



Р. В. ФИЛЬЦ, Н. Н. ЛЯБУК

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЯВНОПОЛЮСНЫХ
СИНХРОННЫХ
МАШИН**

Р. В. Фильц, Н. Н. Лябук

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВНОПОЛЮСНЫХ СИНХРОННЫХ МАШИН

ЛЬВОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «СВИТ»
1991

Математическое моделирование явноплюсных синхронных машин / Фильц Р. В., Лябук Н. Н. — Львов: Свит, 1991. — 176 с.
ISBN 5-11-000635-0.

Изложена современная теория математического моделирования, основанная на использовании численных методов анализа и ориентированная на применение цифровых ЭВМ. Описаны получившие применение в промышленности и находящиеся на этапе внедрения модели, обеспечивающие выполнение расчетов процессов в ЯСМ на различных уровнях адекватности.

Для преподавателей, аспирантов, научных работников, специализирующихся в области проектирования, исследования и разработки электромеханических преобразователей и электромашинных систем. Ил. 38. Библиогр.: 116 назв.

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. В. И. Радин
(Моск. НИЦ ПО им. Владимира Ильича),
д-р техн. наук, проф. Л. И. Глухивский
(Львов. политехн. им-т)

Редакция научно-технической
и природоведческой литературы
Редактор Л. А. Азизян

Ф 2202070100—029 29—91
М225(04)—91

ISBN 5-11-000635-0

© Фильц Р. В., Лябук Н. Н., 1991

Явноплюсным синхронным машинам (ЯСМ) принадлежит одно из доминирующих мест как в генерировании, так и в потреблении электрической энергии.

Современные достижения в области производства и применения ЯСМ являются следствием гармонического сочетания успехов технологии в электромашиностроении, металлургии, полупроводниковой технике и других отраслях промышленности и теории как аппарата, позволяющего определять (прогнозировать) поведение ЯСМ в любых условиях работы путем математического моделирования и обеспечивающего возможность физического осмысления получаемых количественных результатов.

Теория ЯСМ прошла на протяжении столетия весьма сложный путь развития, на котором относительно кратковременные, но существенные по значимости всплески, обусловленные возникновением фундаментальных идей, чередовались с более длительными интервалами кропотливого совершенствования применительно к решению конкретных важных для практики проблем и даже с неудачами, связанными с попытками распространения идей фундаментального характера на чрезмерно широкие классы задач без предварительного математического обоснования.

Если рассматривать развитие теории ЯСМ под углом зрения применяемых математических подходов, то в нем можно выделить три стадии, которые частично перекрываются во времени.

Первоначально теория ЯСМ развивалась на базе аналитического описания режимов и процессов в предположении линейности зависимостей потокосцеплений от токов, т. е. без учета насыщения магнитопровода. Фундаментальными идеями, которые привели в конечном итоге к созданию классической теории ненасыщенной ЯСМ, были метод двух реакций как физическая основа диаграммы Blondеля и преобразования Парка как математическая основа теории переходных процессов ЯСМ с симметричной схемой в статорной цепи [8, 19, 22, 29, 32, 37, 40, 41, 62, 68, 70, 109, 115, 116].

Принципиально важной особенностью теории ненасыщенной ЯСМ является тот факт, что она формулируется в виде уравнений. Исходная система алгебро-дифференциальных уравнений (САДУ) составляется применительно к реальным (физическим) электрическим контурам на основе физических законов с учетом четко сформулированных исходных допущений. В дальнейшем выполняется замена переменных (так называемые преобразования координат $d, q, 0$), позволяющая упростить решаемую САДУ. После аналитического решения преобразованной системы выполняется

обратный переход к исходным (физическим) переменным. При таком строгом математическом подходе к решению проблемы коэффициенты исходных и преобразованных уравнений и получаемых их решений имеют вполне определенное физическое содержание. По преобразованным уравнениям и их решениям могут быть составлены схемы замещения и построены векторные диаграммы и геометрические места токов, напряжений, намагничивающих сил и потокосцеплений, которые в дальнейшем могут быть использованы как при выполнении расчетов, так и для интерпретации (физической либо геометрической) соотношений и связей в ЯСМ.

Следует отметить, что последовавшие за преобразованиями Парка попытки применения в теории ЯСМ преобразований других видов, например, к двухфазным неподвижным осям (α , β , 0) и к симметричным составляющим для мгновенных значений (1, 2, 0) не дали весомых результатов.

В связи с постоянной тенденцией к повышению использования активных материалов и, в частности, сталей магнитопроводов, основное допущение теории ненасыщенной ЯСМ — о линейности зависимостей потокосцеплений от токов — уже в 20-е годы обнаружилось более или менее сильно выраженные несоответствия результатов расчета данным эксперимента, что неизбежно должно было привести к попыткам учета влияния насыщения на режимы, характеристики и процессы ЯСМ. Этим началась еще до завершения первой второй стадия развития теории, продолжавшаяся до 60-х годов.

Отметим, что на второй стадии, несмотря на успешное решение отдельных практических задач, плодотворных идей, способных обеспечить построение теории насыщенной ЯСМ на достаточно общем уровне, не оказалось. Трудности аналитического решения нелинейных уравнений (алгебраических и тем более дифференциальных), с одной стороны, и весьма скромные вычислительные средства (почти не отличающиеся от применявшихся в прошлом веке) — с другой, вынуждали исследователей искать выход в приспособлении найденных в теории ненасыщенной ЯСМ решений к реальным насыщенным машинам путем соответствующего подбора численных значений коэффициентов этих уравнений. При этом вследствие настроенности на получение в первую очередь утилитарных результатов вопросы математической строгости и согласованности с физикой явлений зачастую оставались в тени.

Одним из наиболее употребительных приемов, используемых при таком подходе, было представление потокосцеплений контуров насыщенной ЯСМ через токи ее контуров с помощью так называемых насыщенных значений статических индуктивностей. Для определения последних предложено множество способов как расчетных, так и экспериментальных. Эти способы, однако, как правило, приводят для одной и той же ЯСМ при вполне однозначном ее магнитном состоянии (задаваемом токами контуров и углом поворота ротора) к существенно отличающимся друг от друга

количественным результатам. Наиболее показательным с этой точки зрения является противопоставление предложенных в [42, 51, 57] способов, в которых насыщенная ЯСМ (по аналогии с ненасыщенной) описывается в симметричных установившихся режимах работы двумя параметрами — собственными синхронными индуктивностями по продольной и поперечной осям, способу, предложенному в [114], согласно которому для описания насыщенной ЯСМ в этих режимах требуется четыре параметра — две собственных и две взаимных синхронных индуктивности, причем последние отнюдь не являются малыми. Этот пример наглядно показывает, что, следуя концепции насыщенных значений статических индуктивностей, можно было бы применять для количественного описания насыщенной ЯСМ либо два, либо четыре параметра — в зависимости от субъективного желания пользователя и, следовательно, эти индуктивности нельзя рассматривать как объективные параметры машины.

Важным достижением теории ЯСМ на второй стадии ее развития явилось исследование влияния насыщения зубцовой зоны на картину рабочего магнитного поля в воздушном зазоре и создание на этой основе весьма точного графоаналитического итерационного метода расчета установившихся режимов ЯСМ [50, 63]. Работы этого направления подготовили фундамент к осмыслению физической реальности индуктивной связи между взаимно ортогональными контурами в насыщенной ЯСМ как явления, аналогичного размагничивающему действию поперечной реакции якоря в машинах постоянного тока [9, 11, 27].

Объективные предпосылки для интенсивного прогресса, определившие начало третьей стадии в развитии теории ЯСМ, возникли с появлением ЭВМ.

Значительно более высокое быстродействие ЭВМ по сравнению с быстродействием ручных вычислительных средств позволило решить ряд задач расчета режимов, характеристик и процессов ЯСМ с приближенным учетом насыщения магнитопровода при сохранении прежнего методологического подхода, в том числе с применением насыщенных значений статических индуктивностей [4, 10].

Наряду с этим не прекращались попытки поиска новых методов, нацеленных на описание электромагнитных явлений с более высокой точностью. Среди них наибольший резонанс получил метод проводимостей зубцовых контуров [25]. Первоначально он был предложен для исследования ненасыщенных электрических машин с учетом двусторонней зубчатости. Его распространение на машины с насыщающимися магнитопроводами сопряжено с применением переменных магнитных проводимостей, которые по своему математическому содержанию аналогичны насыщенным значениям статических индуктивностей.

Кардинальное решение проблемы повышения точности математического моделирования насыщенных ЯСМ возможно на основе расчетов электромагнитных полей в двумерной постановке.

Однако при современном уровне быстродействия ЭВМ достижения в этом направлении ограничиваются пока расчетами магнитных полей при заданных токах и положении ротора [69, 113].

Цифровые ЭВМ обладают по сравнению с ручными вычислительными средствами принципиально новым качеством, состоящим в том, что решение любой задачи, независимо от уровня сложности алгоритма, может быть полностью автоматизировано. Это позволило еще в 60-е годы поставить вопрос о построении теории ЯСМ без прежних ограничений, т. е. на методологической основе, восходящей непосредственно к классическим ценностям теоретической электротехники и использующей математический аппарат преимущественно численных методов анализа. Краеугольным камнем этой методологической основы был отказ от понятия насыщенных значений статических индуктивностей в пользу дифференциальных (определяемых в теоретической электротехнике [38] как частные производные потокосцеплений электрических контуров по токам контуров), поскольку дифференциальные индуктивности для любого магнитного состояния объекта, заданного совокупностью токов контуров этого объекта, единственны (однозначны) независимо от магнитных свойств среды, в которой эти контуры расположены (линейная либо нелинейная, однородная либо неоднородная, изотропная либо анизотропная). Фундаментальное значение единственности дифференциальных индуктивностей для теории состоит в том, что они имеют вполне определенное физическое содержание, могут быть измерены экспериментально и полезны для физического объяснения электромагнитных процессов.

Первоначально концепция дифференциальных индуктивностей как объективных параметров системы индуктивно связанных контуров была реализована применительно к неявнополюсным машинам с насыщающейся главной магнитной цепью [84, 85]. Введение в [85] понятия тензора рабочих дифференциальных индуктивностей неявнополюсной машины как производной векторной функции, отражающей зависимость вектора рабочего потокосцепления от вектора намагничивающего тока, не только позволило создать удобные алгоритмы расчета режимов и процессов машин этого вида, но и теоретически укрепило концепцию дифференциальных индуктивностей как непосредственно вытекающую из математического аппарата современной физики — тензорного анализа.

Дальнейшая реализация этой концепции осуществлялась по нескольким параллельным направлениям — применительно к электромеханическим преобразователям различных видов. Однако наиболее весомые как теоретические, так и практические результаты были достигнуты в области ЯСМ. Одновременно выполнялись возможные обобщения. Важнейшие из них — математическое обоснование неединственности насыщенных значений статических индуктивностей и единственности дифференциальных индуктивностей [106], теорема взаимности для дифференциальных индуктивностей [108], введение понятия электромагнитных параметров как

матрицы, состоящей из индуктивностей и коэффициентов э.д.с. движения [101], общий алгоритм определения электромагнитных параметров [100, 101] — стали основой для создания теории обобщенного электромеханического преобразователя (ЭМП) как устройства с шихтованным ферромагнитным магнитопроводом произвольной конструкции и уложенными на нем n электрическими контурами и характеризуемого χ перемещениями (переменными геометрическими координатами, определяющими положение подвижных частей преобразователя) [96].

Согласно теории обобщенного ЭМП расчету режимов, характеристик и процессов преобразователя любого конкретного вида должна предшествовать работа, состоящая из следующих этапов: формулирования (постановки) задачи, создания математической модели и составления программы решения задачи на ЭВМ.

Постановка задачи содержит характеристику преобразователя (конкретизацию его конструкции), схему его включения, исходные допущения (на физическом уровне в вербальном изложении) и содержание конечной цели.

В понятие математической модели входят формирование на основе законов физики и в соответствии с принятыми исходными допущениями системы уравнений, необходимой и достаточной для достижения поставленной цели, и аналитическое преобразование этой системы, обеспечивающее оптимальность решения задачи на ЭВМ.

Первые два этапа являются стержнем теории ЭМП рассматриваемого вида. Составление программы решения задачи на ЭВМ по созданной математической модели — рутинная процедура, выполняемая специалистами в области программирования, поэтому этот этап не следует рассматривать как составную часть теории ЭМП. Степень соответствия результатов расчета данным эксперимента, или, иными словами, уровень адекватности математической модели определяется практически исключительно исходными допущениями. С другой стороны, повышение уровня адекватности модели неизбежно связано с ее усложнениями и, в конечном итоге, с увеличением стоимости решения задачи на ЭВМ. Поэтому выбор исходных допущений является очень ответственным моментом в разработке теории ЭМП.

Анализ литературы и дополнительные экспериментальные исследования показали, что удовлетворительная для большинства практических задач точность математического моделирования ЯСМ достигается при исходных допущениях, которые в основном достаточно полно сформулированы в [50, 63] и отражают по существу расчет рабочего магнитного поля по уравнениям магнитостатики в одномерной постановке. Вместе с тем при этих допущениях быстродействие математических моделей при их реализации на современных ЭВМ оказывается достаточно высоким. Поэтому дальнейшие усилия были направлены на создание теории насыщенной ЯСМ, основанной на расчете рабочего магнитного поля в одномерной постановке.

Первоначально математические модели ЯСМ разрабатывались на базе данных методов численного интегрирования нелинейных систем дифференциальных уравнений. При этом для описания электромагнитных связей использовались электромагнитные параметры (дифференциальные индуктивности и коэффициенты э. д. с. вращения). Решение отдельных задач при таком подходе изложено в работах авторов [6, 18, 20, 47, 49, 74—79, 82, 86, 89—93, 95, 97, 102—105, 107]. Переход к неявным методам численного интегрирования потребовал дальнейшего развития теории ЭМП, результатом которого явилось введение понятия магнитно-механической характеристики (ММХ) преобразователя как зависимости вектора потокоцеплений и электродинамических сил от вектора токов и перемещений и понятия магнитно-механических параметров (ММП) как производной этой зависимости (матрицы Якоби) [94].

В предлагаемой монографии впервые в систематизированном виде изложены основы ориентированной на применение ЭВМ теории ЯСМ без учета и с учетом насыщения магнитопровода, базирующейся на расчете ее рабочего магнитного поля в одномерной постановке и использовании как явных, так и неявных методов численного интегрирования.

Монография состоит из пяти разделов. В первом разделе изложена математическая теория обобщенного ЭМП, ориентированная на применение численных методов анализа и современных вычислительных средств. Она является основой для создания математических моделей ЯСМ и электромеханических преобразователей других видов. Во втором разделе приведены математические модели ЯСМ с насыщающимися магнитопроводами в фазных координатах, базирующиеся на расчете рабочего магнитного поля в одномерной постановке, а также модели ненасыщенной ЯСМ в этих же координатах. В третьем разделе изложены соответствующие им модели насыщенной и ненасыщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$. В четвертом разделе приведены модели ЯСМ в фазных координатах и в координатах $d, q, 0$, базирующиеся на описании нелинейных магнитных связей с помощью эквивалентной характеристики магнитопровода как зависимости изображающего вектора потока основной гармоники рабочего поля от изображающего вектора основной гармоники результирующей намагничивающей силы. Такие модели по уровню адекватности несколько уступают моделям, изложенным в разделах 2 и 3, но существенно превосходят их по быстродействию. Обсуждение результатов математического моделирования и экспериментальной проверки моделей приведено в пятом разделе. Здесь из-за ограничения объема монографии изложены только наиболее важные особенности, характеризующие влияние насыщения элементов магнитопровода ЯСМ на параметры, статические характеристики и переходные процессы. Более подробно изложение ряда вопросов влияния насыщения на поведение ЯСМ, работающих отдельно либо в электромеханических системах, читатель сможет найти в работах [5, 14, 15, 24, 31, 43—48, 59, 61, 105].

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ (ЭМП)

1.1. Объект исследования и постановка задачи

Под обобщенным электромеханическим преобразователем (ЭМП) будем понимать устройство произвольной конструкции, содержащее n электрических контуров, взаимное положение которых и их положение относительно ферромагнитных масс определяется l переменными геометрическими координатами, называемыми в дальнейшем перемещениями. Материалы ферромагнитных элементов преобразователя полагаем безгистерезисными, а магнитопровод — шихтованным.

В этом разделе будут рассмотрены основные положения теории математического моделирования переходных электромеханических процессов ЭМП применительно к сформулированному выше объекту исследования — обобщенному ЭМП. Материал этой главы служит математической основой для моделирования переходных процессов явнополюсных синхронных машин (ЯСМ), излагаемого в разделах 2, 3, 4.

1.2. Магнитно-механическая характеристика обобщенного ЭМП

Пусть для обобщенного ЭМП заданы значения токов i_1, \dots, i_n и перемещений $\gamma_1, \dots, \gamma_l$. Тогда при заранее принятых допущениях, вытекающих из требуемого уровня адекватности математической модели преобразователя, при известных геометрии электрических контуров и магнитопровода и характеристиках намагничивания материалов магнитопровода всегда можно рассчитать поле ЭМП. Таким образом, совокупность токов i_1, \dots, i_n и перемещений $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ полностью задает (определяет) магнитное состояние преобразователя. По заданным токам и перемещениям и рассчитанному магнитному полю ЭМП нетрудно вычислить потокоцепления Ψ_1, \dots, Ψ_n его контуров и обобщенные электродинамические силы M_1, \dots, M_l , действующие в направлениях перемещений $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ соответственно (если перемещение γ_j является уг-

ловым, то M_j представляет собой электродинамический момент, а если перемещение γ_j является линейным, то M_j есть электродинамическая сила).

Вспомогательные переменные m_1, \dots, m_q , зависящие от токов и перемещений и необходимые для вычисления потокосцеплений и обобщенных сил при заданных токах и перемещениях, будем называть внутренними магнитными координатами (ВМК) преобразователя. В качестве ВМК могут использоваться магнитные потоки и падения магнитных напряжений элементов магнитной цепи преобразователя (если состояние магнитопровода описывается методами теории цепей), магнитные потенциалы и векторы магнитной индукции и напряженности магнитного поля (если для описания состояния магнитопровода применяются дифференциальные уравнения магнитостатики) и другие величины. Физическое содержание и количество ВМК всецело определяется требуемым уровнем адекватности разрабатываемой математической модели ЭМП.

Систему уравнений, содержащую в качестве переменных потокосцепления контуров, обобщенные электродинамические силы, токи контуров, перемещения и ВМК преобразователя и позволяющую рассчитать ВМК, потокосцепления и электродинамические силы при любых задаваемых значениях токов и перемещений, будем называть неявной магнитно-механической характеристикой (ММХ) преобразователя.

Неявная ММХ любого ММП может быть представлена совокупностью трех подсистем уравнений, из которых первая состоит из q уравнений, необходимых для расчета магнитного поля преобразователя при принятых исходных допущениях и задаваемых токах и перемещениях (т. е. для вычисления ВМК), а вторая и третья определяют соответственно потокосцепления и электродинамические силы через токи, перемещения и ВМК. Эти подсистемы имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} f_1 [i_1, \dots, i_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l, m_1, \dots, m_q] &= 0; \\ \vdots \\ f_q [i_1, \dots, i_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l, m_1, \dots, m_q] &= 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 [i_1, \dots, i_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l, m_1, \dots, m_q]; \\ \vdots \\ \psi_n &= \varphi_n [i_1, \dots, i_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l, m_1, \dots, m_q]; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \xi_1 [i_1, \dots, i_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l, m_1, \dots, m_q]; \\ \vdots \\ M_l &= \xi_l [i_1, \dots, i_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l, m_1, \dots, m_q]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Объединим однотипные по содержанию переменные в вектор-столбцы

$$\begin{aligned} i &= (i_1, \dots, i_n)_*; \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)_*; \\ \psi &= (\psi_1, \dots, \psi_n)_*; \quad M = (M_1, \dots, M_l)_*; \\ m &= (m_1, \dots, m_q)_* \end{aligned} \quad (1.4)$$

и назовем их соответственно вектором токов, вектором перемещений, вектором потокосцеплений, вектором электродинамических сил и вектором ВМК. Здесь и далее символ «*» обозначает транспонирование.

С учетом обозначений (1.4) подсистемам (1.1)–(1.3) соответствуют векторные уравнения

$$f [i, \gamma, m] = 0; \quad (1.5)$$

$$\psi = \varphi [i, \gamma, m]; \quad (1.6)$$

$$M = \xi [i, \gamma, m], \quad (1.7)$$

где

$$f = (f_1, \dots, f_q)_*; \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)_*; \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)_* \quad (1.8)$$

— соответственно q -, n - и l -мерная вектор-функции.

Согласно приведенному выше определению, неявная ММХ обобщенного ММП математически описывается системой скалярных уравнений (1.1)–(1.3) либо равноценной ей системой векторных уравнений (1.5)–(1.7).

Совокупность токов и перемещений (совокупность векторов i и γ) будем называть аргументом ММХ.

Система скалярных уравнений (1.1) или равноценное ей векторное уравнение (1.5) позволяют рассчитать ВМК при любом значении аргумента ММХ, поэтому назовем систему (1.1) (или уравнение (1.5)) неявной внутренней ММХ преобразователя.

Если бы удалось решить аналитически систему (1.1) относительно ВМК m_1, \dots, m_q , то мы получили бы совокупность скалярных зависимостей (формул)

$$\begin{aligned} m_1 &= m_1 [i_1, \dots, i_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l]; \\ \vdots \\ m_q &= m_q [i_1, \dots, i_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l], \end{aligned} \quad (1.9)$$

или с учетом обозначений (1.4) одну векторную зависимость

$$m = m [i, \gamma]. \quad (1.10)$$

Систему (1.9) или равноценное ей векторное уравнение (1.10) будем называть явной внутренней ММХ преобразователя.

Получение явной внутренней ММХ из неявной внутренней ММХ аналитическим путем возможно только для простейших случаев, не представляющих в настоящее время сколь-нибудь серьезного практического интереса. Если же такого аналитического решения получить не удастся, то можно воспользоваться численным способом, т. е. вычислять значения ВМК, соответствующие любой задаваемой совокупности токов и перемещений, решая систему (1.1) численно. Повторив эту процедуру на достаточно густой сетке точек в $(n+l)$ -мерном пространстве аргумента ММХ, мы рассчитали бы явную внутреннюю ММХ преобразователя, представленную в табличном виде, и применяя к последней степенную интерполяцию, получили бы выражение явной внутренней ММХ в виде

совокупности q степенных полиномов от $n+l$ независимых переменных. Отметим, что такое численное преобразование неявной внутренней ММХ в явную для всего $(n+l)$ -мерного гиперкуба в пространстве аргумента ММХ было бы чрезвычайно громоздким. Поэтому оно при математическом моделировании ЭМП не применяется (за исключением тех редких случаев, где оно по сравнению с другими методами математического моделирования все же может оказаться предпочтительным). Тем не менее, формулирование понятия явной внутренней ММХ полезно в теории обобщенного ЭМП, и практическая ценность этого понятия будет очевидна из дальнейшего изложения.

Подставив (1.9) в (1.2), (1.3), получаем совокупности скалярных зависимостей (формулы)

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_1 [i_1, \dots, i_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l]; \\ &\vdots \\ \psi_n &= \psi_n [i_1, \dots, i_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l]; \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1 [i_1, \dots, i_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l]; \\ &\vdots \\ M_l &= M_l [i_1, \dots, i_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l], \end{aligned} \quad (1.12)$$

или, с учетом обозначений (1.4), векторные зависимости

$$\psi = \psi [i, \gamma]; \quad (1.13)$$

$$M = M [i, \gamma]. \quad (1.14)$$

Они позволяют непосредственно вычислять потокосцепления и электродинамические силы для любого задаваемого значения аргумента ММХ. Поэтому скалярные зависимости (1.11), (1.12) или равноценные им векторные зависимости (1.13), (1.14) будем называть явной внешней ММХ преобразователя.

Объединив вектор-столбцы ψ и M в один вектор-столбец $(\psi, M)_*$ и вектор-столбцы i и γ в один вектор-столбец $(i, \gamma)_*$, представим явную внешнюю ММХ одним векторным выражением

$$(\psi, M)_* = (\psi, M)_* [(i, \gamma)_*]. \quad (1.15)$$

Отметим, что при решении практических задач часто удается представить неявную ММХ в виде

$$f [i, \gamma, m_1, m_2] = 0; \quad (1.16)$$

$$m_2 = m_2 [i, \gamma, m_1]; \quad (1.17)$$

$$\psi = \varphi [i, \gamma, m_1, m_2]; \quad (1.18)$$

$$M = \xi [i, \gamma, m_1, m_2], \quad (1.19)$$

где m_1, m_2 — составляющие вектора $m = (m_1, m_2)_*$. Такое представление неявной ММХ математически отражает то обстоятельство, что из общего числа q ВМК оказывается возможным выделить совокупность q_2 ВМК, объединяемых вектором m_2 , которая выражается явной формулой (1.17) через токи, перемещения и остальные $q_1 = q - q_2$ ВМК, входящих в вектор m_1 , но при этом непосредственная подстановка выражения (1.17) в уравнения (1.16), (1.18),

(1.19) (сводящая их, очевидно, к виду (1.5)—(1.7)) нецелесообразна, так как она привела бы к чрезмерно громоздким уравнениям.

Представление ММХ в виде (1.16)—(1.19) можно рассматривать как простейший частный случай представления ММХ системой уравнений:

$$\begin{aligned} f [i, \gamma, m_1, m_2, \dots, m_p] &= 0; \\ m_2 &= m_2 [i, \gamma, m_1]; \\ m_3 &= m_3 [i, \gamma, m_1, m_2]; \\ &\vdots \\ m_p &= m_p [i, \gamma, m_1, \dots, m_{p-1}]; \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\psi = \varphi [i, \gamma, m_1, \dots, m_p]; \quad (1.21)$$

$$M = \xi [i, \gamma, m_1, \dots, m_p], \quad (1.22)$$

в которой внутренняя ММХ (1.20) представлена уравнением и совокупностью рекуррентных отношений. Такую внутреннюю ММХ будем называть рекуррентной неявной внутренней ММХ.

Как известно, коэнергия магнитного поля обобщенного ЭМП определяется выражением

$$U [i, \gamma] = U [i_*, \gamma_*] = \int_0^{i_*} \psi_* [i, \gamma] di = \int_0^{i_*} (di_*) \psi [i, \gamma], \quad (1.23)$$

где ψ_* , i_* , γ_* — вектор-строки, получаемые транспонированием вектор-столбцов ψ , i , γ соответственно. Коэнергия является функцией состояния, т. е. она при любом неизменном векторе γ определяется только значением вектора i и не зависит от пути в n -мерном пространстве вектора токов, по которому произошло изменение вектора токов от нуля до его конечного значения.

Из (1.23) непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\partial U [i_*, \gamma_*]}{\partial i_*} = \left(\frac{\partial U}{\partial i_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial i_n} \right)_*; \\ \psi_* &= \frac{\partial U [i, \gamma]}{\partial i} = \left(\frac{\partial U}{\partial i_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial i_n} \right), \end{aligned} \quad (1.24)$$

Электродинамическая сила M_j , действующая в направлении перемещения γ_j , численно равна частной производной коэнергии поля по этому перемещению [70]. Следовательно,

$$\begin{aligned} M &= \frac{\partial U [i_*, \gamma_*]}{\partial \gamma_*} = \left(\frac{\partial U}{\partial \gamma_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial \gamma_l} \right)_*; \\ M_* &= \frac{\partial U [i, \gamma]}{\partial \gamma} = \left(\frac{\partial U}{\partial \gamma_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial \gamma_l} \right), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где M_* — вектор-строка, получаемая транспонированием вектор-столбца M .

Таким образом, векторы потокосцеплений и электродинамических сил определяются как частные производные одной и той же функции состояния — коэнергии магнитного поля — соответственно по вектору токов и по вектору перемещений. Это обстоятельство отражает одно из наиболее глубоких свойств магнитно-механической характеристики обобщенного ЭМП.

1.3. Магнитно-механические параметры обобщенного ЭМП

Назовем внешними магнитно-механическими параметрами (ММП) обобщенного ЭМП полную производную его явной внешней магнитно-механической характеристики (1.15) по аргументу этой характеристики. Эта производная изображается матрицей

$$P_e = \frac{d(\Psi, M)_*}{d(i, \gamma)_*} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial i} & \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial M}{\partial i} & \frac{\partial M}{\partial \gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L & K \\ K' & G \end{vmatrix}, \quad (1.26)$$

блоки которой в соответствии с (1.11), (1.12) имеют вид

$$L = \frac{\partial \Psi}{\partial i} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial i_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial i_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial i_n} \end{vmatrix}; \quad K = \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial \gamma_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial \gamma_l} \end{vmatrix};$$

$$K' = \frac{\partial M}{\partial i} = \begin{vmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial i_1} & \dots & \frac{\partial M_1}{\partial i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial M_l}{\partial i_1} & \dots & \frac{\partial M_l}{\partial i_n} \end{vmatrix}; \quad G = \frac{\partial M}{\partial \gamma} = \begin{vmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial M_1}{\partial \gamma_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial M_l}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial M_l}{\partial \gamma_l} \end{vmatrix}. \quad (1.27)$$

и представляют собой матрицы, размерности которых равны соответственно $n \times n$, $n \times l$, $l \times n$ и $l \times l$.

Легко видеть, что блок L матрицы внешних ММП представляет собой известную в теории ЭМП матрицу индуктивностей преобразователя, а блок K — матрицу его коэффициентов э. д. с. движения.

Назовем внутренними магнитно-механическими параметрами обобщенного ЭМП полную производную его явной внутренней магнитно-механической характеристики (1.10). Эта производная изображается матрицей

$$P_i = \frac{dm}{d(i, \gamma)_*} = \begin{vmatrix} \frac{\partial m}{\partial i} & \frac{\partial m}{\partial \gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Theta & \Gamma \end{vmatrix}, \quad (1.28)$$

блоки которой в соответствии с (1.9) имеют вид

$$\Theta = \frac{\partial m}{\partial i} = \begin{vmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial i_1} & \dots & \frac{\partial m_1}{\partial i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial m_q}{\partial i_1} & \dots & \frac{\partial m_q}{\partial i_n} \end{vmatrix}; \quad \Gamma = \frac{\partial m}{\partial \gamma} = \begin{vmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial m_1}{\partial \gamma_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial m_q}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial m_q}{\partial \gamma_l} \end{vmatrix} \quad (1.29)$$

и изображаются матрицами, размерности которых равны соответственно $q \times n$ и $q \times l$.

Полные дифференциалы векторов потокосцеплений, электродинамических сил и внутренних магнитных координат определяются соответственно по формулам

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial i} di + \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} d\gamma = L di + K d\gamma; \quad (1.30)$$

$$dM = \frac{\partial M}{\partial i} di + \frac{\partial M}{\partial \gamma} d\gamma = K' di + G d\gamma; \quad (1.31)$$

$$dm = \frac{\partial m}{\partial i} di + \frac{\partial m}{\partial \gamma} d\gamma = \Theta di + \Gamma d\gamma, \quad (1.32)$$

где di , $d\gamma$ — дифференциалы векторов токов и перемещений. Таким образом, ММП являются коэффициентами линейных однородных зависимостей приращений потокосцеплений, электродинамических сил и ВМК от приращений токов и перемещений. Эти зависимости являются точными, строго говоря, лишь для бесконечно малых приращений токов и перемещений, но они практически пригодны при условии, что эти приращения достаточно малы.

При математическом моделировании ЭМП мы располагаем, как правило, только его неявной ММХ. Рассмотрим способ вычисления внутренних и внешних ММП на основе неявной ММХ преобразователя.

Дифференцируя уравнение (1.5) по векторам i и γ и учитывая, что они взаимно независимы и что согласно явной внутренней ММХ (1.10) вектор ВМК зависит от векторов i и γ , имеем

$$\frac{\partial f}{\partial i} + \frac{\partial f}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial i} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma} + \frac{\partial f}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \gamma} = 0. \quad (1.33)$$

Частные производные, входящие в (1.33), согласно (1.1) изображаются матрицами

$$\frac{\partial f}{\partial i} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial i_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial i_1} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial i_n} \end{vmatrix} = f^i; \quad \frac{\partial f}{\partial \gamma} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial \gamma_l} \end{vmatrix} = f^\gamma;$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial m_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial m_q} \end{vmatrix} = f^m, \quad (1.34)$$

размерности которых равны соответственно $q \times n$, $q \times l$ и $q \times q$.

При правильно составленной системе уравнений (1.1), отражающей неявную внутреннюю ММХ преобразователя, матрица f^m является невырожденной для любого значения аргумента (i, γ). В самом деле, если бы оказалось, что при некотором значении аргумента ММХ матрица f^m вырождена, то это означало бы, что система (1.1) не имеет единственного решения, что противоречило бы положению о единственности магнитостатического поля ЭМП при заданных возбуждающих это поле токах и заданном взаимном положении элементов преобразователя.

Из (1.33) непосредственно вытекают следующие выражения для внутренних ММП:

$$\Theta = \frac{\partial m}{\partial i} = -(f^m)^{-1} f^i; \quad \Gamma = \frac{\partial m}{\partial \gamma} = -(f^m)^{-1} f^\gamma. \quad (1.35)$$

Дифференцируя уравнения (1.6), (1.7) по векторам i и γ и учитывая, что эти векторы взаимно независимы и что согласно явной внутренней ММХ (1.10) вектор ВМК зависит от векторов i и γ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial i} &= \frac{\partial \varphi}{\partial i} + \frac{\partial \varphi}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial i}; & \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} + \frac{\partial \varphi}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \gamma}; \\ \frac{\partial M}{\partial i} &= \frac{\partial \xi}{\partial i} + \frac{\partial \xi}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial i}; & \frac{\partial M}{\partial \gamma} &= \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} + \frac{\partial \xi}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \gamma}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Частные производные, входящие в (1.36), согласно (1.2), (1.3) изображаются матрицами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial i} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial i_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial i_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial i_n} \end{vmatrix} = \varphi^i; & \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \gamma_l} \end{vmatrix} = \varphi^\gamma; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial m} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial m_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial m_q} \end{vmatrix} = \varphi^m; \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial i} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial i_1} & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_l}{\partial i_1} & \dots & \frac{\partial \xi_l}{\partial i_n} \end{vmatrix} = \xi^i; \quad \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial \gamma_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_l}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial \xi_l}{\partial \gamma_l} \end{vmatrix} = \xi^\gamma;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial m} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial m_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_l}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial \xi_l}{\partial m_q} \end{vmatrix} = \xi^m. \quad (1.38)$$

С учетом обозначений (1.27), (1.29), (1.37), (1.38) выражения (1.36) принимают вид

$$\begin{aligned} L &= \varphi^i + \varphi^m \Theta; & K &= \varphi^\gamma + \varphi^m \Gamma; \\ K' &= \xi^i + \xi^m \Theta; & G &= \xi^\gamma + \xi^m \Gamma. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Подставив в (1.39) выражения матриц Θ, Γ согласно (1.35), имеем окончательно

$$\begin{aligned} L &= \varphi^i - \varphi^m (f^m)^{-1} f^i; & K &= \varphi^\gamma - \varphi^m (f^m)^{-1} f^\gamma; \\ K' &= \xi^i - \xi^m (f^m)^{-1} f^i; & G &= \xi^\gamma - \xi^m (f^m)^{-1} f^\gamma. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Для неявной рекуррентной ММХ формулы для определения ММП являются рекуррентными. В этом легко убедиться на примере ММХ вида (1.16) — (1.19). Действительно, продифференцировав ее по вектору i , имеем

$$f^i + f^{m_1} \Theta_1 + f^{m_2} \Theta_2 = 0; \quad (1.41)$$

$$\Theta_1 = \mu_{21} \Theta_2; \quad (1.42)$$

$$L = \varphi^i + \varphi^{m_1} \Theta_1 + \varphi^{m_2} \Theta_2; \quad (1.43)$$

$$K' = \xi^i + \xi^{m_1} \Theta_1 + \xi^{m_2} \Theta_2, \quad (1.44)$$

где

$$f^{m_1} = \frac{\partial f}{\partial m_1}; \quad f^{m_2} = \frac{\partial f}{\partial m_2}; \quad \mu_{21} = \frac{dm_2}{dm_1}; \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{m_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial m_1}; & \varphi^{m_2} &= \frac{\partial \varphi}{\partial m_2}; & \xi^{m_1} &= \frac{\partial \xi}{\partial m_1}; & \xi^{m_2} &= \frac{\partial \xi}{\partial m_2}; \\ \Theta_1 &= \frac{\partial m_1}{\partial i}; & \Theta_2 &= \frac{\partial m_2}{\partial i}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Из уравнений (1.41), (1.42) находим

$$\Theta_1 = -(f^{m_1} + f^{m_2} \mu_{21})^{-1} f^i. \quad (1.47)$$

Таким образом, для вычисления внешних параметров L и K' следует воспользоваться последовательно рекуррентными формулами (1.47), (1.42)—(1.44).

Аналогично, продифференцировав ММХ (1.16)—(1.19) по вектору γ , приходим к рекуррентным формулам

$$\Gamma_1 = \frac{\partial m_1}{\partial \gamma} = - (f^{m_1} + f^{m_2} \mu_{21})^{-1} f_1; \quad (1.48)$$

$$\Gamma_2 = \frac{\partial m_2}{\partial \gamma} = \mu_{21} \Gamma_1; \quad (1.49)$$

$$K = \varphi^T + \varphi^{m_1} \Gamma_1 + \varphi^{m_2} \Gamma_2; \quad (1.50)$$

$$G = \xi^T + \xi^{m_1} \Gamma_1 + \xi^{m_2} \Gamma_2. \quad (1.51)$$

Сопоставляя выражения (1.27) с (1.24), (1.25), находим, что

$$L = \frac{\partial \psi}{\partial i} = \frac{\partial^2 U}{\partial i_* \partial i} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial i_1 \partial i_1} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial i_1 \partial i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial i_n \partial i_1} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial i_n \partial i_n} \end{vmatrix}; \quad (1.52)$$

$$K = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2 U}{\partial i_* \partial \gamma} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial i_1 \partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial i_1 \partial \gamma_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial i_n \partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial i_n \partial \gamma_l} \end{vmatrix}; \quad (1.53)$$

$$K' = \frac{\partial M}{\partial i} = \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_* \partial i} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_1 \partial i_1} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_1 \partial i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_l \partial i_1} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_l \partial i_n} \end{vmatrix}; \quad (1.54)$$

$$G = \frac{\partial M}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_* \partial \gamma} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_l \partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_l \partial \gamma_l} \end{vmatrix}. \quad (1.55)$$

Из (1.52)—(1.55) видно, что матрицы L и G симметричны и

$$K' = \frac{\partial M}{\partial i} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \right)_* = K_*. \quad (1.56)$$

Учитывая (1.56), мы в дальнейшем будем пользоваться для обозначения производной $K' = dM/di$ символом K_* .

Матрица (1.26) внешних ММП принимает с учетом (1.56) вид

$$P_e = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial i_* \partial i} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial i_* \partial \gamma} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_* \partial i} & \dots & \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma_* \partial \gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L & K \\ K_* & G \end{vmatrix}. \quad (1.57)$$

Эта матрица симметрична для любого ЭМП.

При $i=0$ векторы ψ и m равны нулю при любых значениях γ , поэтому блоки K, K_*, G матрицы P_e являются нулевыми, т. е. при $i=0$ матрица P_e вырождена.

1.4. Методы численного интегрирования нелинейных систем алгебро-дифференциальных уравнений

В публикациях по численным методам решения задачи Коши, как правило, рассматриваются алгоритмы, предназначенные для систем ДУ в предположении, что последние решены относительно производных, т. е. представлены в нормальной форме Коши [3, 112]. Однако для возникающих в научной и инженерной практике задач это условие почти никогда не выполняется. Обычно такие задачи приводят к системам алгебро-дифференциальных уравнений (САДУ), т. е. содержащим не только дифференциальные, но и алгебраические уравнения и имеющим вид

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{dx_1}{dt} + \dots + c_{1a} \frac{dx_a}{dt} + v_1 [x_1, \dots, x_a, y_1, \dots, y_\beta, t] &= 0; \\ \vdots & \\ c_{a1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + c_{aa} \frac{dx_a}{dt} + v_a [x_1, \dots, x_a, y_1, \dots, y_\beta, t] &= 0; \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$w_1 [x_1, \dots, x_a, y_1, \dots, y_\beta, t] = 0;$$

\vdots

$$w_b [x_1, \dots, x_a, y_1, \dots, y_\beta, t] = 0, \quad (1.59)$$

где t — независимая переменная; c_{jk} ($j=1, a; k=1, a$) — постоянные коэффициенты; x_j ($j=1, a$) — зависимые переменные, входящие под знаком производной; y_j ($j=1, \beta$) — зависимые переменные, не входящие под знаком производной; v_j ($j=1, a$), w_j ($j=1, b$) — некоторые (в общем случае — нелинейные) функции независимой и зависимых переменных. Для разрешимости системы (1.58), (1.59) необходимо, чтобы выполнялось условие $a+b = a+\beta$.

Образовав вектор-столбцы

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_\alpha)^*; & y &= (y_1, \dots, y_\beta)^*; \\ v &= (v_1, \dots, v_\alpha)^*; & w &= (w_1, \dots, w_\beta)^* \end{aligned} \quad (1.60)$$

и матрицу

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1\alpha} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{\alpha 1} & \dots & c_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}, \quad (1.61)$$

представим подсистемы скалярных уравнений (1.58), (1.59) соответственно двумя векторными уравнениями

$$c \frac{dx}{dt} + v[x, y, t] = 0; \quad (1.62)$$

$$w[x, y, t] = 0. \quad (1.63)$$

Система (1.58) содержит только производные первого порядка, и эти производные входят в ДУ линейно. В случаях, когда подлежащие решению ДУ содержат производные высших порядков, а также, когда производные входят в эти уравнения нелинейно, всегда возможно путем введения дополнительных переменных преобразовать исходную систему уравнений к виду (1.58), поэтому мы будем рассматривать алгоритм численного интегрирования только применительно к системам вида (1.58).

Численные методы интегрирования обыкновенных ДУ разделяют на два класса — явные и неявные. Среди явных методов наибольшее распространение получили методы группы Адамса—Башфорта и методы группы Рунге—Кутта [3, 112].

Все численные методы интегрирования ДУ основаны на приближенном представлении интегральной кривой на некотором интервале изменения независимой переменной в виде ряда Тейлора. При этом если ряд содержит члены до g -й степени включительно, то рассматриваемый метод интегрирования называется методом g -го порядка. Интервал изменения независимой переменной, на котором интегральная кривая представлена упомянутым усеченным рядом, вместе с указанными на нем $g+1$ точками (узлами), принимаемыми в основу вычисления коэффициентов усеченного ряда, называется шаблоном g -го порядка. Расстояние между предпоследним и последним узлами шаблона называют длиной шага интегрирования, или кратко шагом (шагом интегрирования).

Увеличение порядка метода при неизменном шаблоне приводит к повышению точности интегрирования, а при неизменной точности имеется возможность увеличить шаг интегрирования и тем самым снизить затраты машинного времени на расчет интегральных кривых в пределах заданного отрезка изменения независимой переменной. Практика применения методов различных порядков показала, что для большинства задач наиболее эффективными оказываются методы второго, третьего и четвертого порядков. Метод же

первого порядка (называемый обычно методом Эйлера) при прочих равных условиях, как правило, характеризуется низкой эффективностью, за исключением случаев, когда интегральные кривые содержат большое число точек с разрывной первой производной. Вместе с тем метод Эйлера является наиболее простым как по своей сущности, так и по программной реализации, поэтому мы, следуя общепринятой традиции, начнем изложение методов с метода Эйлера.

Продифференцировав уравнения (1.59) по переменной t , приходим к системе ДУ

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} \frac{dx_\alpha}{dt} + \frac{\partial w_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \dots + \frac{\partial w_1}{\partial y_\beta} \frac{dy_\beta}{dt} + \frac{\partial w_1}{\partial t} &= 0; \\ \vdots & \\ \frac{\partial w_6}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial w_6}{\partial x_\alpha} \frac{dx_\alpha}{dt} + \frac{\partial w_6}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \dots + \frac{\partial w_6}{\partial y_\beta} \frac{dy_\beta}{dt} + \frac{\partial w_6}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (1.64)$$

в которой частные производные $\partial w_j / \partial x_k$ ($j = \overline{1, 6}; k = \overline{1, \alpha}$); $\partial w_j / \partial y_k$ ($j = \overline{1, 6}; k = \overline{1, \beta}$) являются функциями переменных x_l ($l = \overline{1, \alpha}$), y_l ($l = \overline{1, \beta}$). Системе (1.64) равносильно одно векторное ДУ:

$$w^x \frac{dx}{dt} + w^y \frac{dy}{dt} + w^t = 0, \quad (1.65)$$

получаемое путем дифференцирования по переменной t векторного уравнения (1.63). В (1.65) обозначены

$$w^x = \frac{\partial w}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial w_6}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial w_6}{\partial x_\alpha} \end{pmatrix}, \quad w^y = \frac{\partial w}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial w_1}{\partial y_\beta} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial w_6}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial w_6}{\partial y_\beta} \end{pmatrix}; \quad (1.66)$$

$$w^t = \frac{\partial w}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial w_6}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Пусть при $t=t_0$ зависимые переменные соответственно равны $x_1=x_{1,0}; \dots; x_\alpha=x_{\alpha,0}; y_1=y_{1,0}; \dots; y_\beta=y_{\beta,0}$. Вычислим значения частных производных $\partial w_j / \partial x_k$; $\partial w_j / \partial y_k$ при этих значениях переменных, подставим их в систему (1.64) и решим ее численно совместно с системой (1.58) относительно производных dx_j/dt , dy_j/dt . Тогда, согласно методу Эйлера, значения зависимых переменных в точке $t=t_0+h$ вычисляются по формулам

$$x_j[t_0 + h] = x_{j,0} + \Delta x_j (j = \overline{1, \alpha}); \quad y_j[t_0 + h] = y_{j,0} + \Delta y_j (j = \overline{1, \beta}),$$

где

$$\Delta x_j = h \left. \frac{dx_j}{dt} \right|_{t_0} (j = \overline{1, \alpha}); \quad \Delta y_j = h \left. \frac{dy_j}{dt} \right|_{t_0} (j = \overline{1, \beta}) \quad (1.68)$$

— приращения зависимых переменных на шаге h . Символ t_0 справа от вертикали в выражениях (1.68) означает, что производная вычислена в точке $t=t_0$.

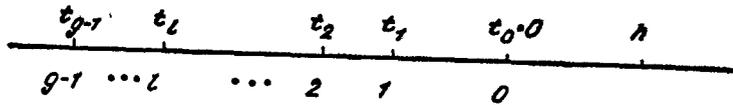


Рис. 1.1. Шаблон g -го порядка (применительно к методу Адамса—Башфорта).

В методе Адамса g -го порядка значения зависимых переменных в точке $t=t_0+h$ вычисляются также по формулам вида (1.67), но приращения зависимых переменных на шаге определяются по выражениям

$$\Delta x_j = \sum_{i=0}^{g-1} a_i x'_{j,i} (j = \overline{1, \alpha}); \quad \Delta y_j = \sum_{i=0}^{g-1} a_i y'_{j,i} (j = \overline{1, \beta}), \quad (1.69)$$

где

$$x'_{j,i} = x'_j[t_i] = \left. \frac{dx_j}{dt} \right|_{t_i}; \quad y'_{j,i} = y'_j[t_i] = \left. \frac{dy_j}{dt} \right|_{t_i} \quad (1.70)$$

— значения производных, вычисляемые в узлах t_0, t_1, \dots, t_{g-1} шаблона (см. рис. 1.1); a_i — коэффициенты, определяемые только геометрией шаблона. Общий способ вычисления этих коэффициентов изложен в подразделе 1.5.

Отметим, что формулы вида (1.67), (1.69) являются по своему математическому содержанию экстраполяционными. Это означает, что значение функции в точке $t=t_0+h$ вычисляется по известной информации об интегральной кривой в g предшествующих узлах шаблона. Иными словами, точка, в которой ищется значение функции, находится вне интервала, на котором задана исходная информация о рассматриваемой функции.

Формулы (1.67), (1.69) определяют значения искомых функций непосредственно, т. е. в явной форме, поэтому метод Адамса принадлежит к классу явных.

Процедуру вычисления совокупности значений зависимых переменных в последнем узле шаблона по известной информации об интегральных кривых в остальных узлах этого шаблона называют шагом интегрирования. Не следует смешивать этого обще-

принятого термина с сокращенным (и также часто употребляемым) вариантом термина «длина шага интегрирования».

Согласно выражению (1.69), приращение любой зависимой переменной на шаге h определяется как линейная комбинация производных этой переменной, вычисленных в g узлах шаблона, используемого при выполнении рассматриваемого шага интегрирования. В связи с этим процедура интегрирования методом Адамса g -го порядка требует выполнения так называемого «разгона», состоящего в следующем.

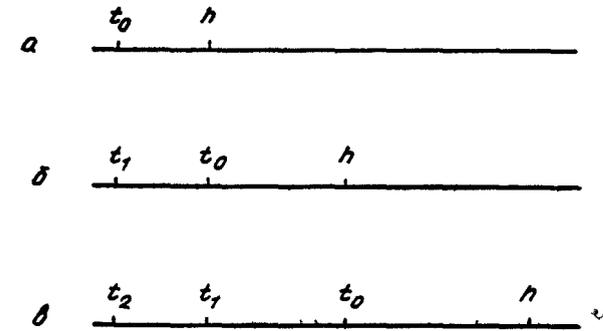


Рис. 1.2. Шаблон 1, 2 и 3-го порядков (применительно к методу Адамса—Башфорта).

Первый шаг интегрирования выполняется на шаблоне первого порядка (рис. 1.2, а) по методу Адамса первого порядка, который совпадает с методом Эйлера. При этом производные зависимых переменных рассчитываются путем решения системы уравнений (1.58), (1.64) с коэффициентами, вычисляемыми по известным начальным условиям задачи. Второй шаг выполняется на шаблоне второго порядка (рис. 1.2, б), в котором принята следующая нумерация узлов: предпоследний узел (как и в общем случае, показанном на рис. 1.1) отмечается номером «0», а расположенный слева от него узел, который на первом шаге интегрирования отмечается номером «0», здесь отмечен номером «1». Значение производной любой зависимой переменной в первом узле шаблона (рис. 1.2, б) принимается равным найденному на первом шаге интегрирования значению этой производной в нулевом узле шаблона (рис. 1.2, а), а значение производной в нулевом узле шаблона (рис. 1.2, б) рассчитывается путем решения системы (1.58), (1.64) с коэффициентами, вычисленными по величинам переменных, найденным в результате выполнения первого шага интегрирования. Третий шаг выполняется на шаблоне третьего порядка (рис. 1.2, в), в котором принята следующая нумерация узлов: предпоследний узел отмечен номером «0», расположенный слева от него узел, который на шаблоне (рис. 1.2, б) отмечался номером «0», здесь

отмечен номером «1», а следующий за ним слева узел — номером «2». Значения производных во втором и первом узлах шаблона (рис. 1.2, в) принимаются равными вычисленным соответственно на первом и втором шагах интегрирования, а производные в нулевом узле шаблона (рис. 1.2, в) рассчитываются путем решения системы (1.58), (1.64) с коэффициентами, вычисленными по величинам переменных, найденным в результате выполнения второго шага интегрирования. Указанная процедура повышения порядка шаблона продолжается до достижения заданного порядка g .

Применение стандартной процедуры автоматического выбора длины шага интегрирования естественно приводит к тому, что на участке разгона длины шагов образуют монотонно возрастающую последовательность чисел.

Среди методов группы Рунге—Кутта наибольшее распространение получил метод четвертого порядка, предусматривающий вычисление приращений векторов зависимых переменных на шаге h интегрирования по формулам

$$\Delta x = \frac{1}{6} (k_{x1} + 2k_{x2} + 2k_{x3} + k_{x4}); \quad \Delta y = \frac{1}{6} (k_{y1} + 2k_{y2} + 2k_{y3} + k_{y4}), \quad (1.71)$$

где векторы $k_{x1}, \dots, k_{x4}, k_{y1}, \dots, k_{y4}$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} k_{x1} &= h \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0, x_0, y_0}; & k_{y1} &= h \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0, x_0, y_0}; \\ k_{x2} &= h \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0+h/2, x_0+k_{x1}/2, y_0+k_{y1}/2}; & k_{y2} &= h \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0+h/2, x_0+k_{x1}/2, y_0+k_{y1}/2}; \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$k_{x3} = h \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0+n/2, x_0+k_{x2}/2, y_0+k_{y2}/2}; \quad k_{y3} = h \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0+h/2, x_0+k_{x2}/2, y_0+k_{y2}/2};$$

$$k_{x4} = h \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0+h, x_0+k_{x3}, y_0+k_{y3}}; \quad k_{y4} = h \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0+h, x_0+k_{x3}, y_0+k_{y3}}.$$

Согласно (1.71), (1.72), в этом методе необходимо на каждом шаге интегрирования четырехкратно выполнять операции вычисления коэффициентов системы (1.58), (1.64) и решения этой системы. На первый взгляд это обстоятельство должно значительно снижать эффективность метода Рунге—Кутта по сравнению с методом Адамса четвертого порядка, в котором, как было показано выше, на каждом шаге требуется выполнять такую операцию только один раз. Однако погрешность интегрирования на шаге в методе Рунге—Кутта оценивается величиной $\frac{h^5}{90} \frac{dx^5}{dt^5}$, тогда как в ме-

тоде Адамса она составляет $\frac{14}{45} h^5 \frac{dx^5}{dt^5}$, т. е. значительно больше.

Поэтому в методе Рунге—Кутта допустимо применять значительно большую длину шага и тем самым сокращать число требуемых шагов на заданном интервале изменения независимой переменной. В практике часто отдают предпочтение методу Рунге—Кутта из-за того, что он стартует непосредственно с начальных условий, т. е. не требует выполнения процедуры разгона.

Среди неявных методов наиболее эффективны так называемые методы ФДН (формулы дифференцирования назад) [112]. Изложим их сущность на примере метода ФДН g -го порядка.

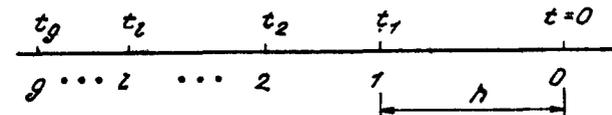


Рис. 1.3. Шаблон g -го порядка (применительно к методу ФДН).

Пусть на шаблоне g -го порядка, показанном на рис. 1.3 (нумерация узлов здесь отличается от нумерации на рис. 1.1), известны значения зависимой переменной x_j , обозначаемые соответственно как $x_{j1}, \dots, x_{jg}, \dots, x_{jg}$. Если интегральную кривую $x_j = x_j[t]$ представить в пределах этого шаблона ее приближенным разложением в усеченный ряд Тейлора, учитывающий члены до g -й степени включительно, то значение производной этого представления в нулевом узле определяется выражением

$$\left. \frac{dx_j}{dt} \right|_{t=0} = b_0 x_j + \sum_{i=1}^g b_i x_{ji}, \quad (1.73)$$

где b_0, b_i ($i=1, \dots, g$) — коэффициенты, определяемые только геометрией шаблона. Общий способ вычисления этих коэффициентов изложен в подразделе 1.5. В отличие от (1.67), (1.69) выражение (1.73) является по своему математическому содержанию интерполяционным. Действительно, оно связывает между собой искомое значение функции $x_j[t]$ в крайнем (нулевом) узле шаблона не только с известными из предыдущих шагов интегрирования значениями функции в предшествующих узлах, но и с производной этой функции в нулевом узле, которая зависит (и притом, как правило, нелинейно) от искомого значения функции в нулевом узле. Иными словами, точка, в которой ищется значение функции, находится не вне интервала, на котором задана информация о рассматриваемой функции, а принадлежит этому интервалу (находится на правом крае этого интервала).

Выражение (1.73) не решено относительно переменной x_j и в общем случае (ввиду нелинейности зависимости производной $\frac{dx_j}{dt}$

в нулевом узле от значений зависимых переменных в этом же узле) не может быть решено аналитически, т. е. оно определяет связь между зависимыми переменными для нулевого узла в неявной форме, поэтому метод ФДН принадлежит к классу неявных.

Используем выражение вида (1.73) для алгебраизации ДУ (1.58). Так, заменив в этих ДУ производные суммами вида (1.73), приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} c_{11} \left(b_0 x_1 + \sum_{i=1}^g b_i x_{1i} \right) + \dots + c_{1\alpha} \left(b_0 x_\alpha + \sum_{i=1}^g b_i x_{\alpha i} \right) + \\ \vdots + v_1 [x_1, \dots, x_\alpha, y_1, \dots, y_\beta, 0] = 0; \\ c_{\alpha 1} \left(b_0 x_1 + \sum_{i=1}^g b_i x_{1i} \right) + \dots + c_{\alpha\alpha} \left(b_0 x_\alpha + \sum_{i=1}^g b_i x_{\alpha i} \right) + \\ + v_\alpha [x_1, \dots, x_\alpha, y_1, \dots, y_\beta, 0] = 0. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Пусть в уравнениях (1.74) величины $x_{1i}, \dots, x_{\alpha i} (i=\overline{1, g})$ известны из предыдущих шагов интегрирования. Тогда уравнения (1.74) совместно с (1.59) образуют систему алгебраических уравнений (в общем случае — нелинейную), состоящую из $\alpha + \beta = \alpha + \beta$ уравнений и содержащую такое же количество неизвестных — значения $x_1, \dots, x_\alpha, y_1, \dots, y_\beta$ зависимых переменных в нулевом узле шаблона. Система $\alpha + \beta$ скалярных уравнений (1.74), (1.59) равноценна системе двух векторных уравнений

$$b_0 c x + \sum_{i=1}^g b_i c x_i + v [x, y, 0] = 0; \quad (1.75)$$

$$\omega [x, y, 0] = 0. \quad (1.76)$$

Для решения этой системы воспользуемся итерационным методом Ньютона [54]. Пусть после выполнения $(k-1)$ -го итерационного цикла найдено $(k-1)$ -е приближение $x_{(k-1)}, y_{(k-1)}$ векторов зависимых переменных. Тогда согласно методу Ньютона k -е приближение этих векторов определяется по формулам

$$x_{(k)} = x_{(k-1)} - \Delta x_{(k)}; \quad y_{(k)} = y_{(k-1)} - \Delta y_{(k)}, \quad (1.77)$$

где $\Delta x_{(k)}, \Delta y_{(k)}$ — поправки, вычисляемые путем решения линейной системы алгебраических уравнений, порождаемой системой (1.75), (1.76) и имеющей вид

$$\begin{aligned} b_0 c \Delta x + v_{(k-1)}^x \Delta x_{(k)} + v_{(k-1)}^y \Delta y_{(k)} = Q_{1(k-1)}; \\ \omega_{(k-1)}^x \Delta x_{(k)} + \omega_{(k-1)}^y \Delta y_{(k)} = Q_{2(k-1)}, \end{aligned} \quad (1.78)$$

где

$$v_{(k-1)}^x = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{k-1} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Big|_{k-1} & \dots & \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} \Big|_{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_1} \Big|_{k-1} & \dots & \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \Big|_{k-1} \end{array} \right\|;$$

$$\begin{aligned} v_{(k-1)}^y = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{k-1} &= \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \Big|_{k-1} & \dots & \frac{\partial v_1}{\partial y_\beta} \Big|_{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_1} \Big|_{k-1} & \dots & \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} \Big|_{k-1} \end{array} \right\|; \\ w_{(k-1)}^x = \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{k-1} &= \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \Big|_{k-1} & \dots & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_\alpha} \Big|_{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \omega_\beta}{\partial x_1} \Big|_{k-1} & \dots & \frac{\partial \omega_\beta}{\partial x_\alpha} \Big|_{k-1} \end{array} \right\|; \\ w_{(k-1)}^y = \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{k-1} &= \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} \Big|_{k-1} & \dots & \frac{\partial \omega_1}{\partial y_\beta} \Big|_{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \omega_\beta}{\partial y_1} \Big|_{k-1} & \dots & \frac{\partial \omega_\beta}{\partial y_\beta} \Big|_{k-1} \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (1.79)$$

— матрицы, вычисляемые по $(k-1)$ -му приближению зависимых переменных;

$$\begin{aligned} Q_{1(k-1)} = b_0 c x_{(k-1)} + \sum_{i=1}^g b_i c x_{i(k-1)} + v [x_{(k-1)}, y_{(k-1)}, 0]; \\ Q_{2(k-1)} = \omega [x_{(k-1)}, y_{(k-1)}, 0] \end{aligned} \quad (1.80)$$

— невязки, численно равные левым частям уравнений (1.75), (1.76) соответственно и вычисляемые по $(k-1)$ -му приближению зависимых переменных.

