphi(0) = \langle 4\pi\delta, \varphi \rangle.$$

Для оператора $A\colon \mathcal{D}'(G)\to\mathcal{D}'(G)$, как и прежде, *фундаментальным решением* назовем обобщенную функцию $E\subset\mathcal{D}'(G)$, для которой $A(E)=\delta$.

Пример 14. Проверим, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ регулярная обобщенная функция $E(x)=-\dfrac{1}{4\pi|x|}$ является фундаментальным решением оператора Лапласа $\Delta=\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial}{\partial x^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial}{\partial x^3}\right)^2$.

Действительно, $\Delta=\operatorname{div}\operatorname{grad}$, а $\operatorname{grad}E(x)=\dfrac{x}{4\pi|x|^3}$ при $x\neq 0$, поэтому равенство $\operatorname{div}\operatorname{grad}E=\delta$ вытекает из доказанного соотношения (16).

Можно, как и в примере 13, проверить, что при любом $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, в $\mathbb{R}^n$

$$\operatorname{div}\frac{x}{|x|^n}=\sigma_n\delta, \tag{16'}$$

где $\sigma_n=\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Отсюда с учетом соотношения $\Delta=\operatorname{div}\operatorname{grad}$ можно заключить, что

$$\Delta\ln|x|=2\pi\delta \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2$$

и

$$\Delta\frac{1}{|x|^{n-2}}=-(n-2)\sigma_n\delta \text{ в } \mathbb{R}^n,\qquad n>2.$$

Пример 15. Проверим, что функция

$$E(x,\ t)=\frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}},$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$, а H — функция Хевисайда (т. е. мы полагаем $E(x,\ t)=0$ при $t<0$), удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta\right)E=\delta.$$

Здесь Δ — оператор Лапласа по x в $\mathbb{R}^n$, а $\delta=\delta(x,\,t)$ есть δ-функция в $\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}_t=\mathbb{R}^{n+1}$.

При $t>0$ $E\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{n+1})$ и прямым дифференцированием убеждаемся в том, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta\right)E=0 \quad \text{при} \quad t>0.$$

Учитывая это обстоятельство, а также результат примера 7, для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ получаем

$$\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta\right)E,\ \varphi\right\rangle = -\left\langle E,\ \left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta\right)\varphi\right\rangle =$$

$$= -\int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} E(x,\ t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-a^2\,\Delta\varphi\right)dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} E(x,\ t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-a^2\,\Delta\varphi\right)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{\mathbb{R}^n} E(x,\ \varepsilon)\,\varphi(x,\ \varepsilon)\,dx + \int_\varepsilon^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\,\Delta E\right)\varphi\,dx\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{\mathbb{R}^n} E(x,\ \varepsilon)\,\varphi(x,\ 0)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} E(x,\ \varepsilon)\,(\varphi(x,\ \varepsilon)-\varphi(x,\ 0))\,dx\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathbb{R}^n} E(x,\ \varepsilon)\,\varphi(x,\ 0)\,dx = \varphi(0,\ 0) = \langle\delta,\ \varphi\rangle.$$

Пример 16. Покажем, что функция

$$E(x,\ t) = \frac{1}{2a}H(at-|x|),$$

где $a>0$, $x\in\mathbb{R}_x^1$, $t\in\mathbb{R}_t^1$, H — функция Хевисайда, удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E=\delta,$$

в котором $\delta=\delta(x,\ t)$ есть δ-функция пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_x^1\times\mathbb{R}_t^1) = \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, полагая для краткости $\Box_a := \frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, находим

$$\langle\Box_a E,\ \varphi\rangle = \langle E,\ \Box_a\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}_x} dx \int_{\mathbb{R}_t} E(x,\ t)\,\Box_a\varphi(x,\ t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{\frac{|x|}{a}}^{+\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,dt - \frac{a}{2}\int_0^{+\infty} dt \int_{-at}^{at}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(x,\ \frac{|x|}{a}\right)dx - \frac{a}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(at,\ t)-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(-at,\ t)\right]dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d\varphi}{dt}(at,\ t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{d\varphi}{dt}(-at,\ t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(0,\ 0)+\frac{1}{2}\varphi(0,\ 0) = \varphi(0,\ 0) = \langle\delta,\ \varphi\rangle.$$

В § 4 мы достаточно подробно изложили роль фундаментального решения (аппаратной функции) оператора и роль свертки в задаче определения входного воздействия u по выходу $\tilde{u}$ линейного оператора $Au=\tilde{u}$, сохраняющего сдвиги. Все изложенное там по этому поводу без изменений переносится на многомерный случай. Значит, если нам известно фундаментальное решение E оператора A, т. е. если $AE=\delta$, то можно предъявить и решение u уравнения $Au=f$ в виде свертки $u=f*E$.

Пример 17. Используя функцию $E(x, t)$ примера 16, можно, таким образом, предъявить решение

$$u(x, t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\,d\xi$$

уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f,$$

являющееся сверткой $f*E$ функций f и E, заведомо существующей в предположении, например, непрерывности функции f. Непосредственным дифференцированием возникшего интеграла по параметрам легко проверить, что $u(x, t)$ — действительно решение уравнения $\Box_a u=f$.

Пример 18. Аналогично на основе результата примера 15 находим решение

$$u(x, t)=\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n}\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\xi$$

уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f$, например, в предположениях непрерывности и ограниченности функции f, обеспечивающих существование написанной свертки $f*E$. Отметим, что эти предположения делаются для примера и далеки от обязательных. Так, с точки зрения обобщенных функций можно было бы ставить вопрос о решении уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f$, допуская в качестве $f(x, t)$ обобщенную функцию $\varphi(x)\cdot\delta(t)$, где $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, а $\delta\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Формальная подстановка такой функции f под знак интеграла приводит к соотношению

$$u(x, t)=\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(\xi)}{[2a\sqrt{\pi t}]^n}\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}}\,d\xi.$$

Применяя правила дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, можно убедиться, что эта функция является решением уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=0$ при $t>0$. Отметим, что $u(x, t)\to\varphi(x)$, когда $t\to+0$. Это вытекает из результата примера 7, где была установлена δ-образность встретившегося здесь семейства функций.

Пример. 19. Наконец, вспоминая полученное в примере 14 фундаментальное решение оператора Лапласа, в трехмерном случае находим решение

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|}$$

уравнения Пуассона $\Delta u=-4\pi f$, которое с точностью до обозначений и перенормировки совпадает с рассмотренным нами ранее потенциалом (4) распределенного в пространстве с плотностью f заряда.

Если в качестве функции f взять $\nu(x)\delta_S$, где S — кусочно гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, то формальная подстановка в интеграл приводит к функции

$$u(x)=\int_S\frac{\nu(\xi)\,d\sigma(\xi)}{|x-\xi|},$$

являющейся, как мы знаем, потенциалом простого слоя, точнее потенциалом заряда, распределенного по поверхности $S\subset\mathbb{R}^3$ с поверхностной плотностью $\nu(x)$.

Задачи и упражнения

1. a. Рассуждая, как и в примере 3, где была установлена непрерывность объемного потенциала (4), докажите непрерывность потенциала простого слоя (8).

b Проведите полное доказательство утверждений 4 и 5.

2. a. Покажите, что для любого множества $M\subset\mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon>0$ можно построить функцию f класса $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, удовлетворяющую следующим трем условиям одновременно: $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $(0\leqslant f(x)\leqslant 1)$; $\forall x\in M$ $(f(x)=1)$; $\operatorname{supp} f\subset M_\varepsilon$, где M_ε — ε-раздутие (т е. ε-окрестность) множества M.

b. Докажите, что для любого замкнутого в $\mathbb{R}^n$ множества M существует такая неотрицательная функция $f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, что $(f(x)=0)\Longleftrightarrow(x\in M)$.

3. a. Решите задачи 6 и 7 из § 4 применительно к случаю пространства $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности.

b. Покажите, что обобщенная функция δ_S (простой слой) не является регулярной.

4. Используя свертку, докажите следующие варианты аппроксимационной теоремы Вейерштрасса.

a. Любую непрерывную на компактном n-мерном промежутке $I\subset\mathbb{R}^n$ функцию $f\colon I\to\mathbb{R}$ можно равномерно приблизить на нем алгебраическим многочленом от n переменных.

b. Предыдущее утверждение остается в силе, даже если заменить I произвольным компактом $K\subset\mathbb{R}^n$ и считать, что $f\in C(K, \mathbb{C})$.

c. Для любого открытого в $\mathbb{R}^n$ множества $G\subset\mathbb{R}^n$ и любой функции $f\in C^{(m)}(G, \mathbb{R})$ найдется такая последовательность $\{P_k\}$ алгебраических многочленов от n переменных, что при любом мультииндексе $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ таком, что $|\alpha|\leqslant m$, на каждом компакте $K\subset G$ будет $P_k^{(\alpha)}\rightrightarrows f^{(\alpha)}$ при $k\to\infty$.

d. Если G — ограниченное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ и $f\in C^{(\infty)}(\bar{G}, \mathbb{R})$, то существует такая последовательность $\{P_k\}$ алгебраических многочленов от n переменных, что при любом $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $P_k^{(\alpha)}\rightrightarrows f^{(\alpha)}$ на $\bar{G}$, когда $k\to\infty$.

e. Любую периодическую с периодами $T_1, T_2, \ldots, T_n$ по переменным $x^1, \ldots, x^n$ функцию $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ можно в $\mathbb{R}^n$ равномерно аппроксимировать тригонометрическими многочленами от n переменных, имеющими те же периоды $T_1, T_2, \ldots, T_n$ по соответствующим переменным.

5. Эта задача содержит дальнейшие сведения об усредняющем действии свертки.

a. На основе числового неравенства Минковского в свое время при $p \geqslant 1$ мы получили интегральное неравенство Минковского

$$\left(\int_X |a(x)+b(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X |a|^p(x)\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_X |b|^p(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

Оно в свою очередь позволяет предугадать следующее *обобщенное интегральное неравенство Минковского*:

$$\left(\int_X \left|\int_Y f(x, y)\,dy\right|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \int_Y \left(\int_X |f|^p(x, y)\,dx\right)^{1/p} dy.$$

Докажите это иеравенство, считая что $p \geqslant 0$, что X, Y — измеримые множества (например, промежутки в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно) и что правая часть неравенства конечна.

b. Применив обобщенное неравенство Минковского к свертке $f * g$, покажите, что при $p \geqslant 1$ имеет место соотношение $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$, где, как всегда, $\|u\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p(x)\,dx\right)^{1/p}$.

c. Пусть $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, причем $\varphi(x) \leqslant 1$ на $\mathbb{R}^n$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$. Положим $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ и $f_\varepsilon := f * \varphi_\varepsilon$ при $\varepsilon > 0$. Покажите, что если $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{R}^n)$ $\left(\text{т. е. если существует интеграл } \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx\right)$, то $f_\varepsilon \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ и $\|f_\varepsilon\|_p \leqslant \|f\|_p$.

Отметим, что функцию f_ε часто называют *усреднением функции f с ядром φ_ε*.

d. Сохраняя предыдущие обозначения, проверьте, что на любом промежутке $I \subset \mathbb{R}^n$ справедливо следующее неравенство:

$$\|f_\varepsilon - f\|_{p,I} \leqslant \sup_{|h| < \varepsilon} \|\tau_h f - f\|_{p,I},$$

где $\|u\|_{p,I} = \left(\int_I |u|^p(x)\,dx\right)^{1/p}$, а $\tau_h f(x) = f(x-h)$.

e. Покажите, что если $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{R}^n)$, то $\|\tau_h f - f\|_{p,I} \to 0$ при $h \to 0$.

f. Докажите, что для любой функции $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$ справедливы соотношения $\|f_\varepsilon\|_p \leqslant \|f\|_p$ и $\|f_\varepsilon - f\|_p \to 0$ при $\varepsilon \to +0$.

g. Пусть $\mathcal{R}_p(G)$ — векторное с нормой $\|\ \|_{p,G}$ пространство абсолютно интегрируемых на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ функций. Покажите, что функции класса $C^{(\infty)}(G) \cap \mathcal{R}_p(G)$ образуют всюду плотное подмножество $\mathcal{R}_p(G)$ и что это же верно и для множества $C_0^{(\infty)}(G) \cap \mathcal{R}_p(G)$.

h. Случаю $p = \infty$ в предыдущей задаче можно сопоставить следующее утверждение: любую непрерывную на G функцию можно в G равномерно аппроксимировать функциями класса $C^{(\infty)}(G)$.

i. Если f — T-периодическая локально абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, то, полагая $\|f\|_{p,T} = \left(\int_a^{a+T} |f|^p(x)\,dx\right)^{1/p}$, будем через $\mathcal{R}_p^T$ обозначать линейное пространство с указанной нормой. Докажите, что $\|f_\varepsilon - f\|_p^T \to 0$ при $\varepsilon \to +0$.

j. Пользуясь тем, что свертка двух функций, из которых одна периодическая, сама периодична, покажите, что гладкие периодические функции класса $C^{(\infty)}$ всюду плотны в $\mathscr{R}_p^T$.

6. a Сохраняя обозначения примера 11 и используя формулу (12), проверьте, что если $f \in C^{(2)}(\overline{\mathbb{R}^n \setminus S})$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right\} + \frac{\partial}{\partial x^j}((\int f)_S \cos\alpha_i \delta_S) + \left(\int \left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}\right)_S \cos\alpha_j \delta_S.$$

b. Покажите, что сумма $\sum_{i=1}^{n}\left(\int \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_S \cos\alpha_i$ равна скачку $\left(\int \frac{\partial f}{\partial n}\right)_S$ нормальной производной от функции f в соответстиующей точке $x \in S$, причем этот скачок не зависит от направления нормали и равен сумме $\left(\frac{\partial f}{\partial n_1} + \frac{\partial f}{\partial n_2}\right)(x)$ нормальных производных от f, взятых в точке x с обеих сторон поверхности S.

c. Проверьте соотношение

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left(\int \frac{\partial f}{\partial n}\right)_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial n}((\int f)_S \delta_S),$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — нормальная производная $\left(\text{т. е. } \left\langle \frac{\partial}{\partial n} F, \varphi\right\rangle := -\left\langle F, \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\rangle\right)$, а $(\int f)_S$ — скачок функции f в точке $x \in S$ в направлении нормали n.

d Используя полученное выражение для Δf, докажите справедливость классической формулы Грина

$$\int_G (f\,\Delta\varphi - \varphi\,\Delta f)\,dx = \int_S \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial f}{\partial n}\right) d\sigma$$

в предположении, что G — конечная область в $\mathbb{R}^n$, ограниченная кусочно гладкой поверхностью S; $f, \varphi \in C^{(1)}(\overline{G}) \cap C^{(2)}(G)$, а стоящий слева интеграл существует хотя бы как несобственный

e Покажите, что если δ-функция соответствует единичному заряду, помещенному в начале координат 0 пространства $\mathbb{R}^n$, и функция $-\frac{\partial \delta}{\partial x^1}$ отвечает диполю с электрическим моментом $+1$, расположенному в точке 0 и ориентированному вдоль оси x^1 (см задачу 11е из § 4), а функция $\nu(x)\delta_S$ — простой слой, отвечает распределению зарядов по поверхности S с поверхностной плотностью $\nu(x)$, то функция $-\frac{\partial}{\partial n}(\nu(x)\delta_S)$, называемая *двойным слоем*, отвечает распределению диполей по поверхности S, ориентированных по нормали n и имеющих поверхностную плотность момента $\nu(x)$.

f. Полагая в формуле Грина $\varphi = \frac{1}{|x-y|}$ и используя результат примера 14, покажите, что любая гармоническая в области G функция f класса $C^{(1)}(\overline{G})$ представляется в виде суммы потенциала простого и двойного слоя, расположенных на границе S области G

7. a. Функция $\frac{1}{|x|}$ является потенциалом напряженности $A = -\frac{x}{|x|^3}$ электрического поля, создаваемого в пространстве $\mathbb{R}^3$ единичным зарядом, помещенным в начало координат. Нам известно также, что

$$\operatorname{div}\left(-\frac{x}{|x|^3}\right) = 4\pi\delta, \quad \operatorname{div}\left(-\frac{qx}{|x|^3}\right) = 4\pi q\delta, \quad \operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{q}{|x|}\right) = 4\pi\delta.$$

Исходя из этого объясните, почему надо полагать, что функция $U(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|}$ должна удовлетворять уравнению $\Delta U = -4\pi\mu$. Проверьте, что она действительно удовлетворяет написанному уравнению Пуассона.

b. Физическое следствие формулы Гаусса — Остроградского, известное в теории электромагнитного поля как *теорема Гаусса*, состоит в том, что поток через замкнутую поверхность S напряженности электрического поля, создаваемого распределенными в пространстве $\mathbb{R}^3$ зарядами, равен $4\pi Q$, где Q — полный заряд в области, ограниченной поверхностью S Докажите эту теорему Гаусса.

8. Проверьте следующие равенства, понимаемые в смысле теории обобщенных функций.

a. $\Delta E = \delta$, если

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{при } x \in \mathbb{R}^2, \\ -\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{n/2}(n-2)} |x|^{-(n-2)} & \text{при } x \in \mathbb{R}^n,\ n > 2. \end{cases}$$

b $(\Delta + k^2) E = \delta$, если $E(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$ или если $E(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$ и $x \in \mathbb{R}^3$

c. $\Box_a E = \delta$, где $\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^2\right]$, а $E = \frac{H(at - |x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}$ при $x \in \mathbb{R}^2$ или $E(x) = \frac{H(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}} \equiv \frac{H(t)}{2\pi a}\delta(a^2t^2 - |x|^2)$ при $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$.

Здесь $H(t)$ — функция Хевисайда, $S_{at} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = at\}$ — сфера, $a > 0$.

d. Используя предыдущие результаты, предъявите решение u уравнения $Au = f$ для соответствующего дифференциального оператора A в виде свертки $f * E$ и проверьте, например, в предположении непрерывности функции f, что полученные вами интегралы, зависящие от параметра, действительно удовлетворяют уравнению $Au = f$.

ГЛАВА XVIII

РЯД ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. Основные общие представления, связанные с понятием ряда Фурье*)

1. Ортогональные системы функций.

а. Разложение вектора в линейном пространстве. На протяжении всего курса анализа мы неоднократно отмечали, что те или иные классы функций по отношению к стандартным арифметическим операциям образуют линейные пространства. Таковы, например, основные для анализа классы гладких, непрерывных или интегрируемых на области $X \subset \mathbb{R}^n$ вещественно, комплексно или вообще векторнозначных функций.

С точки зрения алгебры равенство

$$f = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n,$$

где f, $f_1, \ldots, f_n$ — функции данного класса, а α_i — коэффициенты из поля $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, попросту означает, что вектор f является линейной комбинацией векторов $f_1, \ldots, f_n$ рассматриваемого линейного пространства.

В анализе, как правило, приходится рассматривать «бесконечные линейные комбинации» — ряды функций вида

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k. \tag{1}$$

Определение суммы ряда требует, чтобы в рассматриваемом линейном пространстве была задана некоторая топология (в част-

---

*) Ж. Б. Ж. Фурье (1768—1830) — французский математик. Его основной труд «Аналитическая теория теплоты» (1822) содержал выведенное Фурье уравнение теплопроводности и метод разделения переменных (метод Фурье) его решения (см. стр. 506). Ключом в методе Фурье является разложение функции в тригонометрический ряд (ряд Фурье). Исследованием возможности такого разложения занимались впоследствии многие крупные математики. Это, в частности, привело к созданию теории функций действительного переменного, теории множеств, а также способствовало развитию самого понятия функции.

ности, метрика), позволяющая судить о стремлении к нулю разности $f - S_n$, где $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$.

Основным для классического анализа приемом введения метрики на линейном пространстве является определение в этом пространстве той или иной нормы вектора или того или иного скалярного произведения векторов. Обсуждению этих понятий был посвящен § 1 гл X.

Сейчас мы будем рассматривать только пространства, наделенные скалярным произведением (которое, как и прежде, будем обозначать символом $\langle\ ,\ \rangle$). В таких пространствах можно говорить об ортогональных векторах, ортогональных системах векторов и ортогональных базисах, подобно тому, как это говорилось в знакомом из аналитической геометрии случае трехмерного евклидова пространства.

Определение 1. Векторы x, y линейного пространства, наделенного скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$, называются *ортогональными* (относительно этого скалярного произведения), если $\langle x, y\rangle = 0$.

Определение 2. Система векторов $\{x_k;\ k \in K\}$ называется *ортогональной*, если векторы системы, отвечающие различным значениям индекса k, попарно ортогональны.

Определение 3. Система векторов $\{e_k;\ k \in K\}$ называется *ортонормированной* (*или ортонормальной*), если для любых индексов $i, j \in K$ выполняется соотношение $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$, где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, т. е. $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$

Определение 4. Конечная система векторов $x_1, \ldots, x_n$ называется *линейно независимой*, если равенство $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ возможно, лишь когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ (в первом случае 0 — нулевой вектор пространства, во втором случае 0 — нуль поля коэффициентов).

Произвольная система векторов линейного пространства называется *системой линейно независимых векторов*, если линейно независима каждая ее конечная подсистема.

Основной вопрос, который нас сейчас будет интересовать, это вопрос о разложении вектора пространства по заданной системе линейно независимых векторов.

Имея в виду дальнейшие приложения к пространствам функций (которые могут быть и бесконечномерны), мы должны считаться с тем, что такое разложение может, в частности, привести к ряду типа ряда (1). Именно в этом и будет состоять элемент анализа при рассмотрении того основного и по существу алгебраического вопроса, который мы поставили.

Как известно из курса аналитической геометрии, разложения по ортогональным и ортонормированным системам имеют много технических преимуществ в сравнении с разложениями по произвольным линейно независимым системам (легко вычисляются коэффициенты разложения; по координатам векторов в ортонормированном базисе легко вычисляется скалярное произведение этих векторов и т. д.).

Именно поэтому мы будем в основном интересоваться разложениями по ортогональным системам. В пространствах функций это будут *разложения по ортогональным системам функций* или *ряды Фурье*, изучению которых и посвящена эта глава.

b. Некоторые примеры ортогональных систем функций. Развивая пример 12 из § 1 гл. X, на линейном пространстве $\mathcal{R}_2(X, \mathbb{C})$ локально интегрируемых на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ функций, имеющих интегрируемый на X (в собственном или несобственном смысле) квадрат модуля, введем скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle := \int_X (f \cdot \bar{g})(x)\, dx. \tag{2}$$

Поскольку $|f \cdot \bar{g}| \leqslant \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$, интеграл в равенстве (2) сходится и, значит, корректно определяет величину $\langle f, g\rangle$.

Если речь будет о вещественнозначных функциях, то в соответствующем вещественном пространстве $\mathcal{R}_2(X, \mathbb{R})$ соотношение (2) сводится к равенству

$$\langle f, g\rangle := \int_X (f \cdot g)(x)\, dx. \tag{3}$$

Опираясь на свойства интеграла, легко проверить, что все указанные в § 1 гл. X аксиомы скалярного произведения в этом случае выполнены, если отождествлять функции, отличающиеся лишь на множествах n-мерной меры нуль. Всюду дальше в основном тексте параграфа скалярные произведения функций будут пониматься в смысле равенств (2) и (3).

Пример 1. Вспомним, что при целых m и n

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \cdot e^{-inx}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{если } m = n; \end{cases} \tag{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \pi, & \text{если } m = n \neq 0, \\ 2\pi, & \text{если } m = n = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0; \tag{6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \pi, & \text{если } m = n \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Эти соотношения показывают, что *система экспонент* $\{e^{inx};\ n \in \mathbb{Z}\}$ является ортогональной системой векторов пространства $\mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ относительно скалярного произведения (2), а *тригонометрическая система* $\{1, \cos nx, \sin nx;\ n \in \mathbb{N}\}$ ортогональна в $\mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Если рассматривать тригонометрическую систему как набор векторов в $\mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, т. е. допустить линейные комбинации с комплексными коэффициентами, то в силу формул Эйлера $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$, $\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})$, $\sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$ окажется, что рассмотренные системы линейно выражаются друг через друга, т. е. алгебраически эквивалентны. По этой причине систему экспонент $\{e^{inx};\ n \in \mathbb{N}\}$ также называют тригонометрической системой или точнее *тригонометрической системой в комплексной записи.*

Соотношения (4)—(7) показывают, что рассмотренные системы ортогональны, но не нормированы, а системы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx};\ n \in \mathbb{Z}\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx;\ n \in \mathbb{N}\right\}$ уже ортонормированы.

Если вместо отрезка $[-\pi, \pi]$ взять произвольный отрезок $[-l, l] \subset \mathbb{R}$, то заменой переменной можно получить аналогичные системы $\left\{e^{i\frac{\pi}{l}nx};\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ и $\left\{1, \cos\frac{\pi}{l}nx, \sin\frac{\pi}{l}nx;\ n \in \mathbb{N}\right\}$, ортогональные в $\mathscr{R}_2([-l, l], \mathbb{C})$ и $\mathscr{R}_2([-l, l], \mathbb{R})$; а также соответствующие ортонормированные системы

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}} e^{i\frac{\pi}{l}nx};\ n \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos\frac{\pi}{l}nx, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin\frac{\pi}{l}nx;\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Пример 2. Пусть I_x — промежуток в $\mathbb{R}^m$, а I_y — промежуток в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\{f_i(x)\}$ — ортогональная система функций в $\mathscr{R}_2(I_x, \mathbb{R})$, а $\{g_j(y)\}$ — ортогональная система функций в $\mathscr{R}_2(I_y, \mathbb{R})$. Тогда, как следует из теоремы Фубини, система функций $\{u_{ij}(x, y) := f_i(x) g_j(y)\}$ ортогональна в $\mathscr{R}_2(I_x \times I_y, \mathbb{R})$.

Пример 3. Заметим, что при $\alpha \neq \beta$

$$\int_0^l \sin \alpha x \sin \beta x\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\alpha-\beta)l}{\alpha-\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)l}{\alpha+\beta}\right) =$$

$$= \cos\alpha l \cos\beta l \cdot \frac{\beta \operatorname{tg}\alpha l - \alpha \operatorname{tg}\beta l}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Значит, если величины α и β таковы, что $\frac{\operatorname{tg}\alpha l}{\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\beta l}{\beta}$, то исходный интеграл равен нулю. Следовательно, если $\xi_1 < \xi_2 < \ldots$ $\ldots < \xi_n < \ldots$ последовательность корней уравнения $\operatorname{tg}\xi l = c\xi$, где c — произвольная постоянная, то система функций $\{\sin(\xi_n x);$

$n \in \mathbb{N}\}$ ортогональна на отрезке $[0, l]$. В частности, при $c=0$ получаем знакомую систему $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{l} nx\right);\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right) u(x) = \lambda u(x),$$

где $q \in C^{(\infty)}([a, b], \mathbb{R})$, а λ — числовой коэффициент. Предположим, что функции $u_1, u_2, \ldots$ класса $C^{(2)}[a, b], \mathbb{R})$ обращаются в нуль на концах отрезка $[a, b]$ и каждая из них удовлетворяет данному уравнению со своим значением $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ коэффициента λ. Покажем, что если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то функции u_i, u_j ортогональны на $[a, b]$.

Действительно, интегрируя по частям, находим, что

$$\int_a^b \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right) u_i(x)\right] u_j(x)\,dx = \int_a^b u_i(x)\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right) u_j(x)\right] dx.$$

В соответствии с уравнением отсюда получаем, что

$$\lambda_i \langle u_i, u_j\rangle = \lambda_j \langle u_i, u_j\rangle$$

и, поскольку $\lambda_i \neq \lambda_j$, теперь заключаем, что $\langle u_i, u_j\rangle = 0$.

В частности, если $q(x) \equiv 0$ на $[a, b]$, а $[a, b] = [0, \pi]$, мы вновь получаем ортогональную на $[0, \pi]$ систему $\{\sin nx;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Дальнейшие примеры, в том числе и примеры важных для математической физики ортогональных систем читатель найдет в задачах к этому параграфу.

с. Ортогонализация. Хорошо известно, что в конечномерном евклидовом пространстве на основе любой линейно независимой системы векторов каноническим образом (с помощью процесса ортогонализации Грама *) — Шмидта **)) можно построить ортогональную и даже ортонормированную систему векторов, эквивалентную данной. Этим же способом, очевидно, и в любом линейном пространстве со скалярным произведением можно ортонормировать любую линейно независимую систему его векторов $\psi_1, \psi_2, \ldots$

Напомним, что процесс ортогонализации, приводящий к ортонормированной системе $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, описывается следующими

---

*) И. П. Грам (1850—1916) — датский математик, продолживший исследования П. Л. Чебышева и выявивший связь между разложениями в ряды по ортогональным системам и проблемой наилучшего квадратичного приближения (см далее ряды Фурье). Именно в этих исследованиях возникли процесс ортогонализации и известная матрица Грама (см. стр. 189 и систему (10) на стр. 495

**) Э. Шмидт (1876—1959) — немецкий математик, изучавший геометрию гильбертова пространства и описывавший ее языком евклидовой геометрии.

соотношениями:

$$\varphi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}, \quad \varphi_2 = \frac{\psi_2 - \langle \psi_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1}{\|\psi_2 - \langle \psi_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1\|},$$

$$\varphi_n = \frac{\psi_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \langle \psi_n, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\left\| \varphi_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \langle \psi_n, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|}.$$

Пример 5. Процесс ортогонализации линейно независимой системы $\{1, x, x^2, \ldots\}$ в $\mathscr{R}_2([-1, 1], \mathbb{R})$ приводит к так называемой системе ортогональных *многочленов Лежандра*. Отметим, что многочленами Лежандра принято называть все же не сами многочлены получаемой при этом ортонормированной системы, а им пропорциональные. Множитель пропорциональности выбирается так, чтобы сделать равным единице коэффициент при старшей степени многочлена. Ортогональность системы при этом, очевидно, не нарушится, ну а нормированность, вообще говоря, теряется.

Многочлены Лежандра нам уже встречались, и мы знаем формулу

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

для многочлена Лежандра степени n. Выпишем несколько первых многочленов Лежандра

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5} x.$$

Прямым вычислением можно убедиться в их ортогональности на отрезке $[-1, 1]$. Принимая указанную выше формулу за определение многочлена $P_n(x)$, проверим ортогональность системы $\{P_n(x)\}$ многочленов Лежандра на отрезке $[-1, 1]$. Для этого достаточно проверить, что многочлен $P_n(x)$ ортогонален многочленам $1, x, \ldots, x^{n-1}$, линейными комбинациями которых получаются многочлены $P_k(x)$ степени $k < n$.

Интегрируя по частям при $k < n$, действительно получаем, что

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)\, dx = \frac{k!}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{k+1} x^k}{dx^{k+1}} \cdot \frac{d^{n-k-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}}\, dx = 0.$$

Некоторые представления об источнике ортогональных систем функций в анализе будут даны в последнем пункте этого параграфа и в задачах к нему, а сейчас мы вернемся к общим алгебраическим вопросам, связанным с разложением вектора по векторам заданной системы в линейном пространстве со скалярным произведением.

2. Коэффициенты Фурье.

а. Определение коэффициентов Фурье. Рассмотрим линейное пространство X со скалярным произведением $\langle\cdot, \cdot\rangle$ и с индуцированной им в X нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ (см. § 1 гл. X).

Пусть $\{e_i\}$ — ортонормированная система векторов в X.

Определение 5. Числа $\{\langle x, e_i\rangle\}$ называются *коэффициентами Фурье вектора $x \in X$ в ортонормированной системе $\{e_i\}$.*

С геометрической точки зрения i-й коэффициент Фурье $\langle x, e_i\rangle$ вектора $x \in X$ есть проекция этого вектора на направление единичного вектора e_i. В знакомом случае трехмерного евклидова пространства E^3 с заданным в нем ортонормированным репером e_1, e_2, e_3 коэффициенты Фурье $x^i = \langle x, e_i\rangle$, $i = 1, 2, 3$, суть координаты вектора x в базисе e_1, e_2, e_3, возникающие в разложении $x = x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3$.

Если бы вместо трех векторов e_1, e_2, e_3 нам было дано только два e_1, e_2, то разложение $x = x^1e_1 + x^2e_2$ по ним уже имело бы место далеко не для каждого вектора $x \in E^3$. Тем не менее коэффициенты Фурье $x^i = \langle x, e_i\rangle$, $i = 1, 2$, определены и в этом случае, а вектор $x_e = x^1e_1 + x^2e_2$ в этом случае является ортогональной проекцией вектора x в плоскость L векторов e_1, e_2. Среди всех векторов этой плоскости вектор x_e наиболее близок вектору x в том смысле, что для любого вектора $y \in L$ будет $\|x - y\| \geq \|x - x_e\|$.

Аналогичные свойства коэффициентов Фурье имеют место и в общем случае.

Лемма 1. *Если система векторов $e_1, \ldots, e_n$ пространства X ортонормирована, то для любого вектора $x \in X$ вектор $h = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$ ортогонален плоскости векторов $e_1, \ldots, e_n$.*

◀ Достаточно проверить, что для любого вектора e_j нашей системы $\langle h, e_j\rangle = 0$. Но в самом деле $\langle h, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \times \langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0$. ▶

Таким образом, любой вектор $x \in X$ допускает разложение

$$x = x_e + h, \tag{8}$$

где x_e — вектор плоскости L, порожденной системой векторов $e_1, \ldots, e_n$, а вектор h ортогонален плоскости L, т. е. ортогонален любому вектору вида $\alpha_1e_1 + \ldots + \alpha_ne_n$.

b. Аппроксимация вектора элементами подпространства. Покажем теперь, что вектор $x_e = \langle x, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle x, e_n\rangle e_n$ является наилучшей аппроксимацией вектора $x \in X$ элементами $\alpha_1e_1 + \ldots + \alpha_ne_n$ подпространства L, натянутого на векторы ортонормированной системы $e_1, \ldots, e_n$.

Заметим сначала, что справедлива следующая

Лемма 2 (теорема Пифагора*)). *Если векторы y и z ортогональны, а $x=y+z$, то* $\|x\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2$.

► В самом деле,

$$\langle x,\ x\rangle=\langle y,\ y\rangle+\langle y,\ z\rangle+\langle z,\ y\rangle+\langle z,\ z\rangle=\langle y,\ y\rangle+\langle z,\ z\rangle. \ ►$$

Проверим теперь, что справедлива

Лемма 3 (об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье). *Если $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированная система векторов (наделенного скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$) линейного пространства X, то для любого вектора $x\in X$ и любого вектора $y=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ne_n$ имеет место неравенство*

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,\ e_i\rangle e_i\right\|\leqslant\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right\|, \tag{9}$$

в котором равенство возможно только при условии, что $\alpha_i=\langle x,\ e_i\rangle$ для всех значений $i=1, 2, \ldots, n$.

◄ Пусть $x_e:=\sum_{i=1}^{n}\langle x,\ e_i\rangle e_i$. Воспользовавшись леммой 1 и представлением (8), получаем, что $x-y=(x_e-y)+h$, где вектор h ортогонален вектору x_e-y, лежащему в плоскости L векторов $e_1, \ldots, e_n$. Тогда по теореме Пифагора

$$\|x-y\|^2=\|x_e-y\|^2+\|h\|^2=\|x_e-y\|^2+\|x-x_e\|^2\geqslant\|x-x_e\|^2. \ ►$$

Несколько отвлекаясь от нашей основной цели — изучения разложений по ортогональным системам, предположим, что имеется произвольная система линейно независимых векторов $l_1, l_2, \ldots$ $\ldots, l_n$ в X и ищется наилучшая аппроксимация заданного вектора $x\in X$ линейными комбинациями $\sum_{i=1}^{n}\alpha_il_i$ векторов системы. Поскольку в плоскости L, порожденной векторами $l_1, \ldots, l_n$, процессом ортогонализации можно построить также ортонормальную систему $e_1, \ldots, e_n$, порождающую эту плоскость, то на основании леммы 3 можно заключить, что существует и притом единственный вектор $x_e\in L$ такой, что $\|x-x_e\|=\inf\limits_{y\in L}\|x-y\|$. Поскольку вектор $h=x-x_e$ ортогонален плоскости L, из равенства $x_e+h=x$ получаем систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}\langle l_1,\ l_1\rangle\alpha_1+\ldots+\langle l_n,\ l_1\rangle\alpha_n=\langle x,\ l_1\rangle,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \langle l_1,\ l_n\rangle\alpha_1+\ldots+\langle l_n,\ l_n\rangle\alpha_n=\langle x,\ l_n\rangle\end{array}\right. \tag{10}$$

*) Пифагор Самосский (ориентировочно 580—500 до н. э.) — знаменитый древнегреческий математик и философ-идеалист, основатель Пифагорейской школы, в которой, в частности, было сделано потрясшее древних математическое открытие о несоизмеримости стороны и диагонали квадрата. Сама же классическая теорема Пифагора была известна в ряде стран задолго до Пифагора (правда, возможно без доказательства).

на коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ разложения $x_e = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i l_i$ искомого вектора x_e по векторам системы $l_1, \ldots, l_n$. Существование и единственность решения этой системы, как отмечалось, следует из леммы 3 и независимости векторов $l_1, \ldots, l_n$. В силу теоремы Крамера отсюда, в частности, можно сделать вывод о необращении в нуль определителя этой системы. Иными словами, попутно доказано, что определитель Грама системы линейно независимых векторов не равен нулю.

Описанная задача аппроксимации и соответствующая ей система уравнений (10), как мы уже в свое время отмечали, возникает, например, при обработке экспериментальных данных по методу Гаусса наименьших квадратов (см. также задачу 1).

c) Неравенство Бесселя.

Лемма 4. a) *Если векторы $x_1, \ldots, x_n$ попарно ортогональны и $x = x_1 + \ldots + x_n$, то*

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2.$$

b) *Если система векторов $e_1, \ldots, e_n$ ортонормальна и $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, то*

$$\|x\|^2 = |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2.$$

◀ Первое утверждение является обобщением теоремы Пифагора и получается той же прямой выкладкой

$$\langle x, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i\rangle.$$

Второе утверждение следует из первого, поскольку

$$\|\alpha_i e_i\|^2 = \langle \alpha_i e_i, \alpha_i e_i\rangle = \alpha_i \bar{\alpha}_i \langle e_i, e_i\rangle = |\alpha_i|^2. \ ▶$$

Сопоставляя лемму 4 и разложение (8), получаем следующее важное

Утверждение 1 (неравенство Бесселя). *Если система векторов $e_1, \ldots, e_n$ ортонормальна в X, то для любого вектора $x \in X$ справедливо следующее неравенство (Бесселя):*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{11}$$

◀ По лемме 1 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i + h$, причем система векторов $e_1, \ldots, e_n, h$-ортогональна в X. По лемме 4 тогда получаем, что

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \|h\|^2. \ ▶$$

С геометрической точки зрения неравенство Бесселя, таким образом, означает, что если взять не все составляющие ортогонального разложения вектора, то, естественно, сумма квадратов их норм окажется во всяком случае не больше чем квадрат нормы самого вектора. Из доказательства также видно, что знак равенства в (11) возможен тогда и только тогда, когда $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\langle x,\ e_i\rangle e_i$.

На практике часто приходится иметь дело с ортогональными, но не нормированными системами векторов $l_1, \ldots, l_n$. При обсуждении леммы 3 мы отметили, что любой вектор $x \in X$ может быть представлен в виде $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i l_i+h$, где вектор h ортогонален подпространству, натянутому на векторы $l_1, \ldots, l_n$. В случае ортогональности векторов $l_1, \ldots, l_n$ коэффициенты α_i этого разложения находятся совсем просто, поскольку, очевидно,

$$\langle x,\ l_i\rangle=\alpha_i\langle l_i,\ l_i\rangle, \qquad i=1, \ldots, n \tag{12}$$

(сравните с системой (10)).

Определение 6. Числа $\left\{\frac{\langle x,\ l_i\rangle}{\langle l_i,\ l_i\rangle}\right\}$ называются *коэффициентами Фурье вектора* $x \in X$ *в ортогональной системе* $l_1, \ldots, l_n$ (векторов пространства X).

В случае, когда рассматриваемая ортогональная система еще и нормирована, мы, очевидно, возвращаемся к исходному определению 5 коэффициентов Фурье.

Полезно обратить внимание на вид неравенства Бесселя в случае произвольной ортогональной системы $l_1, \ldots, l_n$.

Записав для вектора $x \in X$ ортогональное разложение $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i l_i+h$ и воспользовавшись соотношениями (12), получаем, что

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i l_i\|^2+\|h\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\|l_i\|^2+\|h\|^2=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\langle x,\ l_i\rangle}{\langle l_i,\ l_i\rangle}\right|^2\langle l_i,\ l_i\rangle+\|h\|^2,$$

т. е. справедливо следующее неравенство (Бесселя):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|\langle x,\ l_i\rangle|^2}{\langle l_i,\ l_i\rangle}\leqslant\|x\|^2. \tag{13}$$

Слева в этом неравенстве (в отличие от случая ортонормированной системы и соответствующего ему неравенства (11)) стоят не квадраты модулей коэффициентов Фурье α_i, а величины $|\alpha_i|^2\langle l_i, l_i\rangle$. Отметим это явно, переписав неравенство (13) в виде

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\|l_i\|^2\leqslant\|x\|^2. \tag{13'}$$

Пример 6. В пространстве $\mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ рассмотрим ортогональную систему $\{e^{ikx};\ k\in\mathbb{Z}\}$ примера 1. Пусть $f\in\mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. В соответствии с определением 6 и соотношениями (4), коэффициенты Фурье $\{c_k\}$ функции f в системе $\{e^{ikx}\}$ выражаются формулой

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-ikx}\,dx\left(=\frac{\langle f(x),\ e^{ikx}\rangle}{\langle e^{ikx},\ e^{ikx}\rangle}\right). \tag{14}$$

Из неравенства Бесселя (13') получаем теперь, что для любой функции $f\in\mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ и для любого $n\in\mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2(x)\,dx. \tag{15}$$

Пример 7. Аналогично, в соответствии с определением 6 и соотношениями (5)—(7) находим коэффициенты Фурье $\left\{\frac{1}{2}a_0,\ a_k,\ b_k;\ k\in\mathbb{N}\right\}$ функции f в ортогональной системе $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k\in\mathbb{N}\}$:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{16}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx,\quad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{17}$$

Неравенство Бесселя в этом случае сводится к соотношению

$$\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2+|b_k|^2\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2(x)\,dx, \tag{18}$$

справедливому при любом значении $n\in\mathbb{N}$.

Сравнивая равенства (14), (16), (17), с учетом формулы Эйлера, очевидно, получаем следующие соотношения между коэффициентами Фурье одной и той же функции относительно тригонометрической системы, записанной в действительной и комплексной формах:

$$c_k=\begin{cases}\frac{1}{2}(a_k-ib_k), & \text{если } k\geqslant 0,\\ \frac{1}{2}(a_{-k}+ib_{-k}), & \text{если } k<0.\end{cases} \tag{19}$$

Для того чтобы в формулах (16) и (19) случай $k=0$ не составлял исключения, принято (считая $b_0=0$) через a_0 обозначать не сам начальный коэффициент Фурье, а вдвое большую величину, что и было нами сделано выше.

Отметим также, что коэффициенты a_k, b_k вещественнозначной функции f, как видно из формул (16), (17), вещественны. В этом случае, следовательно, в неравенстве (18) можно всюду снять знак модуля.

3. Ряд Фурье.

а. Определение ряда Фурье и некоторые геометрические аналогии.

Определение 7. Если X — линейное пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$, а $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — ортогональная система векторов X, то любому вектору $x\in X$ можно сопоставить ряд

$$x\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle x, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle}e_k. \tag{20}$$

Этот ряд называется *рядом Фурье* вектора *x по ортогональной системе* $\{e_k\}$.

В случае ортонормированной системы $\{e_k\}$ ряд Фурье вектора $x\in X$ запишется особенно просто

$$x\sim\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k. \tag{21}$$

Пример 8. Пусть $X=\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Рассмотрим в $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ ортогональную систему $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k\in\mathbb{N}\}$ примера 1 и найдем ряд Фурье функции $f(x)=x$, рассматриваемой как вектор пространства $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.

По формулам (16), (17) в этом случае получаем

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kx\,dx=0,\quad k=0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kx\,dx=(-1)^{k+1}\frac{2}{k},\ k=1, 2, \ldots$$

Таким образом,

$$f(x)\sim x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx.$$

После определения 7 к обсуждаемому алгебраическому вопросу о разложении вектора по ортогональной системе добавляется элемент анализа, связанный с возможной бесконечномерностью пространства X и возникающим при этом рядом Фурье, а также предельным переходом, присутствующим в самом понятии ряда. Однако, прежде чем уходить в бесконечномерности, отметим, что в соотношениях (20), (21) из определения 7 стоит осторожный символ $\sim$ сопоставления, а не знак равенства. Причина такой осторожности может быть разъяснена уже на примере знакомого нам трехмерного евклидова пространства E^3. Если в E^3 взять только два вектора e_1, e_2 ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3, то любому вектору $x\in E$ сопоставляется его «ряд» Фурье $\langle x, e_1\rangle e_1+\langle x, e_2\rangle e_2=x^1e_1+x^2e_2$. Сумма этого «ряда» не обязана совпадать с вектором x. Например, взяв $x=e_3$, получим нулевой ряд $0e_1+0\cdot e_2=0$. Для любого $x\in E$ имеем $(x^1)^2+(x^2)^2\leqslant\|x\|^2$ (неравенство Бесселя или, что то же самое, следствие теоремы Пифагора). Можно заметить, что «ряд» Фурье $x^1e_1+x^2e_2$ «сходится» к x в том и только в том случае, когда имеет место равенство $(x^1)^2+(x^2)^2=\|x^2\|^2$ (теорема Пифагора). Эти элементарные геометрические факты, как мы сейчас выясним, остаются в силе для любого линейного пространства, наделенного скалярным произведением, и для любой ортонормированной системы в нем.

Поскольку нам предстоит делать предельные переходы, связанные со скалярным произведением, укажем явно соответствующие свойства скалярного произведения.'

Лемма 5 (о непрерывности скалярного произведения). *Пусть* $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$: $X^2\to\mathbb{C}$ — *скалярное произведение в линейном пространстве* X. *Тогда*

a) *функция* $(x, y)\longmapsto\langle x, y\rangle$ *непрерывна по совокупности переменных*;

b) *если* $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i$, *то* $\langle x, y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\langle x_i, y\rangle$;

c) *если* e_1, e_2, ... — *ортонормированная система в* X *и* $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x^ie_i$, *а* $y=\sum\limits_{i=1}^{\infty}y^ie_i$, *то* $\langle x, y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x^i\overline{y^i}$.

◀ Утверждение a) вытекает из неравенства Коши — Буняковского (см. § 1 гл. X)

$$|\langle x-x_0, y-y_0\rangle|^2\leqslant\|x-x_0\|^2\cdot\|y-y_0\|^2.$$

Из a) вытекает b), поскольку

$$\langle x, y\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle x_i, y\rangle+\left\langle\sum_{i=n}^{\infty}x_i, y\right\rangle$$

а $\sum\limits_{i=n}^{\infty}x_i\to 0$ при $n\to\infty$.

Утверждение c) получается повторным применением b) с учетом соотношения $\langle x, y\rangle=\overline{\langle y, x\rangle}$. ►

b. Полные системы и условия полноты.

Определение 8. Система $\{x_\alpha, \alpha\in A\}$ векторов нормированного пространства X называется *полной по отношению к множеству* $E\subset X$ (или полной в E), если любой вектор $x\in E$ можно сколь угодно точно в смысле нормы пространства X приблизить конечными линейными комбинациями векторов системы.

Если через $L\{x_\alpha\}$ обозначить линейную оболочку в X векторов системы (т. е. совокупность всех конечных линейных комбинаций векторов системы), то определение 8 можно переформулировать следующим образом:

система $\{x_\alpha, \alpha\in A\}$ *полна по отношению к множеству* $E\subset X$, если E содержится в замыкании $\overline{L}\{x_\alpha\}$ линейной оболочки векторов системы.

Пример 9. Если $X=E^3$, а e_1, e_2, e_3 — базис в E^3, то система $\{e_1, e_2, e_3\}$ полна в X, а система $\{e_1, e_2\}$ уже не является полной в X, но является полной по отношению к множеству $L\{e_1, e_2\}$ или любому его подмножеству E.