На первой итерации ($k=1$) исходное приближение, называемое нулевым ($k-1=0$), принимается равным найденному в результате выполнения предыдущего шага интегрирования, т. е. $x_{(0)} = x_0; y_{(0)} = y_0$. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока поправки $\Delta x_{(k)}, \Delta y_{(k)}$ не станут меньшими некоторых заранее заданных значений (в соответствии с избранным критерием точности численного решения задачи).

1.5. Определение разностных аналогов дифференциальных операторов в методах Адамса и ФДН

Численное интегрирование САДУ обычно выполняется с автоматическим выбором длины шага интегрирования, в результате чего расстояния между соседними узлами шаблона, используемыми в методах Адамса и ФДН, оказываются неравными. Такие шаблоны называют нерегулярными. Соотношения расстояний

между соседними узлами нерегулярного шаблона могут принимать в общем случае произвольные значения. Поэтому алгоритмы численного интегрирования многошаговыми методами должны предусматривать вычисление коэффициентов a_i ($i=0, g-1$), b_i ($i=0, g$), фигурирующих в формулах (1.69) и (1.73) соответственно.

Изложение удобно начать с определения коэффициентов b_0, \dots, b_g , используемых в методе ФДН.

Пусть дана функция $z=z[t]$, имеющая производные до g -й включительно. Представим ее на некотором интервале изменения независимой переменной усеченным рядом Тейлора

$$z = c_0 + c_1 t + c_2 t^2/2! + \dots + c_g t^g/g!, \quad (1.81)$$

где $c_j = \frac{d^j z}{dt^j} \Big|_{t=0}$ ($j=0, g$) — коэффициент ряда, численно равный j -й производной функции $z[t]$ при $t=0$.

Для формализации решения задачи целесообразно представить ряд (1.81) в виде [71, 98]

$$z[t] = T[t] \cdot c, \quad (1.82)$$

т. е. как скалярное произведение вектор-строки

$$T[t] = (1, t, t^2/2!, \dots, t^g/g!), \quad (1.83)$$

называемой в дальнейшем вектором Тейлора, и вектора-столбца

$$c = (c_0, c_1, \dots, c_g)^*, \quad (1.84)$$

называемого вектором производных.

Для вычисления коэффициентов усеченного ряда Тейлора необходимо располагать $g+1$ взаимонезависимыми величинами, характеризующими функцию $z[t]$. В методе ФДН такими величинами являются значения функции в $g+1$ узлах шаблона. Применяв выражение (1.81) поочередно ко всем узлам шаблона g -го порядка (рис. 1.3), приходим к линейной системе уравнений

$$\begin{aligned} z_0 &= c_0; \\ z_1 &= c_0 + c_1 t_1 + c_2 t_1^2/2! + \dots + c_g t_1^g/g!; \\ &\vdots \\ z_g &= c_0 + c_1 t_g + c_2 t_g^2/2! + \dots + c_g t_g^g/g!. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Образовав вектор-столбец

$$z_m = (z_0, z_1, \dots, z_g)^*, \quad (1.86)$$

называемый узловым вектором для рассматриваемого шаблона, и матрицу

$$T_m = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 1 & t_1 & t_1^2/2! & \dots & t_1^g/g! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_g & t_g^2/2! & \dots & t_g^g/g! \end{vmatrix}, \quad (1.87)$$

называемую в дальнейшем матрицей Тейлора для рассматриваемого шаблона, представим систему (1.85) векторным уравнением

$$z_m = T_m c, \quad (1.88)$$

откуда

$$c = T_m^{-1} z_m. \quad (1.89)$$

Подставив полученный результат в выражение (1.82), получим интерполяционную формулу

$$z[t] = T[t] T_m^{-1} z_m, \quad (1.90)$$

определяющую интерполированное значение функции в произвольной задаваемой точке t в виде произведения трех объектов: вектора Тейлора, вычисляемого в этой точке; обратной матрицы Тейлора, вычисляемой по координатам узлов шаблона; и узлового вектора.

Согласно (1.90), для производной функции $z[t]$ имеем выражение

$$\frac{dz[t]}{dt} = \frac{dT[t]}{dt} T_m^{-1} z_m. \quad (1.91)$$

Но с учетом (1.83)

$$\frac{dT[t]}{dt} = (0, 1, t, \dots, t^{g-1}/(g-1)!). \quad (1.92)$$

Легко убедиться, что имеет место равенство

$$\frac{dT[t]}{dt} = T[t] \cdot D, \quad (1.93)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix} \quad (1.94)$$

— квадратная вырожденная матрица размерности $g+1$, называемая в дальнейшем матрицей дифференцирования вектора Тейлора. С учетом (1.91), (1.93) имеем

$$\frac{dz[t]}{dt} = T[t] D T_m^{-1} z_m. \quad (1.95)$$

Численное значение производной $\frac{dz}{dt}$ в нулевом узле шаблона (рис. 1.3)

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = T[0] \cdot D \cdot T_m^{-1} \cdot z_m. \quad (1.96)$$

Однако

$$T[0] = (1, 0, \dots, 0) \quad (1.97)$$

и, следовательно, произведение $T[0]D$ есть вектор-строка $(0, 1, 0, \dots, 0)$ размерности $g+1$. Соответственно произведение этой строки на обратную матрицу Тейлора есть вторая строка этой матрицы. Введя для нее обозначение b , имеем

$$b = T[0] \cdot D T_m^{-1}. \quad (1.98)$$

Таким образом, производная функции $z[t]$ в начале координат (нулевому узлу соответствует $t=0$) численно равна произведению второй строки обратной матрицы Тейлора на вектор-столбец значений функции в узлах шаблона.

Сравнивая выражение (1.96) с (1.73), приходим к соотношению

$$b = (b_0, b_1, \dots, b_g) = T[0] D T_m^{-1}, \quad (1.99)$$

определяющему коэффициенты b_i ($i=0, \dots, g$) выражения (1.73) через координаты узлов шаблона g -го порядка.

Перейдем к изложению способа определения коэффициентов a_0, \dots, a_{g-1} , используемых в методе Адамса. Здесь взаимнонезависимыми величинами, характеризующими функцию $z[t]$, является значение этой функции в нулевом узле и значение ее производных в узлах от нулевого до $(g-1)$ -го.

Применив выражение (1.81) к нулевому узлу, находим, что

$$c_0 = z_0. \quad (1.100)$$

Согласно (1.81) имеем

$$\frac{dz}{dt} = c_1 + c_2 t + c_3 t^2/2! + \dots + c_g t^{g-1}/(g-1)! \quad (1.101)$$

Образовав вектор Тейлора

$$T' = (1, t, t^2/2!, \dots, t^{g-1}/(g-1)!) \quad (1.102)$$

и вектор-столбец

$$c' = (c_1, \dots, c_g) \ast, \quad (1.103)$$

представим выражение (1.101) в виде

$$\frac{dz}{dt} = T' c'. \quad (1.104)$$

Применив выражение (1.101) поочередно к узлам с номерами $0, \dots, g-1$ шаблона (рис. 1.1), приходим к линейной системе уравнений

$$z'_0 = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0} = c_1;$$

$$z'_1 = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_1} = c_1 + c_2 t_1 + \dots + c_g t_1^{g-1}/(g-1)!;$$

\vdots

$$z'_{g-1} = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_{g-1}} = c_1 + c_2 t_{g-1} + \dots + c_g t_{g-1}^{g-1}/(g-1)!. \quad (1.105)$$

Образовав вектор-столбец узловых значений производных

$$z'_m = (z'_0, z'_1, \dots, z'_{g-1}) \ast \quad (1.106)$$

и матрицу Тейлора

$$T'_m = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & t_1 & t_1^2/2! & \dots & t_1^{g-1}/(g-1)! \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_{g-1} & t_{g-1}^2/2! & \dots & t_{g-1}^{g-1}/(g-1)! \end{pmatrix}, \quad (1.107)$$

представим систему (1.105) векторным уравнением

$$z'_m = T'_m c', \quad (1.108)$$

откуда

$$c' = (T'_m)^{-1} z'_m. \quad (1.109)$$

Представив разложение функции $z[t]$ в пределах шаблона рис. 1.1 рядом (1.81), находим, что значение этой функции при $t=h$ с учетом (1.100)

$$z[h] = z_0 + c_1 h + c_2 h^2/2! + \dots + c_g h^g/g! = z_0 + \Delta z[h], \quad (1.110)$$

где $\Delta z[h]$ — приращение функции на шаге h . Образовав строку $\chi[h] = (h, h^2/2!, \dots, h^g/g!)$, представим это приращение с учетом (1.103), (1.109) в виде

$$\Delta z[h] = \chi[h] c' = \chi[h] (T'_m)^{-1} z'_m = a z'_m = \sum_{i=0}^{g-1} a_i z'_i, \quad (1.111)$$

где

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_{g-1}) = \chi[h] (T'_m)^{-1} \quad (1.112)$$

— строка, произведение которой на столбец z'_m производных функции $z[t]$ в узлах с номерами $0, \dots, g-1$ шаблона рис. 1.1 равно приращению функции $z[t]$ на шаге h . Сравнивая выражения (1.111), (1.69), видим, что коэффициенты в формуле (1.69), определяющей приращение функции в методе Адамса g -го порядка, являются элементами строки a , вычисляемой по формуле (1.112).

Формулы (1.111), (1.98) для вычисления строк a и b , элементы которых являются коэффициентами формул (1.69), (1.73), ис-

пользуемых в методах Адамса и ФДН соответственно, одинаковы по своей структуре и обладают высоким уровнем общности, так как они пригодны для метода любого порядка и при произвольных значениях координат узлов шаблона по отношению к нулевому узлу. Наиболее емкой по объему и по затратам машинного времени операцией в процедуре вычисления строк a и b является обращение матрицы Тейлора, но оно выполняется по стандартной программе.

В заключение отметим, что координаты узлов с номерами 1, ..., $g-1$ на рис. 1.1 и номерами 1, ..., g на рис. 1.3 отрицательны.

1.6. Расчет переходных электромеханических процессов обобщенного ЭМП как задача Коши для системы алгебродифференциальных уравнений

Математическая постановка задачи расчета переходных электромеханических процессов в обобщенном ЭМП состоит из системы алгебродифференциальных уравнений, описывающей процессы рассматриваемого класса, в которой внутренние свойства преобразователя и действующие на него вынуждающие силы конкретизированы численными значениями параметров и функциональных зависимостей, и из набора начальных условий, выделяющего требуемый процесс из множества процессов, описываемых рассматриваемой САДУ.

Электрическое состояние обобщенного ЭМП описывается векторным уравнением

$$\frac{d\psi}{dt} + ri - u = 0, \quad (1.113)$$

где ψ , i — вектор-столбцы потокосцеплений и токов контуров соответственно; r — невырожденная матрица активных сопротивлений контуров размерности n ;

$$u = (u_1, \dots, u_n). \quad (1.114)$$

— вектор-столбец питающих контуры напряжений как заданных функций времени.

Механическое состояние ЭМП описывается векторными уравнениями

$$-J \frac{d\omega}{dt} + M + M_s = 0; \quad (1.115)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega, \quad (1.116)$$

$$\text{где } \omega = (\omega_1, \dots, \omega_l). \quad (1.117)$$

— вектор-столбец обобщенных скоростей подвижных элементов ЭМП;

$$M_s = (M_{s1}, \dots, M_{sl}). \quad (1.118)$$

— вектор-столбец обобщенных внешних сил как заданных функций времени;

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_l) \quad (1.119)$$

— диагональная матрица обобщенных масс.

Если перемещение γ_j ($j=1, l$) является угловым, то объекты J_j , M_{sj} , ω_j представляют собой соответственно момент инерции, вращающий момент и угловую скорость, если же γ_j — линейное перемещение, то эти объекты отражают соответственно массу, силу и линейную скорость.

Для расчета процесса ЭМП необходимо при $t=t_0$ располагать начальными значениями векторов токов, перемещений и скоростей:

$$i = i_0, \quad \gamma = \gamma_0; \quad \omega = \omega_0. \quad (1.120)$$

Совокупность ДУ (1.113) электрического состояния, ДУ (1.115), (1.116) механического состояния, алгебраических уравнений (1.5) — (1.7), отражающих ММХ преобразователя, и начальных условий (1.120) составляет содержание задачи Коши, соответствующей расчету переходных электромеханических процессов обобщенного ЭМП.

Отметим, что в начальные условия (1.120) не входит начальное значение m_0 вектора ВМК, так как оно не является независимым: вектор m_0 вычисляется путем решения уравнения (1.5) при заданных векторах $i = i_0$, $\gamma = \gamma_0$.

1.7. Алгоритмы расчета электромеханических процессов обобщенного ЭМП на основе явных методов численного интегрирования

Для расчета переходных электромеханических процессов обобщенного ЭМП с применением явных методов численного интегрирования продифференцируем уравнения (1.5), (1.6) по времени. Тогда САДУ, подлежащая совместному решению, примет вид

$$\frac{d\psi}{dt} + ri - u = 0; \quad (1.121)$$

$$f_1 \frac{di}{dt} + f_1 \frac{d\gamma}{dt} + f_m \frac{dm}{dt} = 0; \quad (1.122)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \varphi^i \frac{di}{dt} + \varphi^\gamma \frac{d\gamma}{dt} + \varphi^m \frac{dm}{dt}; \quad (1.123)$$

$$-J \frac{d\omega}{dt} + M + M_B = 0; \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega; \quad (1.124)$$

$$M = \xi[i, \gamma, m], \quad (1.125)$$

где $f^i, f^\gamma, f^m, \varphi^i, \varphi^\gamma, \varphi^m$ — матрицы, определяемые в соответствии с (1.34), (1.37).

Перепишем уравнения (1.121) — (1.24) в виде

$$\varphi^i \frac{di}{dt} + \varphi^m \frac{dm}{dt} + \varphi^\gamma \omega + ri - a = 0; \quad (1.126)$$

$$f^i \frac{di}{dt} + f^m \frac{dm}{dt} + f^\gamma \omega = 0; \quad (1.127)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = J^{-1}(M + M_B); \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega. \quad (1.128)$$

Уравнения (1.126) — (1.128), (1.125) совместно с начальными условиями (1.120) могут быть непосредственно использованы для численного интегрирования явным методом. При этом на шаге интегрирования выполняются следующие операции:

- для нулевого узла шаблона вычисляются векторы u и M_B ;
- по известным из предыдущего шага значениям векторов i, γ, m вычисляются в нулевом узле шаблона матрицы $f^i, f^\gamma, f^m, \varphi^i, \varphi^\gamma, \varphi^m$ по формулам (1.34), (1.37);
- система уравнений (1.126), (1.127) решается численным способом относительно производных $di/dt, dm/dt$;
- по формулам (1.128) вычисляются производные $d\omega/dt, d\gamma/dt$;
- по формулам вида (1.69) вычисляются приращения $\Delta i, \Delta \gamma, \Delta m, \Delta \omega$ векторов зависимых переменных на шаге h ;
- по формулам вида (1.67) вычисляются значения векторов i, γ, m, ω при $t=h$;
- по формулам (1.6), (1.125) вычисляются значения векторов ψ, M при $t=h$.

На первом шаге интегрирования второй этап изложенного выше алгоритма должен выполняться на основе заданных начальных условий (1.120). Однако они не содержат вектора m_0 , поэтому прежде чем приступить к расчету переходного процесса ЭМП, необходимо найти вектор m_0 из уравнения

$$f[i_0, \gamma_0, m_0] = 0. \quad (1.129)$$

Для решения этого уравнения целесообразно применить алгоритм, сходный по своей структуре с алгоритмом расчета переходных процессов ЭМП. Воспользуемся для этой цели методом дифференцирования по параметру [21, 96].

Будем рассматривать магнитное состояние ЭМП при заданных значениях i_0, γ_0 как такой режим, который получен в результате постепенного увеличения токов всех электрических контуров от нуля до заданных вектором i_0 значений пропорционально параметру ε , т. е. примем, что

$$i = i_0 \varepsilon. \quad (1.130)$$

Каждому значению параметра будет соответствовать определенный вектор i , и, следовательно, определенное магнитное состояние ЭМП, характеризуемое вектором ВМК. При $\varepsilon=0$ токи в контурах ЭМП равны нулю, и тогда $m=0$, а при $\varepsilon=1$ токи в контурах образуют заданный вектор i_0 , и тогда вектор ВМК будет равен искомому вектору m_0 . Последовательность магнитных состояний ЭМП, соответствующая изменению параметра ε от $\varepsilon=0$ до $\varepsilon=1$, будет описываться уравнением

$$f[i, \gamma_0, m] = 0, \quad (1.131)$$

где вектор i определяется по (1.130). Продифференцировав это уравнение по параметру ε , приходим к векторному ДУ

$$\frac{\partial f}{\partial i} \frac{di}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial m} \frac{dm}{d\varepsilon} = 0,$$

которое с учетом обозначений (1.34) принимает вид

$$f^m \frac{dm}{d\varepsilon} = -f^i i_0. \quad (1.132)$$

Проинтегрируем ДУ (1.132) явным методом в пределах от $\varepsilon=0$ до $\varepsilon=1$, учитывая, что при $\varepsilon=0$ вектор ВМК равен нулю. При этом на шаге интегрирования выполняются следующие операции:

- по известным из предыдущего шага интегрирования (на первом шаге — по известным векторам $i=0, m=0$) вычисляются в нулевом узле шаблона по формулам (1.34) матрицы f^i, f^m ;
- уравнение (1.132) решается численным способом относительно производной $dm/d\varepsilon$;
- по формуле (1.69) вычисляется приращение Δm вектора ВМК на шаге $\Delta\varepsilon$;
- по формуле (1.67) вычисляется значение вектора m при значении параметра, равном $\varepsilon+\Delta\varepsilon$.

Полученное при $\varepsilon=1$ значение $m=m_0$ вектора ВМК принимается в качестве начального значения для расчета переходного процесса ЭМП.

При относительно небольших размерностях q вектора ВМК, а также при больших q , но когда обращение матрицы f^m не является громоздким, целесообразно подвергнуть систему (1.126), (1.127) дополнительному преобразованию, а именно, исключить аналитическим путем производную dm/dt в соответствии с вытекающим из (1.127) выражением

$$\frac{dm}{dt} = -(f^m)^{-1} f^i \frac{di}{dt} - (f^m)^{-1} f^\gamma \omega = \Theta \frac{di}{dt} + \Gamma \omega. \quad (1.133)$$

При этом уравнение (1.126) принимает с учетом (1.40) вид

$$L \frac{di}{dt} + K\omega + ri - u = 0. \quad (1.134)$$

В уравнениях (1.133), (1.134) коэффициенты при производных di/dt и $d\gamma/dt = \omega$ являются блоками матриц внутренних и внешних ММП.

Алгоритм интегрирования преобразованной системы ДУ (1.128), (1.134) отличается от вышеуказанного только тем, что здесь численному решению относительно производной di/dt подлжит только (1.134), после чего производная dm/dt вычисляется непосредственно по формуле (1.133).

Если неявная ММХ является рекуррентной, то, как и для ММХ общего вида, возможны два варианта.

Первый соответствует случаю, когда целесообразно вычислять все ВМК по ДУ, приведенным к нормальной форме Коши. Продифференцировав уравнения (1.16)—(1.18) рекуррентной ММХ по времени, приходим к ДУ

$$f^i \frac{di}{dt} + f^i \omega + f^{m_1} \frac{dm_1}{dt} + f^{m_2} \frac{dm_2}{dt} = 0; \quad (1.135)$$

$$\frac{dm_2}{dt} = \mu_{21} \frac{dm_1}{dt};$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \varphi^i \frac{di}{dt} + \varphi^i \omega + \varphi^{m_1} \frac{dm_1}{dt} + \varphi^{m_2} \frac{dm_2}{dt}.$$

Выполнив преобразования ДУ (1.135), (1.121) с учетом соотношений (1.41)—(1.51), имеем окончательно

$$L \frac{di}{dt} + K\omega + ri - u = 0; \quad (1.136)$$

$$\frac{dm_1}{dt} = \Theta_1 \frac{di}{dt} + \Gamma_1 \omega; \quad (1.137)$$

$$\frac{dm_2}{dt} = \Theta_2 \frac{di}{dt} + \Gamma_2 \omega. \quad (1.138)$$

Здесь на шаге интегрирования выполняются следующие операции:

для нулевого узла шаблона вычисляются векторы u и M_B ;

по известным из предыдущего шага интегрирования значениям векторов i , γ , m_1 , m_2 вычисляются матрицы f^i , f^γ , f^{m_1} , f^{m_2} , φ^i , φ^γ , φ^{m_1} , φ^{m_2} по (1.34), (1.37), (1.45);

уравнение (1.136) решается численным способом относительно вектора di/dt ;

по формулам (1.137), (1.128) вычисляются производные dm_1/dt , $d\omega/dt$, $d\gamma/dt$;

по формулам вида (1.68) вычисляются приращения Δi , Δm_1 , $\Delta \omega$, $\Delta \gamma$ на шаге h ;

по формулам вида (1.67) вычисляются значения векторов i , m_1 , ω , γ при $t=h$;

по формулам (1.17)—(1.19) вычисляются значения векторов m_2 , ψ , M при $t=h$.

Второй вариант соответствует случаю, когда при определении ММП оказывается целесообразным оставить часть уравнений нерешенными относительно производных некоторых ВМК. Здесь система уравнений, решаемая на шаге интегрирования численным способом относительно производных, имеет вид

$$\varphi^i \frac{di}{dt} + (\varphi^{m_1} + \varphi^{m_1 \mu_{21}}) \frac{dm_1}{dt} + \varphi^i \omega + ri - u = 0; \quad (1.139)$$

$$f^i \frac{di}{dt} + (f^{m_1} + f^{m_1 \mu_{21}}) \frac{dm_1}{dt} + f^i \omega = 0.$$

Алгоритм выполнения шага интегрирования во втором варианте отличается от алгоритма для первого варианта только тем, что производная dm_1/dt здесь вычисляется в процессе решения системы (1.139).

1.8. Алгоритмы расчета электроμηχανических процессов обобщенного ЭМП на основе неявных методов численного интегрирования

Исходная САДУ, применяемая для расчета переходных электроμηχανических процессов обобщенного ЭМП неявными методами численного интегрирования, состоит из ДУ (1.113) электрического состояния, ДУ (1.115), (1.116) механического состояния и алгебраических уравнений (1.5)—(1.7), описывающих неявную ММХ.

Заменяя в ДУ производные выражениями вида (1.73), приходим к алгебраическим уравнениям

$$\psi + \frac{1}{b_0} \sum_{i=1}^g b_i \psi_i + \frac{1}{b_0} ri - \frac{u}{b_0} = 0; \quad (1.140)$$

$$-J \left(b_0 \omega + \sum_{i=1}^g b_i \omega_i \right) + M + M_B = 0; \quad (1.141)$$

$$b_0 \gamma + \sum_{i=1}^g b_i \gamma_i - \omega = 0. \quad (1.142)$$

Из последнего уравнения находим

$$\omega = b_0 \gamma + \sum_{i=1}^g b_i \gamma_i. \quad (1.143)$$

Подставив этот результат в уравнение (1.141), имеем

$$-Jb_0^2 \gamma - J \left(b_0 \sum_{i=1}^g b_i \gamma_i + \sum_{i=1}^g b_i \omega_i \right) + M + M_b = 0. \quad (1.144)$$

Будем решать систему (1.140), (1.144), (1.5) — (1.7), пользуясь итерационным методом Ньютона. При этом линейная система алгебраических уравнений для вычисления поправок искомым векторов на k -й итерации имеет вид

$$\Delta \psi^{(k)} + \frac{1}{b_0} r \Delta i^{(k)} = Q_{1(k-1)}; \quad (1.145)$$

$$-Jb_0^2 \Delta \gamma^{(k)} + \Delta M^{(k)} = Q_{2(k-1)}; \quad (1.146)$$

$$f_{(k-1)}^i \Delta i^{(k)} + f_{(k-1)}^\gamma \Delta \gamma^{(k)} + f_{(k-1)}^m \Delta m^{(k)} = Q_{3(k-1)}; \quad (1.147)$$

$$\Delta \varphi^{(k)} = \Phi_{(k-1)}^i \Delta i^{(k)} + \Phi_{(k-1)}^\gamma \Delta \gamma^{(k)} + \Phi_{(k-1)}^m \Delta m^{(k)}; \quad (1.148)$$

$$\Delta M^{(k)} = \xi_{(k-1)}^i \Delta i^{(k)} + \xi_{(k-1)}^\gamma \Delta \gamma^{(k)} + \xi_{(k-1)}^m \Delta m^{(k)}, \quad (1.149)$$

где $f_{(k-1)}^i, f_{(k-1)}^\gamma, f_{(k-1)}^m, \Phi_{(k-1)}^i, \Phi_{(k-1)}^\gamma, \Phi_{(k-1)}^m, \xi_{(k-1)}^i, \xi_{(k-1)}^\gamma, \xi_{(k-1)}^m$ — матрицы, вычисляемые согласно формулам (1.34), (1.37), (1.38) по $(k-1)$ -му приближению векторов зависимых переменных; $Q_{(k-1)}, Q_{2(k-1)}, Q_{3(k-1)}$ — невязки, численно равные левым частям уравнений (1.140), (1.144), (1.5) соответственно при $(k-1)$ -м приближении векторов зависимых переменных.

Исключив в системе (1.145) — (1.149) неизвестные $\Delta \psi^{(k)}, \Delta M^{(k)}$, приходим к уравнениям

$$(\Phi_{(k-1)}^i + r/b_0) \Delta i^{(k)} + \Phi_{(k-1)}^\gamma \Delta \gamma^{(k)} + \Phi_{(k-1)}^m \Delta m^{(k)} = Q_{1(k-1)}; \quad (1.150)$$

$$\xi_{(k-1)}^i \Delta i^{(k)} + (\xi_{(k-1)}^\gamma - Jb_0^2) \Delta \gamma^{(k)} + \xi_{(k-1)}^m \Delta m^{(k)} = Q_{2(k-1)}; \quad (1.151)$$

$$f_{(k-1)}^i \Delta i^{(k)} + f_{(k-1)}^\gamma \Delta \gamma^{(k)} + f_{(k-1)}^m \Delta m^{(k)} = Q_{3(k-1)}. \quad (1.152)$$

На k -м итерационном цикле уточнения зависимых переменных $i, \gamma, m, \omega, \psi, M$ выполняются следующие операции:

значения векторов M_b , и принимаются равными вычисленным для нулевого узла шаблона;

для найденных на $(k-1)$ -й итерации значений $i^{(k-1)}, \gamma^{(k-1)}, m^{(k-1)}, \omega^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}, M^{(k-1)}$ векторов зависимых переменных (при $k=1$ — по результату выполнения предыдущего шага интегрирования) вычисляются матрицы $f_{(k-1)}^i, f_{(k-1)}^\gamma, f_{(k-1)}^m, \Phi_{(k-1)}^i, \Phi_{(k-1)}^\gamma, \Phi_{(k-1)}^m, \xi_{(k-1)}^i, \xi_{(k-1)}^\gamma, \xi_{(k-1)}^m$ по формулам (1.34), (1.37), (1.38) и невязки $Q_{1(k-1)}, Q_{2(k-1)}$,

$Q_{3(k-1)}$ как левые части уравнений (1.140), (1.144), (1.5) соответственно;

система (1.150) — (1.152) решается численно относительно поправок $\Delta i^{(k)}, \Delta \gamma^{(k)}, \Delta m^{(k)}$;

по формулам вида (1.77) вычисляется k -е приближение векторов i, γ, m ;

по формулам (1.6), (1.7), (1.143) вычисляется k -е приближение векторов ψ, M, ω .

На первом итерационном цикле первого шага интегрирования можно попытаться принять в качестве нулевого приближения вектора ВМК значение $m=0$, но это не гарантирует сходимости итерационного процесса. Сходимость будет гарантирована (при соответствующем достаточно малом начальном шаге интегрирования по времени), если в качестве нулевого приближения вектора ВМК принять его значение m_0 , удовлетворяющее уравнению (1.129). Для решения этого уравнения целесообразно применить алгоритм, сходный по своей структуре с алгоритмом расчета переходных процессов ЭМП. Воспользуемся для этой цели комбинированным методом, основанным на итерационном методе Ньютона и идее продолжения решения по параметру и состоящим в следующем. Вместо того, чтобы решать непосредственно уравнение (1.129), решим вначале уравнение (1.131), представленное в виде $f[i_0 \varepsilon_1, \gamma_0, m[\varepsilon_1]] = 0$, где $\varepsilon_1 < 1$ — некоторое достаточно малое значение параметра ε ; $m[\varepsilon_1]$ — значение вектора ВМК, соответствующее вектору токов, равному $i_0 \varepsilon_1$. На каждом итерационном цикле решения этого уравнения методом Ньютона потребуется решить векторное линейное уравнение $f_{(k-1)}^m \Delta m^{(k)} = f[i_0 \varepsilon_1, \gamma_0, m_{(k-1)}[\varepsilon_1]]$, где $f_{(k-1)}^m$ — значение матрицы f^m , вычисленное при $i=i_0 \varepsilon_1$ по значению вектора $m_{(k-1)}[\varepsilon_1]$, полученному на предыдущей итерации. На первом итерационном цикле в качестве нулевого приближения вектора $m[\varepsilon_1]$ принимается $m=0$. После вычисления вектора $m[\varepsilon_1]$ решается уравнение $f[i_0 \varepsilon_2, \gamma_0, m[\varepsilon_2]] = 0$, где $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, причем в качестве нулевого приближения вектора ВМК принимается его значение $m[\varepsilon_1]$. Эта процедура продолжается до тех пор, пока параметр ε не достигнет значения $\varepsilon=1$. Полученное при $\varepsilon=1$ значение вектора m как удовлетворяющее уравнению (1.129) принимается в качестве нулевого приближения для первого итерационного цикла решения нелинейной САДУ, возникающей на первом шаге интегрирования переходного процесса ЭМП. Здесь, как и при решении задачи явными методами, часто оказывается целесообразным исключить известную $\Delta m^{(k)}$ аналитическим путем в соответствии с вытекающим из (1.147) выражением

$$\begin{aligned} \Delta m^{(k)} = & - (f_{(k-1)}^m)^{-1} f_{(k-1)}^i \Delta i^{(k)} - (f_{(k-1)}^m)^{-1} f_{(k-1)}^\gamma \Delta \gamma^{(k)} + \\ & + (f_{(k-1)}^m)^{-1} Q_{3(k-1)} = \Theta_{(k-1)} \Delta i^{(k)} + \Gamma_{(k-1)} \Delta \gamma^{(k)} + (f_{(k-1)}^m)^{-1} Q_{3(k-1)}, \end{aligned} \quad (1.153)$$

где $\Theta_{(k-1)}, \Gamma_{(k-1)}$ — внутренние ММП ЭМП, вычисленные по $(k-1)$ -му приближению векторов i, γ, m по формулам (1.35).

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВНОПОЛЮСНЫХ СИНХРОННЫХ МАШИН В ФАЗНЫХ КООРДИНАТАХ

Подставив выражение (1.153) в уравнения (1.150), (1.151), после преобразований с учетом (1.40) имеем

$$\begin{aligned} (L_{(k-1)} + r/b_0) \Delta i_{(k)} + K_{(k-1)} \Delta \gamma_{(k)} &= Q_{1(k-1)} - \Phi_{(k-1)}^m (f_{(k-1)}^m)^{-1} Q_{3(k-1)}; \\ K_{(k-1)} \Delta i_{(k)} + (G_{(k-1)} - Jb_0^2) \Delta \gamma_{(k)} &= Q_{2(k-1)} - \xi_{(k-1)}^m (f_{(k-1)}^m)^{-1} Q_{3(k-1)}. \end{aligned} \quad (1.154)$$

Итерационный процесс для преобразованных указанным способом уравнений отличается от изложенного ранее только тем, что здесь численному решению относительно поправок подлежит только (1.154), после чего поправка $\Delta m_{(k)}$ вычисляется непосредственно по формуле (1.153).

С методологической точки зрения существенным является тот факт, что в процессе численного решения уравнений (1.126), (1.127) либо уравнений (1.150)—(1.152) методом последовательного исключения (Гаусса) на том этапе решения, когда производные всех ВМК, входящие в вектор dm/dt и соответственно поправки всех ВМК, входящие в вектор Δm , окажутся исключенными, оставшаяся система уравнений в ее численной реализации тождественна либо векторному уравнению (1.134), либо системе векторных уравнений (1.154), формируемым непосредственно с использованием матриц внешних параметров преобразователя, вычисляемых по формулам (1.140). Следовательно, эти параметры объективно присутствуют в процедуре расчета переходных процессов ЭМП независимо от того, вычисляются ли они целенаправленно (по приведенным в разделе 1.3 формулам) или же получаются «попутно» в результате исключения вектора dm/dt производных ВМК или вектора $\Delta m_{(k)}$ поправок ВМК численным способом.

2.1. Объект исследования и постановка задачи

Под обобщенной явнополюсной синхронной машиной (ЯСМ) будем понимать электрическую машину с шихтованным магнитопроводом традиционной явнополюсной конструкции с числом полюсов индуктора, равным p_0 , имеющую на статоре s распределенных по пазам электрических контуров, на роторе — n электрических контуров, проводники которых расположены в пазах полюсных наконечников, и обмотку возбуждения, проводники которой расположены в междуполюсных окнах. Для общности будем полагать, что все контуры допускают раздельное питание напряжениями, являющимися заданными функциями времени.

Сформулированное понятие обобщенной ЯСМ охватывает подавляющее большинство известных типов ЯСМ — трехфазные ЯСМ общепромышленного назначения и гидрогенераторы, ЯСМ с продольно-поперечным возбуждением, ЯСМ с возбуждением от третьей гармоники рабочего поля, вентильные явнополюсные электрические машины и др.

В этом разделе основные положения теории и алгоритмы расчета переходных процессов рассмотрены применительно к ЯСМ при описании ее ММХ на двух уровнях адекватности: без учета насыщения магнитопровода и с учетом насыщения при исходных допущениях, сформулированных в подразделе 2.3.1.

2.2. Моделирование ненасыщенной обобщенной ЯСМ в фазных координатах

2.2.1. МАГНИТНО-МЕХАНИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА, МАГНИТНО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ, УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ НЕНАСЫЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЯСМ В ФАЗНЫХ КООРДИНАТАХ

При отсутствии насыщения ММХ обобщенной ЯСМ может быть представлена в явном виде, т. е. как совокупность явных выражений потокосцеплений и электромагнитного момента от токов и угла поворота ротора.

Занумеруем электрические контуры числами от 1 до $s+n+1$ и объединим потокоцепления и токи контуров статора и ротора соответственно в вектор-столбцы

$$\begin{aligned} \psi_c &= (\psi_1, \dots, \psi_s)_*; & \psi_p &= (\psi_{s+1}, \dots, \psi_{s+n}, \psi_f)_*; \\ i_c &= (i_1, \dots, i_s)_*; & i_p &= (i_{s+1}, \dots, i_{s+n}, i_f)_*. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Из них образуем вектор-столбцы потокоцеплений и токов контуров машины

$$\psi = (\psi_c, \psi_p)_*; \quad i = (i_c, i_p)_*. \quad (2.2)$$

Тогда внешняя явная ММХ обобщенной ЯСМ имеет вид

$$\psi = L_\pi i; \quad (2.3)$$

$$M_\theta = \frac{1}{2} i_* L_\pi^T i, \quad (2.4)$$

где i_* — вектор-строка токов контуров машины; M_θ — электромагнитный момент, действующий на ротор; γ_r — угол поворота ротора, измеряемый в геометрических радианах;

$$L_\pi = L_\pi [\rho_0 \gamma_r] \quad (2.5)$$

— квадратная симметричная матрица индуктивностей размерности $s+n+1$, являющаяся заданной функцией угла $\gamma = \rho_0 \gamma_r$ поворота ротора, измеряемого в электрических радианах;

$$L_\pi^T = \frac{dL_\pi}{d\gamma_r} = L_\pi^T [\rho_0 \gamma_r] \quad (2.6)$$

— производная матрицы L_π по углу γ_r .

Матрицу L_π удобно представить в виде

$$L_\pi = \begin{vmatrix} L_{cc} & L_{cp} \\ L_{pc} & L_{pp} \end{vmatrix}, \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} L_{cc} &= \begin{vmatrix} L_{1,1} & \dots & L_{1,s} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{s,1} & \dots & L_{s,s} \end{vmatrix}; & L_{cp} &= \begin{vmatrix} L_{1,s+1} & \dots & L_{1,s+n} & L_{1,f} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ L_{s,s+1} & \dots & L_{s,s+n} & L_{s,f} \end{vmatrix}; \\ L_{pc} &= \begin{vmatrix} L_{s+1,1} & \dots & L_{s+1,s} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{s+n,1} & \dots & L_{s+n,s} \\ L_{f,1} & \dots & L_{f,s} \end{vmatrix}; & L_{pp} &= \begin{vmatrix} L_{s+1,s+1} & \dots & L_{s+1,s+n} & L_{s+1,f} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ L_{s+n,s+1} & \dots & L_{s+n,s+n} & L_{s+n,f} \\ L_{f,s+1} & \dots & L_{f,s+n} & L_{f,f} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

Здесь L_{cc} — матрица индуктивностей, отражающих магнитные связи между контурами статора; L_{pp} — матрица индуктивностей, отражающих магнитные связи между контурами ротора; L_{cp} , L_{pc} — матрицы индуктивностей, отражающих магнитные связи между контурами статора и ротора.

В общем случае все блоки матрицы L_π зависят от угла γ_r , так как реально статор выполняется зубчатым, поэтому в матрице

$$L_\pi^T = \begin{vmatrix} L_{cc}^T & L_{cp}^T \\ L_{pc}^T & L_{pp}^T \end{vmatrix}. \quad (2.8)$$

все блоки отличны от нуля.

С учетом выражений (2.2), (2.8), равенства $L_{cp} = L_{pc}$ и вытекающего из него тождества $i_c L_{cp}^T i_p = i_p L_{pc}^T i_c$ формула (2.4) принимает вид

$$M_\theta = \frac{1}{2} i_{c*} L_{cc}^T i_c + i_{p*} L_{pc}^T i_c + \frac{1}{2} i_{p*} L_{pp}^T i_p. \quad (2.9)$$

Здесь первое слагаемое отражает реактивный момент обобщенной ЯСМ, обусловленный явнополюсностью ротора и зубчатой структурой полюсных наконечников. Действительно, при $i_p = 0$ электромагнитный момент определяется только этим слагаемым и он, как известно, является реактивным. Аналогично третье слагаемое отражает реактивный момент, обусловленный зубчатостью статора, а второе слагаемое определяет составляющую электромагнитного момента, возникающую за счет взаимодействия токов контуров, расположенных на статоре и роторе.

Переменные составляющие индуктивностей, обусловленные зубчатостью статора, обычно относительно невелики и ими допустимо пренебречь. При этом $L_{pp}^T = 0$, и тогда формула (2.9) принимает вид

$$M_\theta = \frac{1}{2} i_{c*} L_{cc}^T i_c + i_{p*} L_{pc}^T i_c. \quad (2.10)$$

Зависимость матрицы L_π от угла γ_r может быть найдена любым из известных способов, например, определена экспериментально либо рассчитана на основе представления магнитопровода разветвленной магнитной цепью, методом проводимостей зубцовых контуров [25] или одним из методов расчета магнитных полей в одномерной, двумерной и даже трехмерной постановке. От способа определения этой матрицы зависит уровень адекватности модели по сравнению с другими моделями обобщенной ЯСМ, составленными без учета насыщения. Однако даже наилучшая из них будет обладать низким уровнем адекватности, так как значительная потеря точности заложена уже в исходном допущении об отсутствии насыщения магнитопровода. В связи с этим определение матрицы индуктивностей ненасыщенной обобщенной ЯСМ методами повышенной точности лишено практического смысла. С точки зрения структуры алгоритма расчета переходных процессов обобщенной ЯСМ существенным является факт наличия явной зависимости (2.5), а не способ и точность ее определения. Мы бу-

дем полагать, что эта зависимость известна и представлена в виде матричного усеченного ряда Фурье

$$L_n [p_0 \gamma_r] = L_0 + \sum_{k=1}^K (L_{kc} \cos k p_0 \gamma_r + L_{ks} \sin k p_0 \gamma_r), \quad (2.11)$$

где L_0, L_{kc}, L_{ks} ($k=1, \dots, K$) — квадратные матрицы размерности $s+n+1$, отражающие соответственно постоянную составляющую, косинусную и синусную амплитуды k -й гармоники функции (2.5).

В соответствии с общим приведенным в подразделе 1.3 определением внешних ММП как частных производных явной внешней ММХ по токам и перемещениям и с учетом выражений (2.3) — (2.5) имеем

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial \psi}{\partial i} = L_n; \quad K = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_r} = \frac{dL_n i}{d\gamma_r} = L_n^T i; \\ K_* &= \frac{\partial M_s}{\partial i} = \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{1}{2} i_* L_n^T i \right) + \left(\frac{\partial}{\partial i_*} \left(\frac{1}{2} i_* L_n^T i \right) \right)_* = \\ &= \frac{1}{2} i_* L_n^T + \frac{1}{2} (L_n^T i)_* = i_* L_n^T; \\ G &= \frac{\partial M_s}{\partial \gamma_r} = \frac{1}{2} i_* L_n^T \gamma_r i, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$L_n^T \gamma_r = \frac{dL_n^T}{d\gamma_r} = L_n^T \gamma_r [p_0 \gamma_r]. \quad (2.13)$$

Электрическое состояние обобщенной ЯСМ описывается векторным ДУ

$$\frac{d\psi}{dt} + ri - u = 0, \quad (2.14)$$

совпадающим по внешнему виду с уравнением (1.113) электрического состояния обобщенного ЭМП. В уравнении (2.14) ψ, i — вектор-столбцы (2.2);

$$u = (u_c, u_p)_* \quad (2.15)$$

— вектор-столбец напряжений питания как заданных функций времени, в котором

$$u_c = (u_1, \dots, u_s)_*; \quad u_p = (u_{s+1}, \dots, u_{s+n}, u_f)_*; \quad (2.16)$$

r — квадратная матрица активных сопротивлений размерности $s+n+1$.

Механическое состояние обобщенной ЯСМ описывается скалярными ДУ

$$-J \frac{d\omega_r}{dt} + M_s + M_b = 0; \quad (2.17)$$

$$\omega_r = \frac{d\gamma_r}{dt}, \quad (2.18)$$

где J — момент инерции вращающихся частей, приведенный к валу машины; M_s — электромагнитный момент; M_b — момент, приложенный к валу как заданная функция времени; ω_r — угловая скорость ротора, измеряемая в геометрических радианах за секунду.

2.2.2. МОДЕЛИ НЕНАСЫЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЯСМ В ФАЗНЫХ КООРДИНАТАХ НА БАЗЕ ЯВНЫХ И НЕЯВНЫХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Для решения задачи на базе явных методов интегрирования представим ДУ (2.14), с учетом (2.3), (2.6), (2.12), (2.18) в виде

$$L \frac{di}{dt} + K \omega_r + ri - u = 0, \quad (2.19)$$

совпадающем с соответствующим ДУ (1.134) обобщенного ЭМП. Уравнение (2.17) перепишем в виде

$$\frac{d\omega_r}{dt} = J^{-1} (M_s + M_b). \quad (2.20)$$

Полная система уравнений, используемая при решении задачи явным методом интегрирования, состоит из ДУ (2.19), (2.20), (2.18), выражений (2.4) — (2.6) и первых двух формул системы (2.12).

Начальные условия имеют вид; при $t=0$

$$i = i_0; \quad \gamma_r = \gamma_{r0}; \quad \omega_r = \omega_{r0}. \quad (2.21)$$

Упомянутая система значительно проще рассмотренной в подразделе 1.6 системы уравнений для обобщенного ЭМП, что объясняется принятым нами допущением о линейности магнитных связей, и, следовательно, возможностью составления явной ММХ без необходимости вычисления ВМК. Соответственно и алгоритм численного интегрирования здесь сводится к весьма простому частному случаю алгоритма, изложенного в разделе 1.7. Так, здесь на шаге интегрирования выполняются следующие операции:

для нулевого узла шаблона вычисляется вектор напряжений u и момент M_b ;

по известным из предыдущего шага интегрирования (на первом шаге — по начальным условиям (2.21)) вычисляются по (2.5) (2.6) матрицы L_n, L_n^T , по (2.12) — матрицы L и K , по (2.4) — момент M_s , после чего формируются уравнения (2.19), (2.20);

уравнение (2.19) решается численным способом относительно производной di/dt ;

по формулам (2.20), (2.18) вычисляются производные $d\omega_r/dt, d\gamma_r/dt$;

по формулам вида (1.69) вычисляются приращения Δi , $\Delta \omega_r$, $\Delta \gamma_r$ на шаге h ;

по формулам вида (1.67) вычисляются значения переменных i , ω_r , γ_r при $t=h$.

В основу решения задачи на базе неявного метода интегрирования примем САДУ, состоящую из уравнений (2.14), (2.17), (2.18), (2.3), (2.4).

Заменив в дифференциальных уравнениях этой САДУ производные выражениями вида (1.73), приходим к системе алгебраических уравнений (САУ)

$$\psi + \frac{1}{b_0} \sum_{j=1}^{\xi} b_j \psi_j + \frac{r}{b_0} i - \frac{u}{b_0} = 0; \quad (2.22)$$

$$-J \left(b_0 \omega_r + \sum_{j=1}^{\xi} b_j \omega_{rj} \right) + M_0 + M_0 = 0; \quad (2.23)$$

$$\omega_r = b_0 \gamma_r + \sum_{j=1}^{\xi} b_j \gamma_{rj}; \quad (2.24)$$

$$\psi = L_n i; \quad (2.25)$$

$$M_0 = \frac{1}{2} i_* L_n^T i. \quad (2.26)$$

Исключив в (2.23) угловую скорость в соответствии с (2.24), приходим к уравнению

$$-J b_0^2 \gamma_r - J \sum_{j=1}^{\xi} b_j (b_0 \gamma_{rj} + \omega_{rj}) + M_0 + M_0 = 0. \quad (2.27)$$

Система (2.22), (2.27), (2.24)—(2.26) нелинейна, так как нелинейны два последних ее уравнения. Будем решать ее итерационным методом Ньютона. При этом линейная САУ для вычисления поправок зависимых переменных на k -й итерации имеет вид

$$\Delta \psi + (r/b_0) \Delta i = Q_1; \quad (2.28)$$

$$-J b_0^2 \Delta \gamma_r + \Delta M_0 = Q_2; \quad (2.29)$$

$$\Delta \psi = L_n^T i \Delta \gamma_r + L_n \Delta i; \quad (2.30)$$

$$\Delta M_0 = i_* L_n^T \Delta i + \frac{1}{2} i_* L_n^T i \Delta \gamma_r. \quad (2.31)$$

Первые два уравнения этой САУ с учетом последних трех ее уравнений и формул (2.12) принимают вид

$$\begin{aligned} (L_n + r/b_0) \Delta i + K \Delta \gamma_r &= Q_1; \\ K_* \Delta i + (G - J b_0^2) \Delta \gamma_r &= Q_2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Структура левой части системы (2.32) тождественна структуре левой части системы (1.154) для обобщенного ЭМП с нелинейными магнитными связями. Правая же часть в системе (2.32) проще, чем в системе (1.154), что обусловлено принятым здесь допущением о линейности магнитных связей и, соответственно, отсутствием ВМК в уравнениях ММХ. Следовательно, и алгоритм выполнения k -го итерационного цикла уточнения зависимых переменных i , γ_r , ψ , M_0 , ω_r здесь значительно проще. Он состоит из следующих операций:

значения момента M_0 и вектора u напряжений питания принимаются равными вычисленным для момента времени $t=h$;

по найденным на $(k-1)$ -й итерации значениям зависимых переменных (при $k=1$ — по результатам выполнения предыдущего шага интегрирования, а при $k=1$ на первом шаге — по начальным условиям) вычисляются ММП машины по формулам (2.5), (2.6), (2.13), (2.12) и невязки Q_1 , Q_2 как левые части уравнений (2.22), (2.27);

система (2.32) решается численным способом относительно поправок Δi , $\Delta \gamma_r$;

по формулам вида (1.77) вычисляется k -е приближение переменных i , $\Delta \gamma_r$;

по формулам (2.24)—(2.26) вычисляется k -е приближение переменных ω_r , ψ , M_0 .

2.3. Моделирование насыщенной обобщенной ЯСМ в фазных координатах

2.3.1. Исходные допущения

Объектом исследования является обобщенная ЯСМ в смысле, сформулированном в 2.1., и отличающаяся от обобщенной ЯСМ, рассмотренной в 2.2, учетом насыщения магнитопровода при следующих исходных допущениях.

Вихревые токи в магнитопроводе отсутствуют.

Зубчатые структуры статора и полюсного наконечника заменены гладкими структурами, т. е. равномерными вдоль угловой координаты магнитными слоями, характеристики намагничивания которых в радиальных направлениях тождественны характеристикам намагничивания реальных зубчатых структур, рассчитанным для одного зубцового деления статора и ротора соответственно. Такая замена физически равноценна замещению зубцовых структур статора и ротора с конечными числами зубцов структурами с бесконечными числами бесконечно тонких зубцов. Магнитные проводимости этих слоев в тангенциальных направлениях принимаются равными нулю. Обусловленное зубчатостью увеличение падения магнитного напряжения в воздушном зазоре учитывается коэффициентом Картера, рассчитываемым для реальной зубчатой

структуры магнитопровода с учетом переменной по угловой координате длины воздушного зазора.

Уложенные в пазах статора и ротора проводники электрических контуров заменены бесконечно тонкими проводниками, расположенными в непосредственной близости от воздушного зазора. Активные части витков сосредоточенных обмоток возбуждения расположены на геометрических нейтральных.

Магнитное поле машины условно разделено на рабочее поле и поля рассеяния статора и ротора. Под рабочим понимается поле, силовые линии которого пересекают радиально воздушный зазор и сцепляются одновременно с контурами статора и ротора. Поле рассеяния статора (ротора) обусловлено силовыми линиями, сцепляющимися только с контурами статора (ротора).

Потокосцепления рассеяния всех контуров приняты независимыми от угла γ_r поворота ротора.

Потокосцепление рассеяния любого контура, уложенного в пазах, принимается состоящим из двух частей, которые условно названы нелинейной и линейной. Первая обусловлена полем рассеяния, замыкающимся через коронки зубцов, и определяется как сумма произведений чисел проводников рассматриваемого контура в каждом пазу на поток рассеяния этого паза, замыкающийся через коронки зубцов и нелинейно зависящий от полного тока данного паза. Линейная часть потокосцепления рассеяния контура обусловлена магнитным полем в лобовых частях обмотки и полем рассеяния в пазовой части (т. е. кроме коронок зубцов). Она предполагается линейной однородной функцией токов контуров статора либо ротора, а коэффициенты этой функции вычисляются по методикам, известным из магнитнолинейной теории электрических машин.

Рабочее магнитное поле предполагается плоскопараллельным.

Падения магнитных напряжений для силовых трубок рабочего поля в ярме статора одинаковы и определяются по величине потока ярма статора, равного половине потока в воздушном зазоре на полюсном делении, в соответствии с характеристикой намагничивания ярма статора, рассчитанной по методике, применяемой при проектировании ЯСМ [66].

Допущение, аналогичное предыдущему, принимается и в отношении полюсов вместе с ярмом ротора. При этом предполагается, что поток рассеяния полюса замыкается от полюса к полюсу через полюсные наконечники; значение потока рассеяния полюса рассчитано по потокосцеплению, найденному с учетом реальной геометрии межполюсного окна и обмотки возбуждения.

Будем полагать, что геометрия всех полюсов индуктора одинакова, эксцентриситет отсутствует и число проводников k -го контура ($k=1, s+n+1$), находящихся в j -м пазу, отличается от числа проводников этого же контура, находящихся в пазу, удаленном от j -го, на одно полюсное деление, только знаком. При этом и магнитное поле под соседними полюсами для любой пары точек, от-

стоящих друг от друга на одно полюсное деление, также отличается только знаком.

Характеристики намагничивания сталей магнитопровода однозначны (гистерезис отсутствует).

Из принятых допущений вытекает, что в рассматриваемой модели обобщенной ЯСМ учет насыщения по путям рабочего поля и полей рассеяния выполняется независимо.

2.3.2. МАГНИТНО-МЕХАНИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НАСЫЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЯСМ В ФАЗНЫХ КООРДИНАТАХ

Составим при принятых исходных допущениях ММХ обобщенной ЯСМ как систему уравнений вида (1.5) — (1.7), позволяющую рассчитать потокосцепления контуров при заданных токах контуров и угле γ_r поворота ротора.

Вначале рассмотрим соотношения, связанные с заменой реальных зубчатых структур гладкими.

Для определения положения произвольной точки X на расточке статора (рис. 2.1) будем пользоваться ее угловым расстоянием

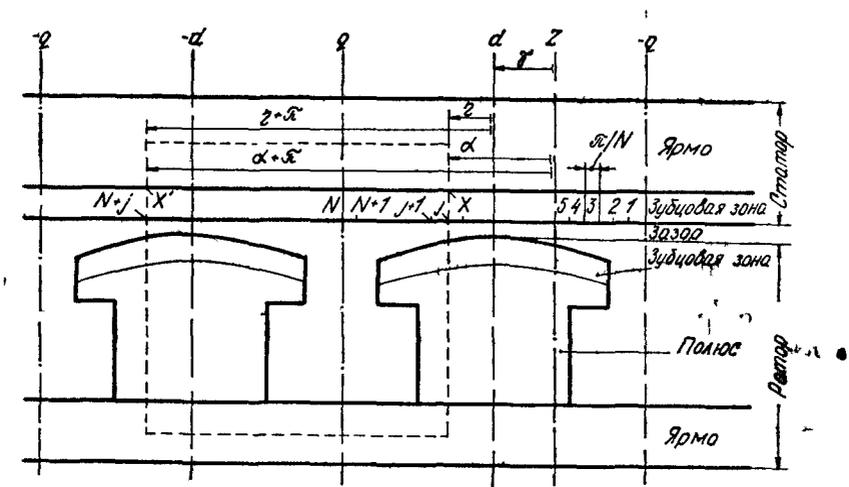


Рис. 2.1. К составлению ММХ обобщенной ЯСМ

η , от продольной магнитной оси d ротора, называемым роторной координатой точки X , либо угловым расстоянием α от некоторой произвольно выбранной, но фиксированной по отношению к статору радиальной оси Z , называемым статорной координатой точки X . Углы η и α измеряются в электрических радианах 'и' связаны соотношением

$$\alpha = \eta + \gamma, \quad (2.33)$$

где γ — угол поворота ротора, определяемый как угол наклона оси d к оси Z и измеряемый в электрических радианах; он связан

с углом γ_r поворота ротора, измеряемым в геометрических радианах, формулой

$$\gamma = p_0 \gamma_r. \quad (2.34)$$

Пусть на статоре в пределах одного полюсного деления имеется S зубцовых делений (S — целое число) и в j -м пазу находится $V_{(kj)}$ эффективных проводников k -го электрического контура. Присвоим всем пазам одно и то же положительное направление, перпендикулярное к плоскости поперечного сечения машины и проходящее от этой плоскости к наблюдателю. Условимся считать $V_{(kj)}$ положительным, если при перемещении вдоль электрического контура по его схеме от начала к концу направление движения в j -м пазу совпадает с положительным направлением паза; в противном случае число $V_{(kj)}$ будем полагать отрицательным.

Примем временно, что все $V_{(kj)}$ проводников распределены на интервале $\alpha_{(j)} - \Delta\alpha \leq \alpha \leq \alpha_{(j)} + \Delta\alpha$ ($\Delta\alpha$ — некоторый малый угол) равномерно. При этом плотность проводников k -го контура, обусловленная наличием проводников этого контура только в j -м пазу, есть финитная функция

$$V_{kj}[\alpha] = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha < \alpha_{(j)} - \Delta\alpha; \quad \alpha > \alpha_{(j)} + \Delta\alpha; \\ V_{(kj)}/(2\Delta\alpha) & \text{при } \alpha_{(j)} - \Delta\alpha \leq \alpha \leq \alpha_{(j)} + \Delta\alpha. \end{cases} \quad (2.35)$$

Представим ее рядом Фурье

$$V_{kj}[\alpha] = \sum_{\nu=1,3,\dots} v_{kj\nu} \cos \nu\alpha + v_{kjs\nu} \sin \nu\alpha, \quad (2.36)$$

где $v_{kj\nu}$, $v_{kjs\nu}$ — амплитуды косинусной и синусной составляющих ν -й гармоники функции $V_{kj}[\alpha]$. Они вычисляются по формулам

$$v_{kj\nu} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_{kj}[\alpha] \cos \nu\alpha d\alpha; \quad v_{kjs\nu} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_{kj}[\alpha] \sin \nu\alpha d\alpha. \quad (2.37)$$

Заменим интегралы вида (2.37) суммами интегралов, соответствующих интервалам интегрирования $[-\pi/2, \alpha_{(j)} - \Delta\alpha]$, $[\alpha_{(j)} - \Delta\alpha, \alpha_{(j)} + \Delta\alpha]$, $[\alpha_{(j)} + \Delta\alpha, \pi/2]$. Из (2.35) следует, что в этих суммах первые и третьи слагаемые равны нулю, поэтому

$$v_{kj\nu} = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_{(j)} - \Delta\alpha}^{\alpha_{(j)} + \Delta\alpha} \frac{V_{(kj)}}{2\Delta\alpha} \cos \nu\alpha d\alpha; \quad v_{kjs\nu} = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_{(j)} - \Delta\alpha}^{\alpha_{(j)} + \Delta\alpha} \frac{V_{(kj)}}{2\Delta\alpha} \sin \nu\alpha d\alpha. \quad (2.38)$$

При $\Delta\alpha \rightarrow 0$ внутри второго интервала функции $\cos \nu\alpha$ и $\sin \nu\alpha$ принимают значения $\cos \nu\alpha_{(j)}$ и $\sin \nu\alpha_{(j)}$ соответственно, и тогда из (2.38) имеем

$$v_{kj\nu} = \frac{2}{\pi} V_{(kj)} \cos \nu\alpha_{(j)}; \quad v_{kjs\nu} = \frac{2}{\pi} V_{(kj)} \sin \nu\alpha_{(j)}. \quad (2.39)$$

С учетом (2.39) формула (2.36) принимает вид

$$V_{kj}[\alpha] = \frac{2}{\pi} V_{(kj)} \sum_{\nu=1,3,\dots} (\cos \nu\alpha_{(j)} \cos \nu\alpha + \sin \nu\alpha_{(j)} \sin \nu\alpha). \quad (2.40)$$

Составив выражения вида (2.40) для всех S пазов и просуммировав их по пазам, получим функцию

$$V_k[\alpha] = \sum_{j=1}^S V_{kj}[\alpha] = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^S V_{(kj)} \sum_{\nu=1,3,\dots} (\cos \nu\alpha_{(j)} \cos \nu\alpha + \sin \nu\alpha_{(j)} \sin \nu\alpha), \quad (2.41)$$

которая определяет плотность проводников k -го контура как функцию координаты α . Представим ее в виде

$$V_k[\alpha] = \sum_{\nu=1,3,\dots} v_{k\nu} \cos \nu\alpha + v_{k\nu} \sin \nu\alpha = \sum_{\nu=1,3,\dots} v_{k\nu} \cos(\nu\alpha - a_{k\nu}), \quad (2.42)$$

где

$$v_{k\nu} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^S V_{(kj)} \cos \nu\alpha_{(j)}; \quad v_{k\nu} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^S V_{(kj)} \sin \nu\alpha_{(j)} \quad (2.43)$$

— амплитуды косинусной и синусной составляющих ν -й гармоники плотности проводников k -го контура;

$$v_{k\nu} = \sqrt{v_{k\nu}^2 + v_{k\nu}^2}; \quad (2.44)$$

$$a_{k\nu} = \arccos v_{k\nu}/v_{k\nu} = \arcsin v_{k\nu}/v_{k\nu}$$

— соответственно амплитуда ν -й гармоники плотности проводников k -го контура и угол, определяющий положение точки, в которой ν -я гармоника достигает положительного максимума.

Количество проводников k -го электрического контура, расположенных на отрезке, равном полюсному делению и начинающемся в точке X с угловой координатой α , определяется с учетом (2.41) функцией

$$W_k[\alpha] = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} V_k[\alpha] d\alpha = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^S V_{(kj)} \sum_{\nu=1,3,\dots} \frac{1}{\nu} (\sin \nu\alpha_{(j)} \cos \nu\alpha - \cos \nu\alpha_{(j)} \sin \nu\alpha), \quad (2.45)$$

которую назовем функцией распределения проводников k -го контура. Представим ее в виде

$$W_k[\alpha] = \sum_{\nu=1,3,\dots} w_{k\nu} \cos \nu\alpha + w_{k\nu} \sin \nu\alpha, \quad (2.46)$$

$$\text{где } w_{k\nu} = \frac{4}{\pi\nu} \sum_{j=1}^S V_{(kj)} \sin \nu\alpha_{(j)}; \quad w_{k\nu} = -\frac{4}{\pi\nu} \sum_{j=1}^S V_{(kj)} \cos \nu\alpha_{(j)} \quad (2.47)$$

— амплитуды косинусной и синусной составляющих функции распределения проводников k -го контура.

Отметим, что в (2.35)—(2.47) в соответствии с принятой в 2.2.1 нумерацией контуров обобщенной ЯСМ $k = \overline{1, s}$.

Формулы, аналогичные (2.42)—(2.47), могут быть выведены и для контуров ротора. Так, для контуров ротора, расположенных в пазах полюсных наконечников, они имеют вид

$$V_k[\eta] = \sum_{\nu=1,3,\dots} V_{k\nu} \cos \nu\eta + v_{k\nu} \sin \nu\eta; \quad (2.48)$$

$$v_{k\nu} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^R V_{(kj)} \cos \nu\eta_{(j)}; \quad v_{k\nu} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^R V_{(kj)} \sin \nu\eta_{(j)}; \quad (2.49)$$

$$W_k[\eta] = \sum_{\nu=1,3,\dots} w_{k\nu} \cos \nu\eta + w_{k\nu} \sin \nu\eta; \quad (2.50)$$

$$w_{k\nu} = \frac{4}{\pi\nu} \sum_{j=1}^R V_{(kj)} \sin \nu\eta_{(j)}; \quad w_{k\nu} = -\frac{4}{\pi\nu} \sum_{j=1}^R V_{(kj)} \cos \nu\eta_{(j)}, \quad (2.51)$$

где R — число пазов в полюсном наконечнике; $k = \overline{s+1, s+n}$.

Зубцовую зону статора, воздушный зазор и зубцовую зону ротора машины будем называть кратко ее активной зоной.

Проведем в магнитопроводе замкнутый контур (см. штриховую линию на рис. 2.1), проходящий последовательно через полюс, активную зону в точке X , ярмо статора, активную зону в точке X' , удаленной от точки X на одно полюсное деление, полюс, ярмо ротора и, обратно через полюс в точку X , и назовем его контуром XX' .

Полный ток, создаваемый k -м электрическим контуром и охватываемый контуром XX' , равен $W_k[\alpha] i_k/a_k$ ($k = \overline{1, s}$) для контуров статора и $W_k[\eta] i_k/a_k$ ($k = \overline{s+1, s+n}$) для контуров ротора, где i_k — ток k -го электрического контура; a_k — число его параллельных ветвей. Полный ток, создаваемый обмоткой возбуждения и охватываемый контуром XX' , равен $W_f i_f/a_f$, где W_f — число активных проводников катушки обмотки возбуждения (равное удвоенному числу витков катушки); i_f — ток обмотки возбуждения; a_f — число ее параллельных ветвей. Согласно закону полного тока, для любого контура интегрирования сумма охватываемых им токов равна сумме падений магнитных напряжений на всех его участках. Совместив контур интегрирования с контуром XX' , приходим к уравнению

$$W_1[\alpha] i_1/a_1 + \dots + W_s[\alpha] i_s/a_s + W_{s+1}[\eta] i_{s+1}/a_{s+1} + \dots + W_{s+n}[\eta] i_{s+n}/a_{s+n} + W_f i_f/a_f - F_a - F_f - F_z - \rho_\delta[\eta] B = 0, \quad (2.52)$$

где $F_a, F_f, F_z, \rho_\delta[\eta] B$ — падения магнитных напряжений на участках контура интегрирования, соответствующих ярму статора, по-

люсам вместе с ярмом ротора (т. е. в индукторе), зубцовым зонам в точках X и X' и воздушному зазору в точках X и X' ; $\rho_\delta[\eta]$ — удвоенное удельное магнитное сопротивление воздушного зазора в точке X ; B — магнитная индукция в воздушном зазоре в точке X .

По ярму статора проходит магнитный поток, равный половине потока Φ_a , входящего в статор через воздушный зазор в пределах между соседними поперечными осями q и $-q$ (рис. 2.1).

Падение магнитного напряжения в ярме статора определяется через поток ярма статора по характеристике намагничивания ярма статора

$$F_a = F_a[\Phi_a]. \quad (2.53)$$

Падение магнитного напряжения в индукторе определяется через поток полюса по характеристике намагничивания индуктора

$$F_f = F_f[\Phi_f]. \quad (2.54)$$

Падение магнитного напряжения $F_{z\eta}$ определяется через индукцию в зазоре в точке X по локальной характеристике намагничивания зубцовых зон, составленной для точки X , т. е.

$$F_{z\eta} = F_{z\eta}[B]. \quad (2.55)$$

Величина $F_{z\eta}$ для контуров интегрирования, пересекающих активную зону в точках, находящихся в пределах полюсной дуги, равна удвоенному значению суммы падений магнитных напряжений в зубцовой зоне статора и в зубцовой зоне ротора в точке X , а для контуров интегрирования, пересекающих активную зону вне полюсной дуги — удвоенному значению падения магнитных напряжений в зубцовой зоне статора в точке X .

Рабочий поток, приходящийся на участок da полюсного деления, расположенный в окрестности точки X , равен произведению $Bl_\delta(\tau/\pi)da$, где l_δ — расчетная длина магнитопровода; τ — длина полюсного деления. Такой же по величине, но противоположный по знаку поток проходит через участок da в окрестности точки X' , что позволяет рассматривать рабочее магнитное поле состоящим из элементарных контурных потоков, путь каждого из которых совпадает с соответствующим контуром XX' . Часть потоко-сцепления k -го электрического контура статора, обусловленного рабочим полем в пределах одной пары полюсов, найдем суммированием в пределах полюсного деления произведений упомянутых контурных потоков на количества $W_k[\alpha]$ охватываемых ими проводников, поэтому рабочее потоко-сцепление этого контура определяется выражением

$$\psi_{\delta k} = \frac{\rho_0}{a_k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W_k[\alpha] Bl_\delta \frac{\tau}{\pi} da = \frac{\rho_0}{a_k} c_\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W_k[\eta + \gamma] B d\eta \quad (k = \overline{1, s}), \quad (2.56)$$

где $c_\phi = l_\delta \tau / \pi$. Аналогично для рабочего потоко-сцепления k -го контура, расположенного в пазах ротора, имеем

$$\psi_{\delta k} = \frac{p_0}{a_k} c_{\Phi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W_k[\eta] B d\eta \quad (k = \overline{s+1, s+n}). \quad (2.57)$$

Магнитный поток Φ_a определяется по формуле

$$\Phi_a = c_{\Phi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B d\eta, \quad (2.58)$$

а поток полюса — по формуле

$$\Phi_f = \Phi_a + \Lambda_{\sigma f} (W_f i_f / a_f - F_f), \quad (2.59)$$

где $\Lambda_{\sigma f}$ — постоянная магнитная проводимость рассеяния полюса.

Рабочее потокоцепление обмотки возбуждения вычисляется по выражению

$$\psi_{\delta f} = \frac{p_0 W_f}{a_f} \Phi_f. \quad (2.60)$$

Линейные части потокоцеплений рассеяния k -го контура обмотки статора, k -го контура обмотки ротора и обмотки возбуждения вычисляются соответственно по формулам

$$\psi_k = L_{\sigma k 1} i_1 + \dots + L_{\sigma k s} i_s \quad (k = \overline{1, s}); \quad (2.61)$$

$$\psi_{nk} = L_{\sigma n, s+1} i_{s+1} + \dots + L_{\sigma n, s+n} i_{s+n} + L_{\sigma n f} i_f \quad (k = \overline{s+1, s+n}); \quad (2.62)$$

$$\psi_{nf} = L_{\sigma f, s+1} i_{s+1} + \dots + L_{\sigma f, s+n} i_{s+n}, \quad (2.63)$$

где $L_{\sigma k j}$ — постоянная индуктивность, обусловленная полями рассеяния в лобовых частях обмоток и в пазовой части (кроме коронок зубцов).

Нелинейные части потокоцеплений рассеяния k -го контура статора и k -го контура ротора вычисляются по формулам

$$\psi_{nk} = (V_{(k,1)} \Phi_{n,1} + \dots + V_{(k,s)} \Phi_{n,s}) 2p_0 / a_k \quad (k = \overline{1, s}); \quad (2.64)$$

$$\psi_{nk} = (V_{(k,s+1)} \Phi_{n,s+1} + \dots + V_{(k,s+R)} \Phi_{n,s+R}) 2p_0 / a_k \quad (k = \overline{s+1, s+n}), \quad (2.65)$$

где Φ_{nj} — магнитный поток рассеяния j -го паза статора, если $j = \overline{1, S}$, и j -го паза ротора, если $j = \overline{S+1, S+R}$, замыкающийся по коронкам зубцов, окаймляющих этот паз.

Поток Φ_{nj} ($j = \overline{1, S}$) определяется через ток i_{nj} j -го паза статора по характеристике намагничивания коронок j -го паза статора

$$\Phi_{nj} = \Phi_{nj} [i_{nj}] \quad (j = \overline{1, S}), \quad (2.66)$$

где

$$i_{nj} = V_{(1,j)} i_1 / a_1 + \dots + V_{(s,j)} i_s / a_s \quad (j = \overline{1, S}). \quad (2.67)$$

Поток Φ_{nj} ($j = \overline{S+1, S+R}$) определяется через ток i_{nj} j -го паза ротора по характеристике намагничивания коронок j -го паза ротора

$$\Phi_{nj} = \Phi_{nj} [i_{nj}] \quad (j = \overline{S+1, S+R}), \quad (2.68)$$

где

$$i_{nj} = (V_{(s+1,j)} i_{s+1} / a_{s+1} + \dots + V_{(s+n,j)} i_{s+n} / a_{s+n}) \quad (j = \overline{S+1, S+R}). \quad (2.69)$$

Полное потокоцепление k -го контура статора, k -го контура ротора и обмотки возбуждения согласно четвертому допущению представим суммами

$$\psi_k = \psi_{nk} + \psi_{nk} + \psi_{\delta k} \quad (k = \overline{1, s}); \quad (2.70)$$

$$\psi_k = \psi_{nk} + \psi_{nk} + \psi_{\delta k} \quad (k = \overline{s+1, s+n}); \quad (2.71)$$

$$\psi_f = \psi_{nf} + \psi_{\delta f}. \quad (2.72)$$

Для практического вычисления интегралов вида (2.56) — (2.58) нанесем на полюсное деление $-\pi/2 \leq \eta \leq \pi/2$ равномерную сетку, состоящую из N узлов, таким образом, чтобы первый узел находился на расстоянии π/N от оси $-q$, а последний — бесконечно близко к оси q (рис. 2.1), и представим эти интегралы суммами

$$\psi_{\delta k} = (W_k[\eta_1 + \gamma] B_1 + \dots + W_k[\eta_N + \gamma] B_N) C_{\Phi} p_0 / a_k \quad (k = \overline{1, s}); \quad (2.73)$$

$$\psi_{\delta k} = (W_k[\eta_1] B_1 + \dots + W_k[\eta_N] B_N) C_{\Phi} p_0 / a_k \quad (k = \overline{s+1, s+n}); \quad (2.74)$$

$$\Phi_a = (B_1 + \dots + B_N) C_{\Phi}, \quad (2.75)$$

где $C_{\Phi} = l_{\delta} \tau / N$; $W_k[\eta_j + \gamma]$ ($j = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, s}$) — значение функции $W_k[\eta + \gamma]$, вычисленное при $\alpha = \eta_j + \gamma$ и зависящее от угла γ ; $W_k[\eta_j]$ ($j = \overline{1, N}$, $k = \overline{s+1, s+n}$) — постоянное значение функции $W_k[\eta]$, вычисленное в j -м узле сетки; B_j ($j = \overline{1, N}$) — значение магнитной индукции B в j -м узле. При этом бесконечные ряды вида (2.46), (2.50) должны быть заменены усеченными рядами.

Уравнение (2.52), составленное для j -го узла сетки, принимает вид

$$W_1[\eta_j + \gamma] i_1 / a_1 + \dots + W_s[\eta_j + \gamma] i_s / a_s + W_{s+1}[\eta_j] i_{s+1} / a_{s+1} + \dots + W_{s+n}[\eta_j] i_{s+n} / a_{s+n} + W_f i_f / a_f - F_a - F_f - F_{zj} - \rho_{\delta j} B_j = 0, \quad (2.76)$$

где $\rho_{\delta j} = \rho_{\delta}[\eta_j]$ — значение магнитного сопротивления ρ_{δ} в j -м узле; F_{zj} — падение магнитного напряжения в зубцовых зонах для j -го узла, определяемое по характеристике намагничивания вида (2.55), которая для j -го узла принимает вид

$$F_{zj} = F_{zj} [B_j] \quad (j = \overline{1, N}). \quad (2.77)$$

На участке da полюсного деления расположены $V_k[a] da$ проводников k -го электрического контура обмотки статора. Согласно

закону Ампера, на них действует электродинамическая сила $V_k[a] \cdot da \cdot B \cdot l_{ik}/a_k$, а создаваемый ею момент равен $V_k[a] \cdot da \times B \cdot l_{ik}/a_k \rho_0 \tau / \pi$, где $\rho_0 \tau / \pi$ — радиус расточки статора. Электромагнитный момент, действующий на всю поверхность расточки статора и создаваемый всеми электрическими контурами, определяется выражением

$$2\rho_0 \sum_{k=1}^s \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_k[a] \frac{l_k i_k \rho_0 \tau}{a_k \pi} B da.$$

Электромагнитный момент M_σ , действующий на ротор, согласно третьему закону Ньютона равен по величине и противоположен по знаку моменту, действующему на статор, поэтому с учетом принятых ранее обозначений

$$M_\sigma = -2\rho_0^2 C_\Phi \sum_{k=1}^s \frac{i_k}{a_k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_k[\eta + \gamma] B d\eta. \quad (2.78)$$

После замены интегралов конечными суммами выражение (2.78) принимает вид

$$\begin{aligned} M_\sigma &= -2\rho_0^2 C_\Phi \sum_{k=1}^s \frac{i_k}{a_k} (V_k[\eta_1 + \gamma] B_1 + \dots + V_k[\eta_N + \gamma] B_N) = \\ &= -2\rho_0^2 C_\Phi \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^N \frac{i_k}{a_k} V_k[\eta_j + \gamma] B_j. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Соотношения (2.56), (2.57), (2.61), (2.62), (2.64)–(2.71), (2.73), (2.74), (2.76), (2.77) следует рассматривать как типовые. В результате их тиражирования соответственно для N узлов сетки, s электрических контуров статора и n электрических контуров ротора, S пазов статора и R пазов ротора и добавления уравнений (2.53), (2.54), (2.59), (2.60), (2.75) получим искомую неявную ММХ обобщенной ЯСМ. Согласно теории, изложенной в разделе 1.2, представим эту ММХ совокупностью подсистем вида (1.1), (1.2), (1.3) соответственно.

Первая подсистема отражает неявную внутреннюю ММХ и состоит из шести групп уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^s W_k[\eta_1 + \gamma] i_k/a_k + \sum_{k=s+1}^{s+n} W_k[\eta_1] i_k/a_k + W_j i_j/a_j - \\ - F_a - F_f - F_{z1} - p_{s1} B_1 = 0; \\ \dots \\ \sum_{k=1}^s W_k[\eta_N + \gamma] i_k/a_k + \sum_{k=s+1}^{s+n} W_k[\eta_N] i_k/a_k + W_j i_j/a_j - \\ - F_a - F_f - F_{zN} - p_{sN} B_N = 0; \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\Phi_a - C_\Phi (B_1 + \dots + B_N) = 0; \quad (2.81)$$

$$\Phi_f - \Phi_a - \Lambda_{sf} (W_j i_j/a_j - F_f) = 0; \quad (2.82)$$

$$F_a = F_a[\Phi_a]; \quad F_f = F_f[\Phi_f]; \quad (2.82)$$

$$F_{z1} = F_{z1}[B_1]; \dots; \quad F_{zN} = F_{zN}[B_N]; \quad (2.83)$$

$$i_{n1} = V_{(1,1)} i_1/a_1 + \dots + V_{(s1)} i_s/a_s;$$

$$\dots \\ i_{ns} = V_{(1,s)} i_1/a_1 + \dots + V_{(s,s)} i_s/a_s;$$

$$i_{n,s+1} = V_{(s+1,s+1)} i_{s+1}/a_{s+1} + \dots + V_{(s+n,s+1)} i_{s+n}/a_{s+n};$$

$$\dots \\ i_{n,s+R} = V_{(s+1,s+R)} i_{s+1}/a_{s+1} + \dots + V_{(s+n,s+R)} i_{s+n}/a_{s+n}; \quad (2.84)$$

$$\Phi_{n1} = \Phi_{n1}[i_{n1}]; \dots; \quad \Phi_{n,s+R} = \Phi_{n,s+R}[i_{n,s+R}]. \quad (2.85)$$

Вторая подсистема определяет потокосцепления электрических контуров через токи контуров, угол γ и ВМК и состоит из уравнений

$$\psi_1 = L_{\sigma 11} i_1 + \dots + L_{\sigma 1s} i_s + (V_{(1,1)} \Phi_{n1} + \dots + V_{(1,s)} \Phi_{ns}) \frac{2\rho_0}{a_1} +$$

$$+ \frac{p_0 C_\Phi}{a_1} \sum_{j=1}^N W_1[\eta_j + \gamma] B_j;$$

$$\dots \\ \psi_s = L_{\sigma s1} i_1 + \dots + L_{\sigma ss} i_s + (V_{(s1)} \Phi_{n1} + \dots + V_{(s,s)} \Phi_{ns}) \frac{2\rho_0}{a_s} +$$

$$+ \frac{p_0 C_\Phi}{a_s} \sum_{j=1}^N W_s[\eta_j + \gamma] B_j;$$

$$\psi_{s+1} = L_{\sigma s+1,s+1} i_{s+1} + \dots + L_{\sigma s+1,s+n} i_{s+n} + L_{\sigma s+1,f} i_f + \\ + (V_{(s+1,s+1)} \Phi_{n,s+1} + \dots + V_{(s+1,s+R)} \Phi_{n,s+R}) \frac{2\rho_0}{a_{s+1}} +$$

$$+ \frac{p_0 C_\Phi}{a_{s+1}} \sum_{j=1}^N W_{s+1}[\eta_j] B_j;$$

$$\dots \\ \psi_{s+n} = L_{\sigma s+n,s+1} i_{s+1} + \dots + L_{\sigma s+n,s+n} i_{s+n} + L_{\sigma s+n,f} i_f + \\ + (V_{(s+n,s+1)} \Phi_{n,s+1} + \dots + V_{(s+n,s+R)} \Phi_{n,s+R}) \frac{2\rho_0}{a_{s+n}} +$$

$$+ \frac{p_0 C_\Phi}{a_{s+n}} \sum_{j=1}^N W_{s+n}[\eta_j] B_j;$$

$$\psi_f = L_{\sigma f,s+1} i_{s+1} + \dots + L_{\sigma f,s+n} i_{s+n} + \Phi_f W_f \frac{p_0}{a_f}. \quad (2.86)$$

Третья подсистема содержит только выражение (2.79) электромагнитного момента через токи контуров, угол γ и ВМК.

В неявной ММХ, представленной в виде (2.80)—(2.86), (2.79), независимыми переменными являются токи i_j ($j=1, \overline{s+n}, f$) электрических контуров и угол γ поворота ротора. Зависимыми же переменными являются потокосцепления ψ_j ($j=1, \overline{s+n}, f$) контуров, ВМК $B_1, \dots, B_N, F_{z1}, \dots, F_{zN}, \Phi_a, \Phi_f, F_a, F_f, \Phi_{n1}, \dots, \Phi_{nS+R}, i_{n1}, \dots, i_{nS+R}$ и электромагнитный момент M_a .

Неявная внутренняя ММХ (2.80)—(2.85) состоит из $N+2+2+N+(S+R)+(S+R)$ уравнений и содержит столько же неизвестных ВМК.

Образовав из ВМК, имеющих родственное физическое содержание, вектор-столбцы

$$\begin{aligned} B_\tau &= (B_1, \dots, B_N)_*; & F_{z\tau} &= (F_{z1}, \dots, F_{zN})_*; \\ \Phi &= (\Phi_a, \Phi_f)_*; & F &= (F_a, F_f)_*; \\ i_n &= (i_{n1}, \dots, i_{nS+R})_*; & \Phi_n &= (\Phi_{n1}, \dots, \Phi_{nS+R})_*. \end{aligned} \quad (2.87)$$

представим подсистемы (2.80)—(2.86), (2.79) соответственно векторными уравнениями

$$f_1[i, \gamma, B_\tau, F, F_{z\tau}] = 0; \quad (2.88)$$

$$f_2[\Phi, B_\tau, F] = 0; \quad (2.89)$$

$$F = F[\Phi]; \quad (2.90)$$

$$F_{z\tau} = F_{z\tau}[B_\tau]; \quad (2.91)$$

$$i_n = V_{n*}i; \quad (2.92)$$

$$\Phi_n = \Phi_n[i_n]; \quad (2.93)$$

$$\psi = \varphi[i, \gamma, \Phi, B_\tau, \Phi_n]; \quad (2.94)$$

$$M_a = \xi[i, \gamma, B_\tau]; \quad (2.95)$$

где

$$V_{n*} = \begin{vmatrix} V_{c*} & 0 & 0 \\ 0 & V_{p*} & 0 \end{vmatrix} \quad (2.96)$$

— матрица размерности $(S+R) \times (s+n+1)$, ненулевые блоки которой имеют вид

$$V_{c*} = \begin{vmatrix} V_{(1,1)} & \dots & V_{(s,1)} \\ a_1 & & a_s \\ \vdots & & \vdots \\ V_{(1,S)} & \dots & V_{(s,S)} \\ a_1 & & a_s \end{vmatrix}; \quad V_{p*} = \begin{vmatrix} V_{(s+1, S+1)} & \dots & V_{(s+n, S+1)} \\ a_{s+1} & & a_{s+n} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{(s+1, S+R)} & \dots & V_{(s+n, S+R)} \\ a_{s+1} & & a_{s+n} \end{vmatrix}. \quad (2.97)$$

Образовав вектор ВМК

$$m = (\Phi, B_\tau, F, F_{z\tau}, i_n, \Phi_n)_*, \quad (2.98)$$

находим, что система (2.88)—(2.93) и уравнения (2.94), (2.95) сводятся к векторным уравнениям вида (1.5), (1.6), (1.7) соответственно.

Неявная внутренняя ММХ (2.88)—(2.93) содержит два векторных уравнения (суммарной размерностью $N+2$), не решенные относительно ВМК, и четыре векторных уравнения (суммарной размерностью $2+N+2S+2R$), решенные относительно переменных $F, F_{z\tau}, i_n, \Phi_n$. Легко убедиться, что подстановка соотношений (2.90)—(2.93) в остальные уравнения (2.88), (2.89), (2.94), (2.95) неявной ММХ обобщенной ЯСМ привела бы к чрезвычайно громоздким аналитическим выражениям, поэтому такая подстановка нецелесообразна. Таким образом, составленная неявная ММХ обобщенной ЯСМ принадлежит к классу рекуррентных.

Явная ММХ обобщенной ЯСМ представляет собой совокупность зависимостей

$$\psi = \psi[i, \gamma]; \quad M_a = M_a[i, \gamma]; \quad (2.99)$$

$$\Phi = \Phi[i, \gamma]; \quad B_\tau = B_\tau[i, \gamma]; \quad F = F[i, \gamma];$$

$$F_{z\tau} = F_{z\tau}[i, \gamma]; \quad i_n = i_n[i]; \quad \Phi_n = \Phi_n[i]. \quad (2.100)$$

Здесь зависимости (2.99) отражают явную внешнюю ММХ, а зависимости (2.100) — явную внутреннюю ММХ машины.

2.3.3. МАГНИТНО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ НАСЫЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЯСМ В ФАЗНЫХ КООРДИНАТАХ

Согласно общему определению, приведенному в разделе 1.3, внешние и внутренние ММП обобщенной ЯСМ — это матрицы L, K, K_*, G и Θ, Γ , отражающие частные производные явной внешней и явной внутренней ММХ машины по вектору токов и по углу поворота ротора. С учетом размерностей векторов, входящих в эти ММХ, находим, что L есть квадратная матрица размерности $s+n+1$; K — столбец размерности $s+n+1$; G — скаляр; Θ — матрица размерности $2(N+2+S+R) \cdot (s+n+1)$; Γ — столбец размерности $2(N+2+S+R)$.

Продифференцировав ММХ (2.88)—(2.95) по вектору токов и пользуясь принятой в 1.3 системой обозначений частных производных, приходим к системе матричных уравнений:

$$f_1^i + f_1^{B_\tau} \Theta_B + f_1^F \Theta_F + f_1^{F_{z\tau}} \Theta_z = 0; \quad (2.101)$$

$$f_2^{\Phi_a} + f_2^{B_\tau} \Theta_B + f_2^F \Theta_F = 0; \quad (2.102)$$

$$\Theta_F = R_{\Phi} \Theta_{\Phi}; \quad (2.103)$$

$$\Theta_z = \rho_{z\tau} \Theta_B; \quad (2.104)$$

$$\Theta_i = V_{n*}; \quad (2.105)$$

$$\Theta_n = \Lambda_n \Theta_i; \quad (2.106)$$

$$L = \varphi^i + \varphi^{\Phi} \Theta_{\Phi} + \varphi^{B_\tau} \Theta_B + \varphi^{\Phi_n} \Theta_n; \quad (2.107)$$

$$K_* = \xi^i + \xi^{B_*} \Theta_{B_*} \quad (2.108)$$

где $\Theta_\Phi, \Theta_B, \Theta_F, \Theta_z, \Theta_i, \Theta_n$ — блоки матрицы

$$\Theta = \frac{\partial m}{\partial i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial i} \\ \frac{\partial B_{z_1}}{\partial i} \\ \frac{\partial F}{\partial i} \\ \frac{\partial F_{z_1}}{\partial i} \\ \frac{\partial i_n}{\partial i} \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_\Phi \\ \Theta_B \\ \Theta_F \\ \Theta_z \\ \Theta_i \\ \Theta_n \end{pmatrix}, \quad (2.109)$$

являющейся первым блоком матрицы P ; внутренних ММП;

$$f_1^i = \frac{\partial f_1}{\partial i} =$$

$$= \begin{pmatrix} W_1[\gamma_1 + \gamma]/a_1 \cdots W_s[\gamma_1 + \gamma]/a_s W_{s+1}[\gamma_1]/a_{s+1} \cdots W_{s+n}[\gamma_1]/a_{s+n} W_f/a_f \\ \vdots \\ W_1[\gamma_N + \gamma]/a_1 \cdots W_s[\gamma_N + \gamma]/a_s W_{s+1}[\gamma_N]/a_{s+1} \cdots W_{s+n}[\gamma_N]/a_{s+n} W_f/a_f \end{pmatrix};$$

$$f_1^{B_*} = \frac{\partial f_1}{\partial B_*} = \text{diag}(-\rho_{s1}, \dots, -\rho_{sN}); \quad f_1^{F_{z_1}} = \frac{\partial f_1}{\partial F_{z_1}} = \text{diag}(-1, \dots, -1);$$

$$f_1^F = \frac{\partial f_1}{\partial F} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad f_2^\Phi = \frac{\partial f_2}{\partial \Phi} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$f_2^{B_*} = \frac{\partial f_2}{\partial B_*} = \begin{pmatrix} -C_\Phi & \cdots & -C_\Phi \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}; \quad f_2^F = \frac{\partial f_2}{\partial F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{of} \end{pmatrix};$$

$$\varphi^i = \frac{\partial \Phi}{\partial i} = \text{diag}(L_{oc}, L_{op}); \quad \varphi^\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & W_f p_0/a_f \end{pmatrix};$$

$$\varphi^{B_*} = \frac{\partial \Phi}{\partial B_*} = p_0 C_\Phi \begin{pmatrix} W_1[\gamma_1 + \gamma]/a_1 \cdots W_1[\gamma_N + \gamma]/a_1 \\ \vdots \\ W_s[\gamma_1 + \gamma]/a_s \cdots W_s[\gamma_N + \gamma]/a_s \\ W_{s+1}[\gamma_1]/a_{s+1} \cdots W_{s+1}[\gamma_N]/a_{s+1} \\ \vdots \\ W_{s+n}[\gamma_1]/a_{s+n} \cdots W_{s+n}[\gamma_N]/a_{s+n} \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.110)$$

$$\varphi_n^\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_n} = 2p_d \begin{pmatrix} V_c & 0 \\ 0 & V_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = V_n;$$

$$\xi^i = \frac{\partial \xi}{\partial i} = -2p_d^2 C_\Phi \left\| \sum_{j=1}^N V_1[\gamma_j + \gamma] B_j/a_1, \dots, \sum_{j=1}^N V_s[\gamma_j + \gamma] B_j/a_s, \right. \\ \left. 0, \dots, 0 \right\|;$$

$$\xi^{B_*} = \frac{\partial \xi}{\partial B_*} = -2p_d^2 C_\Phi \left\| \sum_{k=1}^s \frac{i_k}{a_k} V_k[\gamma_1 + \gamma], \dots, \sum_{k=1}^s \frac{i_k}{a_k} V_k[\gamma_N + \gamma] \right\|$$

— матрицы, вычисляемые как частные производные функций f_1, f_2, Φ, ξ по векторам $i, \Phi, B_*, F, F_{z_1}, \Phi_n, i_n$ в соответствии с содержанием упомянутых функций по (2.80), (2.81); (2.86), (2.79) и содержанием векторов (2.2), (2.1), (2.87);

$$\Lambda_n = \frac{d\Phi_n}{di_n} = \text{diag} \left(\frac{d\Phi_{n1}}{di_{n1}}, \dots, \frac{d\Phi_{nS+R}}{di_{nS+R}} \right) = \text{diag}(\Lambda_{n1}, \dots, \Lambda_{nS+R}) \quad (2.111)$$

— диагональная матрица дифференциальных магнитных проводимостей путей потоков рассеяния по коронкам зубцов, элементы которой вычисляются путем дифференцирования характеристик намагничивания вида (2.85);

$$R_\Phi = \frac{dF}{d\Phi} = \text{diag} \left(\frac{dF_a}{d\Phi_a}, \frac{dF_f}{d\Phi_f} \right) = \text{diag}(R_a, R_f) \quad (2.112)$$

— диагональная матрица дифференциальных магнитных сопротивлений ярма якоря и индуктора, элементы которой вычисляются путем дифференцирования характеристик намагничивания (2.53) и (2.54) соответственно;

$$\rho_{z_*} = \frac{dF_{z_*}}{dB_*} = \text{diag} \left(\frac{dF_{z_1}}{dB_1}, \dots, \frac{dF_{z_N}}{dB_N} \right) = \text{diag}(\rho_{z_1}, \dots, \rho_{z_N}) \quad (2.113)$$

— диагональная матрица дифференциальных локальных удельных магнитных сопротивлений зубцовых зон, элементы которой вычисляются при помощи дифференцирования характеристик намагничивания вида (2.77).

Матрицы постоянных индуктивностей рассеяния обмоток статора и ротора имеют соответственно вид

$$L_{oc} = \begin{pmatrix} L_{o11} & \cdots & L_{o1s} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{os1} & \cdots & L_{oss} \end{pmatrix}; \quad L_{op} = \begin{pmatrix} L_{os+1, s+1} & \cdots & L_{os+1, s+n} & L_{os+1, f} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ L_{os+n, s+1} & \cdots & L_{os+n, s+n} & L_{os+n, f} \\ L_{of, s+1} & \cdots & L_{of, s+n} & 0 \end{pmatrix}$$

Согласно (2.110), производная $f_1^{B_*}$ есть диагональная матрица размерности N отрицательных локальных магнитных сопротивлений зубцовых зон, а производная $f_1^{F_{z_*}}$ равна отрицательной единичной матрице размерности N , поэтому $f_1^{B_*} + f_1^{F_{z_*}} \rho_{z_*} = -\rho_{z_*}$, где $\rho_{z_*} = \rho_{z_*} + \rho_{s_*} = \text{diag}(\rho_{z_1} + \rho_{s_1}, \dots, \rho_{z_N} + \rho_{s_N}) = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_N)$ (2.114)

— диагональная матрица дифференциальных локальных магнитных сопротивлений активной зоны машины (т. е. зубцовых зон вместе с воздушным зазором). Эта матрица всегда неособая и, следовательно, существует обратная матрица

$$\lambda_\tau = \rho_\tau^{-1} = \text{diag}(\rho_1^{-1}, \dots, \rho_N^{-1}) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad (2.115)$$

элементами которой являются дифференциальные локальные удельные магнитные проводимости активной зоны в N узлах сетки. Учитывая это, из уравнений (2.101), (2.103) находим

$$\theta_B = \lambda_\tau (f_1^i + f_1^F R_\Phi \theta_\Phi) = \lambda_\tau (f_1^i + f_1^F \theta_F). \quad (2.116)$$

Подставив (2.116) в (2.102), приходим к уравнению

$$A_\Phi \theta_\Phi = -f_2^{B_\tau} \lambda_\tau f_1^i, \quad (2.117)$$

где

$$A_\Phi = f_2^\Phi + (f_2^F + f_2^{B_\tau} \lambda_\tau f_1^F) R_\Phi. \quad (2.118)$$

Из (2.117) имеем

$$\theta_\Phi = -A_\Phi^{-1} f_2^{B_\tau} \lambda_\tau f_1^i. \quad (2.119)$$

Таким образом, для вычисления параметров обобщенной ЯСМ, соответствующих дифференцированию ММХ по вектору токов, необходимо найти матрицы (2.110)—(2.113), после чего последовательно воспользоваться выражениями (2.114), (2.115), (2.118), (2.119), (2.103), (2.116), (2.104)—(2.108) как рекуррентными формулами.

Продифференцировав ММХ (2.88)—(2.95) по углу $\gamma_\tau = \gamma/\rho_0$, приходим к системе матричных уравнений:

$$f_1^{\gamma_\tau} + f_1^{B_\tau} \Gamma_B + f_1^F \Gamma_F + f_1^{z_\tau} \Gamma_z = 0; \quad (2.120)$$

$$f_2^{\Phi} \Gamma_\Phi + f_2^{B_\tau} \Gamma_B + f_2^F \Gamma_F = 0; \quad (2.121)$$

$$\Gamma_F = R_\Phi \Gamma_\Phi; \quad (2.122)$$

$$\Gamma_z = \rho_{z\tau} \Gamma_B; \quad (2.123)$$

$$\Gamma_i = 0; \quad (2.124)$$

$$\Gamma_\pi = \Lambda_\pi \Gamma_i; \quad (2.125)$$

$$K = \varphi^{\gamma_\tau} + \varphi^\Phi \Gamma_\Phi + \varphi^{B_\tau} \Gamma_B + \varphi^\pi \Gamma_\pi; \quad (2.126)$$

$$G = \xi^{\gamma_\tau} + \xi^{B_\tau} \Gamma_B, \quad (2.127)$$

где $\Gamma_\Phi, \Gamma_B, \Gamma_F, \Gamma_z, \Gamma_i, \Gamma_\pi$ — блоки матрицы

$$\Gamma = \frac{dm}{d\gamma_\tau} = \begin{pmatrix} \partial\Phi/\partial\gamma_\tau \\ \partial B_\tau/\partial\gamma_\tau \\ \partial F/\partial\gamma_\tau \\ \partial F_{z\tau}/\partial\gamma_\tau \\ \partial i_\pi/\partial\gamma_\tau \\ \partial\Phi_\pi/\partial\gamma_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_\Phi \\ \Gamma_B \\ \Gamma_F \\ \Gamma_z \\ \Gamma_i \\ \Gamma_\pi \end{pmatrix}, \quad (2.128)$$

представляющей собой второй блок матрицы P_i внутренних ММП;

$$\begin{aligned} \gamma_{1\tau}^{\gamma_\tau} &= \rho_0 \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} = -2\rho_0 \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^s \frac{i_k}{a_k} V_k [\eta_1 + \gamma] \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^s \frac{i_k}{a_k} V_k [\eta_N + \gamma] \end{pmatrix}; \\ \varphi_{1\tau}^{\gamma_\tau} &= \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_\tau} = -2\rho_0^2 C_\Phi \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \sum_{j=1}^N V_1 [\eta_j + \gamma] B_j \\ \vdots \\ \frac{1}{a_s} \sum_{j=1}^N V_s [\eta_j + \gamma] B_j \end{pmatrix}; \\ \xi_{1\tau}^{\gamma_\tau} &= \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} = 2\rho_0^2 C_\Phi \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^N \frac{i_k}{a_k} V_k [\eta_j + \gamma] B_j \end{aligned} \quad (2.129)$$

— матрицы-столбцы и скаляр, вычисляемые как частные производные функций f_1, φ, ξ по углу γ_τ в соответствии с содержанием этих функций, определяемым по (2.80), (2.86), (2.79). Здесь учтено, что согласно равенству (2.34) имеется соотношение $\partial/\partial\gamma_\tau = \rho_0 \partial/\partial\gamma$, а согласно (2.45) — выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_k [\eta_j + \gamma]}{\partial \gamma} &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_{\eta_j + \gamma}^{\eta_j + \gamma + \pi} V_k [\eta_j + \gamma] d(\eta_j + \gamma) = \\ &= V_k [\eta_j + \gamma + \pi] - V_k [\eta_j + \gamma] = -2 V_k [\eta_j + \gamma]. \end{aligned}$$

Представим решение системы (2.120)—(2.127) совокупностью рекуррентных формул:

$$\Gamma_\Phi = -A_\Phi^{-1} f_2^{B_\tau} \lambda_\tau f_1^i; \quad (2.130)$$

$$\Gamma_F = R_\Phi \Gamma_\Phi; \quad (2.131)$$

$$\Gamma_B = \lambda_\tau (f_1^{\gamma_\tau} + f_1^F \Gamma_F) = \lambda_\tau (f_1^{\gamma_\tau} + f_1^F R_\Phi \Gamma_\Phi); \quad (2.132)$$

$$\Gamma_z = \rho_{z\tau} \Gamma_B; \quad (2.133)$$

$$K = \varphi^{\gamma_\tau} + \varphi^\Phi \Gamma_\Phi + \varphi^{B_\tau} \Gamma_B; \quad (2.134)$$

$$G = \xi^{\gamma_\tau} + \xi^{B_\tau} \Gamma_B. \quad (2.135)$$

Вычисление ММП по выведенным формулам предусматривает обращение матриц ρ_τ и A_Φ . Но первая из них диагональна, а вторая имеет размерность 2×2 , поэтому трудоемкость обращения этих матриц практически не влияет на общую трудоемкость вычисления ММП.

**2.3.4. МОДЕЛЬ НАСЫЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЯСМ
В ФАЗНЫХ КООРДИНАТАХ НА БАЗЕ ЯВНЫХ МЕТОДОВ
ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

Для расчетов переходных электромеханических процессов обобщенной ЯСМ в фазных координатах с применением явных методов численного интегрирования представим подлежащую интегрированию САДУ состоящей из ДУ

$$L \frac{di}{dt} + K\omega_r + ri - u = 0; \quad (2.136)$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = J^{-1}(M_s + M_n); \quad \frac{d\gamma_r}{dt} = \omega_r; \quad (2.137)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Theta_\Phi \frac{di}{dt} + \Gamma_\Phi \frac{d\gamma_r}{dt}; \quad \frac{dB_\tau}{dt} = \Theta_B \frac{di}{dt} + \Gamma_B \frac{d\gamma_r}{dt}$$

и алгебраических уравнений

$$F = F[\Phi]; \quad F_{z\tau} = F_{z\tau}[B_\tau]; \quad i_n = V_{n\Phi} i; \quad \Phi_n = \Phi_n[i_n]; \quad (2.138)$$

$$\psi = \psi[i, \gamma, \Phi, B_\tau, \Phi_n]; \quad M_s = \xi[i, \gamma, B_\tau] \quad (2.139)$$

при начальных условиях

$$t = t_0; \quad i = i_0; \quad \omega_r = \omega_{r0}; \quad \gamma_r = \gamma_{r0}. \quad (2.140)$$

Составим алгоритм интегрирования этой САДУ по образцу, изложенному в разделе 1.7 для частного случая, когда ММХ ЭМП является рекуррентной. Этот алгоритм предусматривает выполнение на шаге интегрирования следующих операций:

для нулевого узла шаблона вычисляется вектор u питающих напряжений и приложенный к валу момент M_s ;

по известным из предыдущего шага интегрирования значениям переменных $i, \gamma_r, \omega_r, \Phi, B_\tau, F, F_{z\tau}, i_n, \Phi_n$ вычисляются матрицы $\Lambda_\pi, R_\Phi, \rho_{z\tau}, \rho_\tau, \lambda_\tau$ по формулам (2.111)–(2.115), матрицы $f_1^i, \Phi^{B_\tau}, f_{1\tau}^i, \Phi^{V^r}$ по формулам (2.110), (2.129), после чего с учетом постоянных матриц $f_1^{B_\tau}, f_{1z\tau}^F, f_1^F, f_2^F, f_2^{B_\tau}, f_2^F, \varphi^i, \Phi^F, \Phi^{F_n}$ последовательно по формулам (2.118), (2.119), (2.116), (2.106), (2.130), (2.132), (2.107), (2.134) вычисляются матрица A_Φ и ММП $\Theta_\Phi, \Theta_B, \Theta_n, \Gamma_\Phi, \Gamma_B, L, K$;

уравнение (2.136) решается численным способом относительно вектора di/dt ;

по формулам (2.137) вычисляются производные $d\omega_r/dt, d\gamma_r/dt, d\Phi/dt, dB_\tau/dt$;

по формулам вида (1.69) вычисляются приращения $\Delta i, \Delta\omega_r, \Delta\gamma_r, \Delta\Phi, \Delta B_\tau$ на шаге h ;

по формулам вида (1.67) вычисляются значения переменных $i, \omega_r, \gamma_r, \Phi, B_\tau$ при $t=h$;

по формулам (2.138), (2.139) вычисляются значения переменных $F, F_{z\tau}, i_n, \Phi_n, \psi, M_s$ при $t=h$.

На первом шаге интегрирования второй этап изложенного выше алгоритма выполняется с использованием заданных начальных условий. Если рассчитываемый переходный процесс ЯСМ является продолжением некоторого предшествующего ему рассчитанного на ЭВМ переходного процесса, то начальные значения ЯСМ известны из расчета последнего. Однако часто заданными являются только начальные условия (2.140), и тогда соответствующие начальные значения ВМК подлежат определению на основе неявной внутренней ММХ машины. Воспользуемся для их вычисления методом дифференцирования по параметру (см. раздел 1.7).

Будем рассматривать магнитное состояние обобщенной ЯСМ при заданных начальных значениях i_0, γ_0 как такой режим машины, который получен в результате постепенного увеличения токов ее электрических контуров от нуля до значений, заданных вектором i_0 , пропорционально параметру ε , т. е. полагая, что

$$i = i_0 \varepsilon. \quad (2.141)$$

Тогда при заданном векторе i_0 все ВМК будут изменяться в соответствии с зависимостями

$$\Phi = \Phi[\varepsilon]; \quad B_\tau = B_\tau[\varepsilon]; \quad (2.142)$$

$$F = F[\varepsilon]; \quad F_{z\tau} = F_{z\tau}[\varepsilon]; \quad i_n = i_n[\varepsilon]; \quad \Phi_n = \Phi_n[\varepsilon], \quad (2.143)$$

удовлетворяющими следующим условиям: при $\varepsilon=0$ все ВМК равны нулю, а при $\varepsilon=1$ они равны искомым начальным значениям $\Phi_0, B_{\tau 0}, F_0, F_{z\tau 0}, i_{n0}, \Phi_{n0}$, требуемым для расчета рассматриваемого процесса. Продифференцировав уравнения (2.141), (2.142) по ε , приходим к ДУ

$$\frac{di}{d\varepsilon} = i_0; \quad \frac{d\Phi}{d\varepsilon} = \frac{\partial\Phi}{\partial i} \frac{di}{d\varepsilon}; \quad \frac{dB_\tau}{d\varepsilon} = \frac{\partial B_\tau}{\partial i} \frac{di}{d\varepsilon}.$$

С учетом обозначений (2.109) эти ДУ приводятся к виду

$$\frac{d\Phi}{d\varepsilon} = \Theta_\Phi i_0; \quad \frac{dB_\tau}{d\varepsilon} = \Theta_B i_0. \quad (2.144)$$

Проинтегрируем нелинейную САДУ, состоящую из ДУ (2.144) и алгебраических уравнений (2.138), численным методом на интервале $0 \leq \varepsilon \leq 1$ при нулевых начальных условиях (так как при $\varepsilon=0$ все ВМК равны нулю). При этом на шаге интегрирования выполняются следующие операции:

по известным из предыдущего шага интегрирования значениям ВМК (для первого шага — по нулевым их значениям) вычисляются матрицы $\Lambda_\pi, R_\Phi, \rho_{z\tau}, \rho_\tau, \lambda_\tau$ по формулам (2.111)–(2.115), матрица f_1^i — по (2.110), после чего с учетом постоянных матриц $f_1^{B_\tau}, f_{1z\tau}^F, f_1^F, f_2^F, f_2^{B_\tau}$ последовательно по формулам (2.118), (2.119),

(2.116) вычисляется матрица A_Φ и ММП Θ_Φ, Θ_B ;

по формулам (2.144) вычисляются производные $d\Phi/d\varepsilon, dB_\tau/d\varepsilon$;

по формулам вида (1.69) вычисляются приращения $\Delta\Phi$, ΔB_z на шаге h_e ;

по формулам вида (1.67) вычисляются значения ВМК Φ , B_z при значении параметра, равном $\varepsilon + h_e$;

по формулам (2.138) вычисляются значения ВМК F , F_{zr} , i_n , Φ_n при $\varepsilon + h_e$.

Легко видеть, что изложенный алгоритм вычисления начального значения вектора ВМК по своей структуре аналогичен алгоритму расчета переходного процесса.

2.3.3. МОДЕЛЬ НАСЫЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЯСМ В ФАЗНЫХ КООРДИНАТАХ НА БАЗЕ НЕЯВНЫХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Исходная САДУ, применяемая для расчетов переходных электромеханических процессов обобщенной ЯСМ в фазных координатах, состоит здесь из ДУ

$$\frac{d\psi}{dt} + ri - u = 0; \quad (2.145)$$

$$-J \frac{d\omega_r}{dt} + M_s + M_b = 0; \quad \frac{d\gamma_r}{dt} = \omega_r \quad (2.146)$$

и алгебраических уравнений (2.88) — (2.95), отражающих неявную ММХ машины. Начальные условия имеют вид (2.140).

Заменяя в ДУ производные выражениями вида (1.73), приходим к алгебраическим уравнениям

$$\psi + \frac{1}{b_0} \sum_{j=1}^g b_j \psi_j + \frac{r}{b_0} i - \frac{u}{b_0} = 0; \quad (2.147)$$

$$-J \left(b_0 \omega_r + \sum_{j=1}^g b_j \omega_{rj} \right) + M_s + M_b = 0; \quad (2.148)$$

$$\omega_r = b_0 \gamma_r + \sum_{j=1}^g b_j \gamma_{rj}. \quad (2.149)$$

Будем решать полученную нелинейную САУ итерационным методом Ньютона. При этом линейная САУ для вычисления поправок зависимых переменных ψ , i , γ , ω , Φ , B_z , F_{zr} , i_n , Φ_n на k -й итерации имеет вид

$$\Delta\psi + (r/b_0) \Delta i = Q_1; \quad (2.150)$$

$$-J b_0 \Delta\omega_r + \Delta M_s = Q_2; \quad (2.151)$$

$$\Delta\omega_r = b_0 \Delta\gamma_r; \quad (2.152)$$

$$f_1^i \Delta i + f_{1r}^{\gamma} \Delta\gamma_r + \gamma_{1r}^{B_z} \Delta B_z + f_1^F \Delta F + f_{1zr}^{F_{zr}} \Delta F_{zr} = Q_3;$$

$$f_2^{\Phi} \Delta\Phi + f_{2z}^{B_z} \Delta B_z + f_2^F \Delta F = Q_4; \quad (2.153)$$

$$\Delta F = R_{\Phi} \Delta\Phi; \quad \Delta F_{zr} = \rho_{zr} \Delta B_z; \quad \Delta i_n = V_{n*} \Delta i; \quad \Delta\Phi_n = \Lambda_n \Delta i_n; \quad (2.154)$$

$$\Delta\psi = \varphi^i \Delta i + \varphi^{\gamma_r} \Delta\gamma_r + \varphi^{\Phi} \Delta\Phi + \varphi^{B_z} \Delta B_z + \varphi^{\Phi_n} \Delta\Phi_n; \quad (2.155)$$

$$\Delta M_s = \xi^i \Delta i + \xi^{\gamma_r} \Delta\gamma_r + \xi^{B_z} \Delta B_z, \quad (2.156)$$

где Q_1, \dots, Q_4 — невязки уравнений (2.147), (2.148), (2.88), (2.89) соответственно. Исключив в (2.151) поправку $\Delta\omega_r$ в соответствии с (2.152), имеем

$$-J b_0^2 \Delta\gamma_r + \Delta M_s = Q_2. \quad (2.157)$$

Уравнения (2.153) с учетом (2.154), (2.118), (2.119), (2.116), (2.130), (2.132) приводятся к виду

$$\Delta\Phi = \Theta_{\Phi} \Delta i + \Gamma_{\Phi} \Delta\gamma_r + Q_{\Phi}; \quad \Delta B_z = \Theta_B \Delta i + \Gamma_B \Delta\gamma_r + Q_B, \quad (2.158)$$

где

$$Q_{\Phi} = A_{\Phi}^{-1} (Q_4 + f_{1z}^{B_z} \lambda_r Q_3); \quad Q_B = \lambda_r (f_{1z}^F R_{\Phi} Q_{\Phi} - Q_3) \quad (2.159)$$

— приведенные невязки.

Уравнения (2.150), (2.157) с учетом (2.156), (2.158), (2.159), (2.107), (2.108), (2.126), (2.127) принимают вид

$$\begin{aligned} (L + r/b_0) \Delta i + K \Delta\gamma_r &= Q_1'; \\ K_* \Delta i + (G - J b_0^2) \Delta\gamma_r &= Q_2', \end{aligned} \quad (2.160)$$

где

$$Q_1' = Q_1 - \varphi^{\Phi} Q_{\Phi} - \varphi^B Q_B; \quad Q_2' = Q_2 - \xi^B Q_B \quad (2.161)$$

— приведенные невязки. Уравнения (2.160) по структуре аналогичны уравнениям (1.154) обобщенного ЭМП.

Алгоритм решения нелинейной САУ (2.147) — (2.149), (2.88) — (2.95) требует выполнения на k -м итерационном цикле следующих операций:

для нулевого узла шаблона вычисляются момент M_b и вектор u ;

по найденным на $(k-1)$ -й итерации значениям зависимых переменных (при $k=1$ — по результату выполнения предыдущего шага интегрирования) вычисляются матрицы Λ_n , R_{Φ} , ρ_{zr} , ρ_r , λ_r по формулам (2.111) — (2.115), матрицы f_1^i , φ^{B_z} , ξ^i , ξ^{B_z} , f_{1r}^{γ} , φ^{γ_r} , ξ^{γ_r} — по формулам (2.110), (2.129), после чего с учетом постоянных матриц $f_{1z}^{B_z}$, f_{1z}^F , f_1^F , f_2^{Φ} , $f_{2z}^{B_z}$, f_2^F , φ^i , φ^{Φ} , φ^{Φ_n} последовательно по формулам (2.118), (2.119), (2.116), (2.106), (2.130), (2.132), (2.107), (2.108), (2.134), (2.135) вычисляются матрица A_{Φ} и ММП Θ_{Φ} , Θ_B , Θ_n , Γ_{Φ} , Γ_B , L , K_* , K , G ; невязки Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 рассчитываются как левые части уравнений (2.147), (2.148), (2.88), (2.89) и по формулам (2.159), (2.161) — приведенные невязки Q_{Φ} , Q_B , Q_1' , Q_2' ; система (2.160) решается численно относительно поправок Δi , $\Delta\gamma_r$;

по формулам (2.158) вычисляются поправки $\Delta\Phi$, ΔB_z ;

по формулам вида (1.77) вычисляется k -е приближение переменных i, γ, Φ, B_τ ;

по формулам (2.90)—(2.95), (2.149), (2.34) вычисляется k -е приближение переменных $F, F_{z\tau}, i_n, \Phi_n, \psi, M_s, \omega_r, \gamma$.

Если рассматриваемый переходный процесс является продолжением некоторого рассчитанного на ЭВМ предшествующего ему переходного процесса, то на втором этапе изложенного выше алгоритма при выполнении первой итерации для первого шага интегрирования следует принять в качестве нулевых приближений всех зависимых переменных их значения, полученные в последней точке упомянутого предшествующего процесса. Если же для рассматриваемого переходного процесса заданы только начальные условия (2.140), то соответствующие им значения ВМК должны быть найдены из неявной внутренней ММХ (2.88)—(2.93). Воспользуемся для этой цели комбинированием итерационного метода Ньютона и продолжением решения по параметру (см. 1.8).

Вначале решим нелинейную САУ

$$f_1 [i_0 \varepsilon_1, \gamma_0, B_\tau, F, F_{z\tau}] = 0; \quad f_2 [\Phi, B_\tau, F] = 0; \quad (2.162)$$

$$F = F[\Phi]; \quad F_{z\tau} = F_{z\tau}[B_\tau]; \quad i_n = V_{n*} i_0 \varepsilon_1; \quad \Phi_n = \Phi_n[i_n], \quad (2.163)$$

где $\varepsilon_1 < 1$ — значение параметра ε , достаточно малое для обеспечения сходимости итерационного метода Ньютона применительно к этой САУ. Нелинейной системе (2.162), (2.163) соответствует на каждой итерации линейная система

$$f_1^{B_\tau} \Delta B_\tau + f_1^F \Delta F + f_1^{F_{z\tau}} \Delta F_{z\tau} = Q_3; \quad f_2^{\Phi} \Delta \Phi + f_2^{B_\tau} \Delta B_\tau + f_2^F \Delta F = Q_4; \\ \Delta F = R_\Phi \Delta \Phi; \quad \Delta F_{z\tau} = r_{z\tau} \Delta B_\tau; \quad \Delta i_n = 0; \quad \Delta \Phi_n = \Lambda_n \Delta i_n.$$

Ее решение с учетом принятых в 2.3.3 обозначений и формул имеет вид

$$\Delta \Phi = A_\Phi^{-1} (Q_4 + f_2^{B_\tau} \lambda_\tau Q_3); \quad \Delta B_\tau = \lambda_\tau (f_1^F R_\Phi \Delta \Phi - Q_3). \quad (2.164)$$

Таким образом, алгоритм расчета значений ВМК, соответствующих $\varepsilon = \varepsilon_1$, представляет собой итерационную процедуру, требующую выполнения на k -м итерационном цикле следующих операций:

по найденным на $(k-1)$ -й итерации значениям ВМК (на первой итерации — по их значениям, равным нулю) вычисляются матрицы $\Lambda_n, R_\Phi, r_{z\tau}, \rho_\tau, \lambda_\tau$ по формулам (2.111)—(2.115); невязки Q_3, Q_4 как левые части уравнений (2.162); по формуле (2.118) — матрица A_Φ ;

по формулам (2.164) вычисляются поправки $\Delta \Phi, \Delta B_\tau$;

по формулам вида (1.77) вычисляется k -е приближение векторов Φ, B_τ ;

по формулам (2.163), (2.94), (2.95) вычисляется k -е приближение остальных ВМК и векторов ψ, M_s .