Пример 10. Последовательность функций $1, x, x^2, \ldots$ рассмотрим как систему $\{x^k; k\in 0, 1, 2, \ldots\}$ векторов пространства $\mathcal{R}_2([a, b], \mathbb{R})$ или $\mathcal{R}_2([a, b], \mathbb{C})$. Если $C[a, b]$ — подпространство непрерывных функций, то эта система полна по отношению к множеству $C[a, b]$.

◄ Действительно, какова бы ни была функция $f\in C[a, b]$ и каково бы ни было число $\varepsilon>0$, по теореме Вейерштрасса найдется алгебраический многочлен $P(x)$ такой, что $\max\limits_{x\in[a, b]}|f(x)-P(x)|<\varepsilon$. Но тогда

$$\|f-P\|:=\sqrt{\int_a^b|f-P|^2(x)\,dx}<\varepsilon\sqrt{b-a}$$

и, значит, линейными комбинациями функций системы можно сколь угодно точно приблизить функцию f в смысле нормы рассматриваемого пространства $\mathcal{R}_2[a, b]$. ►

Отметим, что, в отличие от ситуации примера 9, в нашем случае не каждая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция является конечной линейной комбинацией функций взятой системы, а всего лишь приближается такими линейными комбинациями. Итак, $C[a, b]\subset\overline{L}\{x^n\}$ в смысле нормы пространства $\mathcal{R}_2[a, b]$.

Пример 11. Если из системы функций $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$ удалить одну из функций, например 1, то оставшаяся система $\{\cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$ заведомо не будет полной в $\mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ или $\mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.

◀ В самом деле, по лемме 3 наилучшую аппроксимацию функции $f(x) \equiv 1$ среди всех конечных линейных комбинаций

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

данной длины n дает тот тригонометрический многочлен $T_n(x)$, в котором a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции 1 относительно рассматриваемой ортогональной системы $\{\cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$. Но в силу соотношений (5) такой полином наилучшего приближения должен быть нулевым. Значит, всегда

$$\|1 - T_n\| \geqslant \|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx} = \sqrt{2\pi} > 0,$$

и приблизиться к единице ближе чем на величину $\sqrt{2\pi}$ линейными комбинациями функций системы нельзя. ▶

Теорема (условия полноты ортонормальной системы). *Пусть X — линейное пространство со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$ а $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — конечная или счетная ортонормированная система векторов в X. Тогда следующие условия эквивалентны:*

a) *система $\{e_i\}$ полна по отношению к множеству**) $E \subset X$;

b) *для любого вектора $x \in E \subset X$ имеет место разложение (в ряд Фурье)*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i;$$

c) *для любого вектора $x \in E \subset X$ имеет место равенство (Парсеваля**))*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

◀ a) $\Rightarrow$ b) в силу экстремального свойства коэффициентов Фурье (см. лемму 3 и рассуждения в примере 11).

b) $\Rightarrow$ c) в силу утверждения c) леммы 5.

c) $\Rightarrow$ a) поскольку $\left\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. ▶

---

*) Множество E может, в частности, состоять из одного по тем или иным причинам представляющего интерес вектора

**) М. А. Парсеваль (1755—1836) — французский математик, обнаруживший это соотношение для тригонометрической системы в 1799 г.

c. Сходимость ряда Фурье и признак базиса в полном пространстве.

Определение 9. Система $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ векторов линейного нормированного пространства X называется *базисом пространства* X, если она состоит из линейно независимых векторов и любой вектор $x \in X$ может быть представлен в виде $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$, где α_i — коэффициенты из поля констант пространства X.

В конечномерном пространстве X полнота в X системы линейно независимых векторов равносильна тому, что эта система является базисом в X. В бесконечномерном случае это, вообще говоря, не так.

Пример 12. Рассмотрим множество $C([-1, 1], \mathbb{R})$ непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ вещественнозначных функций как линейное пространство со скалярным произведением, определенным формулой (3). Обозначим это пространство символом $C_2([-1, 1], \mathbb{R})$ и рассмотрим в нем систему линейно независимых векторов $1, x, x^2, \ldots$

Эта система полна в пространстве $C_2([-1, 1], \mathbb{R})$ (см. пример 10), но не является его базисом.

◄ Действительно, если $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$, где сходимость понимается в смысле нормы $C_2([-1, 1], \mathbb{R})$, т. е. в смысле среднего квадратичного уклонения на отрезке $[-1, 1]$, то по необходимому условию сходимости получаем, что $\|\alpha_k x^k\| \to 0$ при $k \to \infty$. Но

$$\|\alpha_k x^k\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} (\alpha_k x^k)^2 \, dx = \alpha_k^2 \cdot \frac{2}{2k+1}$$

и, значит, при всех достаточно больших значениях k должно быть $|\alpha_k| < \sqrt{2k+1} < 1$. В таком случае степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ сходится на интервале $]-1, 1[$ и представляет на этом интервале бесконечно дифференцируемую функцию φ, в то время как априори функция f могла не быть таковой. Заметим, что

$$0 = \left\| f - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \right\|^2 \geqslant \int\limits_{-1/2}^{1/2} (f - \varphi)^2 (x) \, dx \geqslant 0,$$

откуда вытекает, что если f и φ непрерывны, то обязательно $f(x) = \varphi(x)$ при $|x| \leqslant 1/2$. Таким образом, показано, что даже в смысле сходимости в среднем разложение $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ невозможно, если f, например, не бесконечно дифференцируема на отрезке $[-1/2, 1/2]$. ►

Важно теперь отметить, в противовес примеру 12, что справедлива следующая простая и полезная

Лемма 6. *Ортогональная система векторов полна в пространстве тогда и только тогда, когда она является его базисом.*

◀ Нетривиально только утверждение, что полнота такой системы влечет ее базисность. Очевидно, утверждение достаточно проверить для ортонормированной системы $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ в X. Но если линейными комбинациями векторов системы можно сколь угодно точно по норме пространства X аппроксимировать любой вектор $x \in X$, то в силу леммы 3 для любого такого вектора x соответствующий ему ряд Фурье $\sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$ обязан сходиться к x. ▶

Следующая лемма отвечает на вопрос о сходимости ряда Фурье и является естественным обобщением леммы 1.

Напомним (см. § 1, гл. X), что линейное пространство X со скалярным произведением называется *гильбертовым пространством*, если оно полно как метрическое пространство с метрикой, индуцированной в X этим скалярным произведением.

Лемма 7. *Если X — гильбертово пространство, а $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированная система в нем, то для любого вектора $x \in X$:*

a) *ряд Фурье $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$ сходится к некоторому вектору $x_e \in X$;*

b) *справедливо разложение $x = x_e + h$, где вектор h ортогонален линейной оболочке векторов системы.*

◀ a) Для ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$ выполнены условия критерия Коши. Действительно $\left\| \sum\limits_{i=m}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i \right\| = \sqrt{\sum\limits_{i=m}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2}$, а в силу неравенства Бесселя (11) ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$ сходится.

b) По свойствам скалярного произведения (см. утверждение b) леммы 5) для любого вектора e_j нашей системы получаем

$$\langle h, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle x_e, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0. \ ▶$$

В качестве полезного добавления к приведенной выше теореме об условиях полноты ортогональных систем докажем теперь следующее

Утверждение 2. *Пусть X — линейное пространство со скалярным произведением, а $x_1, x_2, \ldots$ — система линейно независимых векторов в X. Для того чтобы система $\{x_i\}$ была полной в X:*

a) *необходимо, чтобы в X не было отличного от нуля вектора h, ортогонального всем векторам системы $\{x_i\}$;*

b) *в случае, когда X — гильбертово пространство, достаточно, чтобы в X не было отличного от нуля вектора, ортогонального всем векторам системы.*

◀ а) Если бы нашелся вектор $h \neq 0$, ортогональный всем векторам системы $\{x_i\}$, то для любой линейной комбинации $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ по теореме Пифагора получалось бы, что

$$\left\| h - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|^2 = \|h\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|^2 \geqslant \|h\|^2 > 0,$$

и, значит, к вектору h нельзя приблизиться ближе чем на величину $\|h\| > 0$ линейными комбинациями векторов системы.

b) Процессом ортогонализации из системы $\{x_i\}$ получим ортонормированную систему $\{e_i\}$, линейная оболочка которой $L\{e_i\}$ совпадает с линейной оболочкой $L\{x_i\}$ исходной системы.

Берем теперь произвольный вектор $x \in X$ и, записав его ряд Фурье по системе $\{e_i\}$, получим в соответствии с утверждением b) леммы 7 разложение x в сумму $x = x_e + h$, где $x_e = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$, а вектор h ортогонален $L\{e_i\}$. Но поскольку $L\{e_i\} = L\{x_i\}$, вектор h должен быть равен нулю. Значит, $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$. Таким образом, любой вектор $x \in X$ допускает сколь угодно точную аппроксимацию векторами из $L\{e_i\}$ или, что то же самое, векторами из $L\{x_i\}$.

Условие полноты пространства X в утверждении 2 b) является существенным, о чем свидетельствует следующий

Пример 13. Рассмотрим пространство l_2 (см. § 1 гл. X) таких вещественных последовательностей $(a_1, a_2, \ldots)$, для которых $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$. Скалярное произведение векторов $a = (a_1, a_2, \ldots)$, $b = (b_1, b_2, \ldots)$ из l_2 определим стандартным образом: $\langle a, b \rangle := \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$.

Рассмотрим теперь в l_2 ортонормированную систему $e_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i}, 1, 0, 0, \ldots)$, $i = 1, 2, \ldots$ В нее не входит вектор $(1, 0, 0, \ldots)$. К системе $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ добавим еще вектор $e = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\right)$ и рассмотрим линейную оболочку $L\{e, e_1, e_2, \ldots\}$ указанных векторов. Эту линейную оболочку можно рассматривать как линейное пространство X (подпространство l_2) со скалярным произведением, взятым из l_2.

Отметим, что вектор $(1, 0, 0, \ldots)$, очевидно, не может быть получен конечной линейной комбинацией векторов системы $e, e_1, e_2, \ldots$ поэтому он не лежит в X, но вместе с тем он сколь угодно точно может быть приближен в l_2 такими линейными комбинациями, ибо $e-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}e_k=\left(1,\ 0,\ 0,\ldots,\ 0,\ \frac{1}{2^{n+1}},\ \frac{1}{2^{n+2}},\ \ldots\right)$.

Значит, мы одновременно установили, что X не замкнуто в l_2 (поэтому X, в отличие от l_2, не полное метрическое пространство), но в то же время замыкание X в l_2 совпадает с l_2, так как, если добавить к векторам $e_1,\ e_2,\ \ldots$ еще вектор $(1,\ 0,\ 0,\ \ldots)$, то получим базис пространства l_2.

Теперь заметим, что в $X=L\{e,\ e_1,\ e_2,\ \ldots\}$ уже нет отличного от нуля вектора, ортогонального всем векторам системы $e_1,\ e_2,\ \ldots$

Действительно, пусть $x=\alpha e+\sum_{i=0}^{n}\alpha_i e_i$. Тогда $\langle x,\ e_{n+1}\rangle=\frac{\alpha}{2^{n+1}}$, и если $\langle x,\ e_{n+1}\rangle=0$, то $\alpha=0$. Но тогда и $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$, если $\langle x,\ e_i\rangle=0$ при $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Вместе с тем ортонормированная система $e_1,\ e_2,\ldots$ не является полной в X, ибо вектор $e\in X$ нельзя сколь угодно точно аппроксимировать векторами системы (в противном случае в силу сказанного выше линейными комбинациями векторов e_1, $e_2,\ \ldots$ можно было бы аппроксимировать и вектор $(1,\ 0,\ 0,\ \ldots)$, что, конечно, не так).

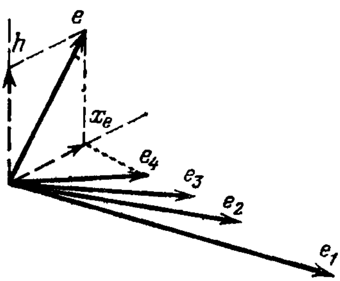

Рис 103

Рассмотренный пример, разумеется, типично бесконечномерный. Рис. 103 дает геометрическое изображение случившегося в этом примере.

***4. Об одном важном источнике ортогональных систем функций в анализе.** Теперь дадим представление о том, как в конкретных задачах появляются те или иные ортогональные системы функций и возникают ряды Фурье по этим системам.

Пример 14. *Метод Фурье.*

Отрезок $[0,\ l]\subset\mathbb{R}$ будем считать положением равновесия однородной упругой струны, закрепленной в концах этого отрезка, а в остальном свободной и способной совершать малые поперечные колебания около этого положения равновесия. Пусть $u(x,\ t)$ — функция, описывающая эти колебания, т. е. в каждый фиксированный момент времени $t=t_0$ график функции $u(x,\ t_0)$ над отрезком $0\leqslant x\leqslant l$ задает форму струны в момент t_0. Это, в частности, означает, что $u(0,\ t)=u(l,\ t)=0$ в любой момент t, поскольку концы струны закреплены.

Известно (см., например, гл. XIV, § 4), что функция $u(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{22}$$

где положительный коэффициент a зависит от плотности и модуля упругости струны.

Одного уравнения (22), конечно, недостаточно для определения функции $u(x, t)$. Из опыта мы знаем, что движение $u(x, t)$ однозначно определится, если, например, задать положение $u(x, 0)=\varphi(x)$ струны в какой-то (будем его называть *начальным*) момент времени $t=0$ и скорость $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=\psi(x)$ точек струны в этот момент. Так, если мы, оттянув струну, придаем ей форму $\varphi(x)$ и отпускаем, то $\psi(x)\equiv 0$.

Итак, задача о свободных колебаниях струны *), закрепленной в концах отрезка $[0, l]$, свелась к отысканию такого решения $u(x, t)$ уравнения (22), которое удовлетворяет граничным условиям

$$u(0, t)=u(l, t)=0 \tag{23}$$

и начальным условиям

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=\psi(x). \tag{24}$$

Для решения подобных задач существует довольно естественная процедура, называемая в математике *методом разделения переменных* или *методом Фурье*. Она состоит в следующем. Решение $u(x, t)$ ищется в виде ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, члены которого $X(x)T(t)$ являются специального вида (с разделенными переменными) решениями данного уравнения, удовлетворяющими граничным условиям. В нашем случае, как мы увидим, это равносильно разложению колебания $u(x, t)$ в сумму простейших гармонических колебаний (точнее, в сумму стоячих волн).

Действительно, если функция $X(x)T(t)$ удовлетворяет уравнению (22), то $X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$, т. е.

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{25}$$

В уравнении (25) независимые переменные x и t оказались в разных его частях (разделились), поэтому обе части на самом-то деле должны представлять некоторую, одну и ту же, постоянную λ. Если учесть еще граничные условия $X(0)T(t)=X(l)T(t)=0$, которым должно удовлетворять рассматриваемое нами решение специального вида, то его отыскание сводится к одновременному решению уравнений

$$T''(t)=\lambda a^2T(t), \tag{26}$$

$$X''(x)=\lambda X(x) \tag{27}$$

при условии, что $X(0)=X(l)=0$.

*) Отметим, что начало математическому исследованию колебаний струны положил еще Брук Тейлор.

Легко написать общее решение каждого из этих уравнений в отдельности:

$$T(t) = A\cos\sqrt{\lambda}\,at + B\sin\sqrt{\lambda}\,at, \tag{28}$$

$$X(x) = C\cos\sqrt{\lambda}\,x + D\sin\sqrt{\lambda}\,x. \tag{29}$$

Если мы попытаемся удовлетворить условиям $X(0) = X(l) = 0$, то получим, что при $\lambda \neq 0$ должно быть $C = 0$ и, отбросив тривиальный случай $D = 0$, получаем, что $\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$, откуда $\sqrt{\lambda} = \pm\frac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, в уравнениях (26), (27) число λ оказывается можно выбирать только среди некоторой специальной серии чисел (так называемых *собственных чисел задачи*), $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, где $n \in \mathbb{N}$. Подставляя эти значения λ в выражения (28), (29), получаем серию специальных его решений

$$u_n(x, t) = \sin n\frac{\pi}{l}x\left(A_n\cos n\frac{\pi a}{l}t + B_n\sin n\frac{\pi a}{l}t\right), \tag{30}$$

удовлетворяющих граничным условиям $u_n(0, t) = u_n(l, t) = 0$ (и описывающих стоячую волну вида $\Phi(x)\cdot\sin(\omega t + \theta)$, в которой каждая точка $x \in [0, l]$ совершает простые гармонические колебания со своей амплитудой $\Phi(x)$, но одной и той же для всех точек частотой ω).

Величины $\omega_n = n\frac{\pi a}{l}$, $n \in \mathbb{N}$, по естественной причине называют *собственными частотами струны*, а ее простейшие гармонические колебания (30) — *собственными колебаниями струны*. Колебание $u_1(x, t)$ с наименьшей собственной частотой называют *основным тоном струны*, а остальные ее собственные колебания $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$, ... называют *обертонами* (именно обертоны создают характерную для данного музыкального инструмента окраску звука, называемую *тембром*).

Мы хотим теперь представить искомое колебание $u(x, t)$ в виде суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ собственных колебаний данной струны. Граничные условия (23) при этом автоматически выполнены, и надо только позаботиться о выполнении начальных условий (24), которые означают, что

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin n\frac{\pi}{l}x \tag{31}$$

и

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\pi a}{l}B_n\sin n\frac{\pi}{l}x. \tag{32}$$

Таким образом, дело свелось к нахождению пока еще свободных коэффициентов A_n, B_n, или, что то же самое, к разложению функций φ и ψ в ряд Фурье по системе $\left\{\sin n\frac{\pi}{l}x;\ n\in\mathbb{N}\right\}$, ортогональной на отрезке $[0, l]$.

Полезно заметить, что возникшие из уравнения (27) функции $\left\{\sin n\frac{\pi}{l}x;\ n\in\mathbb{N}\right\}$ можно рассматривать как собственные векторы линейного оператора $A=\frac{d^2}{dx^2}$, отвечающие его собственным значениям $\lambda_n=n\frac{\pi}{l}$, которые появились из условия, что оператор A действует на пространстве функций класса $C^{(2)}[0, l]$, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0, l]$. Значит, равенства (31), (32) можно трактовать как разложения по собственным векторам данного линейного оператора.

Линейные операторы, связанные с конкретными задачами, являются одним из основных источников ортогональных систем функций в анализе.

Напомним один известный из алгебры факт, вскрывающий причину ортогональности таких систем.

Пусть Z — линейное пространство, наделенное скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, а E — некоторое его подпространство (плотное в Z). Линейный оператор $A\colon Z\to Z$ называется *симметрическим*, если для любых векторов x, $y\in Z$ выполнено равенство $\langle Ax, y\rangle=\langle x, Ay\rangle$. Так вот: *собственные векторы симметрического оператора, отвечающие различным его собственным значениям, ортогональны.*

◀ Действительно, если $Au=\alpha u$, $Av=\beta v$ и $\alpha\neq\beta$, то

$$\alpha\langle u, v\rangle=\langle Au, v\rangle=\langle u, Av\rangle=\beta\langle u, v\rangle,$$

откуда следует, что $\langle u, v\rangle=0$. ▶

Полезно теперь с этой точки зрения посмотреть на пример 3, где в сущности рассматривались собственные функции оператора $A=\left(\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right)$, действующего на пространстве функций класса $C^{(2)}[a, b]$, обращающихся в нуль на концах отрезка $[a, b]$. Интегрированием по частям можно убедиться в том, что этот оператор на указанном пространстве является симметрическим (относительно стандартного скалярного произведения (4)), поэтому результат примера 4 является конкретным проявлением отмеченного алгебраического факта.

В частности, когда $q(x)\equiv 0$, из A получается оператор $\frac{d^2}{dx^2}$, который при $[a, b]=[0, l]$ встретился нам в последнем примере 14.

Отметим также, что в рассмотренном примере дело свелось к разложению функций φ и ψ (см. соотношения (31) и (32)) в ряд по собственным функциям оператора $A=\frac{d^2}{dx^2}$. Здесь, конечно, возникает вопрос о принципиальной возможности такого разложения, эквивалентный, как мы теперь понимаем, вопросу о полноте системы собственных функций рассматриваемого оператора в выбранном пространстве функций.

Полнота в $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ тригонометрической системы (и некоторых других конкретных систем ортогональных функций) в явной форме, по-видимому, впервые доказана Ляпуновым *). В неявном виде полнота конкретно тригонометрической системы присутствовала уже в работах Дирихле, посвященных исследованию сходимости тригонометрических рядов. Эквивалентное полноте равенство Парсеваля для тригонометрической системы, как уже отмечалось, было обнаружено Парсевалем еще на рубеже XVIII—XIX веков. В общей постановке вопросы полноты ортогональных систем и их приложения в задачах математической физики были одним из основных объектов исследований Стеклова **), который и ввел в математику само понятие полноты (замкнутости) ортогональной системы. При исследовании вопросов полноты он, кстати, активно использовал метод интегрального усреднения (сглаживания) функции (см. §§ 4, 5 гл. XVII), который поэтому часто называется *методом усреднений Стеклова.*

Задачи и упражнения

1. *Метод наименьших квадратов* Зависимость $y=f(x_1, \dots, x_n)$ величины y от величин $x_1, \dots, x_n$ изучается экспериментально. В результате m ($\geq n$) экспериментов была получена таблица

x_1	x_2	$\dots$	x_n	y
a_1^1	a_2^1	$\dots$	a_n^1	b^1
. . .	. . .	. . .	. . .	. .
a_1^m	a_2^m	$\dots$	a_n^m	b^m

в строках которой указан набор $\left(a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i\right)$ значений параметров $x_1, x_2, \dots, x_n$ и соответствующее ему значение b^i величины y, измеренное прибором с определенной точностью По этим экспериментальным данным требуется получить удобную для расчетов эмпирическую формулу вида $y=\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ искомой линейной функции надо подобрать так, чтобы минимизировать величину $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}\left(b^k_k-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i a_i^k\right)^2}$ среднего квадратич

*) А. М. Ляпунов (1857—1918) — русский математик и механик, выдающийся представитель школы П. Л. Чебышева, творец теории устойчивости движения. Успешно занимался различными областями математики и механики.

**) В. А. Стеклов (1864—1926) — русский советский математик, представитель созданной П. Л. Чебышевым петербургской математической школы, основатель школы математической физики в СССР. Его имя носит Математический институт Академии наук СССР.

ного уклонения данных, получаемых по эмпирической формуле, от результатов, полученных в экспериментах.

Проинтерпретируйте этот вопрос как задачу о наилучшей аппроксимации вектора $(b^1, \ldots, b^m)$ линейными комбинациями векторов $\left(a_i^1, \ldots, a_i^m\right)$, $i = 1, \ldots, n$, и покажите, что дело сводится к решению системы линейных уравнений типа системы (10).

2. a. Пусть $C[a, b]$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой равномерной сходимости функций на этом отрезке, а $C_2[a, b]$ — то же линейное пространство, но с метрикой среднего квадратичного уклонения функций на этом отрезке $\left(\text{т. е. } d(f, g) = \sqrt{\int\limits_a^b |f-g|^2(x)\,dx}\right)$.

Покажите, что сходимость функций в $C[a, b]$ влечет их сходимость в $C_2[a, b]$, но не обратно, и что пространство $C_2[a, b]$ не является полным, в отличие от пространства $C[a, b]$.

b. Объясните, почему система функций $\{1, x, x^2, \ldots\}$ линейно независима и полна в $C_2[a, b]$, но не является базисом этого пространства.

c. Объясните, почему полиномы Лежандра являются полной ортогональной системой и даже базисом в $C_2[-1, 1]$.

d. Найдите первые четыре члена разложения Фурье функции $\sin \pi x$ на отрезке $[-1, 1]$ по системе полиномов Лежандра.

e. Покажите, что квадрат нормы $\|P_n\|$ в $C_2[-1, 1]$ n-го полинома Лежандра равен

$$\frac{2}{2n+1}\left(= (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n!\, 2^{2n}} \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,dx\right).$$

f. Докажите, что среди всех полиномов данной степени n, с коэффициентом 1 при старшей степени переменной, полином Лежандра $P_n(x)$ является наименее уклоняющимся от нуля в среднем на отрезке $[-1, 1]$.

g. Объясните, почему для любой функции $f \in C_2([-1, 1], \mathbb{C})$ должно быть выполнено равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} |f|^2(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right) \left| \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx \right|^2,$$

где $\{P_0, P_1, \ldots\}$ — система полиномов Лежандра.

3. a. Покажите, что если система $\{x_1, x_2, \ldots\}$ векторов полна в пространстве X, а пространство X является всюду плотным подмножеством пространства Y, то система $\{x_1, x_2, \ldots\}$ полна также и в Y.

b. Докажите, что линейное пространство $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, всюду плотно в пространстве $\mathcal{R}_2[a, b]$. (В задаче 5g из § 5 гл. XVII утверждалось, что это верно даже для бесконечно дифференцируемых финитных на отрезке $[a, b]$ функций.)

c. Используя аппроксимационную теорему Вейерштрасса, докажите, что тригонометрическая система $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$ полна в $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$.

d. Покажите, что системы $\{1, x, x^2, \ldots\}$, $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$ полны в $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, но первая не является, а вторая является базисом этого пространства.

e. Объясните, почему для любой функции $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ справедливо равенство (Парсеваля)

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2,$$

где числа a_k b_k определены формулами (16), (17).

f Используя результат примера 8, покажите теперь, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$.

4. *Ортогональность с весом* a Пусть $p_0, p_1, \ldots, p_n$ — непрерывные положительные в области D функции Проверьте, что формула

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{n} \int_D p_k(x) f^{(k)}(x) \bar{g}^{(k)}(x)\, dx$$

задает скалярное произведение в $C^{(n)}(D, \mathbb{C})$.

b. Покажите, что в пространстве $\mathcal{R}(D, \mathbb{C})$ при отождествлении функций, отличающихся лишь на множествах меры нуль, с помощью положительной и непрерывной в D функции p можно ввести следующее скалярное произведение·

$$\langle f, g\rangle = \int_D p(x) f(x) \bar{g}(x)\, dx.$$

Функция p в этом случае называется *весовой функцией*, а если $\langle f, g\rangle = 0$, то говорят, что *функции f и g ортогональны с весом p*.

c. Пусть φ: $D \to G$ — диффеоморфизм области $D \subset \mathbb{R}^n$ на область $G \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $\{u_k(y), k \in \mathbb{N}\}$ — ортогональная в смысле стандартного скалярного произведения (2) или (3) система функции в G. Постройте систему функций, ортогональных в D с весом $p(x) = |\det \varphi'(x)|$, а также систему функций, ортогональных в D в смысле стандартного скалярного произведения.

d Покажите, что система функций $\{e_{m,n}(x, y) = e^{i(mx+ny)}$; $m, n \in \mathbb{N}\}$ ортогональна на квадрате $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \pi \wedge |y| \leq \pi\}$

e. Постройте систему функций, ортогональную на двумерном торе $T^2 \subset \mathbb{R}^3$, заданном параметрическими уравнениями, указанными в примере 4 из § 1 гл. XII. Скалярное произведение функций f и g на торе при этом понимается как поверхностный интеграл $\int_{T^2} f\bar{g}\, d\sigma$

5. a. Из алгебры известно (и мы это попутно в теории условного экстремума тоже доказали), что каждый симметрический оператор A. $E^n \to E^n$, действующий в n-мерном евклидовом пространстве E^n, имеет отличные от нуля собственные векторы В бесконечномерном случае это, вообще говоря, не так

Покажите, что линейный оператор $f(x) \longmapsto xf(x)$ умножения на независимую переменную является симметрическим в $C_2([a, b], \mathbb{R})$, но не имеет отличных от нуля собственных векторов

b. *Задача Штурма* *) — *Лиувилля*, часто возникающая в уравнениях математической физики, состоит в отыскании отличного от тождественного нуля решения уравнения $u''(x) + [q(x) + \lambda p(x)]\, u(x) = 0$ на промежутке $[a, b]$, удовлетворяющего некоторым краевым условиям, например $u(a) = u(b) = 0$.

При этом функции $p(x)$ и $q(x)$ считаются известными, непрерывными на рассматриваемом промежутке $[a, b]$, причем $p(x) > 0$ на $[a, b]$

Такая задача нам уже встретилась в примере 14, где нужно было решить уравнение (27) при условии, что $X(0) = X(l) = 0$ В этом случае у нас было $q(x) \equiv 0$, $p(x) \equiv 1$ и $[a, b] = [0, l]$. Мы убедились в том, что задача Штурма — Лиувилля, вообще говоря, может оказаться разрешимой лишь при некоторых специальных значениях параметра λ, которые по этой причине называют *собственными значениями* соответствующей *задачи Штурма — Лиувилля*

Покажите, что если функции f и g являются решениями задачи Штурма — Лиувилля, отвечающими собственным значениям $\lambda_f \neq \lambda_g$, то на отрезке $[a, b]$

---

*) Ж. Ш. Ф Штурм (1803—1855) — французский математик (кстати, иностранный почетный член Петербургской Академии наук); основные работы относятся к решению краевых задач уравнений математической физики.

выполнено равенство $\frac{d}{dx}(g'f-f'g)=(\lambda_f-\lambda_g)\,\rho fg$ и функции f, g ортогональны на $[a, b]$ с весом ρ.

c. Известно (см § 4, гл. XIV), что малые колебания неоднородной струны, закрепленной в концах отрезка $[a, b]$, описываются уравнением $(pu'_x)'_x=\rho u''_{tt}$, где $u=u(x, t)$ — функция, задающая форму струны в каждый момент t, $\rho=\rho(x)$ — линейная плотность, а $p=p(x)$ — коэффициент упругости в точке $x\in[a, b]$. Условия закрепления означают, что $u(a, t)=u(b, t)=0$.

Покажите, что если искать решение этого уравнения в виде $X(x)\,T(t)$, то дело сведется к системе $T''=\lambda T$, $(pX')'=\lambda\rho X$, в которой λ — общее для обоих уравнений число.

Таким образом, для функции $X(x)$ возникает задача Штурма — Лиувилля на отрезке $[a, b]$, разрешимая лишь при определенных (собственных) значениях параметра λ (Считая, что $p(x)>0$ на $[a, b]$ и что $p\in C^{(1)}[a, b]$. Заменой переменной $s=\int\limits_a^x\frac{d\xi}{p(\xi)}$ уравнение $(pX')'=\lambda\rho X$, очевидно, приводится к виду, в котором оно уже не содержит первой производной.)

d Проверьте, что оператор $S(u)=(p(x)\,u'(x))'-q(x)\,u(x)$, действующий на пространстве тех функций класса $C^{(2)}[a\ b]$, которые удовлетворяют условиям $u(a)=u(b)=0$, является симметрическим на этом пространстве (т. е. $\langle Su, v\rangle=\langle u, Sv\rangle$, где $\langle,\rangle$ — стандартное скалярное произведение вещественных функций). Проверьте также ортогональность собственных функций оператора S, отвечающих его различным собственным значениям.

e. Покажите, что решения X_1, X_2 уравнения $(pX')'=\lambda\rho X$, отвечающие различным значениям λ_1, λ_2 параметра λ и обращающиеся в нуль на концах отрезка $[a, b]$, ортогональны на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$.

6. *Полиномы Лежандра как собственные функции*. a. Используя указанное в примере 5 выражение полинома Лежандра $P_n(x)$, а также равенство $(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$, покажите, что $P_n(1)=1$.

b. Дифференцируя тождество $(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2-1)^n=2nx(x^2-1)$, покажите, что $P_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(x^2-1)\cdot P''_n(x)+2x\cdot P'_n(x)-n(n+1)P_n(x)=0.$$

c. Проверьте симметричность оператора

$$A:=(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}+2x\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{d}{dx}\right]$$

на пространстве $C^{(2)}[-1, 1]\subset\mathcal{R}_2[-1, 1]$ и, исходя из соотношения $A(P_n)=n(n+1)P_n$, объясните ортогональность полиномов Лежандра.

d. Используя полноту системы $\{1, x, x^2, \ldots\}$ в $C^{(2)}[-1, 1]$, покажите, что размерность собственного пространства оператора A, отвечающего его собственному значению $\lambda=n(n+1)$, не может быть больше единицы.

e. Докажите, что оператор $A=\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{d}{dx}\right]$ не может иметь в $C^{(2)}[-1, 1]$ собственных функций, не входящих в систему $\{P_0(x), P_1(x), \ldots\}$ полиномов Лежандра, и собственных значений, отличных от чисел $\{n(n+1);\ n=0, 1, 2, \ldots\}$.

7. *Сферические функции* a. В $\mathbb{R}^3$ при решении различных задач (например, задач теории потенциала, связанных с уравнением Лапласа $\Delta u=0$) решение ищут в виде ряда из решений специального вида. В качестве таковых берут однородные многочлены $S_n(x, y, z)$ степени n, удовлетворяющие уравнению $\Delta u=0$. Такие многочлены называются *гармоническими многочленами* В сферических координатах (r, φ, θ) гармонический многочлен $S_n(x, y, z)$, очевидно, имеет вид $r^nY_n(\theta, \varphi)$ Возникающие при этом функции $Y_n(\theta, \varphi)$, зависящие только от координат $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ на сфере, называют *сферическими функциями* (Они являются тригонометрическими многочленами от двух переменных с $2n+1$ свободными коэффициентами в Y_n, что связано с условием $\Delta S_n = 0$.)

Используя формулу Грина, покажите, что при $m \neq n$ функции Y_m, Y_n ортогональны на единичной сфере в $\mathbb{R}^3$ (в смысле скалярного произведения $\langle Y_m, Y_n\rangle = \iint Y_m \cdot Y_n \, d\sigma$, где поверхностный интеграл берется по сфере $r=1$).

b. Отправляясь от полиномов Лежандра, можно ввести еще полиномы $P_{n,m} = (1-x^2)^{m/2} \dfrac{d^m P_n}{dx^m}(x)$, $m = 1, 2, \ldots, n$, и рассмотреть функции

$$P_n(\cos\theta), \quad P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad P_{n,m}(\sin\theta)\sin m\varphi. \qquad (*)$$

Оказывается любая сферическая функция $Y_n(\theta, \varphi)$ с индексом n является линейиой комбинацией указанных функций. Принимая это к сведению и учитывая ортогональность тригонометрической системы, покажите, что фуикции системы (*) образуют ортогональиый базис в $(2n+1)$-мерном пространстве сферических фуикций данного индекса n

8. *Полиномы Эрмита* В квантовой механике при исследовании уравнения линейного осциллятора приходится рассматривать функции класса $C^{(2)}(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} fg\,dx$ в $C^{(2)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, а также специальные функции $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

a. Покажите, что $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$.

b. Докажите, что $H_n(x)$ — полином степени n Система функций $\{H_0(x), H_1(x), \ldots\}$ иазывается *системой полиномов Эрмита.*

c. Проверьте, что функция $H_n(x)$ удовлетворяет уравнению $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$.

d. Фуикции $\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$ называют *функциями Эрмита.* Покажите что $\psi_n''(x) + (2n+1-x^2)\psi(x) = 0$ и $\psi(x) \to 0$ при $x \to 0$.

e Проверьте, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_n\psi_m\,dx = 0$ при $m \neq n$.

f Покажите, что полиномы Эрмита ортогональны на $\mathbb{R}$ с весом e^{-x^2}.

9. *Полиномы Чебышева — Лагерра* *) $\{L_n(x);\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ можно определить формулой $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}$.

Проверьте, что.

a) $L_n(x)$ есть полином степени n;

b) функция $L_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$xL_n''(x) + (1-x)L_x'(x) + nL_n(x) = 0;$$

c) система $\{L_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ полиномов Чебышева — Лагерра ортогональна с весом e^{-x} на полупрямой $[0, +\infty[$

10. *Полиномы Чебышева* $\{T_0(x) \equiv 1,\ T_n(x) = 2^{1-n}\cos n(\arccos x),\ n \in \mathbb{N}\}$ при $|x| < 1$ можно задать формулой

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Покажите, что.

a) $T_n(x)$ есть полином степени n;

b) $T_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0;$$

---

*) Э. Н Лагерр (1834—1886) — французский математик.

c) система $\{T_n;\ n=0, 1, 2, \ldots\}$ многочленов Чебышева ортогональна с весом $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на промежутке $]-1, 1[$

11. a. В теории вероятностей и теории функций встречается следующая *система функций Радемахера* *) $\{\psi_n(x)=\varphi(2^n x);\ n=0, 1, 2, \ldots\}$, где $\varphi(t)=\operatorname{sgn}(\sin 2\pi t)$. Проверьте, что это ортонормированная система на отрезке $[0, 1]$.

b. *Система функций Хаара* **) $\{\chi_{n,k}(x)\}$, где $n=0, 1, 2, \ldots$; а $k=1, 2, 2^2, \ldots$ определяется соотношениями

$$\chi_{n,k}(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } \dfrac{2k-2}{2^{n+1}}<x<\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -1, \text{ если } \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}<x<\dfrac{2k}{2^{n+1}}, \\ 0 \text{ в остальных точках } [0, 1] \end{cases}$$

Проверьте ортогональность системы Хаара на отрезке $[0, 1]$.

12. a Покажите, что любое n-мерное векторное пространство со скалярным произведением изометрически изоморфно арифметическому евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ той же размерности.

b Напомним, что метрическое пространство называется сепарабельным, если в нем имеется счетное всюду плотное подмножество Докажите, что если линейное пространство со скалярным произведением сепарабельно, как метрическое пространство с индуцированной этим скалярным произведением метрикой, то в нем есть счетный ортонормированный базис.

c. Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство (т. е. X — сепарабельное и полное метрическое пространство с метрикой, индуцированной скалярным произведением в X). Взяв в X ортонормированный базис[1] $\{e_i;\ i\in\mathbb{N}\}$, построим отображение $X\ni x\longmapsto(c_1, c_2, \ldots)$, где $c_i=\langle x, e_i\rangle$ коэффициенты Фурье разложения вектора x по базису $\{e_i\}$. Покажите, что это отображение является биективным, линейным и изометричным отображением X на пространство l_2, рассмотренное в примере 13

d. Используя рис. 103, укажите, в чем состоит идея построения примера 13, и объясните, почему она связана именно с бесконечномерностью рассматриваемого пространства

e. Объясните, как построить аналогичный пример в пространстве функций $C[a, b]\subset\mathcal{R}_2[a, b]$

§ 2. Тригонометрический ряд Фурье

1. Основные виды сходимости классического ряда Фурье.

a. Тригонометрический ряд и тригонометрический ряд Фурье. Классический тригонометрический ряд — это ряд вида ***)

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx+b_k\sin kx, \tag{1}$$

получаемый на базе тригонометрической системы $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k\in\mathbb{N}\}$. Коэффициенты $\{a_0, a_k, b_k;\ k\in\mathbb{N}\}$ здесь вещественные или комплексные числа. Частичные суммы тригонометрического ряда (1)

---

*) Г А. Радемахер (1892) — немецкий (с 1936 г. — американский) математик

**) А Хаар (1885 — 1933) — венгерский математик

***) Запись свободного члена в виде $a_0/2$, удобная для рядов Фурье, здесь не обязательна суть *тригонометрические многочлены*

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{2}$$

соответствующей степени n.

Если ряд (1) сходится поточечно на $\mathbb{R}$, то его сумма $f(x)$, очевидно, 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$. Она вполне определяется заданием ее сужения на любой отрезок длины 2π.

Обратно, если дана 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$ (колебания, сигнал и т. п.) и мы желаем разложить ее в сумму некоторых канонических периодических функций, то для этой цели первыми предендентами служат простейшие 2π-периодические функции $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$, представляющие простые гармонические колебания кратных частот.

Допустим, нам удалось представить непрерывную функцию в виде суммы

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{3}$$

равномерно сходящегося к ней тригонометрического ряда. Тогда коэффициенты разложения (3) легко и вполне однозначно находятся.

Домножая в этом случае равенство (3) последовательно на каждую из функций системы $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$, пользуясь возможностью почленно интегрировать получаемые при этом равномерно сходящиеся ряды и учитывая соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dx = 2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n,\ m,\ n \in \mathbb{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

находим коэффициенты

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

разложения (3) функции f в тригонометрический ряд.

Мы пришли к тем же коэффициентам, какие бы мы имели, рассматривая (3) как разложение Фурье вектора $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ по ортогональной системе $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$. Это не удивительно, поскольку из равномерной сходимости ряда (3), конечно, вытекает и его сходимость в среднем на отрезке $[-\pi, \pi]$, а тогда коэффициентами ряда (3) должны быть коэффициенты Фурье функции f по рассматриваемой ортогональной системе (см. § 1).

Определение 1. Если для функции f имеют смысл интегралы (4), (5), то сопоставляемый f тригонометрический ряд

$$f \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx \tag{6}$$

называется *тригонометрическим рядом Фурье функции* f.

Поскольку других рядов Фурье, кроме тригонометрических, в этом параграфе не будет, мы для краткости позволим себе порой опускать слово «тригонометрический» и будем говорить просто «ряд Фурье функции f».

В основном мы будем иметь дело с функциями класса $\mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ или, несколько шире, с функциями, квадрат модуля которых интегрируем (хотя бы в несобственном смысле) на промежутке $]-\pi, \pi[$. Сохраним прежний символ $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ для обозначения линейного пространства таких функций со стандартным скалярным произведением в нем

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}\, dx. \tag{7}$$

Неравенство Бесселя

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)\, dx, \tag{8}$$

справедливое для любой функции $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, показывает, что далеко не каждый тригонометрический ряд (1) может быть рядом Фурье некоторой функции $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$.

Пример 1. Тригонометрический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}},$$

как нам уже известно (см. пример 7 из § 2 гл. XVI), сходится на $\mathbb{R}$, но он не является рядом Фурье никакой функции $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$ расходится.

Итак, изучаться здесь будут не произвольные тригонометрические ряды (1), а ряды Фурье (6) функций класса $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, а также класса абсолютно интегрируемых на $]-\pi, \pi[$ функций.

b. Сходимость в среднем тригонометрического ряда Фурье. Пусть

$$S_n(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx \tag{9}$$

— n-я частичная сумма ряда Фурье функции $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$. Отклонение S_n от f можно измерять, как в естественной метрике пространства $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, индуцированной скалярным произведением (7), т. е. в смысле *среднего квадратичного уклонения*

$$\|f - S_n\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n|^2(x)\,dx} \tag{10}$$

S_n от f на промежутке $[-\pi, \pi]$, так и в смысле поточечной сходимости на этом промежутке.

Первый из указанных видов сходимости для произвольного ряда Фурье был рассмотрен в § 1. Конкретизация полученных там результатов применительно к тригонометрическому ряду Фурье связана прежде всего с тем, что тригонометрическая система $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$ полна в $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ (это уже отмечалось в § 1 и будет независимо доказано в п. 4 настоящего параграфа).

Значит, основная теорема из § 1 в нашем случае позволяет утверждать, что справедлива следующая

Теорема 1 (о сходимости в среднем тригонометрического ряда Фурье). *Ряд Фурье* (6) *любой функции* $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ *сходится к ней в среднем* (10), *т. е.*

$$f(x) \underset{\mathcal{R}_2}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx,$$

и имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)\,dx = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2. \tag{11}$$

Мы часто будем использовать более компактную комплексную форму записи тригонометрических полиномов и тригонометрических рядов, основанную на формулах Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. Используя их, частичную сумму (9) ряда Фурье можно записать в виде

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{9'}$$

а сам ряд Фурье (6) — в виде

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \tag{6'}$$

где

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k); & \text{если} \quad k > 0, \\ \frac{1}{2} a_0, & \text{если} \quad k = 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & \text{если} \quad k < 0, \end{cases} \tag{12}$$

т. е.

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

и, значит, c_k — попросту коэффициенты Фурье функции f по системе $\{e^{ikx};\ k \in \mathbb{Z}\}$

Обратим внимание на то, что суммирование ряда Фурье (6′) понимается в смысле сходимости сумм (9′).

Теорема 1 в комплексной записи означает, что для любой функции $f \in \mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$

$$f(x) \underset{\mathscr{R}_2}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)\, e^{ikx}$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2. \tag{14}$$

с. Поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье. Теорема 1 полностью решает вопрос о сходимости ряда Фурье (6) в среднем, т. е. по норме пространства $\mathscr{R}_2[-\pi, \pi]$. Вся дальнейшая часть этого параграфа в основном будет посвящена изучению условий и характера поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье. Мы рассмотрим только наиболее простые аспекты этого вопроса Исследование поточечной сходимости тригонометрического ряда, как правило, дело настолько тонкое, что, несмотря на традиционное центральное место, которое после Эйлера, Фурье и Римана в теории функций занимали ряды Фурье, до сих пор нет внутреннего описания класса тех функций, которые представляются сходящимся к ним в каждой точке тригонометрическим рядом (*проблема Римана*). До недавнего времени не было даже известно, обязан ли ряд Фурье непрерывной функции сходиться к ней почти всюду (то, что сходимости всюду при этом может не быть, уже знали). В свое время А. Н. Колмогоров*) даже построил пример всюду расходящегося ряда Фурье функции $f \in L[-\pi, \pi]$ (где $L[-\pi, \pi]$ — пространство функций, интегрируемых по Лебегу на промежутке $[-\pi, \pi]$, получаемое метрическим пополнением пространства $\mathscr{R}[-\pi, \pi]$), а Д.Е. Меньшов**) построил тригонометрический ряд (1), содержащий отличные от нуля коэффициенты и сходящийся к нулю почти всюду (*нуль-ряд Меньшова*). Поставленный Н. Н. Лузиным***) вопрос (*проблема Лузина*) о том, обязан ли ряд Фурье любой функции $f \in L_2[-\pi, \pi]$ (где $L_2[-\pi, \pi]$ — метрическое пополнение пространства $\mathscr{R}_2[-\pi, \pi]$) сходиться почти всюду, был решен, причем утвердительно, только в 1966 г. Л. Карлесоном****). Из результата Л. Карлесона, в частности, следует, что ряд Фурье любой функции $f \in \mathscr{R}_2[-\pi, \pi]$ (например, непрерывной) обязан сходиться почти во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$.

2. Исследование поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

а. Лемма Римана. Одним из принципиальных наблюдений, связанных с характером поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье, является следующая

Лемма 1 (Римана). *Если локально интегрируемая функция $f:]\omega_1, \omega_2[\to \mathbb{R}$ абсолютно интегрируема (хотя бы в несобственном смысле) на промежутке $]\omega_1, \omega_2[$, то*

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) \cdot e^{i\lambda x}\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

◄ Фиксировав произвольно $\varepsilon > 0$, выберем сначала отрезок $[a, b] \subset]\omega_1, \omega_2[$ так, чтобы при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ было

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx - \int_a^b f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx \right| < \varepsilon. \tag{16}$$

---

*) А. Н. Колмогоров (1903) — выдающийся советский ученый; работы по теории вероятностей, математической статистике, теории функций, функциональному анализу, топологии, логике, дифференциальным уравнениям и прикладным аспектам математики.

**) Д. Е. Меньшов (1892) — один из наиболее крупных современных советских математиков, специалист в теории функций действительного переменного.

***) Н. Н. Лузин (1883—1950) — русский советский математик, один из наиболее тонких знатоков теории функций, родоначальник большой московской математической школы («Лузитании»).

****) Л. Карлесон (1928) — выдающийся шведский математик; основные труды относятся к различным областям современного анализа.

Ввиду оценок

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) e^{i\lambda x}\,dx-\int_a^b f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\omega_1}^{a}|f(x)e^{i\lambda x}|\,dx+\int_b^{\omega_2}|f(x)e^{i\lambda x}|\,dx=\int_{\omega_1}^{a}|f|(x)\,dx+\int_b^{\omega_2}|f|(x)\,dx$$

и абсолютной интегрируемости f на $]\omega_1, \omega_2[$, указанный отрезок $[a, b]$, конечно, существует.