Найденное решение принимается в качестве нулевого приближения для САУ, получаемой в результате замены в (2.162), (2.163) значения ε_1 значением $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, и изложенным выше способом вы-

числяется значения ВМК при $\varepsilon = \varepsilon_2$. Эта процедура продолжается до тех пор, пока параметр ε не достигнет значения, равного единице. Полученные при $\varepsilon = 1$ значения ВМК принимаются в качестве нулевого приближения на первой итерации первого шага интегрирования переходного процесса обобщенной ЯСМ.

Следует отметить, что применение описанного выше алгоритма вычисления нулевых приближений ВМК, обеспечивающих сходимость метода Ньютона на первом шаге интегрирования САДУ переходного процесса, оказывается практически необходимым лишь в случае, когда при задаваемых начальных значениях i_0, γ_0 элементы магнитопровода машины находятся в состоянии глубокого насыщения. При не очень глубоких насыщениях итерационный метод Ньютона на первом шаге интегрирования уравнений переходного процесса сходится, если в качестве нулевых приближений ВМК принять их значения, равные нулю.

2.4. Вопросы практической реализации математических моделей

Используемые для работы математической модели обобщенной ЯСМ входные данные, конкретизирующие решаемую задачу, разделяются на две группы.

К первой группе относятся данные, определяющие тип и свойства рассматриваемой машины и отражающие:

величины l_0, τ, ρ_0, a_j ($j = 1, S+R, f$);

матрицы распределения проводников электрических контуров по пазам;

плотности проводников электрических контуров и функции распределения проводников контуров как зависимости вида (2.42), (2.48) и (2.45), (2.50) соответственно;

характеристики намагничивания элементов магнитопровода как зависимости (2.53), (2.54), (2.66), (2.68), (2.77);

постоянные магнитные сопротивления ρ_{0j} ($j = 1, N$) и магнитную проводимость Λ_{0j} ;

постоянные параметры машины — момент инерции J , матрицы активных сопротивлений и постоянных составляющих индуктивностей рассеяния контуров.

Вторую группу образуют данные, выделяющие искомым переходный электромеханический процесс рассматриваемой машины из множества возможных ее переходных процессов. Сюда относятся начальные условия (2.140) и внешние воздействия как заданные функции времени, т. е. зависимости $M_s = M_s[t]; u = u[t]$.

Практически, однако, информация, определяющая свойства машины, включает только геометрию ее активной части, обмоточные данные и геометрию проводников электрических контуров и марки стале магнитопровода, т. е. данные, содержащиеся в заводском расчетном формуляре машины. Преобразование этой информации

к виду, непосредственно используемому математической моделью обобщенной ЯСМ, является весьма трудоемким, но для подавляющего большинства явнополюсных машин выполняется по однотипной методике. Поэтому целесообразно составить специальную подпрограмму, названную подпрограммой подготовки входных данных (ППВД), как процедуру, преобразующую числовую информацию о свойствах рассматриваемой машины к виду, указанному в первой из упомянутых групп входных данных. ППВД используется для каждой вновь исследуемой ЯСМ только один раз.

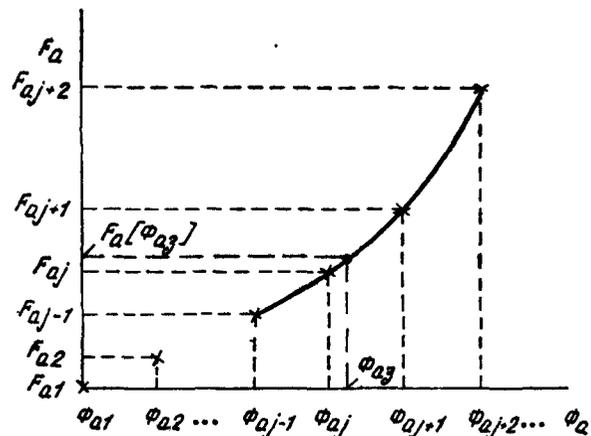


Рис. 2.2. К интерполяции зависимости $F_a = F_a[\Phi_a]$.

Остановимся кратко на методике выполнения расчетов, принимаемой в основу составления ППВД.

Матрицы V_o , V_p распределения проводников электрических контуров по пазам формируются непосредственно по схемам этих контуров.

Амплитуды косинусных и синусных составляющих гармоник, входящих в выражения (2.41), (2.48) плотностей проводников контуров статора и ротора и в выражения (2.45), (2.50) функций распределения проводников контуров, вычисляются соответственно по формулам (2.43), (2.49) и (2.47), (2.51). Число подлежащих учету гармоник в плотностях проводников контуров определяется с учетом скорости сходимости рядов (2.41), (2.48).

Для расчета характеристики намагничивания (2.53) ярма статора может быть использована методика, применяемая при проектировании ЯСМ [66]. Для этого задаются значениями средней индукции в сечении ярма статора радиальной плоскостью, проходящей через ось q , равными 0,1; 0,2; ...; 2,5 Т, и вычисляют соответствующие им падения магнитных напряжений в ярме статора (с учетом изменения картины магнитного поля в ярме при насыщении ярма). В результате получают зависимость (2.53), представленную в табличном виде с равномерным шагом по переменной

Φ_a . Для этой зависимости строится серия интерполяционных полиномов по методике, использующей теоретические положения раздела 1.5 и состоящей в следующем. Интервал изменения аргумента характеристики (2.53) разделяется на участки, ограниченные соседними табличными его значениями (рис. 2.2). На участке $\Phi_{aj} < \Phi_a < \Phi_{aj+1}$ интерполированное значение функции вычисляется по формуле

$$F_a = T[\Phi_a] C_{FaJ}, \quad (2.165)$$

где $T[\Phi_n] = (1, \Phi_n, \Phi_n^2/2!, \Phi_n^3/3!); C_{FaJ} = (C_{FaJ1}, C_{FaJ2}, C_{FaJ3}, C_{FaJA})_*$ (2.166)

— соответственно вектор Тейлора и вектор производных интерполанта функции (2.53) на рассматриваемом участке. Вектор производных вычисляется по формуле

$$C_{FaJ} = T_{ш}^{-1} F_{аш}, \quad (2.167)$$

где $T_{ш}$ — матрица Тейлора для шаблона, координаты узлов которого равны соответственно $\Phi_{aj-1}, \Phi_{aj}, \Phi_{aj+1}, \Phi_{aj+2}$; $F_{аш}$ — узловый вектор для этого шаблона (см. раздел 1.5).

Дифференциальное магнитное сопротивление ярма статора при $\Phi_{aj} < \Phi_a < \Phi_{aj+1}$ вычисляется по формуле

$$R_a = T[\Phi_a] D C_{FaJ}, \quad (2.168)$$

где D — матрица вида (1.94) размерности 4.

Вычисление массива коэффициентов интерполяционных полиномов вида (2.165) возлагается на ППВД. Тогда в программе, реализующей математическую модель ЯСМ, вычисление значений F_a и R_a , соответствующих задаваемому значению $\Phi_a = \Phi_{a3}$, сводится к отысканию номера участка, которому принадлежит значение Φ_{a3} (рис. 2.2), и последующему непосредственному применению формул вида (2.165), (2.168).

Для расчета характеристики намагничивания (2.54) индуктора также могут быть использованы методики, применяемые при проектировании ЯСМ, но скорректированные с учетом допущений раздела 2.3.1. Результат расчета должен быть представлен в виде массива коэффициентов интерполяционных полиномов третьей степени на интервале изменения потока Φ_f , соответствующем пределам индукции в полюсе от 0 до 3 Т с шагом 0,1 Т.

Для определения характеристик намагничивания вида (2.77) зубцовых зон вначале следует рассчитать частичные характеристики намагничивания $F_{zc} = F_{zc}[B]; F_{zp} = F_{zp}[B]$, где F_{zc}, F_{zp} — падения магнитных напряжений в зубцовой зоне статора и в зубцовой зоне ротора (если на полюсном наконечнике нет продольных пазов, то $F_{zp} = 0$), после чего характеристике вида (2.77) для узлов сетки на полюсном делении, находящихся в пределах полюсного наконечника, определить как зависимость $F_z = F_{zc} + F_{zp} = F_z[B]$, а для узлов вне полюсного деления — как зависимость $F_z = F_{zc} = F_z[B]$. Для расчета частичных характеристик намагничивания следует разделить зубцы по высоте $N_z \geq 10$ сечениями и в

щую n стержней на полюсном делении, эти векторы принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} i &= (i_A, i_B, i_C, i_1, \dots, i_n, i_f)_* ; \quad \psi = (\psi_A, \psi_B, \psi_C, \psi_1, \dots, \psi_n, \psi_f)_* ; \\ u &= (u_A, u_B, u_C, 0, \dots, 0, u_f)_* . \end{aligned}$$

Для ЯСМ с возбуждением от энергии третьей гармоники рабочего поля, имеющей на статоре трехфазную основную обмотку и трехфазную вспомогательную обмотку утроенной полюсности, а на роторе — обмотку возбуждения, эти векторы имеют вид

$$X = (X_A, X_B, X_C, X_a, X_b, X_c, X_f)_* \quad (X = i, \psi, u),$$

где индексы a, b, c обозначают принадлежность к фазам вспомогательной обмотки.

Для трехфазной ЯСМ с продольно-поперечным возбуждением без демпферной обмотки имеем

$$X = (X_A, X_B, X_C, X_D, X_Q)_* \quad (X = i, \psi, u),$$

где индексы D, Q обозначают принадлежность к продольному и поперечному контурам возбуждения соответственно.

2.5. О направлениях дальнейшего развития теории математического моделирования ЯСМ

Дальнейшее совершенствование математических моделей ЯСМ определяется потребностями практики в решении инженерных задач, связанных с оптимизацией геометрии активной части ЯСМ, режимов работы электроэнергетических установок, содержащих машины этого вида, и научно-исследовательских задач, направленных на разработку явнополюсных электрических машин, обладающих специальными качествами и характеристиками. Реализация этих целей достигается путем создания математических моделей, характеризующихся более высокими уровнями адекватности и общности.

Специфика создания таких моделей практически полностью сводится к составлению ММХ, обеспечивающей уровень адекватности, достаточный для решения поставленной задачи, а определение ММП выполняется по общим правилам, изложенным в первом разделе, т. е. распространение предложенного метода математического моделирования на неклассические задачи режимных расчетов ЯСМ и специальные явнополюсные машины не связано с пересмотром математической сущности теории.

При необходимости учета вытеснения тока в радиальных направлениях в стержнях демпферной обмотки последняя может быть представлена системой индуктивно связанных контуров, получаемой в результате разделения каждого стержня по его высоте на g_c частей. Заномеровав контуры демпферной обмотки двойными индексами j, k , где $j = \overline{1, n}$; $k = \overline{1, g_c}$ (номер k отсчитывается

от дна паза), необходимо составить уравнения электрического состояния для каждого из этих контуров. При этом порядок системы ДУ (1.136), применяемый в явном методе численного интегрирования, и, соответственно, порядок системы (1.145), применяемой в неявном методе, возрастает на $n(g_c - 1)$, что значительно ухудшает быстродействие математических моделей. Этот недостаток устраняется применением приема, состоящего в следующем [102, 103]. В полученной системе ДУ необходимо вычесть уравнения

для контуров с номерами j, k , в которых $k = \overline{1, g_c - 1}$, из соответствующих уравнений, в которых $k = g_c$. В результате этой операции будет получена система из $n(g_c - 1)$ ДУ, не содержащая рабочих потокосцеплений и потокосцеплений, обусловленных полем рассеяния по коронкам зубцов, т. е. система, в которую входят только потокосцепления, определяемые через токи i_{jk} ($j = \overline{1, n}$; $k = \overline{1, g_c - 1}$) линейно. Это обстоятельство позволяет значительно сократить объем вычислений при определении матрицы индуктивностей ЯСМ, выделив в ней постоянный квадратный блок размерности $n(g_c - 1)$, подлежащий обращению только один раз на протяжении всего рассчитываемого переходного процесса.

Если в машине имеется скос пазов, то распределение проводников обмоток статора по отношению к ротору неодинаково для поперечных сечений магнитопровода, проведенных в различных точках по его длине, и, следовательно, картины рабочего магнитного поля в воздушном зазоре (т. е. зависимости $B = B[\eta]$) в различных точках магнитопровода также неодинаковы [33]. Обычно скос пазов выполняется незначительным, поэтому достаточную точность учета его влияния на процессы в машине способна обеспечить модель, предусматривающая расчет рабочего магнитного поля в трех поперечных сечениях. Для вычисления рабочих потокосцеплений контуров следует заменить умножение размера l_b на величину рабочего потокосцепления, приходящегося на единицу длины магнитопровода, численным интегрированием по длине магнитопровода с применением формулы Симпсона. Снижение быстродействия такой модели по сравнению с моделью, не учитывающей скоса пазов, не превышает трехкратного.

Если число пазов на полюс и фазу обмотки статора является дробным и близким к единице, то создаваемая этой обмоткой намагничивающая сила содержит относительно большие субгармоники, пространственный период которых равен $\tau_b = 2b\tau$, где b — знаменатель числа пазов на полюс и фазу как необратимой дроби. Влияние этих субгармоник на значения и характер изменения во времени токов в контурах ротора (особенно — в демпферной обмотке) может оказаться существенным. Математическая модель, учитывающая этот фактор, должна предусматривать расчет рабочего магнитного поля машины на периоде T_b , для чего уравнения вида (2.80) следует составить на равномерной сетке bN узлов этого интервала, а уравнения (2.81) заменить более сложной системой, учитывающей различие потоков Φ_{aj}, Φ_{fj} ($j = \overline{1, 2b}$) на отдельных

полюсных делениях периода T_b . Количество демпферных контуров, находящихся в различных условиях (и, следовательно, характеризующихся различными токами), и количество ВМК при этом возрастает по сравнению с моделью, составленной для целого числа пазов на полюс и фазу, в $2b$ раз, поэтому быстродействие модели снижается не менее чем в $2b$ раз.

Если ротор расположен с эксцентриситетом, то пространственный период магнитного поля равен $2p_0\tau$. Поэтому число ВМК в модели, учитывающей эксцентриситет, возрастает по сравнению с моделями, рассмотренными в этом разделе, в $2p_0$ раз. Кроме того, в машине с эксцентрично расположенным ротором каждый стержень демпферной обмотки находится в отличных от остальных стержней магнитных условиях, поэтому общее число демпферных контуров здесь в $2p_0$ раз больше. То же относится и к каждой из параллельных ветвей фазы статора. Поэтому общее число электрических контуров в машине с эксцентриситетом значительно больше по сравнению с машиной без эксцентриситета. Таким образом, быстродействие модели, учитывающей эксцентриситет, значительно ниже. Следует, однако, подчеркнуть, что этот ее недостаток является следствием постановки значительно более сложной задачи и вовсе не связан с учетом магнитной нелинейности.

Модель, учитывающая эксцентриситет, обладает значительно более широкими возможностями исследования, так как она позволяет рассчитывать неодинаковое распределение токов демпферной обмотки на различных полюсах, вычислять силы одностороннего магнитного притяжения, изучать электромеханические процессы с учетом радиальных колебаний ротора (если дополнить ее уравнениями радиальных перемещений ротора с учетом упругих реакций опор) и решать на основе постановки соответствующих математических экспериментов ряд других задач проектирования и эксплуатации электрических машин.

Следует отметить, что модель ЯСМ с учетом эксцентриситета не может быть построена на базе развития классической теории электрических машин, предусматривающей представление магнитопровода в виде схемы замещения и источников магнитного поля как включенных в эту схему намагничивающих сил, поскольку понятие намагничивающей силы при неодинаковых зазорах под соседними полюсами теряет физический смысл [9, 11], и игнорирование этого обстоятельства может привести к принципиальным ошибкам.

Для исследования эффективности новых схемных и конструкторских решений, имеющих целью обеспечение специальных свойств и характеристик ЯСМ за счет подмагничивания ярм либо магнитных шунтов индуктора [1, 35], целесообразна разработка специальных моделей, учитывающих наличие в машине дополнительных обмоток кольцевого подмагничивания и составляемых на базе расчета магнитного поля в одномерной постановке с использованием теоретических положений, предложенных в [96]. Опыт создания таких моделей применительно к неявнополюсным маши-

нам позволяет констатировать, что учет кольцевого намагничивания снижает быстродействие модели не более чем в 3—5 раз.

На завершающем этапе проектирования электрических машин желательно выполнить расчеты их процессов и характеристик на модели, основанной на расчете магнитного поля в двумерной постановке с учетом реальной (зубчатой) структуры магнитопровода. Теоретической основой для составления такой модели могут быть дифференциальный сеточный метод [81] либо дифференциальный метод конечных элементов [80, 88] как использующие для решения нелинейной САУ, получаемой в результате алгебраизации ДУ Максвелла, итерационный метод Ньютона. В этих методах магнитные свойства сред описываются их магнитными характеристиками, которые в двумерной постановке задачи представляют собой совокупности зависимостей

$$H_x = H_x[B_x, B_y]; \quad H_y = H_y[B_x, B_y],$$

где H_x, H_y, B_x, B_y — проекции на оси декартовой прямоугольной системы координат Oxy векторов напряженности магнитного поля и магнитной индукции соответственно, а матрица коэффициентов линейной САУ на каждом итерационном цикле расчета магнитного поля формируется из значений тензора дифференциального удельного магнитного сопротивления среды в узлах сетки, изображаемого матрицей

$$\nu = \begin{vmatrix} \partial H_x / \partial B_x & \partial H_x / \partial B_y \\ \partial H_y / \partial B_x & \partial H_y / \partial B_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \nu_{xx} & \nu_{xy} \\ \nu_{yx} & \nu_{yy} \end{vmatrix},$$

и вычисляемого по методике, изложенной в [100].

Такая модель машины снимает допущения о разделении магнитного поля на рабочее поле и поле рассеяния, замене реального зубчатого статора гладким и эквивалентировании реальной геометрии поперечных сечений катушек сосредоточенными проводниками, и ее точность практически полностью определяется уровнем дискретизации магнитопровода, т. е. в конечном итоге числом узлов сетки. В такой модели, в отличие от моделей, основанных на расчете поля в одномерной постановке, не используется никакая-либо априорная информация о картине магнитного поля, поэтому для обеспечения точности моделирования, находящейся на уровне точности моделей, описанных в этом разделе, минимальное потребное число N_T узлов на полюсном делении должно быть не меньше 1000, а реальный эффект повышения точности моделирования по сравнению с упомянутыми моделями обнаруживается только при $N_T > 5000$ —10000. Очевидно, что быстродействие такой модели ниже быстродействия моделей, основанных на расчете поля в одномерной постановке, не менее чем на 3 порядка, и, следовательно, она должна применяться только для наиболее ответственных расчетов.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВНОПОЛЮСНЫХ СИНХРОННЫХ МАШИН В КООРДИНАТАХ $d, q, 0$

3.1. Объект исследования и постановка задачи

В магнитно-нелинейной теории ЯСМ для решения некоторых классов задач, характеризующихся определенными ограничениями и дополнительными допущениями, широко применяются замены переменных (подстановки), называемые обычно преобразованиями координат. Наиболее часто используются преобразования к синхронно вращающимся координатам (преобразования $d, q, 0$ Парка) и реже — к неподвижным относительно статора координатам ($\alpha, \beta, 0$), а также к симметричным составляющим для мгновенных значений $(1, 2, 0)$ и к вращающимся полям $(f, b, 0)$. Основное назначение этих преобразований состоит в приведении ДУ электрического состояния ЯСМ к виду с постоянными коэффициентами (не зависящими от угла γ), что позволяет для простейших задач получить аналитические решения, а для более сложных построить численные алгоритмы, более эффективные по сравнению с алгоритмами, основанными на решении уравнений в фазных координатах.

Техника преобразования координат в линейной теории ЯСМ состоит в следующем. Потокосцепления реальных электрических контуров представляются в виде $\psi_j = \sum_k L_{jk} [p_0 \gamma_r]$, где $L_{jk} [p_0 \gamma_r]$ — индуктивности, являющиеся в общем случае периодическими функциями угла γ_r . Если в разложениях функций $L_{jk} [p_0 \gamma_r]$ в ряды Фурье ограничиться постоянными составляющими и первыми двумя гармониками угла $p_0 \gamma_r$ и подставить эти разложения в ДУ электрического состояния, а вместо токов и потокосцеплений фаз статора подставить их выражения через преобразованные токи и потокосцепления, то после ряда весьма громоздких алгебраических преобразований получим ДУ электрического состояния в преобразованных координатах, являющиеся уравнениями с постоянными коэффициентами.

Применить такую технику преобразования координат в магнитно-нелинейной теории ЯСМ не удастся из-за отсутствия аналитических выражений для индуктивностей насыщенной ЯСМ в фазных координатах. Тем не менее преобразования координат широко применяются при исследовании процессов в насыщенных ЯСМ,

причем в их основу положены ДУ, имеющие такую же структуру, как и в магнитно-линейной теории, а насыщение учитывается с использованием зависимостей, составляемых путем рассуждений физического характера (а не получаемых дедуктивным способом). Отсутствие в литературе стройной математической теории преобразования координат для ЯСМ с нелинейными магнитными связями, обеспечивающей получение уравнений в преобразованных координатах как результата строгих аналитических действий над уравнениями, составленными в фазных координатах, часто вызывает сомнения в правомерности использования математического аппарата преобразования координат для насыщенных ЯСМ и достоверности количественных результатов, получаемых с применением этого аппарата. Так, в [109] утверждается, что преобразованные уравнения верны, если магнитные связи в машине линейны, а скорость вращения постоянна. Вместе с тем нередки случаи, когда авторы впадают в противоположную крайность и предлагают применять преобразования координат для решения задач, где этот метод совершенно неэффективен, например, для расчета процессов с учетом магнитных связей, обусловленных высшими гармоническими намагничивающих сил фаз статора. Приведенных примеров достаточно, чтобы уяснить теоретическую важность и практическую полезность строгого подхода к преобразованиям координат.

В этой главе рассматривается теория преобразования координат применительно к объекту весьма высокого уровня общности — для обобщенной ЯСМ в смысле, сформулированном в 2.1, при следующих дополнительных ограничениях:

- 1) на статоре расположены M трехфазных симметричных обмоток, числа пар полюсов которых имеют произвольную нечетную кратность по отношению к числу пар полюсов индуктора;
- 2) проводники фаз этих обмоток распределены вдоль рачотки статора по гармоническим законам;
- 3) насыщение по путям рассеяния статора отсутствует.

При этом мы ограничиваемся только преобразованиями к координатам $d, q, 0$, так как численные алгоритмы расчета электро-механических процессов ЯСМ во всех остальных системах координат сложнее по сравнению с алгоритмами в координатах $d, q, 0$ и, следовательно, применение этих систем координат для математического моделирования ЯСМ практически нецелесообразно.

Для решения всех вопросов теории аналитические преобразования выполняются на уровне неявной ММХ машины. Такой путь ввиду отсутствия возможности получения явной ММХ для насыщенной ЯСМ является для последней единственно приемлемым. Вместе с тем он предпочтителен также и для ненасыщенной ЯСМ, так как приводит к результату при значительно меньших затратах аналитической работы, чем упомянутый выше традиционный путь. В связи с отмеченным обстоятельством, а также с целью сокращения изложения мы здесь, в отличие от главы 2, вначале решим задачу для насыщенной ЯСМ, а соответствующие результаты для

ненасыщенной ЯСМ получим непосредственно как частные случаи, полагая характеристики намагничивания элементов магнитопровода линейными.

3.2. Моделирование насыщенной обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$

3.2.1. МАГНИТНО-МЕХАНИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НАСЫЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЯСМ В КООРДИНАТАХ $d, q, 0$

Вначале для обобщенной ЯСМ в смысле, сформулированном в разделе 3.1, составим неявную ММХ в фазных координатах.

Пусть плотности распределения проводников фаз m -й трехфазной обмотки определяются выражениями

$$\begin{aligned} V_{mA}[\alpha] &= -v_m \sin(\zeta_m \alpha - \beta_m) = -v_m \sin(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m); \\ V_{mB}[\alpha] &= -v_m \sin(\zeta_m \alpha - \beta_m - \kappa) = -v_m \sin(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m - \kappa); \\ V_{mC}[\alpha] &= -v_m \sin(\zeta_m \alpha - \beta_m + \kappa) = -v_m \sin(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m + \kappa), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\kappa = 2\pi/3$; ζ_m — кратность числа полюсов m -й трехфазной обмотки по отношению к числу полюсов $2p_0$ индуктора; v_m, β_m — параметры плотности проводников фазы A m -й трехфазной обмотки, определяемые по (2.43), (2.44).

Для функций распределения проводников фаз m -й трехфазной обмотки находим в соответствии с общим определением (2.45) выражения

$$\begin{aligned} W_{mA}[\alpha] &= w_m \cos(\zeta_m \alpha - \beta_m) = w_m \cos(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m); \\ W_{mB}[\alpha] &= w_m \cos(\zeta_m \alpha - \beta_m - \kappa) = w_m \cos(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m - \kappa); \\ W_{mC}[\alpha] &= w_m \cos(\zeta_m \alpha - \beta_m + \kappa) = w_m \cos(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m + \kappa), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $w_m = -2v_m/\zeta_m$. (3.3)

Уравнение (2.52) принимает с учетом (3.2) следующий вид:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^M (i_{mA} \cos(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m) + i_{mB} \cos(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m - \kappa) + \\ &+ i_{mC} \cos(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m + \kappa)) w_m/a_m + W_{s+1}[\eta] i_{s+1}/a_{s+1} + \dots + \\ &+ W_{s+n}[\eta] i_{s+n}/a_{s+n} + W_f i_f/a_f - F_a - F_f - F_z - p_s[\eta] B = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где i_{mA}, i_{mB}, i_{mC} — токи фаз m -й обмотки; a_m — число параллельных ветвей m -й обмотки; $s = 3M$.

Выражения потокосцеплений фаз m -й обмотки принимают с учетом (2.57), (2.61), (2.70), (3.2) такой вид:

$$\begin{aligned} \psi_{mA} &= L_{\sigma mA} i_{mA} + L_{\sigma mAB} i_{mB} + L_{\sigma mAC} i_{mC} + \\ &+ \frac{p_0 c_\Phi}{a_m} w_m \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \cos(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m) d\eta; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \psi_{mB} &= L_{\sigma mBA} i_{mA} + L_{\sigma mBB} i_{mB} + L_{\sigma mBC} i_{mC} + \\ &+ \frac{p_0 c_\Phi}{a_m} w_m \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \cos(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m - \kappa) d\eta; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_{mC} &= L_{\sigma mCA} i_{mA} + L_{\sigma mCB} i_{mB} + L_{\sigma mCC} i_{mC} + \\ &+ \frac{p_0 c_\Phi}{a_m} w_m \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \cos(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m + \kappa) d\eta, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $L_{\sigma mj k}$ ($m = 1, \dots, M$; $j, k = A, B, C$) — коэффициент взаимной индукции между j -й и k -й фазами m -й обмотки за счет полей рассеяния. На основании симметрии обмотки и свойства взаимности имеются равенства

$$L_{\sigma mj k} = L'_{\sigma km} \text{ при } k = j; \quad L_{\sigma mj k} = L'_{\sigma km} \text{ при } k \neq j. \quad (3.8)$$

Формула (2.79) электромагнитного момента обобщенной ЯСМ принимает с учетом выражений (3.1) следующий вид:

$$\begin{aligned} M_e &= 2p_0^2 c_\Phi \sum_{m=1}^M \left(i_{mA} \frac{v_m}{a_m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \sin(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m) d\eta + \right. \\ &+ i_{mB} \frac{v_m}{a_m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \sin(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m - \kappa) d\eta + \\ &+ i_{mC} \frac{v_m}{a_m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \sin(\zeta_m(\eta + \gamma) - \beta_m + \kappa) d\eta \left. \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Введем в рассмотрение токи i_{md}, i_{mq}, i_{m0} , условия называемые в дальнейшем [8, 19] токами соответственно продольного, поперечного и нулевого контура m -й обмотки статора (условность этих терминов будет выяснена в разделе 3.5) и связанные с токами фаз этой обмотки соотношениями:

$$\begin{aligned} i_{md} &= \frac{2}{3} (i_{mA} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m) + i_{mB} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m - \kappa) + \\ &+ i_{mC} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m + \kappa)); \end{aligned}$$

$$i_{mq} = \frac{2}{3} (i_{mA} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m) + i_{mB} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha) + i_{mC} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha));$$

$$i_{m0} = \frac{1}{3} (i_{mA} + i_{mB} + i_{mC}). \quad (3.10)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$i_{mA} = i_{md} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m) - i_{mq} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m) + i_{m0}; \quad (3.11)$$

$$i_{mB} = i_{md} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha) - i_{mq} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha) + i_{m0};$$

$$i_{mC} = i_{md} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha) - i_{mq} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha) + i_{m0}.$$

Рассмотрим также потокосцепления ψ_{md} , ψ_{mq} , ψ_{m0} , условно называемые потокосцеплениями соответственно продольного, поперечного и нулевого контура m -й обмотки статора и определяемые выражениями

$$\psi_{md} = \frac{2}{3} (\psi_{mA} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m) + \psi_{mB} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha) + \psi_{mC} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha));$$

$$\psi_{mq} = -\frac{2}{3} (\psi_{mA} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m) + \psi_{mB} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha) + \psi_{mC} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha));$$

$$\psi_{m0} = \frac{1}{3} (\psi_{mA} + \psi_{mB} + \psi_{mC}). \quad (3.12)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\psi_{mA} = \psi_{md} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m) - \psi_{mq} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m) + \psi_{m0};$$

$$\psi_{mB} = \psi_{md} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha) - \psi_{mq} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha) + \psi_{m0};$$

$$\psi_{mC} = \psi_{md} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha) - \psi_{mq} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha) + \psi_{m0}. \quad (3.13)$$

Подставив (3.11) в (3.4), с учетом тождеств

$$\cos a \cos b + \cos(a - \alpha) \cos(b - \alpha) + \cos(a + \alpha) \cos(b + \alpha) = \frac{3}{2} \cos(a - b);$$

$$\sin a \cos b + \sin(a - \alpha) \cos(b - \alpha) + \sin(a + \alpha) \cos(b + \alpha) = \frac{3}{2} \sin(a - b);$$

$$\sin a \sin b + \sin(a - \alpha) \sin(b - \alpha) + \sin(a + \alpha) \sin(b + \alpha) = \frac{3}{2} \cos(a - b). \quad (3.14)$$

приходим к уравнению

$$\frac{3}{2} \sum_{m=1}^M (i_{md} \cos \zeta_m \eta + i_{mq} \sin \zeta_m \eta) \omega_m / a_m + W_{s+1}[\eta] i_{s+1} / a_{s+1} + \dots + W_{s+n}[\eta] i_{s+n} / a_{s+n} + W_{s+j} i_j / a_j - F_a - F_f - F_s - \rho_s[\eta] B_s^2 = 0. \quad (3.15)$$

Преобразуем выражения (3.5) — (3.7) следующим образом. Вначале умножим их соответственно на $\frac{2}{3} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m)$, $\frac{2}{3} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha)$, $\frac{2}{3} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha)$ и сложим результаты. Тогда с учетом тождеств (3.14), (3.10) получим

$$\psi_{md} = L_{\Sigma m} i_{md} + \frac{p_0 c_\Phi}{a_m} \omega_m \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \cos \zeta_m \eta d\eta; \quad (3.16)$$

$$\psi_{mq} = L_{\Sigma m} i_{mq} + \frac{p_0 c_\Phi}{a_m} \omega_m \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \sin \zeta_m \eta d\eta; \quad (3.17)$$

$$\psi_{m0} = L_{m0} i_{m0}, \quad (3.18)$$

где

$$L_{\Sigma m} = L'_{sm} - L'_{am}; \quad L_{m0} = L'_{am} + 2L'_{sm}; \quad (m = \overline{1, M}) \quad (3.19)$$

— постоянные индуктивности обмоток статора в координатах d , q , 0 , обусловленные полями рассеяния.

Подставив в (3.9) выражения токов фаз согласно формулам (3.11), после преобразований с учетом тождеств (3.14) приходим к выражению

$$M_s = 3p_0^2 c_\Phi \sum_{m=1}^M \frac{\omega_m}{a_m} \left(i_{mq} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \cos \zeta_m \eta d\eta - i_{md} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \sin \zeta_m \eta d\eta \right). \quad (3.20)$$

Легко убедиться, что с учетом равенства (3.16), (3.17), (3.3) оно приводится к виду

$$M_s = \frac{3}{2} p_0 \sum_{m=1}^M \zeta_m (\psi_{md} i_{mq} - \psi_{mq} i_{md}). \quad (3.21)$$

Магнитное состояние обобщенной ЯСМ в координатах d , q , 0 определяется из ее неявной ММХ, которая формируется по аналогии с ММХ в фазных координатах в виде трех подсистем уравнений: подсистемы, состоящей из уравнений, полученных путем применения уравнения вида (3.15) к каждому из N узлов сетки; урав-

нений вида (2.81) — (2.85), подсистемы, содержащей выражения (3.16) — (3.18) потокосцеплений $\psi_{md}, \psi_{mq}, \psi_{m0}$ ($m=1, M$) и потокосцеплений контуров ротора; подсистемы, содержащей только одно уравнение (3.21). Для удобства дальнейшего анализа выделим из общего множества $3M+n+1$ электрических контуров обобщенной ЯСМ группу $2M+n+1$ контуров, содержащую продольные и поперечные контуры статора и контуры ротора, и назовем их основными контурами, и группу M нулевых контуров. Из рассмотрения уравнений (3.15), (3.18), (3.21) видно, что токи нулевых контуров не входят в первую из названных подсистем и определяющую неявную внутреннюю ММХ машины в координатах $d, q, 0$, а потокосцепления основных контуров не зависят от токов нулевых контуров. Следовательно, неявная ММХ обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$ распадается на две независимые системы уравнений, первая из которых не содержит переменных состояния, характеризующих нулевые контуры, а вторая состоит только из явных линейных соотношений вида (3.18). Первую из упомянутых систем мы будем кратко называть магнитно-механической характеристикой обобщенной ЯСМ в координатах d, q , а вторую — ММХ нулевых контуров обобщенной ЯСМ. При составлении неявной ММХ обобщенной ЯСМ в координатах d, q будем нумеровать электрические контуры индексами $1d, 1q, \dots, Md, Mq, 2M+1, \dots, 2M+n, f$.

В рассматриваемой здесь обобщенной ЯСМ (в отличие от обобщенной ЯСМ, описанной в разделе 2.2) насыщение по коронкам зубцов статора не учитывается, и, следовательно, отпадает необходимость определения потоков рассеяния по коронкам зубцов статора, поэтому пазы ротора ниже будут отмечаться не индексами $S+1, \dots, S+R$, а индексами $1, \dots, R$.

Перейдем к формированию неявной ММХ обобщенной ЯСМ в координатах d, q с учетом изложенных выше положений.

Применив к каждому из N узлов сетки уравнение вида (3.15), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \sum_{m=1}^M (i_{md} \cos \zeta_m \eta_1 + i_{mq} \sin \zeta_m \eta_1) \frac{w_m}{a_m} + W_{2M+1} [\eta_1] \frac{i_{2M+1}}{a_{2M+1}} + \\ & + \dots + W_{2M+n} [\eta_1] \frac{i_{2M+n}}{a_{2M+n}} + W_f \frac{i_f}{a_f} - F_a - F_f - F_{z1} - \rho_{s1} B_1 = 0; \\ & \vdots \\ & \frac{3}{2} \sum_{m=1}^M (i_{md} \cos \zeta_m \eta_N + i_{mq} \sin \zeta_m \eta_N) \frac{w_m}{a_m} + W_{2M+1} [\eta_N] \frac{i_{2M+1}}{a_{2M+1}} + \\ & + \dots + W_{2M+n} [\eta_N] \frac{i_{2M+n}}{a_{2M+n}} + W_f \frac{i_f}{a_f} - F_a - F_f - F_{zN} - \rho_{sN} B_N = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Совместно с уравнениями

$$\Phi_a - C_\Phi (C_1 + \dots + B_N) = 0;$$

$$\Phi_f - \Phi_a - \Lambda_{sf} (W_f i_f / a_f - F_f) = 0; \quad (3.23)$$

$$F_a = F_a [\Phi_a]; \quad F_f = F_f [\Phi_f]; \quad (3.24)$$

$$F_{z1} = F_{z1} [B_1]; \quad \dots; \quad F_{zN} = F_{zN} [B_N]; \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} i_{n1} &= V_{(2M+1,1)} i_{2M+1} / a_{2M+1} + \dots + V_{(2M+n,1)} i_{2M+n} / a_{2M+n}; \\ & \vdots \\ i_{nR} &= V_{(2M+1,R)} i_{2M+1} / a_{2M+1} + \dots + V_{(2M+n,R)} i_{2M+n} / a_{2M+n}; \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\Phi_{n1} = \Phi_{n1} [i_{n1}]; \quad \dots; \quad \Phi_{nR} = \Phi_{nR} [i_{nR}] \quad (3.27)$$

они образуют первую подсистему уравнений неявной ММХ обобщенной ЯСМ в координатах d, q и отражают неявную внутреннюю ММХ машины в этих координатах.

Вторая подсистема уравнений неявной ММХ обобщенной ЯСМ в координатах d, q , состоит из выражений вида (3.16), (3.17), записанных применительно к каждой из обмоток статора и выражений потокосцеплений контуров ротора и с учетом (2.86), а также принятой здесь системы нумерации контуров и пазов ротора, имеет вид

$$\psi_{1d} = L_{z1} i_{1d} + \frac{p_0 C_\Phi}{a_1} w_1 \sum_{j=1}^N B_j \cos \zeta_1 \eta_j;$$

$$\psi_{1q} = L_{z1} i_{1q} + \frac{p_0 C_\Phi}{a_1} w_1 \sum_{j=1}^N B_j \sin \zeta_1 \eta_j;$$

$$\vdots$$

$$\psi_{Md} = L_{zM} i_{Md} + \frac{p_0 C_\Phi}{a_M} w_M \sum_{j=1}^N B_j \cos \zeta_M \eta_j;$$

$$\psi_{Mq} = L_{zM} i_{Mq} + \frac{p_0 C_\Phi}{a_M} w_M \sum_{j=1}^N B_j \sin \zeta_M \eta_j;$$

$$\psi_{2M+1} = L_{s2M+1,2M+1} i_{2M+1} + \dots + L_{s2M+1,2M+n} i_{2M+n} + L_{s2M+1,f} i_f +$$

$$+ (V_{(2M+1,1)} \Phi_{n1} + \dots + V_{(2M+1,R)} \Phi_{nR}) \frac{2p_0}{a_{2M+1}} + \frac{p_0 C_\Phi}{a_{2M+1}} \sum_{j=1}^N W_{2M+1} [\eta_j] B_j$$

\vdots

$$\psi_{2M+n} = L_{s2M+n,2M+1} i_{2M+1} + \dots + L_{s2M+n,2M+n} i_{2M+n} + L_{s2M+n,f} i_f +$$

$$+ (V_{(2M+n,1)} \Phi_{n1} + \dots + V_{(2M+n,R)} \Phi_{nR}) \frac{2p_0}{a_{2M+n}} +$$

$$+ \frac{p_0 C_\Phi}{a_{2M+n}} \sum_{j=1}^N M_{2M+n} [\eta_j] B_j;$$

$$\psi_f = L_{sf,2M+1} i_{2M+1} + \dots + L_{sf,2M+n} i_{2M+n} + \Phi_f W_f p_0 / a_f. \quad (3.28)$$

Третья подсистема уравнений неявной ММХ состоит из одного уравнения (3.21).

В ММХ (3.22)—(3.28), (3.21) независимыми переменными являются $2M+n+1$ токов электрических контуров, а зависимыми — $2M+n+1$ потокосцеплений контуров, электромагнитный момент и $2N+4+2R$ ВМК, т. е. переменные $B_1, \dots, B_N, F_{z1}, \dots, F_{zN}, \Phi_a, \Phi_f, F_a, F_f, i_{\pi 1}, \dots, i_{\pi R}, \Phi_{\pi 1}, \dots, \Phi_{\pi R}$. Число уравнений неявной внутренней ММХ (3.22)—(3.27) равно числу ВМК, т. е. неявная ММХ позволяет рассчитать ВМК при любой задаваемой совокупности токов электрических контуров обобщенной ЯСМ в координатах d, q .

Образовав векторы-столбцы

$$\begin{aligned} \psi_{\pi} &= (\psi_{1d}, \psi_{1q}, \dots, \psi_{Md}, \psi_{Mq}, \psi_{2M+1}, \dots, \psi_{2M+n}, \psi_f)_{*}; \\ i_{\pi} &= (i_{1d}, i_{1q}, \dots, i_{Md}, i_{Mq}, i_{2M+1}, \dots, i_{2M+n}, i_f)_{*}; \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} B_{\tau} &= (B_1, \dots, B_N)_{*}; \quad F_{z\tau} = (F_{z1}, \dots, F_{zN})_{*}; \\ \Phi &= (\Phi_a, \Phi_f)_{*}; \quad F = (F_a, F_f)_{*} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$i_{\pi\pi} = (i_{\pi 1}, \dots, i_{\pi R})_{*}; \quad \Phi_{\pi\pi} = (\Phi_{\pi 1}, \dots, \Phi_{\pi R})_{*},$$

представим неявную ММХ обобщенной ЯСМ в координатах d, q системой векторных уравнений

$$f_{\pi 1} [i_{\pi}, B_{\tau}, F, F_{z\tau}] = 0; \quad (3.31)$$

$$f_{\pi 2} [\Phi, B_{\tau}, F] = 0; \quad (3.32)$$

$$F = F[\Phi]; \quad (3.33)$$

$$F_{z\tau} = F_{z\tau}[B_{\tau}]; \quad (3.34)$$

$$i_{\pi\pi} = V_{\pi\pi*} i_{\pi}; \quad (3.35)$$

$$\Phi_{\pi\pi} = \Phi_{\pi\pi} [i_{\pi\pi}]; \quad (3.36)$$

$$\psi_{\pi} = \varphi_{\pi} [i_{\pi}, \Phi, B_{\tau}, \Phi_{\pi\pi}]; \quad (3.37)$$

$$M_s = \xi_{\pi} [i_{\pi}, \psi_{\pi}], \quad (3.38)$$

где

$$V_{\pi\pi*} = \| 0, V_{\pi\pi*}, 0 \| \quad (3.39)$$

— матрица размерности $R \times (2M+n+1)$, ненулевой блок которой имеет вид

$$V_{\pi\pi*} = \left\| \begin{array}{c} V_{(2M+1,1)/a_{2M+1}} \dots V_{(2M+n,1)/a_{2M+n}} \\ \vdots \\ V_{(2M+1,R)/a_{2M+1}} \dots V_{(2M+n,R)/a_{2M+n}} \end{array} \right\|. \quad (3.40)$$

Подсистема (3.31)—(3.36), описывающая неявную внутреннюю ММХ, содержит два векторных уравнения (суммарной размерностью $N+2$), не решенные относительно ВМК, и четыре векторных уравнения (суммарной размерностью $2+N+2R$), решенные относительно векторов $F, F_{z\tau}, i_{\pi\pi}, \Phi_{\pi\pi}$, т. е. она принадлежит к классу рекуррентных.

Явная внешняя ММХ обобщенной ЯСМ в координатах d, q описывается уравнениями

$$\psi_{\pi} = \psi_{\pi} [i_{\pi}]; \quad (3.41)$$

$$M_s = M_s [i_{\pi}], \quad (3.42)$$

а явная внутренняя ММХ — уравнением

$$m_{\pi} = m_{\pi} [i_{\pi}], \quad (3.43)$$

где вектор ВМК имеет вид

$$m_{\pi} = (\Phi, B_{\tau}, F, F_{z\tau}, i_{\pi\pi}, \Phi_{\pi\pi})_{*}. \quad (3.44)$$

Явная ММХ нулевых контуров обобщенной ЯСМ описывается совокупностью уравнений вида (3.18) либо одним векторным уравнением

$$\psi_0 = L_0 i_0, \quad (3.45)$$

где

$$i_0 = (i_{10}, \dots, i_{M0})_{*}; \quad \psi_0 = (\psi_{10}, \dots, \psi_{M0})_{*}; \quad (3.46)$$

$$L_0 = \left\| \begin{array}{c} L_{011} \dots L_{01M} \\ \vdots \\ L_{0M1} \dots L_{0MM} \end{array} \right\|. \quad (3.47)$$

3.2.2. МАГНИТНО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ НАСЫЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЯСМ В КООРДИНАТАХ $d, q, 0$

В аргумент ММХ в координатах d, q входят только токи электрических контуров, поэтому внешние и внутренние ММП здесь определяются как полные производные:

$$P_{e\pi} = \left\| \frac{d\psi_{\pi}}{di_{\pi}} \right\| = \left\| \begin{array}{c} L_{\pi} \\ K_{*\pi} \end{array} \right\|; \quad P_{i\pi} = \frac{dm_{\pi}}{di_{\pi}} = \Theta_{\pi}. \quad (3.48)$$

Выведем формулы для вычисления матриц $L_{\pi}, K_{*\pi}, \Theta_{\pi}$. Продифференцировав неявную ММХ (3.31)—(3.38) по вектору i_{π} , приходим к системе матричных уравнений:

$$f_{\pi 1}^{i\pi} + f_{\pi 1}^{B_{\tau}} \Theta_{B\pi} + f_{\pi 1}^F \Theta_{F\pi} + f_{\pi 1}^{F_{z\tau}} \Theta_{z\pi} = 0; \quad (3.49)$$

$$f_{\pi 2}^{\Phi} \Theta_{\Phi\pi} + f_{\pi 2}^{B_{\tau}} \Theta_{B\pi} + f_{\pi 2}^F \Theta_{F\pi} = 0; \quad (3.50)$$

$$\Theta_{F\pi} = R_{\Phi} \Theta_{\Phi\pi}; \quad (3.51)$$

$$\Theta_{z\pi} = \rho_{z\tau} \Theta_{B\pi}; \quad (3.52)$$

$$\Theta_{i\pi} = V_{\pi\pi*}; \quad (3.53)$$

$$\Theta_{\pi\pi} = \Lambda_{\pi\pi} \Theta_{\pi\pi}; \quad (3.54)$$

$$L_{\pi} = \varphi'_{\pi} + \varphi_{\pi}^{\Phi} \Theta_{\Phi\pi} + \varphi_{\pi}^{B_{\tau}} \Theta_{B\pi} + \varphi_{\pi}^{\Phi_{\pi\pi}} \Theta_{\pi\pi}; \quad (3.55)$$

$$K_{\Pi} = \xi_{\Pi}^{i\Pi} + \xi_{\Pi}^{\psi\Pi} \Theta_{\Pi}^{\psi\Pi} L_{\Pi}, \quad (3.56)$$

где $\Theta_{\Phi\Pi}$, $\Theta_{B\Pi}$, $\Theta_{F\Pi}$, $\Theta_{z\Pi}$, $\Theta_{i\Pi}$, $\Theta_{\Pi\Pi}$ — блоки матрицы Θ_{Π} внутренних ММП

$$\Theta_{\Pi} = \frac{dm_{\Pi}}{di_{\Pi}} = \begin{pmatrix} d\Phi_{\Pi}/di_{\Pi} \\ dB_{\tau}/di_{\Pi} \\ dF/di_{\Pi} \\ dF_{z\tau}/di_{\Pi} \\ di_{\Pi\Pi}/di_{\Pi} \\ d\Phi_{\Pi\Pi}/di_{\Pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_{\Phi\Pi} \\ \Theta_{B\Pi} \\ \Theta_{F\Pi} \\ \Theta_{z\Pi} \\ \Theta_{i\Pi} \\ \Theta_{\Pi\Pi} \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

а матрицы

$$f_{\Pi}^{i\Pi} = \frac{\partial f_{\Pi 1}}{\partial i_{\Pi}} = p_0 C_{\Phi} \begin{pmatrix} \frac{3w_1}{2a_1} \cos \zeta_1 \eta_1 & \frac{3w_1}{2a_1} \sin \zeta_1 \eta_1 \dots & \frac{3w_M}{2a_M} \cos \zeta_M \eta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{3w_1}{2a_1} \cos \zeta_1 \eta_N & \frac{3w_1}{2a_1} \sin \zeta_1 \eta_N \dots & \frac{3w_M}{2a_M} \cos \zeta_M \eta_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{3w_M}{2a_M} \sin \zeta_M \eta_1 & \frac{w_{2M+1} [\eta_1]}{a_{2M+1}} \dots & \frac{w_{2M+n} [\eta_1]}{a_{2M+n}} & \frac{w_f}{a_f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{3w_M}{2a_M} \sin \zeta_M \eta_N & \frac{w_{2M+1} [\eta_N]}{a_{2M+1}} \dots & \frac{w_{2M+n} [\eta_N]}{a_{2M+n}} & \frac{w_f}{a_f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix};$$

$$\varphi_{\Pi}^{i\Pi} = \frac{\partial \Phi_{\Pi}}{\partial i_{\Pi}} = \text{diag} (L_{\sigma\Pi}, L_{\sigma\Pi\Pi});$$

$$\varphi_{\Pi}^{B_{\tau}} = \frac{\partial \Phi_{\Pi}}{\partial B_{\tau}} = p_0 C_{\Phi} \begin{pmatrix} \frac{w_1}{a_1} \cos \zeta_1 \eta_1 & \dots & \frac{w_1}{a_1} \cos \zeta_1 \eta_N \\ \frac{w_1}{a_1} \sin \zeta_1 \eta_1 & & \frac{w_1}{a_1} \sin \zeta_1 \eta_N \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{w_M}{a_M} \cos \zeta_M \eta_1 & & \frac{w_M}{a_M} \cos \zeta_M \eta_N \\ \frac{w_M}{a_M} \sin \zeta_M \eta_1 & & \frac{w_M}{a_M} \sin \zeta_M \eta_N \\ \frac{W_{2M+1} [\eta_1]}{a_{2M+1}} & & \frac{W_{2M+1} [\eta_N]}{a_{2M+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{W_{2M+n} [\eta_1]}{a_{2M+n}} & & \frac{W_{2M+n} [\eta_N]}{a_{2M+n}} \\ 0 & & 0 \end{pmatrix};$$

$$\varphi_{\Pi}^{\psi\Pi} = \frac{\partial \Phi_{\Pi}}{\partial \Phi_{\Pi\Pi}} = 2p_0 \begin{pmatrix} 0 \\ V_{\Pi\Pi} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\xi_{\Pi}^{i\Pi} = \frac{\partial \xi_{\Pi}}{\partial i_{\Pi}} = \frac{3}{2} p_0 (-\zeta_1 \psi_{1q}, \zeta_1 \psi_{1d}, \dots, -\zeta_M \psi_{Mq}, \zeta_M \psi_{Md}, 0, \dots, 0);$$

$$\xi_{\Pi}^{\psi\Pi} = \frac{\partial \xi_{\Pi}}{\partial \psi_{\Pi}} = \frac{3}{2} p_0 (\zeta_1 i_{1q}, -\zeta_1 i_{1d}, \dots, \zeta_M i_{Mq}, -\zeta_M i_{Md}, 0, \dots, 0) \quad (3.58)$$

вычисляются как частные производные функций f_{Π} , Φ_{Π} , ξ_{Π} по векторам i_{Π} , B_{τ} , $\Phi_{\Pi\Pi}$, ψ_{Π} в соответствии с содержанием этих функций согласно (3.22), (3.28), (3.21) и содержанием векторов согласно (3.29), (3.30);

$$f_{\Pi}^{B_{\tau}} = \frac{\partial f_{\Pi 1}}{\partial B_{\tau}}; \quad f_{\Pi}^{F_{z\tau}} = \frac{\partial f_{\Pi 1}}{\partial F_{z\tau}}; \quad f_{\Pi}^F = \frac{\partial f_{\Pi 1}}{\partial F}; \quad f_{\Pi}^{\Phi} = \frac{\partial f_{\Pi 2}}{\partial \Phi};$$

$$f_{\Pi}^{B_{\tau}} = \frac{\partial f_{\Pi 2}}{\partial B_{\tau}}; \quad f_{\Pi}^F = \frac{\partial f_{\Pi 2}}{\partial F}; \quad \Phi_{\Pi}^{\Phi} = \frac{\partial \Phi_{\Pi}}{\partial \Phi} \quad (3.59)$$

— матрицы, вычисляемые аналогичным образом и совпадающие с приведенными в (2.110) матрицами $f_1^{B_{\tau}}$, $f_1^{F_{z\tau}}$, f_1^F , f_2^{Φ} , $f_2^{B_{\tau}}$, f_2^F , Φ^{Φ} соответственно;

R_{Φ} , $\rho_{z\tau}$ — матрицы, определяемые по формулам (2.112), (2.113) соответственно;

$$\Lambda_{\Pi\Pi} = \frac{d\Phi_{\Pi\Pi}}{di_{\Pi\Pi}} = \text{diag} \left(\frac{d\Phi_{\Pi 1}}{di_{\Pi 1}}, \dots, \frac{d\Phi_{\Pi nR}}{di_{\Pi nR}} \right) = \text{diag} (\Lambda_{\Pi 1}, \dots, \Lambda_{\Pi nR}) \quad (3.60)$$

— матрица дифференциальных магнитных проводимостей путей потоков рассеяния по коронкам зубцов ротора.

Матрицы постоянных индуктивностей рассеяния статора и ротора имеют соответственно вид

$$L_{\sigma\Pi} = \text{diag} (L_{z1}, L_{z1}, \dots, L_{zM}, L_{zM});$$

$$L_{\sigma\Pi\Pi} = \begin{pmatrix} L_{\sigma 2M+1, 2M+1} \dots L_{\sigma 2M+1, 2M+n} & L_{\sigma 2M+1, f} \\ \vdots & \vdots \\ L_{\sigma 2M+n, 2M+1} & L_{\sigma 2M+n, 2M+n} & L_{\sigma 2M+n, f} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{\sigma f, 2M+1} \dots L_{\sigma f, 2M+n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Из уравнения (3.49) с учетом (2.114), (2.115) находим, что

$$\Theta_{B\Pi} = \lambda_{\tau} (f_{\Pi}^{i\Pi} + f_{\Pi}^F R_{\Phi} \Theta_{\Phi\Pi}), \quad (3.62)$$

или

$$\Theta_{B\Pi} = \lambda_{\tau} (f_{\Pi}^{i\Pi} + f_{\Pi}^F \Theta_{F\Pi}). \quad (3.63)$$

Подставив это выражение в (3.50), приходим к уравнению

$$A_{\Phi\Pi} \Theta_{\Phi\Pi} = -f_{\Pi 2}^{B_{\tau}} \lambda_{\tau} f_{\Pi 1}^{i\Pi}, \quad (3.64)$$

$$\text{где } A_{\Phi\Pi} = f_{\Pi 2}^{\Phi} + (f_{\Pi 2}^F + f_{\Pi 2}^{B\tau} \lambda_{\tau} f_{\Pi 1}^F) R_{\Phi}. \quad (3.65)$$

Из уравнения (3.65) имеем

$$\Theta_{\Phi\Pi} = -A_{\Phi\Pi}^{-1} f_{\Pi 2}^{B\tau} \lambda_{\tau} f_{\Pi 1}^{\Phi}. \quad (3.66)$$

Таким образом, для вычисления ММП обобщенной ЯСМ в координатах d, q необходимо найти матрицы (2.112), (2.113), (3.58) — (3.60), после чего последовательно воспользоваться выражениями (3.65), (3.66), (3.62), (3.51) — (3.56) как рекуррентными формулами.

3.2.3. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ НАСЫЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЯСМ В КООРДИНАТАХ $d, q, 0$

Электрическое состояние обобщенной ЯСМ при раздельном питании фаз обмоток статора описывается в фазных координатах векторным ДУ

$$\frac{d\psi}{dt} + ri - u = 0, \quad (3.67)$$

где

$$\begin{aligned} i &= (i_{1A}, i_{1B}, i_{1C}, \dots, i_{MA}, i_{MB}, i_{MC}, i_{s+1}, \dots, i_{s+n}, i_f)_{*}; \\ \psi &= (\psi_{1A}, \psi_{1B}, \psi_{1C}, \dots, \psi_{MA}, \psi_{MB}, \psi_{MC}, \psi_{s+1}, \dots, \psi_{s+n}, \psi_f)_{*}; \\ u &= (u_{1A}, u_{1B}, u_{1C}, \dots, u_{MA}, u_{MB}, u_{MC}, 0, \dots, 0, u_f)_{*} \end{aligned} \quad (3.68)$$

— векторы-столбцы токов, потокосцеплений и напряжений физических контуров;

$$r = \text{diag}(r_1, r_1, r_1, \dots, r_M, r_M, r_M, r_{\text{рот}}) \quad (3.69)$$

— матрица размерности $3M+n+1$ активных сопротивлений, в которой $r_{\text{рот}}$ есть квадратная матрица активных сопротивлений контуров ротора (в общем случае — недиагональная) размерности $n+1$.

Введем в рассмотрение квадратную невырожденную матрицу Π размерности $3M+n+1$ обобщенного преобразования Парка:

$$\Pi = \text{diag}(\Pi_1, \dots, \Pi_M, 1, \dots, 1), \quad (3.70)$$

где

$$\Pi_m = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m) & \frac{2}{3} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha) & \frac{2}{3} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha) \\ -\frac{2}{3} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m) & -\frac{2}{3} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha) & -\frac{2}{3} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha) \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{vmatrix}. \quad (3.71)$$

Обратная ей матрица имеет вид

$$\Pi^{-1} = \text{diag}(\Pi_1^{-1}, \dots, \Pi_M^{-1}, 1, \dots, 1), \quad (3.72)$$

где

$$\Pi_m^{-1} = \begin{vmatrix} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m) & -\sin(\zeta_m \gamma - \beta_m) & 1 \\ \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha) & -\sin(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha) & 1 \\ \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha) & -\sin(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha) & 1 \end{vmatrix} (m = \overline{1, M}). \quad (3.73)$$

Определим векторы-столбцы токов, потокосцеплений и напряжений преобразованных контуров

$$\begin{aligned} i'_{\Pi} &= (i_{1d}, i_{1q}, i_{10}, \dots, i_{Md}, i_{Mq}, i_{M0}, i_{s+1}, \dots, i_{s+n}, i_f)_{*}; \\ \psi'_{\Pi} &= (\psi_{1d}, \psi_{1q}, \psi_{10}, \dots, \psi_{Md}, \psi_{Mq}, \psi_{M0}, \psi_{s+1}, \dots, \psi_{s+n}, \psi_f)_{*}; \\ u'_{\Pi} &= (u_{1d}, u_{1q}, u_{10}, \dots, u_{Md}, u_{Mq}, u_{M0}, u_{s+1}, \dots, u_{s+n}, u_f)_{*} \end{aligned} \quad (3.74)$$

в соответствии с выражениями

$$i'_{\Pi} = \Pi i; \quad \psi'_{\Pi} = \Pi \psi; \quad u'_{\Pi} = \Pi u. \quad (3.75)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$i = \Pi^{-1} i'_{\Pi}; \quad \psi = \Pi^{-1} \psi'_{\Pi}; \quad u = \Pi^{-1} u'_{\Pi}; \quad (3.76)$$

Умножив ДУ (3.67) слева на матрицу Π , имеем

$$\Pi \frac{d\psi}{dt} + \Pi r i - \Pi u = 0. \quad (3.77)$$

Но согласно (3.76), (3.72), (3.73), (2.34)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} (\Pi^{-1} \psi'_{\Pi}) = \frac{d\Pi^{-1}}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \psi'_{\Pi} + \Pi^{-1} \frac{d\psi'_{\Pi}}{dt} = \omega_r p_0 \frac{d\Pi^{-1}}{dt} \psi'_{\Pi} + \Pi^{-1} \frac{d\psi'_{\Pi}}{dt}. \quad (3.78)$$

С учетом (3.75), (3.78) уравнение (3.77) приводится к виду

$$\frac{d\psi'_{\Pi}}{dt} + \omega_r \Omega' + r'_{\Pi} i'_{\Pi} - u'_{\Pi} = 0, \quad (3.79)$$

где

$$r'_{\Pi} = \Pi r \Pi^{-1} = r \quad (3.80)$$

— матрица активных сопротивлений обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$;

$$\Omega' = p_0 \Pi \frac{d\Pi^{-1}}{d\gamma} = \text{diag}(\Omega'_1, \dots, \Omega'_m, 0, \dots, 0) \quad (3.81)$$

— квадратная вырожденная матрица размерности $3M+n+1$, в которой

$$\Omega'_m = p_0 \begin{vmatrix} 0 & -\zeta_m & 0 \\ \zeta_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} (m = \overline{1, M}). \quad (3.82)$$

В правильности выражений (3.80)—(3.82) легко убедиться непосредственной подстановкой в них выражений (3.69)—(3.73).

Векторное ДУ (3.79) описывает электрическое состояние обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$. Ему соответствует система скалярных ДУ

$$\left. \begin{aligned} d\psi_{md}/dt - \omega_r p_0 \zeta_m \psi_{mq} + r_m i_{md} - u_{md} &= 0 \\ d\psi_{md}/dt + \omega_r p_0 \zeta_m \psi_{md} + r_m i_{mq} - u_{mq} &= 0 \end{aligned} \right\} (m = \overline{1, M});$$

$$d\psi_{m0}/dt + r_m i_{m0} - u_{m0} = 0$$

$$d\psi_{3M+1}/dt + r_{3M+1, 3M+1} i_{3M+1} + \dots + r_{3M+1, 3M+n} i_{3M+n} - u_{3M+1} = 0;$$

$$\vdots$$

$$d\psi_{3M+n}/dt + r_{3M+n, 3M+1} i_{3M+1} + \dots + r_{3M+n, 3M+n} i_{3M+n} - u_{3M+n} = 0;$$

$$d\psi_f/dt + r_f i_f - u_f = 0. \quad (3.83)$$

Необходимо отметить, что в процессе вывода ДУ (3.79) учитывалось только одно ограничение, отраженное в (3.69) и состоящее в том, что для каждой из трехфазных обмоток статора сопротивления всех ее фаз принимались одинаковыми. Следовательно, система (3.83) верна при любых магнитных связях, в том числе при нелинейных, произвольных плотностях проводников электрических контуров и даже с учетом зубчатого строения магнитопровода. Однако из этого вовсе не следует, что эту систему целесообразно применять во всех упомянутых случаях. Покажем, что при исходных допущениях, изложенных в разделе 2.3, и дополнительных ограничениях, сформулированных в 3.1, описание обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$ действительно является предпочтительным по сравнению с ее описанием в фазных координатах.

Электрохимические процессы обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$ описываются САДУ, состоящей из уравнений электрического состояния (3.83), механического состояния (2.17), (2.18) и неявной ММХ (3.22)—(3.28). Из рассмотрения первых 3М уравнений системы (3.83) видно, что уравнения электрического состояния основных контуров не содержат токов и потокосцеплений нулевых контуров, а уравнения нулевых контуров не содержат токов и потокосцеплений основных контуров. Но из приведенного в разделе 3.2.1 анализа следует, что потокосцепление основных контуров не зависит от токов нулевых контуров, а потокосцепления нулевых контуров не зависят от токов основных контуров. Следовательно, рассматриваемая САДУ распадается на две независимые системы: первая состоит из ДУ электрического состояния основных контуров, уравнений механического состояния и ММХ обобщенной ЯСМ в координатах d, q , а вторая — из уравнений нулевых контуров

$$\frac{d\psi_{m0}}{dt} + r_m i_{m0} - u_{m0} = 0; \quad \psi_{m0} = L_{m0} i_{m0} \quad (m = \overline{1, M}) \quad (3.84)$$

или в векторной записи

$$\frac{d\psi_0}{dt} + r_0 i_0 - u_0 = 0; \quad \psi_0 = L_0 i_0, \quad (3.85)$$

где

$$u_0 = (u_{10}, \dots, u_{M0})_* = ((u_{1A} + u_{1B} + u_{1C})/3, \dots, (u_{MA} + u_{MB} + u_{MC})/3)_* \quad (3.86)$$

$$r_0 = \text{diag}(r_1, \dots, r_M). \quad (3.87)$$

Векторное ДУ электрического состояния обобщенной ЯСМ в координатах d, q имеет вид

$$\frac{d\psi_{\Pi}}{dt} + \omega_r \Omega \psi_{\Pi} + r_{\Pi} i_{\Pi} - u_{\Pi} = 0, \quad (3.88)$$

где

$$r = \text{diag}(r_1, r_1, \dots, r_M, r_M, r_{\text{рот}}) \quad (3.89)$$

— матрица активных сопротивлений основных контуров;

$$\Omega = \text{diag}(\Omega_1, \dots, \Omega_M, 0, \dots, 0); \quad \Omega_m = p_0 \begin{vmatrix} 0 & -\zeta_m \\ \zeta_m & 0 \end{vmatrix} \quad (m = \overline{1, M}), \quad (3.90)$$

$$u_{\Pi} = \Pi_{dq} u = (u_{1d}, u_{1q}, \dots, u_{Md}, u_{Mq}, u_{2M+1}, \dots, u_{2M+n}, u_f)_* \quad (3.91)$$

— вектор напряжений основных контуров;

$$\Pi_{dq} = \text{diag}(\Pi_{dq1}[\gamma], \dots, \Pi_{dqM}[\gamma], 1, \dots, 1);$$

$$\Pi_{dqm} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m) & \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha) \\ -\sin(\zeta_m \gamma - \beta_m) & -\sin(\zeta_m \gamma - \beta_m - \alpha) \\ \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha) & \\ -\sin(\zeta_m \gamma - \beta_m + \alpha) \end{vmatrix} \quad (m = \overline{1, M}). \quad (3.92)$$

Формула (3.21) электромагнитного момента может быть представлена в виде

$$M_s = -\frac{3}{2} \psi_{\Pi} \Omega_{\Pi}, \quad (3.93)$$

в чем легко убедиться, подставив в правую часть (3.93) выражения векторов ψ_{Π} , i_{Π} согласно (3.29) и матрицы Ω согласно (3.90).

3.2.4. МОДЕЛЬ НАСЫЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЯСМ В КООРДИНАТАХ $d, q, 0$ НА БАЗЕ ЯВНЫХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Для расчетов переходных электрохимических процессов обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$ с применением явного метода численного интегрирования необходимо проинтегрировать этим ме-

тодом две независимые друг от друга САДУ, упомянутые в конце предыдущего раздела.

Первую из них представим в виде САДУ, состоящей из ДУ

$$L_{\Pi} \frac{di_{\Pi}}{dt} + \omega_r \Omega \psi_{\Pi} + r_{\Pi} i_{\Pi} - u_{\Pi} = 0; \quad (3.94)$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = J^{-1} (M_{\phi} + M_{\psi}); \quad \frac{d\gamma_r}{dt} = \omega_r; \quad (3.95)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Theta_{\Phi\Pi} \frac{di_{\Pi}}{dt}; \quad \frac{dB_{\tau}}{dt} = \Theta_{B\Pi} \frac{di_{\Pi}}{dt} \quad (3.96)$$

и алгебраических уравнений (3.33)—(3.37), (3.91)—(3.93) при начальных условиях

$$t = t_0; \quad i_{\Pi} = i_{\Pi 0}; \quad \omega_r = \omega_{r0}; \quad \gamma_r = \gamma_{r0}. \quad (3.97)$$

Алгоритм численного интегрирования этой САДУ аналогичен алгоритму, описанному в 2.3.4. Он предусматривает выполнение на шаге интегрирования следующих операций:

для нулевого узла шаблона вычисляются матрица Π_{dq} по (3.92), вектор u_{Π} по (3.91) и момент M_{ψ} ;

по известным из предыдущего шага интегрирования значениям переменных i_{Π} , γ , ω_r , Φ , B_{τ} , F , $F_{z\tau}$, $i_{\Pi\phi}$, $\Phi_{\Pi\phi}$ вычисляются в нулевом узле шаблона матрицы R_{Φ} , $\rho_{z\tau}$, ρ_{τ} , λ_{τ} по формулам (2.112)—(2.115), матрица $\Lambda_{\Pi\Pi}$ по формуле (3.60), после чего с учетом постоянных матриц $f_{\Pi\Pi}^I$, $f_{\Pi\Pi}^B$, $f_{\Pi\Pi}^{Fz\tau}$, $f_{\Pi\Pi}^F$, $f_{\Pi\Pi}^{\phi}$, $f_{\Pi\Pi}^{B\tau}$, $\varphi_{\Pi\Pi}^I$, $\varphi_{\Pi\Pi}^B$, $\varphi_{\Pi\Pi}^{\Phi\Pi}$ последовательно по формулам (3.65), (3.66), (3.62), (3.54)—(3.56) вычисляются матрица $A_{\Phi\Pi}$ и ММП $\Theta_{\Phi\Pi}$, $\Theta_{B\Pi}$, $\Theta_{\Pi\Pi}$, L_{Π} , K_{Π} ;

уравнение (3.94) решается численным способом относительно вектора di_{Π}/dt ;

по формулам (3.95), (3.96) вычисляются производные $d\omega_r/dt$, $d\gamma_r/dt$, $d\Phi/dt$, dB_{τ}/dt ;

по формуле вида (1.69) вычисляются приращения $\Delta\omega_r$, $\Delta\gamma_r$, $\Delta\Phi$, ΔB_{τ} на шаге h ;

по формулам вида (1.67) определяются значения переменных ω_r , γ_r , Φ , B_{τ} при $t=h$;

по формулам (3.33)—(3.37), (3.93) находят значения переменных F , $F_{z\tau}$, $i_{\Pi\phi}$, $\Phi_{\Pi\phi}$, ψ_{Π} , M_{ψ} при $t=h$.

На первом шаге интегрирования второй этап изложенного выше алгоритма выполняется с использованием заданных начальных условий. Если рассчитываемый процесс является продолжением некоторого предшествующего ему рассчитанного на ЭВМ переходного процесса, то начальные значения ВМК известны из расчета последнего. Если же заданными являются только начальные условия (3.97), то соответствующие им значения остальных переменных следует вычислять на основе неявной ММХ машины, пользуясь методом, изложенным в разделе 1.7.

Будем рассматривать магнитное состояние обобщенной ЯСМ при начальных значениях $i_{\Pi 0}$, γ_0 как режим машины, который установился в результате постепенного увеличения токов контуров от нуля до значений, заданных вектором $i_{\Pi 0}$, пропорционально параметру ϵ , т. е. примем, что

$$i_{\Pi} = i_{\Pi 0} \epsilon. \quad (3.98)$$

При этом все переменные будут изменяться в соответствии с зависимостями

$$\Phi = \Phi[\epsilon]; \quad B_{\tau} = B_{\tau}[\epsilon]; \quad (3.99)$$

$$F = F[\epsilon]; \quad F_{z\tau} = F_{z\tau}[\epsilon]; \quad i_{\Pi\phi} = i_{\Pi\phi}[\epsilon]; \quad \Phi_{\Pi\phi} = \Phi_{\Pi\phi}[\epsilon]; \\ \psi_{\Pi} = \psi_{\Pi}[\epsilon]; \quad M_{\psi} = M_{\psi}[\epsilon], \quad (3.100)$$

удовлетворяющими следующим условиям: при $\epsilon=0$ все зависимые переменные равны нулю, а при $\epsilon=1$ — искомым начальным значениям Φ_0 , $B_{\tau 0}$, F_0 , $F_{z\tau 0}$, $i_{\Pi\phi 0}$, $\Phi_{\Pi\phi 0}$, $\psi_{\Pi 0}$, $M_{\psi 0}$ соответственно. Продифференцировав уравнения (3.98), (3.99) по ϵ , приходим к ДУ

$$\frac{di_{\Pi}}{d\epsilon} = i_{\Pi 0}; \quad \frac{d\Phi}{d\epsilon} = \Theta_{\Phi\Pi} \frac{di_{\Pi}}{d\epsilon}; \quad \frac{dB_{\tau}}{d\epsilon} = \Theta_{B\Pi} \frac{di_{\Pi}}{d\epsilon}. \quad (3.101)$$

Проинтегрируем нелинейную САДУ (3.101), (3.33)—(3.38) на интервале $0 \leq \epsilon \leq 1$ при нулевых начальных условиях. При этом на шаге интегрирования выполняются следующие операции:

по известным из предыдущего шага интегрирования значениям ВМК (на первом шаге — по нулевым их значениям) вычисляются матрицы R_{Φ} , $\rho_{z\tau}$, ρ_{τ} , λ_{τ} по формулам (2.112)—(2.115) и матрица $\Lambda_{\Pi\Pi}$ по формуле (3.60), после чего последовательно по формуле (3.65) вычисляется матрица $A_{\Phi\Pi}$ и по формулам (3.66), (3.62)—внутренние ММП $\Theta_{\Phi\Pi}$, $\Theta_{B\Pi}$;

по формулам (3.101) вычисляются производные $di_{\Pi}/d\epsilon$, $d\Phi/d\epsilon$, $dB_{\tau}/d\epsilon$;

по формулам вида (1.69) определяются приращения Δi_{Π} , $\Delta\Phi$, ΔB_{τ} на шаге h_{ϵ} ;

по формулам вида (1.67) вычисляются векторы i , Φ , B_{τ} при значении параметра, равном $\epsilon+h_{\epsilon}$;

по формулам (3.33)—(3.38) определяются значения остальных зависимых переменных при значении параметра, равном $\epsilon+h_{\epsilon}$.

Для решения САДУ (3.85), описывающей процессы нулевых контуров, приведем ее к векторному ДУ

$$\frac{di_0}{dt} = L_0^{-1} (u_0 - r_0 i_0). \quad (3.102)$$

Численное интегрирование этого ДУ явным методом сводится к выполнению на шаге следующих операций:

для нулевого узла шаблона вычисляется вектор u_0 по (3.86);

по известному из предыдущего шага интегрирования значению вектора i_0 вычисляется вектор $u_0 - r_0 i_0$ и по формуле (3.102) — производная di_0/dt ;

по формуле (1.69) определяются приращение Δi_0 на шаге h ; по формуле (1.67) вычисляется значение вектора i_0 при $t=h$; по формуле $\psi_0 = L_0 i_0$ вычисляется значение вектора ψ_0 при $t=h$. При необходимости после каждого шага интегрирования может быть выполнен переход к векторам токов и потокосцеплений в фазных координатах, для чего необходимо при найденном значении угла γ вычислить по формулам (3.72), (3.73) матрицу Π^{-1} , по векторам i_{Π} , i_0 и ψ_{Π} , ψ_0 сформировать соответственно векторы i_{Π} и ψ_{Π}' , после чего воспользоваться формулами (3.76).

3.2.5. МОДЕЛЬ НАСЫЩЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЯСМ В КООРДИНАТАХ $d, q, 0$ НА БАЗЕ НЕЯВНЫХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Исходная САДУ, описывающая переходные процессы обобщенной ЯСМ в координатах d, q , состоит из ДУ

$$\frac{d\psi_{\Pi}}{dt} + \omega_r \Omega \psi_{\Pi} + r_{\Pi} i_{\Pi} - u_{\Pi} = 0; \quad (3.103)$$

$$-J \frac{d\omega_r}{dt} + M_s + M_s = 0; \quad \frac{d\gamma_r}{dt} = \omega_r, \quad (3.104)$$

алгебраических уравнений (3.31) — (3.37), (3.93), отражающих неявную ММХ машины, и уравнений (3.91), (3.92). Начальные условия имеют вид (3.97).

Замена в ДУ производных выражениями вида (1.73) приводит к алгебраическим уравнениям

$$\psi_{\Pi} + \frac{1}{b_0} \sum_{j=1}^{\xi} b_j \psi_{\Pi j} + \omega_r \frac{\Omega}{b_0} \psi_{\Pi} + \frac{r_{\Pi}}{b_0} i_{\Pi} - \frac{u_{\Pi}}{b_0} = 0; \quad (3.105)$$

$$-J \left(b_0 \omega_r + \sum_{j=1}^{\xi} b_j \omega_{rj} \right) + M_s + M_s = 0; \quad (3.106)$$

$$\omega_r = b_0 \gamma_r + \sum_{j=1}^{\xi} b_j \gamma_{rj}. \quad (3.107)$$

Будем решать полученную нелинейную САУ итерационным методом Ньютона. При этом линейная САУ для вычисления поправок зависимых переменных на k -й итерации имеет вид

$$\Delta \psi_{\Pi} + \Delta \omega_r \frac{\Omega}{b_0} \psi_{\Pi} + \omega_r \frac{\Omega}{b_0} \Delta \psi_{\Pi} + \frac{r_{\Pi}}{b_0} \Delta i_{\Pi} - \frac{\Delta u_{\Pi}}{b_0} = Q_{\Pi}; \quad (3.108)$$

$$-J b_0 \Delta \omega_r + \Delta M_s = Q_{\Pi}; \quad (3.109)$$

$$\Delta \omega_r = b_0 \Delta \gamma_r; \quad (3.110)$$

$$f_{\Pi}^{i_{\Pi}} \Delta i_{\Pi} + f_{\Pi}^{B_{\tau}} \Delta B_{\tau} + f_{\Pi}^F \Delta F + f_{\Pi}^{F_{z\tau}} \Delta F_{z\tau} = Q_{\Pi};$$

$$f_{\Pi}^{\Phi} \Delta \Phi + f_{\Pi}^{B_{\tau}} \Delta B_{\tau} + f_{\Pi}^F \Delta F = Q_{\Pi}; \quad (3.111)$$

$$\Delta F = R_{\Phi} \Delta \Phi; \quad \Delta F_{z\tau} = \rho_{z\tau} \Delta B_{\tau}; \quad \Delta i_{\Pi} = V_{\Pi\Pi} \Delta i_{\Pi}; \quad \Delta \Phi_{\Pi\Pi} = \Lambda_{\Pi\Pi} \Delta i_{\Pi}. \quad (3.112)$$

$$\Delta \psi_{\Pi} = \varphi_{\Pi}^{i_{\Pi}} \Delta i_{\Pi} + \varphi_{\Pi}^{\Phi} \Delta \Phi + \varphi_{\Pi}^{B_{\tau}} \Delta B_{\tau} + \varphi_{\Pi}^{\psi_{\Pi\Pi}} \Delta \psi_{\Pi\Pi}; \quad (3.113)$$

$$\Delta M_s = \xi_{\Pi}^{i_{\Pi}} \Delta i_{\Pi} + \xi_{\Pi}^{\psi_{\Pi\Pi}} \Delta \psi_{\Pi\Pi}; \quad (3.114)$$

$$\Delta u_{\Pi} = \Delta \Pi_{dq} \cdot u; \quad (3.115)$$

$$\Delta \Pi_{dq} = \Pi_{dq}^{\gamma} \Delta \gamma = p_0 \Pi_{dq}^{\gamma} \Delta \gamma_r = -\Omega \Pi_{dq} \Delta \gamma_r, \quad (3.116)$$

где

$$\Pi_{dq}^{\gamma} = \frac{d\Pi_{dq}}{d\gamma} = (\Pi_{dq1}^{\gamma}, \dots, \Pi_{dqM}^{\gamma}, 0, \dots, 0);$$

$$\Pi_{dqm}^{\gamma} = -\frac{2}{3} \zeta_m \left\| \begin{array}{l} \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m) \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m - x) \sin(\zeta_m \gamma - \beta_m + x) \\ \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m) \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m - x) \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m + x) \end{array} \right\| = -\Omega_m \Pi_{dqm} / p_0 \quad (m = \overline{1, M}). \quad (3.117)$$

Исключив в (3.109) поправку $\Delta \omega_r$ в соответствии с (3.110), имеем

$$-J b_0^2 \Delta \gamma_r + \Delta M_s = Q_{\Pi}; \quad (3.118)$$

Уравнения (3.111) приводятся с учетом (3.112), (3.55), (3.62), (3.66) к виду

$$\Delta \Phi = \Theta_{\Phi\Pi} \Delta i_{\Pi} + Q_{\Phi\Pi}; \quad \Delta B_{\tau} = \Theta_{B\Pi} \Delta i_{\Pi} + Q_{B\Pi}. \quad (3.119)$$

где

$$Q_{\Phi\Pi} = A_{\Phi\Pi}^{-1} (Q_{\Pi 4} + f_{\Pi 2}^{B_{\tau}} \lambda_{\tau} Q_{\Pi 3}); \quad Q_{B\Pi} = \lambda_{\tau} (f_{\Pi 1}^F R_{\Phi} Q_{\Phi\Pi} - Q_3); \quad (3.120)$$

Сопоставляя приведенные в (3.58) выражения для матриц $\xi_{\Pi}^{i_{\Pi}}$, $\xi_{\Pi}^{\psi_{\Pi\Pi}}$ с (3.29), (3.90), находим, что

$$\xi_{\Pi}^{i_{\Pi}} = -\frac{3}{2} \psi_{\Pi} \Omega; \quad \xi_{\Pi}^{\psi_{\Pi\Pi}} = \frac{3}{2} i_{\Pi} \Omega, \quad (3.121)$$

где ψ_{Π} , i_{Π} — векторы, изображаемые строками, получаемыми транспонированием столбцов (3.29).

Уравнения (3.108), (3.118) с учетом (3.112) — (3.116), (3.55), (3.56), (3.121) принимают вид

$$((E + \omega_r \Omega / b_0) L_{\Pi} + r_{\Pi} / b_0) \Delta i_{\Pi} + \Omega (\psi_{\Pi} + \Pi_{dq} u) \Delta \gamma_r = Q'_{\Pi};$$

$$\frac{3}{2} (i_{\Pi} \Omega L_{\Pi} - \psi_{\Pi} \Omega) \Delta i_{\Pi} - J b_0^2 \Delta \gamma_r = Q'_{\Pi}; \quad (3.122)$$

где E — единичная матрица размерности $2M+n+1$;

$$Q'_{\Pi 1} = Q_{\Pi 1} - (E + \omega_r \Omega / b_0) (\varphi_{\Pi}^0 Q_{\Phi \Pi} + \varphi_{\Pi}^{\beta} Q_{B \Pi});$$

$$Q'_{\Pi 2} = Q_{\Pi 2} - \frac{3}{2} i_{\Pi} \Omega (\varphi_{\Pi}^0 Q_{\Phi \Pi} + \varphi_{\Pi}^{\beta} Q_{B \Pi}) \quad (3.123)$$

— приведенные невязки.

Алгоритм решения нелинейной САУ (3.105)—(3.107), (3.31)—(3.37), (3.91)—(3.93), (2.34) требует выполнения на k -м итерационном цикле следующих операций:

для нулевого узла шаблона вычисляется момент M_a и вектор

по найденным на $(k-1)$ -й итерации значениям зависимых переменных (при $k=1$ — по результату выполнения предыдущего шага интегрирования) рассчитываются матрицы R_{Φ} , $\rho_{z\tau}$, ρ_{τ} , λ_{τ} по формулам (2.112)—(2.115), матрица $\Lambda_{\Pi\Pi}$ — по формуле (3.60), матрицы $\xi_{\Pi}^{I\Pi}$, $\xi_{\Pi}^{F\Pi}$ — по (3.121), после чего с учетом постоянных матриц $\varphi_{\Pi}^{I\Pi}$, $\varphi_{\Pi}^{F\Pi}$, φ_{Π}^{β} , φ_{Π}^{α} , $f_{\Pi}^{I\Pi}$, $f_{\Pi}^{F\Pi}$, f_{Π}^{β} , f_{Π}^{α} последовательно по формулам (3.65), (3.66), (3.62), (3.54)—(3.56) вычисляются матрица $A_{\Phi\Pi}$ и ММП $\Theta_{\Phi\Pi}$, $\Theta_{B\Pi}$, $\Theta_{\Pi\Pi}$, L_{Π} , K_{Π} ; матрица Π_{dq} — по формулам (3.92); вектор u_{Π} — по формуле (3.91); невязки $Q_{\Pi 1}$, ..., $Q_{\Pi 4}$ — как левые части уравнений (3.105), (3.106), (3.31), (3.32); приведенные невязки $Q_{\Phi\Pi}$, $Q_{B\Pi}$, $Q'_{\Pi 1}$, $Q'_{\Pi 2}$ — по формулам (3.120), (3.123) и формируются матричные коэффициенты системы уравнений (3.122);

система (3.122) решается численным способом относительно поправок Δi_{Π} , $\Delta \gamma_{\tau}$;

по формулам (3.119) вычисляются поправки $\Delta \Phi$, ΔB_{τ} ;

по формулам вида (1.77) вычисляется k -е приближение переменных i_{Π} , γ_{τ} , Φ , B_{τ} ;

по формулам (3.33)—(3.37), (3.93), (3.107), (2.34) вычисляется k -е приближение переменных F , $F_{z\tau}$, i_{Π} , $\Phi_{\Pi\Pi}$, ψ_{Π} , M_a , ω_r , γ .

Если искомый процесс является продолжением некоторого рассчитанного на ЭВМ предшествующего ему переходного процесса, то на втором этапе изложенного выше алгоритма при выполнении первой итерации для первого шага интегрирования следует принять в качестве нулевого приближения всех зависимых переменных их значения, найденные для последней точки упомянутого предшествующего процесса. Если же заданными являются только начальные условия (3.97), то соответствующие им начальные значения остальных зависимых переменных необходимо вычислить по невязкой ММХ, пользуясь методом, изложенным в 1.8.

Вначале решим нелинейную САУ

$$f_{\Pi} [i_{\Pi 0} \varepsilon_1, B_{\tau}, F, F_{z\tau}] = 0; \quad f_{\Pi 2} [\Phi, B_{\tau}, F] = 0; \quad (3.124)$$

$$F = F[\Phi]; F_{z\tau} = F_{z\tau}[B_{\tau}]; i_{\Pi\Pi} = V_{\Pi\Pi} i_{\Pi 0} \varepsilon_1; \Phi_{\Pi\Pi} = \Phi_{\Pi\Pi}[i_{\Pi\Pi}], \quad (3.125)$$

где $\varepsilon_1 \ll 1$ — значение параметра ε , достаточно малое для обеспечения сходимости итерационного метода Ньютона применительно

но к этой САУ. Этой нелинейной системе соответствует на каждой итерации линейная система

$$f_{\Pi 1}^{\beta} \Delta B_{\tau} + f_{\Pi 1}^F \Delta F + f_{\Pi 1}^{Fz\tau} \Delta F_{z\tau} = Q_{\Pi 3};$$

$$f_{\Pi 2}^{\Phi} \Delta \Phi + f_{\Pi 2}^{\beta} \Delta B_{\tau} + f_{\Pi 2}^F \Delta F = Q_{\Pi 4};$$

$$\Delta F = R_{\Phi} \Delta \Phi; \quad \Delta F_{z\tau} = \rho_{z\tau} \Delta B_{\tau}; \quad \Delta i_{\Pi\Pi} = 0, \quad \Delta \Phi_{\Pi 1} = \Lambda_{\Pi\Pi} \Delta i_{\Pi\Pi}.$$

Ее решение с учетом принятых в разделе 3.2.2 обозначений и формул имеет вид

$$\Delta \Phi = A_{\Phi\Pi}^{-1} (Q_{\Pi 4} + f_{\Pi 2}^{\beta} \lambda_{\tau} Q_{\Pi 3}), \quad \Delta B_{\tau} = \lambda_{\tau} (f_{\Pi 1}^F R_{\Phi} \Delta \Phi - Q_{\Pi 3}). \quad (3.126)$$

Алгоритм решения САУ (3.124), (3.125) требует выполнения на k -м итерационном цикле следующих операций:

по найденным на $(k-1)$ -й итерации значениям ВМК (на первой итерации — по их значениям, равным нулю) вычисляются матрицы R_{Φ} , $\rho_{z\tau}$, ρ_{τ} , λ_{τ} по формулам (2.112)—(2.115); невязки $Q_{\Pi 3}$, $Q_{\Pi 4}$ как левые части уравнений (3.124); матрица $A_{\Phi\Pi}$ — по формуле (3.65) и поправки $\Delta \Phi$, ΔB_{τ} по формулам (3.126);

по формулам вида (1.77) вычисляется k -е приближение векторов Φ , B_{τ} ;

по формулам (3.125), (3.37), (3.38) вычисляется k -е приближение остальных ВМК и переменных ψ_{Π} , M_a .

Найденное решение принимается в качестве нулевого приближения для САУ, получаемой в результате замены в (3.124), (3.125) значения ε_1 значением $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, и полученная САУ решается по изложенному выше алгоритму. Этот процесс продолжается до тех пор, пока параметр ε не достигнет значения $\varepsilon = 1$.

Для решения линейной САУ, описывающей процессы в нулевых контурах, составим в соответствии с (1.73) алгебраическое уравнение

$$b_0 L_0 i_0 + \sum_{j=1}^g b_j \psi_{0j} + r_0 i_0 - u_0 = 0. \quad (3.127)$$

Вектор токов нулевых контуров в нулевом узле шаблона здесь вычисляется по формуле

$$i_0 = (b_0 L_0 + r_0)^{-1} \left(u_0 - \sum_{j=1}^g b_j \psi_{0j} \right). \quad (3.128)$$

3.3. Моделирование ненасыщенной обобщенной ЯСМ в координатах d , q , θ

Изложенные в разделе 3.2 алгоритмы могут быть непосредственно применены также для моделирования ненасыщенной обобщенной ЯСМ. Однако при отсутствии насыщения магнитопровода

функции (3.33), (3.34), (3.36) являются линейными, поэтому матрицы внутренних ММП и матрица L_{Π} постоянны, что позволяет создать более экономичные по затратам машинного времени алгоритмы в первую очередь вследствие отсутствия необходимости вычисления ВМК.

Явная ММХ ненасыщенной обобщенной ЯСМ описывается уравнением

$$\psi_{\Pi} = L_{\Pi} i_{\Pi}. \quad (3.129)$$

Отметим, что элементы матрицы L_{Π} , отражающие взаимную индукцию между парами контуров, для одного из которых ось геометрической симметрии совпадает с продольной осью d геометрической симметрии индуктора, а для второго — с поперечной осью q , равны нулю.

Поскольку $\psi_{\Pi*} = (L_{\Pi} i_{\Pi})_* = i_{\Pi*} L_{\Pi*}$, то формула (3.93) электромагнитного момента принимает вид

$$M_{\theta} = -\frac{3}{2} i_{\Pi*} L_{\Pi*} \Omega_* L_{\Pi} i_{\Pi} = \frac{3}{2} i_{\Pi*} \Omega L_{\Pi} i_{\Pi}, \quad (3.130)$$

так как $\Omega_* = -\Omega$.

При использовании явного метода интегрирования целесообразно представить уравнение (3.88) в виде

$$\frac{di_{\Pi}}{dt} = L_{\Pi}^{-1} (u_{\Pi} - r_{\Pi} i_{\Pi} - \omega_r \Omega \psi_{\Pi}). \quad (3.131)$$

Подлежащая совместному интегрированию САДУ состоит из ДУ (3.131), (3.95) и алгебраических уравнений (3.129), (3.130), (3.91), (3.92), (2.34) при начальных условиях (3.97).

Алгоритм интегрирования этой САДУ предусматривает выполнение на шаге интегрирования следующих операций:

для нулевого узла шаблона вычисляются момент M_{θ} и вектор u ; по известным из предыдущего шага интегрирования значениям зависимых переменных (на первом шаге — по начальным условиям (2.34)) вычисляются в нулевом узле шаблона матрица Π_{dq} по формулам (3.92) и вектор u_{Π} по формуле (3.91), после чего формируются правые части ДУ (1.131), (3.95).

по формулам вида (1.69) вычисляются приращения Δi_{Π} , $\Delta \omega_r$, $\Delta \gamma_r$ на шаге h ;

по формулам вида (1.67) вычисляются значения i_{Π} , ω_r , γ_r при $t=h$;

по формулам (3.129), (3.130), (2.34) вычисляются значения ψ_{Π} , M_{θ} , γ при $t=h$.

Здесь в отличие от соответствующего алгоритма для насыщенной ЯСМ ДУ представлены в нормальной форме Коши, что обеспечивает дополнительно значительную экономию машинного времени.

Для нулевых контуров алгоритм решения явным методом интегрирования не отличается от изложенного в разделе 3.2.4.

При использовании неявного метода интегрирования подлежащая совместному решению САДУ состоит из ДУ (3.88), (3.104) и алгебраических уравнений (2.34), (3.91), (3.92), (3.129), (3.130). Она нелинейна, поскольку нелинейны уравнения (3.92), (3.130). Алгебраизовав ДУ с применением формул вида (1.73), имеем

$$b_0 \psi_{\Pi} + \sum_{j=1}^g b_j \psi_{\Pi j} + \omega_r \Omega \psi_{\Pi} + r_{\Pi} i_{\Pi} - u_{\Pi} = 0; \quad (3.132)$$

$$-J \left(b_0 \omega_r + \sum_{j=1}^g b_j \omega_{rj} \right) + M_{\theta} + M_{\theta} = 0; \quad b_0 \gamma_r + \sum_{j=1}^g b_j \gamma_{rj} = \omega_r.$$

Решение нелинейной САУ (3.132), (2.34), (3.91), (3.129), (3.130) итерационным методом Ньютона приводит к линейной САУ

$$\begin{aligned} b_0 \Delta \psi_{\Pi} + \Omega \psi_{\Pi} \Delta \omega_r + \omega_r \Omega \Delta \psi_{\Pi} + r_{\Pi} \Delta i_{\Pi} - \Delta u_{\Pi} &= Q_{\Pi}; \\ -J b_0 \Delta \omega_r + \Delta M_{\theta} &= Q_{\Pi 2}; \quad \Delta \omega_r = b_0 \Delta \gamma_r; \\ \Delta u_{\Pi} &= \Delta \Pi_{dq} u; \quad \Delta \Pi_{dq} = -\Omega \Pi_{dq} \Delta \gamma_r; \\ \Delta \psi_{\Pi} &= L_{\Pi} \Delta i_{\Pi}; \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$\Delta M_{\theta} = \frac{3}{2} (\Delta i_{\Pi*} \Omega L_{\Pi} i_{\Pi} + i_{\Pi*} \Omega L_{\Pi} \Delta i_{\Pi}) = \frac{3}{2} i_{\Pi*} (\Omega L_{\Pi} - L_{\Pi*} \Omega) \Delta i_{\Pi*};$$

Исключив в первых двух уравнениях системы (3.133) поправки $\Delta \omega_r$, $\Delta \psi_{\Pi}$, Δu_{Π} , ΔM_{θ} , $\Delta \Pi_{dq}$ в соответствии с остальными ее уравнениями, имеем

$$\begin{aligned} ((b_0 E + \omega_r \Omega) L_{\Pi} + r_{\Pi}) \Delta i_{\Pi} + \Omega (b_0 \psi_{\Pi} + \Pi_{dq} u) \Delta \gamma_r &= Q_{\Pi 1}; \\ \frac{3}{2} i_{\Pi*} (\Omega L_{\Pi} - L_{\Pi*} \Omega) \Delta i_{\Pi} - J b_0^2 \Delta \gamma_r &= Q_{\Pi 2}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Алгоритм решения упомянутой нелинейной САУ требует выполнения на k -м итерационном цикле следующих операций:

для нулевого узла шаблона вычисляется момент M_{θ} и вектор u ; по найденным на $(k-1)$ -й итерации значениям зависимых переменных (при $k=1$ — по результату выполнения предыдущего шага интегрирования, а при $k=1$ на первом шаге — по начальным условиям (3.97)) вычисляются матричные коэффициенты системы (3.134);

система (3.134) решается численным способом относительно поправок Δi_{Π} , $\Delta \gamma_r$;

по формулам вида (1.77) вычисляется k -е приближение переменных i_{Π} , γ_r ;

по формулам (2.34), (3.92), (3.91), (3.129), (3.130) вычисляется k -е приближение переменных ψ , Π_{dq} , u_{Π} , ψ_{Π} , M_{θ} .

Для нулевых контуров алгоритм решения неявным методом интегрирования совпадает с изложенным в разделе 3.2.5.

3.4. Моделирование установившихся режимов работы ЯСМ

Рассмотрим класс процессов ЯСМ общепромышленного назначения, удовлетворяющий следующим условиям:

угловая частота вращения $\omega = p_0 \omega_r$ ротора постоянна; приложенный к валу момент M_z и напряжение питания u_f обмотки возбуждения не зависят от времени; напряжения питания обмотки статора образуют симметричную трехфазную систему, т. е.

$$\begin{aligned} u_A &= U \cos(\omega t + \eta_u); & u_B &= U \cos(\omega t + \eta_u - \pi); \\ u_C &= U \cos(\omega t + \eta_u + \pi), \end{aligned} \quad (3.135)$$

где U — амплитуда фазного напряжения; η_u — начальная фаза напряжения в фазе A .

Полагая в преобразованиях (3.92) $\gamma = \omega t$, находим, что согласно (3.91) напряжения контуров, d, q соответственно

$$u_d = U \cos \eta_u; \quad u_q = U \sin \eta_u, \quad (3.136)$$

т. е. они не зависят от времени.

Тогда САДУ, описывающая переходные процессы ЯСМ в координатах d, q , не содержит функций времени, и поэтому ее решение (векторы потокосцеплений, токов и ВМК) не зависят от времени. При этом производные по времени скорости вращения ротора и вектора потокосцеплений равны нулю, и, следовательно, ДУ (3.103) вырождается в алгебраическое уравнение

$$\omega_r \Omega_{\Psi\Pi} + r_{\Pi} i_{\Pi} - u_{\Pi} = 0. \quad (3.137)$$

Из скалярных уравнений электрического состояния контуров демпферной обмотки, соответствующих векторному уравнению (3.137), вытекает, что токи этих контуров тождественно равны нулю.

Такие процессы ЯСМ будем называть установившимися режимами работы ЯСМ.

В установившихся режимах уравнения электрического состояния контуров статора имеют вид

$$-p_0 \omega_r \psi_d + r_1 i_d - u_d = 0; \quad p_0 \omega_r \psi_q + r_1 i_q - u_q = 0, \quad (3.138)$$

а неявная ММХ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \psi_d &= L_{\Sigma 1} i_d + \frac{p_0 C_{\Phi}}{a} \omega \sum_{j=1}^N B_j \cos \eta_j; \\ \psi_q &= L_{\Sigma 1} i_q + \frac{p_0 C_{\Phi}}{a} \omega \sum_{j=1}^N B_j \sin \eta_j; \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$(i_d \cos \eta_1 + i_q \sin \eta_1)(3\omega/2a) + W_f i_f / a_f - F_a - F_f - F_{z1} - p_{\Sigma 1} B_1 = 0;$$

$$(i_d \cos \eta_N + i_q \sin \eta_N)(3\omega/2a) + W_f i_f / a_f - F_a - F_f - F_{zN} - p_{\Sigma N} B_N = 0, \quad (3.140)$$

$$\Phi_a - C_{\Phi}(B_1 + \dots + B_N) = 0; \quad \Phi_f - \Phi_a - \Lambda_{\sigma f}(W_f i_f / a_f - F_f) = 0; \quad (3.141)$$

$$F_a = F_a[\Phi_a]; \quad F_f = F_f[\Phi_f]; \quad (3.142)$$

$$F_{z1} = F_{z1}[B_1]; \quad \dots; \quad F_{zN} = F_{zN}[B_N]; \quad (3.143)$$

$$M_{\Sigma} = \frac{3}{2} p_0 (\psi_d i_q - \psi_q i_d), \quad (3.144)$$

где ω, a — соответственно число последовательно соединенных витков и параллельных ветвей фазы.

В векторной записи система (3.138) — (3.143) принимает вид

$$u_y = \omega_r \Omega_y \Psi_y + r_y i_y; \quad (3.145)$$

$$\Psi_y = \Phi_y [i_y, B_{\tau}]; \quad (3.146)$$

$$f_{y1} [i_y, B_{\tau}, F, F_{z\tau}] = 0; \quad (3.147)$$

$$f_{y2} [\Phi, B_{\tau}, F] = 0; \quad (3.148)$$

$$F = F[\Phi]; \quad (3.149)$$

$$F_{z\tau} = F_{z\tau}[B_{\tau}], \quad (3.150)$$

где

$$i_y = (i_d, i_q, i_f)^*; \quad \Psi_y = (\psi_d, \psi_q)^*; \quad u_y = (u_d, u_q)^*; \quad (3.151)$$

$$r_y = \begin{vmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \Omega_y = \begin{vmatrix} 0 & -p_0 \\ p_0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.152)$$

Система (3.138) — (3.144) состоит из $2N+9$ уравнений и содержит в качестве неизвестных переменные $\omega_r, u_d, u_q, \psi_d, \psi_q, i_d, i_q, i_f, F_a, F_f, \Phi_a, \Phi_f, B_1, \dots, B_N, F_{z1}, \dots, F_{zN}, M_{\Sigma}$, общее число которых равно $2N+13$, т. е. оно превышает число уравнений на 4. Эти уравнения используются при расчетах любого установившегося режима ЯСМ, поэтому мы будем их называть базовыми. Для расчета каждого конкретного режима необходимо составить дополнительные уравнения, выделяющие этот режим из множества возможных режимов данной ЯСМ. Такие уравнения мы будем называть специфическими уравнениями ЯСМ для рассматриваемого режима, или специфическими уравнениями. Специфические уравнения могут содержать, кроме переменных, входящих в базовые уравнения, еще некоторое количество Y дополнительных переменных y_1, \dots, y_Y . Очевидно, что для разрешимости задачи расчета установившегося режима необходимо, чтобы количество специфических уравнений было равным $4+Y$. Представим систему $4+Y$ скалярных специфических уравнений одним векторным уравнением

$$\chi [i_y, \Psi_y, u_y, \omega_r, y] = 0 \quad (3.153)$$

и воспользуемся для решения нелинейной САУ (3.153), (3.145) — (3.150) итерационным методом Ньютона. При этом на k -й итерации необходимо решить линейную САУ

$$\chi^i \Delta i_y + \chi^{\psi_y} \Delta \psi_y + \chi^u \Delta u_y + \chi^{\omega_r} \Delta \omega_r + \chi^y \Delta y = Q_{y1}; \quad (3.154)$$

$$\Delta u_y = \Omega_y \psi_y \Delta \omega_r + \omega_r \Omega_y \Delta \psi_y + r_y \Delta i_y; \quad (3.155)$$

$$\Delta \psi_y = \varphi_y^i \Delta i_y + \varphi_y^{B_\tau} \Delta B_\tau; \quad (3.156)$$

$$f_{y1}^i \Delta i_y + f_{y1}^{B_\tau} \Delta B_\tau + f_{y1}^F \Delta F + f_{y1}^{F_{z\tau}} \Delta F_{z\tau} = Q_{y3};$$

$$f_{y2}^{\Phi} \Delta \Phi + f_{y2}^{B_\tau} \Delta B_\tau + f_{y2}^F \Delta F = Q_{y4}; \quad (3.157)$$

$$\Delta F = R_{\Phi} \Delta \Phi; \quad \Delta F_{z\tau} = \rho_{z\tau} \Delta B_\tau, \quad (3.158)$$

где

$$\chi^i = \frac{\partial \chi}{\partial i_y}; \quad \chi^{\psi_y} = \frac{\partial \chi}{\partial \psi_y}; \quad \chi^u = \frac{\partial \chi}{\partial u_y}; \quad \chi^{\omega_r} = \frac{\partial \chi}{\partial \omega_r}; \quad \chi^y = \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad (3.159)$$

— матрицы, размерности которых равны соответственно $(Y+4) \times 3$, $(Y+4) \times 2$, $(Y+4) \times 1$, $(Y+4) \times Y$, вычисляемые согласно конкретному содержанию специфических уравнений;

$$\varphi_y^i = \frac{\partial \Phi_y}{\partial i_y} = \begin{vmatrix} L_{z1} & 0 & 0 \\ 0 & L_{z1} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\varphi_y^{B_\tau} \frac{\partial \Phi_y}{\partial B_\tau} = p_0 C_0 \frac{\omega}{a} \begin{vmatrix} \cos \eta_1 & \dots & \cos \eta_N \\ \sin \eta_1 & \dots & \sin \eta_N \end{vmatrix}; \quad (3.160)$$

$$f_{y1}^i = \frac{\partial f_{y1}}{\partial i_y} = \frac{3\omega}{2a} \begin{vmatrix} \cos \eta_1 & \sin \eta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \eta_N & \sin \eta_N \end{vmatrix},$$

а матрицы $f_{y1}^{B_\tau}$, f_{y1}^F , $f_{y1}^{F_{z\tau}}$, f_{y2}^{Φ} , $f_{y2}^{B_\tau}$, f_{y2}^F совпадают соответственно с матрицами $f_1^{B_\tau}$, f_1^F , $f_1^{F_{z\tau}}$, f_2^{Φ} , $f_2^{B_\tau}$, f_2^F , приведенными в (2.110); R_{Φ} ,

$\rho_{z\tau}$ — диагональные матрицы, вычисляемые по (2.112), (2.113); Q_{y1} , Q_{y3} , Q_{y4} — невязки, вычисляемые как левые части уравнений (3.153), (3.147), (3.148) соответственно.

Уравнения (3.156), (3.157) после несложных преобразований с учетом (3.158) приводятся к виду

$$\Delta \Phi = \Theta_{\Phi y} \Delta i_y + Q_{\Phi y}; \quad \Delta B_\tau = \Theta_{B_\tau y} \Delta i_y + Q_{B_\tau y}; \quad (3.161)$$

где

$$\Delta \Phi_y = L_y \Delta i_y + Q_{\Phi y}, \quad (3.162)$$

$$\Theta_{\Phi y} = -A_{\Phi y}^{-1} f_{y2}^{B_\tau} \lambda_\tau f_{y1}^i = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_a}{\partial i_a} & \frac{\partial \Phi_a}{\partial i_q} & \frac{\partial \Phi_a}{\partial i_f} \\ \frac{\partial \Phi_f}{\partial i_a} & \frac{\partial \Phi_f}{\partial i_q} & \frac{\partial \Phi_f}{\partial i_f} \end{vmatrix};$$

$$\Theta_{B_\tau y} = \lambda_\tau (f_{y1}^i + f_{y1}^F R_{\Phi} \Theta_{\Phi y}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial i_a} & \frac{\partial B_1}{\partial i_q} & \frac{\partial B_1}{\partial i_f} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial B_N}{\partial i_a} & \frac{\partial B_N}{\partial i_q} & \frac{\partial B_N}{\partial i_f} \end{vmatrix}; \quad (3.163)$$

$$L_y = \varphi_y^i + \varphi_y^{B_\tau} \Theta_{B_\tau y} = \begin{vmatrix} L_{dd} & L_{dq} & L_{df} \\ L_{qd} & L_{qq} & L_{qf} \end{vmatrix} \quad (3.164)$$

— соответственно, внутренние и внешние ММП машины в установившихся режимах работы;

$$Q_{\Phi y} = A_{\Phi y}^{-1} (Q_{y4} + f_{y2}^{B_\tau} \lambda_\tau Q_{y3}); \quad Q_{B_\tau y} = \lambda_\tau (f_{y1}^F R_{\Phi} Q_{\Phi y} - Q_{y3}).$$

$$Q_{\Phi y} = \varphi_y^{B_\tau} Q_{B_\tau y}. \quad (3.165)$$

— приведенные невязки;

$$A_{\Phi y} = f_{y2}^{\Phi} + (f_{y2}^F + f_{y2}^{B_\tau} \lambda_\tau f_{y1}^F) R_{\Phi} \quad (3.166)$$

— квадратная матрица размерности 2.

Уравнение (3.154) принимает с учетом (3.155), (3.156), (3.162) вид

$$B_{\chi i} \Delta i_y + B_{\chi \omega} \Delta \omega_r + \chi^y \Delta y = Q'_\chi; \quad (3.167)$$

где

$$B_{\chi i} = \chi^i + \chi^{\psi_y} L_y + \chi^u (\omega_r \Omega_y L_y + r_y); \quad B_{\chi \omega} = \chi^u \Omega_y \psi_y + \chi^{\omega_r}; \quad (3.168)$$

$$Q'_\chi = Q_{y1} (\chi^{\psi_y} + \chi^u \omega_r \Omega_y) Q_{\psi_y}. \quad (3.169)$$

Алгоритм решения нелинейной САУ (3.153), (3.145)—(3.150) требует выполнения на k -м итерационном цикле следующих операций:

по найденным на $(k-1)$ -й итерации значениям зависимых переменных (при $k=1$ — по задаваемому их нулевому приближению) вычисляются матрицы R_{Φ} , $\rho_{z\tau}$, ρ_τ , λ_τ по формулам (2.112)—(2.115); с учетом постоянных матриц φ_y^i , $\varphi_y^{B_\tau}$, f_{y1}^i , $f_{y1}^{B_\tau}$, f_{y1}^F , $f_{y1}^{F_{z\tau}}$,

$f_{y2}^{B_\tau}$, f_{y2}^F вычисляются матрица $A_{\Phi y}$ и ММП $\Theta_{\Phi y}$, $\Theta_{B_\tau y}$, L_y — по формулам (3.166), (3.163), (3.164); матрицы χ^i , χ^{ψ_y} , χ^u , χ^{ω_r} , χ^y — по формулам (3.159); невязки Q_{y1} , Q_{y3} , Q_{y4} — как левые части уравнений (3.153), (3.147), (3.148); приведенные невязки $Q_{\Phi y}$, $Q_{B_\tau y}$, $Q_{\psi y}$, Q'_χ — по формулам (3.165), (3.169) и матрицы $B_{\chi i}$, $B_{\chi \omega}$ — по формулам (3.168);

уравнение (1.167) решается численным способом относительно поправок Δi_y , $\Delta \omega_r$, Δy ;

по формулам (3.161) вычисляются поправки $\Delta \Phi$, ΔB_τ ;

по формулам вида (1.77) вычисляется k -е приближение переменных i_y , ω_r , y , Φ , B_τ ;

по формулам (3.150), (3.149), (3.146), (3.145) вычисляется k -е приближение переменных $F_{z\tau}$, F , ψ_y , u_y .

Как следует из вышеизложенного, особенности расчета конкретных установившихся режимов ЯСМ сводятся к составлению и обработке соответствующих этим режимам специфических уравнений.

Отметим, что при составлении специфических уравнений находят применение соотношения

$$\begin{aligned} u_d &= -U \sin \vartheta; & u_q &= -U \cos \vartheta; \\ U^2 &= u_d^2 + u_q^2; & i^2 &= i_d^2 + i_q^2; \\ P &= \frac{3}{2}(u_d i_d + u_q i_q); & Q &= \frac{3}{2}(u_q i_d - u_d i_q), \end{aligned}$$

где U — амплитуда напряжения фазы; i — амплитуда тока фазы; $\vartheta = 3\pi/2 - \eta_u$ — угол выбега ротора; P, Q — соответственно активная и реактивная мощности ЯСМ.

Проиллюстрируем составление специфических частей алгоритмов расчета конкретных режимов на примерах.

Пример 1. Установившийся режим задан значениями активного сопротивления r_e и индуктивности L_e нагрузки, скоростью вращения $\omega_{г3}$ и током возбуждения i_{f3} .

Специфическими уравнениями здесь являются

$$\begin{aligned} u_d + r_e i_d - p_0 \omega_r L_e i_q &= 0; & u_q + r_e i_q + p_0 \omega_r L_e i_d &= 0; \\ \omega_r - \omega_{г3} &= 0; & i_f - i_{f3} &= 0. \end{aligned}$$

В рассматриваемом примере $Y=0$, поэтому вектор y отсутствует, а матрицы (3.159) имеют вид

$$\begin{aligned} \chi^t y &= \begin{vmatrix} r_e & -p_0 \omega_r L_e & 0 \\ p_0 \omega_r L_e & r_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; & \chi^u y &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \\ \chi^{\omega_r} &= \begin{vmatrix} -p_0 L_e i_q \\ p_0 L_e i_d \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; & \chi^{\psi_y} &= 0. \end{aligned}$$

Пример 2. Режим задан значениями параметров r_e, L_e нагрузки, напряжения u_3 на нагрузке и электромагнитного момента $M_{э3}$.

Специфическими уравнениями здесь являются

$$\begin{aligned} u_d + r_e i_d - p_0 \omega_r L_e i_q &= 0; & u_q + r_e i_q + p_0 \omega_r L_e i_d &= 0; \\ u_d^2 + u_q^2 - u_3^2 &= 0; & \psi_d i_q - \psi_q i_d - \frac{2}{3p_0} M_{э3} &= 0. \end{aligned}$$

В этом примере вектор y также отсутствует, а матрицы (3.159) имеют вид

$$\chi^t y = \begin{vmatrix} r_e & -p_0 \omega_r L_e & 0 \\ p_0 \omega_r L_e & r_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \chi^u y = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\chi^{\omega_r} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u_d & 2u_q \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \chi^{\psi_y} = \begin{vmatrix} -p_0 L_e i_q \\ p_0 L_e i_d \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Пример 3. Режим задан значениями скорости $\omega_{г3}$, тока статора i_s и электромагнитного момента $M_{э3}$ при условии, что ток возбуждения регулируется в функции напряжения u и угла ϑ выбега ротора по заданному закону $i_f = i_f[u, \vartheta]$.

Специфические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} u_d + u \sin \vartheta &= 0; & u_q + u \cos \vartheta &= 0; \\ i_d^2 + i_q^2 - i_s^2 &= 0; & i_f - i_f[u, \vartheta] &= 0; \end{aligned}$$

$$\omega_r - \omega_{г3} = 0; \quad \psi_d i_q - \psi_q i_d - \frac{2}{3p_0} M_{э3} = 0.$$

Здесь $y = (u, \vartheta)$, а матрицы (3.159) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \chi^t y &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i_d & 2i_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\psi_q & \psi_d & 0 \end{vmatrix}; & \chi^u y &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ i_q & -i_d \end{vmatrix}; & \chi^{\omega_r} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \\ \chi^{\omega_r} &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; & \chi^{\psi_y} &= \begin{vmatrix} \sin \vartheta & u \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & -u \sin \vartheta \\ 0 & 0 \\ \partial i_f[u, \vartheta] / \partial u & \partial i_f[u, \vartheta] / \partial \vartheta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Изложенная выше методика, очевидно, может быть применена также и для расчетов установившихся режимов ЯСМ, содержащих на статоре несколько симметричных обмоток различной полюсности.

3.5. Общие свойства преобразования Парка и моделей ЯСМ в координатах $d, q, 0$

Применение преобразований Парка полезно не только с точки зрения упрощения алгоритмов расчета электромеханических процессов и режимов ЯСМ и сокращения затрат машинного времени,

но и в теоретическом плане, так как эти преобразования представляют собой математический аппарат, способствующий более глубокому пониманию физической сущности электромагнитных связей в машине. Ниже мы остановимся на общих свойствах преобразования Парка и вытекающих из них следствиях, имеющих наиболее существенное значение в указанном выше смысле.

Вначале определим геометрическое содержание преобразований Парка на примере двухполюсной ЯСМ с одной трехфазной обмоткой на статоре.

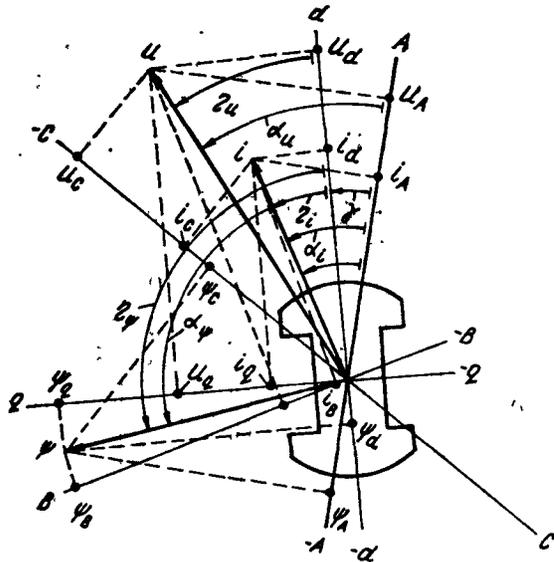


Рис. 3.1. Геометрическая интерпретация преобразований Парка.

Условимся под геометрической осью фазы понимать направление в плоскости поперечного сечения машины, проведенное от оси вращения в точку расточки статора, в которой функция распределения проводников этой фазы достигает положительного максимума. Для трехфазной двухполюсной ЯСМ взаимное расположение геометрических осей фаз A, B, C показано на рис. 3.1.

Зафиксируем на индукторе декартову прямоугольную систему координат d, q таким образом, чтобы ось d была совмещена с геометрической осью полюса, для которого при положительном токе и обмотке возбуждения магнитный поток, создаваемый током возбуждения, направлен от полюса к якорю (рис. 3.1).

Пусть токи фаз удовлетворяют условию

$$i_A + i_B + i_C = 0, \quad (3.170)$$

что соответствует отсутствию нулевого проводника при соединении фаз в звезду. Из (3.170) с учетом (3.10) находим, что $i_0 = 0$.

Введем понятие изображающего вектора тока статора как вектора \vec{i} , проекции которого на оси фаз численно равны мгновенным значениям токов фаз, т. е.

$$i_A = i \cos \alpha; \quad i_B = i \cos(\alpha_1 - \alpha); \quad i_C = i \cos(\alpha_1 + \alpha), \quad (3.171)$$

где α_1 — угол наклона вектора \vec{i} к оси фазы A .

Подставив выражения (3.171) в (3.10), с учетом очевидного на рис. 3.1 равенства

$$\alpha_1 = \eta_i + \gamma \quad (3.172)$$

находим, что

$$i_d = i \cos \eta_i; \quad i_q = i \sin \eta_i, \quad (3.173)$$

т. е. токи продольного и поперечного контуров статора численно равны проекциям изображающего вектора тока статора на оси d и q соответственно.