Поскольку $f\in\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ (точнее $f|_{[a,b]}\in\mathcal{R}[a, b]$), то найдется такая нижняя интегральная сумма Дарбу $\sum\limits_{j=1}^{n} m_j\,\Delta x_j$, где $m_j=\inf\limits_{x\in[x_{j-1},\,x_j]} f(x)$, что

$$0\leqslant\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{j=1}^{n} m_j\,\Delta x_j<\varepsilon.$$

Вводя теперь кусочно постоянную на $[a, b]$ функцию $g(x)=m_j$, если $x\in[x_{j-1}, x_j[$, $j=1, \ldots, n$, получаем, таким образом, что $g(x)\leqslant f(x)$ на $[a, b]$ и

$$0\leqslant\left|\int_a^b f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx-\int_a^b g(x)\,e^{i\lambda x}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x)-g(x)|\,|e^{i\lambda x}|\,dx=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx<\varepsilon. \tag{17}$$

Но

$$\int_a^b g(x)\,e^{i\lambda x}\,dx=\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} m_j e^{i\lambda x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{i\lambda}\sum_{j=1}^{n}(m_j e^{i\lambda x})\Big|_{x_{j-1}}^{x_j}\to 0 \text{ при } \lambda\to 0,\quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{18}$$

Сопоставляя соотношения (16) — (18), получаем то, что и утверждалось. ▶

Замечание 1. Отделяя в (15) действительную и мнимую части, получаем, что

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\cos\lambda x\,dx\to 0 \quad\text{и}\quad \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\sin\lambda x\,dx\to 0 \tag{19}$$

при $\lambda\to\infty$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Если бы в последних интегралах функция f была комплекснозначна, то, отделяя уже в них действительную и мнимую части, мы получили бы, что соотношения (19), а значит, и соотношение (15), на самом-то деле, конечно, справедливы и для комплекснозначных функций $f\colon]\omega_1, \omega_2[\to \mathbb{C}$.

Замечание 2. Если известно, что $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, то в силу неравенства Бесселя (8) можно сразу заключить, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \to 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \to 0$$

при $n \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Этим дискретным вариантом леммы Римана в принципе уже можно было бы обойтись в тех начальных исследованиях классических рядов Фурье, которые будут здесь проведены.

b. Интегральное представление частичной суммы ряда Фурье. Вернемся теперь к частичной сумме (9) ряда Фурье (6) и, подставив в ее комплексную запись (9′) выражения (13) коэффициентов Фурье, проделаем следующие преобразования:

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt\right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right) dt.$$

Но

$$D_n(u) := \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \frac{e^{i(n+1)u} - e^{-inu}}{e^{iu} - 1} = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)u} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)u}}{e^{i\frac{1}{2}u} - e^{-i\frac{1}{2}u}}, \tag{20}$$

поэтому

$$D_n(u) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u} \tag{21}$$

и

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt. \tag{22}$$

c. Ядро Дирихле. Введенная соотношением (20) и преобразованная затем к виду (21) функция $D_n(u)$ называется *ядром Дирихле* или, точнее, *n-м ядром Дирихле*.

Укажем используемые в дальнейшем свойства ядра Дирихле.

Лемма 2 (о свойствах ядер Дирихле). *Функция $D_n(u)$ обладает следующими свойствами:*

a) *D_n — 2π-периодическая и четная на $\mathbb{R}$;*

b) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\, du = 1$ *для любого $n \in \mathbb{N}$;*

c) *для любого* $\delta \in]0, \pi[$

$$\int_{\delta}^{\pi} D_n(u)\,du \to 0 \text{ при } n \to \infty, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

◀ Периодичность и четность D_n, очевидно, явно присутствуют в самом определении (6) функции D_n. Из этого же соотношения получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iku}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0u}\,du = 1,$$

поскольку при $k \neq 0$ интегралы равны нулю.

Если теперь $0 < \delta < \pi$, то, используя представление (21) функции D_n и полагая $f(u) = \dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}u}$ при $\delta \leqslant u \leqslant \pi$, по лемме Римана получаем c). ▶

d. Принцип локализации.

Теорема 2 (принцип локализации). *Пусть f и g — вещественно или комплекснозначные локально интегрируемые на промежутке $]-\pi, \pi[$ и абсолютно интегрируемые на нем (хотя бы в несобственном смысле) функции.*

Если функции f и g совпадают в сколь угодно малой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in]-\pi, \pi[$, то их ряды Фурье

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)\,e^{ikx}, \quad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(g)\,e^{ikx}$$

сходятся или расходятся в точке x_0 одновременно, а в случае сходимости их суммы в x_0 совпадают *).

◀ Функции f и g продолжим с периодом 2π на всю числовую ось. Пренебрегая не существенными для последующих вычислений значениями продолженных функций в изолированных точках вида $(2n+1)\pi$, где $n \in \mathbb{Z}$, можно считать что f и g — 2π-периодические функции на $\mathbb{R}$, абсолютно интегрируемые (быть может, в несобственном смысле) на любом конечном отрезке прямой $\mathbb{R}$.

Пользуясь 2π-периодичностью ядра Дирихле и тем, что интеграл от периодической на $\mathbb{R}$ функции по отрезку, длина которого равна периоду функции, не зависит от расположения отрезка на $\mathbb{R}$, после замены $x - t = u$ из (22) получаем симметричное прежнему представление

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,D_n(t)\,dt \tag{22'}$$

интегральной суммы ряда Фурье.

---

*) Хотя и не обязательно совпадают со значением $f(x_0) = g(x_0)$.

Пусть теперь $\delta \in]0, \pi[$. Тогда

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) f(x-t)\, D_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\, D_n(t)\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{1}{2}t} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\, dt.$$

Здесь при получении последнего интеграла мы воспользовались выражением (21) ядра Дирихле и заменой $t = -v$ свели интеграл по промежутку $[-\pi, -\delta]$ к интегралу по промежутку $[\delta, \pi]$.

Теперь, учитывая ограниченность $\dfrac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}t\right|}$ при $\delta \leq t \leq \pi$, ссылаясь на лемму Римана, можно заключить, что, каково бы ни было $\delta \in]0, \pi[$,

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\, D_n(t)\, dt + o(1) \text{ при } n \to \infty. \qquad (23)$$

Значит, поведение $S_n(x)$ при $n \to \infty$ полностью определяется значениями периодической функции f в сколь угодно малой δ-окрестности точки x. Это и есть принцип локализации, из которого немедленно вытекает другая его форма, высказанная в теореме 2. ▶

Замечание 3. Как видно из доказательства (и это существенно!), если бы точка x_0 была концом отрезка $[-\pi, \pi]$, то для локального совпадения в окрестности точки x_0 продолженных на $\mathbb{R}$ функций f и g необходимо (и достаточно), чтобы заданные лишь на отрезке $[-\pi, \pi]$ исходные функции f и g совпадали в окрестности обоих концов этого отрезка.

e. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке.

Определение 2. Говорят, что функция $f\colon \overset{\circ}{U}(x) \to \mathbb{C}$, заданная в проколотой окрестности точки $x \in \mathbb{R}$, *удовлетворяет в точке x условиям Дини*, если

a) в точке x существуют оба односторонних предела

$$f(x_-) = \lim_{t \to +0} f(x-t), \quad f(x_+) = \lim_{t \to +0} f(x+t);$$

b) оба интеграла

$$\int_{+0} \frac{f(x-t)-f(x_-)}{t}\, dt, \quad \int_{+0} \frac{f(x+t)-f(x_+)}{t}\, dt$$

сходятся абсолютно *).

*) Имеется в виду абсолютная сходимость интеграла $\int_0^{\varepsilon}$ хоть при каком-нибудь значении $\varepsilon > 0$.

Пример 2. Если f — непрерывная в $U(x)$ функция, удовлетворяющая в точке x условию Гёльдера

$$|f(x+t)-f(x)|\leqslant M|t|^{\alpha}, \quad 0<\alpha\leqslant 1,$$

то, поскольку тогда справедлива оценка

$$\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|\leqslant\frac{M}{|t|^{1-\alpha}},$$

функция f удовлетворяет в точке x условиям Дини.

Ясно также, что если определенная в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x)$ точки x непрерывная функция f имеет односторонние пределы $f(x_-)$, $f(x_+)$ и удовлетворяет односторонним условиям Гёльдера

$$|f(x+t)-f(x_+)|\leqslant Mt^{\alpha},$$
$$|f(x-t)-f(x_-)|\leqslant Mt^{\alpha},$$

где $t>0$, $0<\alpha\leqslant 1$, а M — положительная постоянная, то функция f по той же причине, что и выше, будет удовлетворять условиям Дини.

Определение 3. Вещественно- или комплекснозначную функцию f будем называть *кусочно непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если существует такой конечный набор точек $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ этого отрезка, что функция f определена, непрерывна на каждом интервале $]x_{j-1}, x_j[$, $j=1, \ldots, n$, и имеет односторонние пределы при подходе к его концам.

Определение 4. Функцию, имеющую на данном отрезке кусочно непрерывную производную, будем называть *кусочно непрерывно дифференцируемой функцией на* этом *отрезке*.

Пример 3. Если функция кусочно непрерывно дифференцируема на отрезке, то она удовлетворяет условиям Гёльдера с показателем $\alpha=1$ в любой точке этого отрезка (это вытекает из теоремы Лагранжа о конечном приращении). Значит, в силу примера 1 такая функция удовлетворяет условиям Дини в любой точке рассматриваемого отрезка. В концах отрезка, разумеется, проверке подлежит только соответствующая односторонняя пара условий Дини.

Пример 4. Функция $f(x)=\operatorname{sgn} x$ удовлетворяет условиям Дини в любой точке $x\in\mathbb{R}$, в том числе и в нуле.

Теорема 3 (достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке). *Пусть $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если функция f удовлетворяет в точке $x\in\mathbb{R}$ условиям Дини, то ее ряд Фурье сходится в точке x, причем*

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' c_k(f)\, e^{ikx}=\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}. \tag{24}$$

◀ Используя свойства ядра Дирихле проведем сначала следующие простые преобразования интеграла (22′):

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,D_n(t)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)\,D_n(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)\,D_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)\,D_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x-t)+f(x+t))\,D_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}\,D_n(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{f(x-t)-f(x_-)}{2}+\frac{f(x+t)-f(x_+)}{2}\right)D_n(t)\,dt=\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{f(x-t)-f(x_-)}{2\sin\frac{1}{2}t}+\frac{f(x+t)-f(x_+)}{2\sin\frac{1}{2}t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

Поскольку $2\sin\frac{1}{2}t\sim t$ при $t\to+0$, то благодаря условиям Дини на основании леммы Римана можно теперь утверждать, что при $n\to\infty$ последний интеграл стремится к нулю. ▶

Замечание 4. Формула (24) показывает, что ряд Фурье, сходясь к полусумме односторонних пределов функции f в точке x, совсем не реагирует на само значение $f(x)$ функции в точке x. Ничего удивительного в этом не должно быть, если вспомнить, что коэффициенты Фурье, а значит, и сам ряд Фурье не изменятся от изменения значения функции в индивидуальной точке.

Пример 5. В примере 8 из § 1 мы нашли ряд Фурье

$$x\sim\sum_{k=1}^{\infty}2\,\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx \tag{25}$$

функции $f(x)=x$ на промежутке $[-\pi,\pi]$. Продолжая функцию $f(x)$ периодично с интервала $]-\pi,\pi[$ на всю числовую ось, можно считать, что ряд (25) является рядом Фурье этой продолженной функции. Тогда на основании теоремы 3 получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}2\,\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx=\begin{cases}x, & \text{если } |x|<\pi,\\ 0, & \text{если } |x|=\pi.\end{cases}$$

В частности, при $x=\frac{\pi}{2}$, отсюда следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Пример 6. Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$ и $|\alpha|<1$. Рассмотрим 2π-периодическую функцию $f(x)$, задаваемую на отрезке $[-\pi,\pi]$ формулой $f(x)=\cos\alpha x$.

По формулам (4), (5) найдем ее коэффициенты Фурье:

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\cos nx\,dx=\frac{(-1)^n\sin\pi\alpha}{\pi}\cdot\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2},$$

$$b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\sin nx\,dx=0.$$

По теореме 3 в любой точке $x\in[-\pi,\pi]$ имеет место равенство

$$\cos\alpha x=\frac{2\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right).$$

При $x=\pi$ отсюда получаем, что

$$\operatorname{ctg}\pi\alpha-\frac{1}{\pi\alpha}=\frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}. \tag{26}$$

Если $|\alpha|\leqslant\alpha_0<1$, то $\left|\frac{1}{\alpha^2-n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2-\alpha_0^2}$, поэтому стоящий в правой части равенства (26) ряд сходится равномерно по α на любом отрезке $|\alpha|\leqslant\alpha_0<1$. Значит, законно его почленное интегрирование, т. е.

$$\int_0^x\left(\operatorname{ctg}\pi\alpha-\frac{1}{\pi\alpha}\right)d\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2\alpha\,d\alpha}{\alpha^2-n^2}$$

и

$$\ln\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\Big|_0^x=\sum_{n=1}^{\infty}\ln|\alpha^2-n^2|\Big|_0^x,$$

что дает

$$\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

и окончательно

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\quad\text{при } |x|<1. \tag{27}$$

Мы доказали, таким образом, соотношение (27), на которое в свое время ссылались при выводе формулы дополнения для функции $\Gamma(x)$ Эйлера.

f. Теорема Фейера*). Рассмотрим теперь последовательность функций

$$\sigma_n(x) := \frac{S_0(x)+\ldots+S_n(x)}{n+1}, \tag{28}$$

являющихся средним арифметическим соответствующих частичных сумм $S_0(x), \ldots, S_n(x)$ тригонометрического ряда Фурье (6) периодической функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

Используя интегральное представление (22′) частичной суммы ряда Фурье, в результате простых преобразований получаем

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,D_k(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,\mathcal{F}_n(t)\,dt,$$

где

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx-\cos(k+1)x}{2\sin^2\frac{1}{2}x} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\,\frac{1-\cos(n+1)x}{2\sin^2\frac{1}{2}x} = \frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{(n+1)\sin^2\frac{1}{2}x}.$$

Функция $\mathcal{F}_n(x)$ называется *ядром Фейера*, точнее *n-м ядром Фейера*.

Лемма 3 (о свойствах ядер Фейера). *Последовательность функций*

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_n(x), & \text{если } |x|\leqslant\pi, \\ 0, & \text{если } |x|>\pi, \end{cases}$$

является δ-образной на $\mathbb{R}$.

◀ Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_n(x) = \frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{(n+1)\sin^2\frac{1}{2}x},$$

то неотрицательность $\Delta_n(x)$ очевидна.

*) Л. Фейер (1880—1956) — известный венгерский математик.

Далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_n(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathscr{F}_n(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}D_k(x)\,dx = \frac{1}{n+1}(n+1) = 1.$$

Наконец, при любом $\delta > 0$

$$\int_{\delta}^{+\infty} \Delta_n(x)\,dx = \int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{2\pi}F_n(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin^2\frac{1}{2}x}\,dx < \frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{\delta}^{\pi}\frac{dx}{\sin^2\frac{1}{2}x} \to 0$$

при $n\to\infty$. ►

Теорема 4 (Фейера). *Пусть $f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция. Тогда:*

a) *если на множестве $E\subset\mathbb{R}$ функция f равномерно непрерывна, то*

$$\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } E \text{ при } n\to\infty;$$

b) *если $f\in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, то*

$$\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } \mathbb{R} \text{ при } n\to\infty;$$

c) *если f непрерывна в точке $x\in\mathbb{R}$, то*

$$\sigma_n(x)\to f(x) \text{ при } n\to\infty.$$

◄ Утверждения b) и c) являются специальными случаями утверждения a).

Само же утверждение a) является частным случаем общего утверждения 5 из § 4 гл. XVII о сходимости свертки, поскольку

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,\mathscr{F}_n(t)\,dt = (f*\Delta_n)(x). \;►$$

Следствие 1 (теорема Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическими многочленами). *Если функция $f: [-\pi, \pi]\to\mathbb{C}$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то эта функция может быть сколь угодно точно равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ аппроксимирована тригонометрическими многочленами.*

◄ Продолжая f 2π-периодически, получим непрерывную периодическую на $\mathbb{R}$ функцию, к которой по теореме Фейера равномерно сходятся тригонометрические многочлены $\sigma_n(x)$. ►

Следствие 2. *Если функция f непрерывна в точке x, то ее ряд Фурье либо вовсе расходится в этой точке, либо сходится к $f(x)$.*

◀ Формально в проверке нуждается только случай сходимости. Если последовательность $S_n(x)$ при $n\to\infty$ имеет предел, то тот же предел имеет и последовательность $\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+\ldots+S_n(x)}{n+1}$. Но по теореме Фейера $\sigma_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$, значит, и $S_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$, если вообще предел $S_n(x)$ при $n\to\infty$ существует. ▶

Замечание 5. Отметим, что ряд Фурье непрерывной функции и в самом деле может в некоторых точках расходиться.

3. Гладкость функции и скорость убывания коэффициентов Фурье.

а. Оценка коэффициентов Фурье гладкой функции.

Лемма 4 (о дифференцировании ряда Фурье). *Если непрерывная функция $f\in C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, принимающая на концах отрезка $[-\pi,\pi]$ равные значения ($f(-\pi)=f(\pi)$), кусочно непрерывно дифференцируема на $[-\pi,\pi]$, то ряд Фурье ее производной*

$$f'\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_k(f')e^{ikx}$$

может быть получен формальным дифференцированием ряда Фурье

$$f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}$$

самой функции, т. е.

$$c_k(f')=ikc_k(f),\qquad k\in\mathbb{Z}.\tag{29}$$

◀ Исходя из определения коэффициентов Фурье (13), интегрированием по частям находим

$$c_k(f')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)e^{-ikx}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}f(x)e^{ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{ik}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}\,dx=ikc_k(f),$$

поскольку $f(\pi)e^{-ik\pi}-f(-\pi)e^{ik\pi}=0$. ▶

Утверждение 1 (о связи гладкости функции и скорости убывания ее коэффициентов Фурье). *Пусть $f\in C^{(m-1)}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ и $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$, $j=0,1,\ldots,m-1$. Если функция f имеет на отрезке $[-\pi,\pi]$ кусочно непрерывную производную $f^{(m)}$ порядка m, то*

$$c_k(f^{(m)})=(ik)^m c_k(f),\qquad k\in\mathbb{Z},\tag{30}$$

и

$$|c_k(f)| = \frac{\gamma_k}{k^m} = o\left(\frac{1}{k^m}\right) \text{ при } k \to \infty, \ k \in \mathbb{Z}, \tag{31}$$

причем $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$.

◀ Соотношение (30) получается в результате m-кратного использования равенства (29)

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)\, c_k(f^{(m-1)}) = \ldots = (ik)^m c_k(f).$$

Полагая $\gamma_k = |c_k(f^{(m)})|$, с учетом неравенства Бесселя

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f^{(m)})|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}|^2(x)\, dx,$$

из (30) получаем соотношение (31). ▶

Замечание 6. В доказанном утверждении, как и в лемме 4, вместо условий $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ можно было бы считать, что f является заданной на всей прямой 2π-периодической функцией.

Замечание 7. Если тригонометрический ряд Фурье записывать в форме (6), а не в комплексной форме (6′), то вместо простых соотношений (30) пришлось бы писать заметно более громоздкие равенства, смысл которых, однако, тот же: при указанных условиях ряд Фурье можно дифференцировать почленно (в какой бы из форм (6) или (6′) он ни был задан). Что же касается оценок коэффициентов Фурье $a_k(f)$, $b_k(f)$ ряда (6), то, поскольку $a_k(f) = c_k(f) - c_{-k}(f)$, $b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f))$ (см. формулы (12)), из (31) следует, что если функция f удовлетворяет указанным в утверждении условиям, то

$$|a_k(f)| = \frac{\alpha_k}{k^m}, \quad |b_k(f)| = \frac{\beta_k}{k^m}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{31′}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$, причем можно считать $\alpha_k = \beta_k = \gamma_k + \gamma_{-k}$.

b. Гладкость функции и скорость сходимости ее ряда Фурье.

Теорема 5. *Если функция* $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ *такова, что*

a) $f \in C^{(m-1)}[-\pi, \pi]$, $m \in \mathbb{N}$,

b) $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$,

c) f *имеет на* $[-\pi, \pi]$ *кусочно непрерывную производную* $f^{(m)}$ *порядка* $m \geqslant 1$,

то ряд Фурье функции f *сходится к* f *абсолютно и равномерно на отрезке* $[-\pi, \pi]$, *причем отклонение* n-*й частичной суммы* $S_n(x)$ *ряда Фурье от* $f(x)$ *на всем отрезке* $[-\pi, \pi]$ *имеет оценку*

$$|f(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}},$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — *стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел.*

◀ Если непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция удовлетворяет условию $f(-\pi)=f(\pi)$ и имеет на этом отрезке хотя бы первую кусочно непрерывную производную, то на основании соотношений (31′) уже можно записать, что

$$|a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx|\leqslant\frac{\alpha_k+\beta_k}{k},\qquad k\in\mathbb{N}. \tag{32}$$

Но $\frac{\alpha_k+\beta_k}{k}\leqslant\frac{1}{2}\left[(\alpha_k+\beta_k)^2+\frac{1}{k^2}\right]\leqslant\alpha_k^2+\beta_k^2+\frac{1}{2k^2}$, и поскольку ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k^2$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходятся, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k+\beta_k}{k}$ тоже сходится. На основании мажорантного признака Вейерштрасса можно теперь из соотношения (32) заключить, что ряд Фурье

$$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx$$

функции f сходится абсолютно и равномерно на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ (и всей прямой $\mathbb{R}$).

Пусть

$$S(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx.$$

По условию функция f кусочно непрерывно дифференцируема на $[-\pi, \pi]$, поэтому она удовлетворяет условиям Дини в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$ (см. пример 3). Поскольку $f(-\pi)=f(\pi)$, функцию f можно 2π-периодически продолжить на $\mathbb{R}$ с сохранением свойств Дини в любой точке $x\in\mathbb{R}$. Значит, на основании теоремы 3 можно заключить, что $S(x)=f(x)$.

Теперь, используя соотношения (31′), имеем возможность приступить к оценке:

$$|f(x)-S_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|=$$
$$=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\alpha_k+\beta_k}{k^m}.$$

По неравенству Коши — Буняковского

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\alpha_k+\beta_k}{k^m}\leqslant\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}\right)^{1/2}.$$

Полагая $r_n = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)^2\right)^{1/2}$ и учитывая сходимость ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)^2$, вытекающую из оценки $(\alpha_k + \beta_k)^2 \leqslant 2(\alpha_k^2 + \beta_k^2)$, заключаем, что $r_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Далее (рис. 104)

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leqslant \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{(2m-1)} \cdot \frac{1}{n^{2m-1}}$$

и, значит,

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \frac{1}{n^{m-\frac{1}{2}}}.$$

Полагая теперь $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{2m-1}} r_n$, из проведенных оценок получаем неравенство (32). ▶

В связи с полученными результатами сделаем несколько полезных замечаний.

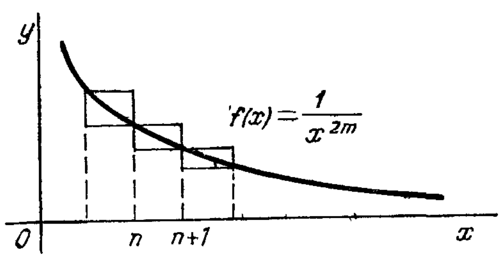

Рис 104

Замечание 8. Из теоремы 5 (и существенно использованной при ее доказательстве теоремы 3) можно легко и независимо от теоремы Фейера вновь получить аппроксимационную теорему Вейерштрасса, сформулированную в следствии 1.

◀ Достаточно доказать ее для вещественнозначных функций. Используя равномерную непрерывность функции f на отрезке $[-\pi, \pi]$, аппроксимируем f на этом отрезке равномерно с точностью до $\varepsilon/2$ кусочно линейной непрерывной функцией $\varphi(x)$, принимающей на концах отрезка те же значения, что и f, т. е. $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ (рис. 105). По теореме 5 ряд Фурье функции φ сходится к φ равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. Беря частичную сумму этого ряда, уклоняющуюся от $\varphi(x)$ не более чем на $\varepsilon/2$, получим тригонометрический многочлен, аппроксимирующий исходную функцию f с точностью до ε на всем отрезке $[-\pi, \pi]$. ▶

Замечание 9*. Предположим нам удалось представить функцию f, имеющую особенность — скачок, в виде суммы $f=\varphi+\psi$ некоторой гладкой функции ψ и некоторой простой функции φ,

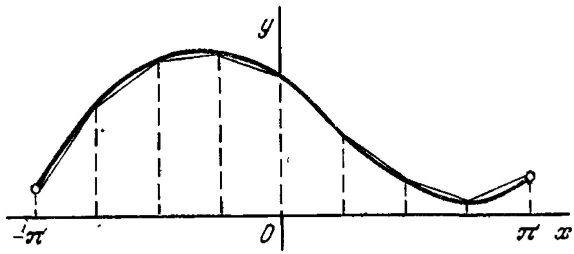

Рис 105

имеющей ту же особенность, что и f (рис 106 *a*, *b*, *c*). Тогда ряд Фурье функции f окажется суммой быстро и равномерно сходящегося в силу теоремы 5 ряда Фурье функции ψ и ряда Фурье функции φ. Последний можно считать известным, если взять стандартную функцию φ (на рисунке $\varphi(x)=-\pi-x$ при $-\pi<x<0$ и $\varphi(x)=$ $=\pi-x$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$).

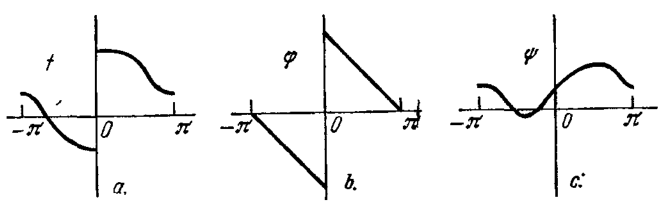

Рис 106

Это наблюдение используется как в прикладных и вычислительных вопросах, связанных с рядами (*метод* А. Н. Крылова*) *выделения особенностей* и улучшение сходимости рядов), так и в самой теории тригонометрических рядов Фурье (см., например. *явление Гиббса***), описанное в задаче 11).

Замечание 10 об интегрировании ряда Фурье.

Благодаря теореме 5 можно сформулировать и доказать следующее дополняющее лемму 4 о дифференцировании ряда Фурье

---

*) А. Н Крылов (1863—1945) — русский советский механик и математик внесший большой вклад в вычислительную математику и особенно в методы расчета элементов кораблей

**) Д У. Гиббс (1839—1903) — американский физик и математик, один из основоположников термодинамики и статистической механики.

Утверждение 2. *Если функция* $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ *кусочно непрерывна, то соответствие* $f(x) \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$ *после интегрирования превращается в равенство*

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = c_0(f)\,x + \sum\limits_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{c_k(f)}{ik}(e^{ikx} - 1),$$

где штрих свидетельствует об отсутствии в сумме члена с индексом $k=0$; *суммирование происходит по симметричным частичным суммам* $\sum\limits_{-n}^{n}$ *и при этом ряд сходится равномерно на отрезке* $[-\pi, \pi]$.

◀ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt - c_0(f)\,x$$

на промежутке $[-\pi, \pi]$. Очевидно, $F \in C[-\pi, \pi]$. Далее, $F(-\pi) = F(\pi)$ поскольку

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - 2\pi c_0(f) = 0,$$

что следует из определения $c_0(f)$. Поскольку производная $F'(x) = f(x) - c_0(f)$ функции F кусочно непрерывна, ряд Фурье $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(F) e^{ikx}$ функции F по теореме 5 сходится к F равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. По лемме 4 $c_k(F) = \frac{c_k(F')}{ik}$ при $k \neq 0$. Но $c_k(F') = c_k(f)$, если $k \neq 0$. Записывая теперь равенство $F(x) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(F) e^{ikx}$ в терминах функции f и учитывая, что $F(0) = 0$, получаем то, что и утверждалось. ▶

4. Полнота тригонометрической системы.

а. Теорема о полноте. В заключение вернемся вновь от поточечной сходимости ряда Фурье к его сходимости в среднем (10). Точнее, используя накопленные факты о характере поточечной сходимости ряда Фурье, дадим независимое от уже встречавшегося в задачах доказательство полноты в $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ тригонометрической системы $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$. При этом, как и в п. 1, под $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ или $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ понимается линейное пространство вещественно- или комплекснозначных функций, локально интегрируемых на промежутке $]-\pi, \pi[$ и имеющих интегрируемый на $]-\pi, \pi[$ (хотя бы в несобственном смысле) квадрат модуля; это векторное пространство предполагается наделенным стандартным скалярным произведением (7), порождающим норму, сходимость по которой и есть сходимость в среднем (10).

Теорема 6 (о полноте тригонометрической системы). *Любая функция $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ может быть сколь угодно точно приближена в среднем:*

a) *финитными на $]-\pi, \pi[$ интегрируемыми по Риману на отрезке $[-\pi, \pi]$ функциями;*

b) *кусочно постоянными на отрезке $[-\pi, \pi]$ функциями;*

c) *непрерывными и финитными на отрезке $[-\pi, \pi]$ функциями;*

d) *тригонометрическими полиномами.*

◄ Поскольку теорему, очевидно, достаточно доказать для вещественнозначных функций, то мы и ограничимся этим случаем.

a) Из определения несобственного интеграла следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \lim_{\delta\to+0} \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} f^2(x)\,dx.$$

Значит, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется число $\delta > 0$ такое, что функция

$$f_\delta(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |x| < \pi-\delta, \\ 0, & \text{если } \pi-\delta \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

будет отличаться в среднем на $[-\pi, \pi]$ от f меньше, чем на ε, поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f-f_\delta)^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} f^2(x)\,dx + \int_{\pi-\delta}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

b) Достаточно проверить, что любую функцию вида f_δ можно в $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ аппроксимировать кусочно постоянными финитными на $[-\pi, \pi]$ функциями. Но функция f_δ уже интегрируема по Риману на отрезке $[-\pi+\delta, \pi-\delta]$. Значит, она ограничена на нем некоторой постоянной M и, кроме того, существует такое разбиение $-\pi+\delta = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \pi-\delta$ этого отрезка, что соответствующая ему нижняя интегральная сумма Дарбу $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ функции f_δ отличается от интеграла f_δ по отрезку $[-\pi+\delta, \pi+\delta]$ меньше чем на $\varepsilon > 0$.

Полагая теперь

$$g(x) = \begin{cases} m_i, & \text{если } x \in [x_{i-1}, x_i[, \\ 0 & \text{в остальных точках отрезка } [-\pi, \pi], \end{cases}$$

получим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f_\delta - g)^2 (x)\, dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f_\delta + g|\,|f_\delta - g|(x)\, dx \leqslant$$
$$\leqslant 2M \int_{-\pi+\delta}^{-\pi-\delta} (f_\delta - g)(x)\, dx \leqslant 2M\varepsilon$$

и, значит, действительно f_δ можно сколь угодно точно в среднем на отрезке $[-\pi, \pi]$ аппроксимировать кусочно постоянными на этом отрезке функциями, обращающимися в нуль в окрестности концов отрезка $[-\pi, \pi]$.

c) Теперь уже достаточно научиться приближать в среднем указанные в b) функции. Пусть g — такая функция. Все ее точки разрыва $x_1, \ldots, x_n$ лежат в интервале $]-\pi, \pi[$. Их конечное число, поэтому, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно подобрать число $\delta > 0$ столь маленькое, что δ-окрестности точек $x_1, \ldots, x_n$ не пересекаются, содержатся строго внутри интервала $]-\pi, \pi[$ и $2\delta n M < \varepsilon$, где $M = \sup\limits_{|x| \leqslant \pi} |g(x)|$. Заменяя теперь функцию g на отрезках $[x_i - \delta, x_i + \delta]$, $i = 1, \ldots, n$, линейной функцией, интерполирующей значения $g(x_i - \delta)$ и $g(x_i + \delta)$, которые функция g принимает на концах соответствующего отрезка, мы получим кусочно линейную непрерывную и финитную на $[-\pi, \pi]$ функцию g_δ. По построению $|g_\delta(x)| \leqslant M$ на $[-\pi, \pi]$, значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (g - g_\delta)^2 (x)\, dx \leqslant 2M \int_{-\pi}^{\pi} |g - g_\delta|(x)\, dx =$$
$$= 2M \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta} |g - g_\delta|(x)\, dx \leqslant 2M \cdot (2M \cdot 2\delta) \cdot n < 4M\varepsilon$$

и возможность аппроксимации доказана.

d) Осталось показать, что тригонометрическим полиномом можно в среднем на отрезке $[-\pi, \pi]$ приблизить любую функцию класса c). Но ведь при любом $\varepsilon > 0$ для любой функции типа g_δ по теореме 5 найдется тригонометрический многочлен T_n, равномерно с точностью до ε аппроксимирующий g_δ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Значит $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (g_\delta - T_n)^2 (x)\, dx < 2\pi\varepsilon^2$ и возможность сколь угодно точной аппроксимации в среднем на отрезке $[-\pi, \pi]$ любой функции класса c) посредством тригонометрических полиномов установлена.

Ссылаясь на неравенство треугольника в $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, можно теперь заключить, что и вся теорема 6 о полноте в $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ указанных классов функций тоже доказана. ►

b. Скалярное произведение и равенство Парсеваля. После доказанной полноты в $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ тригонометрической системы на основании теоремы 1 можем утверждать, что для любой функции $f \in \mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ имеет место равенство

$$f = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx \tag{33}$$

или, в комплексной записи, равенство

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}, \tag{34}$$

где сходимость понимается как сходимость по норме пространства $\mathscr{R}_2[-\pi, \pi]$, т. е. в среднем, а предельный переход в (34) совершается при $n \to \infty$ по суммам вида $S_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$.

Если переписать равенства (33), (34) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} f = \frac{a_0(f)}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + b_k(f) \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \tag{33'}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{34'}$$

то в левых частях окажутся ряды по ортонормированным системам $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Значит, на основании общего закона вычисления скалярного произведения векторов, по их координатам в ортонормированном базисе (см. лемму 5 из § 1) можно утверждать, что для любых функций f и g из $\mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi} \langle f, g \rangle = \frac{a_0(f) \bar{a}_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \bar{a}_k(g) + b_k(f) \bar{b}_k(g) \tag{35}$$

или, в иной записи, равенство

$$\frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) \bar{c}_k(g), \tag{36}$$

где, как всегда,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{g}(x)\, dx.$$

В частности, при $f = g$ из (35) и (36) получаем записанное в двух эквивалентных между собой формах классическое равенство

Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2=\frac{|a_0(f)|^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(f)|^2+|b_k(f)|^2, \tag{37}$$

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2=\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k(f)|^2. \tag{38}$$

Мы уже отмечали, что с геометрической точки зрения равенство Парсеваля можно рассматривать как бесконечномерный вариант теоремы Пифагора.

На основе равенства Парсеваля легко доказать следующее полезное

Утверждение 3 (о единственности ряда Фурье). *Пусть f и g — функции из $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$. Тогда:*

a) *если тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx \quad \left(=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}\right)$$

сходится к f в среднем на отрезке $[-\pi, \pi]$, то он является рядом Фурье функции f;

b) *если функции f и g имеют один и тот же ряд Фурье, то они совпадают почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$, т. е. $f=g$ в $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$.*

◀ На самом-то деле речь, конечно, идет о частном случае общего факта единственности разложения любого вектора $x\in X$ линейного пространства X, наделенного скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$ по ортонормированной системе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ векторов X Мы и докажем этот общий факт.

Пусть $x=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_je_j$. Тогда $\|x\|^2=\langle x, x\rangle=\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\alpha_j|^2$, и если $x=0$, то $\alpha_j=0$ при любом $j\in\mathbb{N}$. Значит, если $x=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_je_j=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\beta_je_j$, то $0=\sum\limits_{j=1}^{\infty}(\alpha_j-\beta_j)e_j$ и $\alpha_j-\beta_j=0$ при любом $j\in\mathbb{N}$. Мы доказали тем самым, что если разложение вектора по ортонормированной системе вообще существует, то оно единственно.

В том случае, когда система $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ полна в X, разложение $x=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_je_j$ заведомо существует для любого вектора $x\in X$, причем $\alpha_j=\langle x, e_j\rangle$ — коэффициенты Фурье вектора x в системе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$. Значит, если два вектора x и y имеют одинаковые ряды Фурье по полной ортонормированной системе (т. е. $\forall j \in \mathbb{N}\ \langle x, e_j\rangle = \langle y, e_j\rangle$), то $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \langle y, e_j\rangle e_j = y$.

В условиях утверждения 2 тригонометрическая система ортогональна, но не ортонормирована, однако мы уже видели в (33'), (34'), что это формальное затруднение несущественно. ►

Замечание 11. Рассматривая в свое время ряды Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, мы отметили, что различные функции класса $C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ могут иметь одинаковые ряды Тейлора (в некоторых точках $a \in \mathbb{R}$). Этот контраст с только что доказанной теоремой единственности рядов Фурье не следует слишком абсолютизировать, поскольку всякая теорема единственности относительна в том смысле, что она относится к определенному пространству и определенному виду сходимости.

—Например, в пространстве аналитических функций (т. е. функций, допускающих локально представление в виде поточечно сходящегося к ним степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$) две различные функции в любой точке имеют не совпадающие тейлоровские разложения

Если в свою очередь при изучении тригонометрических рядов отказаться от пространства $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ и рассматривать поточечную сходимость тригонометрического ряда, то, как уже отмечалось (см. стр. 520), можно построить тригонометрический ряд, не все коэффициенты которого равны нулю и который тем не менее почти всюду сходится к нулю. По утверждению 2 такой нуль-ряд, конечно, не сходится к нулю в смысле среднего квадратичного уклонения.

В заключение в качестве иллюстрации использования свойств тригонометрических рядов Фурье, рассмотрим следующий принадлежащий Гурвицу *) вывод классического изопериметрического неравенства в двумерном случае. Чтобы избавиться от громоздких выражений и случайных технических трудностей, мы будем пользоваться комплексной записью.

Пример 7. Между объемом V области в евклидовом пространстве E^n, $n \geqslant 2$ и $(n-1)$-мерной площадью F, ограничивающей область гиперповерхности, имеется соотношение

$$n^n v_n V^{n-1} \leqslant F^n, \tag{39}$$

*) А. Гурвиц (1859—1919) — немецкий математик, ученик Ф. Клейна.

называемое *изопериметрическим неравенством*; здесь v_n — объем единичного n-мерного шара в E^n. Равенство в изопериметрическом неравенстве (39) имеет место только для шара.

Название «изопериметрическое» связано с классической геометрической задачей отыскания среди замкнутых плоских кривых данной длины L той кривой, которая ограничивает наибольшую площадь S. В этом случае неравенство (39) означает, что

$$4\pi S \leqslant L^2. \tag{40}$$

Именно это неравенство мы теперь и докажем, считая, что рассматриваемая кривая является гладкой и задана параметрически в виде $x=\varphi(s)$, $y=\psi(s)$, где s — натуральный параметр (длина) вдоль кривой, а функции φ и ψ принадлежат классу $C^{(1)}[0, L]$. Условие замкнутости кривой означает, что $\varphi(0)=\varphi(L)$, $\psi(0)=\psi(L)$.

Перейдем от s к параметру $t=2\pi\frac{s}{L}-\pi$, изменяющемуся от $-\pi$ до π, и будем считать, что наша кривая задана в параметрическом виде

$$x=x(t), \quad y=y(t), \qquad -\pi\leqslant t\leqslant\pi, \tag{41}$$

причем

$$x(-\pi)=x(\pi), \quad y(-\pi)=y(\pi). \tag{42}$$

Соотношения (41) запишем в виде одной комплекснозначной функции

$$z=z(t), \qquad -\pi\leqslant t\leqslant\pi, \tag{41'}$$

где $z(t)=x(t)+iy(t)$ и ввиду (42) $z(-\pi)=z(\pi)$.

Заметим, что

$$|z'(t)|^2=(x'(t))^2+(y'(t))^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

и, значит, при нашем выборе параметра t

$$|z'(t)|^2=\frac{L^2}{4\pi^2}. \tag{43}$$

Учитывая далее, что $\bar{z}z'=(x-iy)(x'+iy')=(xx'+yy')+$ $+i(xy'-x'y)$, и пользуясь равенствами (42), запишем в комплексном виде формулу площади области, ограниченной замкнутой кривой (41):

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(xy'-yx')(t)\,dt=\frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi}z'(t)\,\bar{z}(t)\,dt. \tag{44}$$

Напишем теперь разложение функции (41') в ряд Фурье

$$z(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ke^{ikt},$$

тогда

$$z'(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikt}.$$

Равенства (43) и (44) означают, в частности, что

$$\frac{1}{2\pi}\|z'\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |z'(t)|^2\,dt = \frac{L^2}{4\pi^2},$$

а

$$\frac{1}{2\pi}\langle z', z\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z'(t)\,\bar{z}(t)\,dt = \frac{i}{\pi}S.$$

В терминах коэффициентов Фурье, как следует из равенств (36), (38), полученные соотношения приобретают вид

$$L^2 = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} |kc_k|^2,$$

$$S = \pi \sum_{-\infty}^{\infty} kc_k\bar{c}_k.$$

Таким образом,

$$L^2 - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} (k^2 - k)\,|c_k|^2.$$

Правая часть этого равенства, очевидно, неотрицательна и обращается в нуль только при условии, что $c_k = 0$, когда $k \in \mathbb{Z}$ и $k \neq 0, 1$.

Итак, неравенство (40) доказано и заодно получено уравнение

$$z(t) = c_0 + c_1 e^{it}, \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi,$$

той кривой, для которой оно превращается в равенство. Это комплексный вид параметрического уравнения окружности с центром в точке c_0 комплексной плоскости и радиуса $|c_1|$.

Задачи и упражнения

1. a Покажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{при } 0 < x < 2\pi,$$

и найдите сумму этого ряда в остальных точках $x \in \mathbb{R}$.

Используя предыдущее разложение и пользуясь правилами действий с тригонометрическими рядами Фурье, покажите теперь, что:

b $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \quad \text{при } 0 < x < \pi.$$

c. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$ при $0 < x < \pi$.

d. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx = \frac{x}{2}$ при $|x| < \pi$.

e. $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$ при $|x| \leqslant \pi$.

f. $x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

g. $\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

h. Нарисуйте графики сумм встретившихся здесь тригонометрических рядов над всей осью $\mathbb{R}$. Используя полученные результаты, найдите суммы следующих числовых рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

2. Покажите, что:

a) если $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ нечетная (четная) функция, то ее коэффициенты Фурье имеют следующую особенность: $a_k(f) = 0$ ($b_k(f) = 0$) при $k = 0, 1, 2, \ldots$;

b) если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ имеет период $2\pi/m$, то ее коэффициенты Фурье $c_k(f)$ могут быть отличны от нуля, лишь когда k кратно m;

c) если $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ вещественнозначна, то при любом $k \in \mathbb{N}$ $c_k(f) = \overline{c}_{-k}(f)$;

d) $|a_k(f)| \leqslant 2 \sup\limits_{|x|<\pi} |f(x)|$, $|b_k(f)| \leqslant 2 \sup\limits_{|x|<\pi} |f(x)|$, $|c_k(f)| \leqslant$
$\leqslant \sup\limits_{|x|<\pi} |f(x)|$.

3. a. Покажите, что каждая из систем функций $\{\cos kx;\ k = 0, 1, \ldots\}$, $\{\sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$ ортогональна и полна в пространстве $\mathcal{R}_2[a, a+\pi]$ при любом значении $a \in \mathbb{R}$.

b. Разложите функцию $f(x) = x$ в промежутке $[0, \pi]$ по каждой из этих двух систем.

c. Нарисуйте графики сумм найденных рядов Фурье над всей числовой осью.

d. Укажите тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и выясните, сходится ли он равномерно к этой функции на всем отрезке $[-\pi, \pi]$.

4. Ряд Фурье $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$ функции f можно рассматривать как специальный случай степенного ряда $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k z^k \left(= \sum\limits_{-\infty}^{-1} c_k z^k + \sum\limits_{0}^{+\infty} c_k z^k \right)$, в котором z пробегает единичную окружность комплексной плоскости (т. е. $z = e^{ix}$).

Покажите, что если коэффициенты Фурье $c_k(f)$ функции $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ убывают так быстро, что $\overline{\lim\limits_{k\to-\infty}} |c_k(f)|^{1/k} = c_- > 1$, а $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} |c_k(f)|^{1/k} = c_+ < 1$, то:

a) функцию f можно рассматривать как след на единичной окружности некоторой функции, представимой в кольце $c_-^{-1} < |z| < c_+^{-1}$ рядом $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k z^k$;

b) при $z = x + iy$ и $\ln \frac{1}{c_-} < y < \ln \frac{1}{c_+}$ ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikz}$ сходится абсолютно (и, в частности, его сумма не зависит от порядка суммирования членов);

c) в любой полосе комплексной плоскости, задаваемой условиями $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b$, где $\ln \frac{1}{c_-} < a < b < \ln \frac{1}{c_+}$, ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikz}$ сходится абсолютно и равномерно;

d) используя разложение $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots$ и формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, покажите, что

$$1 + \frac{\cos x}{1!} + \ldots + \frac{\cos nx}{n!} + \ldots = e^{\cos x} \cos(\sin x),$$

$$\frac{\sin x}{1!} + \ldots + \frac{\sin nx}{n!} + \ldots = e^{\cos x} \sin(\sin x);$$

e) используя разложения $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots$, $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$, проверьте, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)!} = \sin(\cos x) \operatorname{ch}(\sin x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)!} = \cos(\cos x) \operatorname{sh}(\sin x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2nx}{(2n)!} = \cos(\cos x) \operatorname{ch}(\sin x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 2nx}{(2n)!} = \cos(\cos x) \operatorname{sh}(\sin x).$$

5. Проверьте, что:

a) системы $\left\{1, \cos k\frac{2\pi}{T}x, \sin k\frac{2\pi}{T}x;\ k \in \mathbb{N}\right\}$, $\left\{e^{ik\frac{2\pi}{T}x};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ ортогональны и полны в пространстве $\mathcal{R}_2([a, a+T], \mathbb{C})$ при любом $a \in \mathbb{R}$;

b) коэффициенты Фурье $a_k(f)$, $b_k(f)$, $c_k(f)$ T-периодической функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ по указанным системам не зависят от того, раскладывается ли функция в ряд Фурье на отрезке $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ или на любом ином отрезке вида $[a, a+T]$;

c) если $c_k(f)$ и $c_k(g)$ — коэффициенты Фурье T-периодических функций f и g, то

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x) g(x)\, dx = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) c_k(g);$$

d) коэффициенты Фурье $c_k(h)$ нормированной множителем $\frac{1}{T}$ «свертки»

$$h(x)=\frac{1}{T}\int_0^T f(x-t)g(t)\,dt$$

T-периодических гладких функций f и g и коэффициенты Фурье $c_k(f)$, $c_k(g)$ самих функций f и g связаны соотношением $c_k(h)=c_k(f)c_k(g)$, $k\in\mathbb{Z}$.