Таким образом, геометрическое содержание преобразований Парка для токов обмотки якоря состоит в следующем: если рассматривать токи фаз, удовлетворяющие условию (3.170), как проекции изображающего вектора \vec{i} на неподвижные геометрические оси фаз, то токи продольного и поперечного контуров якоря следует рассматривать как проекции этого же вектора на вращающиеся вместе с индуктором геометрические оси d и q .

Если токи фаз не удовлетворяют условию (3.170), то следует ввести в рассмотрение токи

$$i_A' = i_A - i_0; \quad i_B' = i_B - i_0; \quad i_C' = i_C - i_0,$$

для которых, как легко убедиться, может быть установлено указанное выше геометрическое содержание преобразований Парка.

Аналогичные результаты могут быть получены для потокосцеплений и напряжений обмотки якоря, для чего достаточно во всех приведенных выше рассуждениях заменить термин «ток» термином «потокосцепление» либо «напряжение» соответственно. Необходимые для этого построения представлены на рис. 3.1.

В разделе 3.2.1 токи i_d, i_q условно были названы соответственно током продольного контура якоря и током поперечного контура якоря, и аналогичные термины были приняты для потокосцеплений ψ_d, ψ_q и напряжений u_d, u_q . Выясним, в чем состоит условность этих терминов.

С этой целью сопоставим выражения рабочих потокосцеплений фазы A (полагая для краткости $\beta = 0$) и продольного контура якоря, имеющие соответственно вид

$$\psi_{\delta A} = \frac{p_0 c_\Phi \omega}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \cos(\eta + \gamma) d\eta; \quad (3.174)$$

$$\psi_{\delta d} = \frac{p_0 c_\Phi \omega}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \cos \eta d\eta. \quad (3.175)$$

Выражение (3.174) получено на основе того, что фаза A представляет собой физически существующий электрический контур, для которого функция распределения проводников относительно неподвижного якоря имеет вид $w \cos \alpha = w \cos(\eta + \gamma)$. Интерпретируя в (3.175) произведение $w \cos \eta$ как функцию распределения проводников продольного контура якоря, можно было бы заключить, что он физически осуществим как неподвижный относительно индуктора электрический контур с гармоническим распределением проводников, для которого амплитуда функции распределения проводников равна w .

А теперь сопоставим уравнения (3.4) и (3.15) (также полагая $\beta=0$). В (3.4) из первого члена $i_A(w/a) \cos(\eta + \gamma)$ вытекает, что максимальное значение полного тока, создаваемого фазой A и охватываемого контуром интегрирования XX' , при $\gamma=0$ равно $i_A w/a$. В (3.15) из члена $i_d(3w/2a) \cos \eta$ вытекает, что максимальное значение полного тока, создаваемого продольным контуром якоря и охватываемого контуром интегрирования XX' , равно $i_d(3w/2a)$, и, следовательно, амплитуда функции распределения проводников продольного контура якоря должна быть равной $3w/2a$, что противоречит результату, полученному выше на основе уравнения (3.175). Объяснение этого противоречия следует искать в обоснованности попытки приписывать продольному контуру якоря физическое содержание.

Таким образом, говорить о продольном и поперечном контурах якоря как о физически реализуемых электрических контурах, вращающихся вместе с индуктором и эквивалентирующих трехфазную обмотку якоря, нельзя. Иными словами, преобразованию Парка нельзя придать физическую интерпретацию.

Изложенные выше рассуждения объясняют условность понятий продольного и поперечного контуров якоря.

Полученный результат важен не только в методологическом отношении как конкретизирующий возможности использования описания ЯСМ в координатах d, q для физического объяснения электромагнитных процессов, но и в практическом плане, поскольку он указывает на невозможность создания физической модели ЯСМ в системе координат, соответствующей преобразованиям Парка.

Электрическая мощность трехфазной обмотки якоря определяется по формуле

$$p = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C. \quad (3.176)$$

Подставив в (3.176) вместо напряжений и токов фаз их выражения через преобразованные переменные, приходим к формуле

$$p = \frac{3}{2} (u_d i_d + u_q i_q) - 3u_0 i_0, \quad (3.177)$$

которая по своей структуре отличается от (3.176) наличием числовых коэффициентов в произведениях напряжений и токов одноименных контуров. Таким образом, преобразование Парка не обеспечивает инвариантности мощности.

Из магнитно-линейной теории ЯСМ известно [9, 19, 109], что

$$L_{jA} = \frac{3}{2} L_{dA}; \quad L_{jq} = \frac{3}{2} L_{dq} \quad (j = s+1, s+n, f) \quad (3.178)$$

и, следовательно, матрица индуктивностей в координатах d, q несимметрична. Соотношения (3.178) наблюдаются и для насыщенной ЯСМ. Чтобы убедиться в этом аналитическим путем, достаточно представить векторы i_Π, ψ в виде

$$i_\Pi = (i_{c\Pi}; i_{p\Pi})_*; \quad \psi_\Pi = (\psi_{c\Pi}, \psi_{p\Pi})_*, \quad (3.179)$$

где

$$i_{c\Pi} = (i_d, i_q)_*; \quad i_{p\Pi} = (i_{s+1}, \dots, i_{s+n}, i_f)_*; \\ \psi_{c\Pi} = (\psi_d, \psi_q)_*; \quad \psi_{p\Pi} = (\psi_{s+1}, \dots, \psi_{s+n}, \psi_f)_*. \quad (3.180)$$

выполнить соответствующее разделение на блоки для матриц, используемых при вычислении ММП машины в координатах d, q , и представить матрицу L_Π в виде

$$L_\Pi = \begin{vmatrix} \partial \psi_{c\Pi} / \partial i_{c\Pi} & \partial \psi_{c\Pi} / \partial i_{p\Pi} \\ \partial \psi_{p\Pi} / \partial i_{c\Pi} & \partial \psi_{p\Pi} / \partial i_{p\Pi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{cc\Pi} & L_{cp\Pi} \\ L_{pc\Pi} & L_{pp\Pi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{cc\Pi} & L_{cp\Pi} \\ \frac{3}{2} L_{cp\Pi} & L_{pp\Pi} \end{vmatrix}.$$

Перечисленные выше недостатки преобразования Парка — физическая нереализуемость эквивалентирования трехфазной обмотки якоря системой взаимно перпендикулярных вращающихся вместе с индуктором электрических контуров, неинвариантность мощности и несимметрия матрицы L_Π индуктивностей — являются следствием того, что матрица Парка неортогональна ($\det \Pi_m = 2/(3\sqrt{3}) \neq 1$; $\Pi_m^{-1} \neq \Pi_m^*$).

В заключение остановимся кратко на математической трактовке вопроса о правомерности применения преобразований Парка для ЯСМ с насыщающимися магнитопроводами и при переменной частоте вращения [109].

С формальной точки зрения преобразование Парка представляет собой один из видов замены переменных. Известно, что единственное условие, предъявляемое к замене исходной совокупности переменных новой их совокупностью, состоит в том, чтобы после решения задачи относительно новых переменных можно было перейти обратно к исходным переменным (в противном случае применяемое преобразование не имело бы практического смысла). Это условие математически формулируется как требование, чтобы матрица Якоби для применяемого преобразования была невырожденной [37]. В данном случае матрица Якоби, как это видно из (3.75), совпадает с матрицей Π . Но последняя является невырожденной, поэтому преобразование Парка допустимо всегда (независимо от характера магнитных связей в машине, закона изменения частоты ее вращения и любых иных факторов) и, следовательно, вопрос о правомерности преобразований Парка должен быть изъят из рассмотрения.

3.6. Ортогональное преобразование Парка

Отмеченные в предыдущем подразделе недостатки описания обобщенной ЯСМ в координатах Парка устраняются, если в качестве матрицы преобразования принять матрицу

$$\Pi_{\sim} = \text{diag}(\Pi_{1\sim}, \dots, \Pi_{m\sim}, \dots, \Pi_{M\sim}, 1, \dots, 1), \quad (3.81)$$

где

$$\Pi_{m\sim} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m) & \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m - \kappa) \\ -\sin(\zeta_m \gamma - \beta_m) & -\sin(\zeta_m \gamma - \beta_m - \kappa) \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m + \kappa) \\ -\sin(\zeta_m \gamma - \beta_m + \kappa) \\ 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}. \quad (3.182)$$

Обратная ей матрица имеет вид

$$\Pi_{m\sim}^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m) & -\sin(\zeta_m \gamma - \beta_m) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m - \kappa) & -\sin(\zeta_m \gamma - \beta_m - \kappa) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\zeta_m \gamma - \beta_m + \kappa) & -\sin(\zeta_m \gamma - \beta_m + \kappa) & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix},$$

т. е. $\Pi_{m\sim}^{-1} = \Pi_{m\sim}^*$, и, следовательно, матрица $\Pi_{m\sim}$ ортогональна.

Преобразование координат с помощью матрицы $\Pi_{m\sim}$ будем называть ортогональным преобразованием Парка, поскольку оно является обобщением ортогонального преобразования [109] на случай ЯСМ с произвольным числом трехфазных обмоток, имеющих числа пар полюсов, отличные от числа пар полюсов индуктора. Переменные состояния, получаемые в результате ортогонального преобразования Парка, будем отмечать дополнительным индексом « \sim », а соответствующую математическую модель ЯСМ будем называть моделью в координатах $d_{\sim}, q_{\sim}, 0_{\sim}$.

Модель обобщенной ЯСМ в координатах $d_{\sim}, q_{\sim}, 0_{\sim}$ строится по аналогии с моделью в координатах $d, q, 0$, поэтому мы не будем рассматривать ее детально, а лишь без доказательства приведем для нее основные соотношения, ограничиваясь машинной с одной трехфазной обмоткой на статоре, полагая $\zeta = 1$. Для такой машины контуры ротора нумеруются индексами $3, \dots, 2+n, f$.

Неявная ММХ машины в координатах d_{\sim}, q_{\sim} описывается системой скалярных уравнений

$$(i_{d\sim} \cos \eta_j + i_{q\sim} \sin \eta_j) \sqrt{3/2} \omega/a + W_3[\eta_j] i_3/a_3 + \dots + W_{2+n}[\eta_j] i_{2+n}/a_{2+n} + W_f i_f/a_f - F_a - F_f - F_{2f} - p_{\phi j} B_j = 0 \quad (j = \overline{1, N}); \quad (3.183)$$

$$\Phi_a - C_{\Phi} (B_1 + \dots + B_N) = 0; \quad \Phi_f - \Phi_a - \Lambda_{\sigma f} (W_f i_f/a_f - F_f) = 0; \quad (3.184)$$

$$F_a = F_a[\Phi_a]; \quad F_f = F_f[\Phi_f]; \quad (3.185)$$

$$F_{z1} = F_{z1}[B_1]; \quad \dots; \quad F_{zN} = F_{zN}[B_N]; \quad (3.186)$$

$$i_{n1} = V_{3,1} i_3/a_3 + \dots + V_{2+n,1} i_{2+n}/a_{2+n};$$

$$i_{nR} = V_{3,R} i_3/a_3 + \dots + V_{2+n,R} i_{2+n}/a_{2+n}; \quad (3.187)$$

$$\Phi_{n1} = \Phi_{n1}[i_{n1}]; \quad \dots; \quad \Phi_{nR} = \Phi_{nR}[i_{nR}]; \quad (3.188)$$

$$\psi_{d\sim} = L_{\Sigma 1} i_{d\sim} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{p_{\phi} C_{\Phi}}{a} \omega \sum_{j=1}^N B_j \cos \eta_j;$$

$$\psi_{q\sim} = L_{\Sigma 1} i_{q\sim} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{p_{\phi} C_{\Phi}}{a} \omega \sum_{j=1}^N B_j \sin \eta_j;$$

$$\psi_3 = L_{\Sigma 3,3} i_3 + \dots + L_{\Sigma 3,2+n} i_{2+n} +$$

$$+ (V_{3,1} \Phi_{n1} + \dots + V_{3,R} \Phi_{nR}) \frac{2p_{\phi}}{a_3} + \frac{p_{\phi} C_{\Phi}}{a_3} \sum_{j=1}^N B_j W_3[\eta_j];$$

$$\psi_{2+n} = L_{\Sigma 2+n,3} i_3 + \dots + L_{\Sigma 2+n,2+n} i_{2+n} +$$

$$+ (V_{2+n,1} \Phi_{n1} + \dots + V_{2+n,R} \Phi_{nR}) \frac{2p_{\phi}}{a_{2+n}} + \frac{p_{\phi} C_{\Phi}}{a_{2+n}} \sum_{j=1}^N B_j W_{2+n}[\eta_j];$$

$$\psi_f = L_{\Sigma f} i_3 + \dots + L_{\Sigma f,2+n} i_{2+n} + \Phi_f p_{\phi} W_f/a_f; \quad (3.189)$$

$$M_3 = p_{\phi} (\psi_{d\sim} i_{q\sim} - \psi_{q\sim} i_{d\sim}), \quad (3.190)$$

где $L_{\Sigma 1}$ — индуктивность рассеяния обмотки якоря в координатах d_{\sim}, q_{\sim} , определяемая по формуле (3.19).

Подсистемы (3.183)–(3.190) описываются соответственно векторными уравнениями

$$f_{\Pi 1\sim} [i_{\Pi\sim}, B_{\tau}, F_{z\tau}, F] = 0; \quad (3.191)$$

$$f_{\Pi 2\sim} [\Phi, B_{\tau}, F] = 0; \quad (3.192)$$

$$F = F[\Phi]; \quad (3.193)$$

$$F_{z\tau} = F_{z\tau}[B_{\tau}]; \quad (3.194)$$

$$i_{\Pi\sim} = V_{\Pi\sim} i_{\Pi\sim}; \quad (3.195)$$

$$\Phi_{\Pi\sim} = \Phi_{\Pi\sim}[i_{\Pi\sim}]; \quad (3.196)$$

$$\psi_{\Pi\sim} = \psi_{\Pi\sim}[i_{\Pi\sim}, \Phi, B_{\tau}, \Phi_{\Pi\sim}]; \quad (3.197)$$

$$M_3 = \psi_{\Pi\sim} \Omega i_{\Pi\sim}; \quad (3.198)$$

где

$$i_{\Pi\sim} = (i_{d\sim}, i_{q\sim}, i_3, \dots, i_{2+n}, i_f)_{\sim};$$

$$\psi_{\Pi\sim} = (\psi_{d\sim}, \psi_{q\sim}, \psi_3, \dots, \psi_{2+n}, \psi_f)_{\sim}; \quad (3.199)$$

$$V_{n\Pi\sim} = \begin{vmatrix} V_{3,1} & \dots & V_{2+n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{3,R} & \dots & V_{2+n,R} \end{vmatrix}.$$

Явная внешняя ММХ отражает векторные функции $\psi_{\Pi\sim} = \psi_{\Pi\sim} [i_{\Pi\sim}]$; $M_s = M_s [i_{\Pi\sim}]$, (3.200)

а явная внутренняя ММХ — векторную функцию $m_{\Pi} = m_{\Pi} [i_{\Pi\sim}]$ (3.201)

где содержание вектора m_{Π} определяется по (3.44). ММП вычисляется по рекуррентным формулам

$$\Theta_{\Phi\Pi\sim} = \frac{d\Phi}{di_{\Pi\sim}} = -A_{\Phi\Pi\sim}^{-1} f_{\Pi 2\sim}^{B\tau} \lambda_{\tau} f_{\Pi 1\sim}^{\prime};$$

$$\Theta_{F\Pi\sim} = \frac{dF}{di_{\Pi\sim}} = R_{\Phi} \Theta_{\Phi\Pi\sim};$$

$$\Theta_{B\Pi\sim} = \frac{dB_{\tau}}{di_{\Pi\sim}} = \lambda_{\tau} (f_{\Pi 1\sim}^{\prime} + f_{\Pi 1\sim}^{\prime} R_{\Phi} \Theta_{\Phi\Pi\sim}); \quad (3.202)$$

$$\Theta_{z\Pi\sim} = \frac{dF_{z\tau}}{di_{\Pi\sim}} = \rho_{z\tau} \Theta_{B\Pi\sim}$$

$$\Theta_{i\Pi\sim} = \frac{di_{n\Pi}}{di_{\Pi\sim}} = V_{n\Pi\sim};$$

$$\Theta_{n\Pi\sim} = \frac{d\Phi_{n\Pi}}{di_{\Pi\sim}} = \Lambda_{n\Pi} \Theta_{i\Pi\sim};$$

$$L_{\Pi\sim} = \frac{d\psi_{\Pi\sim}}{di_{\Pi\sim}} = \varphi_{\Pi 1\sim}^{\prime} + \varphi_{\Pi 1\sim}^{\Phi} \Theta_{\Phi\Pi\sim} + \varphi_{\Pi 2\sim}^{B\tau} \Theta_{B\Pi\sim} + \varphi_{\Pi 2\sim}^{\Phi_{n\Pi}} \Theta_{n\Pi\sim};$$

$$K_{\Pi\sim} = \frac{\partial M_s}{\partial i_{\Pi\sim}} = -\psi_{\Pi\sim} \Omega + i_{\Pi\sim} \Omega L_{\Pi\sim},$$

где $A_{\Phi\Pi\sim} = f_{\Pi 2\sim}^{\Phi} + (f_{\Pi 2\sim}^{\prime} + f_{\Pi 2\sim}^{B\tau} \lambda_{\tau} f_{\Pi 1\sim}^{\prime}) R_{\Phi}$;

$$f_{\Pi 1\sim}^{\prime} = \frac{\partial f_{\Pi 1\sim}}{\partial i_{\Pi\sim}} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{w}{a} \cos \eta_1 & \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{w}{a} \sin \eta_1 & \frac{W_3 [\eta_1]}{a_3} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{w}{a} \cos \eta_N & \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{w}{a} \sin \eta_N & \frac{W_3 [\eta_N]}{a_3} \dots \\ \dots & \frac{W_{2+n} [\eta_1]}{a_{2+n}} & \frac{W_f}{a_f} \\ \dots & \frac{W_{2+n} [\eta_N]}{a_{2+n}} & \frac{W_f}{a_f} \end{vmatrix};$$

$$\varphi_{\Pi\sim}^{B\tau} = \frac{\partial \Phi_{\Pi\sim}}{\partial B_{\tau}} = \rho_0 C_{\Phi} \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{w}{a} \cos \eta_1 & \dots & \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{w}{a} \sin \eta_N \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{w}{a} \sin \eta_1 & \dots & \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{w}{a} \sin \eta_N \\ \frac{W_3 [\eta_1]}{a_3} & \dots & \frac{W_3 [\eta_N]}{a_3} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{W_{2+n} [\eta_1]}{a_{2+n}} & \dots & \frac{W_{2+n} [\eta_N]}{a_{2+n}} \\ 0 & & 0 \end{vmatrix}; \quad (3.203)$$

матрицы $f_{\Pi 1\sim}^{B\tau}$, $f_{\Pi 1\sim}^{Fz\tau}$, $f_{\Pi 1\sim}^F$, $f_{\Pi 2\sim}^{\Phi}$, $f_{\Pi 2\sim}^{B\tau}$, $f_{\Pi 2\sim}^F$, совпадают соответственно с матрицами $f_1^{B\tau}$, $f_1^{Fz\tau}$, f_1^F , f_2^{Φ} , $f_2^{B\tau}$, f_2^F , вычисляемыми по (2.110), а матрицы $\varphi_{\Pi 1\sim}^{\prime}$, $\varphi_{\Pi 1\sim}^{\Phi}$, $\varphi_{\Pi 2\sim}^{\Phi_{n\Pi}}$ совпадают соответственно с матрицами φ_{Π}^{\prime} , φ_{Π}^{Φ} , $\varphi_{\Pi}^{\Phi_{n\Pi}}$, вычисляемыми по (3.58);

$$\Omega_{\sim} = \text{diag} \left(\begin{vmatrix} 0 & -p_{\Phi} \\ p_{\Phi} & 0 \end{vmatrix}, 0, \dots, 0 \right). \quad (3.204)$$

Здесь, в отличие от модели ЯСМ в координатах Парка, матрица $L_{\Pi\sim}$ симметрична. Чтобы убедиться в этом аналитическим путем, достаточно представить векторы $i_{\Pi\sim}$, $\psi_{\Pi\sim}$ по аналогии с (3.179), (3.180) и выполнить соответствующее разделение на блоки для матриц, используемых при вычислении ММП в координатах d_{\sim} , q_{\sim} .

Электрическая мощность обмотки статора определяется в координатах d_{\sim} , q_{\sim} , 0_{\sim} по формуле

$$p = u_{d\sim} i_{d\sim} + u_{q\sim} i_{q\sim} + u_{0\sim} i_{0\sim}, \quad (3.205)$$

которая имеет идентичную структуру с формулой (3.176) для мощности в фазных координатах и, следовательно, ортогональное преобразование Парка обеспечивает инвариантность мощности.

Проведя анализ, аналогичный изложенному в разделе 3.5, легко убедиться, что контуры якоря в координатах d_{\sim} , q_{\sim} можно интерпретировать как физически реализуемые вращающиеся вместе с индуктором взаимно перпендикулярные контуры, амплитуды функций распределения проводников которых равны $w\sqrt{3}/2$, так как здесь, в отличие от модели ЯСМ в координатах Парка, множители $\sqrt{3}/2$ входят как в выражения потокосцеплений контуров якоря, так и в уравнение, составленное по закону полного тока для контура интегрирования ХХ'. Следовательно, отмеченная в разделе 3.7 условность терминов «продольный контур якоря» и «поперечный контур якоря» здесь исчезает, и ортогональное преобразо-

вание Парка может быть принято в основу осуществления физической модели ЯСМ с взаимно неподвижными контурами.

Уравнение электрического состояния ЯСМ в координатах $d_{\sim}, q_{\sim}, 0_{\sim}$ имеет вид

$$\frac{d\psi_{\Pi\sim}}{dt} + \Omega_{\sim} \psi_{\Pi\sim} + r_{\Pi\sim} i_{\Pi\sim} - u_{\Pi\sim} = 0, \quad (3.206)$$

где

$$\begin{aligned} r_{\Pi\sim} &= \text{diag}(r_1, r_1, r_{\text{рот}}); \\ u_{\Pi\sim} &= (u_{d_{\sim}}, u_{q_{\sim}}, u_3, \dots, u_{2+n}, u_f) = \Pi_{dq\sim} u; \quad (3.207) \\ \Pi_{dq\sim} &= \text{diag} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} \cos(\gamma - \beta_1) & \cos(\gamma - \beta_1 - \kappa) \\ -\sin(\gamma - \beta_1) & -\sin(\gamma - \beta_1 - \kappa) \end{vmatrix}, 0, \dots, 0 \right). \end{aligned}$$

Уравнение электрического состояния нулевого контура имеет вид

$$L_{0\sim} \frac{di_{0\sim}}{dt} + r_1 i_{0\sim} - u_{0\sim} = 0, \quad (3.208)$$

где $L_{0\sim} = L'_{\alpha} + 2L'_{\sigma 1}$; $u_{0\sim} = (u_A + u_B + u_C)/\sqrt{3}$.

Структура алгоритмов расчета переходных электромеханических процессов ЯСМ в координатах $d_{\sim}, q_{\sim}, 0_{\sim}$ явным и неявным методами численного интегрирования идентична изложенной в 3.2.4, 3.2.5.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВНОПОЛЮСНОЙ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ НА ОСНОВЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЕ МАГНИТОПРОВОДА

4.1. Постановка задачи и понятие эквивалентной характеристики магнитопровода ЯСМ

На начальных этапах проектирования электроэнергетических установок, содержащих ЯСМ, — при выборе схемных решений и сравнительной оценке их технико-экономической эффективности — необходимо выполнение расчетов переходных процессов для ряда вариантов схем и множества совокупностей численных значений их параметров, причем требования к точности моделирования ЯСМ здесь, как правило, ниже требований на завершающих этапах проектирования. Для этих целей предпочтительными оказываются модели, основанные на применении метода эквивалентной характеристики магнитопровода ЯСМ, поскольку они при незначительном снижении точности по сравнению с моделями насыщенной ЯСМ, изложенными в главах 2 и 3, требуют почти на порядок меньших затрат на вычисление ММП машины.

Рассмотрим сущность понятия эквивалентной характеристики магнитопровода ЯСМ.

Для моделирования ЯСМ в дополнение к допущениям, сформулированным в разделах 2.3.1 и 3.1, принимается, что плотность проводников всех электрических контуров являются гармоническими функциями угловой координаты, а поток рассеяния индуктора не влияет на падение магнитного напряжения в индукторе. Это позволяет свести количество независимых переменных, характеризующих состояние магнитопровода ЯСМ, к двум — амплитудам F_d и F_q продольной и поперечной результирующих намагничивающих сил соответственно, определяемым через токи контуров и угол γ поворота ротора по несложным формулам вида

$$F_d = F_d [i_1, \dots, i_{s+n}, \gamma]; \quad F_q = F_q [i_1, \dots, i_{s+n}, \gamma]. \quad (4.1)$$

В ожидаемой области изменения абсолютных значений переменных F_d, F_q — на прямоугольнике $0 \leq |F_d| \leq F_{d \max}$, $0 \leq |F_q| \leq F_{q \max}$ (например, при $F_{d \max} = 4F_{dн}$, $F_{q \max} = 4F_{qн}$, где $F_{dн}, F_{qн}$ — значения переменных F_d, F_q в номинальном режиме работы машины) — строится сетка с постоянными шагами h_d, h_q по осям $|F_d|, |F_q|$ соответственно. В каждом узле этой сетки на основе модели, по-

строенной аналогично изложенной в главе 3 и с учетом упомянутых дополнительных допущений, рассчитывается распределение $B=B[\eta]$ магнитной индукции в зазоре вдоль полюсного деления, из него выделяются косинусная и синусная составляющие основной гармоники рабочего поля и вычисляются продольный Φ_{d+} и поперечный Φ_{q+} рабочие потоки. Результатом этого расчета является совокупность скалярных функций

$$\Phi_{d+} = \Phi_{d+} [|F_d|, |F_q|]; \quad \Phi_{q+} = \Phi_{q+} [|F_d|, |F_q|], \quad (4.2)$$

представленных в табличном виде.

Рабочие потоки, соответствующие значениям намагничивающих сил F_d, F_q , с учетом их знаков определяются по формулам

$$\Phi_d = \Phi_{d+} \operatorname{sgn} F_d; \quad \Phi_q = \Phi_{q+} \operatorname{sgn} F_q. \quad (4.3)$$

Таблично заданные функции (4.2) совместно с зависимостями (4.3), по определению, образуют эквивалентную характеристику магнитопровода ЯСМ, представленную в табличном виде.

При расчетах электромеханических процессов в ЯСМ необходимо располагать возможностью определения магнитного состояния в ММП машины при значениях намагничивающих сил F_d, F_q , отличных от указанных в эквивалентной характеристике магнитопровода, представленной в табличном виде. Для аналитического описания этой характеристики используется двумерный сплайн класса C^0 , составляемый на основе математического аппарата инвариантного приближения функций многочленами Тейлора [71, 72, 83].

Потокоцепления контуров и электромагнитный момент определяются через токи контуров, угол поворота ротора и потоки Φ_d, Φ_q в соответствии с обмоточными данными контуров и с учетом ориентации их геометрических осей по отношению к продольной и поперечной осям индуктора по явным зависимостям

$$\psi_j = \sum_{k=1}^{s+n} L_{sjk} i_k + \psi_{sj} [\Phi_d, \Phi_q, \gamma] \quad (j, k = \overline{1, s+n});$$

$$M_s = M_s [\Phi_d, \Phi_q, i_1, \dots, i_{s+n}, \gamma]. \quad (4.4)$$

Таким образом, при сформулированных выше дополнительных допущениях ММХ обобщенной ЯСМ представлена в явном виде как совокупность рекуррентных формул (4.1) — (4.4). На основе этой ММХ и с использованием изложенного в разделе 1.6 общего метода нетрудно получить рекуррентные выражения для вычисления ММП. В остальном структуры алгоритмов расчета процессов остаются аналогичными изложенным в главах 2 и 3.

4.2. Расчет эквивалентной характеристики магнитопровода, представленной в табличном виде

Чтобы не усложнять изложения второстепенными с точки зрения сущности метода деталями, рассмотрим в качестве объекта исследования ЯСМ, имеющую на статоре s электрических контуров основной полюсности, на роторе — продольный и поперечный демпферные контуры и обмотку возбуждения.

Для расчета эквивалентной характеристики магнитопровода ЯСМ, представленной в табличном виде, воспользуемся системой уравнений, отражающей неявную внутреннюю магнитную характеристику машины, сформулированную в соответствии с допущениями, указанными в 2.3.1 и 4.1. Составим эти уравнения.

Уравнение (2.52), составленное по закону полного тока для контура интегрирования XX' , для рассматриваемой ЯСМ имеет вид

$$\sum_{k=1}^s i_k \frac{\omega_k}{a_k} \cos(\eta + \gamma - \beta_k) + i_D \frac{\omega_D}{a_D} \cos \eta + i_Q \frac{\omega_Q}{a_Q} \sin \eta + i_f \frac{\omega_f}{a_f} \cos \eta - F_M - F_{z\eta} - \rho_s [\eta] B = 0, \quad (4.5)$$

где индексы D, Q обозначают принадлежность к продольному и поперечному демпферным контурам соответственно; F_M — падение магнитного напряжения в ярме статора, ярме ротора и полюсах.

После простейших преобразований из (4.5) имеем

$$F_d \cos \eta + F_q \sin \eta - F_M - F_{z\eta} - \rho_s [\eta] B = 0, \quad (4.6)$$

где

$$F_d = \sum_{k=1}^s i_k \frac{\omega_k}{a_k} \cos(\beta_k - \gamma) + i_D \frac{\omega_D}{a_D} + i_f \frac{\omega_f}{a_f};$$

$$F_q = \sum_{k=1}^s i_k \frac{\omega_k}{a_k} \sin(\beta_k - \gamma) + i_Q \frac{\omega_Q}{a_Q} \quad (4.7)$$

— амплитуды продольной и поперечной составляющих результирующей намагничивающей силы ЯСМ.

Применив уравнения вида (4.6) поочередно к каждому из N радиальных сечений активной зоны, приходим к системе N уравнений

$$F_d \cos \eta_j + F_q \sin \eta_j - F_M - F_{zj} - \rho_{sj} B_j = 0, \quad (4.8)$$

где содержание символов F_{zj}, ρ_{sj}, B_j совпадает с приведенными в разделах 2.3.2 и 3.2.1.

Уравнениям (3.23) здесь соответствует одно уравнение

$$\Phi_M = C_\Phi (B_1 + \dots + B_N), \quad (4.9)$$

где Φ_M — магнитный поток в ярме статора и в индукторе, а уравнениям (3.24) — одно уравнение

$$F_m = F_m[\Phi_m], \quad (4.10)$$

отражающее совместную характеристику намагничивания ярма статора и индуктора.

Локальные характеристики намагничивания зубцовой зоны статора в ее сечениях радиальными плоскостями, как и в ММХ, рассмотренной в главе 3, представляют собой зависимости

$$F_{z1} = F_{z1}[B_1]; \dots; F_{zN} = F_{zN}[B_N]. \quad (4.11)$$

Потоки Φ_d и Φ_q определяются соответственно через косинусную B_{1c} и синусную B_{1s} амплитуды первой гармоники магнитной индукции в активной зоне по формулам

$$\Phi_d = \frac{2}{\pi} l_s \tau B_{1c}; \quad \Phi_q = \frac{2}{\pi} l_s \tau B_{1s}. \quad (4.12)$$

Но

$$B_{1c} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \cos \eta d\eta = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N B_j \cos \eta_j;$$

$$B_{1s} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \sin \eta d\eta = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N B_j \sin \eta_j,$$

и, следовательно,

$$\Phi_d = c_\mu \sum_{j=1}^N B_j \cos \eta_j; \quad \Phi_q = c_\mu \sum_{j=1}^N B_j \sin \eta_j, \quad (4.13)$$

где $c_\mu = 4l_s \tau / (\pi N)$.

Система (4.8)–(4.11), (4.13) состоит из $2N+4$ скалярных уравнений и при задаваемых значениях F_d, F_q содержит столько же скалярных неизвестных — $F_{z1}, \dots, F_{zN}, B_1, \dots, B_N, F_m, \Phi_m, \Phi_d, \Phi_q$. Образовав векторы-столбцы

$$\Phi_\Delta = (\Phi_d, \Phi_q)_*; \quad F_\Delta = (F_d, F_q)_*, \quad (4.14)$$

представим эту систему с учетом обозначений (2.87) в виде

$$f_\Delta [F_\Delta, F_m, F_{z\tau}, B_\tau] = 0; \quad (4.15)$$

$$\Phi_m = \Phi_m [B_\tau]; \quad F_m = F_m [\Phi_m]; \quad F_{z\tau} = F_{z\tau} [B_\tau]; \quad (4.16)$$

$$\Phi_\Delta = \Phi_\Delta [B_\tau]. \quad (4.17)$$

Для решения этой системы воспользуемся итерационным методом Ньютона. При этом линейная система алгебраических уравнений, необходимая для вычисления поправок зависимых переменных $F_m, \Phi_m, F_{z\tau}, B_\tau$ на k -й итерации, имеет вид

$$f_\Delta^{F_m} \Delta F_m + f_\Delta^{F_{z\tau}} \Delta F_{z\tau} + f_\Delta^{B_\tau} \Delta B_\tau = Q_\Delta; \quad (4.18)$$

$$\Delta \Phi_m = \Phi_m^{B_\tau} \Delta B_\tau; \quad \Delta F_m = R_m \Delta \Phi_m; \quad \Delta F_{z\tau} = \rho_{z\tau} \Delta B_\tau,$$

где

$$f_\Delta^{F_{z\tau}} = \frac{\partial f_\Delta}{\partial F_{z\tau}}; \quad f_\Delta^{B_\tau} = \frac{\partial f_\Delta}{\partial B_\tau}$$

— матрицы, совпадающие соответственно с матрицами $f_1^{F_{z\tau}}, f_1^{B_\tau}$ и вычисляемые по формулам (2.110);

$$R_m = \frac{dF_m}{d\Phi_m} = R_m [\Phi_m] \quad (4.19)$$

— дифференциальное магнитное сопротивление индуктора и ярма статора; $\rho_{z\tau}$ — диагональная матрица, вычисляемая по (2.113);

$$f_\Delta^{F_m} = \frac{\partial f_\Delta}{\partial F_m} = \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \Phi_m^{B_\tau} = \frac{d\Phi_m}{dB_\tau} = \|C_\Phi, \dots, C_\Phi\|; \quad (4.20)$$

Q_Δ — невязка.

Из (4.18) находим, что

$$\Delta B_\tau = (f_\Delta^{F_m} R_m \Phi_m^{B_\tau} - \rho_{z\tau} - \rho_{B_\tau})^{-1} Q_\Delta. \quad (4.21)$$

Для расчета зависимостей (4.2) в табличном виде следует для каждого узла сетки в плоскости независимых переменных $|F_d|, |F_q|$ решить систему (4.15), (4.16) и вычислить потоки $\Phi_{d+} = \Phi_d; \Phi_{q+} = \Phi_q$ по формулам (4.13). При этом на k -м итерационном цикле решения этой системы выполняются следующие операции:

по найденным на $(k-1)$ -й итерации значениям $F_m, \Phi_m, F_{z\tau}, B_\tau$ (на первой итерации — по их значениям, полученным для ближайшей соседней точки сетки) вычисляются матрица $\rho_{z\tau}$ по формуле (2.113) и невязка Q_Δ как левая часть уравнения (4.15);

по формуле (4.21) вычисляется поправка ΔB_τ ;

по формуле вида (1.77) вычисляется k -е приближение вектора B_τ ;

по формулам (4.16), (4.17) вычисляется k -е приближение переменных $\Phi_m, F_m, F_{z\tau}, \Phi_\Delta$.

4.3. Рекуррентная эквивалентная характеристика и эквивалентные параметры магнитопровода

Введем для описания эквивалентной характеристики магнитопровода нормированные независимые переменные

$$x = \frac{F_d \operatorname{sgn} F_d}{3h_d} - \frac{\langle F_d \operatorname{sgn} F_d \rangle}{3h_d}; \quad y = \frac{F_q \operatorname{sgn} F_q}{3h_q} - \frac{\langle F_q \operatorname{sgn} F_q \rangle}{3h_q}, \quad (4.22)$$

где символ $\langle a \rangle$ обозначает целую часть числа a .

где согласно (4.34), (4.23), (4.14), (4.3)

$$\Phi_{\Sigma+}^X = \frac{d\Phi_{\Sigma+}}{dX} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial T[x, y] c_d}{\partial x} & \frac{\partial T[x, y] c_d}{\partial y} \\ \frac{\partial T[x, y] c_q}{\partial x} & \frac{\partial T[x, y] c_q}{\partial y} \end{array} \right\|; \quad (4.44)$$

$$\Phi_{\Sigma+}^{\Phi} = \frac{d\Phi_{\Sigma+}}{d\Phi_{\Sigma+}} = \text{diag}(1 \cdot \text{sgn } F_d, 1 \cdot \text{sgn } F_q). \quad (4.45)$$

С учетом (4.24) находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial T[x, y]}{\partial x} &= \left(0, 1, 0, x, y, 0, \frac{x^2}{2!}, xy, \frac{y^2}{2!}, 0 \right); \\ \frac{\partial T[x, y]}{\partial y} &= \left(0, 0, 1, 0, x, y, 0, \frac{x^2}{2!}, xy, \frac{y^2}{2!} \right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что имеются соотношения

$$\frac{\partial T[x, y]}{\partial x} = T[x, y] D_x; \quad \frac{\partial T[x, y]}{\partial y} = T[x, y] D_y, \quad (4.47)$$

где

$$D_x = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 0 \end{array} \right\|; \quad D_y = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 0 \end{array} \right\| \quad (4.48)$$

— матрицы дифференцирования вектора Тейлора по переменным x и y соответственно. Следовательно, матрица $\Phi_{\Sigma+}^X$ принимает вид

$$\Phi_{\Sigma+}^X = \left\| \begin{array}{cc} T[x, y] D_x c_d & T[x, y] D_y c_d \\ T[x, y] D_x c_q & T[x, y] D_y c_q \end{array} \right\|. \quad (4.49)$$

С учетом (4.22) для матрицы Y_X имеем

$$Y_X = \text{diag}(1 \cdot \text{sgn } F_d / (3h_d), 1 \cdot \text{sgn } F_q / (3h_q)). \quad (4.50)$$

Из (4.43), (4.42) с учетом (4.45); (4.50) находим, что

$$\begin{aligned} \Lambda_{\Sigma} &= \Phi_{\Sigma+}^{\Phi} + \Phi_{\Sigma+}^X Y_X = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} T[x, y] D_x c_d / (3h_d) & T[x, y] D_y c_d \cdot \text{sgn } F_d \text{sgn } F_q / (3h_q) \\ T[x, y] D_x c_q \text{sgn } F_q \text{sgn } F_d / (3h_d) & T[x, y] D_y c_q / (3h_q) \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Таким образом, для вычисления потоков Φ_d, Φ_q и матрицы Λ_{Σ} внешних параметров магнитопровода при заданных значениях намагничивающих сил F_d, F_q необходимо:

по формулам (4.22) рассчитать значения нормированных независимых переменных x, y ;

в соответствии с числами, равными целым частям этих переменных, и значением суммы $x+y$ идентифицировать треугольник, внутри которого находится точка с координатами F_d, F_q , и выписать для него векторы c_d, c_q ;

воспользоваться последовательно формулами (4.24), (4.23), (4.3), (4.51).

4.4. Явная эквивалентная магнитно-механическая характеристика и магнитно-механические параметры ЯСМ в фазных координатах

Под явной эквивалентной ММХ ЯСМ в фазных координатах будем понимать совокупность рекуррентных формул, позволяющих при заданных токах электрических контуров и угле поворота ротора рассчитать эквивалентные ВМК $F_d, F_q, x, y, \Phi_{d+}, \Phi_{q+}, \Phi_d, \Phi_q$, потокосцепления контуров и электромагнитный момент.

Рабочие потокосцепления контуров статора и ротора определяются соответственно по формулам

$$\begin{aligned} \psi_{sk} &= \frac{p_0 c_{\Phi} \omega_k}{a_k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \cos(\eta + \gamma - \beta_k) d\eta \quad (k = \overline{1, s}); \\ \psi_{sD} &= \frac{p_0 c_{\Phi} \omega_D}{a_D} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \cos \eta d\eta; \quad \psi_{sQ} = \frac{p_0 c_{\Phi} \omega_Q}{a_Q} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \sin \eta d\eta; \\ \psi_{sf} &= \frac{p_0 c_{\Phi} \omega_f}{a_f} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B \cos \eta d\eta. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Представив в (4.52) зависимость $B = B[\eta]$ в виде тригонометрического ряда

$$B_{1s} \cos \gamma + B_{1s} \sin \gamma + B_{2s} \cos 3\gamma + B_{2s} \sin 3\gamma + \dots \quad (4.53)$$

и выполнив интегрирование, приходим с учетом (4.12) к выражениям

$$\begin{aligned} \psi_{sk} &= c_{\psi k} (\Phi_{1s} \cos(\beta_k - \gamma) + \Phi_{2s} \sin(\beta_k - \gamma)) \quad (k = \overline{1, s}); \\ \psi_{sD} &= c_{\psi D} \Phi_{1s}; \quad \psi_{sQ} = c_{\psi Q} \Phi_{2s}; \quad \psi_{sf} = c_{\psi f} \Phi_{1s}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

где $c_{\psi j} = \mu_0 \omega_j / (4\pi a_j)$; $(j = \overline{1, s, D, Q, f})$.

С учетом (4.54) дотокооужения электрических контуров ЯСМ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \psi_1 &= L_{s11} i_1 + \dots + L_{s1s} i_s + c_{\psi 1} (\Phi_{1s} \cos(\beta_1 - \gamma) + \Phi_{2s} \sin(\beta_1 - \gamma)); \\ &\vdots \\ \psi_s &= L_{s1s} i_1 + \dots + L_{sss} i_s + c_{\psi s} (\Phi_{1s} \cos(\beta_s - \gamma) + \Phi_{2s} \sin(\beta_s - \gamma)); \\ \psi_D &= L_{sDD} i_D + L_{sDf} i_f + c_{\psi D} \Phi_{1s}; \\ \psi_Q &= L_{sQQ} i_Q + c_{\psi Q} \Phi_{2s}; \\ \psi_f &= L_{sfd} i_D + L_{sff} i_f + c_{\psi f} \Phi_{1s}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

где $L_{\sigma jk}$ ($j, k = \overline{1, s}$) — постоянные индуктивности рассеяния контуров статора; $L_{\sigma jk}$ ($j, k = \overline{D, f}$) — постоянные индуктивности рассеяния продольного демферного контура и обмотки возбуждения; $L_{\sigma QQ}$ — постоянная индуктивность рассеяния поперечного демферного контура.

Из (2.45) следует, что

$$\frac{\partial W_k[\alpha]}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} V_k[\sigma] d\alpha = V_k[\alpha + \pi] - V_k[\alpha] = -2V_k[\alpha].$$

Но для рассматриваемой модели ЯСМ $W_k[\alpha] = w_k \cos(\alpha - \beta_k)$, поэтому

$$V_k[\alpha] = \frac{1}{2} w_k \sin(\alpha - \beta_k) = \frac{1}{2} w_k \sin(\gamma - (\beta_k - \gamma)). \quad (4.56)$$

Формула (2.78) электромагнитного момента приводится с учетом (4.56), (4.13) к виду

$$M_{\Sigma} = p_{\Sigma} \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^s \frac{i_k w_k}{a_k} (\Phi_{1s} \sin(\beta_k - \gamma) - \Phi_{2s} \cos(\beta_k - \gamma)). \quad (4.57)$$

Явная эквивалентная ММХ в фазных координатах состоит из рекуррентных скалярных соотношений (4.7), (4.22), (4.23), (4.3), (4.56), (4.57) или равноценных им векторных рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} F_{\Sigma} &= F_{\Sigma}[i_{\Sigma}, \gamma]; \quad X = X[F_{\Sigma}]; \quad \Phi_{\Sigma+} = \Phi_{\Sigma+}[X]; \quad \Phi_{\Sigma} = \Phi_{\Sigma}[\Phi_{\Sigma+}]; \\ \psi_{\Sigma} &= \psi_{\Sigma}[i_{\Sigma}, \gamma, \Phi_{\Sigma}]; \quad M_{\Sigma} = \xi_{\Sigma}[i_{\Sigma}, \gamma, \Phi_{\Sigma}], \end{aligned} \quad (4.58)$$

где $i_{\Sigma} = (i_1, \dots, i_s, i_D, i_Q, i_f)$; $\psi_{\Sigma} = (\psi_1, \dots, \psi_s, \psi_D, \psi_Q, \psi_f)$. (4.59)

Вектор эквивалентных ВМК имеет вид

$$m_{\Sigma} = (F_{\Sigma}, X, \Phi_{\Sigma+}, \Phi_{\Sigma})_{\Sigma}. \quad (4.60)$$

Определим ММП ЯСМ, соответствующие ММХ (4.58). Внешние ММП образуют матрицу

$$P_{\Sigma} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_{\Sigma}}{\partial i_{\Sigma}} & \frac{\partial \psi_{\Sigma}}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial M_{\Sigma}}{\partial i_{\Sigma}} & \frac{\partial M_{\Sigma}}{\partial \gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{\Sigma} & K_{\Sigma} \\ K'_{\Sigma} & G_{\Sigma} \end{vmatrix}, \quad (4.61)$$

а внутренние — матрицу

$$P_{\Sigma i} = \begin{vmatrix} \frac{\partial m_{\Sigma}}{\partial i_{\Sigma}} & \frac{\partial m_{\Sigma}}{\partial \gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Theta_{\Sigma} & \Gamma_{\Sigma} \end{vmatrix}, \quad (4.62)$$

где

$$\Theta_{\Sigma} = \frac{\partial m_{\Sigma}}{\partial i_{\Sigma}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_{\Sigma} / \partial i_{\Sigma}}{\partial X / \partial i_{\Sigma}} \\ \frac{\partial \Phi_{\Sigma+} / \partial i_{\Sigma}}{\partial \Phi_{\Sigma} / \partial i_{\Sigma}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Theta_{F\Sigma} \\ \Theta_X \\ \Theta_{\Phi\Sigma+} \\ \Theta_{\Phi\Sigma} \end{vmatrix}; \quad \Gamma_{\Sigma} = \frac{\partial m_{\Sigma}}{\partial \gamma} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_{\Sigma} / \partial \gamma}{\partial X / \partial \gamma} \\ \frac{\partial \Phi_{\Sigma+} / \partial \gamma}{\partial \Phi_{\Sigma} / \partial \gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Gamma_{F\Sigma} \\ \Gamma_X \\ \Gamma_{\Phi\Sigma+} \\ \Gamma_{\Phi\Sigma} \end{vmatrix}. \quad (4.63)$$

Продифференцировав ММХ (4.58) по вектору токов, приходим с учетом (4.41)–(4.43), (4.61), (4.63) к системе матричных уравнений

$$\Theta_{F\Sigma} = F'_{\Sigma}; \quad \Theta_X = Y_X \Theta_{F\Sigma}; \quad \Theta_{\Phi\Sigma+} = \Phi_{\Sigma+}^X \Theta_X; \quad \Theta_{\Phi\Sigma} = \Phi_{\Sigma}^{\Phi\Sigma+} \Theta_{\Phi\Sigma+}; \quad (4.64)$$

$$L_{\Sigma} = \varphi'_{\Sigma} + \varphi_{\Sigma}^{\Phi\Sigma} \Theta_{\Phi\Sigma}; \quad K'_{\Sigma} = \xi'_{\Sigma} + \xi_{\Sigma}^{\Phi\Sigma} \Theta_{\Phi\Sigma}, \quad (4.65)$$

где

$$\varphi'_{\Sigma} = \frac{\partial \psi_{\Sigma}}{\partial i_{\Sigma}} = \text{diag} \left(\begin{vmatrix} L_{s11} \dots L_{s1s} \\ \vdots \\ L_{s1s} \dots L_{sss} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} L_{sDD} & 0 & L_{sDf} \\ 0 & L_{sQQ} & 0 \\ L_{sfd} & 0 & L_{sff} \end{vmatrix} \right) \quad (4.66)$$

— постоянная матрица индуктивностей рассеяния;

$$F'_{\Sigma} = \frac{\partial F_{\Sigma}}{\partial i_{\Sigma}} = \begin{vmatrix} \frac{w_1}{a_1} \cos(\beta_1 - \gamma) \dots \frac{w_s}{a_s} \cos(\beta_s - \gamma) & \frac{w_D}{a_D} & 0 & \frac{w_f}{a_f} \\ \frac{w_1}{a_1} \sin(\beta_1 - \gamma) \dots \frac{w_s}{a_s} \sin(\beta_s - \gamma) & 0 & \frac{w_Q}{a_Q} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\varphi_{\vartheta}^{\vartheta} = \frac{\partial \varphi_{\vartheta}}{\partial \Phi_{\vartheta}} = \frac{\pi p_0}{4} \left\| \begin{array}{cc} (\omega_1/a_1) \cos(\beta_1 - \gamma) & (\omega_1/a_1) \sin(\beta_1 - \gamma) \\ \vdots & \vdots \\ (\omega_s/a_s) \cos(\beta_s - \gamma) & (\omega_s/a_s) \sin(\beta_s - \gamma) \\ \omega_D/a_D & 0 \\ 0 & \omega_Q/a_Q \\ \omega_f/a_f & 0 \end{array} \right\|; \quad (4.67)$$

$$\xi_{\vartheta}^{\vartheta} = \frac{\partial \xi_{\vartheta}}{\partial i_{\vartheta}} = p_0 \frac{\pi}{4} \left\| \begin{array}{c} \frac{\omega_1}{a_1} (\Phi_d \sin(\beta_1 - \gamma) - \Phi_q \cos(\beta_1 - \gamma)), \dots \\ \dots, \frac{\omega_s}{a_s} (\Phi_d \sin(\beta_s - \gamma) - \Phi_q \cos(\beta_s - \gamma)), 0, 0, 0 \end{array} \right\|;$$

$$\varepsilon_{\vartheta}^{\vartheta} = \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta}}{\partial \Phi_{\vartheta}} = p_0 \frac{\pi}{4} \left\| \begin{array}{c} \sum_{k=1}^s \frac{i_k \omega_k}{a_k} \sin(\beta_k - \gamma), - \sum_{k=1}^s \frac{i_k \omega_k}{a_k} \cos(\beta_k - \gamma) \end{array} \right\|.$$

Из (4.64) с учетом (4.51) имеем

$$\Theta_{\vartheta\vartheta} = \Phi_{\vartheta\vartheta}^{\vartheta} + \Phi_{\vartheta\vartheta}^X Y_X F_{\vartheta\vartheta}^{\vartheta} = \Lambda_{\vartheta} F_{\vartheta\vartheta}^{\vartheta}. \quad (4.68)$$

Продифференцировав ММХ (4.58) по углу γ_r , приходим с учетом (4.41) — (4.43), (4.61), (4.63), (2.34) к системе матричных уравнений

$$\Gamma_{r\vartheta} = F_{\vartheta}^{\gamma_r}; \quad \Gamma_X = Y_X \Gamma_{r\vartheta}; \quad \Gamma_{\vartheta\vartheta+} = \Phi_{\vartheta\vartheta+}^X \Gamma_X; \quad \Gamma_{\vartheta\vartheta} = \Phi_{\vartheta\vartheta}^{\vartheta} + \Gamma_{\vartheta\vartheta+}; \quad (4.69)$$

$$K_{\vartheta} = \varphi_{\vartheta}^{\gamma_r} + \varphi_{\vartheta}^{\vartheta} \Gamma_{\vartheta\vartheta}; \quad G_{\vartheta} = \xi_{\vartheta}^{\gamma_r} + \xi_{\vartheta}^{\vartheta} \Gamma_{\vartheta\vartheta}, \quad (4.70)$$

где

$$F_{\vartheta}^{\gamma_r} = \frac{\partial F_{\vartheta}}{\partial \gamma_r} = p_0 \left\| \begin{array}{c} \sum_{k=1}^s \frac{i_k \omega_k}{a_k} \sin(\beta_k - \gamma) \\ \vdots \\ - \sum_{k=1}^s \frac{i_k \omega_k}{a_k} \cos(\beta_k - \gamma) \end{array} \right\|;$$

$$\Phi_{\vartheta}^{\gamma_r} = \frac{\partial \varphi_{\vartheta}}{\partial \gamma_r} = \frac{\pi p_0}{4} \left\| \begin{array}{c} \Phi_d \sin(\beta_1 - \gamma) - \Phi_q \cos(\beta_1 - \gamma) \\ \vdots \\ \Phi_d \sin(\beta_s - \gamma) - \Phi_q \cos(\beta_s - \gamma) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\|. \quad (4.71)$$

$$\xi_{\vartheta}^{\gamma_r} = \frac{\partial \xi_{\vartheta}}{\partial \gamma_r} = -p_0 \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^s \frac{i_k \omega_k}{a_k} (\Phi_d \cos(\beta_k - \gamma) + \Phi_q \sin(\beta_k - \gamma)).$$

Из (4.69) с учетом (4.51) имеем

$$\Gamma_{\vartheta\vartheta} = \Phi_{\vartheta\vartheta}^{\vartheta} + \Phi_{\vartheta\vartheta+} Y_X \Gamma_{r\vartheta} = \Lambda_{\vartheta} \Gamma_{r\vartheta}. \quad (4.72)$$

4.5. Модели ЯСМ в фазных координатах, основанные на использовании эквивалентной характеристики магнитопровода

Для расчетов переходных электромеханических процессов ЯСМ в фазных координатах с применением явных методов численного интегрирования представим подлежащую совместному решению САДУ состоящей из ДУ

$$L_{\vartheta} \frac{di_{\vartheta}}{dt} + K_{\vartheta} \omega_r + r_{\vartheta} i_{\vartheta} - u_{\vartheta} = 0; \quad (4.73)$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = J^{-1} (M_{\vartheta} + M_B); \quad \frac{d\gamma_r}{dt} = \omega_r \quad (4.74)$$

и формул (4.58). Здесь вектор питающих напряжений и матрица активных сопротивлений имеют соответственно вид

$$u_{\vartheta} = (u_1, \dots, u_s, 0, 0, u_r); \quad r_{\vartheta} = \text{diag}(r_1, \dots, r_s, r_D, r_Q, r_f).$$

Алгоритм численного решения этой САДУ предусматривает выполнение на шаге интегрирования следующих операций:

для нулевого узла шаблона вычисляются вектор питающих напряжений u_{ϑ} и приложенный к валу момент M_B ;

по известным из предыдущего шага интегрирования значениям переменных i_{ϑ} , γ_r , F_{ϑ} , X , $\Phi_{\vartheta+}$, Φ_{ϑ} по формулам (4.67), (4.71) получают матрицы $F_{\vartheta}^{\gamma_r}$, $\varphi_{\vartheta}^{\gamma_r}$, $\varphi_{\vartheta}^{\vartheta}$, $F_{\vartheta}^{\gamma_r}$, по формуле (4.51) — матрицу Λ_{ϑ} эквивалентных параметров магнитопровода, по формулам (4.68), (4.72) — внутренние ММП $\Theta_{\vartheta\vartheta}$, $\Gamma_{\vartheta\vartheta}$ и по формулам (4.65), (4.70) — матрицы L_{ϑ} , K_{ϑ} внешних ММП;

уравнение (4.73) решается численным способом относительно вектора di_{ϑ}/dt ;

по формулам (4.74) вычисляются производные $d\omega_r/dt$, $d\gamma_r/dt$;

по формулам вида (1.69) определяются приращения $\Delta\omega_r$, $\Delta\gamma_r$ на шаге h ;

по формулам вида (1.67) вычисляются значения переменных i_{ϑ} , ω_r , γ_r при $t=h$;

по формулам (4.58) рассчитываются значения переменных F_{ϑ} , X , $\Phi_{\vartheta+}$, Φ_{ϑ} , M_{ϑ} при $t=h$.

Для расчетов процессов с применением неявных методов численного интегрирования представим подлежащую решению САДУ, состоящей из ДУ

$$\frac{d\psi_{\varepsilon}}{dt} + r_{\varepsilon} i_{\varepsilon} - u_{\varepsilon} = 0; \quad (4.75)$$

$$-J \frac{d\omega_r}{dt} + M_{\varepsilon} + M_{\varepsilon} = 0; \quad \frac{d\gamma_r}{dt} = \omega_r \quad (4.76)$$

и формул (4.58).

Алгебраизовав ДУ (4.75), (4.76) в соответствии с (1.73), имеем

$$\psi_{\varepsilon} + \frac{1}{b_0} \sum_{j=1}^{\varepsilon} b_j \psi_{\varepsilon j} + \frac{r_{\varepsilon}}{b_0} i_{\varepsilon} - \frac{u_{\varepsilon}}{b_0} = 0; \quad (4.77)$$

$$-J \left(b_0 \omega_r + \sum_{j=1}^{\varepsilon} b_j \omega_{rj} \right) + M_{\varepsilon} + M_{\varepsilon} = 0; \quad (4.78)$$

$$\omega_r = b_0 \gamma_r + \sum_{j=1}^{\varepsilon} b_j \gamma_{rj}. \quad (4.79)$$

Для решения нелинейной САУ (4.77) — (4.79), (4.58) итерационным методом Ньютона составим линейную САУ

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{\varepsilon} + (r_{\varepsilon}/b_0) \Delta i_{\varepsilon} &= Q_{\varepsilon 1}; \\ -J b_0 \Delta\omega_r + \Delta M_{\varepsilon} &= Q_{\varepsilon 2}; \quad \Delta\omega_r = b_0 \Delta\gamma_r; \\ \Delta F_{\varepsilon} &= F_{\varepsilon}^{\prime} \Delta i_{\varepsilon} + F_{\varepsilon}^{\gamma} \Delta\gamma_r; \quad \Delta X = Y_X \Delta F_{\varepsilon}; \\ \Delta\Phi_{\varepsilon+} &= \Phi_{\varepsilon+}^X \Delta X; \quad \Delta\Phi_{\varepsilon} = \Phi_{\varepsilon}^{\varepsilon+} + \Delta\Phi_{\varepsilon+}; \\ \Delta\psi_{\varepsilon} &= \varphi_{\varepsilon}^{\prime} \Delta i_{\varepsilon} + \varphi_{\varepsilon}^{\gamma} \Delta\gamma_r + \varphi_{\varepsilon}^{\varepsilon+} \Delta\Phi_{\varepsilon}; \\ \Delta M_{\varepsilon} &= \xi_{\varepsilon}^{\prime} \Delta i_{\varepsilon} + \xi_{\varepsilon}^{\gamma} \Delta\gamma_r + \xi_{\varepsilon}^{\varepsilon+} \Delta\Phi_{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где $Q_{\varepsilon 1}$, $Q_{\varepsilon 2}$ — невязки уравнений (4.77); (4.78) соответственно. После несложных преобразований эта САУ приводится к системе двух векторных уравнений:

$$\begin{aligned} (L_{\varepsilon} + r_{\varepsilon}/b_0) \Delta i_{\varepsilon} + K_{\varepsilon} \Delta\gamma_r &= Q_{\varepsilon 1}; \\ K_{\varepsilon}^{\prime} \Delta i_{\varepsilon} + (G_{\varepsilon} - Jb_0) \Delta\gamma_r &= Q_{\varepsilon 2}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

При решении нелинейной САУ (4.77) — (4.79), (4.58) выполняются на каждом итерационном цикле следующие операции:

по найденным на $(k-1)$ -й итерации значениями переменных i_{ε} , γ_r , F_{ε} , X , $\Phi_{\varepsilon+}$, Φ_{ε} (при $k=1$ — по результату выполнения предыдущего шага интегрирования) вычисляются по формулам (4.67), (4.71) матрицы $\varphi_{\varepsilon}^{\prime}$, F_{ε}^{\prime} , $\xi_{\varepsilon}^{\prime}$, $\xi_{\varepsilon}^{\varepsilon+}$, $\varphi_{\varepsilon}^{\gamma}$, F_{ε}^{γ} , $\xi_{\varepsilon}^{\gamma}$, по формуле (4.51) — матрица L_{ε} , по формулам (4.68), (4.72) — внутрен-

ние ММП Θ_{ε} , Γ_{ε} и по формулам (4.65), (4.70) — внешние ММП L_{ε} , K_{ε} , K_{ε} , G_{ε} ;

вычисляются невязки $Q_{\varepsilon 1}$, $Q_{\varepsilon 2}$ как левые части уравнений (4.77), (4.78) соответственно;

система (4.80) решается численно относительно поправок Δi_{ε} , $\Delta\gamma_r$;

по формулам вида (1.77) вычисляется k -е приближение переменных i_{ε} , γ_r ;

по (4.79), (4.58) рассчитывается k -е приближение переменных ω_r , F_{ε} , X , $\Phi_{\varepsilon+}$, Φ_{ε} , ψ_{ε} , M_{ε} .