6. Докажите, что если α несоизмеримо с π, то

a) $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}e^{ik(x+n\alpha)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{ikt}\,dt,$

b) для любой непрерывной 2π-периодической функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x+n\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt.$$

7. Докажите следующие утверждения

a Если функция f $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(x)\right|dx.$$

b. Если функции f. $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ и $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$ и, кроме того, g по модулю ограничена на $\mathbb{R}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)g(t)e^{i\lambda t}\,dt=:\varphi_\lambda(x)\rightrightarrows 0 \text{ на } \mathbb{R} \text{ при } \lambda\to\infty.$$

c Если $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на периоде функция, то остаток $S_n(x)-f(x)$ ее тригонометрического ряда Фурье может быть представлен в виде

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\Delta^2 f)(x,t)D_n(t)\,dt,$$

где D_n — n-е ядро Дирихле, а $(\Delta^2 f)(x,t)=f(x+t)-2f(x)+f(x-t)$

d Для любого $\delta\in]0,\pi[$ полученную выше формулу остатка можно привести к виду

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\sin nt}{t}(\Delta^2 f)(x,t)\,dt+o(1),$$

где $o(1)$ стремится к нулю при $n\to\infty$, причем равномерно на каждом отрезке $[a,b]$, на котором функция f ограничена

e. Если функция f. $[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ удовлетворяет на отрезке $[-\pi,\pi]$ условию Гельдера $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|^{\alpha}$ (где M и α — положительные числа) и, кроме того $f(-\pi)=f(\pi)$, то ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на всем отрезке

8. a Докажите, что если $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция, имеющая кусочно гладкую производную $f^{(m-1)}$ порядка $m-1$ ($m\in\mathbb{N}$), то f можно

представить в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} B_m(t-x)\, f^{(m)}(t)\,dt,$$

где $B_m(u)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(ku+\frac{m\pi}{2}\right)}{k^m}$, $m\in\mathbb{N}$.

b. Пользуясь указанным в задаче 1 разложением в ряд Фурье функции $\frac{\pi-x}{2}$ на промежутке $[0, 2\pi]$, докажите, что $B_1(u)$ — многочлен степени 1, а $B_m(u)$ — многочлен степени m на отрезке $[0, 2\pi]$. Эти многочлены называются *многочленами Бернулли*.

c. Проверьте, что при любом $m\in\mathbb{N}$ $\int\limits_0^{2\pi} B_m(u)\,du=0$

9. a. Пусть $x_m=\frac{2\pi m}{2n+1}$, $m=0, 1, \ldots, 2n$. Проверьте, что

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}\cos kx_m\cos lx_m=\delta_{kl},$$

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}\sin kx_m\sin lx_m=\delta_{kl},$$

$$\sum_{m=0}^{2n}\sin kx_m\cos lx_m=0,$$

где k, l — неотрицательные целые числа, а $\delta_{kl}=0$ при $k\neq l$ и $\delta_{kl}=1$ при $k=l$.

b. Пусть $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на периоде функция. Отрезок $[0, 2\pi]$ разобьем точками $x_m=\frac{2\pi m}{2n+1}$, $m=0, 1, \ldots, 2n$, на $2n+1$ равных отрезков. Интегралы

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

вычислим приближенно по формуле прямоугольников, соответствующей этому разбиению отрезка $[0, 2\pi]$. Тогда получим величины

$$\tilde{a}_k(f)=\frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n} f(x_m)\cos kx_m,$$

$$\tilde{b}_k(f)=\frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n} f(x_m)\sin kx_m,$$

которые и подставим в n-ю частичную сумму $S_n(f, x)$ ряда Фурье функции f вместо соответствующих коэффициентов $a_k(f)$ и $b_k(f)$.

Докажите, что при этом получится тригонометрический полином $\tilde{S}_n(f, x)$ порядка n, интерполирующий функцию f в узлах x_m, $m=0, 1, \ldots, 2n$, т. е в этих точках $f(x_m)=\tilde{S}(f, x_m)$.

10. а Пусть функция $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ непрерывна и кусочно дифференцируема, и пусть ее производная f' интегрируема в квадрате на промежутке $]a, b[$. Используя равенство Парсеваля, докажите, что:

а) если $[a, b]=[0, \pi]$, то при выполнении любого из двух условий $f(0)=f(\pi)=0$ или $\int\limits_0^\pi f(x)\,dx=0$ справедливо *неравенство Стеклова*

$$\int\limits_0^\pi f^2(x)\,dx\leqslant\int\limits_0^\pi (f')^2(x)\,dx,$$

в котором равенство возможно лишь при $f(x)=a\cos x$;

b. если $[a, b]=[-\pi, \pi]$ и одновременно выполнены два условия $f(-\pi)=f(\pi)$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=0$, то справедливо *неравенство Виртингера*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx\leqslant\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f')^2(x)\,dx,$$

где равенство возможно лишь при $f(x)=a\cos x+b\sin x$.

11. *Явление Гиббса* — так называется описываемая ниже особенность поведения частичных сумм тригонометрического ряда Фурье, «впервые обнаруженная Уилбрейамом (1848 г.) и позже (1898 г.) переоткрытая Гиббсом». (Математическая энциклопедия, том 1, Москва, 1977 г.)

а. Покажите, что

$$\operatorname{sgn} x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2n-1}\quad\text{при}\quad |x|<\pi.$$

b Проверьте, что функция $S_n(x)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ имеет максимум при $x=\frac{\pi}{2n}$ и что при $n\to\infty$

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)}{(2k-1)\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{n}\to\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx\approx 1{,}179.$$

Таким образом, колебание $S_n(x)$ при $n\to\infty$ около точки $x=0$ примерно на 18 % превышает скачок самой функции $\operatorname{sgn} x$ в этой точке (проскакивание $S_n(x)$ «по инерции»).

Пусть теперь вообще $S_n(f, x)$ — n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции f, и пусть при $n\to\infty$ $S_n(f, x)\to f(x)$ в проколотой окрестности $0<|x-\xi|<\delta$ точки ξ, в которой f имеет односторонние пределы $f(\xi_-)$ и $f(\xi_+)$. Для определенности будем считать, что $f(\xi_-)\leqslant f(\xi_+)$.

Говорят, что в точке ξ имеет место *явление Гиббса для сумм* $S_n(f, x)$, если $\varliminf\limits_{\substack{n\to\infty\\ x\to\xi-0}} S_n(f, x)<f(\xi_-)\leqslant f(\xi_+)<\varlimsup\limits_{\substack{n\to\infty\\ x\to\xi+0}} S_n(f, x)$

с. Используя замечание 9, покажите, что для любой функции вида $\varphi(x)+c\operatorname{sgn}(x-\xi)$, где $c\neq 0$, $|\xi|<\pi$, а $\varphi\in C^{(1)}[-\pi, \pi]$, в точке ξ имеет место явление Гиббса.

12. *Многомерные тригонометрические ряды Фурье* a. Проверьте, что система функций $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx}$, где $k=(k_1, \ldots, k_n)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $kx=k_1x_1+\ldots+k_nx_n$ и $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$, ортонормальна на любом n-мерном кубе $I=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a_j \leqslant x_j \leqslant a_j+2\pi,\ j=1, 2, \ldots, n\}$.

b Интегрируемой на I функции f сопоставим счетную сумму $f\sim\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_k(f)\, e^{ikx}$ которая называется *рядом Фурье функции* f *по системе* $\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx}\right\}$, если $c_k(f)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_I f(x)\, e^{-ikx}\,dx$ Числа $c_k(f)$ называются *коэффициентами Фурье функции* f *по системе* $\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx}\right\}$.

В многомерном случае ряд Фурье чаще всего суммируют с помощью сумм

$$S_N(x)=\sum_{|k_j|\leqslant N} c_k(f)\, e^{ikx}$$

Покажите, что для любой 2π-периодической по каждой из переменных функции $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_I \prod_{j=1}^{n} D_N(t_j-x_j)\, f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t-x)\prod_{j=1}^{n} D_N(t_j)\,dt_1\ldots dt_n,$$

где $D_N(u)$ — N-е одномерное ядро Дирихле

c Докажите, что *сумма Фейера* $\sigma_N(x)=\frac{S_0(x)+\ldots+S_N(x)}{N+1}$ 2π-периодической по каждой из n переменных функции $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ может быть представлена в виде

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_I f(t-x)\,\Phi_N(t)\,dt,$$

где $\Phi_N(u)=\prod\limits_{j=1}^{n}\mathcal{F}_N(u_j)$, а $\mathcal{F}_N$ — N-е одномерное ядро Фейера

d. Распространите теперь теорему Фейера на n-мерный случай

e Покажите, что если f — 2π-периодическая по каждой из переменных функция абсолютно интегрируема на периоде I хотя бы в несобственном смысле, то $\int\limits_I |f(x+u)-f(x)|\,dx\to 0$ при $u\to 0$ и $\int\limits_I |f-\sigma_N|(x)\,dx\to 0$ при $N\to\infty$

f Докажите, что две абсолютно интегрируемые на кубе I функции f и g могут иметь совпадающие ряды Фурье (т е $c_k(f)=c_k(g)$ для любого мультииндекса k) в том лишь случае, когда $f(x)=g(x)$ почти всюду на I Это усиление утверждения 3 о единственности ряда Фурье

g Проверьте, что исходная ортонормальная система $\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ikx}\right\}$ полна в $\mathcal{R}_2(I)$ и значит, ряд Фурье любой функции $f\in\mathcal{R}_2(I)$ сходится к f в среднем на I.

h Пусть f — 2π-периодическая по каждой из переменных функция класса $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$. Проверьте, что $c_k(f^{(\alpha)})=i^{|\alpha|}k^\alpha c_k(f)$, где, как всегда при мультииндексных обозначениях, $\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $k=(k_1, \dots, k_n)$, $|\alpha|=|\alpha_1|+\dots$ $\dots+\alpha_n|$, $k^\alpha=k_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot k_n^{\alpha_n}$, α_j — неотрицательные целые.

i Пусть f — 2π-периодическая по каждой из переменных функция класса $C^{(mn)}(\mathbb{R}^n)$. Покажите, что если для каждого мультииндекса $\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такого, что α_j есть 0 или m (при любом $j=1, \dots, n$), выполнена оценка

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_I |f^{(\alpha)}|^2(x)\,dx \leqslant M^2,$$

то

$$|f(x)-S_N(x)| \leqslant \frac{CM}{N^{m-\frac{1}{2}}},$$

где C — постоянная, зависящая от m, но не завнсящая от N и от $x\in I$.

j. Заметьте, что если какая-то последовательность непрерывных функцнй сходится в среднем на промежутке I к функции f и одновременно сходнтся равномерно к функции φ, то $f(x)=\varphi(x)$ на I.

Используя это наблюдение, докажите, что если 2π-периодическая по каждой нз n-переменных функция f: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ прннадлежит классу $C^{(1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, то тригонометрический ряд Фурье функцни f сходится к ней равномерно на всем пространстве $\mathbb{R}^n$

13. *Ряды Фурье обобщенных функций.* Любую 2π-периодическую функцию f $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ можно рассматривать как функцию $f(s)$ точки на единичной окружности Γ (точка фиксируется значением s натурального параметра $0\leqslant$ $\leqslant s\leqslant 2\pi$)

Сохраняя обозначения § 4 гл XVII, рассмотрим на Γ пространство $\mathcal{D}(\Gamma)$ функций класса $C^{(\infty)}(\Gamma)$ и пространство $\mathcal{D}'(\Gamma)$ — обобщенных функций, т. е линейных непрерывных функцноналов на $\mathcal{D}(\Gamma)$. Действие (значение) функционала $F\in\mathcal{D}'(\Gamma)$ на функцию $\varphi\in\mathcal{D}(\Gamma)$ будем обозначать символом $F(\varphi)$, избегая символа $\langle F, \varphi\rangle$, использованного в этой главе для обозначения эрмитова скалярного произведення (7).

Каждая интегрируемая на Γ функция f может рассматриваться как элемент $\mathcal{D}'(\Gamma)$ (регулярная обобщенная функция), действующий на функции $\varphi\in\mathcal{D}(\Gamma)$ по формуле

$$f(\varphi)=\int_0^{2\pi} f(s)\,\varphi(s)\,ds$$

Сходимость последовательности $\{F_n\}$ обобщенных функций пространства $\mathcal{D}'(\Gamma)$ к обобщенной функции $F\in\mathcal{D}'(\Gamma)$, как обычно, означает, что для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}(\Gamma)$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\varphi)=F(\varphi)$$

а. Используя то обстоятельство, что для любой функции $\varphi\in C^{(\infty)}(\Gamma)$ по теореме 5 на Γ справедливо соотношение $\varphi(s)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(\varphi)\,e^{iks}$ и, в частности, равенство $\varphi(0)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k'(\varphi)$, покажите, что в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Gamma)$

$$\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}e^{iks}\to\delta \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Здесь δ — тот элемент пространства $\mathscr{D}'(\Gamma)$, действие которого на функцию $\varphi \in \mathscr{D}(\Gamma)$ определено соотношением $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

b. Если $f \in \mathscr{R}(\Gamma)$, то коэффициенты Фурье функции f по системе $\{e^{iks}\}$, определенные стандартным образом, можно записать виде

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\,e^{-iks}\,ds = \frac{1}{2\pi} f(e^{-iks})$$

По аналогии определим теперь коэффициенты Фурье $c_k(F)$ любой обобщенной функции $F \in \mathscr{D}'(\Gamma)$ формулой $c_k(F) = \frac{1}{2\pi}F(e^{-iks})$, имеющей смысл, поскольку $e^{-iks} \in \mathscr{D}(\Gamma)$

Так, любой обобщенной функции $F \in \mathscr{D}'(\Gamma)$ сопоставляется ее ряд Фурье

$$F \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(F)\,e^{iks}.$$

Покажите, что $\delta \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{iks}$.

c. Докажите следующий замечательный по своей простоте и открывающейся свободе действий факт. ряд Фурье любой обобщенной функции $F \in \mathscr{D}'(\Gamma)$ сходится к F (в смысле сходимости в пространстве $\mathscr{D}'(\Gamma)$)

d. Покажите, что ряд Фурье функции $F \in \mathscr{D}'(\Gamma)$ (как и сама функция F и как любой сходящийся ряд обобщенных функций) можно дифференцировать почленно любое число раз

e. Исходя из равенства $\delta = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{iks}$, найдите ряд Фурье функции δ'

f. Вернемся теперь с окружности Γ на прямую $\mathbb{R}$ и рассмотрим функции e^{iks} как регулярные обобщенные функции пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ (т. е как линейные непрерывные функционалы на пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ финитных на $\mathbb{R}$ функций класса $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$)

Любая локально интегрируемая функция f может рассматриваться как элемент пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ (*регулярная обобщенная функция из* $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$), действующий на функции $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ по закону $f(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$. Сходимость в $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ определяется стандартным образом:

$$\left(\lim_{n\to\infty} F_n = F\right) := \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \quad \left(\lim_{n\to\infty} F_n(\varphi) = F(\varphi)\right).$$

Покажите, что в смысле сходимости в $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ справедливо следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k),$$

в обеих частях которого подразумевается предельный переход при $n \to \infty$ по симметричным частичным суммам $\sum\limits_{-n}^{n}$. $\delta(x - x_0)$ как всегда, обозначает сдвинутую в точку x_0 δ-функцию пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, т. е. $\delta(x - x_0)(\varphi) = \varphi(x_0)$.

§ 3. Преобразование Фурье

1. Представление функции интегралом Фурье.

a. Спектр и гармонический анализ функции. Пусть $f(t)$ — T-периодическая функция (сигнал), абсолютно интегрируемая на периоде. Раскладывая f в ряд Фурье (в случае достаточной регулярности f ряд Фурье, как известно, сходится к f) и преобразовывая этот ряд

$$f(t)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos k\omega_0 t+b_k(f)\sin k\omega_0 t=$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)\,e^{ik\omega_0 t}=c_0+2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\cos(k\omega_0 t+\arg c_k), \qquad (1)$$

получаем представление f в виде суммы постоянного члена $\frac{a_0}{2}=c_0$ — *среднего значения* f *по периоду* и *синусоидальных компонент* с частотами $\nu_0=\frac{1}{T}$ (*основная частота*), $2\nu_0$ (*вторая гармоническая частота*), и т. д. Вообще k-я *гармоническая компонента* $2|c_k|\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t+\arg c_k\right)$ сигнала $f(t)$ имеет *частоту* $k\nu_0=\frac{k}{T}$, *круговую частоту* $k\omega_0=2\pi k\nu_0=\frac{2\pi}{T}k$, *амплитуду* $2|c_k|=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$ и *фазу* $\arg c_k=-\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k}$.

Разложение периодической функции (сигнала) в сумму простых гармонических колебаний называют *гармоническим анализом функции* f. Числа $\{c_k(f);\ k\in\mathbb{Z}\}$ или $\{a_0(f),\ a_k(f),\ b_k(f);\ k\in\mathbb{N}\}$ называют *спектром функции* (сигнала) f. Периодическая функция, таким образом, имеет *дискретный спектр*.

Прикинем (на эвристическом уровне), что произойдет с разложением (1) при неограниченном увеличении периода T сигнала f.

Полагая для упрощения записи $l=\frac{T}{2}$ и $\alpha_k=k\frac{\pi}{l}$, перепишем разложение

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{l}t}$$

в следующем виде:

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left(c_k\frac{l}{\pi}\right)e^{ik\frac{\pi}{l}t}\frac{\pi}{l}, \qquad (2)$$

где

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,e^{-i\alpha_k t}\,dt$$

и, значит,

$$c_k \frac{l}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-l}^{l} f(t) e^{-i\alpha_k t}\, dt.$$

Считая, что при $l \to +\infty$ мы приходим в пределе к рассмотрению произвольной абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f, введем вспомогательную функцию

$$c(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t}\, dt, \tag{3}$$

значения которой в точках $\alpha = \alpha_k$ мало отличаются от величин $c_k \frac{l}{\pi}$ в формуле (2). В таком случае

$$f(t) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} c(\alpha_k) e^{i\alpha_k t} \frac{\pi}{l}, \tag{4}$$

где $\alpha_k = k\frac{\pi}{l}$ и $\alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\pi}{l}$. Последняя сумма напоминает интегральную сумму и при измельчании разбиения, происходящего при $l \to \infty$, получаем

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) e^{i\alpha t}\, d\alpha. \tag{5}$$

Таким образом, вслед за Фурье мы пришли к разложению функции f в континуальную линейную комбинацию гармоник переменной частоты и фазы.

Функцию $c(\alpha)$, определенную равенством (3) и играющую роль коэффициента в интеграле (5), подобного коэффициентам Фурье в ряде Фурье, естественно считать *спектром функции* (сигнала) f. В отличие от рассмотренного выше случая периодического сигнала и соответствующего ему дискретного спектра, спектр $c(\alpha)$ произвольного сигнала может не обращаться в нуль на целых промежутках и даже на всей прямой (*непрерывный спектр*).

Пример 1. Найдем функцию, имеющую следующий финитный спектр:

$$c(\alpha) = \begin{cases} h, & \text{если } |\alpha| \leqslant a, \\ 0, & \text{если } |\alpha| > a. \end{cases} \tag{6}$$

◀ По формуле (5) при $t \neq 0$ находим

$$f(t) = \int\limits_{-a}^{a} h e^{i\alpha t}\, d\alpha = h \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{it} = 2h \frac{\sin at}{t}, \tag{7}$$

а когда $t=0$, получаем $f(0)=2ha$, что совпадает с пределом $2h\frac{\sin at}{t}$ при $t\to 0$. ▶

Представление функции в виде (5) называют *представлением функции в виде интеграла Фурье.* Ниже мы обсудим условия, при которых такое представление возможно, а сейчас рассмотрим еще один.

Пример 2. Пусть P — прибор, который обладает следующими свойствами: это линейный преобразователь сигналов (т. е. $P\left(\sum_j a_j f_j\right)=\sum_j a_j P(f_j)$, сохраняющий периодичность сигнала (т. е. $P(e^{i\omega t})=p(\omega)e^{i\omega t}$, где коэффициент $p(\omega)$ зависит от частоты ω периодического сигнала $e^{i\omega t}$).

Мы употребляем здесь более компактную комплексную форму записи, хотя, конечно, все можно переписать и через функции $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$

Функция $p(\omega)=R(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ называется *спектральной характеристикой прибора* P, ее модуль $R(\omega)$ принято называть *частотной характеристикой*, а аргумент $\varphi(\omega)$ — *фазовой характеристикой* прибора P. Сигнал $e^{i\omega t}$, пройдя через прибор, преобразуется на выходе в сигнал $R(\omega)e^{i(\omega t+\varphi(\omega))}$, измененный по амплитуде благодаря множителю $R(\omega)$ и сдвинутый по фазе ввиду наличия слагаемого $\varphi(\omega)$.

Предположим, что нам известны спектральная характеристика $p(\omega)$ прибора P и сигнал $f(t)$, поступивший на вход прибора, а требуется узнать сигнал $x(t)=P(f)(t)$ на выходе прибора.

Представив сигнал $f(t)$ в виде интеграла Фурье (5) и пользуясь линейностью прибора P и интеграла, находим

$$x(t)=P(f)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\omega)p(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

В частности, если

$$p(\omega)=\begin{cases}1 & \text{при } |\omega|\leqslant\Omega,\\ 0 & \text{при } |\omega|>\Omega,\end{cases} \tag{8}$$

то

$$x(t)=\int_{-\Omega}^{\Omega}c(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

и, как видно из определения спектральной характеристики прибора,

$$P(e^{i\omega t})=\begin{cases}e^{i\omega t} & \text{при } |\omega|\leqslant\Omega,\\ 0 & \text{при } |\omega|>\Omega.\end{cases}$$

Прибор P со спектральной характеристикой (8) пропускает (фильтрует) без искажения частоты, не превосходящие Ω, и срезает всю ту часть сигнала, которая относится к высоким частотам (превышающим Ω). По этой причине такой прибор в радиотехнике называют *идеальным фильтром низкой частоты* (*с верхней граничной частотой* Ω).

Перейдем теперь к математической стороне дела и к более тщательному рассмотрению возникших здесь понятий.

b. Определение преобразования Фурье и интеграла Фурье. В соответствии с формулами (3) и (5) введем

Определение 1. Функция

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \tag{9}$$

называется *преобразованием Фурье* функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Интеграл здесь понимается в смысле главного значения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx := \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

и считается, что он существует.

Если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, то, поскольку $|f(x) e^{-ix\xi}| = |f(x)|$ при $x, \xi \in \mathbb{R}$, для любой такой функции имеет смысл преобразование Фурье (9), причем интеграл (9) сходится абсолютно и равномерно по ξ на всей прямой $\mathbb{R}$.

Определение 2. Если $c(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$ — преобразование Фурье функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, то сопоставляемый f интеграл

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi, \tag{10}$$

понимаемый в смысле главного значения, называется *интегралом Фурье функции* f.

Коэффициенты Фурье и ряд Фурье периодической функции являются, таким образом, дискретными аналогами преобразования Фурье и интеграла Фурье соответственно.

Определение 3. Понимаемые в смысле главного значения интегралы

$$\mathcal{F}_c[f](\xi) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x\, dx, \tag{11}$$

$$\mathcal{F}_s[f](\xi) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \xi x\, dx \tag{12}$$

называются соответственно *косинус-* и *синус-преобразованиями Фурье функции* f.

Полагая $c(\xi)=\mathcal{F}[f](\xi)$, $a(\xi)=\mathcal{F}_c[f](\xi)$, $b(\xi)=\mathcal{F}_s[f](\xi)$, получаем отчасти уже знакомое нам по рядам Фурье соотношение

$$c(\xi)=\frac{1}{2}(a(\xi)-ib(\xi)). \tag{13}$$

Как видно из соотношений (11), (12),

$$a(-\xi)=a(\xi), \quad b(-\xi)=-b(\xi). \tag{14}$$

Формулы (13), (14) показывают, что преобразования Фурье вполне определяются на всей прямой $\mathbb{R}$, если они известны лишь для неотрицательных значений аргумента.

С физической точки зрения это вполне естественный факт — спектр сигнала надо знать для частот $\omega\geqslant 0$; отрицательные частоты α в (3) и (5) — плод формы записи. Действительно,

$$\int\limits_{-A}^{A} c(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi=\left(\int\limits_{-A}^{0}+\int\limits_{0}^{A}\right)c(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi=\int\limits_{0}^{A}\left(c(\xi)e^{ix\xi}+c(-\xi)e^{-ix\xi}\right)d\xi=$$
$$=\int\limits_{0}^{A}(a(\xi)\cos x\xi+b(\xi)\sin x\xi)\,d\xi$$

и, значит, интеграл Фурье (10) можно представить в виде

$$\int\limits_{0}^{\infty}(a(\xi)\cos x\xi+b(\xi)\sin x\xi)\,d\xi, \tag{10'}$$

вполне соответствующем классической форме записи ряда Фурье.

Если функция f вещественнозначна, то из формул (13), (14) в этом случае следует

$$c(-\xi)=\overline{c(\xi)}, \tag{15}$$

поскольку в этом случае $a(\xi)$ и $b(\xi)$ — вещественные функции на $\mathbb{R}$, что видно из их определений (11), (12). Впрочем, равенство (15) при условии $\overline{f(x)}=f(x)$ получается и непосредственно из определения (9) преобразования Фурье, если учесть, что знак сопряжения можно вносить под знак интеграла. Последнее наблюдение позволяет заключить, что для любой функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\mathcal{F}[\bar{f}](-\xi)=\overline{\mathcal{F}[f](\xi)}. \tag{16}$$

Полезно также заметить, что если f — вещественная и четная функция, т. е. $\overline{f(x)}=f(x)=f(-x)$, то

$$\begin{gathered}\overline{\mathcal{F}_c[f](\xi)}=\mathcal{F}_c[f](\xi), \quad \mathcal{F}_s[f](\xi)\equiv 0,\\ \overline{\mathcal{F}[f](\xi)}=\mathcal{F}[f](\xi)=\mathcal{F}[f](-\xi);\end{gathered} \tag{17}$$

если f — вещественная и нечетная функция, т. е. $\overline{f(x)}=f(x)=-f(-x)$, то

$$\begin{gathered}\mathcal{F}_c[f](\xi)\equiv 0, \quad \overline{\mathcal{F}_s[f](\xi)}=\mathcal{F}[f](\xi),\\ \overline{\mathcal{F}[f](\xi)}=-\mathcal{F}[f](\xi)=\mathcal{F}[f](-\xi);\end{gathered}\tag{18}$$

а если f — чисто мнимая функция, т. е. $\overline{f(x)}=-f(x)$, то

$$\mathcal{F}[\bar{f}](-\xi)=-\overline{\mathcal{F}[f](\xi)}.\tag{19}$$

Заметим, что если f — вещественнозначная функция, то ее интеграл Фурье (10′) можно записать также в виде

$$\int_0^\infty \sqrt{a^2(\xi)+b^2(\xi)}\cos(x\xi+\varphi(\xi))\,d\xi=2\int_0^\infty |c(\xi)|\cos(x\xi+\varphi(\xi))\,d\xi,$$

где $\varphi(\xi)=-\operatorname{arctg}\frac{b(\xi)}{a(\xi)}=\arg c(\xi)$.

Пример 3 Найдем преобразование Фурье функции $f(t)=\frac{\sin at}{t}$ (считая $f(0)=a\in\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\alpha)&=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{\sin at}{t}e^{-i\alpha t}\,dt=\\ &=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{\sin at\cos\alpha t}{t}\,dt=\frac{2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin at\cos\alpha t}{t}\,dt=\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(a+\alpha)t}{t}+\frac{\sin(a-\alpha)t}{t}\right)dt=\\ &=\frac{1}{2\pi}(\operatorname{sgn}(a+\alpha)+\operatorname{sgn}(a-\alpha)]\int_0^\infty\frac{\sin u}{u}\,du=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{если } |\alpha|\leqslant|a|,\\ 0, & \text{если } |\alpha|>|a|,\end{cases}\end{aligned}$$

поскольку нам известно значение интеграла Дирихле

$$\int_0^\infty\frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}.\tag{20}$$

Значит, если считать $a\geqslant 0$ и взять функцию $f(t)=2h\frac{\sin at}{t}$ из равенства (7), то мы, как и следовало ожидать, получаем в качестве ее преобразования Фурье указанный соотношениями (6) спектр этой функции.

Рассмотренная в примере 3 функция f не является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ и ее преобразование Фурье имеет разрывы. О том, что преобразование Фурье абсолютно интегрируемых функций не имеет разрывов, говорит следующая

Лемма 1. *Если функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ локально интегрируема и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то*

a) *ее преобразование Фурье $\mathscr{F}[f](\xi)$ определено при любом значении $\xi\in\mathbb{R}$;*

b) $\mathscr{F}[f]\in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$;

c) $\sup\limits_{\xi}|\mathscr{F}[f](\xi)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$;

d) $\mathscr{F}[f](\xi)\to 0$ при $\xi\to\infty$.

◀ Мы уже отмечали, что $|f(x)e^{-ix\xi}|\leqslant|f(x)|$, откуда следует абсолютная и равномерная по $\xi\in\mathbb{R}$ сходимость интеграла (9). Этим одновременно доказаны пп. a) и c) леммы.

Пункт d) следует из леммы Римана (см. § 2).

Для фиксированного конечного $A\geqslant 0$ оценка

$$\left|\int\limits_{-A}^{A}f(x)\left(e^{-ix(\xi+h)}-e^{-ix\xi}\right)dx\right|\leqslant\sup_{|x|\leqslant A}|e^{-ixh}-1|\int\limits_{-A}^{A}|f(x)|\,dx$$

устанавливает непрерывность по ξ интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A}f(x)e^{-ix\xi}\,dx,$$

равномерная сходимость которого при $A\to+\infty$ позволяют заключить, что $\mathscr{F}[f]\in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$. ▶

Пример 4 Найдем преобразование Фурье функции $f(t)=e^{-t^2/2}$:

$$\mathscr{F}[f](\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}e^{-i\alpha t}\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}\cos\alpha t\,dt.$$

Дифференцируя последний интеграл по параметру α и интегрируя затем по частям, находим, что

$$\frac{d\mathscr{F}[f]}{d\alpha}(\alpha)+\frac{\alpha}{2}\mathscr{F}[f](\alpha)=0,$$

или

$$\frac{d}{d\alpha}\ln\mathscr{F}[f](\alpha)=-\frac{\alpha}{2}.$$

Значит, $\mathscr{F}[f](\alpha)=ce^{-\alpha^2/2}$, где c — постоянная, которую, пользуясь интегралом Эйлера — Пуассона (см. гл. XVII, § 2, пример 17), находим из соотношения

$$c=\mathscr{F}[f](0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt=\sqrt{2\pi}.$$

Итак, мы нашли, что $\mathscr{F}[f](\alpha)=\sqrt{2\pi}\,e^{-\alpha^2/2}$, и одновременно показали, что $\mathscr{F}_c[f](\alpha)=\sqrt{2\pi}\,e^{-\alpha^2/2}$, а $\mathscr{F}_s[f](\alpha)\equiv 0$.

с. Достаточные условия представимости функции интегралом Фурье.

Теорема 1. *Если абсолютно интегрируемая на* $\mathbb{R}$ *и локально кусочно непрерывная функция* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *удовлетворяет в точке* $x\in\mathbb{R}$ *условиям Дини, то ее интеграл Фурье сходится в этой точке, причем к значению* $\frac{1}{2}[f(x_-)+f(x_+)]$, *равному полусумме левого и правого пределов значений функции в этой точке.*

◀ По лемме 1 преобразование Фурье $c(\xi)=\mathcal{F}[f](\xi)$ функции f непрерывно на $\mathbb{R}$ и, значит, интегрируемо на любом отрезке $[-A, A]$. Подобно тому, как мы преобразовывали частичную сумму ряда Фурье, проведем теперь следующие преобразования частичного интеграла Фурье:

$$S_A(x)=\int_{-A}^{A} c(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi=\int_{-A}^{A}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}\,dt\right)e^{ix\xi}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-A}^{A} e^{i(x-t)\xi}\,d\xi\right)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{e^{i(x-t)A}-e^{-i(x-t)A}}{i(x-t)}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{\sin(x-t)A}{x-t}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\,\frac{\sin Au}{u}\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}[f(x-u)+f(x+u)]\,\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Произведенное во втором от начала равенстве изменение порядка интегрирования законно. В самом деле, поскольку f локально кусочно непрерывна на $\mathbb{R}$, то для любого конечного $B>0$ справедливо равенство

$$\int_{-A}^{A}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} f(t)e^{-it\xi}\,dt\right)e^{ix\xi}\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} f(t)\left(\int_{-A}^{A} e^{i(x-t)\xi}\,d\xi\right)dt,$$

из которого ввиду равномерной сходимости по ξ интеграла $\int\limits_{-B}^{B} f(t)e^{-it\xi}\,dt$ при $B\to+\infty$ получаем нужное нам равенство.

Теперь воспользуемся интегралом Дирихле (20) и завершим наши преобразования:

$$\left|S_A(\xi)-\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\frac{f(x-u)-f(x_-)}{u}+\frac{f(x+u)-f(x_+)}{u}\right]\sin Au\,du\right|.$$

Докажем, что при $A \to +\infty$ последний интеграл стремится к нулю. Проверим это лишь для одного из его слагаемых, поскольку для второго слагаемого все делается аналогично.

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x-u)-f(x_-)}{u} \sin Au\, du = \int_0^1 \frac{f(x-u)-f(x_-)}{u} \sin Au\, du + \\ + \int_1^{+\infty} \frac{f(x-u)}{u} \sin Au\, du - f(x_-) \int_1^{+\infty} \frac{\sin Au}{u}\, du.$$

Первый из интегралов, стоящих в правой части этого равенства, стремится к нулю при $A \to +\infty$ в силу леммы Римана, поскольку f удовлетворяет в точке x условиям Дини; второй интеграл по той же лемме Римана стремится к нулю при $A \to +\infty$, так как функция $\frac{f(x-u)}{u}$ абсолютно интегрируема на рассматриваемом промежутке; наконец, последний интеграл можно преобразовать

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin Au}{u}\, du = \int_A^{\infty} \frac{\sin v}{v}\, dv,$$

после чего становится ясно, что и он стремится к нулю при $A \to +\infty$, поскольку интеграл Дирихле (20) сходится. ▶

Из доказанной теоремы получаем, в частности,

Следствие 1. *Если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ непрерывна, имеет в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ конечные односторонние производные и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то она представляется на $\mathbb{R}$ своим интегралом Фурье*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi, \tag{21}$$

где $c(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$ — преобразование Фурье функции f.

Обозначим символом $F[\varphi]$ понимаемый в смысле главного значения интеграл

$$F[\varphi](x) := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi. \tag{22}$$

Сравнивая его с преобразованием Фурье (9), видим, что

$$F[\varphi](x) = 2\pi \cdot \mathcal{F}[\varphi](-x). \tag{23}$$

Доказанная нами формула (21) означает, что

$$F[\mathcal{F}[f]] = f.$$

Проверим теперь, что и $\mathcal{F}[F[f]] = f$.

В самом деле,

$$f(x) \overset{F}{\longmapsto} F[f](\xi) = 2\pi\mathcal{F}[f](-\xi) =$$

$$= 2\pi c(-\xi) \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi c(-\xi)\, e^{-ix\xi}\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi = f(x).$$

Итак, получено важное

Следствие 2. *Для любой функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющей условиям следствия* 1, *существуют все преобразования $\mathcal{F}[f]$, $F[f]$, $F[\mathcal{F}[f]]$, $\mathcal{F}[F[f]]$ и имеют место равенства*

$$F[\mathcal{F}[f]] = \mathcal{F}[F[f]] = f. \tag{24}$$

Имея в виду эти соотношения, преобразование (22) часто называют *обратным преобразованием Фурье* и вместо F пишут $\mathcal{F}^{-1}$, а сами равенства (24) называют *формулой обращения преобразования Фурье.*

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 5. Предположим, что известен сигнал $v(t)$ на выходе прибора P, рассмотренного в примере 2, а мы хотим найти сигнал $f(t)$, поданный на вход прибора P. В примере 2 мы показали, что f и v связаны соотношением

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\, p(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega,$$

где $c = \mathcal{F}[f]$ — спектр сигнала f или преобразование Фурье функции f, а p — спектральная характеристика прибора P Считая все эти функции достаточно регулярными, из соотношения (24) заключаем, что

$$c(\omega)\, p(\omega) = \mathcal{F}[v](\omega),$$

откуда находим

$$c = \mathcal{F}[f] = \frac{\mathcal{F}[v]}{p}$$

и затем по формуле (21) или (24) $f = F\left[\dfrac{\mathcal{F}(v)}{p}\right]$.

Пример 6. Пусть $a > 0$ и

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0; \end{cases}$$

тогда

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-ax} e^{-ix\xi}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{a + i\xi}.$$

Заметим, что если $f_-(x) := f(-x)$, то при любой функции f

$$\mathcal{F}[f_-](\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\,e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{ix\xi}\,dx = \mathcal{F}[f](-\xi).$$

Возьмем теперь функцию $e^{-a|x|} = \varphi(x) = f(x) + f(-x)$. Тогда

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) + \mathcal{F}[f](-\xi) = \frac{1}{\pi}\,\frac{a}{a^2+\xi^2}.$$

Если же взять функцию $\psi(x) = f(x) - f(-x)$, являющуюся нечетным продолжением функции e^{-ax}, $x>0$, на всю числовую ось, то

$$\mathcal{F}[\psi](\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) - \mathcal{F}[f](-\xi) = -\frac{i}{\pi}\,\frac{\xi}{a^2+\xi^2}.$$

Используя теорему 1, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{a+i\xi}\,d\xi = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{если } x>0,\\ \frac{1}{2}, & \text{если } x=0,\\ 0, & \text{если } x<0,\end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ae^{ix\xi}}{a^2+\xi^2}\,d\xi = e^{-a|x|},$$

$$\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi e^{ix\xi}}{a^2+\xi^2}\,d\xi = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ -e^{ax}, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Все интегралы здесь понимаются в смысле главного значения, хотя второй, ввиду его абсолютной сходимости, можно понимать и в смысле обычного несобственного интеграла.

Отделяя в двух последних интегралах действительные и мнимые части, находим уже встречавшиеся нам интегралы Лапласа

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\xi}{a^2+\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2a}\,e^{-a|x|},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\xi\sin x\xi}{a^2+\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2}\,e^{-a|x|}\operatorname{sgn} x.$$

Заканчивая обсуждение вопроса о возможности представления функции интегралом Фурье, отметим, что, как показывают совместно примеры 1 и 3, сформулированные в теореме 1 и следствии 1 условия на функцию f являются достаточными, но не являются необходимыми для возможности такого представления.

2. Регулярность функции и скорость убывания ее преобразования Фурье.

а. **Нормировка преобразования Фурье.** Преобразование Фурье (3) и интеграл Фурье (5) мы получили как естественные континуальные аналоги коэффициентов Фурье $c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$ и ряда Фурье $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ периодической функции f в тригонометрической системе $\{e^{ikx};\ k \in \mathbb{Z}\}$. Эта система не является ортонормированной, и лишь простота записи в ней тригонометрического ряда Фурье заставляет по традиции рассматривать ее вместо по существу дела значительно более естественной ортонормированной системы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. В этой нормированной системе ряд Фурье имеет вид $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{c}_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, а коэффициенты Фурье определяются формулами $\hat{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$.

Аналогом таких естественных коэффициентов Фурье и такого ряда Фурье в континуальном случае были бы преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \tag{25}$$

и интеграл Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi, \tag{26}$$

отличающиеся от рассмотренных выше лишь нормировочным множителем.

В симметричных формулах (25), (26) практически сливаются «коэффициент» Фурье и «ряд» Фурье, поэтому в дальнейшем мы будем, по существу, интересоваться только свойствами интегрального преобразования (25), называя его *нормированным преобразованием Фурье* или, если не возникает недоразумений, просто *преобразованием Фурье функции* f.

Вообще интегральным оператором или интегральным преобразованием принято называть оператор A, действующий на функции f по закону

$$A(f)(y) = \int\limits_X K(x, y) f(x)\, dx,$$

где $K(x, y)$ — заданная функция, называемая *ядром интегрального оператора*, а $X \subset \mathbb{R}^n$ множество, по которому происходит интегрирование и на котором считаются определенными подынтегральные функции. Поскольку y — свободный параметр из некоторого множества Y, то $A(f)$ есть функция на этом множестве Y.

В математике существует ряд важных интегральных преобразований, и среди них преобразование Фурье занимает одну из самых ключевых позиций. Это обстоятельство имеет довольно глубокие корни и связано с замечательными свойствами преобразования (25), которые мы в какой-то степени опишем и продемонстрируем на деле в оставшейся части параграфа.

Итак, будем рассматривать нормированное преобразование Фурье (25).

Введем для удобства следующие обозначения:

$$\tilde{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\xi x}\, dx, \tag{27}$$

$$\hat{\mathcal{F}}[f] := \hat{f}, \quad \tilde{\mathcal{F}}[f] := \tilde{f} \quad (\text{т. е. } \hat{f}(\xi) = \tilde{f}(-\xi)).$$

В сравнении с прежними обозначениями это всего лишь перенормировка: $\tilde{\mathcal{F}}[f] = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}[f]$, $\hat{\mathcal{F}}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F[f]$. Значит, в частности, соотношения (24) позволяют заключить, что

$$\hat{\mathcal{F}}[\tilde{\mathcal{F}}[f]] = \tilde{\mathcal{F}}[\hat{\mathcal{F}}[f]] = f \tag{24'}$$

или, в более короткой записи,

$$\hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}} = f. \tag{24''}$$

По этой причине, если оператор $\hat{\mathcal{F}}$ мы будем называть *преобразованием Фурье*, то оператор $\tilde{\mathcal{F}}$ естественно называть *обратным преобразованием Фурье*.

b. Гладкость функции и скорость убывания ее преобразования Фурье. Уже из леммы Римана следует, что преобразование Фурье любой абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции стремится на бесконечности к нулю. Это уже отмечалось и в доказанной выше лемме 1. Теперь мы покажем, что, подобно коэффициентам Фурье, преобразование Фурье тем быстрее стремится к нулю, чем глаже функция, от которой оно берется. Взаимный с этим факт будет состоять в том, что чем быстрее стремится к нулю функция, от которой берется преобразование Фурье, тем глаже ее преобразование Фурье.

Начнем со следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 2. *Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, обладающая локально кусочно непрерывной производной f' на $\mathbb{R}$. Если при этом:*

a) *функция* f' *интегрируема на* $\mathbb{R}$, *то* $f(x)$ *имеет предел и при* $x \to -\infty$, *и при* $x \to +\infty$;

b) *функции* f *и* f' *интегрируемы на* $\mathbb{R}$, *то* $f(x) \to 0$ *при* $x \to 0$.

◀ При указанных ограничениях на функции f, f' имеет место формула Ньютона — Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt.$$

В условиях а) правая часть этого равенства имеет предел как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

Если же имеющая пределы на бесконечности функция f интегрируема на $\mathbb{R}$, то оба эти предела, очевидно, обязаны быть равны нулю. ▶

Теперь докажем

Утверждение 1 (о связи гладкости функции и скорости убывания ее преобразования Фурье). *Если* $f \in C^{(k)} = (\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *и все функции* $f, f', \ldots, f^{(k)}$ *абсолютно интегрируемы на* $\mathbb{R}$, *то*

a) *при любом* $n \in \{0, 1, \ldots, k\}$

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi), \tag{28}$$

b) $\hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^k}\right)$ *при* $\xi \to 0$.

◀ Если $k = 0$, то а) тривиально верно, а b) следует из леммы Римана.

Пусть $k > 0$. По лемме 2 функции $f, f', \ldots, f^{(k-1)}$ стремятся к нулю при $x \to \infty$. Учитывая это, выполним интегрирование по частям:

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)\, e^{-i\xi x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f^{(k-1)}(x)\, e^{-i\xi x} \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} + (i\xi) \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k-1)}(x)\, e^{-i\xi x}\,dx \right) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{(i\xi)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\,dx = (i\xi)^k \hat{f}(\xi).$$

Таким образом, равенство (28) установлено.

Мы показали, что $\hat{f}(\xi) = (i\xi)^{-k} \widehat{f^{(k)}}(\xi)$, но по лемме Римана $\widehat{f^{(k)}}(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$, поэтому утверждение b) тоже доказано. ▶

Ввиду почти полного совпадения прямого и обратного преобразований Фурье справедливо следующее, дополнительное к утверждению 1.

Утверждение 2 (о связи скорости убывания функции и гладкости ее преобразования Фурье). *Если локально интегрируемая функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ такова, что функция $x^k f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то:*

a) *преобразование Фурье функции f принадлежит классу $C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$;*

b) *имеет место неравенство*

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = (-i)^k \hat{\mathcal{F}}[x^k f(x)](\xi). \tag{29}$$

◀ Для $k=0$ соотношение (29) тривиально выполнено, а непрерывность $\hat{f}(\xi)$ уже была доказана в лемме 1. Если $k>0$, то при $n<k$ на бесконечности имеет место оценка $|x^n f(x)|\leqslant|x^k f(x)|$, из которой следует абсолютная интегрируемость функции $x^n f(x)$. Но $|x^n f(x)e^{-i\xi x}|\leqslant|x^n f(x)|$, что позволяет, ссылаясь на равномерную по параметру ξ сходимость соответствующих интегралов, последовательно провести их дифференцирование под знаком интеграла:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx,$$

$$\hat{f}'(\xi) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\xi x}\,dx,$$

. . . .

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)e^{-i\xi x}\,dx.$$

Последний интеграл по лемме 1 является функцией, непрерывной по ξ на всей числовой прямой. Значит, действительно, $\hat{f}\in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. ▶

c. Пространство быстро убывающих функций.

Определение 4. Обозначим символом $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ или более коротким символом $\mathcal{S}$ совокупность всех функций $f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^\beta f^{(\alpha)}(x)|<\infty,$$

каковы бы ни были неотрицательные целые числа α и β. Такие функции называют *быстро убывающими* (при $x\to\infty$).

Совокупность быстро убывающих функций, очевидно, образует линейное пространство относительно стандартных операций сложения функций и умножения функции на комплексное число.

Пример 7. Функция e^{-x^2} и все финитные функции класса $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ входят в $\mathcal{S}$.

Лемма 3. *Ограничение преобразования Фурье на $\mathcal{S}$ является автоморфизмом $\mathcal{S}$ как линейного пространства.*

◀ Проверим, что $(f \in \mathcal{S}) \Rightarrow (\hat{f} \in \mathcal{S})$.

Для этого заметим сначала, что по утверждению 2а) $\hat{f} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Далее заметим, что операция умножения на x^α ($\alpha \geqslant 0$) и операция D дифференцирования не выводят из класса быстро убывающих функций. Значит, при любых целых неотрицательных значениях α и β из того, что $f \in \mathcal{S}$, следует, что функция $D^\beta(x^\alpha f(x))$ принадлежит пространству $\mathcal{S}$. Ее преобразование Фурье по лемме Римана стремится к нулю на бесконечности. Но по формулам (28), (29)

$$\hat{\mathcal{F}}\left[D^\beta(x^\alpha f(x))\right](\xi) = i^{\alpha+\beta}\xi^\beta \hat{f}^{(\alpha)}(\xi),$$

и мы показали, что $\xi^\beta \hat{f}^{(\alpha)}(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$, т. е. $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

Покажем теперь, что преобразование Фурье $\hat{\mathcal{F}}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ отображает $\mathcal{S}$ на все множество $\mathcal{S}$.

Напомним, что прямое и обратное преобразования Фурье связаны простым соотношением $\hat{\mathcal{F}}[f](\xi) = \tilde{\mathcal{F}}[f](-\xi)$ или, короче, $\hat{f}(\xi) = \tilde{f}(-\xi)$. Изменение знака аргумента функции, очевидно, является операцией, переводящей множество $\mathcal{S}$ в себя. Значит, оператор $\tilde{\mathcal{F}}$ (обратное преобразование Фурье) тоже переводит пространство $\mathcal{S}$ в себя.

Наконец, если f — произвольная функция из $\mathcal{S}$, то, по доказанному, $\varphi = \tilde{f} \in \mathcal{S}$ и по формулам (24″) получаем, что $f = \hat{\varphi}$.

Линейность отображения $\hat{\mathcal{F}}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ очевидна, поэтому лемма 3 теперь полностью доказана. ▶

3. Важнейшие аппаратные свойства преобразования Фурье.

а. Некоторые определения, обозначения и примеры. Выше мы достаточно подробно рассмотрели преобразование Фурье заданной на вещественной прямой функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. В частности, мы уяснили связь, существующую между свойствами регулярности самой функции и соответствующими свойствами ее преобразования Фурье. Теперь, когда этот вопрос в принципе решен, мы будем рассматривать преобразования Фурье только достаточно регулярных функций, чтобы в концентрированной форме и без технических осложнений изложить фундаментальные аппаратные свойства преобразования Фурье. Взамен мы рассмотрим не только одномерное, но и многомерное преобразование Фурье и выведем его основные свойства практически независимо от изложенного выше.

Определение 5. Пусть $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — локально интегрируемая на $\mathbb{R}^n$ функция. Функция

$$\hat{f}(\xi) := \hat{\mathcal{F}}[f](\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i(\xi, x)}\, dx \tag{30}$$

называется *преобразованием Фурье функции* f.

При этом имеется в виду, что $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $(\xi, x)=\xi_1 x_1+\ldots+\xi_n x_n$, а интеграл считается сходящимся в следующем смысле главного значения:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n := \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \ldots \int_{-A}^{A} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

В таком случае многомерное преобразование Фурье (30) можно рассматривать как n одномерных преобразований Фурье, проведенных по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Тогда, когда функция f абсолютно интегрируема, вопрос о том, в каком смысле понимается интеграл (30), очевидно, вообще не возникает.

Пусть $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — мультииндексы, состоящие из неотрицательных целых чисел α_j, β_j, $j=1, \ldots, n$, и пусть, как всегда, D^α обозначает оператор дифференцирования $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ порядка $|\alpha| := \alpha_1+\ldots+\alpha_n$, а $x^\beta := x_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$.

Определение 6. Обозначим символом $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ или, если не возникает недоразумений, символом $\mathscr{S}$, совокупность всех функций $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty,$$

каковы бы ни были неотрицательные мультииндексы α и β. Такие функции называют *быстро убывающими* (при $x \to \infty$).

Множество $\mathscr{S}$ с алгебраическими операциями сложения функций и умножения функции на комплексное число, очевидно, является линейным пространством.

Пример 8. Функция $e^{-|x|^2}$, где $|x|^2=x_1^2+\ldots+x_n^2$, и все финитные функции класса $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ входят в $\mathscr{S}$.

Если $f \in \mathscr{S}$, то интеграл в соотношении (30), очевидно, сходится абсолютно и равномерно по ξ на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Более того, если $f \in \mathscr{S}$, то в соответствии со стандартными правилами этот интеграл можно дифференцировать сколько угодно раз по любой из переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Таким образом, если $f \in \mathscr{S}$, то $\hat{f} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Пример 9. Найдем преобразование Фурье функции $\exp(-|x|^2/2)$.

При интегрировании быстро убывающих функций, очевидно, можно пользоваться теоремой Фубини и, если требуется, то можно беспрепятственно менять порядок несобственных интегрирований.

В данном случае, используя теорему Фубини и пример 4, находим

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2}\cdot e^{-i(\xi,x)}\,dx=$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x_j^2/2}e^{-i\xi_j x_j}\,dx_j=\prod_{j=1}^{n}e^{-\xi_j^2/2}=e^{-|\xi|^2/2}.$$

Теперь выделим и докажем основные аппаратные свойства преобразования Фурье, считая, чтобы избежать технических осложнений, что преобразование Фурье применяется к функциям класса $\mathscr{S}$.

b. Линейность. Линейность преобразования Фурье очевидна: она следует из линейности интеграла.

c. Взаимоотношения оператора дифференцирования и преобразования Фурье. Имеют место формулы

$$\hat{\mathscr{F}}[D^\alpha f](\xi)=(i)^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{f}(\xi), \tag{31}$$

$$\hat{\mathscr{F}}[x^\alpha f(x)](\xi)=(i)^{|\alpha|}D^\alpha\hat{f}(\xi). \tag{32}$$

◀ Первая из них получается, как и формула (28), интегрированием по частям (разумеется, с предварительным использованием теоремы Фубини, если речь идет о пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности $n>1$).

Формула (32) обобщает соотношение (29) и получается прямым дифференцированием интеграла (30) по параметрам $\xi_1, \ldots, \xi_n$. ▶

Замечание 1. Ввиду очевидной оценки

$$|\hat{f}(\xi)|\leqslant\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,dx<+\infty,$$

из равенства (31) вытекает, что $\hat{f}(\xi)\to 0$ при $\xi\to\infty$, какова бы ни была функция $f\in\mathscr{S}$, поскольку $D^\alpha f\in\mathscr{S}$.

Далее, совместное использование формул (31), (32) позволяет написать, что

$$\hat{\mathscr{F}}[D^\beta(x^\alpha f(x))](\xi)=(i)^{|\alpha|+|\beta|}\xi^\beta D^\alpha\hat{f}(\xi),$$

откуда следует, что если $f\in\mathscr{S}$, то при любых неотрицательных мультииндексах α и β $\xi^\beta D^\alpha\hat{f}(\xi)\to 0$, когда $\xi\to\infty$ в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, показано, что

$$(f\in\mathscr{S})\Rightarrow(\hat{f}\in\mathscr{S}).$$

d. Формула обращения.

Определение 7. Оператор $\tilde{\mathcal{F}}$, определяемый (вместе с его сокращенным обозначением $\tilde{\ }$) равенством

$$\tilde{f}(\xi) := \tilde{\mathcal{F}}[f](\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i(\xi, x)}\, dx, \tag{33}$$

называется *обратным преобразованием Фурье.*

Имеет место следующая *формула обращения преобразования Фурье*:

$$\tilde{\mathcal{F}}[\hat{\mathcal{F}}[f]] = \hat{\mathcal{F}}[\tilde{\mathcal{F}}[f]] = f, \tag{34}$$

что может быть переписано в сокращенных обозначениях

$$\tilde{\hat{f}} = \hat{\tilde{f}} = f \tag{34'}$$

или в форме интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)}\, d\xi. \tag{34''}$$

Используя теорему Фубини, формулу (34) можно немедленно получить из соответствующей формулы (24′) для одномерного преобразования Фурье, но мы, как и обещали, проведем короткое независимое доказательство этой формулы.

◀ Покажем сначала, что для любых функций $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ справедливо соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y) f(x+y)\, dy. \tag{35}$$

Оба интеграла имеют смысл, поскольку $f, g \in \mathcal{S}$, а по замечанию 1 тогда и $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}$.

Преобразуем интеграл, стоящий в левой части доказываемого равенства:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)}\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(\xi, y)} dy \right] e^{i(x, \xi)}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-i(\xi, y-x)} d\xi \right] f(y)\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y-x) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y) f(x+y)\, dy.$$

Законность проведенного изменения порядка интегрирования не вызывает сомнений ввиду того, что f и g — быстро убывающие функции. Итак, равенство (35) проверено.

Заметим теперь, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon\xi)\, e^{i(y,\,\xi)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\varepsilon^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(u)\, e^{-i\left(y,\,\frac{u}{\varepsilon}\right)}\, du = \varepsilon^{-n}\hat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right),$$

значит, в силу равенства (35)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon\xi)\,\hat{f}(\xi)\, e^{i(x,\,\xi)}\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n}\hat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) f(x+y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(u)\, f(x+\varepsilon u)\, du.$$

Учитывая абсолютную и равномерную по ε сходимость крайних интегралов последней цепочки равенств, при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$g(0) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, e^{i(x,\,\xi)}\, d\xi = f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(u)\, du.$$

Положим здесь $g(x) = e^{-|x|^2/2}$. В примере 9 мы видели, что $\hat{g}(u) = e^{-|u|^2/2}$. Остается вспомнить интеграл Эйлера — Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, чтобы с помощью теоремы Фубини заключить, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|u|^2/2} du = (2\pi)^{n/2}$ и в результате получить равенство (34″). ►

Замечание 2. В отличие от одного равенства (34″), означающего, что $\tilde{\mathscr{F}}[\mathscr{F}(f)] = \tilde{\hat{f}} = f$, в соотношениях (34), (34′) присутствует еще второе равенство $\hat{\mathscr{F}}[\tilde{\mathscr{F}}(f)] = \hat{\tilde{f}} = f$. Но оно немедленно вытекает из доказанного, поскольку $\tilde{\mathscr{F}}[f](\xi) = \hat{\mathscr{F}}[f](-\xi)$ и $\tilde{\mathscr{F}}[f(-x)] = \hat{\mathscr{F}}[f(x)]$.

Замечание 3. Мы уже видели (см. замечание 1), что если $f \in \mathscr{S}$, то $\hat{f} \in \mathscr{S}$, а значит, и $\tilde{f} \subset \mathscr{S}$, т. е. $\hat{\mathscr{F}}(\mathscr{S}) \subset \mathscr{S}$ и $\tilde{\mathscr{F}}(\mathscr{S}) \subset \mathscr{S}$. Из соотношения $\hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}} = f$ теперь заключаем, что $\hat{\mathscr{F}}(\mathscr{S}) = \mathscr{S}$ и $\tilde{\mathscr{F}}(\mathscr{S}) = \mathscr{S}$.

е. **Равенство Парсеваля.** Так принято называть соотношение

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \tag{36}$$

которое в развернутой форме означает, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\bar{g}(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\,\bar{\hat{g}}(\xi)\, d\xi. \tag{36′}$$

Из (36), в частности, следует, что

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \|\hat{f}\|^2. \tag{37}$$

С геометрической точки зрения равенство (36) означает, что преобразование Фурье сохраняет скалярное произведение между функциями (векторами пространства $\mathscr{S}$) и, значит, является изометрией пространства $\mathscr{S}$.

Равенством Парсеваля иногда называют также соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx, \tag{38}$$

которое получается из равенства (35), если положить там $x=0$.

Основное равенство Парсеваля (36) получается из соотношения (38), если в нем вместо g написать $\bar{\hat{g}}$ и воспользоваться тем, что $\widehat{(\bar{\hat{g}})} = g$ (ибо $\hat{\bar{\varphi}} = \tilde{\varphi}$ и $\bar{\tilde{g}} = g$).

f. Преобразование Фурье и свертка. Имеют место следующие важные соотношения:

$$\widehat{(f * g)} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}, \tag{39}$$

$$\widehat{(f \cdot g)} = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{g} \tag{40}$$

(называемые иногда *формулами Бореля*), которые связывают операции свертки и умножения функций посредством преобразования Фурье.

Докажем эти формулы:

$$◀\ \widehat{(f * g)} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)\, e^{-i(\xi,\, x)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy\right] e^{-i(\xi,\, x)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, e^{-i(\xi,\, y)} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, e^{-i(\xi,\, x-y)}\, dx\right] dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, e^{-i(\xi,\, y)} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(u)\, e^{-i(\xi,\, u)}\, du\right] dy =$$

$$= \int_{n} g(y)\, e^{-i(\xi,\, y)} \hat{f}(\xi)\, dy = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi).$$

Законность проведенного изменения порядка интегрирования не вызывает сомнений, если $f, g \in \mathscr{S}$.

Формула (40) может быть получена аналогичной выкладкой, если воспользоваться формулой обращения (34″). Впрочем, равенство (40) можно вывести из уже доказанного соотношения (39), если вспомнить, что $\hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}} = f$, $\bar{\hat{f}} = \tilde{\bar{f}}$, $\bar{\tilde{f}} = \hat{\bar{f}}$ и что $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$, $\overline{u * v} = \bar{u} * \bar{v}$.

В самом деле, из (39) следует, что

$$\widehat{\overline{u * v}} = (2\pi)^{n/2} \widetilde{(\hat{u}\ \hat{v})},$$

$$\overline{u * v} = (2\pi)^{n/2} \widehat{\widetilde{(\hat{u} \cdot \hat{v})}},$$

$$\bar{u} * \bar{v} = (2\pi)^{n/2} \widehat{(\hat{\bar{u}} \cdot \hat{\bar{v}})}.$$

Подставляя сюда $u=\hat{f}$, $v=\hat{g}$ и учитывая, что $\hat{\tilde{\hat{w}}}=\tilde{\hat{\tilde{w}}}=\tilde{\hat{w}}=w$, получаем равенство (40). ▶

Замечание 4. Если в формулы (39), (40) подставить $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ вместо f и g и применить к обеим частям полученных равенств обратное преобразование Фурье, то придем к соотношениям

$$\tilde{f}\cdot g=(2\pi)^{-n/2}(\tilde{f}*\tilde{g}), \tag{39'}$$

$$\tilde{f}*g=(2\pi)^{n/2}(\tilde{f}\ \tilde{g}). \tag{40'}$$

4. Примеры приложений. Продемонстрируем теперь преобразование Фурье (и отчасти аппарат рядов Фурье) в работе.

а. Волновое уравнение. Успешное использование преобразования Фурье в уравнениях математической физики связано (в математическом отношении) прежде всего с тем, что преобразование Фурье заменяет операцию дифференцирования алгебраической операцией умножения

Пусть, например, ищется функция $u\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению

$$a_0u^{(n)}(x)+a_1u^{(n-1)}(x)+\ldots+a_nu(x)=f(x),$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — постоянные коэффициенты, а f — известная функция. Применяя к обеим частям этого равенства преобразование Фурье (в предположения достаточной регулярности функций u и f), благодаря соотношению (31) получим алгебраическое уравнение

$$(a_0(i\xi)^n+a_1(i\xi)^{n-1}+\ldots+a_n)\,\hat{u}(\xi)=\hat{f}(\xi)$$

относительно $\hat{u}$. Найдя из него $\hat{u}(\xi)=\dfrac{\hat{f}(\xi)}{P(i\xi)}$, обратным преобразованием Фурье получаем $u(x)$.

Применим эту идею к отысканию функции $u=u(x, t)$, удовлетворяющей в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\qquad(a>0)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0)=f(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=g(x).$$

Здесь и в следующем примере мы не будем останавливаться на обосновании промежуточных выкладок, потому что, как правило, легче бывает найти нужную функцию и непосредственно проверить, что она решает поставленную задачу, чем обосновать и преодолеть все возникающие по дороге технические трудности. Существенную роль в принципиальной борьбе с этими трудностями, кстати, играют обобщенные функции, о чем уже упоминалось

Итак, рассматривая t как параметр, сделаем преобразование Фурье по x обеих частей нашего уравнения. Тогда, считая возможным выносить дифференцирование по параметру t за знак интеграла, с одной стороны, и, пользуясь формулой (31), с другой стороны, получим

$$\hat{u}''_{tt}(\xi, t) = -a^2\xi^2\hat{u}(\xi, t),$$

откуда находим

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi)\cos a\xi t + B(\xi)\sin a\xi t.$$

В силу начальных данных

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) = A(\xi),$$

$$\hat{u}'_t(\xi, 0) = \widehat{(u'_t)}(\xi, 0) = \hat{g}(\xi) = a\xi B(\xi).$$

Таким образом,

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)\cos a\xi t + \frac{\hat{g}(\xi)}{a\xi}\sin a\xi t =$$

$$= \frac{1}{2}\hat{f}(\xi)\left(e^{ia\xi t} + e^{-ia\xi t}\right) + \frac{1}{2}\frac{\hat{g}(\xi)}{ia\xi}\left(e^{ia\xi t} - e^{-ia\xi t}\right).$$

Домножая это равенство на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix\xi}$ и интегрируя по ξ, короче, беря обратное преобразование Фурье и используя формулу (31), непосредственно получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left(f(x-at) + f(x+at)\right) + \frac{1}{2}\int_0^t \left(g(x-a\tau) + g(x+a\tau)\right)d\tau.$$

b. Уравнение теплопроводности. Еще один элемент аппарата преобразований Фурье (а именно формулы (39′), (40′)), оставшийся в тени при рассмотрении предыдущего примера, хорошо проявляется при отыскании функции $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющей во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u \qquad (a > 0)$$

и начальному условию $u(x, 0) = f(x)$.

Здесь, как всегда, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Выполнив преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^n$, получим в силу (31) обыкновенное уравнение

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = a^2(i)^2(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)\,\hat{u}(\xi, t),$$

из которого следует, что

$$\hat{u}(\xi, t) = c(\xi)\,e^{-a^2|\xi|^2 t},$$

где $|\xi|^2=\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2$. Учитывая, что $\hat{u}(\xi,\ 0)=\hat{f}(\xi)$, находим

$$\hat{u}(\xi,\ t)=\hat{f}(\xi)\cdot e^{-a^2|\xi|^2 t}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, с учетом соотношения (39′) получаем

$$u(x,\ t)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(y)\,E_0(y-x,\ t)\,dy,$$

где $E_0(x,\ t)$ — та функция, преобразованием Фурье которой по x получается функция $e^{-a^2|\xi|^2 t}$. Обратное преобразование Фурье по ξ функции $e^{-a^2|\xi|^2 t}$ в сущности нам уже известно из примера 9. Сделав очевидную замену переменной, найдем

$$E_0(x,\ t)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}.$$

Полагая $E(x,\ t)=(2\pi)^{-n/2}E_0(x,\ t)$, находим уже знакомое нам (см. гл. XVII, § 4, пример 15) фундаментальное решение

$$E(x,\ t)=\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^{-n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}\qquad(t>0)$$

уравнения теплопроводности и формулу

$$u(x,\ t)=(f*E)(x,\ t)$$

для решения, удовлетворяющего начальному условию $u(x,\ 0)=f(x)$.

с. **Формула Пуассона.** Так называется следующее соотношение:

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(n)\tag{41}$$

между функцией $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (пусть $\varphi\in\mathscr{S}$) и ее преобразованием Фурье $\hat{\varphi}$. Формула (41) получается при $x=0$ из равенства

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\pi n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(n)\,e^{inx},\tag{42}$$

которое мы и докажем, считая, что φ — быстро убывающая функция.

◀ Поскольку φ, $\hat{\varphi}\in\mathscr{S}$, ряды в обеих частях равенства (42) сходятся абсолютно (поэтому их можно сумммировать как угодно) и равномерно по x на всей прямой $\mathbb{R}$. Далее, поскольку производные быстро убывающей функции сами являются функциями класса $\mathscr{S}$, то можно заключить, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\pi n)$ принадлежит классу $C^{(\infty)}(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$. Функция f, очевидно, 2π-периодическая. Пусть $\{\hat{c}_k(f)\}$ ее коэффициенты Фурье по ортонормированной системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx};\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Тогда

$$\hat{c}_k(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x+2\pi n)\,e^{-ikx}\,dx =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{2\pi n}^{2\pi(n+1)}\varphi(x)\,e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-ikx}\,dx =: \hat{\varphi}(k).$$

Но f — гладкая 2π-периодическая функция, поэтому ее ряд Фурье сходится к ней в любой точке $x\in\mathbb{R}$. Значит, в любой точке $x\in\mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\pi n) = f(x) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{c}_n(f)\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(n)\,e^{ikx}. \ \blacktriangleright$$

Замечание 5. Как видно из доказательства, соотношения (41), (42) справедливы далеко не только для функции класса $\mathcal{S}$. Но если все же $\varphi\in\mathcal{S}$, то равенство (42) можно сколько угодно раз дифференцировать почленно по аргументу x, получая как следствие новые соотношения между φ, φ', ... и $\hat{\varphi}$.

d. Теорема Котельникова*). Этот пример, основанный, как и предыдущий, на красивом комбинировании ряда и интеграла Фурье, имеет прямое отношение к теории передачи информации по каналу связи. Чтобы он не показался искусственным, напомним, что в силу ограниченных возможностей наших органов чувств мы способны воспринимать сигналы только в определенном диапазоне частот. Например, ухо «слышит» в диапазоне от 20 герц до 20 килогерц. Таким образом, какие бы ни были сигналы, мы, подобно фильтру (см. п. 1), вырезаем только ограниченную часть их спектра и воспринимаем их как сигналы с финитным спектром.

Будем поэтому сразу считать, что передаваемый, или получаемый нами сигнал $f(t)$ (где t — время, $-\infty<t<\infty$) имеет финитный спектр, отличный от нуля лишь для частот ω, величина которых не превышает некоторого критического значения $a>0$. Итак, $\hat{f}(\omega)\equiv 0$ при $|\omega|>a$, поэтому представление

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega$$

*) В. А. Котельников (1908) — советский ученый, известный специалист в теории радиосвязи

для функции с финитным спектром сводится к интегралу лишь по промежутку $[-a, a]$:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{43}$$

На отрезке $[-a, a]$ функцию $\hat{f}(\omega)$ разложим в ряд Фурье

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_k(\hat{f})e^{i\frac{\pi\omega}{a}k} \tag{44}$$

по системе $\left\{e^{i\frac{\pi\omega}{a}k};\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, ортогональной и полной на этом отрезке. Учитывая формулу (43), для коэффициентов $c_k(\hat{f})$ этого ряда получаем следующее простое выражение:

$$c_k(\hat{f}):=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\hat{f}(\omega)e^{-i\frac{\pi\omega}{a}k}\,d\omega=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}f\left(-\frac{\pi}{a}k\right) \tag{45}$$

Подставляя ряд (44) в интеграл (43), с учетом соотношений (45) находим

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\left(\frac{\sqrt{2a}}{2a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi}{a}k\right)e^{i\omega t-i\frac{\pi k}{a}\omega}\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi}{a}k\right)\int_{-a}^{a}e^{i\omega\left(t-\frac{\pi}{a}k\right)}d\omega.$$

Вычислив эти элементарные интегралы, приходим к *формуле Котельникова*

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi}{a}k\right)\frac{\sin a\left(t-\frac{\pi}{a}k\right)}{a\left(t-\frac{\pi}{a}k\right)}. \tag{46}$$

Формула (46) показывает, что для восстановления сообщения, описываемого функцией $f(t)$ с финитным спектром, сосредоточенным в полосе частот $|\omega|\leqslant a$, достаточно передать по каналу связи лишь значения $f(k\Delta)$ (называемые *отсчетными значениями*) данной функции через равные промежутки времени $\Delta=\pi/a$.

Это утверждение в совокупности с формулой (45) принадлежит В. А. Котельникову и называется *теоремой Котельникова* или *теоремой отсчетов*.

Замечание 6. Сама по себе интерполяционная формула (46) была известна в математике еще до работы В. А. Котельникова (1933 г.) Но в этой работе впервые было указано фундаментальное значение разложения (46) для теории передачи непрерывных сообщений по каналу связи. Изложенная выше идея вывода формулы (46) также принадлежит В. А. Котельникову.

Замечание 7. Реально время передачи и приема сообщения ограничено, поэтому вместо всего ряда (46) берут некоторую его частичную сумму $\sum_{-N}^{N}$. Специальные исследования посвящены оценке возникающих при этом погрешностей.

Замечание 8. Если известно, сколько времени занимает передача одного отсчетного значения сообщения $f(t)$ в данном канале связи, то легко оценить количество таких сообщений, которые можно параллельно передавать по этому каналу связи. Иными словами, появляется возможность оценить пропускную способность канала связи (более того, еще и в зависимости от информационной насыщенности сообщений, которая сказывается на спектре сигнала $f(t)$).

Задачи и упражнения

1. a. Запишите подробно доказательства соотношений (16)—(19).

b. Рассматривая преобразование Фурье как отображение $f \overset{\hat{\mathcal{F}}}{\longmapsto} \hat{f}$, покажите, что оно обладает следующими часто используемыми свойствами:

$$f(at) \longmapsto \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(правило изменения масштаба);

$$f(t-t_0) \longmapsto \hat{f}(\omega)\, e^{-i\omega_0 t}$$

(сдвиг входного сигнала — фурье-прообраза — по времени, или *теорема о переносе*);

$$[f(t+t_0) \pm f(t-t_0)] \longmapsto \begin{cases} \hat{f}(\omega)\, 2\cos\omega t_0, \\ \hat{f}(\omega)\, 2\sin\omega t_0; \end{cases}$$

$$f(t)\, e^{\pm i\omega_0 t} \longmapsto \hat{f}(\omega \pm \omega_0)$$

(сдвиг преобразования Фурье по частоте);

$$f(t)\cos\omega_0 t \longmapsto \frac{1}{2}[\hat{f}(\omega-\omega_0)+\hat{f}(\omega+\omega_0)],$$

$$f(t)\sin\omega_0 t \longmapsto \frac{1}{2}[\hat{f}(\omega-\omega_0)-\hat{f}(\omega+\omega_0)]$$

(амплитудная модуляция гармонического сигнала);

$$f(t)\sin^2\frac{\omega_0 t}{2} \longmapsto \frac{1}{4}\,[2\hat{f}(\omega)-\hat{f}(\omega-\omega_0)-\hat{f}(\omega+\omega_0)].$$

c. Найдите преобразования Фурье $\mathcal{F}$ (или, как говорят, *фурье образы*) следующих функций:

$$\Pi_A(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2A} & \text{при } |t| \leqslant A, \\ 0 & \text{при } |t| > A \end{cases}$$

(*прямоугольный импульс*),

$$\Pi_A(t)\cos\omega_0 t$$

(гармонический сигнал, промодулированный прямоугольным импульсом);

$$\Pi_A(t+2A)+\Pi_A(t-2A)$$

(два прямоугольных импульса одинаковой полярности);

$$\Pi_A(t-A)-\Pi_A(t+A)$$

(два прямоугольных импульса разной полярности);

$$\Lambda_A(t)=\begin{cases}\frac{1}{A}\left(1-\frac{|t|}{A}\right) & \text{при} \quad |t|\leqslant A,\\ 0 & \text{при} \quad |t|>A\end{cases}$$

(треугольный импульс);

$$\cos at^2 \text{ и } \sin at^2 \quad (a>0);$$

$$|t|^{-\frac{1}{2}} \text{ и } |t|^{-\frac{1}{2}}e^{-a|t|} \quad (a>0).$$

d. Найдите фурье-прообразы следующих функций:

$$\operatorname{sinc}\frac{\omega A}{\pi}, \quad 2i\frac{\sin^2\omega A}{\omega A}, \quad 2\operatorname{sinc}^2\frac{\omega A}{\pi},$$

где $\operatorname{sinc}\frac{x}{\pi}:=\frac{\sin x}{x}$ — *функция отсчетов*

e. Используя предыдущие результаты, найдите значения уже встречавшихся нам интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\cos x^2\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\sin x^2\,dx$$

f. Проверьте, что интеграл Фурье функции $f(t)$ можно записать в любом из следующих видов:

$$f(t)\sim\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{it\omega}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega(x-t)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos 2\omega(x-t)\,dx$$

2. Пусть $f=f(x, y)$ — решение двумерного уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ в полуплоскости $y\geqslant 0$, удовлетворяющее условиям $f(x, 0)=g(x)$ и $f(x, y)\to 0$ при $y\to+\infty$ для любого $x\in\mathbb{R}$

a. Проверьте, что преобразование Фурье $\hat{f}(\xi, y)$ функции f по переменной x имеет вид $\hat{g}(\xi)e^{-y|\xi|}$.

b. Найдите фурье-прообраз функции $e^{-y|\xi|}$ по переменной ξ.

c. Получите теперь уже встречавшееся нам (гл. XVII, § 4, пример 5) представление функции f в виде интеграла Пуассона

$$f(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\,g(\xi)\,d\xi.$$

3. Напомним, что *n-м моментом функции* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется величина $M_n(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx$ В частности, если f — плотность распределения вероятностей, т. е $f(x) \geqslant 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, то $x_0 = M_1(f)$ есть математическое ожидание случайной величины x с распределением f, а дисперсия $\sigma^2 := \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2 f(x)\,dx$ этой случайной величины представляется в виде $\sigma^2 = M_2(f) - M_1^2(f)$

Рассмотрим следующее преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\xi x}\,dx$$

функции f. Раскладывая $e^{-i\xi x}$ в ряд, покажите, что:

a. $\hat{f}(\xi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n M_n(f)}{n!}\xi^n$, если, например, $f \in \mathscr{S}$.

b. $M_n(f) = (i)^n \hat{f}^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, \ldots$

c. Пусть теперь f вещественнозначна, тогда $\hat{f}(\omega) = A(\xi)\,e^{i\varphi(\xi)}$, где $A(\xi)$ — модуль, а $\varphi(\xi)$ — аргумент $\hat{f}(\xi)$, причем $A(\xi) = A(-\xi)$ и $\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$. Положим для нормировки, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ Проверьте, что тогда

$$\hat{f}(\xi) = 1 + i\varphi'(0)\,\xi + \frac{A''(0) - (\varphi'(0))^2}{2}\,\xi^2 + o(\xi^2) \quad (\xi \to 0)$$

и

$$x_0 := M_1(f) = -\varphi'(0), \text{ а } \sigma^2 = M_1^2(f) - M_2(f) = -A''(0).$$

4. a. Проверьте, что функция $e^{-a|x|}$ $(a > 0)$, как и все ее производные, определенные при $x \neq 0$, убывает на бесконечности быстрее любой отрицательной степени переменной $|x|$ и тем не менее эта функция не принадлежит классу $\mathscr{S}$

b Убедитесь в том, что преобразование Фурье этой функции бесконечно дифференцируемо на $\mathbb{R}$, но не принадлежит классу $\mathscr{S}$ (и все потому, что $e^{-a|x|}$ не дифференцируема при $x = 0$).

5. a. Покажите, что функции класса $\mathscr{S}$ плотны в пространстве $\mathscr{R}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ абсолютно интегрируемых с квадратом функций $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, наделенном скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f \cdot \bar{g})(x)\,dx$ и порожденными им нормой $\|f\| = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^2(x)\,dx\right)^{1/2}$ и метрикой $d(f, g) = \|f - g\|$

b. Рассмотрим теперь $\mathscr{S}$ как метрическое пространство $(\mathscr{S}, d)$ с указанной метрикой d (сходимости в смысле среднего квадратичного уклонения на $\mathbb{R}^n$). Пусть $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ или, короче, L_2 — пополнение метрического пространства $(\mathscr{S}, d)$ (см гл IX, § 5). Каждый элемент $f \in L_2$ определяется последовательностью $\{\varphi_k\}$ функций $\varphi_k \in \mathscr{S}$, которая является последовательностью Коши в смысле метрики d

Покажите, что тогда и последовательность $\{\hat{\varphi}_k\}$ фурье-образов функций φ_k является последовательностью Коши в $\mathscr{S}$ и, следовательно, задает определенный элемент $\hat{f} \in L_2$, который естественно назвать преобразованием Фурье элемента $f \in L_2$

c. Покажите, что в L_2 естественным образом вводится линейная структура и скалярное произведение, относительно которых преобразование Фурье $\hat{\mathcal{F}}$: $L_2 \to L_2$ оказывается линейным изометрическим отображением L_2 на себя

d. На примере функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ можно видеть, что если $f \in \mathcal{R}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, то не обязательно $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Тем не менее, если $f \in \mathcal{R}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, то, поскольку f — локально интегрируема, можно рассмотреть функцию

$$\hat{f}_A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Проверьте, что $\hat{f}_A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ и $\hat{f}_A \in \mathcal{R}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

e. Докажите, что $\hat{f}_A$ сходится в L_2 к некоторому элементу $\hat{f} \in L_2$ и $\|\hat{f}_A\| \to \|\hat{f}\| = \|f\|$ при $A \to +\infty$ (это — теорема Планшереля *)).

6. *Принцип неопределенности.* Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ — функции класса $\mathcal{S}$ (или элементы пространства L_2 из задачи 5), причем $\psi = \hat{\varphi}$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2(p)\, dp = 1$. В таком случае функции $|\varphi|^2$ и $|\psi|^2$ можно рассматривать как некоторые плотности распределения вероятностей случайных величин x и p соответственно.

a. Покажите, что сдвигом по аргументу (специальным выбором начала отсчета аргумента) функции φ, не меняя величины $\|\hat{\varphi}\|$, можно получить новую функцию φ такую, что $M_1(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x|\varphi|^2(x)\, dx = 0$, а затем, не меняя $M_1(\varphi) = 0$, можно аналогичным сдвигом по аргументу функции ψ добиться того, что $M_1(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} p|\psi|^2(p)\, dp = 0$.

b. Рассмотрите при вещественном параметре α величину

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x\varphi(x) + \varphi'(x)|^2\, dx \geqslant 0$$

и, опираясь на равенство Парсеваля и формулу $\widehat{\varphi'}(p) = ip\widehat{\varphi}(p)$, покажите, что $\alpha^2 M_2^2(\varphi) - \alpha + M_2^2(\psi) \geqslant 0$. (Определения M_1 и M_2 см. в задаче 3.)

c. Получите отсюда соотношение

$$M_2^2(\varphi) \cdot M_2^2(\psi) \geqslant 1/4.$$

Это соотношение показывает, что чем более «сосредоточена» сама функция φ, тем «размытие» ее преобразование Фурье и обратно (см. в этой связи пример 1 и задачу 7b).

В квантовой механике это соотношение, называемое *принципом неопределенности*, приобретает конкретный физический смысл. Например, нельзя одновременно измерить точно и координату квантовой частицы, и ее импульс. Этот фундаментальный факт (называемый *принципом неопределенности Гейзенберга* **)), в математическом отношении совпадает с найденным выше соотношением между $M_2(\varphi)$ и $M_2(\psi)$.

---

*) М. Планшерель (1885—1967) — швейцарский математик.

**) В. Гейзенберг (1901—1976) — немецкий физик, один из создателей квантовой механики.

Следующие три задачи дают начальное представление о преобразовании Фурье обобщенных функций.

7. a. Используя пример 1, найдите спектр сигнала, выражаемого функцией

$$\Delta_\alpha(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\alpha} & \text{при } |t|\leqslant\alpha,\\ 0 & \text{при } |t|>\alpha\end{cases}$$

b. Проследите за изменением функции $\Delta_\alpha(t)$ и ее спектра при $\alpha\to+0$ и скажите, каким, по вашему мнению, следует считать спектр единичного импульса, выражаемого δ-функцией

c. Используя пример 2, найдите теперь сигнал $\varphi(t)$ на выходе идеального фильтра низкой частоты (с верхней граничной частотой a), возникающий как ответ на единичный импульс $\delta(t)$.

d. Опираясь на полученный результат, истолкуйте теперь физический смысл членов ряда Котельникова (46) и предложите принципиальную схему передачи сигнала $f(t)$, имеющего финитный спектр, основанную на формуле Котельникова (46).

8. *Пространство Л. Шварца*. Проверьте, что:

a. Если $\varphi\in\mathscr{S}$, а P — полином, то $(P\cdot\varphi)\in\mathscr{S}$.

b Если $\varphi\in\mathscr{S}$, то $D^\alpha\varphi\in\mathscr{S}$ и $D^\beta(PD^\alpha\varphi)\in\mathscr{S}$, где α и β — произвольные неотрицательные мультииндексы, а P — полином

c. В $\mathscr{S}$ вводится следующее понятие сходимости. Последовательность $\{\varphi_k\}$ функций $\varphi_k\in\mathscr{S}$ считается сходящейся к нулю, если для любых неотрицательных мультииндексов α, β последовательность функций $\{x^\beta D^\alpha\varphi_k\}$ сходится к нулю равномерно на $\mathbb{R}^n$ Соотношение $\varphi_k\to\varphi\in\mathscr{S}$ будет означать, что $(\varphi-\varphi_k)\to 0$ в $\mathscr{S}$

Линейное пространство $\mathscr{S}$ быстро убывающих функций, снабженное указанной сходимостью, называется *пространством Шварца*

Покажите, что если $\varphi_k\to\varphi$ в $\mathscr{S}$, то и $\hat\varphi_k\to\hat\varphi$ в $\mathscr{S}$ при $k\to\infty$. Таким образом, преобразование Фурье является линейным непрерывным преобразованием пространства Шварца

9. *Пространство $\mathscr{S}'$ обобщенных функций умеренного роста*. Линейные непрерывные функционалы, определенные на пространстве $\mathscr{S}$ быстро убывающих функций, называют *обобщенными функциями медленного* или *умеренного роста*. Линейное пространство таких функционалов (сопряженное к пространству $\mathscr{S}$) обозначают символом $\mathscr{S}'$ Значение функционала $F\in\mathscr{S}'$ на функции $\varphi\in\mathscr{S}$ будем записывать символом $F(\varphi)$.

a. Пусть $P\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ — полином от n переменных, а $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ — локально интегрируемая функция, допускающая на бесконечности оценку $|f(x)|\leqslant|P(x)|$ (т. е, быть может, растущая при $x\to\infty$, но умеренно не быстрее, чем степенным образом) Покажите, что тогда f можно считать (регулярным) элементом пространства $\mathscr{S}'$, если положить

$$f(\varphi)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx\qquad(\varphi\in\mathscr{S})$$

b. Умножение обобщенной функции $F\in\mathscr{S}'$ на обычную функцию $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ определяется, как всегда, соотношением $(fF)(\varphi):=F(f\varphi)$ Проверьте, что для обобщенных функций класса $\mathscr{S}'$ корректно определено умножение не только на функции $f\in\mathscr{S}$, но и на полиномы $P\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$.

c Дифференцирование обобщенных функций $F\in\mathscr{S}'$ определяется традиционным способом. $(D^\alpha F)(\varphi):=(-1)^{|\alpha|}F(D^\alpha\varphi)$.

Покажите, что это определение корректно, т. е если $F\in\mathscr{S}'$, то и $D^\alpha F\in\mathscr{S}'$ при любом неотрицательном целочисленном мультииндексе $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$

d Если f и φ достаточно регулярные функции (например, класса $\mathscr{S}$), то, как видно из соотношения (38), имеет место равенство

$$\hat f(\varphi)=\int_{\mathbb{R}^n}\hat f(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\hat\varphi(x)\,dx=f(\hat\varphi)$$

Это равенство (Парсеваля) и кладут в основу определения преобразования Фурье $\hat{F}$ обобщенной функции $F \in \mathscr{S}'$, полагая по определению, что $\hat{F}(\varphi) := F(\hat{\varphi})$.

Благодаря инвариантности пространства $\mathscr{S}$ относительно преобразования Фурье, это определение корректно для любого элемента $F \in \mathscr{S}'$

Покажите, что оно не является корректным для обобщенных функций пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, действующих на пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ гладких финитных функций. Именно этим обстоятельством и объясняется роль пространства $\mathscr{S}$ Шварца в теории преобразования Фурье и его применении к обобщенным функциям.

e В задаче 7 мы получили начальное представление о преобразовании Фурье δ-функции Преобразование Фурье δ-функции можно было бы наивно искать прямо по общему определению преобразования Фурье регулярной функции Тогда мы нашли бы, что

$$\hat{\delta}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\, e^{-i(\xi, x)}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}.$$

Покажите теперь, что при корректном отыскании преобразования Фурье обобщенной функции $\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, т. е., исходя из равенства $\hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi})$, получается (то же самое), что $\delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}$. Итак, преобразование Фурье δ-функции есть постоянная функция. (Можно перенормировать преобразование Фурье так, чтобы эта константа была равна единице, см задачу 10.)

f. Сходимость в $\mathscr{S}'$, как всегда в обобщенных функциях, понимается в следующем смысле: $(F_n \to F$ в $\mathscr{S}'$ при $n \to \infty) = (\forall \varphi \in \mathscr{S}\ (F_n(\varphi) \to F(\varphi)$ при $n \to \infty))$

Проверьте формулу обращения (интеграл Фурье) для δ-функции:

$$\delta(x) = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{-A}^{A} \ldots \int\limits_{-A}^{A} \hat{\delta}(\xi)\, e^{i(x, \xi)}\, d\xi$$

g. Пусть $\delta(x - x_0)$, как обычно, означает сдвиг δ-функции в точку x_0, т. е $\delta(x - x_0)(\varphi) = \varphi(x_0)$ Проверьте, что ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \left(= \lim_{N \to \infty} \sum_{-N}^{N} \delta(x-n) \right)$$

сходится в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ (здесь $\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ и $n \in \mathbb{Z}$)

h Используя возможность почленно дифференцировать сходящийся ряд обобщенных функций и учитывая равенство из задачи 13f, § 2, покажите, что если $F = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$, то

$$\hat{F} = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

i. Используя соотношение $\hat{F}(\varphi) = F(\hat{\varphi})$, получите из предыдущего результата формулу Пуассона (41).

j. Докажите следующее соотношение (θ-*формула*)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-tn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{t} n^2} \qquad (t > 0),$$

играющее важную роль в теории эллиптических функции и теории теплопро водности

10. Если преобразование Фурье $\check{\mathcal{F}}[f]$ функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ определить формулой

$$\check{f}(\nu) = \check{\mathcal{F}}[f](\nu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i\nu t}\, dt,$$

то многие относящиеся к преобразованию Фурье формулы станут особенно простыми и изящными

a. Проверьте, что $\check{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}\left(\frac{u}{2\pi}\right)$.

b. Покажите, что $\check{\mathcal{F}}[\check{\mathcal{F}}[f]](t) = f(-t)$, т. е

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\nu)\, e^{2\pi i\nu t}\, d\nu$$

Это наиболее естественная форма разложения $f(t)$ по гармоникам различных частот ν, а $\check{f}(\nu)$ в этом разложении есть *частотный спектр функции* f.

c. Проверьте, что $\check{\delta} = 1$ и $\check{1} = \delta$

d. Убедитесь в том, что формула Пуассона (41) теперь принимает особенно изящный вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{\varphi}(n).$$

ГЛАВА XIX

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Большинство явлений, с которыми нам приходится сталкиваться, в математическом отношении характеризуется некоторым набором числовых параметров с довольно сложной зависимостью между ними. Однако описание явления, как правило, существенно упрощается, если известно, что некоторые из этих параметров или их комбинации очень велики или, наоборот, очень малы.

Пример 1. При описании относительных движений, происходящих со скоростями v, много меньшими скорости света ($|v| \ll c$), вместо преобразований Лоренца (гл. I, § 3, пример 3)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

можно использовать преобразования Галилея

$$x' = x - vt, \quad t' = t,$$

поскольку $v/c \approx 0$.

Пример 2. Период

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

колебаний маятника через параметр $k^2 = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$ связан с углом φ_0 максимального отклонения маятника от положения устойчивого равновесия (см. гл. VI, § 4). Если колебания малы, т. е. $\varphi_0 \approx 0$, то для периода таких колебаний получается простая формула

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Пример 3. Пусть на частицу массы m действует возвращающая ее в положение равновесия сила, пропорциональная величине отклонения (пружина с коэффициентом жесткости k), и сила сопротивления среды, пропорциональная (с коэффициентом α)

квадрату скорости частицы. Уравнение движения в этом случае имеет вид (см. гл. V, § 6)

$$m\ddot{x}+\alpha(\dot{x})^2+kx=0.$$

Если среда «разрежается», то $\alpha\to 0$ и, надо полагать, движение становится близким к описываемому уравнением

$$m\ddot{x}+kx=0$$

$\left(\text{гармонические колебания частоты } \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$, а если среда «густеет», то $\alpha\to\infty$ и, поделив на α, получаем в пределе уравнение $(\dot{x})^2=0$, т. е. $x(t)\equiv\text{const}$.

Пример 4. Если $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих $x\in\mathbb{R}$, то, как известно (см. гл. III, § 2), при больших значениях x величину $\pi(x)$ с малой относительной погрешностью можно находить по формуле

$$\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x}.$$

Пример 5. Куда более тривиальными, но не менее важными являются соотношения

$$\sin x\approx x \quad \text{или} \quad \ln(1+x)\approx x,$$

относительная погрешность в которых тем меньше, чем ближе x к нулю (см. гл. V, § 3). Эти соотношения при желании могут быть уточнены,

$$\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3, \quad \ln(1+x)\approx x-\frac{1}{2}x^2,$$

приписыванием одного или более следующих членов, получаемых по формуле Тейлора.

Итак, задача состоит в том, чтобы найти обозримое, удобное и в существенном правильное описание изучаемого явления, используя специфику ситуации, возникающей, когда какой-то характеризующий явление параметр (или комбинация параметров) мал (стремится к нулю) или, наоборот, велик (стремится к бесконечности).

Значит, по существу речь снова идет о теории предельного перехода.

Задачи такого рода называются *асимптотическими*. Они возникают, как можно понять, практически во всех отделах математики и естествознания.

Решение асимптотической задачи обычно состоит из следующих этапов: выполнение предельного перехода и отыскание (главного члена) асимптотики, т. е. удобного упрощенного описания явления; оценка погрешности, возникающей при использовании найденной асимптотической формулы, и выяснение области ее применимости; уточнение главного члена асимптотики, аналогичное (но далеко не всегда столь алгоритмичное) процессу дописывания следующего члена в формуле Тейлора.

Методы решения асимптотических задач (называемые *асимптотическими методами*) обычно весьма тесно связаны со спецификой задачи. К числу редких достаточно общих и в то же время элементарных асимптотических методов, конечно, относится формула Тейлора — одно из наиболее важных соотношений дифференциального исчисления.

Эта глава должна дать читателю начальные представления об элементарных асимптотических методах анализа.

В первом параграфе мы введем общие понятия и определения, относящиеся к элементарным асимптотическим методам, а во втором используем их при изложении метода Лапласа построения асимптотического разложения интегралов Лапласа. Этот метод, найденный Лапласом в его исследованиях по предельным теоремам теории вероятностей, является существеннейшей составной частью развитого впоследствии Риманом метода перевала, излагаемого обычно в курсе комплексного анализа. Систематическое изложение основных методов построения асимптотики интегралов, зависящих от параметра (метод Лапласа, метод стационарной фазы и метод перевала), читатель, знакомый с комплексным анализом, сможет найти, например, в книге: М. В. Федорюк. Метод перевала. — М.: Наука, 1977, которая, кстати, содержит большую библиографию и которой мы следуем в нашем изложении. приводимых ниже начальных сведений об асимптотических методах анализа.

§ 1. Асимптотическая формула и асимптотический ряд

1. Основные определения.

а. Асимптотические оценки и асимптотические равенства. Начнем для полноты с некоторых напоминаний и пояснений.

Определение 1. Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Y$ — вещественно-, комплексно- или вообще векторнозначные (в соответствии с природой множества Y) функции, определенные на множестве X, и пусть $\mathcal{B}$ — база в X. Тогда соотношения

$$f(x) = O(g(x)) \quad x \in X,$$
$$f(x) = O(g(x)) \text{ при базе } \mathcal{B},$$
$$f(x) = o(g(x)) \text{ при базе } \mathcal{B}$$

означают по определению, что в равенстве $|f(x)| = \alpha(x)|g(x)|$ вещественная функция $\alpha(x)$ является соответственно ограниченной на X, финально ограниченной при базе $\mathcal{B}$ и бесконечно малой при базе $\mathcal{B}$.

Эти соотношения обычно называют *асимптотическими оценками* (функции f).

Соотношение

$$f(x) \sim g(x) \text{ при базе } \mathcal{B},$$

по определению означающее, что $f(x) = g(x) + o(g(x))$ при базе $\mathcal{B}$, называют обычно *асимптотической эквивалентностью* или *асимптотическим равенством* *) указанных *функций при базе* $\mathcal{B}$.

Асимптотические оценки и асимптотические равенства объединяют термином *асимптотические формулы*.

Там, где указание аргумента функции несущественно, принята сокращенная форма обозначений $f = o(g)$, $f = O(g)$, $f \sim g$, которой мы уже систематически пользовались.

В наших дальнейших рассмотрениях $Y = \mathbb{C}$ или $Y = \mathbb{R}$; $X \subset \mathbb{C}$ или $X \subset \mathbb{R}$; $\mathcal{B}$, — как правило, одна из баз $X \ni x \to 0$ или $X \ni x \to \infty$.

Используя введенные обозначения, можно, в частности, написать, что

$$\cos x = O(1), \quad x \in \mathbb{R},$$
$$\cos z \neq O(1), \quad z \in \mathbb{C},$$
$$\ln e^z = 1 + z + o(z) \text{ при } z \to 0, \quad z \in \mathbb{C},$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \text{ при } x \to 0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \text{ при } x \to +\infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

З а м е ч а н и е 1. По поводу асимптотических равенств полезно заметить, что они являются всего лишь предельными соотношениями, использование которых в вычислительных целях возможно, но после дополнительной работы, связанной с оценкой остатка. Об этом мы уже говорили, обсуждая формулу Тейлора. Кроме того, надо иметь в виду, что асимптотическая эквивалентность, вообще говоря, позволяет проводить вычисления с малой относительной, но не малой абсолютной погрешностью. Так, например, при $x \to +\infty$ разность $\pi(x) - \frac{x}{\ln x}$ не стремится к нулю, поскольку при каждом значении x, являющемся простым числом, функция $\pi(x)$ имеет единичный скачок. Вместе с тем относительная погрешность от замены $\pi(x)$ на $\frac{x}{\ln x}$ стремится к нулю:

$$\frac{o\left(\frac{x}{\ln x}\right)}{\left(\frac{x}{\ln x}\right)} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

*) Полезно иметь в виду также часто употребляемый для обозначения асимптотических равенств символ $\simeq$.

Это обстоятельство, как мы увидим ниже, приводит к важным в вычислительном отношении асимптотическим рядам, следящим за относительной, а не за абсолютной погрешностью приближения и потому часто расходящимся, в отличие от классических рядов, для которых абсолютная величина разности между приближаемой функцией и n-й частичной суммой ряда стремится к нулю при $n \to +\infty$.

Рассмотрим некоторые примеры получения асимптотических формул.