4.6. Явная эквивалентная магнитно-механическая характеристика и магнитно-механические параметры ЯСМ в координатах d , q

Объектом исследования является ЯСМ, имеющая на статоре одну симметричную трехфазную обмотку и на роторе — продольный и поперечный демпферные контуры и обмотку возбуждения. Распределения проводников по угловой координате принимаются для всех электрических контуров гармоническими, а магнитные проводимости по путям потоков рассеяния полагаются постоянными.

Под явной эквивалентной ММХ такой ЯСМ в координатах d , q будем понимать совокупность рекуррентных формул, позволяющих при заданных токах ее контуров в координатах d , q рассчитать эквивалентные ВМК F_d , F_q , x , y , Φ_{d+} , Φ_{q+} , Φ_d , Φ_q , потоко-сцепления контуров в координатах d , q и электромагнитный момент.

Уравнение (4.5) в рассматриваемом случае принимает вид $(w/a) (i_A \cos(\eta + \gamma - \beta) + i_B \cos(\eta + \gamma - \beta - \alpha) + i_C \cos(\eta + \gamma - \beta + \alpha)) + ((w_D/a_D) i_d + (w_f/a_f) i_f) \cos \eta + (w_Q/a_Q) i_Q \sin \eta - F_M - F_{z\eta - \rho_s} [\eta] B = 0$,

где w , a , β — постоянные, характеризующие обмотку статора.

В результате замены токов фаз токами i_d , i_q , i_0 в соответствии с (3.11) это уравнение приводится к виду (4.6), где

$$\begin{aligned} F_d &= i_d 3w/(2a) + i_D w_D/a_D + i_f w_f/a_f; \\ F_q &= i_q 3w/(2a) + i_Q w_Q/a_Q. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Потоко-сцепления электрических контуров ЯСМ в координатах d , q определяются выражениями

$$\psi_d = L_d i_d + \frac{\pi p_0 w}{4a} \Phi_d; \quad \psi_q = L_q i_q + \frac{\pi p_0 w}{4a} \Phi_q;$$

$$\psi_D = L_{sDD} i_D + L_{sDf} i_f + \frac{\pi p_0 \omega_D}{4a_D} \Phi_d; \quad \psi_Q = L_{sQQ} i_Q + \frac{\pi p_0 \omega_Q}{4a_Q} \Phi_q; \quad (4.82)$$

$$\psi_f = L_{sfd} i_D + L_{sff} i_f + \frac{\pi p_0 \omega_f}{4a_f} \Phi_d,$$

где L_Σ — индуктивность рассеяния обмотки статора в координатах d, q .

Электромагнитный момент вычисляется по формуле

$$M_\Delta = \frac{3}{2} p_0 (\psi_d i_q - \psi_q i_d). \quad (4.83)$$

Нетрудно убедиться непосредственной проверкой, что формула (4.83) приводится к виду

$$M_\Delta = -\frac{3}{2} \psi_{\Delta\Pi} \Omega_\Delta i_{\Delta\Pi} = \frac{3}{2} i_{\Delta\Pi} \Omega_\Delta \psi_{\Delta\Pi}, \quad (4.84)$$

где

$$i_{\Delta\Pi} = (i_d, i_q, i_D, i_Q, i_f)^*; \quad \psi_{\Delta\Pi} = (\psi_d, \psi_q, \psi_D, \psi_Q, \psi_f)^*;$$

$$\Omega_\Delta = \text{diag} \left(\begin{vmatrix} 0 & -p_0 \\ p_0 & 0 \end{vmatrix}, 0, 0, 0 \right).$$

Явная эквивалентная ММХ ЯСМ в координатах d, q состоит из рекуррентных формул (4.81), (4.22), (4.23), (4.3), (4.82), (4.83) или равноценных им векторных выражений

$$F_\Delta = F_\Delta [i_{\Delta\Pi}]; \quad X = X [F_\Delta]; \quad \Phi_{\Delta+} = \Phi_{\Delta+} [X]; \quad \Phi_\Delta = \Phi_\Delta [\Phi_{\Delta+}];$$

$$\psi_{\Delta\Pi} = \varphi_\Delta [i_{\Delta\Pi}, \Phi_\Delta]; \quad M_\Delta = \xi_{\Delta\Pi} [i_{\Delta\Pi}, \psi_{\Delta\Pi}]. \quad (4.85)$$

Вектор эквивалентных ВМК здесь совпадает с вектором m_Δ (4.60).

Определим эквивалентные ММП, соответствующие ММХ (4.85).

Внешние ММП образуют матрицу

$$P_{\Delta\Pi e} = \left\| \frac{d\psi_{\Delta\Pi}/di_{\Delta\Pi}}{dM_\Delta/di_{\Delta\Pi}} \right\| = \left\| \frac{L_{\Delta\Pi}}{K'_{\Delta\Pi}} \right\|, \quad (4.86)$$

а внутренние — матрицу

$$P_{\Delta\Pi i} = \frac{dm_\Delta}{di_{\Delta\Pi}} = \left\| \frac{dF_\Delta/di_{\Delta\Pi}}{dX/di_{\Delta\Pi}} \right\| = \left\| \begin{matrix} \Theta_{F\Delta\Pi} \\ \Theta_{X\Pi} \\ \Theta_{\Phi_{\Delta+}\Pi} \\ \Theta_{\Phi_\Delta\Pi} \end{matrix} \right\| = \Theta_{\Delta\Pi}. \quad (4.87)$$

Продифференцировав ММХ (4.85) по вектору $i_{\Delta\Pi}$, приходим к системе матричных уравнений

$$\Theta_{F\Delta\Pi} = F'_{\Delta\Pi}, \quad \Theta_{X\Pi} = Y_X \Theta_{F\Delta\Pi}; \quad \Theta_{\Phi_{\Delta+}\Pi} = \Phi_{\Delta+}^X \Theta_{X\Pi}; \\ \Theta_{\Phi_\Delta\Pi} = \Phi_\Delta^X \Theta_{\Phi_{\Delta+}\Pi}; \quad (4.88)$$

$$L_{\Delta\Pi} = \varphi'_{\Delta\Pi} + \varphi_{\Delta\Pi}^{\Phi_\Delta} \Theta_{\Phi_\Delta\Pi}; \quad K'_{\Delta\Pi} = \xi'_{\Delta\Pi} + \xi_{\Delta\Pi}^{\psi_{\Delta\Pi}} L_{\Delta\Pi};$$

где

$$\varphi'_{\Delta\Pi} = \frac{\partial \varphi_{\Delta\Pi}}{\partial i_{\Delta\Pi}} = \text{diag} \left(\left\| \begin{matrix} L_\Sigma & 0 \\ 0 & L_\Sigma \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} L_{sDD} & 0 & L_{sDf} \\ 0 & L_{sQQ} & 0 \\ L_{sfd} & 0 & L_{sff} \end{matrix} \right\| \right) = L_{s\Delta\Pi},$$

$$F'_{\Delta\Pi} = \frac{dF_\Delta}{di_{\Delta\Pi}} = \left\| \begin{matrix} 3\omega/(2a) & 0 & \omega_D/a_D & 0 & \omega_f/a_f \\ 0 & 3\omega/(2a) & 0 & \omega_Q/a_Q & 0 \end{matrix} \right\|;$$

$$\varphi_{\Delta\Pi}^{\Phi_\Delta} = \frac{\partial \varphi_{\Delta\Pi}}{\partial \Phi_\Delta} = \frac{\pi p_0}{4} \left\| \begin{matrix} \omega/a & 0 \\ 0 & \omega/a \\ \omega_D/a_D & 0 \\ 0 & \omega_Q/a_Q \\ \omega_f/a_f & 0 \end{matrix} \right\|; \quad (4.89)$$

$$\xi'_{\Delta\Pi} = \frac{\partial \xi_{\Delta\Pi}}{\partial i_{\Delta\Pi}} = -\frac{3}{2} \psi_{\Delta\Pi} \Omega_\Delta; \quad \xi_{\Delta\Pi}^{\psi_{\Delta\Pi}} = \frac{\partial \xi_{\Delta\Pi}}{\partial \psi_{\Delta\Pi}} = \frac{3}{2} i_{\Delta\Pi} \Omega_\Delta.$$

Из (4.88), (4.89) с учетом (4.51) следует, что

$$\Theta_{\Phi_\Delta\Pi} = \Phi_{\Delta+}^{\Phi_\Delta} + \Phi_{\Delta+}^X Y_X F'_{\Delta\Pi} = \Lambda_\Delta F'_{\Delta\Pi}; \quad (4.90)$$

$$L_{\Delta\Pi} = L_{s\Delta\Pi} + \varphi_{\Delta\Pi}^{\Phi_\Delta} \Theta_{\Phi_\Delta\Pi}; \quad K'_{\Delta\Pi} = \frac{3}{2} (-\psi_{\Delta\Pi} \Omega_\Delta + i_{\Delta\Pi} \Omega_\Delta L_{\Delta\Pi}). \quad (4.91)$$

4.7. Модели ЯСМ в координатах d, q , основанные на использовании эквивалентной характеристики магнитопровода

Для моделирования электромеханических процессов ЯСМ в координатах d, q с применением явных методов численного интегрирования представим уравнение электрического состояния ЯСМ в виде

$$L_{\Delta\Pi} \frac{di_{\Delta\Pi}}{dt} + \omega_r \Omega_\Delta \psi_{\Delta\Pi} + r_{\Delta\Pi} i_{\Delta\Pi} - u_{\Delta\Pi} = 0, \quad (4.92)$$

где

$$r_{\Delta\Pi} = \text{diag} (r, r, r_D, r_Q, r_f)$$

— матрица активных сопротивлений;

$$u_{\Delta\Pi} = \Pi_{dq\Delta} u_\Delta = (u_d, u_q, 0, 0, u_f)^*;$$

$$\Pi_{dq\Delta} = \text{diag} \left(\frac{2}{3} \left\| \begin{matrix} \cos(\gamma - \beta) & \cos(\gamma - \beta - x) & \cos(\gamma - \beta + x) \\ -\sin(\gamma - \beta) & -\sin(\gamma - \beta - x) & -\sin(\gamma - \beta + x) \end{matrix} \right\|, 1, 1, 1 \right) \quad (4.93)$$

— соответственно вектор преобразованных напряжений и матрица преобразования.

Тогда подлежащая совместному решению САДУ состоит из ДУ (4.92), (4.74) и формул (4.85), (4.93).

Алгоритм численного решения этой САДУ предусматривает выполнение на шаге интегрирования следующих операций:

для нулевого узла шаблона вычисляются момент $M_{\text{в}}$ и вектор $u_{\text{э}}$.

по известным из предыдущего шага интегрирования значениям переменных $\gamma_{\text{г}}$, $F_{\text{э}}$, X по формулам (4.93) вычисляются матрица $\Pi_{dq\text{э}}$ и вектор $u_{\text{эп}}$, по формуле (4.51) — матрица эквивалентных параметров магнитопровода, по формуле (4.90) — внутренние ММП $\Phi_{\text{ФЭП}}$ и по (4.91) — матрица $L_{\text{ЭП}}$ внешних ММП;

уравнение (4.92) решается численным способом относительно вектора $di_{\text{ЭП}}/dt$;

по формулам (4.74) вычисляются производные $d\omega_{\text{г}}/dt$, $d\gamma_{\text{г}}/dt$;

по формулам вида (1.69) рассчитываются приращения $\Delta i_{\text{ЭП}}$, $\Delta \omega_{\text{г}}$, $\Delta \gamma_{\text{г}}$ на шаге h ;

по формулам вида (1.67) вычисляются значения переменных $i_{\text{ЭП}}$, $\omega_{\text{г}}$, $\gamma_{\text{г}}$ при $t=h$;

по формулам (4.85) определяются значения переменных $F_{\text{э}}$, X , $\Phi_{\text{Э+}}$, $\Phi_{\text{э}}$, $\psi_{\text{ЭП}}$, $M_{\text{э}}$ при $t=h$.

Для расчетов процессов с применением неявных методов численного интегрирования представим подлежащую решению САДУ состоящей из ДУ электрического состояния в виде

$$\frac{d\psi_{\text{ЭП}}}{dt} + \omega_{\text{г}} \Omega_{\text{э}} \psi_{\text{ЭП}} + r_{\text{ЭП}} i_{\text{ЭП}} - u_{\text{ЭП}} = 0, \quad (4.94)$$

ДУ (4.76) и формул (4.85), (4.93).

Алгебраизовав ДУ (4.94) согласно (1.73), имеем

$$\psi_{\text{ЭП}} + \frac{1}{b_0} \left(\sum_{j=1}^g b_j \psi_{\text{ЭП}j} + \omega_{\text{г}} \Omega_{\text{э}} \psi_{\text{ЭП}} + r_{\text{ЭП}} i_{\text{ЭП}} - u_{\text{ЭП}} \right) = 0. \quad (4.95)$$

Алгебраизовав ДУ (4.76), приходим к уравнениям (4.78), (4.79).

Для решения нелинейной САУ (4.95), (4.78), (4.79), (4.85), (4.93) итерационным методом Ньютона составим линейную САУ

$$\Delta \psi_{\text{ЭП}} + (\Delta \omega_{\text{г}} \Omega_{\text{э}} \psi_{\text{ЭП}} + \omega_{\text{г}} \Omega_{\text{э}} \Delta \psi_{\text{ЭП}} + r_{\text{ЭП}} \Delta i_{\text{ЭП}} - \Delta u_{\text{ЭП}}) / b_0 = Q_{\text{ЭП}1};$$

$$J b_0 \Delta \omega_{\text{г}} + \Delta M_{\text{э}} = Q_{\text{ЭП}2}; \quad \Delta \omega_{\text{г}} = b_0 \Delta \gamma_{\text{г}};$$

$$\Delta F_{\text{э}} = F_{\text{э}}' \Delta i_{\text{ЭП}}; \quad \Delta X = Y_X \Delta F_{\text{э}}; \quad \Delta \Phi_{\text{Э+}} = \Phi_{\text{Э+}}^X \Delta X; \quad \Delta \Phi_{\text{э}} = \Phi_{\text{э}}^{\Phi_{\text{Э+}}} \Delta \Phi_{\text{Э+}};$$

$$\Delta \psi_{\text{ЭП}} = \varphi_{\text{ЭП}}' \Delta i_{\text{ЭП}} + \varphi_{\text{ЭП}}^{\Phi_{\text{э}}} \Delta \Phi_{\text{э}}; \quad \Delta M_{\text{э}} = \xi_{\text{ЭП}}' \Delta i_{\text{ЭП}} + \xi_{\text{ЭП}}^{\psi_{\text{ЭП}}} \Delta \psi_{\text{ЭП}};$$

$$\Delta u_{\text{ЭП}} = \Delta \Pi_{dq\text{э}} u_{\text{э}}; \quad \Delta \Pi_{dq\text{э}} = -\Omega_{\text{э}} \Pi_{dq\text{э}} \Delta \gamma_{\text{г}}.$$

После несложных преобразований она приводится к виду

$$(E + \omega_{\text{г}} \Omega_{\text{э}} / b_0) L_{\text{ЭП}} + r_{\text{ЭП}} / b_0 \Delta i_{\text{ЭП}} + \Omega_{\text{э}} (\psi_{\text{ЭП}} - \Pi_{dq\text{э}} u_{\text{э}}) \Delta \gamma_{\text{г}} = Q_{\text{ЭП}1};$$

$$\frac{3}{2} i_{\text{ЭП}} (\Omega_{\text{э}} L_{\text{ЭП}} - L_{\text{ЭП}} \Omega_{\text{э}}) \Delta i_{\text{ЭП}} - J b_0 \Delta \gamma_{\text{г}} = Q_{\text{ЭП}2} \quad (4.96)$$

где E — единичная матрица размерности 5.

Алгоритм решения нелинейной САУ (4.95), (4.78), (4.79), (4.85), (4.93) требует выполнения на k -м итерационном цикле следующих операций:

для нулевого узла шаблона вычисляются момент $M_{\text{в}}$ и вектор $u_{\text{э}}$;

по найденным на $(k-1)$ -й итерации значениям зависимых переменных (при $k=1$ — по результату выполнения предыдущего шага интегрирования) определяются матричные коэффициенты системы (4.96);

система (4.96) решается численным способом относительно поправок $\Delta i_{\text{ЭП}}$, $\Delta \gamma_{\text{г}}$;

по формулам вида (1.77) вычисляется k -е приближение переменных $i_{\text{ЭП}}$, $\gamma_{\text{г}}$;

по формулам (4.79), (4.85), (4.93) вычисляется k -е приближение переменных $\omega_{\text{г}}$, $F_{\text{э}}$, X , $\Phi_{\text{Э+}}$, $\Phi_{\text{э}}$, $\psi_{\text{ЭП}}$, $M_{\text{э}}$, $\Pi_{dq\text{э}}$, $u_{\text{э}}$.

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЯВНОПОЛЮСНЫХ СИНХРОННЫХ МАШИН

5.1. Постановка вопроса

Изложенные в главах 2 и 3 математические модели ЯСМ, в отличие от известных в литературе, рассматривающих насыщение магнитопровода как интегральный фактор, позволяют изучать влияние насыщения на параметры, характеристики и процессы машин значительно более детализированно. Анализ показал, что насыщение активной зоны, представляющей собой распределенное вдоль расточки статора нелинейное магнитное сопротивление, и полюсов, ярма ротора и ярма статора, рассматриваемых как сосредоточенные нелинейные магнитные сопротивления, оказывают различное (часто — противоположное) влияние на параметры машины и, следовательно, на ее поведение в установившихся режимах и переходных процессах. Кроме того, неравномерное насыщение в активной зоне обуславливает качественно новые эффекты, которые с помощью известных в литературе моделей принципиально не могут быть обнаружены, а именно, взаимную индукцию между взаимно ортогональными контурами и между обмотками различной полюсности. В этой главе основное внимание будет уделено рассмотрению наиболее важных для теории ЯСМ и практических ее приложений общих закономерностей, для выявления и изучения которых существенно необходима степень детализации магнитопровода, принятая в основу построения предложенных моделей.

5.2. Влияние насыщения элементов магнитопровода ЯСМ на ее магнитно-механические параметры

Матрица ММП насыщенной ЯСМ в фазных координатах состоит из $(s+n+2)^2$ элементов, каждый из которых зависит в общем случае от каждого из $s+n+1$ токов контуров и угла поворота ротора. Очевидно, что полный анализ столь большого числа многомерных зависимостей практически неосуществим, и вопрос может практически ставиться о количественном изучении и физи-

ческом осмыслении только применительно к наиболее общим особенностям, характеризующим влияние насыщения на параметры машин. С методологической точки зрения здесь, как и в теории ненасыщенной ЯСМ, оказывается целесообразным сосредоточить главное внимание на изучении свойств параметров в координатах $d, q, 0$, что обусловлено геометрической (a в случае применения ортогональных преобразований Парка — и физической) наглядностью магнитных связей в этих координатах.

Для качественного анализа влияния насыщения активной зоны на параметры ЯСМ целесообразно решать вначале упрощенную задачу, отличающуюся от рассмотренной в главах 2 и 3 дополнительными допущениями, состоящими в следующем: длина воздушного зазора одинакова на протяжении всей полюсной дуги, рабочее поле вне полюсной дуги отсутствует и магнитная проницаемость ярма статора, ярма ротора и полюсов бесконечно велика.

При этих допущениях падение магнитного напряжения в ярме статора и в индукторе отсутствует, а локальные характеристики намагничивания активной зоны во всех точках расточки статора определяются одной и той же зависимостью

$$B = B[F_{\delta z}], \quad (5.1)$$

где $F_{\delta z}$ — падение магнитного напряжения в точке X активной зоны; B — магнитная индукция в этой точке (рис. 2.1). Поэтому уравнение (3.15) здесь принимает вид

$$F_z[\eta] = F_{\delta z}[\eta], \quad (5.2)$$

где $F_z[\eta]$ — намагничивающая сила, охватываемая контуром интегрирования XX' (см. разделы 2.3.2 и 3.2), определяемая по формуле

$$F_z[\eta] = \frac{3\omega}{2a} (i_d \cos \eta + i_q \sin \eta) + F_p[\eta], \quad (5.3)$$

в которой ω, a — постоянные трехфазной обмотки статора; $F_p[\eta]$ — суммарная намагничивающая сила контуров ротора как заданная функция координаты η . Локальные дифференциальные характеристики намагничивания активной зоны при принятых допущениях также определяются во всех точках расточки статора одной и той же зависимостью

$$\lambda = \frac{dB[F_{\delta z}]}{dF_{\delta z}} = \lambda[F_{\delta z}]. \quad (5.4)$$

Уравнения (5.1)—(5.4) позволяют при заданных токах контуров определять кривую $B = B[\eta]$ распределения индукции в активной зоне вдоль расточки статора и кривую $\lambda = \lambda[\eta]$ распределения дифференциальной локальной удельной магнитной проводимости графическим способом, как показано на рис. 5.1. На этом рисунке кривые 1 и 2 отражают соответственно зависимости (5.1) и (5.4), кривые 3—6 — распределения вдоль расточки статора на-

магнитизирующих сил соответственно продольной реакции якоря, поперечной реакции якоря, контуров ротора ($F_p[\eta]$) и результирующей ($F_z[\eta]$); а кривые 7 и 8 — искомые распределения $B = B[\eta]$ и $\lambda = \lambda[\eta]$. Последовательность построения одной точки каждой из кривых 7 и 8 показана на рис. 5.1. штриховыми линиями и стрелками.

В ненасыщенной машине ввиду пропорциональности между индукцией B и создающей рабочее поле намагничивающей силой $F_z[\eta]$ зависимости $B = B[\eta]$ и $F_z = F_z[\eta]$ подобны, а зависимость

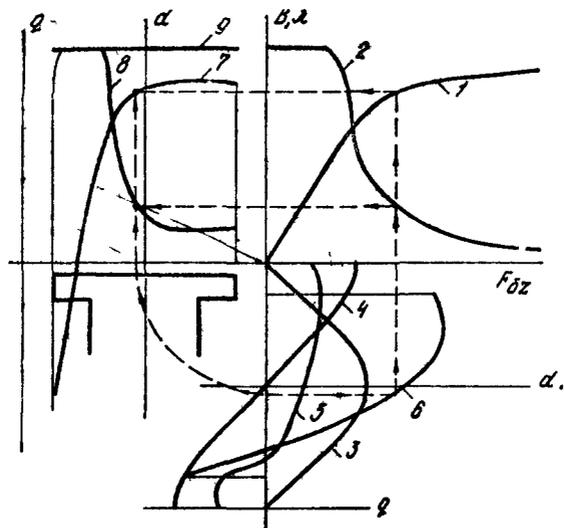


Рис. 5.1. Построение зависимостей $B = B[\eta]$ и $\lambda = \lambda[\eta]$ (кривые 7, 8) по заданным зависимостям $F_{\delta z} = F_{\delta z}[\eta]$, $B = B[F_{\delta z}]$, $\lambda = \lambda[F_{\delta z}]$ (кривые 6, 1, 2). Кривые 3, 4, 5 изображают распределение намагничивающих сил соответственно продольного контура статора, поперечного контура статора и контуров ротора; кривая 9 — распределение проводимости λ в ненасыщенной машине.

$\lambda = \lambda[\eta]$ изображается отрезком горизонтальной прямой (прямая 9 на рис. 5.1). При насыщении активной зоны зависимости $B = B[\eta]$ (кривая 7) и $F_z = F_z[\eta]$ (кривая 6) по форме существенно отличаются (кривая $B = B[\eta]$ при больших индукциях имеет уплощенный вид). Зависимость $\lambda = \lambda[\eta]$ в насыщенной машине имеет весьма сложную форму и, как видно из рис. 5.1, в общем случае характеризуется существенной несимметрией по отношению к оси полюса.

Дадим току продольного контура статора малое приращение Δi_a , сохраняя токи остальных контуров неизменными. Пусть ему соответствует приращение результирующей намагничивающей силы

$\Delta F_z[\eta] = \Delta F_d[\eta] = \Delta i_a 3w / (2a) \cdot \cos \eta$, изображенное на рис. 5.2 кривой 2. (Для наглядности приращение $\Delta F_z[\eta]$ принято на рис. 5.2 достаточно большим). Обусловленное им приращение индукции в активной зоне определяется по формуле $\Delta B[\eta] = \Delta F_d[\eta] \cdot \lambda[\eta]$. Оно изображено на рис. 5.2 кривой 3.

Косинусная и синусная составляющие основной гармоники $\Delta B_{1c} \cos \eta$, $\Delta B_{1s} \sin \eta$ кривой 3 изображены на рис. 5.2 соответственно кривыми 4 и 5.

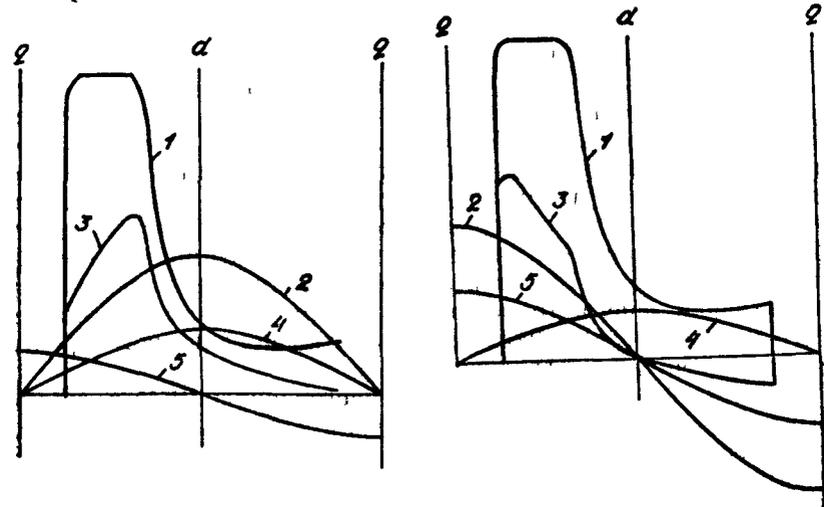


Рис. 5.2. Построение приращения поля в активной зоне, соответствующее приращению тока продольного контура статора. Кривые 1—5 соответствуют величинам $\lambda[\eta]$, $\Delta F_d \sin \eta$, $\Delta B[\eta]$, $\Delta B_{1c} \cos \eta$, $\Delta B_{1s} \sin \eta$.

Рис. 5.3. Построение приращения поля в активной зоне, соответствующее приращению тока поперечного контура статора. Кривые 1—5 соответствуют величинам $\lambda[\eta]$, $\Delta F_q \sin \eta$, $\Delta B[\eta]$, $\Delta B_{1c} \cos \eta$, $\Delta B_{1s} \sin \eta$.

Приращения рабочего потокосцепления продольного и поперечного контуров статора определяются соответственно по формулам

$$\Delta \psi_d = \Delta \Phi_d \pi r_0 w / (4a); \quad \Delta \psi_q = \Delta \Phi_q \pi r_0 w / (4a),$$

где

$$\Delta \Phi_d = \Delta B_{1c} 2l\tau / \pi; \quad \Delta \Phi_q = \Delta B_{1s} 2l\tau / \pi$$

— приращения продольного и поперечного потоков основной гармоники рабочего поля.

Собственная дифференциальная рабочая индуктивность продольного контура статора и взаимная дифференциальная индуктивность поперечного контура статора с продольным контуром соответственно

$$L_{sda} = \frac{\partial \psi_{da}}{\partial i_a} \approx \frac{\Delta \psi_{da}}{\Delta i_a}; \quad L_{sqa} = \frac{\partial \psi_{sa}}{\partial i_a} \approx \frac{\Delta \psi_{sa}}{\Delta i_a}.$$

Аналогичные рассуждения могут быть выполнены и для случая, когда малому изменению подвергается ток поперечного контура статора (см. рис. 5.3) либо ток любого из контуров индуктора. При этом отличия от рассмотренного выше случая будут состоять лишь в форме кривой распределения намагничивающей силы, соответствующей данному контуру.

Изложенные построения и формулы наглядно подтверждают существование индуктивной связи между взаимно ортогональными контурами в ЯСМ с насыщенной активной зоной. Физическое объяснение этой индуктивной связи состоит в следующем: при воздействии результирующей намагничивающей силы, распределение которой вдоль рашочки статора несимметрично относительно оси d (либо оси q), рабочее поле в активной зоне также оказывается несимметричным; соответственно несимметричной является и кривая $\lambda = \lambda[\eta]$ распределения локальной дифференциальной удельной магнитной проводимости активной зоны, поэтому любое малое приращение намагничивающей силы продольного (поперечного) контура статора вызывает приращение магнитного поля в активной зоне, которое также несимметрично и, следовательно, его основная гармоника содержит одновременно обе (продольную и поперечную) составляющие.

Отметим, что если выполнить ненасыщенную ЯСМ с переменным вдоль рашочки статора воздушным зазором, исходя из условия, что его магнитная проводимость соответствует полученной на рис. 5.1 кривой $\lambda = \lambda[\eta]$, то в такой машине также будет наблюдаться взаимная индукция между взаимно ортогональными контурами, если ось первого из них совмещена с осью тела полюса, а ось второго проходит посередине между полюсными наконечниками, и эта взаимная индукция будет обусловлена несимметрией кривой $\lambda = \lambda[\eta]$.

Проследим характер изменения рабочих индуктивностей $L_{\delta dd}$, $L_{\delta qq}$, $L_{\delta qd}$, полагая, что в машине действуют только намагничивающие силы продольной и поперечной реакции якоря, пользуясь построениями, аналогичными выполненным на рис. 5.1 и 5.2. С целью уменьшения размеров рисунков все кривые будем совмещать в одном квадранте.

На рис. 5.4 изображены кривые $\lambda = \lambda[\eta]$, построенные в соответствии с дифференциальной характеристикой намагничивания $\lambda = \lambda[F_{\delta z}]$ (кривая 1), показанной на рис. 5.1, для случая, когда на активную зону действуют только продольная намагничивающая сила реакции якоря различной величины. На рис. 5.4 видно, что при небольшой намагничивающей силе (кривая 2) активная зона насыщена только на малом ее участке в окрестности оси полюса (кривая 5); при увеличении намагничивающей силы вдвое (кривая 3) активная зона оказывается насыщенной на значительно большем участке полюсной дуги (кривая 6), а при некоторой достаточно большой намагничивающей силе (кривая 4) активная зона насыщена по всей полюсной дуге (кривая 7). При состоянии активной зоны, соответствующем кривым 4, 7, проводимость $\lambda[\eta]$ мень-

ше ее ненасыщенного значения в несколько раз (в окрестности оси d — почти на порядок). Очевидно, что если выполнить ненасыщенную ЯСМ с переменным по длине рашочки статора воздушным зазором, исходя из условия, что зависимость магнитной проводимости зазора от координаты η совпадает с кривой 7, то индуктивность продольной реакции якоря такой машины (в принятых нами обозначениях — это индуктивность $L_{\delta dd}$) будет в несколько раз меньше по сравнению с ее значением для ненасыщенной машины с постоянным по длине рашочки минимальным

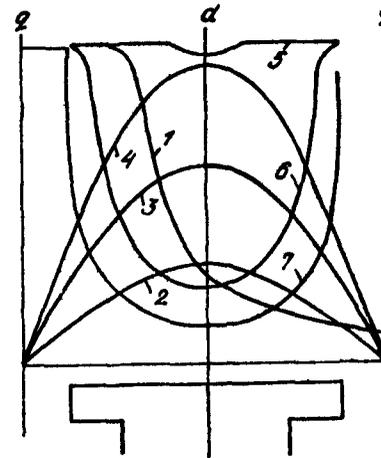


Рис. 5.4 Зависимости $\lambda = \lambda[\eta]$ (кривые 5, 6, 7), построенные по намагничивающим силам, $F_z[\eta] = F_q \sin \eta$ (кривые 2, 3, 4) согласно зависимости $\lambda = \lambda[F_{\delta z}]$ (кривая 1).

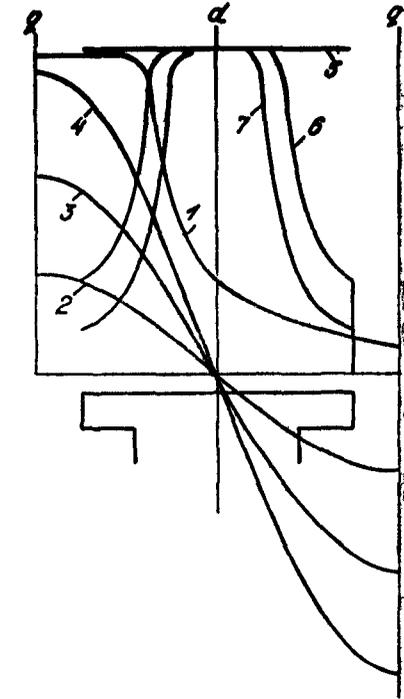


Рис. 5.5 Зависимости $\lambda = \lambda[\eta]$ (кривые 5, 6, 7), построенные по намагничивающим силам $F_z[\eta] = F_q \sin \eta$ (кривые 2, 3, 4) согласно зависимости $\lambda = \lambda[F_{\delta z}]$ (кривая 1).

ззором, соответствующим максимальному значению проводимости λ на кривой 7. К этому же результату мы придем, выполнив построения, аналогичные показанным на рис. 5.3, поочередно применительно к магнитным состояниям активной зоны, соответствующим кривым 5, 6, 7 из рис. 5.4.

Аналогичные соотношения получаются и для случаев, когда на активную зону действует только поперечная намагничивающая сила (рис. 5.5).

При одновременном продольно-поперечном намагничивании активной зоны картина значительно сложнее. Ее удобно изучать, меняя одну составляющую намагничивающей силы при фиксированных значениях второй составляющей.

Пусть на активную зону действует намагничивающая сила $F_z = F_a \cos \eta + F_q \sin \eta$. Рассмотрим качественно деформирование кривых $B = B[\eta]$ и $\lambda = \lambda[\eta]$ при $F_a = \text{const}$, $F_q = \text{var}$, полагая, что при заданном значении F_a и $F_q = 0$ активная зона достаточно сильно насыщена. Поперечная намагничивающая сила при $0 < \eta \leq \pi/2$ подмагничивает активную зону, а при $-\pi/2 < \eta \leq 0$ размагничивает ее, поэтому по мере увеличения F_q активная зона при $\eta > 0$ все более сильно насыщается и проводимость λ уменьшается, тогда как при $\eta < 0$ индукция уменьшается и проводимость λ растет (если она еще не достигла ненасыщенного значения). Для любых двух точек полюсной дуги, расположенных симметрично относительно оси d , в соответствии с характером зависимости $\lambda = \lambda[F_{\delta z}]$ увеличение проводимости λ при $\eta > 0$ превышает ее уменьшение при $\eta < 0$. Таким образом, по мере увеличения намагничивающей силы F_q , наряду с возникновением и усугублением несимметрии кривой $\lambda = \lambda[\eta]$ относительно продольной оси, среднее значение проводимости λ увеличивается. Это, естественно, приводит соответственно к появлению и возрастанию взаимной индукции между взаимно ортогональными контурами и увеличению индуктивностей $L_{\delta \delta a}$, $L_{\delta q q}$. При достаточно больших значениях F_q индукция под размагничиваемым краем полюсной дуги становится отрицательной и при дальнейшем увеличении F_q активная зона здесь начинает насыщаться полем обратного направления (начиная от точки активной зоны, соответствующей краю полюсного наконечника, постепенно в направлении оси d), что приводит к уменьшению проводимости λ на этом участке. Таким образом, в этом диапазоне изменения F_q индуктивности $L_{\delta \delta a}$, $L_{\delta q q}$ уменьшаются. Если намагничивающая сила F_a настолько мала, что при $F_q = 0$ активная зона остается ненасыщенной, то при $F_q = 0$ индуктивности $L_{\delta \delta a}$, $L_{\delta q q}$ максимальны и равны их ненасыщенным значениям, поэтому здесь при увеличении F_q возможно только их снижение.

Аналогичная качественная картина наблюдается и в случае, когда намагничивающая сила F_z изменяется за счет ее продольной составляющей при неизменной поперечной составляющей, т. е. при $F_q = \text{const}$, $F_a = \text{var}$, хотя в количественном отношении она, очевидно, несколько отличается.

Из теории обмоток машин переменного тока известно, что кривые распределения вдоль расточки статора намагничивающих сил отдельных электрических контуров часто содержат очень сильно выраженные пространственные гармоники. Так, для контура демпферной обмотки, образованного соседними ее стержнями, при большом числе стержней на полюс (и, следовательно, при малом

шаге демпферной обмотки) кривая распределения намагничивающей силы близка к δ -функции, приближение которой тригонометрическим рядом содержит гармоники с одинаковыми амплитудами. Однако практически во всех режимах и процессах ненасыщенной ЯСМ содержание высших гармоник в результирующей намагничивающей силе незначительно. В насыщенной машине относительные значения амплитуд высших гармоник результирующей намагничивающей силы часто больше, чем при отсутствии насыщения (например, в режимах динамического торможения явнополюсного синхронного генератора, при резком форсировании тока возбуждения и малых частотах вращения), но это отличие, как правило, не превышает двукратного. Это позволяет утверждать, что сформулированные выше закономерности, характеризующие влияние насыщения активной зоны ЯСМ на ее индуктивности $L_{\delta \delta a}$, $L_{\delta q q}$, $L_{\delta q d}$, остаются качественно справедливыми и при учете высших гармоник результирующей намагничивающей силы.

Для получения наглядной картины, иллюстрирующей сущность собственных и взаимных индуктивностей двух электрических контуров, функции распределения проводников которых определяются соответственно как $W_j[\eta]$ и $W_k[\eta]$, следует выполнить построения, аналогичные представленным на рис. 5.1, 5.2, т. е. построения, которые применительно к рассматриваемой задаче сводятся к следующему:

для принятой кривой $F_z = F_z[\eta]$ распределения результирующей намагничивающей силы вдоль расточки статора в соответствии с кривой $\lambda = \lambda[F_{\delta z}]$ необходимо построить зависимость $\lambda = \lambda[\eta]$;

дать току j -го контура приращение Δi_j и построить соответствующую ему кривую приращения намагничивающей силы $\Delta i_j W_j[\eta]$; рассчитать и построить кривую приращения индукции в активной зоне по формуле $\Delta B[\eta] = \lambda[\eta] \cdot \Delta i_j W_j[\eta]$;

в соответствии с функциями $W_j[\eta]$, $W_k[\eta]$ рассчитать приращения рабочих потокосцеплений j -го и k -го контуров по формулам

$$\Delta \psi_{\delta j} = \frac{p_0 c \Phi}{a_j} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W_j[\eta] \cdot \Delta B[\eta] d\eta; \quad \Delta \psi_{\delta k} = \frac{p_0 c \Phi}{a_k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W_k[\eta] \Delta B[\eta] d\eta,$$

заменив в них интегралы конечными суммами;

вычислить рабочие индуктивности $L_{\delta j j}$, $L_{\delta j k}$ по формулам

$$L_{\delta j j} = \frac{\partial \psi_{\delta j}}{\partial i_j} \approx \frac{\Delta \psi_{\delta j}}{\Delta i_j}; \quad L_{\delta k j} = \frac{\partial \psi_{\delta k}}{\partial i_j} \approx \frac{\Delta \psi_{\delta k}}{\Delta i_j}.$$

Перейдем к выяснению влияния на индуктивности ЯСМ насыщения полюсов, ярма статора и ярма ротора.

В моделях, рассмотренных в главах 2 и 3 (рис. 2.1), эти элементы магнитопровода представлены сосредоточенными нелинейными магнитными сопротивлениями, и, следовательно, здесь анализ значительно проще по сравнению с приведенным выше ана-

дизом для активной зоны. Действительно, насыщение полюсов и ярм приводит к стабилизации магнитного потока машины по продольной оси, т. е. в ЯСМ с насыщенными полюсами и ярмами приращение постоянной составляющей кривой $F_{\Sigma} = F_{\Sigma}[\eta]$ приводит к меньшему приращению продольного магнитного потока, чем в машине, в которой эти элементы магнитопровода ненасыщены. Поэтому в ЯСМ с насыщенными полюсами и ярмами индуктивности $L_{\delta dd}, L_{\delta dq}, L_{\delta ff}$ меньше, и этот эффект тем сильнее, чем больше дифференциальные магнитные сопротивления R_f и R_a . Насыще-

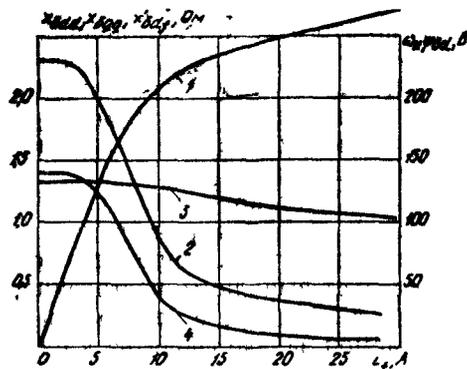


Рис. 5.6. Расчетные зависимости э. д. с. (кривая 1) и дифференциальных индуктивных сопротивлений $x'_{\delta dd}, x'_{\delta dq}, x'_{\delta ff}$ (кривые 2, 3, 4) от тока возбуждения для машины ДГС-914 в режиме холостого хода.

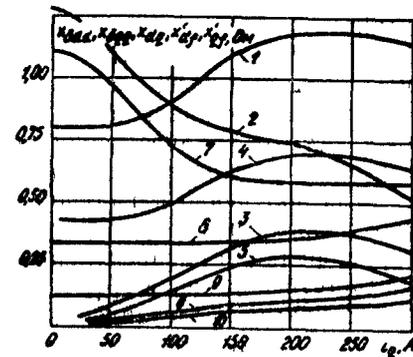


Рис. 5.7. Расчетные зависимости дифференциальных индуктивных сопротивлений $x_{\delta dd}, x_{\delta dq}, x'_{\delta f}, x'_{\delta qf}$ от тока i_q при $i_f = 10$ А (кривые 1—5) и при $i_f = 20$ А (кривые 6—10) для машины ДГС-914.

ние полюсов и ярм обуславливает также некоторое (но выраженное в меньшей степени) уменьшение абсолютного значения индуктивности L_{dq} , что непосредственно следует из рис. 5.2. Действительно, в машине с ненасыщенными полюсами и ярмами приращение Δi_q тока поперечного контура статора вызывает в активной зоне приращение индукции, причем косинусная и синусная составляющие основной гармоники этого приращения изображаются соответственно кривыми 4 и 5, которым соответствуют некоторые приращения потоков по продольной и поперечной осям. Продольный поток проходит по полюсам и ярму, и в машине, в которой эти участки магнитопровода насыщены, он будет всегда меньше, поэтому и приращение $\Delta \Phi_d$, обусловленное заданным малым приращением Δi_q , здесь будет также меньше, чем в машине с ненасыщенными полюсами и ярмами.

Изложенные выше положения иллюстрируют показанные на рис. 5.6 и 5.7 кривые зависимостей дифференциальных индуктивных сопротивлений

$$\begin{aligned} x_{\delta dd} &= \omega_n L_{\delta dd}; & x_{\delta dq} &= \omega_n L_{\delta dq}; & x_{dq} &= \omega_n L_{\delta dq}. \\ x'_{\delta f} &= k \omega_n L_{\delta f}; & x'_{\delta qf} &= k \omega_n L_{\delta qf} \end{aligned} \quad (5.5)$$

от токов i_f и i_q , рассчитанные с помощью описанной в главе 3 модели применительно к машине ДГС-914 (номинальные величины: мощность — 30 кВт, линейное напряжение обмотки статора — 230 В, ток обмотки статора — 94 А, ток возбуждения — 20 А, $2p_0 = 4$, соединение обмотки статора — звезда), где $\omega_n = 2\pi \cdot 50$ рад/с — номинальная круговая частота; k — коэффициент приведения обмотки возбуждения к обмотке статора.

В машине ДГС-914 воздушный зазор увеличивается по мере удаления от оси полюса. Зависимости $B = B[\eta]$; $\lambda = \lambda[\eta]$, соот-

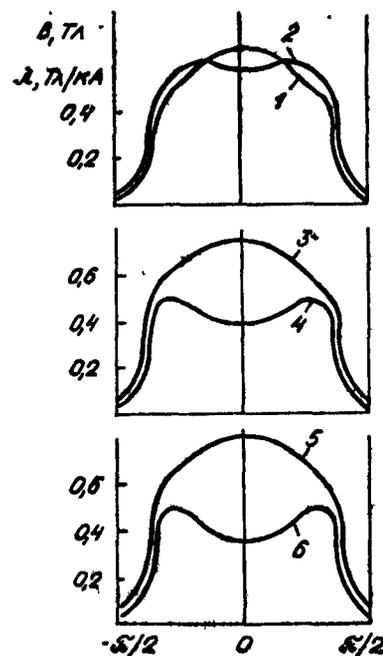


Рис. 5.8. Расчетные зависимости $B = B[\eta]$, $\lambda = \lambda[\eta]$ для машины ДГС-914 в режиме холостого хода при $i_f = 10$ А (кривые 1, 2), $i_f = 20$ А (кривые 3, 4), $i_f = 30$ А (кривые 5, 6).

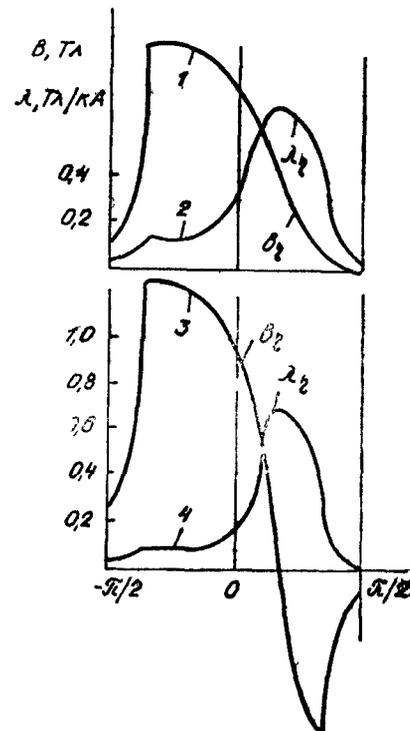


Рис. 5.9. Расчетные зависимости $B = B[\eta]$, $\lambda = \lambda[\eta]$ для машины ДГС-914 в установившихся режимах при $i_f = 10$ А, $i_q = -100$ А (кривые 1, 2) и $i_f = 10$ А, $i_q = -300$ А (кривые 3, 4).

ветствующие некоторым режимам из рис. 5.6 и 5.7, показаны на рис. 5.8 и 5.9.

Как видно из рис. 5.6, при холостом ходе неравенство $x_{\delta dd} > x_{\delta dq}$ наблюдается только при $i_f < 8$ А, а при токе возбуждения, равном номинальному, параметр $x_{\delta dd}$ в три раза меньше параметра $x_{\delta dq}$.

Согласно рис. 5.7, индуктивная связь между продольным и поперечным контурами обмотки статора отнюдь не является слабой, как это часто полагают. Так, при магнитном состоянии, определяемом токами $i_f = 10\text{А}$; $i_a = -250\text{А}$, имеем $x_{\delta dd} = 0,64\ \text{Ом}$, тогда как $x_{\delta q} = 0,37\ \text{Ом}$, т. е. отношение $x_{\delta q}/x_{\delta dd}$ составляет 0,58.

Приведенные примеры физического объяснения сущности магнитных связей в насыщенной ЯСМ с использованием дифференциальных параметров элементов магнитопровода — проводимости λ как функции координаты η и сопротивлений R_f и R_a — достаточно полно иллюстрируют эвристические возможности такого подхода. Отметим, что его применение оказывается эффективным и при физическом объяснении электромагнитных процессов ЭМП других типов.

Дополнительные сведения о влиянии насыщения элементов магнитопровода ЯСМ на ее параметры приводятся в последующих разделах, поскольку это необходимо для уяснения особенностей переходных процессов и статических характеристик в машинах с насыщающимся магнитопроводом.

5.3. Влияние насыщения элементов магнитопровода ЯСМ на ее переходные процессы

Обычно для оценки влияния степени насыщения магнитопровода ЯСМ на переходные процессы пользуются характеристикой холостого хода, полагая, что она с достаточной полнотой отражает магнитное состояние машины не только при холостом ходе, но и наличии токов в обмотке якоря и в демпферной обмотке. Это равносильно предположению, что в ЯСМ, как и в машинах неявнополюсного типа, учет насыщения может быть выполнен на основе одного «интегрального» показателя, которым является положение «рабочей точки» на характеристике холостого хода, т. е., что различие уровней насыщения отдельных участков магнитопровода (зубцовой зоны, полюсов и ярм статора и ротора) не является существенным. С целью проверки правомерности такой предпосылки и количественной оценки влияния насыщения элементов магнитопровода на переходные процессы ЯСМ были рассмотрены четыре варианта магнитопровода, отличающиеся друг от друга только характеристиками намагничивания сталей, из которых выполнены зубцовая зона, полюса и ярма статора и ротора:

первый — с характеристиками намагничивания сталей, совпадающими с начальными прямолинейными участками характеристик намагничивания для сталей, применяемых в реальной машине;

второй — соответствующий реальной машине;

третий — с насыщающейся только активной зоной, т. е. с ненасыщенными полюсами и ярмами и так подобранной характеристи-

кой намагничивания зубцовой зоны, чтобы характеристика холостого хода совпадала с таковой для реальной машины;

четвертый — с насыщающимися только полюсами и ярмами, т. е. с ненасыщенной зубцовой зоной и так подобранными характеристиками намагничивания полюсов и ярм, чтобы характеристика холостого хода совпадала с таковой реальной машины; этот вариант соответствует машине с магнитной цепью, насыщающейся только по продольной оси.

Для упомянутых вариантов магнитопровода изучались с помощью математического эксперимента различные переходные процессы ряда ЯСМ с номинальными мощностями от единиц киловатт до сотен мегаватт в широких пределах изменения их токов, напряжений моментов на валу, частот вращения, значений и степени несимметрии нагрузочных сопротивлений и других переменных. Результаты этого эксперимента рассмотрены на трех примерах, соответствующих исследованию на модели в фазных координатах процессов синхронного генератора, работающего на активно-индуктивную нагрузку через выпрямитель, и на модели в координатах $d, q, 0$ — процессов синхронного генератора, включаемого на симметричную активно-индуктивную нагрузку, и синхронного двигателя, внезапно нагружаемого постоянным моментом на валу:

В первом примере рассмотрим генератор ГОМ 16Т/230 (номинальные величины: мощность — 16 кВт; линейное напряжение обмотки статора — 230 В; ток обмотки статора — 50,2 А; коэффициент мощности — 0,8; ток возбуждения — 10,2 А; частота 50 Гц; $2p_0 = 2$ соединение обмотки статора — звезда). Характеристика холостого хода $E_0 = \omega_n \psi_{\delta d} / \sqrt{2} = E_0 [i_f]$ и характеристика короткого замыкания $I_k = i / \sqrt{2} = I_k [i_f]$ представлены на рис. 5.10. Переходный процесс при включении этого генератора через тиристорный мостовой выпрямитель на последовательно соединенные активное сопротивление 4 Ом и индуктивность 0,0064 Гн при угле зажигания $\alpha_s = 0$ описывается кривыми, показанными на рис. 5.11—5.14. Начальными условиями для этого процесса являются: угол поворота ротора $\gamma_{(0)} = -\pi/2$; ток возбуждения для машин при втором, третьем и четвертом вариантах магнитопровода $i_{f(0)} = 10,2\text{А}$, а для машины с ненасыщенным магнитопроводом $i_{f(0)} = 2,5\text{А}$ (при этом согласно рис. 5.10 э. д. с., найденная по характеристике холостого хода ненасыщенной машины, изображаемой прямой Oa , равна э. д. с. по кривой 1 для тока $i_{f(0)} = 10,2\text{А}$).

Из рис. 5.11 видно, что для магнитопровода, насыщающегося только по продольной оси, амплитуды токов фаз почти на 40%

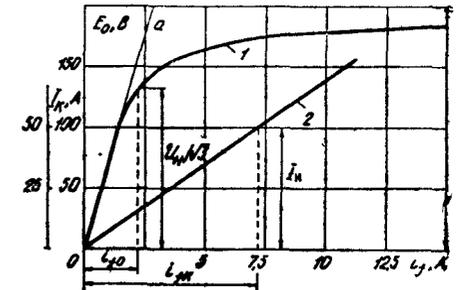


Рис. 5.10. Характеристики холостого хода (кривая 1) и короткого замыкания (кривая 2) генератора ГОМ 16Т/230.

больше, чем в ненасыщенной машине. С увеличением сопротивления нагрузки это расхождение, как показал расчет, монотонно возрастает. Для $\omega_{нt} > 4\pi$, т. е. для квазистационарного процесса, это физически объясняется явлением, названным в [105] эффектом поперечного самокомпандирования, который состоит в следующем. При включении синхронного генератора на симметричную трехфазную активную нагрузку в установившемся режиме действуют неизменные во времени продольная размагничивающая и поперечная реакции якоря. Представим рабочий поток Φ_{δ} как гео-

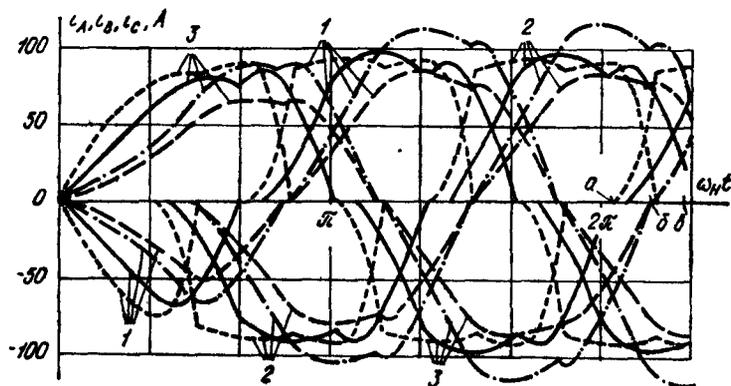


Рис. 5.11. Расчетные осциллограммы токов i_A, i_B, i_C (кривые 1, 2, 3) генератора ГОМ 16Т/230, включаемого на активно-индуктивную нагрузку через мостовой тиристорный выпрямитель для четырех вариантов магнитопровода:

— — — ненасыщенного; — — — реального; - - - с насыщающейся только зубцовой зоной, - . - с насыщающимися только полюсами и ярами.

метрическую сумму продольной $\Phi_{\delta d}$ и поперечной $\Phi_{\delta q}$ его составляющих. Тогда $\Phi_{\delta} = \sqrt{\Phi_{\delta d}^2 + \Phi_{\delta q}^2}$. В ненасыщенной машине при $x_{dd} > x_{qq}$ соотношение между отрицательным приращением составляющей $\Phi_{\delta d}$ (за счет продольного размагничивания) и положительным приращением составляющей $\Phi_{\delta q}$ (за счет поперечного намагничивания) всегда таково, что рабочий поток с увеличением тока нагрузки уменьшается [9, 11, 27]. В машине же с насыщенными полюсами и ярами продольная составляющая рабочего потока мало чувствительна к изменениям продольной реакции якоря, т. е. поток $\Phi_{\delta d}$ с увеличением тока нагрузки почти не уменьшается, тогда как поток $\Phi_{\delta q}$ растет пропорционально току i_q (поскольку зубцовая зона ненасыщена). Поэтому рабочий поток Φ_{δ} , а вместе с ним напряжение и ток обмотки статора оказываются в такой машине большими, чем в ненасыщенной. Эти рассуждения применимы и для рассматриваемого переходного процесса, поскольку здесь, как видно из рис. 5.14, годограф вектора \vec{i} тока статора, построенный в неподвижной системе координат, мало отличается от кругового.

Как видно из рис. 5.11, 5.12, в машине с насыщающейся только зубцовой зоной амплитуды токов фаз и пульсации тока возбуждения увеличиваются, а углы коммутации и пульсации тока нагрузки уменьшаются по сравнению с ненасыщенной машиной, тогда как в машине с насыщающимися только полюсами и ярами амплитуды токов фаз и пульсации тока нагрузки увеличиваются, а углы коммутации и пульсации тока возбуждения остаются почти неизменными. Расчеты процессов для углов зажигания $\alpha_3 \neq 0$ по-

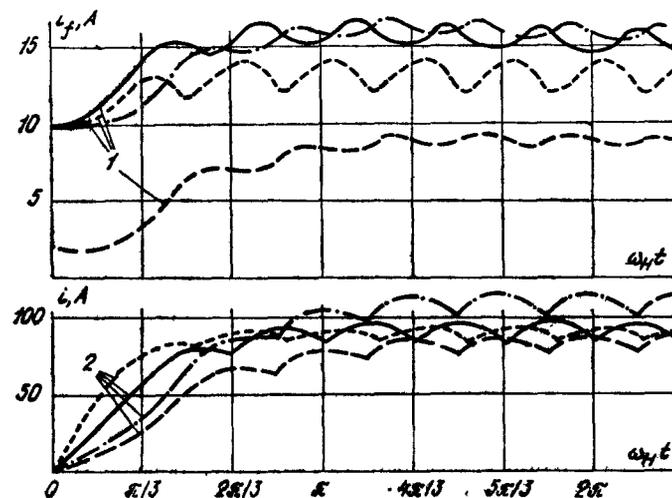


Рис. 5.12. Расчетные осциллограммы тока возбуждения (кривые 2), соответствующие процессу, изображенному на рис. 5.11

казали, что с увеличением α_3 разница в относительных пульсациях выпрямленного тока для третьего и четвертого вариантов магнитопровода снижается, а отношение углов коммутации возрастает.