Пример 6. Трудоемкость вычисления значений $n!$ или $\ln n!$ возрастает при увеличении $n \in \mathbb{N}$. Воспользуемся, однако, тем, что n велико и получим при этом условии удобную асимптотическую формулу для приближенного вычисления $\ln n!$

Из очевидных соотношений

$$\int_1^n \ln x\,dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln x\,dx < \sum_{k=1}^{n} \ln k < \sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln x\,dx = \int_2^{n+1} \ln x\,dx$$

следует, что

$$0 < \ln n! - \int_1^n \ln x\,dx < \int_1^2 \ln x\,dx + \int_n^{n+1} \ln x\,dx < \ln 2(n+1).$$

Но

$$\int_1^n \ln x\,dx = n(\ln n - 1) + 1 = n\ln n - (n-1),$$

поэтому при $n \to \infty$

$$\ln n! = \int_1^n \ln x\,dx + O(\ln 2(n+1)) =$$

$$= n\ln n - (n-1) + O(\ln n) = n\ln n + O(n).$$

Поскольку $O(n) = o(n\ln n)$, когда $n \to +\infty$, относительная погрешность формулы $\ln n! \approx n\ln n$ стремится к нулю при $n \to +\infty$.

Пример 7. Покажем, что при $x \to +\infty$ функция

$$f_n(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^n}\,dt \qquad (n \in \mathbb{R})$$

асимптотически эквивалентна функции $g_n(x) = x^{-n}e^x$. Поскольку $g_n(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то, применяя правило Лопиталя, находим, что

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{g_n(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f_n'(x)}{g_n'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{-n}e^x}{x^{-n}e^x - nx^{-n-1}e^x} = 1.$$

Пример 8. Найдем поточнее асимптотическое поведение функции

$$f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt,$$

которая лишь постоянным слагаемым отличается от интегральной экспоненты

$$\mathrm{Ei}\,(x)=\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$f(x)=\frac{e^t}{t}\Big|_1^x+\int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt=\left(\frac{e^t}{t}+\frac{e^t}{t^2}\right)\Big|_1^x+\int_1^x \frac{2e^t}{t^3}\,dt=$$

$$=\left(\frac{e^t}{t}+\frac{1!\,e^t}{t^2}+\frac{2!\,e^t}{t^3}\right)\Big|_1^x+\int_1^x \frac{3!\,e^t}{t^4}\,dt=$$

$$=e^t\left(\frac{0!}{t}+\frac{1!}{t^2}+\frac{2!}{t^3}+\ldots+\frac{(n-1)!}{t^n}\right)\Big|_1^x+\int_1^x \frac{n!\,e^t}{t^{n+1}}\,dt.$$

Последний интеграл, как было показано в примере 7, есть $O(x^{-(n+1)}e^x)$ при $x\to+\infty$. Включая в $O(x^{-(n+1)}e^x)$ еще и получаемую при подстановке $t=1$ постоянную $-e\sum_{k=1}^{n}(k-1)!$, находим, что

$$f(x)=e^x\sum_{k=0}^{n}\frac{(k-1)!}{x^k}+O\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right)\quad\text{при } x\to+\infty.$$

Погрешность $O\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right)$ приближенного равенства

$$f(x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{(k-1)!}{x^k}e^x$$

асимптотически бесконечно мала по сравнению с каждым, в том числе и последним, членом написанной суммы. Вместе с тем при $x\to+\infty$ каждый следующий член суммы есть бесконечно малая в сравнении с предшествующим членом, поэтому естественно написать неограниченную уточняющуюся последовательность подобных формул в виде ряда, порожденного функцией f:

$$f(x)\simeq e^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Отметим, что этот ряд, очевидно, расходится при любом значении $x \in \mathbb{R}$, поэтому нельзя писать

$$f(x) = e^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Таким образом, мы имеем здесь дело с некоторым новым и явно полезным *асимптотическим* пониманием ряда, связанным, в отличие от классического случая, с относительным, а не абсолютным приближением рассматриваемой функции. Частичные суммы такого ряда, в отличие от классического случая, используются не столько для приближения значения функции в конкретных точках, сколько для описания коллективного поведения значений функции при рассматриваемом предельном переходе (который в нашем примере состоял в стремлении x к $+\infty$).

b. Асимптотическая последовательность и асимптотический ряд.

Определение 2. Последовательность асимптотических формул

$$\begin{aligned}
&f(x) = \psi_0(x) + o(\psi_0(x)),\\
&f(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + o(\psi_1(x)),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + \ldots + \psi_n(x) + o(\psi_n(x)),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

справедливых при некоторой базе $\mathcal{B}$ в множестве X, где определены рассматриваемые функции, записывают в виде соотношения

$$f(x) \simeq \psi_0(x) + \psi_1(x) + \ldots + \psi_n(x) + \ldots$$

или, короче, в виде $f(x) \simeq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_k(x)$ и называют *асимптотическим разложением функции f при данной базе $\mathcal{B}$.*

Из этого определения видно, что в асимптотическом разложении всегда

$$o(\psi_n(x)) = \psi_{n+1}(x) + o(\psi_{n+1}(x)) \text{ при базе } \mathcal{B}$$

и, значит, при любом значении $n = 0, 1, \ldots$

$$\psi_{n+1}(x) = o(\psi_n(x)) \text{ при базе } \mathcal{B},$$

т. е. каждый следующий член разложения доставляет поправку, асимптотически более тонкую по сравнению с предшествующим членом.

Асимптотические разложения обычно появляются в виде линейной комбинации

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots$$

функций той или иной удобной для конкретной задачи последовательности $\{\varphi_n(x)\}$.

Определение 3. Пусть X — множество с заданной в нем базой $\mathcal{B}$. Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ определенных на X функций называется *асимптотической последовательностью при базе* $\mathcal{B}$, если $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$ при базе $\mathcal{B}$ (каковы бы ни были два соседние члена φ_n, φ_{n+1} этой последовательности) и если на любом элементе базы $\mathcal{B}$ ни одна из функций $\varphi_n \in \{\varphi_n(x)\}$ не равна нулю тождественно.

Замечание 2. Условие, что $(\varphi_n|_B)(x) \not\equiv 0$ на элементах B базы $\mathcal{B}$ естественно, поскольку в противном случае все функции $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots$ были бы равны нулю тождественно на B и система $\{\varphi_n\}$ оказалась бы в асимптотическом отношении тривиальной.

Пример 9. Следующие последовательности, очевидно, являются асимптотическими:

a) $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ при $x \to 0$;

b) $1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^n}, \ldots$ при $x \to \infty$;

c) $x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots, x^{p_n}, \ldots$
при базе $x \to 0$, если $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$,
при базе $x \to \infty$, если $p_1 > p_2 > \ldots > p_n > \ldots$;

d) последовательность $\{g(x)\varphi_n(x)\}$, полученная из асимптотической умножением всех ее членов на одну и ту же функцию.

Определение 4. Если $\{\varphi_n\}$ — асимптотическая последовательность при базе $\mathcal{B}$, то асимптотическое разложение вида

$$f(x) \simeq c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots$$

называется *асимптотическим разложением* или *асимптотическим рядом функции f по асимптотической последовательности* $\{\varphi_n\}$ *при базе* $\mathcal{B}$.

Замечание 3. Понятие асимптотического ряда было сформулировано Пуанкаре, активно использовавшего асимптотические разложения в своих исследованиях по небесной механике, но сами асимптотические ряды, как и некоторые методы их получения, встречались в математике еще раньше. По поводу возможного обобщения понятия асимптотического разложения в смысле Пуанкаре (которое мы изложили в определениях 2—4) см. задачу 5 в конце параграфа.

2. Общие сведения об асимптотических рядах.

а. Единственность асимптотического разложения. Говоря об асимптотическом поведении функции при некоторой базе $\mathcal{B}$, мы интересуемся лишь характером предельного поведения функции, поэтому если какие-то две, вообще говоря, различные, функции f и g совпадают на некотором элементе базы $\mathcal{B}$, то они имеют одинаковое асимптотическое поведение при базе $\mathcal{B}$ и в асимптотическом смысле должны считаться совпадающими.

Далее, если заранее фиксировать асимптотическую последовательность $\{\varphi_n\}$, по которой желательно вести асимптотическое разложение, то надо считаться с ограниченными возможностями любой такой системы функций $\{\varphi_n\}$. А именно, найдутся функции, которые при данной базе бесконечно малы в сравнении с любым членом φ_n асимптотической последовательности $\{\varphi_n\}$.

Пример 10. Пусть $\varphi_n(x)=\frac{1}{x^n}$, $n=0, 1, \ldots$, тогда $e^{-x}=o(\varphi_n(x))$ при $x\to+\infty$.

Таким образом, естественно принять

Определение 5. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — асимптотическая последовательность при базе $\mathcal{B}$, то функция f такая, что для каждого $n=0, 1, \ldots$, $f(x)=o(\varphi_n(x))$ при базе $\mathcal{B}$, называется *асимптотическим нулем относительно последовательности* $\{\varphi_n(x)\}$.

Определение 6. Функции f и g будем называть *асимптотически совпадающими при базе* $\mathcal{B}$ *относительно последовательности функций* $\{\varphi_n\}$, асимптотической при базе $\mathcal{B}$, если разность $f-g$ этих функций является асимптотическим нулем относительно последовательности $\{\varphi_n\}$.

Утверждение 1 (о единственности асимптотического разложения). *Пусть* $\{\varphi_n\}$ — *асимптотическая последовательность функций при некоторой базе* $\mathcal{B}$.

a) *Если функция f допускает асимптотическое разложение по последовательности $\{\varphi_n\}$ при базе $\mathcal{B}$, то это разложение единственно.*

b) *Если функции f и g допускают асимптотическое разложение по системе $\{\varphi_n\}$, то эти разложения идентичны в том и только в том случае, когда функции f и g асимптотически совпадают при базе $\mathcal{B}$ относительно последовательности $\{\varphi_n\}$.*

◀ a) Пусть функция φ не равна нулю тождественно на элементах базы $\mathcal{B}$.

Покажем, что если $f(x)=o(\varphi(x))$ при базе $\mathcal{B}$ и одновременно $f(x)=c\varphi(x)+o(\varphi(x))$ при базе $\mathcal{B}$, то $c=0$.

Действительно, $|f(x)|\geqslant|c\varphi(x)|-|o(\varphi(x))|=|c||\varphi(x)|-o(|\varphi(x)|)$ при базе $\mathcal{B}$, поэтому, если $|c|>0$, то найдется элемент B_1 базы $\mathcal{B}$, в любой точке которого будет выполнено неравенство $|f(x)|\geqslant\frac{|c|}{2}|\varphi(x)|$. Если же $f(x)=o(\varphi(x))$ при базе $\mathcal{B}$, то найдется элемент B_2 базы $\mathcal{B}$, в любой точке которого $|f(x)|\leqslant\frac{|c|}{3}|\varphi(x)|$. Значит, в любой точке $x\in B_1\cap B_2$ должно быть выполнено неравенство $\frac{|c|}{2}|\varphi(x)|\leqslant\frac{|c|}{3}|\varphi(x)|$ или, в предположении, что $|c|\neq 0$ неравенство $3|\varphi(x)|\leqslant 2|\varphi(x)|$. Но это невозможно, если $\varphi(x)\neq 0$ хотя бы в одной точке $x\in B_1\cap B_2$.

Рассмотрим теперь асимптотическое разложение функции f по последовательности $\{\varphi_n\}$.

Пусть $f(x)=c_0\varphi_0(x)+o(\varphi_0(x))$ и $f(x)=\tilde{c}_0\varphi_0(x)+o(\varphi_0(x))$ при базе $\mathscr{B}$. Вычитая второе равенство из первого, получаем, что $0=(c_0-\tilde{c}_0)\varphi_0(x)+o(\varphi_0(x))$ при базе $\mathscr{B}$. Но $0=o(\varphi_0(x))$ при базе $\mathscr{B}$, значит, по доказанному $c_0-\tilde{c}_0=0$.

Если совпадение коэффициентов $c_0=\tilde{c}_0, \ldots, c_{n-1}=\tilde{c}_{n-1}$ двух разложений функции f по системе $\{\varphi_n\}$ уже доказано, то из равенств

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+\ldots+c_{n-1}\varphi_{n-1}(x)+c_n\varphi_n(x)+o(\varphi_n(x)),$$
$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+\ldots+c_{n-1}\varphi_{n-1}(x)+\tilde{c}_n\varphi_n(x)+o(\varphi_n(x))$$

тем же способом получаем, что и $c_n=\tilde{c}_n$.

Ссылаясь на принцип индукции, заключаем, что утверждение a) верно.

b) Если при любом $n=0, 1, \ldots$ $f(x)=c_0\varphi_0(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+o(\varphi_n(x))$ и $g(x)=c_0\varphi_0(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+o(\varphi_n(x))$ при базе $\mathscr{B}$, то при любом $n=0, 1, \ldots$ $f(x)-g(x)=o(\varphi_n(x))$ при базе $\mathscr{B}$, и, значит, функции f и g асимптотически совпадают относительно асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$.

Обратное утверждение следует из a), поскольку асимптотический нуль, в качестве которого мы возьмем разность $f-g$, должен иметь только нулевое асимптотическое разложение. ▶

З а м е ч а н и е 4. Мы обсудили вопрос о единственности асимптотического разложения. Подчеркнем, однако, что само по себе асимптотическое разложение функции по заданной наперед асимптотической последовательности возможно далеко не всегда. Не всегда же две функции f и g вообще должны быть связаны одним из асимптотических соотношений $f=O(g)$, $f=o(g)$ или $f\sim g$ при базе $\mathscr{B}$.

Довольно общая асимптотическая формула Тейлора, например, указывает конкретный класс функций (имеющих при $x=0$ производные до порядка n), каждая из которых заведомо допускает асимптотическое представление

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)x+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n)$$

при $x\to 0$. Но вот уже функции $x^{1/2}$ нельзя дать асимптотическое разложение по системе $1, x, x^2, \ldots$ Таким образом, асимптотическую последовательность и асимптотическое разложение не следует отождествлять с некоторым каноническим базисом и разложением по нему любой асимптотики. Возможных видов асимптотического поведения много больше того, что может описать фиксированная асимптотическая последовательность, поэтому описание асимптотического поведения функции это не столько разложение по заранее заданной асимптотической системе, сколько ее отыскание. Нельзя, например, вычисляя неопределенный интеграл от элементарной функции, заранее требовать, чтобы ответ был композицией определенных элементарных функций, потому что он вообще может не быть элементарной функцией. Поиск асимптотических формул, подобно вычислению неопределенных интегралов, представляет интерес лишь в той степени, в какой ответ проще и доступнее для исследования, чем исходное выражение.

b. Допустимые действия с асимптотическими формулами. Элементарное арифметическое свойство символов o и O (такие, как $o(g)+o(g)=o(g)$, $o(g)+O(g)=O(g)+O(g)=O(g)$ и т. п.) были рассмотрены еще в теории предела (гл. III, § 2, утверждение 4). Из этих свойств и определения асимптотического разложения вытекает очевидное

Утверждение 2 (о линейности асимптотических разложений). *Если функции f и g допускают асимптотические разложения $f \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n$, $g \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\varphi_n$ по асимптотической последовательности $\{\varphi_n\}$ при базе $\mathcal{B}$, то их линейная комбинация $\alpha f+\beta g$ также допускает такое разложение, причем $(\alpha f+\beta g) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n+\beta b_n)\varphi_n$.*

Дальнейшие свойства асимптотических разложений и вообще асимптотических формул будут относиться ко все более специальным случаям.

Утверждение 3 (об интегрировании асимптотических равенств). *Пусть f — функция, непрерывная на промежутке $I=[a;\omega[$ (или на промежутке $I=]\omega, a]$).*

a) *Если функция g непрерывна, неотрицательна на промежутке I, а интеграл $\int\limits_a^{\omega} g(x)\,dx$ расходится, то из соотношений*

$$f(x)=O(g(x)),\quad f(x)=o(g(x)),\quad f(x)\sim g(x) \text{ при } I\ni x\to\omega$$

вытекает соответственно, что

$$F(x)=O(G(x)),\quad F(x)=o(G(x)) \quad \text{и} \quad F(x)\sim G(x),$$

где

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt \quad \text{и} \quad G(x)=\int\limits_a^x g(t)\,dt.$$

b) *Если непрерывные положительные на промежутке $I=[a,\omega[$ функции $\varphi_n(x)$, $n=0, 1, \ldots$, образуют асимптотическую последовательность при $I\ni x\to\omega$, а интегралы $\Phi_n(x)=\int\limits_x^{\omega}\varphi_n(t)\,dt$ при $x\in I$ сходятся, то функции $\Phi_n(x)$, $n=0, 1, \ldots$, тоже образуют асимптотическую последовательность при $I\ni x\to\omega$.*

c) *Если интеграл* $\mathcal{F}(x)=\int\limits_x^\omega f(x)\,dx$ *сходится и функция* f *имеет асимптотическое разложение* $f(x)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$ *при* $I\ni x\to\omega$ *по указанной в* b) *асимптотической последовательности* $\{\varphi_n(x)\}$, *то для* $\mathcal{F}$ *справедливо асимптотическое разложение* $\mathcal{F}(x)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\Phi_n(x)$.

◀ a) Если $f(x)=O(g(x))$ при $I\ni x\to\omega$, то найдутся точка $x_0\in I$ и постоянная M такие, что $|f(x)|\leqslant M|g(x)|$ при $x\in[x_0,\omega[$. Из непрерывности функций f и g на отрезке $[a,x_0]$ следует, что тогда на всем отрезке I имеет место неравенство $|f(x)|\leqslant C|g(x)|$, а значит, $\left|\int\limits_a^x f(t)\,dt\right|\leqslant C\left|\int\limits_a^x g(t)\,dt\right|=O\left(\int\limits_a^x g(t)\,dt\right)$.

Для доказательства оставшихся двух соотношений можно воспользоваться (как и в примере 7) правилом Лопиталя, учитывая, что $G(x)=\int\limits_a^x g(t)\,dt\to\infty$ при $I\ni x\to\omega$. В результате получим, что

$$\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

b) Поскольку $\Phi_n(x)\to 0$ при $I\ni x\to\omega$ $(n=0,1,\ldots)$, то, вновь применяя правило Лопиталя, находим, что

$$\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{\Phi_{n+1}(x)}{\Phi_n(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{\Phi'_{n+1}(x)}{\Phi'_n(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)}=0.$$

c) Функция $r_n(x)$ в соотношении

$$f(x)=c_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+r_n(x),$$

как разность непрерывных на I функций, сама непрерывна на I и, очевидно, $R_n(x)=\int\limits_x^\omega r_n(t)\,dt\to 0$ при $I\ni x\to\omega$. Но $r_n(x)=o(\varphi_n(x))$ при $I\ni x\to\omega$ и $\Phi_n(x)\to 0$ при $I\ni x\to\omega$, поэтому из того же правила Лопиталя следует, что в равенстве

$$\mathcal{F}(x)=c_0\Phi_0(x)+c_1\Phi_1(x)+\ldots+c_n\Phi_n(x)+R_n(x)$$

величина $R_n(x)$ есть $o(\Phi_n(x))$ при $I\ni x\to\omega$. ▶

Замечание 5. Дифференцирование асимптотических равенств и асимптотических рядов, вообще говоря, незаконно.

Пример 11. Функция $f(x)=e^{-x}\sin(e^x)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и является асимптотическим нулем относительно асимптотической последовательности $\left\{\frac{1}{x^n}\right\}$ при $x\to+\infty$. Производные от функций $\frac{1}{x^n}$ снова с точностью до множителя имеют вид $\frac{1}{x^k}$, однако функция $f'(x) = -e^x \sin(e^x) + \cos(e^x)$ не только не является асимптотическим нулем, но вообще не имеет асимптотического разложения по последовательности $\left\{\frac{1}{x^n}\right\}$ при $x \to +\infty$.

3. Степенные асимптотические ряды. Остановимся в заключение на степенных асимптотических разложениях, которые встречаются особенно часто, хотя порой и в некотором обобщенном виде, как это было в примере 8.

Мы будем рассматривать разложения по последовательности $\{x^n;\ n = 0,\ 1,\ \ldots\}$, асимптотической при $x \to 0$, и по последовательности $\left\{\frac{1}{x^n};\ n = 0,\ 1,\ \ldots\right\}$, асимптотической при $x \to \infty$. Поскольку с точностью до замены $x = \frac{1}{u}$ это один и тот же объект, мы сформулируем очередное утверждение только для разложений по первой последовательности и отметим затем специфику некоторых из приводимых формулировок в случае разложений по второй последовательности.

Утверждение 4. *Пусть* 0 — *предельная точка множества* E, *и пусть*

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \\ g(x) &\simeq b_0 + b_1(x) + b_2 x^2 + \ldots \end{aligned} \quad \text{при } E \ni x \to 0.$$

Тогда при $E \ni x \to 0$

a) $(\alpha f + \beta g)(x) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n;$

b) $(f \cdot g)(x) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, *где* $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, $n = 0$, $1, \ldots;$

c) *если* $b_0 \neq 0$, *то* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, *где коэффициенты* d_n *находятся из рекуррентных соотношений*

$$a_0 = b_0 d_0, \quad a_1 = b_0 d_1 + b_1 d_0, \ \ldots, \ a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k d_{n-k}, \ \ldots;$$

d) *если* E — *проколотая окрестность или полуокрестность точки* 0, *а* f *непрерывна на* E, *то*

$$\int_0^x f(t)\,dt \simeq a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots$$

e) *если в дополнение к условиям* d) $f \in C^{(1)}(E)$, *то*

$$f'(x) \simeq a_0' + a_1'x + \ldots,$$

где $a_n' = (n+1)a_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$

◀ a) Это частный случай утверждения 2.

b) Используя свойства символа $o(\ )$ (см. гл. III, § 2, утверждение 4), получаем, что

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = \\ &= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o(x^n))(b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + o(x^n)) = \\ &= (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

при $E \ni x \to 0$.

c) Если $b_0 \neq 0$, то $g(x) \neq 0$ при x близких к нулю, поэтому можно рассматривать отношение $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$. Проверим, что если в представлении $h(x) = d_0 + d_1x + \ldots + d_nx^n + r_n(x)$ коэффициенты $d_0, \ldots, d_n$ выбраны в соответствии с утверждением c), то $r_n(x) = o(x^n)$ при $E \ni x \to 0$. Из тождества $f(x) = g(x)h(x)$ получаем, что

$$\begin{aligned}a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + o(x^n) &= \\ &= (b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + o(x^n))(d_0 + d_1x + \ldots + d_nx^n + r_n(x)) = \\ &= (b_0d_0) + (b_0d_1 + b_1d_0)x + \ldots + (b_0d_n + b_1d_{n-1} + \ldots + b_nd_0)x^n + \\ &\quad + b_0r_n(x) + o(r_n(x)) + o(x^n),\end{aligned}$$

откуда следует, что $o(x^n) = b_0r_n(x) + o(r_n(x)) + o(x^n)$ или $r_n(x) = o(x^n)$ при $E \ni x \to 0$, поскольку $b_0 \neq 0$.

d) Это вытекает из утверждения 3c), если положить там $\omega = 0$ и вспомнить, что $-\int\limits_x^0 f(t)\,dt = \int\limits_0^x f(t)\,dt$.

e) Поскольку функция $f'(x)$ непрерывна на $]0, x]$ (или $[x, 0[$) и ограничена (стремится к a_0' при $x \to 0$), то интеграл $\int\limits_0^x f'(x)\,dt$ существует. Очевидно, $f(x) = a_0 + \int\limits_0^x f'(t)\,dt$, так как $f(x) \to a_0$ при $x \to 0$. Подставляя в это равенство асимптотическое разложение $f'(x)$ и пользуясь доказанным в d), получаем, что

$$f(x) \simeq a_0 + a_0'(x) + \frac{a_1'}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}'}{n}x^n + \ldots$$

Из единственности асимптотического разложения (утверждение 1) следуют теперь соотношения $a_n' = (n+1)a_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$ ▶

Следствие 1. *Если U — окрестность (полуокрестность) бесконечности в $\mathbb{R}$, а функция f непрерывна в U и имеет асимпто-*

тическое разложение

$$f(x) \simeq a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots \text{ при } U \ni x \to \infty,$$

то взятый по лежащему в U промежутку интеграл

$$\mathcal{F}(x) = \int_x^\infty \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t}\right) dt$$

сходится и имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\mathcal{F}(x) \simeq \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \ldots + \frac{a_n}{nx^n} + \ldots \text{ при } U \ni x \to \infty.$$

◀ Сходимость интеграла очевидна, поскольку

$$f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \sim \frac{a_2}{t^2} \text{ при } U \ni t \to \infty.$$

Остается, ссылаясь, например, на утверждение 3c), проинтегрировать асимптотическое разложение

$$f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \simeq \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \ldots + \frac{a_n}{t^n} \text{ при } U \ni t \to \infty. \ ▶$$

Следствие 2. *Если в дополнение к условиям следствия 1 известно, что $f \in C^{(1)}(U)$ и f' допускает асимптотическое разложение*

$$f'(x) \simeq a'_0 + \frac{a'_1}{x} + \frac{a'_2}{x^2} + \ldots + \frac{a'_n}{x^n} + \ldots \text{ при } U \ni x \to \infty,$$

то это разложение можно получить формальным дифференцированием разложения функции f, причем

$$a'_n = -(n-1)a_{n-1}, \quad n = 2, 3 \ldots \quad и \quad a'_0 = a'_1 = a_0 = a_1 = 0.$$

◀ Поскольку $f'(x) = a'_0 + \frac{a'_1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $U \ni x \to \infty$, то

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)\, dt = a'_0 x + a'_1 \ln x + O(1)$$

при $U \ni x \to \infty$, и так как $f(x) \simeq a_1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$, а последовательность x, $\ln x$, 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, ... асимптотическая при $U \ni x \to \infty$, утверждение 1 позволяет заключить, что $a'_0 = a'_1 = 0$. Теперь, интегрируя разложение $f'(x) \simeq \frac{a'_2}{x^2} + \frac{a'_3}{x^3} + \ldots$, в силу следствия 1 получаем разложение функции $f(x)$ и на основании единственности разложения приходим к соотношениям $a'_n = -(n-1)a_{n-1}$ при $n = 2, 3, \ldots$ ▶

Задачи и упражнения

1. a. Пусть $h(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ при $|z|>R$, $z\in\mathbb{C}$. Покажите, что тогда $h(z)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ при $\mathbb{C}\ni z\to\infty$.

b. Считая, что искомое решение $y(x)$ уравнения $y'(x)+y^2(x)=\sin\frac{1}{x^2}$ при $x\to\infty$ имеет асимптотическое разложение $y(x)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}$, найдите первые три члена этого разложения

c. Докажите, что если $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ при $|z|<r$, $z\in\mathbb{C}$, а $g(z)\simeq b_1 z+ b_2 z^2+\ldots$ при $\mathbb{C}\ni z\to 0$, то в некоторой проколотой окрестности точки $0\in\mathbb{C}$ определена функция $f\circ g$ и $(f\circ g)(z)\simeq c_0+c_1 z+c_2 z^2+\ldots$ при $\mathbb{C}\ni z\to 0$, где коэффициенты $c_0, c_1, \ldots$ получаются подстановкой ряда в ряд так же, как и для сходящихся степенных рядов.

2. Покажите, что:

a) Если f — непрерывная, положительная и монотонная функция при $x\geqslant 0$, то

$$\sum_{k=0}^{n} f(k)=\int_0^n f(x)\,dx+O(f(n+1))+O(1) \quad \text{при} \quad n\to\infty;$$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+c+o(1)$ при $n\to\infty$.

c) $\sum\limits_{k=2}^{n} k^\alpha(\ln k)^\beta\sim\dfrac{n^{\alpha-1}(\ln n)^\beta}{\alpha+1}$ при $n\to\infty$ и $\alpha>-1$.

3. Интегрированием по частям найдите асимптотические разложения при $x\to+\infty$ следующих функций:

a) $\Gamma_s(x)=\int\limits_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$ — *неполная гамма-функция*;

b) $\operatorname{erf}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt$ — *функция вероятности ошибок* $\left(\text{напомним, что } \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi} \text{ — интеграл Эйлера — Пуассона}\right)$;

c) $F(x)=\int\limits_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^\alpha}\,dt$, если $\alpha>0$.

4. Используя результат предшествующей задачи, найдите асимптотические разложения при $x\to+\infty$ следующих функций:

a) $\operatorname{Si}(x)=\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt$ — *интегральный синус* $\left(\text{напомним, что } \int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2} \text{ — интеграл Дирихле}\right)$;

b) $C(x)=\int\limits_c^x \cos\frac{\pi}{2}t^2\,dt$, $S(x)=\int\limits_0^x \sin\frac{\pi}{2}t^2\,dt$ — *интегралы Френеля* (напомним, что $\int\limits_0^{+\infty}\cos x^2\,dx=\int\limits_0^{\infty}\sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$).

5. Эрдейи *) принадлежит следующее обобщение введенного Пуанкаре и рассмотренного выше понятия разложения по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$.

Пусть X — множество, $\mathscr{B}$ — база в X, $\{\varphi_n(x)\}$ — асимптотическая при базе $\mathscr{B}$ последовательность функций на X. Если заданные на X функции $f(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... таковы, что для любого $n=0, 1, \ldots$ имеет место равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\psi_k(x)+o(\varphi_n(x)) \text{ при базе } \mathscr{B},$$

то пишут

$$f(x)\simeq\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x),\quad \{\varphi_n(x)\} \text{ при базе } \mathscr{B}$$

и говорят, что имеется *асимптотическое в смысле Эрдейи разложение* функции f при базе $\mathscr{B}$.

a. Обратите внимание на то, что в задаче 4 вы получили разложения асимптотические в смысле Эрдейи, если считать $\varphi_n(x)=x^{-n}$, $n=0, 1, \ldots$

b. Покажите, что асимптотические в смысле Эрдейи разложения не обладают свойством единственности (функции ψ_n можно менять).

c. Покажите, что если заданы множество X, база $\mathscr{B}$ в X, функция f на X и последовательности $\{\mu_n(x)\}$ и $\{\varphi_n(x)\}$, вторая из которых является асимптотической при базе $\mathscr{B}$, то разложение

$$f(x)\simeq\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mu_n(x),\ \{\varphi_n(x)\} \text{ при базе } \mathscr{B},$$

где a_n — числовые коэффициенты, либо вообще невозможно, либо единственно.

6. *Равномерные асимптотические оценки.*

Пусть X — множество, $\mathscr{B}_X$ — база в X, и пусть $f(x, y)$, $g(x, y)$ — определенные на множестве X и зависящие от параметра $y\in Y$ (векторнозначные) функции. Положим $|f(x, y)|=\alpha(x, y)|g(x, y)|$. Говорят, что асимптотические соотношения

$$f(x, y)=o(g(x, y)),\quad f(x, y)=O(g(x, y)),\quad f(x, y)\sim g(x, y)$$

при базе $\mathscr{B}_X$ *равномерны по параметру y на множестве* Y, если соответственно $\alpha(x, y)\rightrightarrows 0$ на Y при базе $\mathscr{B}_X$, $\alpha(x, y)$ равномерно по $y\in Y$ финально ограничена при базе $\mathscr{B}_X$ и, наконец, $\alpha(x, y)\rightrightarrows 1$ на Y при базе $\mathscr{B}_X$.

Покажите, что если в множестве $X\times Y$ ввести базу $\mathscr{B}=\{B_x\times Y\}$, элементы которой суть прямые произведения элементов B_x базы $\mathscr{B}_X$ и множества Y, то указанные определения соответственно равносильны тому, что

$$f(x, y)=o(g(x, y)),\quad f(x, y)=O(g(x, y)),\quad f(x, y)\sim g(x, y)$$

при базе $\mathscr{B}$.

*) А. Эрдейи (1908) — английский математик.

7. *Равномерные асимптотические разложения.*

Асимптотическое разложение

$$f(x,\ y) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)\,\varphi_n(x) \text{ при базе } \mathcal{B}_X$$

называется *равномерным относительно параметра y на множестве Y*, если в равенствах

$$f(x,\ y) = \sum_{k=0}^{n} a_k(y)\,\varphi_k(x) + r_n(x,\ y), \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots,$$

имеет место равномерная по $y \in Y$ оценка $r_n(x,\ y) = o(\varphi_n(x))$ при базе $\mathcal{B}_X$ в множестве X.

a. Пусть Y — измеримое (ограниченное) множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть при каждом фиксированном значении $x \in X$ функции $f(x,\ y)$, $a_0(y)$, $a_0(y)$, ... интегрируемы на Y. Покажите, что если при этих условиях асимптотическое разложение $f(x,\ y) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(y)\,\varphi_n(x)$ при базе $\mathcal{B}_X$ равномерно по параметру $y \in Y$, то справедливо также асимптотическое разложение

$$\int_Y f(x,\ y)\,dy \simeq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_Y a_n(y)\,dy\right)\varphi_n(x) \text{ при базе } \mathcal{B}_X.$$

b. Пусть $Y = [c,\ d] \subset \mathbb{R}$. Предположим, что функция $f(x,\ y)$ при каждом фиксированном $x \in X$ непрерывно дифференцируема по y на отрезке Y и при некотором $y_0 \in Y$ допускает асимптотическое разложение

$$f(x,\ y_0) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y_0)\,\varphi_n(x) \text{ при базе } \mathcal{B}_X.$$

Докажите, что если при этом имеет место равномерное по $y \in Y$ асимптотическое разложение

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(y)\,\varphi_n(x) \text{ при базе } \mathcal{B}_X$$

с непрерывными по y коэффициентами $\alpha_n(y)$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$, то исходная функция $f(x,\ y)$ имеет асимптотическое разложение $f(x,\ y) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(y)\,\varphi_n(x)$ при базе $\mathcal{B}_X$, равномерное по $y \in Y$, его коэффициенты $a_n(y)$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$, гладко на промежутке Y зависят от y и $\frac{da_n}{dy}(y) = \alpha_n(y)$

8. Пусть $p(x)$ — гладкая, положительная на отрезке $c \leq x \leq d$ функция.

a Решите уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ \lambda) = \lambda^2 p(x)\,u(x,\ \lambda)$ в случае, когда $p(x) \equiv 1$ на $[c,\ d]$.

b. Пусть $0 < m \leq p(x) \leq M < +\infty$ на $[c,\ d]$, и пусть $u(c,\ \lambda) = 1$, $\frac{\partial u}{\partial x}(c,\ \lambda) = 0$ Оцените снизу и сверху величину $u(x,\ \lambda)$ при $x \in [c,\ d]$.

с. Считая, что $\ln u(x, \lambda) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x)\lambda^{1-n}$ при $\lambda \to +\infty$, где $c_0(x)$, $c_1(x)$ — гладкие функции, и, пользуясь тем, что $\left(\frac{u'}{u}\right)' = \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2$, покажите, что $c_0'^2(x) = p(x)$ и $\left(c''_{n-1} + \sum\limits_{k=0}^{n} c'_k \cdot c'_{n-k}\right)(x) = 0$

§ 2. Асимптотика интегралов (метод Лапласа)

1. Идея метода Лапласа. В этом параграфе будет изложен метод Лапласа — один из немногих достаточно общих методов построения асимптотики интеграла, зависящего от параметра. Мы ограничимся рассмотрением интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)\, e^{\lambda S(x)}\, dx, \tag{1}$$

где $S(x)$ — вещественнозначная функция, а λ — параметр. Такие интегралы обычно называют *интегралами Лапласа.*

Пример 1. *Преобразование Лапласа*

$$L(f)(\xi) = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-\xi x}\, dx$$

является частным случаем интеграла Лапласа.

Пример 2. Сам Лаплас применял свой метод к интегралам вида $\int\limits_a^b f(x)\,\varphi^n(x)\,dx$, где $n \in \mathbb{N}$, а $\varphi(x) > 0$ на $]a, b[$. Такой интеграл тоже является частным случаем общего интеграла Лапласа (1), поскольку $\varphi^n(x) = \exp(n \ln \varphi(x))$.

Нас будет интересовать асимптотика интеграла (1) при больших значениях параметра λ, точнее, при $\lambda \to +\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Чтобы при описании основной идеи метода Лапласа не отвлекаться на второстепенные детали, будем считать, что в интеграле (1) $[a, b] = I$ — конечный отрезок, функции $f(x)$ и $S(x)$ гладкие на I, причем $S(x)$ имеет единственный и притом строгий максимум $S(x_0)$ в точке $x_0 \in I$. Тогда функция $\exp(\lambda S(x))$ тоже имеет строгий максимум в точке x_0, который тем более резко возвышается над остальными значениями этой функции на отрезке I, чем больше значение параметра λ. В результате, если $f(x) \not\equiv 0$ в окрестности x_0, то весь интеграл (1) можно заменить интегралом по сколь угодно малой окрестности точки x_0, допуская при этом относительную погрешность, стремящуюся к нулю при $\lambda \to +\infty$. Это наблюдение называется *принципом локализации.* Обращая историческую последовательность событий, можно было бы сказать, что этот принцип локализации для интегралов Лапласа очень напоминает принцип локального действия δ-образных семейств функций и самой δ-функции.

Теперь, когда интеграл берется только по малой окрестности точки x_0, функции $f(x)$ и $S(x)$ можно заменить главными членами их тейлоровских разложений при $I \ni x \to x_0$.

Остается найти асимптотику получаемого канонического интеграла, что делается без особого труда.

В последовательном выполнении этих этапов и состоит по существу метод Лапласа отыскания асимптотики интеграла.

Пример 3 Пусть $x_0 = a$, $S'(a) \neq 0$ и $f(a) \neq 0$, что бывает, например, когда функция $S(x)$ монотонно убывает на отрезке $[a, b]$. При этих условиях $f(x) = f(a) + o(1)$ и $S(x) = S(a) + (x-a)S'(a) + o(1)$, когда $I \ni x \to a$. Реализуя идею метода Лапласа, при малом $\varepsilon > 0$ и $\lambda \to +\infty$ находим, что

$$F(\lambda) \sim \int_a^{a+\varepsilon} f(x) e^{\lambda S(x)}\,dx \sim f(a) e^{\lambda S(a)} \int_0^{\varepsilon} e^{\lambda t S'(a)}\,dt =$$

$$= -\frac{f(a) e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)} \left(1 - e^{\lambda S'(a)\varepsilon}\right).$$

Поскольку $S'(a) < 0$, отсюда следует, что в рассматриваемом случае

$$F(\lambda) \sim -\frac{f(a) e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)} \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty. \tag{2}$$

Пример 4. Пусть $a < x_0 < b$. Тогда $S'(x_0) = 0$, и мы предположим, что $S''(x_0) \neq 0$, т. е. $S''(x_0) < 0$, поскольку x_0 — точка максимума.

Используя разложения $f(x) = f(x_0) + o(x - x_0)$ и $S(x) = S(x_0) + \frac{1}{2} S''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$, справедливые при $x \to x_0$, находим, что при малом $\varepsilon > 0$ и $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) \sim \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x) e^{\lambda S(x)}\,dx \sim f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{1}{2}\lambda S''(x_0) t^2}\,dt.$$

Выполнив в последнем интеграле замену переменной $\frac{1}{2}\lambda S''(x_0) t^2 = -u^2$ (ведь $S''(x_0) < 0$), получаем

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{1}{2}\lambda S''(x_0) t^2}\,dt = \sqrt{-\frac{2}{\lambda S''(x_0)}} \int_{-\varphi(\lambda, \varepsilon)}^{\varphi(\lambda, \varepsilon)} e^{-u^2}\,du,$$

где $\varphi(\lambda, \varepsilon) = \sqrt{-\frac{\lambda S''(x_0)}{2}}\,\varepsilon \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$.

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi},$$

находим теперь главный член асимптотики интеграла Лапласа в рассматриваемом случае:

$$F(\lambda) \sim \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}\, f(x_0)\, e^{\lambda S(x_0)} \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty. \tag{3}$$

Пример 5. Если $x_0 = a$, но $S'(x_0) = 0$ и $S''(x_0) < 0$, то, рассуждая, как и в примере 4, на сей раз получим, что

$$F(\lambda) \sim \int_a^{a+\varepsilon} f(x)\, e^{\lambda S(x)}\, dx \sim f(x_0)\, e^{\lambda S(x_0)} \int_0^{\varepsilon} e^{\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)\, t^2}\, dt,$$

и, значит,

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}\, f(x_0)\, e^{\lambda S(x_0)} \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty. \tag{4}$$

Мы получили на эвристическом уровне три наиболее употребительные формулы (2) — (4), относящиеся к асимптотике интеграла (1) Лапласа.

Из приведенных рассмотрений ясно, что метод Лапласа с успехом можно использовать при исследовании асимптотики любого интеграла

$$\int_X f(x, \lambda)\, dx \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty, \tag{5}$$

если: a) для этого интеграла имеет место принцип локализации (т. е. весь интеграл можно заменить эквивалентным ему при $\lambda \to +\infty$ интегралом, взятым по сколь угодно малым окрестностям некоторых выделенных точек) и b) если в локализованном интеграле подынтегральную функцию удается заменить более простой, для которой асимптотика, с одной стороны, совпадает с искомой, а с другой стороны, легко находится.

Если, например, в интеграле (1) функция $S(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ несколько точек локального максимума $x_0, x_1, \ldots, x_n$, то, используя аддитивность интеграла, заменим его с малой относительной погрешностью суммой таких же интегралов, но взятых по столь малым окрестностям $U(x_j)$ точек максимума $x_0, x_1, \ldots, x_n$, что в них содержится только по одной такой точке. Асимптотика интеграла

$$\int_{U(x_j)} f(x)\, e^{\lambda S(x)}\, dx \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty,$$

как уже говорилось, не зависит от величины самой окрестности $U(x_j)$ и потому асимптотическое разложение этого интеграла при $\lambda \to +\infty$ обозначают символом $F(\lambda, x_j)$ и называют *вкладом точки x_j в асимптотику интеграла* (1).

Принцип локализации в его общей формулировке, таким образом, означает, что асимптотика интеграла (5) получается как сумма

$\sum\limits_j F(\lambda, x_j)$ вкладов всех критических в том или ином отношении точек подынтегральной функции.

Для интеграла (1) это точки максимума функции $S(x)$ и, как видно из формул (2) — (4), основной вклад вносят только те точки локального максимума, в которых достигается значение абсолютного максимума функции $S(x)$ на отрезке $[a, b]$.

В следующих пунктах этого параграфа мы разовьем высказанные здесь общие соображения и затем рассмотрим некоторые полезные приложения метода Лапласа.

2. Принцип локализации для интеграла Лапласа.

Лемма 1 (об экспоненциальной оценке). *Пусть* $M = \sup\limits_{a<x<b} S(x) < \infty$, *и пусть при некотором значении* $\lambda_0 > 0$ *интеграл* (1) *сходится абсолютно. Тогда он сходится абсолютно при любом* $\lambda \geq \lambda_0$ *и имеет место оценка*

$$|F(\lambda)| \leq \int_a^b |f(x)\, e^{\lambda S(x)}|\, dx \leq A e^{\lambda M} \quad (\lambda \geq \lambda_0), \tag{6}$$

где $A \in \mathbb{R}$.

◀ Действительно, при $\lambda \geq \lambda_0$

$$|F(\lambda)| = \left|\int_a^b f(x)\, e^{\lambda S(x)}\, dx\right| = \left|\int_a^b f(x)\, e^{\lambda_0 S(x)} e^{(\lambda-\lambda_0) S(x)}\, dx\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x)\, e^{\lambda_0 S(x)}|\, dx e^{(\lambda-\lambda_0) M} = \left(e^{-\lambda_0 M} \int_a^b |f(x)\, e^{\lambda_0 S(x)}|\, dx\right) e^{\lambda M}. \ ▶$$

Лемма 2 (об оценке вклада точки максимума). *Пусть интеграл* (1) *сходится абсолютно при некотором значении* $\lambda = \lambda_0$, *и пусть внутри или на границе промежутка* I *интегрирования нашлась такая точка* x_0, *в которой* $S(x_0) = \sup\limits_{a<x<b} S(x) = M$. *Если функции* $f(x)$ *и* $S(x)$ *непрерывны в точке* x_0, *причем* $f(x_0) \neq 0$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *и любой достаточно малой окрестности* $U_I(x_0)$ *точки* x_0 *в* I *имеет место оценка*

$$\left|\int_{U_I(x_0)} f(x)\, e^{\lambda S(x)}\, dx\right| \geq B e^{\lambda (S(x_0) - \varepsilon)} \tag{7}$$

с постоянной $B > 0$, *справедливая при* $\lambda \geq \max\{\lambda_0, 0\}$.

◀ При фиксированном $\varepsilon > 0$ возьмем любую окрестность $U_I(x_0)$, в пределах которой $|f(x)| \geq \frac{1}{2}|f(x_0)|$ и $S(x_0) - \varepsilon \leq S(x) \leq S(x_0)$. Считая f вещественнозначной, можем заключить теперь, что в пределах $U_I(x)$ значения функции f одного знака. Это позволяет записать, что

$$\left|\int\limits_{U_I(x_0)} f(x) e^{\lambda S(x)}\,dx\right| = \int\limits_{U_I(x_0)} |f(x)|\, e^{\lambda S(x)}\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{U_I(x_0)} \frac{1}{2}\,|f(x_0)|\, e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}\,dx = Be^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}. \ ►$$

Утверждение 1 (принцип локализации). *Пусть интеграл (1) сходится абсолютно при некотором значении $\lambda=\lambda_0$, и пусть внутри или на границе промежутка I интегрирования нашлась такая точка x_0, что вне любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0*

$$\sup_{I\setminus U(x_0)} S(x) < S(x_0).$$

Если при этом функции $f(x)$, $S(x)$ непрерывны в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то

$$F(\lambda) = F_{U_I(x_0)}(\lambda)\,(1+O(\lambda^{-\infty})) \quad \text{при} \quad \lambda\to+\infty, \tag{8}$$

где $U_I(x_0)$ — произвольная окрестность x_0 в I,

$$F_{U_I(x_0)}(\lambda) := \int\limits_{U_I(x_0)} f(x)\, e^{\lambda S(x)}\,dx,$$

а $O(\lambda^{-\infty})$ — функция, которая есть $o(\lambda^{-n})$ при $\lambda\to+\infty$ и любом $n\in\mathbb{N}$.

◄ Пусть $V_I(x_0)$ — такая окрестность точки x_0 в I, в пределах которой функция $f(x)$ всюду положительна или всюду отрицательна в соответствии со значением $f(x_0)$. Тогда, очевидно,

$$\left|\int\limits_{V_I(x_0)} f(x)\, e^{\lambda S(x)}\,dx\right| \geqslant \left|\int\limits_{U_I(x_0)} f(x)\, e^{\lambda S(x)}\,dx\right|,$$

какова бы ни была окрестность $U_I(x_0)\subset V_I(x_0)$. Из леммы 2 теперь следует, что, каково бы ни было $\varepsilon>0$, найдется такая постоянная $B>0$, что

$$\left|\int\limits_{V_I(x_0)} f(x)\, e^{\lambda S(x)}\,dx\right| \geqslant Be^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)} \quad \text{при} \quad \lambda\to+\infty.$$

Тем самым мы доказали, что если в пределах окрестности $U_I(x_0)$ точки x_0 функция $f(x)$ не меняет знака, то, каково бы ни было число $\varepsilon>0$ при $\lambda\to+\infty$ финально выполняется неравенство

$$|F_{U_I(x_0)}(\lambda)| > e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}. \tag{9}$$

Вместе с тем в силу леммы 1 для любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 справедлива оценка

$$\int\limits_{I\setminus U(x_0)} |f(x)|\, e^{\lambda S(x)}\,dx \leqslant Ae^{\lambda\mu} \quad \text{при} \quad \lambda\to+\infty, \tag{10}$$

где $A>0$ и $\mu = \sup\limits_{x\in I\setminus U(x_0)} S(x) < S(x)$.

Сопоставляя эту оценку с неравенством (9), легко заключить, что оно финально при $\lambda \to +\infty$ имеет место на самом-то деле для любой окрестности $U_I(x_0)$ точки x_0, а не только для такой, в пределах которой функция $f(x)$ не меняет знак.

Теперь остается написать, что

$$F(\lambda) = F_I(\lambda) = F_{U_I(x_0)}(\lambda) + F_{I \setminus U(x_0)}(\lambda),$$

и, сославшись на оценки (9), (10), заключить о справедливости соотношения (8). ▶

Итак, установлено, что с относительной погрешностью порядка $O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda \to +\infty$ можно, описывая асимптотику интеграла Лапласа (1), заменить его интегралом по сколь угодно малой окрестности $U_I(x_0)$ точки x_0 абсолютного максимума функции $S(x)$ на промежутке интегрирования I.

3. Канонические интегралы и их асимптотика.

Лемма 3. *Если вещественнозначная функция $S(x)$ в окрестности (полуокрестности) точки $x_0 \in \mathbb{R}$ принадлежит классу гладкости $C^{(n+k)}$, причем*

$$S'(x_0) = \ldots = S^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad S^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

а $k \in \mathbb{N}$ или $k = \infty$, то существуют такие окрестности (полуокрестности) I_x точки x_0, I_y точки 0 в $\mathbb{R}$ и такой диффеоморфизм $\varphi \in C^{(k)}(I_y, I_x)$, что

$$S(\varphi(y)) = S(x_0) + sy^n, \text{ когда } y \in I_y \text{ и } s = \operatorname{sgn} S^{(n)}(x_0).$$

При этом

$$\varphi(0) = x_0 \quad \text{и} \quad \varphi'(0) = \left(\frac{n!}{|S^{(n)}(x_0)|}\right)^{1/n}.$$

◀ Воспользовавшись формулой Тейлора

$$S(x_0 + h) = S(x_0) + \frac{1}{n!}\int_0^1 S^{(n)}(x_0 + ht)\, h^n\, dt$$

и теоремой о дифференцировании интеграла

$$r(x) = \frac{1}{n!}\int_0^1 S^{(n)}(x_0 + (x - x_0)t)\, dt$$

по параметру x, представим разность $S(x) - S(x_0)$ в виде

$$S(x) - S(x_0) = (x - x_0)^n r(x),$$

где $r(x)$ — функция класса гладкости $C^{(k)}$, причем $r(x_0) = \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0) \neq 0$. Значит, функция $y = \psi(x) = (x - x_0)\sqrt[n]{|r(x)|}$

в некоторой окрестности (полуокрестности) I_x точки x_0 также принадлежит классу гладкости $C^{(k)}$ и даже монотонна, поскольку

$$\psi'(x_0)=\sqrt[n]{|r(x_0)|}=\left(\frac{|S^{(n)}(x_0)|}{n!}\right)^{1/n}\neq 0.$$

В таком случае рассматриваемая на I_x функция ψ имеет обратную функцию $\psi^{-1}=\varphi$, определенную на промежутке $I_y=\psi(I_x)$, содержащем точку $0=\psi(x_0)$.

Функция $x=\varphi(y)$ принадлежит классу $C^{(k)}(I_y, I_x)$, поскольку $\psi\in C^{(k)}(I_x, I_y)$ и $\psi'(x)\neq 0$ на I_x. Далее, $\varphi'(0)=(\psi'(x_0))^{-1}=$ $=\left(\frac{n!}{|S^{(n)}(x_0)|}\right)^{1/n}$. Наконец, по самому построению $S(\varphi(y))=S(x_0)+$ $+sy^n$, где $s=\operatorname{sgn} r(x_0)=\operatorname{sgn} S^{(n)}(x_0)$.

Замечание 1. Наибольший интерес представляют обычно следующие случаи: $n=1$ или 2, а $k=1$ или ∞.

Утверждение 2 (о редукции). *Пусть в интеграле* (1) *отрезок интегрирования* $I=[a, b]$ *конечный и выполнены следующие условия:*

a) $f, S\in C(I, \mathbb{R})$;

b) $\max\limits_{x\in I} S(x)$ *достигается только в одной точке* $x_0\in I$;

c) $S\in C^{(\infty)}(U_I(x_0), \mathbb{R})$ *в некоторой окрестности* $U_I(x_0)$ *точки* x_0 *(рассматриваемой в пределах промежутка* I*)*;

d) $S^{(n)}(x_0)\neq 0$, *и если* $1<n$, *то* $S^{(1)}(x_0)=\ldots=S^{(n-1)}(x_0)=0$.

Тогда при $\lambda\to+\infty$ *интеграл* (1) *с погрешностью, определяемой принципом локализации* (8), *может быть заменен интегралом вида*

$$R(\lambda)=e^{\lambda S(x_0)}\int_{I_y} r(y)e^{-\lambda y^n}\,dy,$$

где $I_y=[-\varepsilon, \varepsilon]$, *или* $I_y=[0, \varepsilon]$, ε — *сколь угодно малое положительное число, а функция* r *того же класса гладкости на* I_y, *что и функция* f *в окрестности точки* x_0.

◀ Используя принцип локализации, заменим интеграл (1) интегралом по такой окрестности $I_x=U_I(x_0)$ точки x_0, в которой выполнены условия леммы 3. Сделав замену переменной $x=\varphi(y)$, получим

$$\int_{I_x} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx=\left(\int_{I_y} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{-\lambda y^n}\,dy\right)e^{\lambda S(x_0)}. \tag{11}$$

Знак минус в показателе $(-\lambda y^n)$ связан с тем, что по условию $x_0=\varphi(0)$ есть точка максимума.. ▶

Асимптотику канонических интегралов, к которым в основных случаях приводится интеграл Лапласа (1) дает

Лемма 4 (лемма Ватсона *)). *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < a \leqslant \infty$ *и* $f \in C([0, a], \mathbb{R})$. *Тогда относительно асимптотики интеграла*

$$W(\lambda) = \int_0^a x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx \tag{12}$$

при $\lambda \to +\infty$ *справедливы следующие утверждения:*

a) *Главный член асимптотики интеграла* (12) *имеет вид*

$$W(\lambda) = \frac{1}{\alpha} f(0) \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}} + O\left(\lambda^{-\frac{\beta+1}{\alpha}}\right), \tag{13}$$

если известно, что $f(x) = f(0) + O(x)$ *при* $x \to 0$.

b) *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + O(x^{n+1})$ *при* $x \to 0$, *то*

$$W(\lambda) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}} + O\left(\lambda^{-\frac{n+\beta+1}{\alpha}}\right). \tag{14}$$

c) *Если* f — *бесконечно дифференцируема при* $x = 0$, *то имеет место асимптотическое разложение*

$$W(\lambda) \simeq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}, \tag{15}$$

которое можно дифференцировать по λ *любое число раз.*

◀ Представим интеграл (12) в виде суммы интегралов по промежуткам $]0, \varepsilon]$ и $[\varepsilon, a[$, где ε — сколь угодно малое положительное число.

По лемме 1

$$\left| \int_\varepsilon^a x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx \right| \leqslant A e^{-\lambda \varepsilon^\alpha} = O(\lambda^{-\infty}) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty,$$

поэтому

$$W(\lambda) = \int_0^\varepsilon x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx + O(\lambda^{-\infty}) \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

В случае b) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + r_n(x)$, где $r_n \in C[0, \varepsilon]$ и $|r_n(x)| \leqslant$ $\leqslant Cx^{n+1}$ на отрезке $[0, \varepsilon]$. Значит,

$$W(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^\varepsilon x^{k+\beta-1} e^{-\lambda x^\alpha} dx + c(\lambda) \int_0^\varepsilon x^{n+\beta} e^{-\lambda x^\alpha} dx + o(\lambda^{-\infty}),$$

где $c(\lambda)$ — ограниченная величина при $\lambda \to +\infty$.

*) Д. Н. Ватсон (Уотсон) (1886—1965) — английский математик.

По лемме 1 при $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^{\varepsilon} x^{k+\beta-1} e^{-\lambda x^{\alpha}}\, dx = \int_0^{+\infty} x^{k+\beta-1} e^{-\lambda x^{\alpha}}\, dx + O(\lambda^{-\infty}).$$

Но

$$\int_0^{+\infty} x^{k+\beta-1} e^{-\lambda x^{\alpha}}\, dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right)\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}},$$

откуда теперь и следует формула (14) и ее частный случай — формула (13).

Разложение (15) вытекает из равенства (14) и формулы Тейлора.

Возможность дифференцировать разложение (15) по λ следует из того, что производная интеграла (12) по параметру λ есть интеграл того же типа (12) и для $W'(\lambda)$ можно в соответствии с формулой (15) предъявить в явном виде асимптотическое разложение при $\lambda \to +\infty$, совпадающее с тем, которое получается формальным дифференцированием исходного разложения (15). ▶

Пример 6. Рассмотрим преобразование Лапласа

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-\lambda x}\, dx,$$

уже встречавшееся нам в примере 1. Если этот интеграл сходится абсолютно при некотором значении $\lambda = \lambda_0$, а функция f бесконечно дифференцируема при $x = 0$, то по формуле (15) находим, что

$$F(\lambda) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\, \lambda^{-(k+1)} \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty.$$

4. Главный член асимптотики интеграла Лапласа.

Теорема 1 (о типичном главном члене асимптотики). *Пусть в интеграле* (1) *отрезок интегрирования* $I = [a, b]$ *конечный,* $f, S \in C(I, \mathbb{R})$ *и* $\max_{x \in I} S(x)$ *достигается только в одной точке* $x_0 \in I$.

Пусть также известно, что $f(x_0) \neq 0$, $f(x) = f(x_0) + O(x - x_0)$ *при* $I \ni x \to x_0$, *а функция* S *принадлежит классу гладкости* $C^{(k)}$ *в окрестности точки* x_0.

Тогда:

a) *если* $x_0 = a$, $k = 2$ *и* $S'(x_0) \neq 0$ (*т. е.* $S'(x_0) < 0$), *то*

$$F(\lambda) = \frac{f(x_0)}{-S'(x)}\, e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-1}[1 + O(\lambda^{-1})] \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty;$$

b) *если* $a < x_0 < b$, $k = 3$ *и* $S''(x_0) \neq 0$ (*т. е.* $S''(x_0) < 0$), *то*

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}}\, f(x_0)\, e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-1/2}[1 + O(\lambda^{-1/2})] \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty;$$

c) *если* $x_0=a$, $k=3$, $S'(a)=0$ *и* $S''(a)\neq 0$ (*т. е.* $S''(a)<0$), *то*

$$F(\lambda)=\sqrt{\frac{\pi}{-2S''(x_0)}}\,f(x_0)\,e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-1/2}[1+O(\lambda^{-1/2})] \quad \textit{при} \quad \lambda\to+\infty.$$

◀ Используя принцип локализации и делая замену переменной $x=\varphi(y)$, указанную в лемме 3, придем, согласно утверждению 2, о редукции к следующим соотношениям:

a) $F(\lambda)=e^{\lambda S(x_0)}\left(\int\limits_0^{\varepsilon}(f\circ\varphi)(y)\,\varphi'(y)\,e^{-\lambda y}\,dy+O(\lambda^{-\infty})\right)$;

b) $F(\lambda)=e^{\lambda S(x_0)}\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(f\circ\varphi)(y)\,\varphi'(y)\,e^{-\lambda y^2}\,dy+O(\lambda^{-\infty})\right)=$

$$=e^{-\lambda S(x_0)}\left(\int\limits_0^{\varepsilon}((f\circ\varphi)(y)\,\varphi'(y)+(f\circ\varphi)(-y)\,\varphi'(-y))e^{-\lambda y^2}dy+O(\lambda^{-\infty})\right),$$

c) $F(\lambda)=e^{\lambda S(x_0)}\left(\int\limits_0^{\varepsilon}(f\circ\varphi)(y)\,\varphi'(y)\,e^{-\lambda y^2}\,dy+O(\lambda^{-\infty})\right)$.

Функция $(f\circ\varphi)\varphi'$ при сформулированных выше требованиях удовлетворяет условиям леммы Ватсона. Остается применить лемму Ватсона (формула (14) при $n=0$) и вспомнить выражения для $\varphi(0)$ и $\varphi'(0)$, указанные в лемме 3. ▶

Итак, мы обосновали формулы (2) — (4).

Рассмотрим некоторые примеры приложений доказанной теоремы.

Пример 7. *Асимптотика гамма-функции.* Функцию

$$\Gamma(\lambda+1)=\int\limits_0^{+\infty}t^{\lambda}e^{-t}\,dt \qquad (\lambda>-1)$$

можно представить в виде интеграла Лапласа

$$\Gamma(\lambda+1)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}e^{\lambda\ln t}\,dt,$$

и если при $\lambda>0$ сделать замену переменной $t=\lambda x$, то придем к интегралу

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda^{\lambda+1}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda(x-\ln x)}\,dx,$$

который можно исследовать средствами доказанной теоремы.

Функция $S(x)=\ln x-x$ имеет единственную точку максимума $x=1$ на промежутке $]0,+\infty[$, причем $S''(1)=-1$. На основании принципа локализации (утверждение 1) и утверждения b) теоремы 1 заключаем, что

$$\Gamma(\lambda+1)=\sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}[1+O(\lambda^{-1/2})] \quad \text{при} \quad \lambda\to+\infty.$$

В частности, вспоминая, что $\Gamma(n+1)=n!$ при $n\in\mathbb{N}$, получаем классическую *формулу Стирлинга* *)

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n[1+O(n^{-1/2})] \quad \text{при} \quad n\to\infty,\ n\in\mathbb{N}.$$

Пример 8. *Асимптотика функции Бесселя*

$$I_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos n\theta\,d\theta,$$

где $n\in\mathbb{N}$. Здесь $f(\theta)=\cos n\theta$, $S(\theta)=\cos\theta$, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi} S(\theta)=S(0)=1$, $S'(0)=0$, $S''(0)=-1$, поэтому на основе утверждения с) теоремы 1

$$I_n(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}[1+O(x^{-1/2})] \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

Пример 9. Пусть $f\in C^{(1)}([a,\ b],\ \mathbb{R})$, $S\in C^{(2)}([a,\ b],\ \mathbb{R})$, причем $S(x)>0$ на $[a,\ b]$ и $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} S(x)$ достигается только в одной точке $x_0\in[a,\ b]$. Если $f(x_0)\neq 0$, $S'(x_0)=0$ и $S''(x_0)\neq 0$, то, переписав интеграл

$$\mathcal{F}(\lambda)=\int\limits_a^b f(x)\,[S(x)]^\lambda\,dx$$

в форме интеграла Лапласа

$$\mathcal{F}(\lambda)=\int\limits_a^b f(x)\,e^{\lambda\ln S(x)}\,dx,$$

на основании утверждений b) и с) теоремы 1 получаем, что при $\lambda\to+\infty$

$$\mathcal{F}(\lambda)=\varepsilon f(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}}[S(x_0)]^{\lambda+1/2}\lambda^{-1/2}[1+O(\lambda^{-1/2})],$$

где $\varepsilon=1$, если $a<x_0<b$ и $\varepsilon=1/2$, если $x_0=a$ или $x_0=b$.

Пример 10. *Асимптотика полиномов Лежандра*

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^n d\theta$$

при $n\to\infty$, $n\in\mathbb{N}$, в области $x>1$ может быть получена как частный случай предыдущего примера, когда $f\equiv 1$,

$$S(\theta)=x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta, \qquad \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} S(\theta)=S(0)=x+\sqrt{x^2-1},$$
$$S'(0)=0, \quad S''(0)=-\sqrt{x^2-1}.$$

---

*) См. также задачу 10 к § 3 гл. VII.

Таким образом,

$$P_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1/2}}{\sqrt{2\pi n}\sqrt[4]{x^2-1}}\,[1+O(n^{-1/2})] \quad \text{при} \quad n\to\infty,\ n\in\mathbb{N}.$$

∗5. Асимптотические разложения интегралов Лапласа. Теорема 1 дает только главные члены характерной асимптотики интеграла Лапласа (1) и к тому же при условии, что $f(x_0)\neq 0$. В целом это, конечно, наиболее типичная ситуация, и поэтому теорема 1, несомненно, является ценным результатом. Однако уже лемма Ватсона показывает, что асимптотика интеграла Лапласа порой может быть доведена до асимптотического разложения. Такая возможность особенно важна, когда $f(x_0)=0$ и теорема 1 ничего не дает.

Совсем отбросить условие $f(x_0)\neq 0$, не заменив его ничем, разумеется, нельзя, оставаясь в рамках метода Лапласа: ведь если $f(x)\equiv 0$ в окрестности точки x_0 максимума функции $S(x)$ или если $f(x)$ очень быстро стремится к нулю при $x\to x_0$, то точка x_0 может и не быть ответственной за асимптотику интеграла. Теперь, когда в результате проведенных рассмотрений мы уже пришли к определенному типу $\{e^{\lambda c}\lambda^{-p_k}\}$ $(p_0<p_1<\ldots)$ последовательностей, асимптотических при $\lambda\to+\infty$, можно говорить об асимптотическом нуле по отношению к такой последовательности и, не предполагая, что $f(x_0)\neq 0$, можно следующим образом сформулировать принцип локализации: *асимптотика интеграла Лапласа* (1) *при $\lambda\to+\infty$ с точностью до асимптотического нуля по отношению к асимптотической последовательности $\{e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-p_k}\}$ $(p_0<p_1<\ldots)$ совпадает с асимптотикой порции этого интеграла, взятой по сколь угодно малой окрестности точки x_0, если это единственная точка максимума функции $S(x)$ на промежутке интегрирования.*

Мы не будем, однако, возвращаться к рассмотрению и уточнению этих вопросов, а, считая f и S функциями класса $C^{(\infty)}$, дадим вывод соответствующих асимптотических разложений, использующий лемму 1 об экспоненциальной оценке, лемму 3 о замене переменной и лемму 4 Ватсона.

Теорема 2 (об асимптотическом разложении). *Пусть $I=[a,b]$ — конечный отрезок, $f, S\in C(I,\mathbb{R})$, $\max\limits_{x\in I} S(x)$ достигается только в одной точке $x_0\in I$ и $f, S\in C^{(\infty)}(U_I(x_0),\mathbb{R})$ в некоторой окрестности $U_I(x_0)$ точки x_0. Тогда относительно асимптотики интеграла* (1) *справедливы следующие утверждения:*

а) *Если $x_0=a$, $S^{(m)}(a)\neq 0$, $S^{(j)}(a)=0$ для $1\leqslant j<m$, то*

$$F(\lambda)\simeq\lambda^{-1/m}e^{\lambda S(a)}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^{-k/m} \quad \textit{при} \quad \lambda\to+\infty, \tag{16}$$

где

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1} m^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right) \left(h(x, a) \frac{d}{dx}\right)^k (f(x) h(x, a)) \Big|_{x=a},$$

$$h(x, a) = (S(a) - S(x))^{1-1/m} / S'(x).$$

b) *Если* $a < x_0 < b$, $S^{(2m)}(x_0) \neq 0$, $S^{(j)}(x_0) = 0$ *для* $1 \leqslant j < 2m$, *то*

$$F(\lambda) \simeq \lambda^{-1/2m} e^{\lambda S(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^{-k/m} \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty, \tag{17}$$

где

$$c_k = 2 \frac{(-1)^{2k+1} (2m)^{2k}}{(2k)!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2m}\right) \left(h(x, x_0) \frac{d}{dx}\right)^{2k} (f(x) h(x, x_0)) \Big|_{x=x_0},$$

$$h(x, x_0) = (S(x_0) - S(x))^{1-\frac{1}{2m}} / S'(x).$$

c) *Если* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ *и* $f(x) \sim \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$ *при* $x \to x_0$, *то главный член асимптотики в случаях* a) *и* b) *соответственно имеет вид*

$$F(\lambda) = \frac{1}{m} \lambda^{-\frac{n+1}{m}} e^{\lambda S(a)} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) \left(\frac{m!}{|S^{(m)}(a)|}\right)^{\frac{n+1}{m}} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) + O\left(\lambda^{-\frac{n+1}{m}}\right)\right], \tag{18}$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{m} \lambda^{-\frac{n+1}{2m}} e^{\lambda S(x_0)} \Gamma\left(\frac{n+1}{2m}\right) \left(\frac{(2m)!}{|S^{(2m)}(x_0)|}\right)^{\frac{n+1}{2m}} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + O\left(\lambda^{-\frac{n+1}{2m}}\right)\right]. \tag{19}$$

d) *Разложения* (16), (17) *можно дифференцировать по* λ *любое число раз.*

◀ Из леммы 1 следует, что в наших условиях с точностью до величины вида $e^{\lambda S(a)} O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda \to \infty$ интеграл (1) можно заменить интегралом по сколь угодно малой окрестности точки x_0.

Сделав в такой окрестности замену переменной $x = \varphi(y)$, указанную в лемме 3, приведем последний интеграл к виду

$$e^{-\lambda S(x_0)} \int_{I_y} (f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) e^{-\lambda y^{\alpha}} dy, \tag{20}$$

где $I_y = [0, \varepsilon]$, $\alpha = m$, если $x_0 = a$ и $I_y = [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\alpha = 2m$, если $a < x_0 < b$.

Окрестность, в которой производилась замена $x = \varphi(y)$ можно считать столь малой, что обе функции f, S в ней бесконечно дифференцируемы. Тогда и полученную под знаком интеграла (20) функцию $(f \circ \varphi)(y) \varphi'(y)$ можно считать бесконечно дифференцируемой.

Если $\tilde{I}_y=[0, \varepsilon]$, т. е. в случае $x_0=a$, к интегралу (20) непосредственно применима лемма 4 Ватсона и наличие разложения (16) тем самым уже доказано.

Если же $I_y=[-\varepsilon, \varepsilon]$, т. е. в случае $a<x_0<b$, приводим интеграл (20) к виду

$$e^{-\lambda S(x_0)}\int\limits_0^{\varepsilon}[(f\circ\varphi)(y)\varphi'(y)+(f\circ\varphi)(-y)\varphi'(-y)]\,e^{-\lambda y^{2m}}\,dy \qquad (21)$$

и, вновь применяя лемму Ватсона, получаем разложение (17).

Возможность дифференцировать разложения (16), (17) следует из того, что при наших условиях интеграл (1) можно дифференцировать по λ, и при этом снова получается интеграл, удовлетворяющий условиям теоремы. Для него выписываются разложения (16), (17), и можно непосредственно убедиться в том, что эти разложения действительно совпадают с теми, которые получаются формальным дифференцированием разложений (16), (17) исходных интегралов.

Остановимся теперь на формулах для коэффициентов a_k и c_k. По лемме Ватсона $a_k=\frac{1}{k!\,m}\frac{d\Phi}{dy^k}(0)\,\Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right)$, где $\Phi(y)=(f\circ\varphi)(y)\varphi'(y)$.

Учитывая, однако, что

$$S(\varphi(y))-S(a)=-y^m,$$
$$S'(x)\varphi'(y)=-my^{m-1},$$
$$\varphi'(y)=-m\,(S(a)-S(x))^{1-\frac{1}{m}}/S'(x),$$
$$\frac{d}{dy}=\varphi'(y)\frac{d}{dx},$$
$$\Phi(y)=f(x)\varphi'(y),$$

получаем

$$\frac{d^k\Phi}{dy^k}(0)=(-m)^{k+1}\left(h(x-a)\frac{d}{dx}\right)^k(f(x)h(x, a))\big|_{x=a},$$

где $h(x, a)=(S(a)-S(x))^{1-\frac{1}{m}}/S'(x)$.

Аналогично получаются формулы для коэффициентов c_k применением леммы Ватсона к интегралу (21).

Полагая $\psi(y)=f(\varphi(y))\varphi'(y)+f(\varphi(-y))\varphi'(-y)$, можно записать, что при $\lambda\to+\infty$.

$$\int\limits_0^{\varepsilon}\psi(y)\,e^{-\lambda y^{2m}}\,dy\simeq\frac{1}{2m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2\cdot n}\right)\lambda^{-\frac{n+1}{2m}}.$$

Но, $\psi^{(2k+1)}(0)=0$ ввиду четности функции $\psi(y)$, поэтому последнее асимптотическое разложение можно переписать в виде

$$\int\limits_0^\varepsilon \psi(y)\, e^{-\lambda y^{2m}}\, dy \simeq \frac{1}{2m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi^{(2k)}(0)}{(2k)!}\,\Gamma\left(\frac{2k+1}{2m}\right)\lambda^{-\frac{2k+1}{2m}}.$$

Остается заметить, что $\psi^{(2k)}(0)=2\Phi^{(2k)}(0)$, где $\Phi(y)= = f(\varphi(y))\,\varphi'(y)=f(x)\,\varphi'(y)$. Теперь формула для c_k получается из уже установленной формулы коэффициента a_k заменой в ней k на $2k$ и удвоением результата такой подстановки.

Для получения главных членов (18), (19) асимптотических разложений (16), (17) при указанном в с) условии $f(x)= = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+O((x-x_0)^{n+1})$, где $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, достаточно вспомнить, что $x=\varphi(y)$, $x_0=\varphi(0)$, $x-x_0=\varphi'(0)\,y+O(y^2)$, т. е.

$$(f\circ\varphi)(y)=y^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\varphi'(0))^n+O(y)\right)$$

и

$$(f\circ\varphi)(y)\,\varphi'(y)=y^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\varphi'(0))^{n+1}+O(y)\right)$$

при $y\to 0$, поскольку $\varphi'(0)=\left(\frac{m!}{|S^{(m)}(a)|}\right)^{1/m}\neq 0$, если $x_0=a$ и $\varphi'(0)= = \left(\frac{(2m)!}{|S^{(2m)}(x_0)|}\right)^{1/2m}\neq 0$, если $a<x_0<b$.

Остается подставить полученные выражения соответственно в интегралы (20), (21) и воспользоваться формулой (13) из леммы Ватсона. ▶

Замечание 2. Из формулы (18) при $n=0$ и $m=1$ вновь получаем формулу (2′).

Аналогично из (19) при $n=0$ и $m=1$ получаем соотношение (3′).

Наконец, равенство (4′) получается из равенства (18) при $n=0$ и $m=2$.

Все это, разумеется, в условиях теоремы 2.

Замечание 3. Теорема 2 относится к случаю, когда функция $S(x)$ имеет на отрезке $I=[a,\,b]$ единственную точку максимума. Если же таких точек несколько $x_1,\ldots,x_n$, то интеграл (1) разбивают в сумму таких интегралов, асимптотика каждого из которых уже описывается теоремой 2. То есть в этом случае асимптотика получается как сумма $\sum\limits_{j=1}^{n}F(\lambda,\,x_j)$ вкладов указанных точек максимума.

Легко себе представить, что при этом могут произойти некоторые или даже полные взаимные уничтожения.

Пример 11. Если $S \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $S(x) \to -\infty$ при $x \to \infty$, то

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} S'(x) e^{\lambda S(x)} dx \equiv 0 \quad \text{при} \quad \lambda > 0.$$

Значит, в этом случае такая интерференция вкладов заведомо должна иметь место. С формальной точки зрения приведенный пример может показаться неубедительным, поскольку раньше речь шла о конечном отрезке интегрирования. Однако этот вопрос снимает следующее важное

Замечание 4. В теоремах 1 и 2 для облегчения и без того громоздких формулировок мы считали, что промежуток интегрирования I — конечный, а интеграл (1) — собственный. На самом же деле, если вне любой окрестности $U(x_0)$ точки максимума $x_0 \in I$ выполнено неравенство $\sup\limits_{I \setminus U(x_0)} S(x) < S(x_0)$, то лемма 1 уже позволяет заключить, что интегралы, взятые по промежуткам, лежащим вне $U(x_0)$, экспоненциально малы в сравнении с $e^{\lambda S(x_0)}$ при $\lambda \to +\infty$ (разумеется, при условии, что интеграл (1) абсолютно сходится хотя бы при некотором значении $\lambda = \lambda_0$).

Таким образом, и теорема 1, и теорема 2 применимы также к несобственным интегралам, если выполнены указанные только что условия.

Замечание 5. Полученные в теореме 2 формулы для коэффициентов ввиду их громоздкости обычно удается использовать лишь для получения нескольких первых членов асимптотики, нужных в конкретных вычислениях. Общий вид асимптотического разложения, более простой, чем указанный в теореме 2, по этим формулам для коэффициентов a_k, c_k, получить удается крайне редко. И все же такие ситуации встречаются. Рассмотрим для разъяснения самих формул следующие примеры.

Пример 12. Асимптотику функции

$$\operatorname{Erf}(x) = \int_{x}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

при $x \to +\infty$ легко получить интегрированием по частям:

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\int_{x}^{+\infty} u^{-2} e^{-u^2} du = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{3e^{-x^2}}{2^2 x^3} + \int_{x}^{+\infty} u^{-4} e^{-u^2} du = \ldots,$$

откуда после очевидных оценок следует, что

$$\operatorname{Erf}(x) \simeq \frac{e^{-x^2}}{2x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k} x^{-2k} \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{22}$$

Получим теперь это разложение, исходя из теоремы 2.

Сделав замену $u=xt$, приходим к представлению

$$\operatorname{Erf}(x)=x\int_1^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,dt.$$

Полагая здесь $\lambda=x^2$ и обозначая переменную интегрирования, как и в теореме 2, буквой x, сводим вопрос к отысканию асимптотики интеграла

$$F(\lambda)=\int_1^{\infty} e^{-\lambda x^2}\,dx, \tag{23}$$

поскольку $\operatorname{Erf}(x)=xF(x^2)$.

Интеграл (23) с учетом замечания 4 удовлетворяет условию теоремы 2: $S(x)=-x^2$, $S'(x)=-2x<0$ при $1\leqslant x<+\infty$, $S'(1)=-2$, $S(1)=-1$.

Итак, $x_0=a=1$, $m=1$, $f(x)\equiv 1$, $h(x,a)=\frac{1}{-2x}$, $h(x,a)\frac{d}{dx}=\frac{1}{-2x}\frac{d}{dx}$.

Значит,

$$\left(\frac{1}{-2x}\frac{d}{dx}\right)^0\left(-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{2x}=\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-1},$$

$$\left(\frac{1}{-2x}\frac{d}{dx}\right)^1\left(-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2x}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(-1)\,x^{-3},$$

$$\left(\frac{1}{-2x}\frac{d}{dx}\right)^2\left(-\frac{1}{2x}\right)=\left(-\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\right)^1\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2(-1)\,x^{-3}\right)=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^3(-1)(-3)\,x^{-5}$$

. . . .

$$\left(-\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\right)^k\left(-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}\,x^{-(2k+1)}.$$

Полагая $x=1$, находим, что

$$a_k=\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\Gamma(k+1)\left(-\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}\right)=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}.$$

Выписав теперь асимптотическое разложение (16) для интеграла (23), с учетом соотношения $\operatorname{Erf}(x)=xF(x^2)$, получаем разложение (22) для функции $\operatorname{Erf}(x)$ при $x\to+\infty$.

Пример 13. В примере 7, исходя из представления

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda^{\lambda+1}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x-\ln x)}\,dx, \tag{24}$$

мы получили главный член асимптотики функции $\Gamma(\lambda+1)$ при $\lambda\to+\infty$. Попробуем теперь, пользуясь теоремой 2b), уточнить найденную ранее формулу.

Для некоторого упрощения дальнейшей записи заменим в интеграле (24) x на $x-1$. Тогда получим, что

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\int_{-1}^{+\infty}e^{\lambda(\ln(1+x)-x)}\,dx,$$

и дело свелось к исследованию асимптотики интеграла

$$F(\lambda)=\int_{-1}^{+\infty}e^{\lambda(\ln(1-x)-x)}\,dx \tag{25}$$

при $\lambda\to+\infty$. Здесь $S(x)=\ln(1+x)-x$, $S'(x)=\frac{1}{1+x}-1$, $S'(0)=0$, т. е. $x_0=0$, $S''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $S''(0)=-1\neq 0$, т. е. с учетом замечания 4 выполнены условия b) теоремы 2, где надо положить еще $f(x)\equiv 1$ и $m=1$, так как $S''(0)\neq 0$.

Функция $h(x,\ x_0)=h(x)$ в данном случае имеет следующий вид:

$$h(x)=-\frac{1+x}{x}(x-\ln(1+x))^{1/2}.$$

Если мы хотим найти первые два члена асимптотики, то нам надо вычислить при $x=0$

$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^0(h(x))=h(x),$$

$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^1(h(x))=h(x)\frac{dh}{dx}(x),$$

$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^2(h(x))=\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)\left(h(x)\frac{dh}{dx}(x)\right)=$$
$$=h(x)\left[\left(\frac{dh}{dx}\right)^2(x)+h(x)\frac{d^2h}{dx}(x)\right].$$

Это вычисление, как видно, легко сделать, если найти значения $h(0)$, $h'(0)$, $h''(0)$, которые в свою очередь можно получить из тейлоровского разложения функции $h(x)$, $x\geqslant 0$ в окрестности нуля:

$$h(x)=-\frac{1+x}{x}\left[x-\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+O(x^5)\right)\right]^{1/2}=$$
$$=-\frac{1+x}{x}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+O(x^5)\right]^{1/2}=$$
$$=-\frac{1+x}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{4}x^4+O(x^3)\right]^{1/2}=$$
$$=-\frac{1+x}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{3}x+\frac{7}{36}x^2+O(x^3)\right)=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3}x+\frac{5}{36\sqrt{2}}x^2+O(x^3).$$

Таким образом, $h(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $h'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $h''(0) = \frac{5}{18\sqrt{2}}$,

$$\left(h(x)\frac{x}{dx}\right)^0 (h(x))\Big|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^1 (h(x))\Big|_{x=0} = \frac{1}{3},$$

$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^2 (h(x))\Big|_{x=0} = -\frac{1}{12\sqrt{2}},$$

$$c_0 = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2\pi},$$

$$c_1 = -2\frac{(2)^2}{2!}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{12\sqrt{2}}\right) = 4\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{12}.$$

Значит, при $\lambda \to \infty$

$$F(\lambda) = \sqrt{2\pi}\,\lambda^{-1/2}\left(1 + \frac{1}{12}\lambda^{-\lambda} + O(\lambda^{-2})\right),$$

т. е. при $\lambda \to +\infty$

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\left(1 + \frac{1}{12}\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2})\right). \tag{26}$$

Полезно иметь в виду, что асимптотические разложения (16), (17) можно находить также, следуя доказательству теоремы 2, без привлечения указанных в формулировке теорем 2 выражений для коэффициентов.

В качестве примера получим вновь, но несколько иначе, асимптотику интеграла (25).

Используя принцип локализации и делая в окрестности нуля замену $x = \varphi(y)$ такую, что $0 = \varphi(0)$, $S(\varphi(y)) = \ln(1+\varphi(y)) - \varphi(y) = -y^2$, сводим вопрос к исследованию асимптотики интеграла

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi'(y)\,e^{-\lambda y^2}\,dy = \int_0^{\varepsilon} \psi(y)\,e^{-\lambda y^2}\,dy,$$

где $\psi(y) = \varphi'(y) + \varphi'(-y)$. Асимптотическое разложение последнего интеграла получается на основании леммы Ватсона

$$\int_0^{\varepsilon} \psi(y)\,e^{-\lambda y^2}\,dy \simeq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\lambda^{-(k+1)/2} \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty,$$

что с учетом соотношений $\psi^{(2k+1)}(0) = 0$, $\psi^{(2k)}(0) = 2\varphi^{(2k+1)}(0)$ дает асимптотический ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k)!}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda^{-(k+1/2)} = \lambda^{-1/2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{k!\,2^{2k}}\lambda^{-k}.$$

Итак, для интеграла (25) получаем асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \simeq \lambda^{-1/2}\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{k!\,2^{2k}}\lambda^{-k}, \tag{27}$$

где $x=\varphi(y)$ такая гладкая функция, что $x-\ln(1+x)=y^2$ в окрестности нуля (по x и по y).

Если мы хотим найти первые два члена асимптотики, то в общую формулу (27) надо подставить конкретные значения $\varphi'(0)$ и $\varphi^{(3)}(0)$.

Быть может, не бесполезно продемонстрировать следующий прием для вычисления этих значений, который вообще можно использовать для получения тейлоровского разложения обратной функции по разложению прямой функции.

Считая, что $x>0$ при $y>0$ из соотношения

$$x-\ln(1+x)=y^2,$$

последовательно получаем

$$\frac{1}{2}x^2\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)\right)=y^2,$$

$$x=\sqrt{2}\,y\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)\right)^{-1/2}=$$

$$=\sqrt{2}\,y\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}x^2+O(x^3)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\,y+\frac{\sqrt{2}}{3}yx-\frac{\sqrt{2}}{12}yx^2+O(yx^3).$$

Но $x\sim\sqrt{2}y$ при $y\to 0$ $(x\to 0)$, поэтому, используя уже полученное представление x, можно продолжить эту выкладку и получить, что при $y\to 0$

$$x=\sqrt{2}y+\frac{\sqrt{2}}{3}y\left(\sqrt{2}y+\frac{\sqrt{2}}{3}yx+O(y^3)\right)-\frac{\sqrt{2}}{12}y\left(\sqrt{2}y\right)^2+O(y^4)=$$

$$=\sqrt{2}y+\frac{2}{3}y^2+\frac{2}{9}y^2x-\frac{\sqrt{2}}{6}y^3+O(y^4)=$$

$$=\sqrt{2}y+\frac{2}{3}y^2+\frac{2}{9}y^2\left(\sqrt{2}y\right)-\frac{\sqrt{2}}{6}y^3+O(y^4)=$$

$$=\sqrt{2}y+\frac{2}{3}y^2+\frac{\sqrt{2}}{18}y^3+O(y^4).$$

Таким образом, для интересующих нас величин $\varphi'(0)$, $\varphi^{(3)}(0)$ получаем следующие значения: $\varphi'(0)=\sqrt{2}$, $\varphi^{(3)}(0)=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Подставляя их в формулу (27), находим, что

$$F(\lambda)=\lambda^{-1/2}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12}\lambda^{-1}+O(\lambda^{-2})\right) \text{ при } \lambda\to+\infty,$$

откуда вновь можно получить формулу (26).

В заключение сделаем еще два замечания, относящиеся к обсуждаемым в этом параграфе вопросам.

Замечание 6 (о методе Лапласа в многомерном случае). Отметим, что метод Лапласа с успехом применяется и при исследовании асимптотики кратных интегралов Лапласа

$$F(\lambda)=\int_X f(x)\, e^{\lambda S(x)}\, dx,$$

в которых $x\in\mathbb{R}^n$, X — область в $\mathbb{R}^n$, f, S — вещественнозначные функции в X.

Для таких интегралов справедлива лемма 1 об экспоненциальной оценке, в силу которой исследование асимптотики такого интеграла сводится к исследованию асимптотики его порции

$$\int_{U(x_0)} f(x)\, e^{\lambda S(x)}\, dx,$$

взятой по окрестности точки x_0 максимума функции $S(x)$.

Если это невырожденный максимум, т. е. $S''(x_0)\neq 0$, то по лемме Морса (см. ч. I, гл. VIII, § 6) существует замена переменной $x=\varphi(y)$ такая, что $S(x_0)-S(\varphi(y))=|y|^2$, где $|y|^2=(y^1)^2+\ldots+(y^n)^2$. Тем самым дело сводится к каноническому интегралу

$$\int_I (f\circ\varphi)(y)\det\varphi'(y)\, e^{-\lambda|y|^2}\, dy,$$

который в случае гладких функций f, S, применяя теорему Фубини, можно исследовать, опираясь на доказанную выше лемму Ватсона (см. в этой связи задачи 8—11).

Замечание 7 (о методе стационарной фазы). Метод Лапласа в его расширенной трактовке, как мы уже отмечали, это:

1° определенный принцип локализации (лемма 1 об экспоненциальной оценке),

2° способ локального приведения интеграла к каноническому виду (лемма Морса) и

3° описание асимптотики канонических интегралов (лемма Ватсона).

Идея локализации нам уже ранее встречалась при изучении δ-образных семейств функций, а также при исследовании ряда и преобразования Фурье (лемма Римана, гладкость функции и скорость убывания ее преобразования Фурье, сходимость ряда и интеграла Фурье).

Важное место в математике и ее приложениях занимают интегралы вида

$$\tilde F(\lambda)=\int_X f(x)\, e^{i\lambda S(x)}\, dx,$$

где $X\subset\mathbb{R}^n$, называемые *интегралами Фурье* Интеграл Фурье отличается от интеграла Лапласа лишь скромным множителем i

в показателе. Это приводит, однако, к тому, что при вещественных λ и $S(x)$ получается $|e^{i\lambda S(x)}|=1$ и, значит, идея доминантного максимума при исследовании асимптотики интеграла Фурье непригодна.

Пусть $X=[a,\ b]\subset\mathbb{R}^1$, $f\in C_0^{(\infty)}([a,\ b],\ \mathbb{R})$ (т. е. f — финитна на $[a,\ b]$, $S\in C^{(\infty)}([a,\ b],\ \mathbb{R})$ и $S'(x)\neq 0$ на $[a,\ b]$.

Интегрируя по частям и используя лемму Римана (см. задачу 12), получаем, что

$$\int_a^b f(x)\,e^{i\lambda S(x)}\,dx=\frac{1}{i\lambda}\int_a^b \frac{f(x)}{S'(x)}\,de^{i\lambda S(x)}=$$

$$=-\frac{1}{i\lambda}\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{S'}\right)(x)\,e^{i\lambda S(x)}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_a^b f_1(x)\,e^{i\lambda S(x)}\,dx=\ldots=\frac{1}{\lambda^n}\int_a^b f_n(x)\,e^{i\lambda S(x)}\,dx=$$

$$=o(\lambda^{-n}),\ \text{при}\ \lambda\to\infty.$$

Таким образом, если $S'(0)\neq 0$ на отрезке $[a,\ b]$, то за счет все увеличивающейся при $\lambda\to\infty$ частоты осцилляции функции $e^{i\lambda S(x)}$ интеграл Фурье по отрезку $[a,\ b]$ оказывается величиной типа $O(\lambda^{-\infty})$.

Функция $S(x)$ в интеграле Фурье называется *фазовой функцией*. Таким образом, для интеграла Фурье имеет место свой принцип локализации, называемый *принципом стационарной фазы*. Согласно этому принципу асимптотика интеграла Фурье (в случае $f\in C_0^{(\infty)}$) с точностью до величины $O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda\to\infty$ совпадает с асимптотикой порции интеграла Фурье, взятой по окрестности $U(x_0)$ стационарной точки x_0 фазовой функции (т е точки x_0, в которой $S'(x_0)=0$)

После этого заменой переменной дело приводится к каноническому интегралу

$$E(\lambda)=\int_0^\varepsilon f(x)\,e^{i\lambda x^\alpha}\,dx,$$

асимптотика которого описывается специальной леммой (Эрдейи), имеющей для интеграла Фурье ту же роль, что и лемма Ватсона для интеграла Лапласа.

Указанная схема исследования асимптотики интеграла Фурье называется *методом стационарной фазы*.

Природа принципа локализации в методе стационарной фазы совсем иная, чем в случае интеграла Лапласа, но общая схема метода Лапласа, как видно, оказывается пригодной и здесь

Некоторые подробности, относящиеся к методу стационарной фазы, читатель найдет в задачах 12 — 17

Задачи и упражнения

Метод Лапласа в одномерном случае.

1. а. Функция $h(x)=e^{-\lambda x^{\alpha}}$ при $\alpha>0$ достигает максимума, когда $x=0$. При этом $h(x)$ есть величина порядка 1 в δ-окрестности точки $x=0$ размера $\delta=O(\lambda^{-1/\alpha})$

Используя лемму 1, покажите, что если $0<\delta<1$, то интеграл

$$W(\lambda)=\int\limits_{c(\lambda,\,\delta)}^{a} x^{\beta-1}f(x)\,e^{-\lambda x^{\alpha}}\,dx,$$

где $c(\lambda,\ \delta)=\lambda^{\frac{\delta-1}{\alpha}}$ имеет порядок $O(e^{-A\lambda^{\delta}})$ при $\lambda\to+\infty$; A — положительная постоянная

b. Докажите, что если функция f непрерывна при $x=0$, то

$$W(\lambda)=\alpha^{-1}\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)[f(0)+o(1)]\,\lambda^{-\beta/\alpha}\quad \text{при } \lambda\to+\infty.$$

c. В теореме 1, а), условие $f(x)=f(x_0)+O(x-x_0)$ можно ослабить, заменив его условием непрерывности f в точке x_0 Покажите, что при этом сохраняется тот же главный член асимптотики, но, вообще говоря, не само равенство (2′), в котором теперь $O(x-x_0)$ заменяется на $o(1)$.

2. а Числа Бернулли B_{2k} определяются из соотношения

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}=-\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k-1},\quad |t|<2\pi.$$

Известно, что

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x)=\ln x+\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-tx}\,dt.$$

Покажите, что

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x)\simeq\ln x-\frac{1}{2x}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k}x^{-2k}\quad \text{при } x\to+\infty.$$

b. Докажите, что при $x\to+\infty$

$$\ln\Gamma(x)\simeq\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}x^{-2k+1}.$$

Это асимптотическое разложение называется *рядом Стирлинга.*

с Используя ряд Стирлинга, получите первые два члена асимптотики функции $\Gamma(x+1)$ при $x\to+\infty$ и сравните ваш результат с полученным в примере 13.

d. Следуя методу примера 13 и независимо от этого пользуясь рядом Стирлинга, покажите, что

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^{2}}+O\left(\frac{1}{x^{3}}\right)\right)\quad \text{при } x\to+\infty.$$

3. а Пусть $f\in C([0,\ a],\ \mathbb{R})$, $S\in C^{(1)}([0,\ a],\ \mathbb{R})$, $S(x)>0$ на $[0,\ a]$ и $S(x)$ достигает максимума при $x=0$, причем $S'(0)\neq 0$ Покажите, что если

$f(0) \neq 0$, то

$$I(\lambda) := \int_0^a f(x) S^\lambda(x)\,dx \sim -\frac{f(0)}{\lambda S'(0)} S^{\lambda+1}(0) \text{ при } \lambda \to +\infty.$$

b. Получите асимптотическое разложение

$$I(\lambda) \simeq S^{\lambda+1}(0) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-(k+1)} \text{ при } \lambda \to +\infty,$$

если дополнительно известно, что $f,\ S \in C^{(\infty)}([0, a], \mathbb{R})$.

4. a. Покажите, что

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\,(1 + O(n^{-1})) \text{ при } n \to +\infty.$$

b. Выразите этот интеграл через эйлеровы интегралы и покажите, что при $n \in \mathbb{N}$ он равен $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$.

c. Получите формулу Валлиса $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$.

d. Найдите второй член асимптотического разложения исходного интеграла, при $n \to +\infty$.

5. a. Покажите, что $\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ при $n \to +\infty$.

b. Найдите следующий член асимптотики этого интеграла.

6. Покажите, что если $\alpha > 0$, то при $x \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} t^{-\alpha/t^x}\,dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{e^\alpha}}\, x^{\frac{1}{2\alpha}} \exp\left(\frac{\alpha}{e} x^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

7. a. Найдите главный член асимптотики интеграла

$$\int_0^{+\infty} (1+t)^n e^{-nt}\,dt \text{ при } n \to +\infty.$$

b. Используя полученный результат и тождество $k!\,n^{-k} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-nt} t^k\,dt$, покажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} c_n^k k!\, n^{-k} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}\,(1 + O(n^{-1})) \text{ при } n \to +\infty.$$

Метод Лапласа в многомерном случае.

8. *Лемма об экспоненциальной оценке.* Пусть $M = \sup\limits_{x\in D} S(x)$, и пусть при некотором значении $\lambda = \lambda_0$ интеграл

$$F(\lambda) = \int_{D \subset \mathbb{R}^n} f(x) e^{\lambda S(x)}\,dx \tag{*}$$

сходится абсолютно. Покажите, что тогда он сходится абсолютно при $\lambda \geqslant \lambda_0$ и

$$|F(\lambda)| \leqslant \int_D |f(x) e^{\lambda S(x)}| \, dx \leqslant A e^{\lambda M} \qquad (\lambda \geqslant \lambda_0),$$

где A — положительная постоянная.

9. *Лемма Морса* Пусть x_0 — невырожденная критическая точка функции $S(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, определенной и принадлежащей классу $C^{(\infty)}$ в окрестности точки x_0. Тогда существуют окрестности U и V точек $x = x_0$, $y = 0$ и диффеоморфизм φ: $V \to U$ класса $C^{(\infty)}(V, U)$ такие, что

$$S(\varphi(y)) = S(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \nu_j (y^j)^2,$$

$\det \varphi'(0) = 1$, $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — собственные числа матрицы $S''_{xx}(x_0)$, а $y = (y^1, \ldots, y^n)$ — координаты точки $y \in \mathbb{R}^n$

Докажите эту несколько конкретизированную форму леммы Морса, исходя из леммы Морса, изложенной в части I, гл VIII, § 6.

10. *Асимптотика канонического интеграла.* a Пусть $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $V = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t_j| \leqslant \delta, \ j = 1, 2, \ldots, n\}$, $a \in C^{(\infty)}(V, \mathbb{R})$ и $F_1(\lambda, t') = \int_{-\delta}^{\delta} a(t_1, \ldots, t_n) e^{-\frac{\lambda \nu_1}{2} t_1^2} dt_1$, где $t' = (t_2, \ldots, t_n)$, $\nu_1 > 0$. Покажите, что $F_1(\lambda, t') \simeq \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t') \lambda^{-\left(k + \frac{1}{2}\right)}$ при $\lambda \to +\infty$; это разложение равномерно по $t' \in V' = \{t' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |t^j| \leqslant \delta, \ j = 2, \ldots, n\}$ и $a_k \in C^{(\infty)}(V', \mathbb{R})$ при любом $k = 0, 1, \ldots$

b. Домножая $F_1(\lambda, t')$ на $e^{-\frac{\lambda \nu_2}{2} t_2^2}$ и обосновав законность почленного интегрирования соответствующего асимптотического разложения, получите асимптотическое разложение функции

$$F_2(\lambda, t'') = \int_{-\delta}^{\delta} F_1(\lambda, t') e^{-\frac{\lambda \nu_2}{2} t_2^2} dt_2 \text{ при } \lambda \to +\infty,$$

где $t'' = (t_3, \ldots, t_n)$, $\nu_2 > 0$.

c. Докажите, что для функции

$$A(\lambda) = \int_{-\delta}^{\delta} \ldots \int_{-\delta}^{\delta} a(t_1, \ldots, t_n) e^{-\frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{n} \nu_j t_j^2} dt_1, \ldots, t_n,$$

где $\nu_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, имеет место асимптотическое разложение

$$A(\lambda) \simeq \lambda^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k} \text{ при } \lambda \to +\infty,$$

где $a_0 = \sqrt{\dfrac{(2\pi)^n}{\nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_n}} a(0)$.

11. *Асимптотика интеграла Лапласа в многомерном случае.* a. Пусть D — замкнутая, ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, f, $S \in C(D, \mathbb{R})$, $\max_{x \in D} S(x)$ достигается только в некоторой внутренней точке x_0 области D; f, $S \in C^{(\infty)}$ в некоторой окрестности точки x_0, причем $\det S''(x_0) \neq 0$

Докажите, что если интеграл (*) абсолютно сходится для какого-нибудь значения $\lambda=\lambda_0$, то

$$F(\lambda) \simeq e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-n/2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^{-k} \text{ при } \lambda\to+\infty,$$

причем это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз, а его главный член имеет вид

$$F(\lambda)=e^{\lambda S(x_0)}\sqrt{\frac{(2\pi)^n}{|\det S''(x_0)|}}\,(f(x_0)+O(\lambda^{-1}))$$

b. Проверьте, что если в предыдущем утверждении вместо f, $S\in C^{(\infty)}$ известно лишь, что $f\in C$, а $S\in C^{(3)}$ в окрестности точки x_0, то при $\lambda\to+\infty$ главный член асимптотики останется тем же, с заменой $O(\lambda^{-1})$ на $o(1)$ при $\lambda\to+\infty$

Метод стационарной фазы в одномерном случае.

12. *Обобщение леммы Римана.* a Докажите следующее обобщение леммы Римана.

Пусть $S\in C^{(1)}([a, b], \mathbb{R})$ и $S'(x)\neq 0$ на $[a, b]=: I$. Тогда для любой абсолютно интегрируемой на промежутке I функции f имеет место соотношение

$$\tilde{F}(\lambda)=\int_a^b f(x)\,e^{i\lambda S(x)}\,dx\to 0 \text{ при } \lambda\to\infty,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

b. Проверьте, что если, сверх того, известно, что $f\in C^{(n+1)}(I, \mathbb{R})$, а $S\in C^{(n+2)}(I, \mathbb{R})$, то при $\lambda\to\infty$

$$\tilde{F}(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(i\lambda)^{-(k+1)}\left(\frac{1}{S'(x)}\frac{d}{dx}\right)^k f(x)\Big|_a^b+o(\lambda^{-(n+1)}).$$

c. Выпишите главный член асимптотики функции $\tilde{F}(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

d Покажите, что если $S\in C^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$, а $f|_{[a, c]}\in C^{(2)}[a, c]$, $f|_{[c, b]}\in C^{(2)}[c, b]$, но $f\notin C^{(2)}[a, b]$, то функция $\tilde{F}(\lambda)$ не обязана быть величиной $o(\lambda^{-1})$ при $\lambda\to\infty$.

e. Докажите, что когда f, $S\in C^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$, функция $\tilde{F}(\lambda)$ допускает разложение в асимптотический ряд при $\lambda\to\infty$

f. Найдите асимптотические разложения при $\lambda\to\infty$, $\lambda\in\mathbb{R}$ следующих интегралов: $\int_0^\infty (1+x)^{-\alpha}\psi_j(x, \lambda)\,dx$, $j=1, 2, 3$, если $\alpha>0$, а $\psi_1=e^{i\lambda x}$, $\psi_2=\cos\lambda x$, $\psi_3=\sin\lambda x$.

13. *Принцип локализации* a. Пусть $I=[a, b]\subset\mathbb{R}$, $f\in C_0^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$, $S\in C^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$ и $S'(x)\neq 0$ на I. Докажите, что тогда

$$\tilde{F}(\lambda):=\int_a^b f(x)\,e^{i\lambda S(x)}\,dx=O(|\lambda|^{-\infty}) \text{ при } \lambda\to\infty.$$

b. Пусть $f\in C_0^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$, $S\in C^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$; $x_1, \ldots, x_m$ — конечное число стационарных точек функции $S(x)$, вне которых $S'(x)\neq 0$ на I. Обозначим через $\tilde{F}(\lambda, x_j)$ интеграл от функции $f(x)\,e^{i\lambda S(x)}$ по окрестности $U(x_j)$ точки x_j, $j=1, \ldots, m$, не содержащей в замыкании других критических точек. Докажите, что

$$\tilde{F}(\lambda)=\sum_{j=1}^{m}\tilde{F}(\lambda, x_j)+O(|\lambda|^{-\infty}) \text{ при } \lambda\to\infty.$$

14. *Асимптотика интеграла Фурье в одномерном случае* а. В достаточно общей ситуации отыскание асимптотики одномерного интеграла Фурье благодаря принципу локализации сводится к описанию асимптотики канонического интеграла

$$E(\lambda)=\int_0^a x^{\beta-1}f(x)\,e^{i\lambda x^{\alpha}}\,dx,$$

для которого справедлива следующая

Лемма Эрдейи. *Пусть* $\alpha\geqslant 1$, $\beta>0$, $f\in C^{(\infty)}([0,a],\mathbb{R})$ *и* $f^{(k)}(a)=0$, $k=0,1,2,\ldots$ *Тогда*

$$F(\lambda)\simeq\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}\quad \textit{при}\ \lambda\to+\infty,$$

где

$$a_k=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right)e^{i\frac{\pi}{2}\frac{k+\beta}{\alpha}}\frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

причем это разложение можно дифференцировать по λ *любое число раз.*

Пользуясь леммой Эрдейи докажите следующее утверждение.

Пусть $I=[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ — конечный отрезок, f, $S\in C^{(\infty)}(I,\mathbb{R})$, причем $f\in C_0(I,\mathbb{R})$, а S имеет на I единственную стационарную точку x_0, где $S'(x_0)=0$, но $S''(x_0)\neq 0$. Тогда при $\lambda\to+\infty$

$$\tilde F(\lambda,x_0):=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\,e^{i\lambda S(x)}\,dx\simeq e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}S''(x_0)}e^{i\lambda S(x_0)}\lambda^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^{-k}$$

и главный член асимптотики имеет вид

$$\tilde F(\lambda,x_0)=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\,|S''(x_0)|}}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}S''(x_0)+\lambda S(x_0)\right)}\left(f(x_0)+O(\lambda^{-1})\right).$$

b. Рассмотрите функцию Бесселя целого индекса $n\geqslant 0$:

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi.$$

Покажите, что

$$J_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-1})\ \text{при}\ x\to+\infty.$$

Метод стационарной фазы в многомерном случае

15. *Принцип локализации.* а. Докажите следующее утверждение.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f\in C_0^{(\infty)}(D,\mathbb{R})$, $S\in C^{(\infty)}(D,\mathbb{R})$, $\operatorname{grad}S(x)\neq 0$ при $x\in\operatorname{supp}f$ и

$$\tilde F(\lambda):=\int_D f(x)\,e^{i\lambda S(x)}\,dx \qquad (**)$$

Тогда для любого $k\in\mathbb{N}$ найдется такая положительная постоянная $A(k)$, что при $\lambda\geqslant 1$ имеет место оценка $|\tilde F(\lambda)|\leqslant A(k)\lambda^{-k}$, и, значит, $\tilde F(\lambda)=O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda\to+\infty$.

b. Пусть по-прежнему $f\in C_0^{(\infty)}(D,\mathbb{R})$, $S\in C^{(\infty)}(D,\mathbb{R})$; но S имеет в D конечное число критических точек $x_1,\ldots,x_m$, вне которых $\operatorname{grad}S(x)\neq 0$. Обозначим через $\tilde F(\lambda,x_j)$ интеграл от функции $f(x)\,e^{i\lambda S(x)}$ по такой окрестности

$U(x_j)$ точки x_j, в замыкании которой нет критических точек, отличных от точки x_j. Докажите, что

$$\tilde F(\lambda)=\sum_{j=1}^{m}\tilde F(\lambda,\,x_j)+O(\lambda^{-\infty})\ \text{при}\ \lambda\to+\infty.$$

16. *Приведение к каноническому интегралу.* Если x_0 — невырожденная критическая точка функции $S\in C^{(\infty)}(D,\,\mathbb{R})$, определенной в области $D\subset\mathbb{R}^n$, то по лемме Морса (см. задачу 9) существует такая локальная замена переменных $x=\varphi(y)$, что $x_0=\varphi(0)$, $S(\varphi(y))=S(x_0)+\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\varepsilon_j(y^j)^2$, где $\varepsilon_j=\pm1$, $y=(y^1,\,\ldots,\,y^n)$, причем $\det\varphi'(y)>0$.

Используя принцип локализации (задача 15), покажите теперь, что если $f\in C_0^{(\infty)}(D,\,\mathbb{R})$, $S\in C^{(\infty)}(D,\,\mathbb{R})$, S имеет в D не более конечного числа критических точек и все они невырождены, то исследование асимптотики интеграла (**) сводится к исследованию асимптотики специального интеграла

$$\Psi(\lambda):=\int_{-\delta}^{\delta}\ldots\int_{-\delta}^{\delta}\psi(y^1,\,\ldots,\,y^n)\,e^{\frac{i\lambda}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\varepsilon_j(y^j)^2}\,dy^1\ldots dy^n.$$

17. *Асимптотика интеграла Фурье в многомерном случае.* а. Используя лемму Эрдейи (задача 14 а) и план действий, описанный в задаче 10, докажите, что если D — область в $\mathbb{R}^n$, $f,\,S\in C^{(\infty)}(D,\,\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}f$ — компакт в D, x_0 — единственная и притом невырожденная критическая точка функции S в D, то для интеграла (**) при $\lambda\to+\infty$ имеет место асимптотическое разложение

$$\tilde F(\lambda)\simeq\lambda^{-n/2}e^{i\lambda S(x_0)}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda^{-k},$$

которое можно дифференцировать по λ любое число раз.

Главный член асимптотики имеет вид

$$\tilde F(\lambda)=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}\exp\left[i\lambda S(x_0)+\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}S''(x_0)\right]\times$$
$$\times\,|\det S''(x_0)|^{-1/2}\,[f(x_0)+O(\lambda^{-1})]\ \text{при}\ \lambda\to+\infty.$$

Здесь $S''(x_0)$ — симметрическая и по условию невырожденнаи матрица вторых частных производных функции S в точке x_0 (*гессиан*), а $\operatorname{sgn}S''(x_0)$ — сигнатура этой матрицы (или соответствующей ей квадратичной формы), т. е. разность $\nu_+-\nu_-$ между числом положительных и числом отрицательных собственных значений матрицы $S''(x_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Классика

1. Первоисточники

Ньютон И.

a. Математические начала натуральной философии (перевод в книге: Крылов А. Н. Собрание трудов, т. 7. — М. — Л. 1936)

b. Математические работы. — М — Л., 1937.

Лейбниц Г. В Избранные отрывки из математических сочинений (в журнале «Успехи математических наук», 1948, т. 3, вып. 1, с. 165—205).

2. Важнейшие систематические изложения предмета

Эйлер Л.

a. Введение в анализ бесконечно малых, т. 1, 2. — М.: Физматгиз, 1961

b. Дифференциальное исчисление. — М. — Л.: Гостехиздат, 1949.

c. Интегральное исчисление, т. 1—3. — М.: Гостехиздат, 1956—1958

Коши О. Л.

a. Алгебраический анализ. — Лейпциг, 1864.

b. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. — СПб.: 1831.

3. Классические курсы анализа первой половины нашего столетия

Валле-Пуссен Ш. — Ж. Курс анализа бесконечно малых, т. I—II. — Л. — М.: ГТТИ, 1933.

Гурса Э. Курс математического анализа, т I—II — М. — Л ОНТИ, 1936

II. Современные учебники по математическому анализу, утвержденные Минвузом СССР

Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, ч. I. — М.: Наука, 1971.

Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, ч. II. — М.: Наука, 1980.

Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. — М.: Наука, 1979.

Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, т. I, II — М.: Высшая школа, 1981.

Никольский С. М. Курс математического анализа, т. I, II. — М. Наука, 1973.

III. Учебные пособия

Демидович Б. Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Наука, 1977

Рудин У. Основы математического анализа. — М.: Мир, 1976

Шилов Г. Е.

a. Математический анализ, функции одного переменного. — М.: Наука, 1969.

b. Математический анализ, функции нескольких вещественных переменных — М.: Наука, 1972.

Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II, III. — М.: Наука, 1969

Дополнительная литература

Александров П. С., Колмогоров А. И. Введение в теорию функций действительного переменного.—ГТТИ, 1938.
Бурбаки Н. Очерки по истории математики—М.: ИЛ, 1963.
Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе.—М.: Мир, 1967.
Дьедонне Ж. Основы современного анализа.—М.: Мир, 1964.
Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.—М.: Мир, 1971.
Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, II.—М.: Наука, 1970.
Ландау Э. Основы анализа.—М.: ИЛ, 1947.
Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях.—М.: Мир, 1971.
Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа, т. I, II.—М.: Наука, 1978.
Спивак М. Математический анализ на многообразиях.—М.: Мир, 1971.
Шварц Л. Анализ, т. I, II.—М.: Мир, 1972.

УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Логические символы.

$\Longrightarrow$ — логическое следование (импликация)

$\Longleftrightarrow$ — логическая эквивалентность (равносильность)

$:=$, $=:$ — равенства по определению; двоеточие со стороны определяемого объекта

Множества

$\bar{E}$ — замыкание множества E — 17

∂E — граница множества E — 123

$\overset{\circ}{E} := E \setminus \partial E$ — внутренность (открытая часть) множества E

$B(x, r)$ — шар с центром в точке x радиуса r — 15

$S(x, r)$ — сфера с центром в точке x радиуса r — 16

Пространства

$(X; d)$ — метрическое пространство X с метрикой d — 11

$(X; \tau)$ — топологическое пространство X с системой τ открытых множеств — 19

$\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ — арифметическое n-мерное вещественное (комплексное) пространство

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ $(\mathbb{C}^1 = \mathbb{C})$ — множество вещественных (комплексных) чисел

$x = (x^1, \ldots, x^n)$ — координатная запись точки n-мерного пространства

$C(X, Y)$ — множество (пространство) непрерывиых на X функций со значениями в Y — 393

$C[a, b]$ — сокращенное обозначение для $C([a, b], \mathbb{R})$ или $C([a, b], \mathbb{C})$

$C^{(k)}(X, Y)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых отображений из X в Y — 83, 93

$C^{(k)}[a, b]$ — сокращенное обозначение для $C^{(k)}([a, b], \mathbb{R})$ или $C^{(k)}([a, b], \mathbb{C})$

$C_p[a, b]$ — пространство $C[a, b]$, наделенное нормой $\|f\|_p$ — 53

$C_2[a, b]$ — пространство $C[a, b]$ с эрмитовым скалярным произведением $\langle f, g\rangle$ функций или с нормой средне квадратичного уклонения — 503

$\mathcal{R}(E)$ — множество (пространство) функций, интегрируемых по Риману на множестве E — 124

$\mathcal{R}[a, b]$ — сокращенное обозначение для $\mathcal{R}(E)$ при $E = [a, b]$

$\tilde{\mathcal{R}}(E)$ — пространство классов интегрируемых по Риману функций, совпадающих почти всюду на E — 127

$\tilde{\mathcal{R}}_p(E)$ $(\mathcal{R}_p(E))$ — пространство $\tilde{\mathcal{R}}(E)$, наделенное нормой $\|f\|_p$

$\tilde{\mathcal{R}}_2(E)$ $(\mathcal{R}_2(E))$ — пространство $\tilde{\mathcal{R}}(E)$, наделенное эрмитовым скалярным произведением функций $\langle f, g\rangle$ или нормой средне квадратичного уклонения

$\mathcal{R}_p[a, b]$, $\mathcal{R}_2[a, b]$ — сокращенные обозначения для $\mathcal{R}_p(E)$, $\mathcal{R}_2(E)$

$\mathcal{L}(X; Y)$ $(\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y))$ — пространство линейных (n-линейных) отображений из X $(X_1 \times \cdots \times X_n)$ в Y — 65

TM_p или $TM(p)$, T_pM, $T_p(M)$ — пространство, касательное к поверхности (многообразию) M в точке $p \in M$ — 329, 331
$\mathcal{S}$ — пространство Шварца быстро убывающих функций — 565
$\mathcal{D}(G)$ — пространство основных финитных функций в области G — 454. 471
$\mathcal{D}'(G)$ — пространство обобщенных функций в области G — 454, 471
$\mathcal{D}$ — сокращенное обозначение для $\mathcal{D}(G)$ при $G = \mathbb{R}^n$ — 454, 474
$\mathcal{D}'$ — сокращенное обозначение для $\mathcal{D}'(G)$ при $G = \mathbb{R}^n$ — 454, 474

Метрики, нормы, скалярные произведения
$d(x_1, x_2)$ — расстояние между точками x_1, x_2 в метрическом пространстве (X, d) — 11
$|x|$, $\|x\|$ — модуль (норма) вектора $x \in X$ в линейном нормированном пространстве X — 51
$\|A\|$ — норма линейного (полилинейного) оператора A — 60
$\|f\|_p := \left(\int\limits_E |f|^p(x)\,dx\right)^{1/p}$, $p \geq 1$ — интегральная норма функции f — 53
$\|f\|_2$ — норма средне квадратичного уклонения ($\|f\|_p$ при $p=2$)
$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ — эрмитово скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — 54
$\langle f, g \rangle := \int\limits_E (f \cdot \bar{g})(x)\,dx$ — эрмитово скалярное произведение функций f, g — 490
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ в $\mathbb{R}^3$ — 255
$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ или $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ — векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ в $\mathbb{R}^3$ — 255
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ — смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ в $\mathbb{R}^3$ — 200

Функции.
$g \circ f$ — композиция (суперпозиция) функций f и g
f^{-1} — функция, обратная к функции f
$f(x)$ — значение функции f в точке x; функция от x
$f(x^1, \ldots, x^n)$ — значение функции f в точке $x = (x^1, \ldots, x^n) \in X$ n-мерного пространства X; функция, зависящая от n переменных $x^1, \ldots, x^n$
$\operatorname{supp} f$ — носитель функции f — 442
$\Delta f(x)$ — скачок функции f в точке x — 457, 477
$\{f_t;\ t \in T\}$ — семейство функций, зависящих от параметра $t \in T$ — 359
$\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ или $\{f_n\}$ — последовательность функций 355
$f_t \underset{\mathcal{B}}{\to} f$ на E — сходимость семейства функций $\{f_t;\ t \in T\}$ к функции f на множестве E при базе $\mathcal{B}$ в T — 359
$f_t \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f$ на E — равномерная сходимость семейства функций $\{f_t;\ t \in T\}$ к функции f на множестве E при базе $\mathcal{B}$ в T — 360
$f = o(g)$ при $\mathcal{B}$, $f = O(g)$ при $\mathcal{B}$, $f \sim g$ или $f \simeq g$ при $\mathcal{B}$ — асимптотические формулы (символы сравнительного асимптотического поведения функций f и g при базе $\mathcal{B}$) — 586, 587
$f(x) \simeq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ при $\mathcal{B}$ — разложение в асимптотический ряд — 591
$\mathcal{D}(x)$ — функция Дирихле — 356
$\exp A$ — экспонента от линейного оператора A — 76
$\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ — бета функция Эйлера — 428
$\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера — 428
χ_E — характеристическая функция множества E — 124

Дифференциальное исчисление.

$f'(x)$, $f_*(x)$, $df(x)$, $Df(x)$ — касательное к f отображение (дифференциал f) в точке x — 70, 334

$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$, $\partial_i f(x)$, $D_i f(x)$ — частная производная (частный дифференциал) в точке $x=(x^1, \ldots, x^n)$ по переменной x^i от функции f, зависящей от переменных $x^1, \ldots, x^n$ — 78

$D_v f(x)$ — производная функции f по вектору v в точке x — 88, 331

∇ — оператор набла Гамильтона — 258

$\operatorname{grad} f$ — градиент функции f — 205

$\operatorname{div} A$ — дивергенция векторного поля A — 205

$\operatorname{rot} B$ — ротор (вихрь) векторного поля B — 205

Интегральное исчисление.

$\mu(E)$ — мера множества E — 125

$$\left.\begin{array}{l}\int\limits_E f(x)\,dx,\\ \int\limits_E f(x^1, \ldots, x^n)\,dx^1 \ldots dx^n,\\ \int \ldots \int\limits_E f(x^1, \ldots, x^n)\,dx^1 \ldots dx^n\end{array}\right\}$$
интеграл от функции f по множеству $E \subset \mathbb{R}^n$ — 115, 124

$\int\limits_Y dy \int\limits_X f(x, y)\,dx$ — повторный интеграл — 132

$$\left.\begin{array}{l}\int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz,\\ \int\limits_\gamma F\cdot ds,\ \int\limits_\gamma \langle F, ds\rangle\end{array}\right\}$$
криволинейный интеграл (второго рода) или работа поля $F=(P, Q, R)$ вдоль пути γ — 214, 234

$\int\limits_\gamma f\,ds$ — криволинейный интеграл (первого рода) от функции f вдоль кривой γ — 233

$$\left.\begin{array}{l}\iint\limits_S P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy,\\ \iint\limits_S F\cdot d\sigma,\ \iint\limits_S \langle F, d\sigma\rangle\end{array}\right\}$$
интеграл (второго рода) по поверхности S в $\mathbb{R}^3$; поток поля $F=(P, Q, R)$ через поверхность S — 217, 234

$\iint\limits_S f\,d\sigma$ — поверхностный интеграл (первого рода) от функции f по поверхности S — 232

Дифференциальные формы

ω (ω^p) — дифференциальная форма (степени p) — 199, 333

$\omega^p \wedge \omega^q$ — внешнее произведение форм ω^p, ω^q — 197 — 307

$d\omega$ — (внешний) дифференциал от формы ω — 203

$\int\limits_M \omega$ — интеграл от формы ω по поверхности (многообразию) M — 220, 222, 337

$\omega_F^1(x) := \langle F(x), \cdot\rangle$ — форма работы — 199

$\omega_V^2(x) = (V(x), \cdot, \cdot)$ — форма потока — 200

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абель (*Abel*) 368, 369, 377, 412
Адамар (*Hadamard*) 368, 401
Адиабата 224
Адиабатическая постоянная 226
Аксиома Хаусдорфа 22
Алгебра внешняя 311
— Грассмана 311
— Ли 79
— форм 305
— — кососимметрических 308
— функций 395
— — самосопряженная 399
Александер (*Alexander*) 166
Альтернирование форм 306
Ампер (*Ampèr*) 234
Амплитуда 551
Анализ гармонический 551
Архимед (Ἀρχιμήδης) 243
Арцела (*Arzelà*) 391, 398
Асколи (*Ascoli*) 391, 398
Атлас многообразия 312
— — гладкий 317
— — ориентирующий 320
— поверхности 166
— — ориентирующий 177
Атласы многообразия, эквивалентные по гладкости 317
— — — — ориентации 320

База в множестве разбиений 114
— топологии 21
Базис пространства 503
Банах (*Banach*) 44
Бернулли Д (*Daniel Bernoulli*) 302
Бернулли И (*Johann Bernoulli*) 99
Бернулли Я (*Jacob Bernoulli*) 546
Бессель (*Bessel*) 385, 387, 403, 406, 496
Био (*Biot*) 236
Борель (*Borel*) 571
Брауэр (*Brouwer*) 182, 241, 313
Брахистохрона 99
Буняковский 55, 443
Бутылка Клейна 172, 173, 353

Валлис (*Wallis*) 425, 625
Ватсон (*Watson*) 609, 615, 623
Вейерштрасс (*Weierstrass*) 367, 394, 398, 412, 448, 449, 484, 529, 533
Вектор, касательный к многообразию 330, 332, 340
Векторы ортогональные 489
Вихрь (ротор) векторного поля 257
Вклад точки в асимптотику интеграла 604
Вложение каноническое 342

Галилей (*Galilei*) 584
Гамильтон (*Hamilton*) 258
Гаусс (*Gauss*) 241, 248, 251, 252, 272, 276, 280, 431, 438, 461, 480, 487
Гейзенберг (*Heisenberg*) 580
Гёльдер (*Hölder*) 131
Гельмгольц (*Helmholtz*) 294
Гиббс (*Gibbs*) 534
Гильберт (*Hilbert*) 329
Гомеоморфизм 41
Гомологии 350, 354
Гомотопия 286
Градиент 205, 256, 267, 276
Грам (*Gram*) 189, 492
Граница куба 349
— сингулярного куба 350
— цепи 350
Грассман (*Grassmann*) 311
Грин (*Green*) 236, 248
Группа гомологий 291
— гомотопическая 291
— когомологий 291, 348, 353, 354
— Ли 79, 328
— непрерывная 79
— преобразований 328
— — дискретная 328
— топологическая 79
Гурвиц (*A. Hurwitz*) 540

Даламбер (*d'Alambert*) 299
Дарбу (*Darboux*) 120, 121, 122, 125, 390
Де Рам (*De Rham*) 290, 352, 354
Джоуль (*Joul*) 225
Дивергенция 205, 256, 268, 273, 479, 481
Дини (*Dini*) 378, 416, 524, 525
Диполь 292
Дирак (*Dirac*) 275
Дирихле (*Dirichlet*) 356, 368, 369, 373, 412, 419, 427, 510, 522, 548, 556, 558, 559, 599
Дифференциал внешний 203, 335, 341
— отображения 69
— полный 78
— порядка *n* 87
— частный 78
Дифференцирование 69
— кольца 332

Жордан (*Jordan*) 125—127, 131, 135, 136, 141, 150

Задача асимптотическая 585
— о брахистохроне 99
— о кратчайшей 98
— о кривой скорейшего спуска 99
— Штурма—Лиувилля 512
Закон Ампера 234
— Архимеда 243
— Био и Савара 236
— Гаусса 280
— Кулона 274, 282
— Ньютона 281
— распределения нормальный 461
— Фарадея 234

Изобара 224
Изоморфизм гладких структур 327
— линейных нормированных пространств 68
Изотерма 224
Изохора 224
Импульс прямоугольный 578
— треугольный 578
Интеграл 114
— Бернулли 302
— верхний 120
— Гаусса 251, 252
— Дарбу 120
—, зависящий от параметра 400
—, — — — несобственный 400
—, — — — собственный 400
— Коши 302
— кратный, зависящий от параметра 400, 467
— —, — — — несобственный 467
— —, — — — собственный 467
— —, — — — с переменной особенностью 469
— нижний 120
— от дифференциальной формы 220, 222

Интеграл от дифференциальной формы по многообразию 336, 337
— — — — по сингулярному кубу 350
— — — — по цепи 351
— — функции по поверхности 232
— поверхностный второго рода 223
— — первого рода 223
— по множеству 124
— — — несобственный 155
— Пуассона 450, 578
— Раабе 437
— Фурье 553, 554, 583, 622, 628, 629
— Эйлера второго рода 428
— — первого рода 428
— Эйлера—Пуассона 424, 432, 557, 570, 599
— эллиптический 387, 403, 426
Интегралы Френеля 600
Исчерпание множества 154

Кавальери (*Cavalieri*) 136
Кантор (*G Cantor*) 117
Карлесон (*L. Carleson*) 520
Карно (*S. Carnot*) 226
Карта локальная многообразия 312
— — поверхности 165
Карты многообразия согласованные 320
— поверхности согласованные 177
Категория множества 38
Класс ориентации атласов многообразия 320
— — — поверхности 178
— — реперов 174
— — систем координат 174, 176
Клаузиус (*Clausius*) 227
Клейн (*Klein*) 172, 173, 353
Когомологии 348, 353, 354
Колебание отображения в точке 117
— — на множестве 40
Колмогоров 520
Компакт 25
— метрический 27
Координаты декартовы 263
— криволинейные триортогональные 263
— сферические 263
— цилиндрические 263
Котельников 575, 576
Коши (*Cauchy*) 40, 55, 302, 361, 365, 368, 410, 443
Коэффициент полезного действия тепловой машины 226
— температуропроводности 296
— теплопроводности 296
Коэффициенты Ламе 264
— Фурье 494, 497, 498, 544, 546, 548
Край многообразия 312
— поверхности 182
Критерий Дарбу 122
— Коши равномерной сходимости интеграла 410
— — — — ряда 365
— — — — семейства функций 362
— — существования предела отображения 40
— Лебега интегрируемости 117, 125
— метрического компакта 27
— непрерывности отображения 41
— потенциальности векторного поля 283
Крылов 534
Куб сингулярный 349
Кулон (*Coulomb*) 274, 282

Лагерр (*Laguerre*) 514
Лагранж (*Lagrange*) 49, 98, 112
Ламе (*Lamé*) 264
Лаплас (*Laplace*) 260, 267, 303, 578, 586, 602, 609, 610, 622, 624, 625, 626
Лебег (*Lebesgue*) 115, 117, 123, 125—127, 130, 143, 149, 150, 193, 390
Лежандр (*Legandre*) 436, 493, 511, 513
Лейбниц (*Leibniz*) 248, 402, 562
Лемма Адамара 401
— Ватсона 609, 615
— Морса 401, 626
— о вложенных компактах 26
— о замкнутости компакта 26
— об ε сети 27
— об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье 495
— Пуанкаре 289, 345
— Римана 520, 526, 564, 622, 627
— Сарда 153
— Эрдейи 623, 628
Ли (*Lie*) 79, 328, 329, 343
Лист Мёбиуса 172, 183, 320
Лиувилль (*Liouville*) 512
Лоренц (*Lorentz*) 584
Лузин 520
Ляпунов 510

Майер (*R Mayer*) 225
Максвелл (*Maxwell*) 248, 257, 258, 276, 280, 303
Максимум локальный 94
Матрица Грама 189
Мёбиус (*Möbius*) 172, 320, 328
Меньшов 520
Мера Жордана множества 125
— множества 125
— промежутка 113
Метод Абеля суммирования ряда 376, 377, 388
— касательных 48
— Крылова 534
— Лапласа 586, 602, 622, 624—626
— наименьших квадратов 510
— Ньютона 48
— — модифицированный 49
— стационарной фазы 623, 627
— усреднений Стеклова 510
— Фурье разделения переменных 488, 506, 507
— Чезаро суммирования ряда 388
Методы асимптотические 586
Метрика 11
— в линейном нормированном пространстве 52
— интегральная 14
— равномерная 13, 14
— равномерной сходимости 393
— риманова 263
— среднего квадратичного уклонения 13, 14
— Хаусдорфа 19
— чебышевская 13
Милнор (*Milnor*) 327
Минковский (*Minkowski*) 131
Многообразие 165
— аналитическое 317
— без края 314
— гладкое 317
— компактное 315
— неориентируемое 320
— ориентированное 320
— ориентируемое 320
— с краем 314
— стягиваемое 345
— топологическое 317
Многочлен гармонический 513, 514

Многочлены Бернулли 546
— Лежандра 493, 511, 512, 513, 514
— тригонометрические 516
— Чебышева 514
— Чебышева—Лагерра 514
— Эрмита 514
Множество всюду плотное 38
— второй категории 38
— допустимое 123
— замкнутое 15, 20
— значений параметра 359
—, измеримое по Жордану 126
— меры нуль по Жордану 126
— — — по Лебегу 115, 193
— нигде неплотное 38
— открытое 15, 19, 20
— относительно компактное 29
— первой категории 38
— связное 29
— сходимости семейства функций 359
Модуль эллиптического интеграла 404
— функции 398, 579
Морс (M Morse) 153, 401

Направление движения вдоль кривой 180
— обхода области 180
Неравенство Бесселя 496, 497, 498
— Виртингера 547
— Гёльдера 131
— изопериметрическое 541
— Клаузиуса 227
— Коши—Буняковского 55, 443
— Минковского 131
— — обобщенное 485
— Стеклова 547
Норма в линейном пространстве 51
— вектора 51
— оператора 60
Носитель дифференциальной формы 337
— функции 140, 442
Нуль асимптотический 592
Ньютон (Newton) 48, 49, 248, 303, 564

Обертон 508
Область действия карты 165, 312
— значений параметра 359
— односвязная 288
— параметров карты 165, 312
— простая 239, 243
— фундаментальная группы 316, 328
Обобщенная функция 452, 453, 454
Объем множества 125
— параллелепипеда ориентированный 189
— промежутка 113
Окрестность точки 15, 16, 21
— ростка функции 22
Оператор дифференциальный 476
— инвариантный относительно сдвигов 440
— интегральный 562
— Лапласа 260, 268
— линейный 57
— набла 258
— полилинейный 57, 61, 64
— самосопряженный 477
— сдвига 440
— сопряженный 477
Операторы теории поля 256
Орбита точки 316, 328
Ориентация края многообразия 323
— — —, согласованная с ориентацией многообразия 323
— — поверхности 185
— — —, согласованная с ориентацией поверхности 185
— многообразия 320
Ориентация поверхности 174, 176, 178, 180, 187
Ортогонализация 492
Ортогональность с весом 512
Остроградский 241, 248, 272, 296, 480, 487
Отображение гомеоморфное 41
—, дифференцируемое в точке 69
—, — на множестве 70
— касательное 69
— многообразий гладкое 320
— непрерывно дифференцируемое 83
— непрерывное 41
—, — в точке 40
— ограниченное 39
—, — финально 39
— производное 70
— — высшего порядка 87
— равномерно непрерывное 43
— сопряженное 309
Оценка асимптотическая 587
— — равномерная 600

Параллелепипед координатный 113
Параметр 359
— разбиения 114
Параметризация кривой натуральная 80
Парсеваль (Parseval) 502, 510, 518, 537, 539, 570, 571
Перенос векторов 206, 309
— форм 206, 212, 309, 342
Период интеграла 290
Пикар (Picard) 44, 46
Пифагор (Πυθαγόραζ) 495
Råншерель (Plancherel) 580
Площадь поверхности 190, 230, 231
Поверхность 165
— без края 182
— гладкая 166, 168
— кусочно гладкая 186
— — — ориентируемая 187
— односторонняя 180
— ориентированная 178
— ориентируемая 178
— с краем 182
— элементарная 166
Подмногообразие 328
Подмножество компактное 394
Подпространство 17, 24
Поле векторное 253
— — на многообразии 341
— — — — гладкое 341
— потенциальное 281
— скалярное 253
— соленоидальное 289
— тензорное 253
Полнота систем функций 510
— тригонометрической системы 536
Последовательность асимптотическая 591
— Коши 31
— сходящаяся 31
— фундаментальная 31
— функций монотонная 369
— — невозрастающая 368
— — неубывающая 368
— —, сходящаяся в точке 355
— —, — на множестве 355
— —, — — — равномерно 359
Постоянная циклическая 290
Потенциал векторный 288, 291, 345, 347
— простого слоя 472
— скалярный 281, 291, 345
— скоростей 302
Поток векторного поля через поверхность 215, 218, 272
Предел отображения 38
— семейства функций 359

Предельная функция 355, 359
Преобразование Абеля 369
— Галилея 584
— Лапласа 610
— Лоренца 584
— Фурье 554, 562, 583
— — косинус 554
— — многомерное 566
— — нормированное 562
— — обобщенных функций 582
— — обратное 560, 563, 569
— — свертки 571
— — синус 554
Признак Абеля—Дирихле равномерной сходимости интеграла 412
— — — — — ряда 369
— Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла 412
— — — — ряда 367
— равномерной сходимости ряда мажорантный 367
— — — — необходимый 366
— условного экстремума необходимый 112
Принцип Даламбера 299
— Кавальери 136
— локализации в асимптотике интеграла 602, 606
— — для ряда Фурье 523
— неопределенности 580
— неподвижной точки 44, 48, 241, 248
— Пикара—Банаха 44
— сжимающих отображений 48
— стационарной фазы 623
Проблема Гильберта пятая 329
— Лузина 520
Произведение внешнее 307
— внутреннее векторного поля и дифференциальной формы 344
— скалярное 54
— — функций 490
— тензорное 305
Производная Ли 343
— отображения 69
— по вектору 88
— частная 78
Пространство аффинное нормированное 70
— банахово 52
— гильбертово 56, 504
— евклидово 56
— касательное 69
—, — к многообразию 331
—, кокасательное к многообразию 333
— линейное нормированное 51
— — со скалярным произведением 54
— метрическое 11
— — полное 31
— нормированное полное 52
— обобщенных функций 453, 475
— — — умеренного роста 581
— основных функций 453, 474
— предгильбертово 56
— сепарабельное 23
— Соболева—Шварца 455
— топологическое 11
— хаусдорфово 22, 312
— Шварца 565, 567, 581
— эрмитово 56
Процесс адиабатический 224
— квазистатический 224
Пуанкаре (*Poincaré*) 248, 289, 345, 353, 600
Пуассон (*Poisson*) 226, 292, 303, 341, 424, 432, 450, 462, 484, 557, 570, 574, 578, 582, 583, 599
Пути гомотопные 287
—, касающиеся на многообразии 340
Путь 252
Пучок касающихся путей 340
Раабе (*Raabe*) 437
Работа поля 213
Равенство асимптотическое 587
— Парсеваля 502, 518, 519, 538, 539, 570, 571
Радемахер (*Rademaher*) 515
Разбиение единицы 152
— — на многообразии 324
— —, подчиненное покрытию 325, 463
— локально конечное 192
— промежутка 114
Район действия карты многообразия 312
Разложение асимптотическое 590, 591, 600
— — интеграла Лапласа 613
— — равномерное 601
Размерность многообразия 313
Репер, ориентирующий поверхность 176
— Френе 80
Решение фундаментальное оператора 451, 460, 481
— — — Лапласа 481
Риман (*Riemann*) 113—115, 302, 438, 520, 526, 564, 622, 627
Ротор 205, 256, 268, 276
Ряд асимптотический 591, 600
— — степенной 596
— нуль Меньшова 520
— Стирлинга 624
— Фурье 490, 499
— — обобщенных функций 549, 550
— — тригонометрический 517, 519
— — — многомерный 548

Савар (*Savart*) 236
Сапог Шварца 196
Сард (*Sard*) 153, 154
Свертка функций 442, 473
Семейство функций дельтаобразное 445
— —, зависящих от параметра 359
— —, — — —, равномерно ограниченное 368
— —, не исчезающее на множестве 396
— — равномерно ограниченное 391
— — равностепенно непрерывное 398
— —, — — в точке 398
— —, — — на множестве 391
Сеть (ε-сеть) 27
Символы o, O 586
Система векторов линейно независимых 489
— —, полная по отношению к множеству 501
— функций ортогональная 490
— — тригонометрическая 490
Скобка Пуассона векторных полей 341
Слой двойной 486
— простой 476, 484
Соболев 455
Согласование ориентации поверхности и края 185, 186
Спектр функции 551, 552, 583
Стеклов 510, 546
Степень формы 197, 199, 203
Стирлинг (*Stirling*) 439, 624
Стокс (*Stokes*) 244, 246, 248, 338, 342, 351
Стоун (*M. Stone*) 397
Структура гладкого многообразия 317, 327
Сужение формы на поверхность 210, 342
Сумма интегральная 114
— ряда 364
— — частичная 364
— Фейера 528, 548
Суммирование ряда методом Абеля 377
— — — Чезаро 388
Суммы Дарбу 120
Сходимость интеграла, зависящего от параметра равномерная 407, 408

Сходимость интеграла несобственного 155
— семейства функций 359, 362
— функционалов в пространстве $G_0^{\infty}(G, \mathbb{C})$ 454
— — слабая 454
— — по норме 65, 67
Сфера Александрова 166

Таубер (*Tauber*) 389
Тейлор (*Taylor*) 93, 94, 507
Тембр 508
Теорема Абеля 372
— Арцела—Асколи 392, 398
— Брауэра 241, 248
— — об инвариантности внутренних точек 182, 313
— Вейерштрасса аппроксимационная 394, 398, 448, 449, 484, 529, 533
— Гаусса 487
— Гельмгольца 294
— Дарбу 121
— де Рама вторая 352
— — — первая 352
— Дини 378, 416
— Карно вторая 227
— — первая 226
— Котельникова 575, 576, 577
— Лебега о монотонной сходимости 390
— — об ограниченной сходимости 389
— о главном члене асимптотики интеграла 610
— о конечном приращении 81
— о неявной функции 103
— о переносе 577
— о среднем для гармонических функций 281
— — — интеграла 129
— об асимптотическом разложении интегралов Лапласа 613
— об обратном отображении 111
— Пифагора 495
— Планшереля 580
— Пуанкаре 289, 345, 353
— Стоуна 397, 399
— Таубера 389
— тауберова типа 388, 389
— Уитни 173, 327
— Фейера 529, 548
— Фубини 132
— Харди 389
Теплоемкость 224
Течение плоскопараллельное 302
Тождество гомотопии 344
— *Якоби* 79
Томсон (*W Thomson*) 225, 248
Топология 19, 20, 23
Топологий сравнение 24
Точка края 182, 313
Трехгранник сопровождающий 80

Уитни (*Whitney*) 153, 173, 327
Уклонение средне квадратичное функций 518
Умножение внешнее 197
Уравнение адиабаты 226
— Бесселя 385, 387, 403
— волновое 301, 482, 483, 572
— — неоднородное 301
— гипергеометрическое 386
— колебаний струны 507
— Лапласа 280, 297, 578
— Майера 225
— неразрывности 298
— Пуассона 292, 294, 297, 484
Уравнение с разделяющимися переменными 227
— состояния 223
— теплопроводности 296, 481, 573
— Эйлера гидродинамическое 300
— Эйлера—Лагранжа 98
Уравнения динамики сплошной среды 298, 300
— Коши—Римана 302
— магнитостатики 280, 294
— Максвелла 258, 259, 280, 291, 292, 294, 303
Условие интегрируемости необходимое 115
— калибровочное 304
Условия Дини 524
— полноты ортонормальной системы 502
— потенциальности поля достаточные 285, 288
— — — необходимые 282
— экстремума 94
Усреднение функции 485

Фаза колебания 551
Фарадей (*Faraday*) 234
Федорюк 586
Фейер (*Fejér*) 528, 529, 548
Фейнман (*Feynman*) 257
Фильтр низкой частоты 554
Форма билинейная невырожденная 54
— — положительная 54
— — эрмитова 54
— дифференциальная 199
— — на многообразии 333
— — — — гладкая 335
— — — — финитная 337
— — — поверхности 209
— замкнутая 289, 345
— кососимметрическая 197
— объема 229, 230
— потока 200
— работы 200
— точная 289, 345
Формула асимптотическая 587
— Валлиса 425, 652
— Гаусса 438
— Гаусса—Остроградского 241, 248, 272, 296, 480
— гомотопии 353
— Грина 236, 248, 278, 486
— дополнения для гамма-функции 431
— замены переменных в интеграле 141
— Коши—Адамара 368
— Лежандра 436
— Лейбница 402
— Ньютона—Лейбница 271
— обращения преобразования Фурье 560, 569
— понижения для бета функции 429
— — — гамма-функции 430
— Пуассона 574, 582, 583
— Стокса 244, 246, 248, 272, 278, 338, 342, 351
— Тейлора 93
— Эйлера 436
— Эйлера—Гаусса 431
Формулы Бореля 571
— дифференциальные теории поля 259, 260
— интегральные теории поля 273, 277, 278
— Френе 80
Френе (*Frenet*) 80
Френель (*Fresnel*) 600
Фреше (*Fréchet*) 21
Фубини (*Fubini*) 131, 132
Функция аппаратная прибора 440, 460
— Бесселя 385, 387, 406, 407, 612
— бета Эйлера 428

Функция быстро убывающая 565, 567
— влияния 460
— гамма Эйлера 428, 528, 611, 618, 624
— — — неполная 599
— гармоническая 280, 297
— дельта Дирака (δ функция) 275, 445, 453, 475, 549, 550, 582, 583
— дзета Римана 438
— Дирихле 356
— замены координат 313
— импульсная 440
— кусочно непрерывная 525
— — непрерывно дифференцируемая 525
— локально интегрируемая 442
— обобщенная 452, 453, 474
— — регулярная 454
— — сингулярная 454
— отсчетов 578
— производящая 462
— равномерно непрерывная на множестве 447
— тока 302
— фазовая 623
— финитная 442
— Хевисайда 456, 464, 466
Функции асимптотически совпадающие 592
— Радемахера 515
— сферические 513
— Хаара 515
— Эрмита 514
Функционал линейный 58
— полилинейный 58
Фурье (*J. Fourier*) 488, 490, 497, 499, 506, 507, 544, 546, 548, 551—583, 622, 628, 629

Хаар (*Haar*) 515
Характеристика прибора спектральная 553
Харди (*Hardy*) 389
Хаусдорф (*Hausdorff*) 21, 22, 312
Хевисайд (*Heaviside*) 389

Цепочка карт многообразия 322
— — — дезориентирующая 322
— — — противоречивая 322
Цепь 349
Цикл 350
— Карно 226
Циклы гомологичные 350
Цилиндр 170
Циркуляция векторного поля 271, 272, 283

Частота гармоническая 551
— собственная колебаний струны 508
Чебышев 492, 510, 514
Чезаро (*Cesàro*) 388
Числа собственные задачи 508

Шар 15, 183, 314
Шварц Г (*H Schwartz*) 196
Шварц Л. (*L. Schwartz*) 455, 581
Шмидт (*E Schmidt*) 492
Штурм (*F Sturm*) 512

Эйлер (*Euler*) 98, 300, 424, 428, 431, 432, 436, 528, 557, 570, 599, 611
Эквивалентность асимптотическая 587
Экстремум внутренний 94
— условный 112
Элемент объема 230
Эрдейи (*Erdelyi*) 600, 623, 628
Эрмит (*Hermite*) 514

Явление Гиббса 534, 547
Ядро Дирихле 522, 524, 548
— интегрального оператора 563
— Пуассона для круга 462
— Фейера 528

Владимир Антонович Зорич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть II

Редактор *В. В Абгарян*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева* Корректор *Н. Д Дорохова*

ИБ № 11789

Сдано в набор 01.02 83. Подписано к печати 06.01 84 Формат 60×90¹/₁₆ Бумага книжно-журнальная. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ л. 40. Усл. кр.-отт. 40. Уч.-изд. л. 48,44. Тираж 35 000 экз Заказ 374. Цена 1 р 90 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с матриц, ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского производственно-технического объединения «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр, 15, в Ленинградской типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 191126, Ленинград, Социалистическая ул, 14.