Из рис. 5.12 следует, что при всех трех вариантах насыщающегося магнитопровода ток возбуждения как в переходном процессе, так и в установившемся режиме значительно (в несколько раз) больше, чем в машине с ненасыщенным магнитопроводом.

Отличия переходных процессов для рассмотренных четырех вариантов магнитопровода основаны на различиях параметров. Остановимся кратко на сравнении зависимостей параметров от времени на примере двух параметров — x_{AA} и x_{AB} (рис. 5.13).

Для ненасыщенной машины, как известно [8, 19], $x_{AA} = a_1 + a_2 \cos 2\gamma$, где a_1, a_2 — положительные постоянные. Параметр x_{AA} достигает максимума при $\gamma = 0$ и минимума при $\gamma = \pi/2$. Физически это объясняется тем, что при $\gamma = 0$ осевая линия намагнивающей силы фазы А совпадает с осью d и тогда же магнитная проводимость на пути потока, создаваемого фазой А, максимальна, а

при $\gamma = \pi/2$ осевая линия намагничивающей силы фазы A совпадает с осью q , и тогда проводимость по пути этого потока минимальна. На рис. 5.13 видно, что для четвертого варианта магнитопровода характер зависимости $x_{AA} = x_{AA}[\gamma]$ противоположен. Физическое объяснение следует искать в соотношениях соответствующих дифференциальных магнитных проводимостей. При $\gamma = \pi/2$ (рис. 5.15, б) магнитная проводимость на пути потока, создаваемого фазой A ,

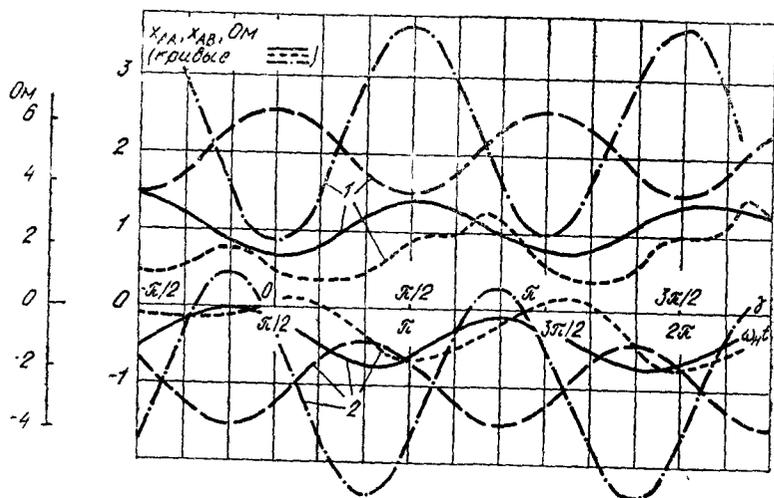


Рис. 5.13. Расчетные зависимости $x_{AA} = x_{AA}[\gamma]$ (кривые 1) и $x_{AB} = x_{AB}[\gamma]$ (кривые 2), соответствующие процессу, изображенному на рис. 5.11.

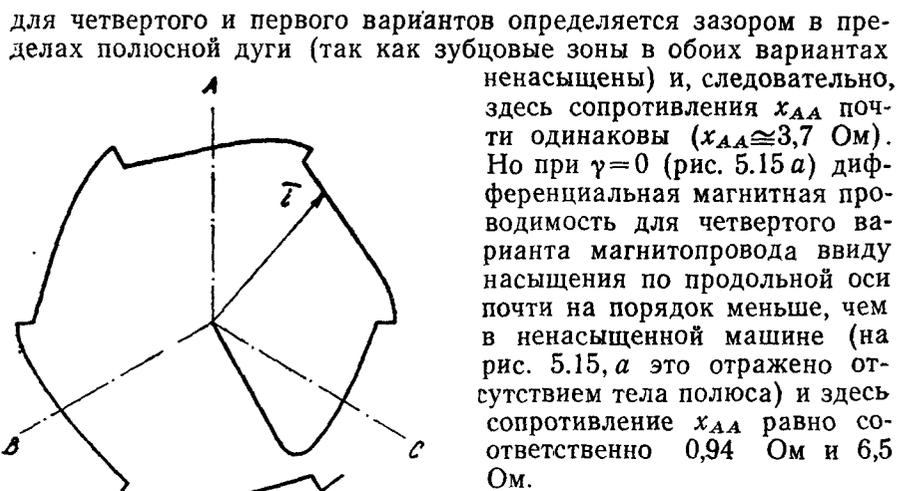


Рис. 5.14. Годограф вектора \vec{i}_t , построенный по данным рис. 5.11.

для четвертого и первого вариантов определяется зазором в пределах полюсной дуги (так как зубцовые зоны в обоих вариантах ненасыщены) и, следовательно, здесь сопротивления x_{AA} почти одинаковы ($x_{AA} \approx 3,7$ Ом). Но при $\gamma = 0$ (рис. 5.15 а) дифференциальная магнитная проводимость для четвертого варианта магнитопровода ввиду насыщения по продольной оси почти на порядок меньше, чем в ненасыщенной машине (на рис. 5.15, а это отражено отсутствием тела полюса) и здесь сопротивление x_{AA} равно соответственно 0,94 Ом и 6,5 Ом.

Аналогично объясняется и противоположный характер зависимости $x_{AB} = x_{AB}[\gamma]$.

Интересным является тот факт, что в машине, насыщающейся только по продольной оси, сопротивление x_{AB} может принимать положительные значения, хотя оси фаз A и B сдвинуты на угол $2\pi/3$. Объяснение следует из рис. 5.15, в, построенного для $\gamma = -\pi/6$, при котором, как видно из рис. 5.13, параметр x_{AB} достигает положительного максимума.

Для анализа зависимостей параметров от угла γ для варианта с насыщающейся только зубцовой зоной обратимся к рассмотрению кривых $\lambda = \lambda[\eta]$, представленных на рис. 5.16. Как уже от-

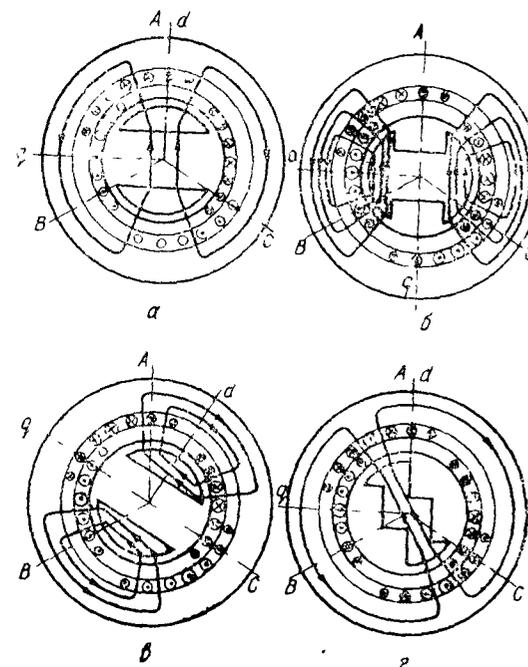


Рис. 5.15. Схемы, иллюстрирующие магнитные связи насыщенной ЯСМ в фазных координатах.

мечалось, реакция якоря в квазистационарном процессе мало отличается от круговой, поэтому кривая $B = B[\eta]$ и соответственно кривая $\lambda = \lambda[\eta]$ деформируется на протяжении периода незначительно. Для объяснения характера зависимости $x_{AA} = x_{AA}[\gamma]$ заменим реальную зависимость $\lambda = \lambda[\eta]$ идеализированной, показанной на рис. 5.16 крестиками. Физически такая идеализация равнозначна значительному (бесконечному) увеличению зазора под правой половиной полюсной дуги и замене неравномерно насыщенной зубцовой зоны под левой половиной полюсной дуги равномерно насыщенной зубцовой зоной. При этом для $\gamma = 0$ воспользуемся

рисунком 5.15, г, на котором указанная идеализация отражена вырезом в полюсе. Очевидно, что при вращении ротора максимум проводимости на пути потока, создаваемого приращением тока в фазе А, а следовательно, и максимум параметра x_{AA} будет наблюдаться не при $\gamma_m = 0$, а при $\gamma_m < 0$ (на рис. 5.13 $\gamma_m = -\pi/6$). Это объясняет сдвиг максимума кривой $x_{AA} = x_{AA}[\gamma]$ для машины с насыщающейся только зубцовой зоной в сторону отрицательных углов по сравнению с ненасыщенной машиной. Если бы кривая $\lambda = \lambda[\eta]$ оставалась во времени неизменной, то зависимость $x_{AA} = x_{AA}[\gamma]$ описывалась бы выражением $x_{AA} = a_1' - a_2' \cos 2(\gamma - \gamma_m)$.

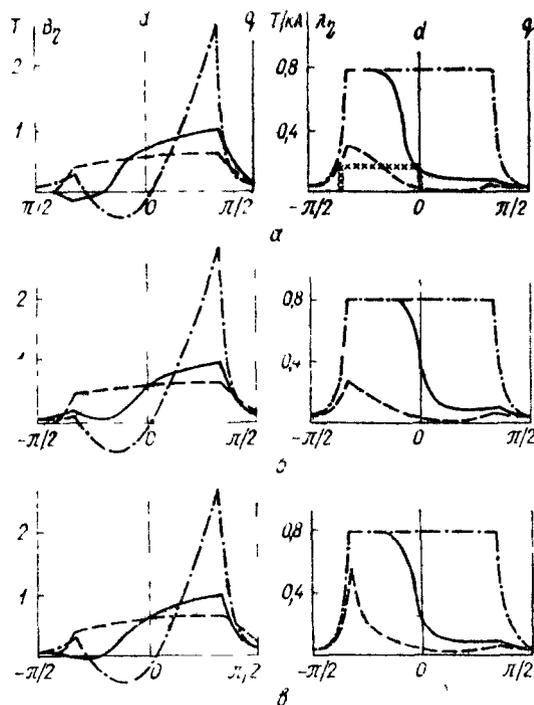


Рис. 5.16. Расчетные зависимости $B = B[\eta]$ (слева) и $\lambda = \lambda[\eta]$ (справа) для моментов времени, соответствующих отмеченным на рис. 5.11 точками а, б, в при трех вариантах магнитопровода: — — — реальном; - - - с насыщающейся только зубцовой зоной; - · - с насыщающимися только полюсами и ярмами.

Однако в действительности реакция якоря не является круговой, что приводит к деформированию кривой $\lambda = \lambda[\eta]$ (рис. 5.16) и, следовательно, к усложнению вида зависимости $x_{AA} = x_{AA}[\gamma]$ (рис. 5.13).

В реальной машине на зависимости параметров от угла γ влияет насыщение всех элементов магнитопровода, и эти зависимости в той или иной степени обладают свойствами, характерными для третьего и четвертого вариантов магнитопровода.

Общей особенностью для зависимостей всех параметров для второго, третьего и четвертого вариантов магнитопровода по сравнению с ненасыщенным является уменьшение их максимальных значений. Так, из кривых рис. 5.13 видно, что сопротивление x_{AA} для ненасыщенной машины изменяется в пределах 3,7...6,5 Ом, тогда как для трех последних вариантов эти пределы соответственно равны 0,7...1,44, 0,38...0,8 и 0,94...3 Ом.

Результаты математического моделирования в координатах d, q применительно к автономной работе синхронного генератора рассмотрим на примере машины СГД-2-17-36-16 (номинальные величины: мощность — 630 кВт; линейное напряжение обмотки статора — 6,3 кВ; ток обмотки статора — 72,5 А; коэффициент мощности — 0,8; ток возбуждения — 225 А; частота — 50 Гц; $2p_0 = 16$; соединение обмотки статора — звезда). Характеристики холостого хода и короткого замыкания этой машины представлены на рис. 5.17.

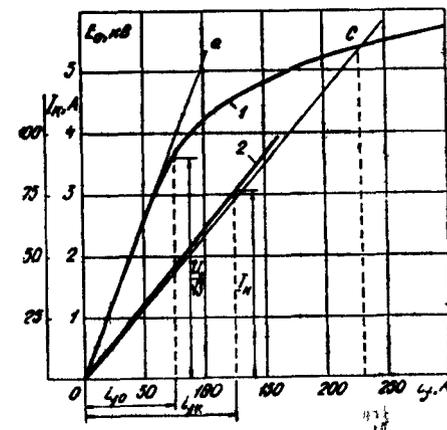


Рис. 5.17. Характеристики холостого хода (кривая 1) и короткого замыкания (кривая 2) генератора СГД-2-17-36-16.

Расчетные кривые, описывающие переходный процесс этого генератора при включении на последовательно соединенные активное сопротивление 4 Ом и индуктивность 0,095 Гн при начальном значении тока возбуждения $i_{f(0)} = 225$ А и постоянной частоте вращения, для интервала времени $0 \leq \omega t \leq 2\pi$ показаны на рис. 5.18—5.20. Здесь, в отличие от предыдущего примера, ток возбуждения для варианта машины с ненасыщенным магнитопроводом принят таким же, как и для остальных вариантов магнитопровода, поэтому начальное значение напряжения обмотки статора в соответствии с прямолинейной характеристикой холостого хода (прямая 0а на рис. 5.17) составляет 12 кВ, т. е. оно в 3,3 раза выше номинального.

Сравнение переходных процессов, рассчитанных для варианта магнитопровода с насыщающимися только полюсами и ярмами и для варианта с насыщающейся только зубцовой зоной, показывает, что в данной задаче перераспределение насыщения между этими элементами магнитопровода оказывает на процессы в генераторе меньшее влияние, чем в предыдущей задаче. Это объясняется относительно меньшим начальным током возбуждения (для про-

цессов на рис. 5.11 отношение $i_{f(0)}/i_{f0}$ согласно рис. 5.10 составляет $10,2/2,4=4,25$, а для процесса на рис. 5.18 согласно рис. 5.17 оно равно $230/75=3,3$, а также тем обстоятельством, что в машине ГОМ 16Т/230 воздушный зазор постоянен по длине полюсной дуги, тогда как в машине СГД-2-17-36-16 он расширяется по мере удаления от оси полюса.

Сопоставление представленных на рис. 5.18—5.21 процессов для реальной машины и машины с насыщающимися только полюсами и ярмами показывает, что расчет с учетом насыщения только по продольной оси дает удовлетворительные результаты. Однако было

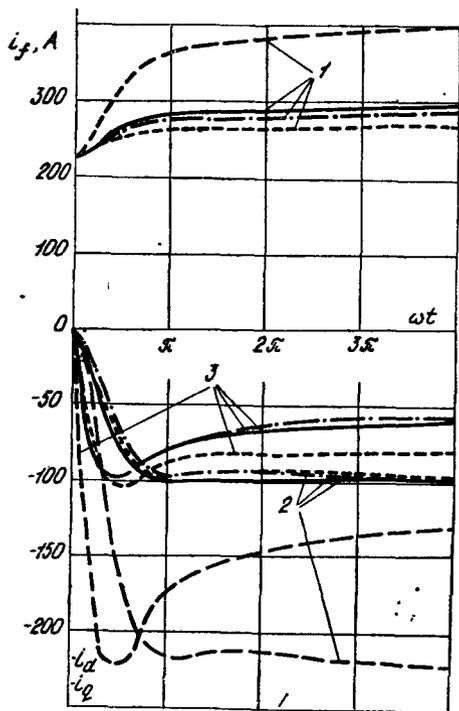


Рис. 5.18. Расчетные осциллограммы тока возбуждения (кривые 1), тока i_a (кривые 2) и тока i_q (кривые 3) генератора СГД-2-17-36-16 при включении на активную нагрузку для четырех вариантов магнитопровода:

--- ненасыщенного; ————— реального; - - - - с насыщающейся только зубцовой зоной; - · - · с насыщающимися только полюсами и ярмами.

бы ошибочным распространять этот вывод на любые переходные процессы синхронного генератора при его автономной работе на симметричную линейную нагрузку. Математический эксперимент свидетельствует, что при включении генератора на активную и

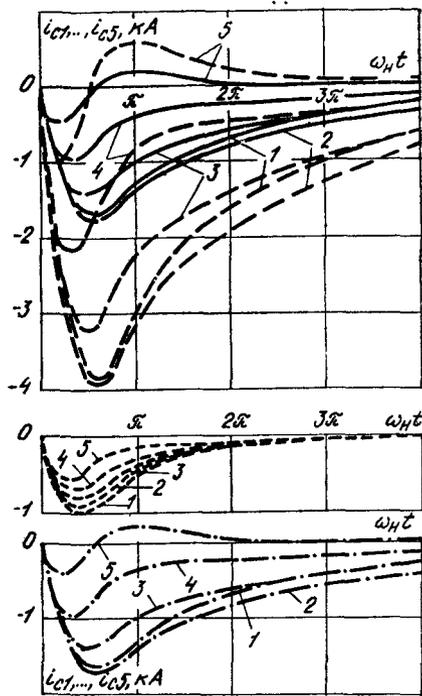


Рис. 5.19. Расчетные осциллограммы токов в 1-м, ..., 5-м стержнях демпферной обмотки (кривые 1, ..., 5), соответствующие процессу, изображенному на рис. 5.18.

тем более на активно-емкостную нагрузку потеря точности из-за неучета переменного по длине полюсной дуги насыщения зубцовой зоны может достигать десятков процентов.

Остановимся на обсуждении вопроса о допустимости применения для расчета в координатах $d, q, 0$ переходных процессов автономно работающего генератора методов, учитывающих насыщение магнитопровода с помощью статических индуктивностей.

Для этой цели воспользуемся результатами расчета переходного процесса генератора СГД-2-17-36-16 при рассмотренных выше параметрах нагрузки и начальных условиях на интервале медленных изменений токов, который определим условно как интервал

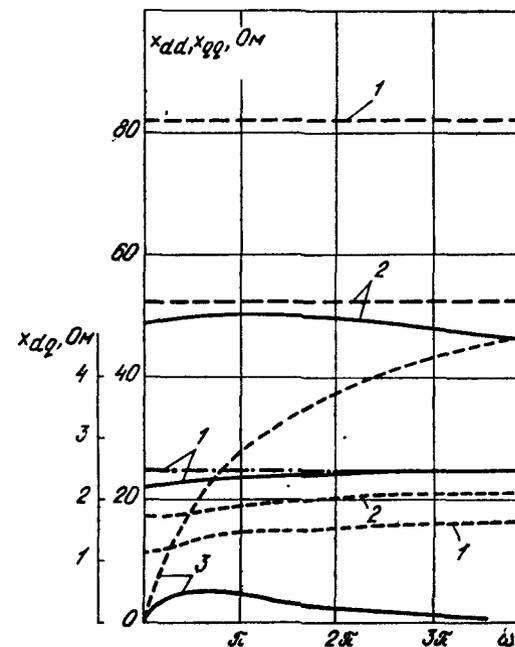


Рис. 5.20. Расчетные зависимости параметров x_{dd} (кривые 1), x_{qq} (кривые 2) и x_{dq} (кривые 3) от времени, соответствующие процессу, изображенному на рис. 5.18.

$4\pi \leq \omega_{нт} \leq t_{\infty}$, где t_{∞} — практическая длительность процесса, определяемая как время, по истечении которого каждая из переменных отличается от установившегося значения не более, чем на 1%. Сравним три метода расчета, основанные соответственно на применении модели, описанной в главе 3, учете насыщения по продольной оси с помощью постоянных статических индуктивностей и учете насыщения по продольной оси с помощью переменных статических индуктивностей. В основу второго из упомянутых методов примем уравнения Парка ненасыщенной ЯСМ, причем ин-

дуктивности, относящиеся к поперечным контурам, примем равными их ненасыщенным значениям, а индуктивности, относящиеся к продольным контурам, вычислим как частные от деления их ненасыщенных значений на постоянный коэффициент насыщения по продольной оси, определяемый общепринятым способом, т. е. как отношение э. д. с. E_0' , найденной по прямой Oa (рис. 5.17) для тока возбуждения $i_f = i_f(0)$, к э. д. с. E_0 , найденной по кривой 1 (рис. 5.17), для этого же тока возбуждения. В основу третьего метода примем также уравнения Парка, но будем вычислять индуктивности, относящиеся к продольным контурам, как частные от деления их ненасыщенных значений на переменный

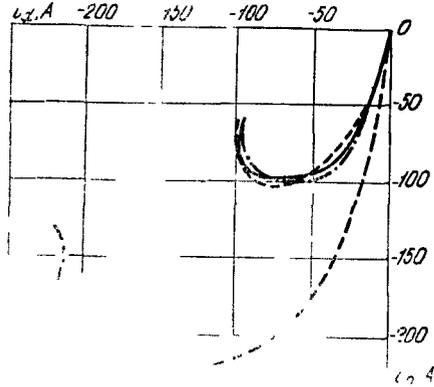


Рис. 5.21. Голографы вектора \vec{i} , построенного по данным рис. 5.18.

коэффициент насыщения, определяемый тем же способом в соответствии с текущим (переменным) значением э. д. с. $E_0 = \omega_n \Psi_{\delta d} / \sqrt{2}$ по реальной характеристике холостого хода.

Расчетные осциллограммы тока возбуждения и тока $i = \sqrt{i_a^2 + i_q^2}$, полученные перечисленными методами, показаны на рис. 5.22. Сопоставляя их, видим, что длительность переходного процесса, рассчитанного по первому, второму и третьему методам, равна соответственно 0,52, 1,1 и 1,65 с, т. е. с этой точки зрения расчет как по постоянным, так и по переменным насыщенным значениям статических индуктивностей приводит к неудовлетворительным результатам. Кроме того, расчет по постоянным насыщенным значениям статических индуктивностей (который, в сущности, соответствует расчету для ненасыщенной машины, характеристика холостого хода которой определяется прямой Oa на рис. 5.17) приводит к неправильному значению установившегося тока статора (согласно рис. 5.22 — заниженному на 30%).

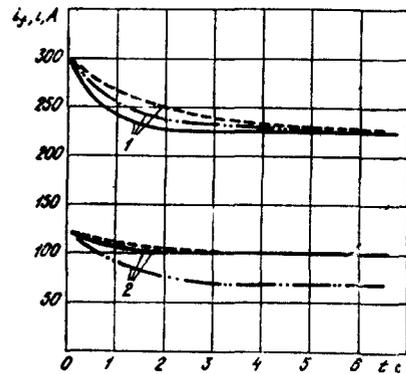


Рис. 5.22. Расчетные осциллограммы токов i_f (кривые 1) и i (кривые 2) генератора СГД-2-17-36-16 при включении на активно-индуктивную нагрузку, соответствующие интервалу медленных изменений токов и рассчитанные различными способами:
 — — — без учета насыщения;
 — — — по модели, описанной в разделе 3;
 - - - - по постоянным статическим индуктивностям; - - - - по переменным статическим индуктивностям.

Полученные результаты являются весьма общими и имеют физическое обоснование, состоящее в следующем. На интервале медленных изменений токов демпферная обмотка практически не принимает участия в электромагнитном процессе (из рис. 5.19 видно, что уже при $\omega_n t > 4\pi$ ее токи составляют менее 20% от их максимальных значений). Цепь статора из-за активного сопротивления нагрузки обладает большим затуханием, тогда как затухание цепи возбуждения, несмотря на насыщение, снижающее индуктивность обмотки возбуждения, остается весьма малым. Следовательно, в первом приближении (недопустимо грубом для инженерных расчетов, но полезном для уяснения физической сущности процесса) машину можно рассматривать как систему из двух контуров (обмотки возбуждения и обмотки статора) с практически односторонней связью между ними, состоящей в том, что процесс в обмотке возбуждения протекает независимо, а процесс в обмотке статора определяется рабочим потоком, определяемым действием обмотки возбуждения, но он не оказывает обратного действия на последнюю. Таким образом, процесс в обмотке возбуждения описывается только одним уравнением

$$u_f = \frac{d\psi_f}{dt} + r_f i_f = L_{ff} \frac{di_f}{dt} + r_f i_f \quad (5.6)$$

при начальном условии $i_f = i_{f \max}$, где $i_{f \max}$ — ток возбуждения в момент $\omega_n t = 4\pi$. В уравнении (5.6) параметр L_{ff} — это дифференциальная индуктивность обмотки возбуждения, которая на насыщенном участке характеристики холостого хода всегда меньше (при больших насыщениях — на порядок и более) по сравнению со статической индуктивностью. Очевидно, что подстановка в уравнение (5.6) вместо дифференциальной индуктивности обмотки возбуждения ее статической индуктивности, соответствующей точке c кривой 1 на рис. 5.17, приводит к недопустимому искажению процесса, в частности, по скорости его затухания. Применение же в третьем из рассмотренных методов переменной статической индуктивности дополнительно усугубляет это искажение, поскольку по мере перемещения вдоль кривой 1 от точки c влево (соответствующего постепенному затуханию тока возбуждения до u_f/r_f) статическая индуктивность растет по сравнению с ее значением в точке c).

Остановимся кратко на результатах математического моделирования ЯСМ при включении ее обмотки статора на сеть бесконечной мощности на примере двигателя СДСЗ-17-41-16 (номиналь-

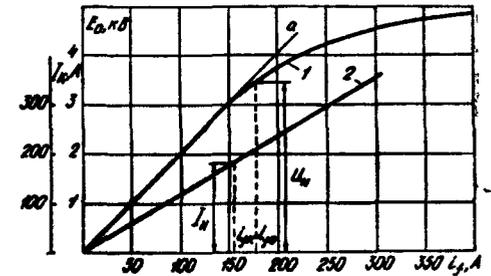


Рис. 5.23. Характеристики холостого хода (кривая 1) и короткого замыкания (кривая 2) двигателя СДСЗ-17-41-16.

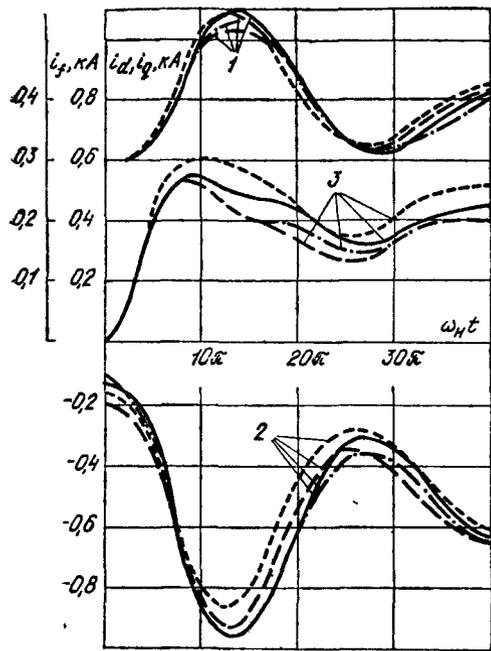


Рис. 5.24. Расчетные осциллограммы тока возбуждения (кривые 1), тока i_d (кривые 2) и тока i_q (кривые 3) двигателя СДСЗ-17-41-16 при внезапном нагружении моментом $M_b = 3M_n$ для четырех вариантов магнитопровода: — — — — — ненасыщенного, — — — — — реального, — — — — — с насыщающейся только зубцовой зоной; — — — — — насыщающимися только полюсами и ярами.

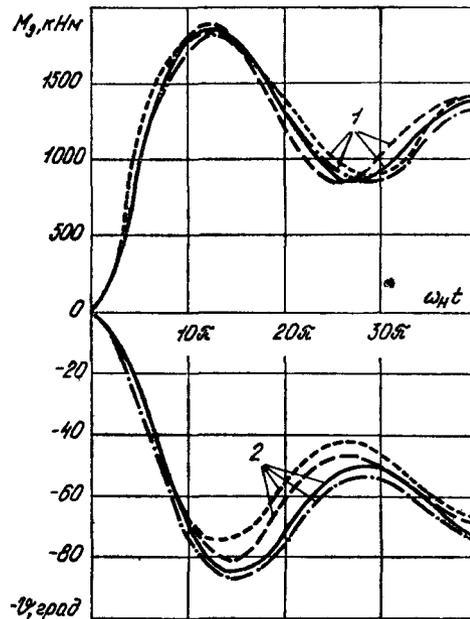


Рис. 5.25. Расчетные осциллограммы электромагнитного момента (кривые 1), и угла выбега (кривые 2), соответствующие процессу, изображенному на рис. 5.24.

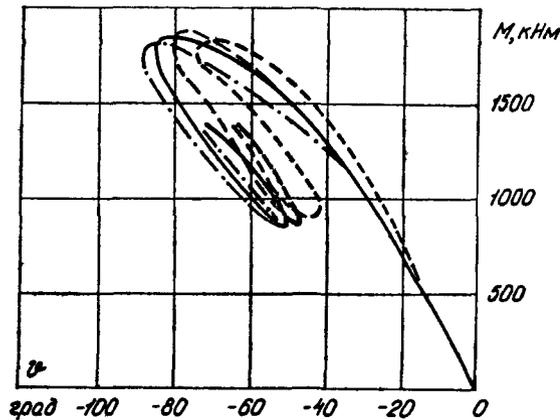


Рис. 5.26. Расчетные динамические угловые характеристики двигателя СДСЗ-17-41-16, построенные по данным рис. 5.25.

ные величины: мощность — 1600 кВт; линейное напряжение обмотки статора — 6 кВ; ток обмотки статора — 181А; коэффициент мощности — 0,9; ток возбуждения — 290А; $2p_0 = 16$; соединение обмотки статора — звезда. Характеристики холостого хода и короткого замыкания двигателя приведены на рис. 5.23.

Переходный процесс, соответствующий внезапному нагружению этого двигателя моментом на валу $M_b = 3M_n$ при номинальных напряжениях питания обмоток статора и возбуждения, иллюстрируется кривыми, показанными на рис. 5.24—5.27. Как видно из рис. 5.23, этот двигатель имеет относительно большой воздушный зазор ($i_{f0}/i_{fn} = 117/155 = 1,14$) и его насыщение по продольной оси при номинальном напряжении на обмотке статора незначительно. Тем не менее осциллограммы токов i_d , i_q , i_f , электромагнитного момента и угла выбега ротора заметно отличаются от рассчитанных при отсутствии насыщения.

Из сопоставления осциллограмм, соответствующих различным вариантам магнитопровода, следует, что отличия обусловлены в первую очередь насыщением зубцовой зоны. Из сравнения динамических угловых характеристик (рис. 5.26) видно, что насыщение зубцовой зоны полюсов вместе с ярами оказывает на эти характеристики противоположное действие.

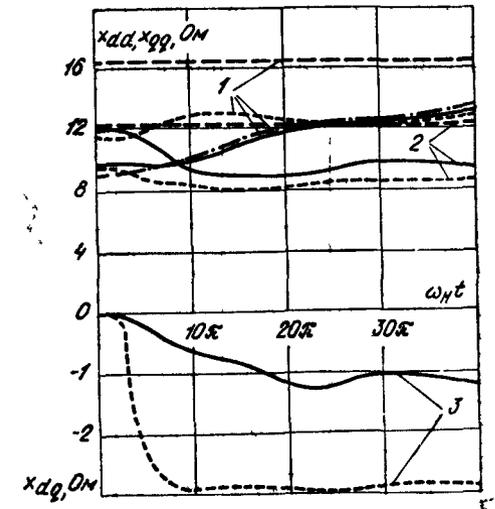


Рис. 5.27. Расчетные зависимости параметров x_{dd} (кривые 1), x_{dq} (кривые 2) и x_{dg} (кривые 3) от времени, соответствующие процессу, изображенному на рис. 5.24.

5.4. Влияние насыщения элементов магнитопровода ЯСМ на ее статические характеристики

Проиллюстрируем влияние насыщения магнитопровода ЯСМ и отдельных его элементов на статические характеристики на примерах, которые представляют интерес для практики, однако не отражены в литературе.

При работе ненасыщенного синхронного генератора на емкостную нагрузку напряжение на его обмотке статора, как известно, в определенном диапазоне сопротивлений нагрузки выше напряжения при холостом ходе, что объясняется намагничивающим

действием продольной реакции якоря. Внешние характеристики ненасыщенного генератора изображаются эллипсами, главные оси которых пропорциональны току возбуждения. Насыщение магнитопровода, как это видно из рис. 5.28, приводит к деформированию этих характеристик. Кроме того, оно вносит глубокие качественные изменения в работу генератора, существенно влияя на его устойчивость. Проследим это на примере внешней характеристики, соответствующей току $i_f=5\text{A}$. На рис. 5.28 эта характеристика разделена точками B и C на три участка: AB , BC и CD . При ее экспериментальном определении оказалось, что режимов, соответствующих участку BC , установить не удастся. Так, при постепенном уменьшении сопротивления нагрузки, соответствующем перемещению по внешней характеристике от точки A в направлении к точке B , в окрестности точки B спонтанно возникает переходный

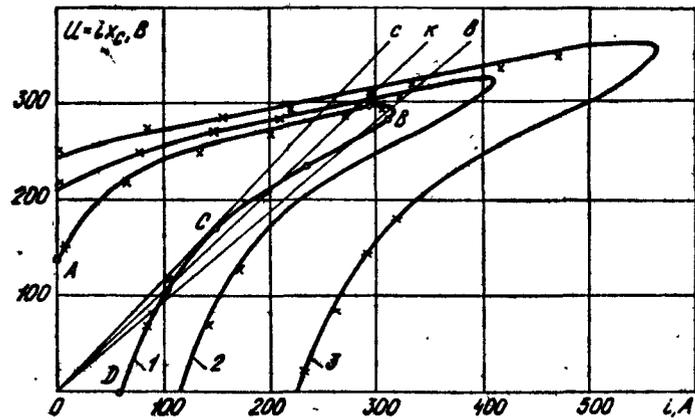


Рис. 5.28. Расчетные внешние характеристики генератора ДГС-914, работающего через постоянное активное сопротивление $0,3\ \text{Ом}$ на емкостную нагрузку. Кривые 1, 2, 3 соответствуют токам возбуждения $i_f=5, 10, 20\ \text{А}$. ** — экспериментальные точки.

процесс, заканчивающийся установившимся режимом, изображаемым на внешней характеристике точкой, принадлежащей участку CD , а при постепенном увеличении сопротивления нагрузки, соответствующем перемещению по внешней характеристике от точки D в направлении к точке C , в окрестности точки C спонтанно возникает переходный процесс, заканчивающийся установившимся режимом, изображаемым на внешней характеристике точкой, принадлежащей участку AB . Подробное исследование этого феномена с позиций теории статической устойчивости показало [24, 105], что он объясняется реактивно-синхронным самовозбуждением. Таким образом, при работе генератора ДГС-914 с током возбуждения 5A на емкостную нагрузку, вольт-амперная характеристика которой изображается прямой Oa , существуют три расчетных уста-

новившихся режима, у которых два (принадлежащие соответственно участкам AB и CD внешней характеристики) устойчивы, а один (принадлежащий участку BC) — неустойчив. Диапазон сопротивлений нагрузки, в котором возможны три установившихся режима, зависит от тока возбуждения. При отсутствии же насыщения любому сопротивлению нагрузки соответствует единственный установившийся режим, устойчивость которого не зависит от тока возбуждения.

Из рис. 5.29 видно, что для этого же генератора, работающего параллельно с мощной сетью, насыщение оказывает, хотя и меньшее, но все же заметное влияние. Так, в номинальном режиме работы углы выбега, рассчитанные без учета насыщения, для магнитопровода с насыщающейся только зубцовой зоной и для магнитопровода с насыщающимися только полюсами и ярмами, равны

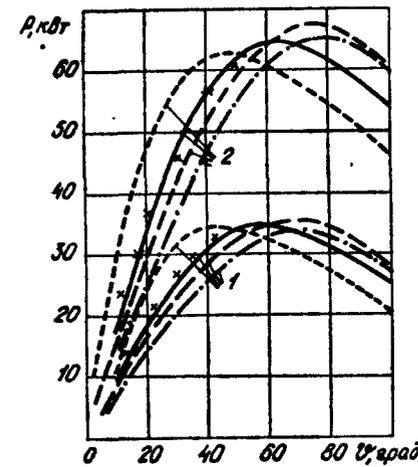


Рис. 5.29. Расчетные угловые характеристики активной мощности генератора ДГС-914, работающего на сеть с напряжением $U=240\ \text{В}$ при токах возбуждения $i_f=10\ \text{А}$ (кривые 1) и $i_f=20\ \text{А}$ (кривые 2), для четырех вариантов магнитопровода: — — — — — ненасыщенного; — — — — — реального; — — — — — с насыщающейся только зубцовой зоной; — · — · — с насыщающимися только полюсами и ярмами; ** — экспериментальные точки.

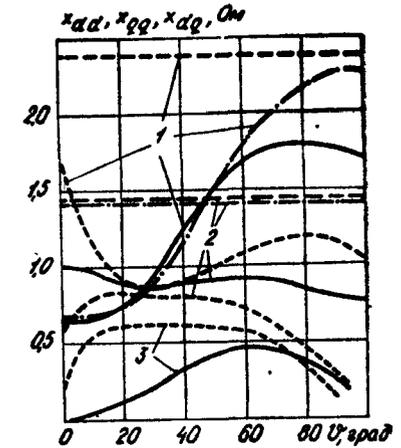


Рис. 5.30. Зависимости параметров x_{ad} (кривые 1), x_{qq} (кривые 2), x_{dq} (кривые 3) от угла выбега, соответствующие угловым характеристикам, изображенным на рис. 5.29 для $i_f=20\ \text{А}$.

соответственно $20, 11$ и 25° , тогда как действительный угол выбега равен $17,5^\circ$, т. е. погрешности равны соответственно $14, -37$ и $+37\%$. Заслуживает внимания тот факт, что угловая характеристика, рассчитанная с учетом насыщения по продольной оси (штрихпунктирная линия на рис. 5.29), отличается от действи-

тельной (сплошная линия) больше, чем рассчитанная без учета насыщения (штриховая линия).

Из сопоставления кривых рис. 5.29 видно, что известное в практике повышение начальной жесткости угловой характеристики насыщенной ЯСМ по сравнению с угловой характеристикой ненасыщенной машины обусловлено насыщением зубцовой зоны и объясняется уменьшением индуктивного сопротивления $x_{q\sigma}$ (рис. 5.30).

Список литературы

1. Анисимова Н. Д., Копылов И. П., Кочнев Н. В. Оптимизация параметров синхронной машины с подмагничиванием ротора // *Электротехника*. 1979. № 1. С. 9—13.
2. Арутюнян В. С. О свойствах пространственных гармоник поля явнополюсной синхронной машины // *Электричество*. 1982. № 8. С. 60—63.
3. Бахвалов Н. С. Численные методы. М., 1975.
4. Бобров А. Е., Клейнман Д. И., Смоловик С. В. Применение нелинейных моделей синхронных машин для исследования электромеханических переходных процессов // Исследование электрических машин большой мощности: Тр. ЛПИ, 1979. № 367. С. 11—15.
5. Будищев М. С. Исследование автономной системы синхронный генератор — асинхронный двигатель с учетом насыщения машин. Автореф. дис. ... канд. техн. наук Харьков, 1980.
6. Будищев М. С., Фильц Р. В. Цифровое моделирование статических характеристик системы автономный генератор—асинхронный двигатель // *Электричество*. 1978. № 12. С. 23—29.
7. Важнов А. И., Гордон И. А. Методы расчета установившегося режима синхронной явнополюсной машины с учетом насыщения // *Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт*. 1986. № 3. С. 130—135.
8. Важнов А. И. Основы теории переходных процессов синхронных машин. М.; Л., 1960.
9. Важнов А. И. Электрические машины. Л., 1969.
10. Веников В. А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М., 1978.
11. Вольдек А. И. Электрические машины. Л., 1974.
12. Глебов И. А. Электромагнитные процессы систем возбуждения синхронных машин. Л., 1987.
13. Глухивский Л. И., Буриштынский М. В., Яковчук Б. В. Расчет э. д. с. в дополнительной обмотке статора явнополюсной синхронной машины // *Электротехника*. 1977. № 8. С. 41—43.
14. Глухивский Л. И. Дифференциальный гармонический метод и его приложения к анализу периодических процессов электрических машин. Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Л., 1988.
15. Глухивский Л. И. Исследование и расчет на ЦВМ параметров, установившихся режимов и характеристик насыщенных явнополюсных синхронных машин: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Львов, 1970.
16. Глухивский Л. И. Расчет больших колебаний насыщенных явнополюсных синхронных машин дифференциальным гармоническим методом // *Техн. электродинамика*. 1980. № 1. С. 83—89.
17. Глухивский Л. И. Расчет периодических процессов электротехнических устройств. Львов, 1984.
18. Глухивский Л. И., Фильц Р. В., Маляр В. С. Расчет на ЦВМ установившихся режимов работы насыщенных явнополюсных синхронных машин итерационным методом Ньютона // *Изв. вузов СССР. Электромеханика*. 1976. № 4. С. 391—398.
19. Горев А. А. Переходные процессы синхронной машины. Л.; М., 1950.
20. Губенко Т. П., Глухивский Л. И., Фильц Р. В. Вплив насичення елементів магнітного кола автономної синхронної машини на її характеристики // *Питання теорії та регулювання електричних машин*. Вісн. Львів. політехн. ін-ту, 1970. Вип. 43. С. 3—6.
21. Давиденко Д. Ф. Об одном новом методе численного решения системы нелинейных уравнений // *Докл. АН СССР*. 1953. С. 601—602.

22. Данилевич Я. Б., Домбровский В. В., Казовский Е. Я. Параметры электрических машин переменного тока. М.; Л., 1965.
23. Данилевич Я. Б., Кулик Ю. А. Теория и расчет демпферных обмоток синхронных машин. М.; Л., 1962.
24. Дячишин Б. В. Исследование статической устойчивости и малых колебаний насыщенной явнополюсной синхронной машины: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Свердловск, 1979.
25. Иванов-Смоленский А. В., Абрамкин Ю. В., Власов А. И., Кузнецов В. А. Универсальный метод расчета электромагнитных процессов в электрических машинах. М., 1986.
26. Иванов-Смоленский А. В., Кузнецов В. А. Математическое моделирование переходных процессов синхронной явнополюсной машины с учетом нелинейных свойств элементов ее магнитной системы // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1967. № 6. С. 98—103.
27. Иванов-Смоленский А. В. Электрические машины. М., 1980.
28. Иванов-Смоленский А. В. Электромагнитные поля и процессы в электрических машинах и их физическое моделирование. М., 1969.
29. Казовский Е. Я. Переходные процессы в электрических машинах переменного тока. М.; Л., 1962.
30. Карпов Г. В. Применение метода математического преобразования от осей фаз к вращающимся осям при экспериментальном исследовании синхронных машин: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Львов, 1964.
31. Кекот О. В. Основы теории и перспективы применения в мощном регулируемом приводе явнополюсной электрической машины с полупроводниковым жонктуатором: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1976.
32. Ковач К. П., Рац И. Переходные процессы в машинах переменного тока. М.; Л., 1963.
33. Коган А. В. Влияние скоса в синхронной машине на характер распределения результирующего поля в аксиальном направлении // Изв. вузов СССР. Электромеханика. 1985. № 6. С. 28—31.
34. Козырук А. Е., Плахтына Е. Г. Вентильные преобразователи в судовых электромеханических системах. Л., 1987.
35. Копылов И. П., Котеленец Н. Ф., Шестаков В. А. Исследование области применения управляемого подмагничивания крупных синхронных машин // Труды МЭИ. М., 1975. Вып. 220. С. 65—68.
36. Копылов И. П. Математическое моделирование электрических машин. М., 1987.
37. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1987.
38. Круг Г. А. Теоретическая электротехника. М., 1936.
39. Кузнецов В. А. Исследование статических характеристик синхронной явнополюсной машины с помощью сеточной модели // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1969. № 1. С. 152—157.
40. Лайбль Т. Теория синхронной машины при переходных процессах. М.; Л., 1957.
41. Лайон В. Анализ переходных процессов в электрических машинах переменного тока методом симметричных составляющих. М.; Л., 1958.
42. Люгер Р. А. Параметры синхронной машины с учетом насыщения // Электросила, 1951. № 10. С. 30—36.
43. Лябук Н. Н. Влияние насыщения магнитопровода явнополюсного синхронного генератора на переходные процессы при автономной работе // Техн. электродинамика. 1986. № 2. С. 68—72.
44. Лябук Н. Н. Влияние насыщения магнитопровода явнополюсного синхронного генератора на переходные процессы при мгновенном наборе нагрузки // Изв. вузов СССР. Энергетика. 1987. № 4. С. 56—58.
45. Лябук М. Н., Фильц Р. В., Глухівський Л. Й. Вплив насичення на гашення поля явнополюсних синхронних машин // Регулювання електричних машин та передача електричної енергії на відстань: Вісн. Львів. політехн. ін-ту. 1975. Вып. 92. С. 13—17.
46. Лябук Н. Н., Фильц Р. В., Костраускас П. И. Сравнение влияния различных способов моделирования нелинейных электромагнитных связей автономного явнополюсного синхронного генератора на его переходные процессы // Ав-

- томатизированные электромеханические системы: Темат. сб. науч. тр. вузов Лит. ССР. Вильнюс, 1987. С. 90—95.
47. Лябук Н. Н. Цифровое математическое моделирование электромагнитных связей и переходных процессов насыщенных явнополюсных синхронных машин в синхронно вращающихся осях: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Киев, 1961.
48. Малаяр В. С. Исследование периодических процессов в насыщенных явнополюсных синхронных машинах: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Л., 1979.
49. Малаяр В. С., Фильц Р. В. Метод расчета режимов насыщенной явнополюсной синхронной машины при больших колебаниях ротора // Изв. вузов СССР. Энергетика. 1978. С. 9—15.
50. Мартынов А. Н. Влияние насыщения на синхронные сопротивления явнополюсных синхронных машин при установившейся работе // Труды Ивановского энергетического ин-та. 1959. Вып. 9. С. 210—227.
51. Медведев Б. П. Влияние насыщения магнитной системы в поперечной оси синхронной машины с выступающими полюсами // Изв. вузов СССР. Энергетика. 1958. № 8. С. 53—58.
52. Овчинников И. Е., Плахтына Е. Г., Рябов В. Н. Автоматизированная система моделирования регулируемых бесколлекторных электрических машин // Электричество. 1985. № 3. С. 30—34.
53. Овчинников И. Е., Плахтына Е. Г., Рябов В. Н., и др. Математическая модель управляемого бесконтактного вентильного двигателя переменного тока // Электротехника. 1986. № 6. С. 33—37.
54. Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., 1975.
55. Перхач В. С. Математическое моделирование электроэнергетических систем с вентильными устройствами в электрических и магнитных координатах с использованием дифференциальных параметров магнитных цепей // Техн. электродинамика. 1984. № 1. С. 92—100.
56. Перхач В. С. Основы анализа процессов в электроэнергетических системах с вентильными устройствами: Автореф. дис. ... д-ра. техн. наук. Львов, 1976.
57. Петров Г. Н. Влияние насыщения на угловые характеристики синхронной машины // Электричество. 1945. № 4. С. 36—41.
58. Плахтына Е. Г. Математическое моделирование электромашино-вентильных систем. Львов, 1986.
59. Плахтына Е. Г. Разработка математических моделей электрических машин для исследования электромагнитных процессов в системе «явнополюсный синхронный генератор — непосредственный преобразователь частоты — асинхронный двигатель»: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Л., 1980.
60. Плахтына Е. Г., Рябов В. П., Васылюк К. Н., Иванов В. Г. Математическая модель вентильного двигателя // Техн. электродинамика. 1986. № 2. С. 77—82.
61. Плахтына Е. Г. Топологический метод расчета процессов и характеристик электромашино-вентильных систем в фазном, d , q , O и гармоническом координатных базисах и его приложения: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Л., 1989.
62. Постников И. М. Обобщенная теория и переходные процессы электрических машин. М., 1975.
63. Рихтер Р. Электрические машины. В 4-х т. М.; Л., 1936. Т. 2.
64. Родионов И. Е., Саранулов Ф. Н., Сиунов Н. С. Определение значений продольной и поперечной реактивностей насыщенной явнополюсной синхронной машины // Изв. вузов СССР. Электромеханика. 1968. № 10. С. 1072—1078.
65. Родионов И. Е. Сравнение методов определения насыщенных параметров синхронных явнополюсных машин // Труды Уральского политехн. ин-та. Свердловск, 1967. Вып. 157. С. 39—45.
66. Сергеев П. С., Виноградов Н. В., Горяинов Ф. А. Проектирование электрических машин. М., 1969.
67. Сидельников Б. В. Исследование режимов работы электрических машин методом математического моделирования: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Л., 1981.

68. *Страхов С. В.* Переходные процессы в электрических цепях, содержащих машины переменного тока. М.; Л., 1960.
69. *Терзян А. А.* Автоматизированное проектирование электрических машин. М., 1983.
70. *Уайт Д., Вудсон Г.* Электромеханическое преобразование энергии. М., 1964.
71. *Фильц Р. В.* Алгебраизация дифференциальных операторов уравнений нестационарных электромагнитных полей и уравнений переходных процессов электрических цепей // Теоретическая электротехника. 1988. Вып. 45. С. 3—12.
72. *Фильц Р. В.* Векторная базисная функция Тейлора и ее применение в задачах электродинамики // Изв. вузов. СССР. Электромеханика. 1989. № 9. С. 5—10.
73. *Фильц Р. В.* Безытерационный метод расчета статических характеристик нелинейных безреактивных электрических цепей // Теоретическая электротехника. 1975. Вып. 18. С. 96—103.
74. *Фильц Р. В., Глухивский Л. И.* Дифференциальные уравнения и динамические параметры насыщенных синхронных машин. // Труды третьей Всесоюз. конф. по бесконтактным электрическим машинам. Рига, 1966. Т. 1. С. 55—62.
75. *Фильц Р. В., Глухівський Л. Й., Дячишин Б. В., Лябук М. Н.* Экспериментальне визначення диференціальних індуктивностей насиченої явнопольної синхронної машини за даними усталених режимів роботи // Регулювання електричних машин і передача електричної енергії на відстань: Вісн. Львів. політехн. ін-ту. 1974. Вип. 83. С. 11—14.
76. *Фильц Р. В., Глухивский Л. И., Лябук Н. Н.* Расчет на ЦВМ характеристик и процессов насыщенных явнопольных синхронных машин // Электричество. 1977. № 2. С. 15—23.
77. *Фильц Р. В., Глухивский Л. И.* Основные положения магнитнонелинейной теории явнопольной синхронной машины // Электричество. 1970. № 6. С. 30—34.
78. *Фильц Р. В., Глухивский Л. И.* Основы магнитно-нелинейной теории обобщенной явнопольной синхронной машины в фазных координатах // Изв. вузов. СССР. Электромеханика. 1973. № 1. С. 17—28.
79. *Фильц Р. В., Глухивский Л. И.* Расчет статических характеристик насыщенных явнопольных синхронных машин // Электричество. 1971. № 3. С. 51—55.
80. *Фильц Р. В., Гречин Д. П., Карашецкий В. П.* Расчет двумерных магнитных полей в нелинейных анизотропных средах методом конечных элементов третьего порядка // Теоретическая электротехника. 1985. Вып. 38. С. 84—92.
81. *Фильц Р. В., Гречин Д. П.* Сеточный метод расчета трехмерных магнитных полей в проводящих нелинейных средах // Теоретическая электротехника. 1984. Вып. 36. С. 85—92.
82. *Фильц Р. В.* Динамічні електромагнітні зв'язки в насичених машинах змінного струму // Питання теорії та регулювання електричних машин: Вісн. Львів. політехн. ін-ту. 1967. Вип. 15. С. 3—15.
83. Дискретный аналог оператора Гамильтона // Математические методы и физико-механические поля. 1984. Вып. 24. С. 20—25.
84. *Фильц Р. В.* Дифференциальные уравнения напряжений насыщенной асинхронной машины // Вопросы теории и регулирования электрических машин: Научные записки Львовского политехнического института. Львов, 1963. Вып. 90. С. 22—32.
85. *Фильц Р. В.* Дифференциальные уравнения напряжений насыщенных явнопольных машин переменного тока // Изв. вузов СССР. Электромеханика. 1966. № 11. С. 1195—1203.
86. *Фильц Р. В., Дячишин Б. В., Костив А. П.* Комплексный алгоритм расчета установившихся режимов и статических характеристик насыщенных синхронных машин // Асинхронные двигатели и их оптимизация. Кишинев, 1979. С. 65—75.
87. *Фильц Р. В.* Исследование машин переменного тока с насыщенной главной магнитной цепью: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Львов, 1966.
88. *Фильц Р. В., Карашецкий В. П., Гречин Д. П.* Расчет плоскопараллельного магнитного поля в нелинейных средах методом конечных элементов второго порядка // Мат. методы и физико-механические поля. 1986. Вып. 23. С. 102—107.
89. *Фильц Р. В., Кекот О. В.* Основы магнитно-нелинейной теории явнопольной машины с управляемым полупроводниковым коммутатором // Изв. вузов СССР. Электромеханика. 1975. № 6. С. 610—622.
90. *Фильц Р. В., Костив А. П.* Методы расчета статических характеристик частотно-регулируемых насыщенных синхронных двигателей // Преобразовательная техника и автоматизированный электропривод: Сб. науч. ст. Кишинев, 1978. С. 21—28.
91. *Фильц Р. В., Лябук Н. Н., Бырладян А. С.* Уточненный алгоритм расчета электромагнитных параметров явнопольной синхронной машины во вращающихся прямоугольных координатах // Регулируемый электропривод высокоинерционных механизмов: Сб. науч. ст. Кишинев. 1980. С. 102—118.
92. *Фильц Р. В., Лябук Н. Н., Дячишин Б. В.* Режимные расчеты явнопольной синхронной машины с продольно-поперечным возбуждением // Техн. электродинамика. 1980. № 1. С. 76—82.
93. *Фильц Р. В., Лябук Н. Н., Мальяр В. С.* Уравнения и параметры насыщенной явнопольной синхронной машины, возбуждаемой от энергии третьей гармоники рабочего поля, в синхронно вращающихся осях // Техн. электродинамика. 1985. № 5. С. 66—73.
94. *Фильц Р. В.* Магнитно-механические параметры электромеханических преобразователей энергии // Изв. вузов. СССР. Электромеханика. 1988. № 12. С. 18—22.
95. *Фильц Р. В., Мальяр В. С., Глухивский Л. И.* Разностный метод расчета несимметричных установившихся режимов насыщенных явнопольных синхронных машин // Изв. вузов. СССР. Электромеханика. 1977. № 1. С. 40—49.
96. *Фильц Р. В.* Математические основы теории электромеханических преобразователей. Киев, 1979.
97. *Фильц Р. В.* Математическое моделирование переходных процессов обобщенного электромеханического преобразователя энергии на основе неявных методов численного интегрирования // Техн. электродинамика. 1986. № 5. С. 56—62.
98. *Фильц Р. В.* Машинный алгоритм алгебраизации производных при расчетах переходных процессов в электроэнергетических системах неявными методами // Изв. вузов СССР. Энергетика. 1990. № 2. С. 40—42.
99. *Фильц Р. В.* Общий алгоритм определения магнитных параметров нелинейных сред // Математические методы и физико-механические поля. 1975. Вып. 16. С. 101—106.
100. *Фильц Р. В.* Общий метод определения параметров электромеханических устройств с насыщающимся магнитопроводом // Электротехника. 1977. № 3. С. 38—43.
101. *Фильц Р. В.* Общий метод режимных расчетов нелинейных электромеханических устройств // Преобразовательные устройства в тиристорном электроприводе: Сб. науч. ст. Кишинев, 1977. С. 52—99.
102. *Фильц Р. В.* О математическом моделировании одного класса электромагнитных устройств с насыщающимися магнитопроводами // Теоретическая электротехника. 1984. Вып. 36. С. 11—16.
103. *Фильц Р. В., Онышко Е. А., Плахтына Е. Г.* Алгоритм расчета переходных процессов в асинхронной машине с учетом насыщения и вытеснения тока // Преобразователи частоты для электропривода: Сб. науч. ст. Кишинев. 1979. С. 11—22.
104. *Фильц Р. В.* Определение зависимости компенсирующей способности синхронного двигателя от напряжения // Изв. вузов СССР. Энергетика. 1972. № 10. С. 35—40.
105. *Фильц Р. В.* Основы нелинейной теории явнопольных синхронных машин. Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Свердловск. 1981.
106. *Фильц Р. В.* Про статичні індуктивності як параметри електричних контурів // Питання теорії та регулювання електричних машин: Вісн. Львів. політехн. ін-ту. Львів. 1969. Вип. 32. С. 17—21.
107. *Фильц Р. В.* Расчет статических характеристик и аperiodической неустойчивости нелинейных систем // Изв. вузов СССР. Энергетика. 1976. № 4. С. 52—58.
108. *Фильц Р. В.* Теорема взаимности для нелинейных контуров // Изв. вузов СССР. Электромеханика. 1968. № 2. С. 204—205.

109. Хэнкок Н. Матричный анализ электрических машин. М., 1967.
110. Чабан В. И. Методы анализа электромеханических систем. Львов, 1988.
111. Чабан В. И. Основы теории переходных процессов электромашинных систем. Львов, 1980.
112. Чуа Л. О., Пен-Мин Лин. Машинный анализ электронных схем. М., 1980.
113. Erdlyi E. A., Ahamed S. V., Hopkins R. E. Nonlinear theory of synchronous machines on Load // IEEE Trans. PAS. 1966. № 7.
114. Hamdi-Sepen D. Saturation effects in synchronous machines // AIEE Trans. PAS. 1954.
115. Park R. H. Two-reaction theory of synchronous machines. Generalised method // AIEE Trans. 1929. P. 716—730.
116. Park R. H. Two-reaction theory of synchronous machines // AIEE Trans. 1933. P. 352—355.

Перечень сокращений

- ВМК — внутренние магнитные координаты
ДУ — дифференциальное уравнение
ММП — магнитно-механические параметры
ММХ — магнитно-механическая характеристика
САДУ — система алгебро-дифференциальных уравнений
САУ — система алгебраических уравнений
ФДН — формула дифференцирования назад (метод)
ЭМП — электромеханический преобразователь
ЯСМ — явнополюсная синхронная машина

ВВЕДЕНИЕ	3	3.2.2. Магнитно-механические параметры насыщенной обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$	87
1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ (ЭМП)	9	3.2.3. Уравнения электрического состояния насыщенной обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$	90
1.1. Объект исследования и постановка задачи	9	3.2.4. Модель насыщенной обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$ на базе явных методов численного интегрирования	93
1.2. Магнитно-механическая характеристика обобщенного ЭМП	9	3.2.5. Модель насыщенной обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$ на базе неявных методов численного интегрирования	96
1.3. Магнитно-механические параметры обобщенного ЭМП	14	3.3. Моделирование ненасыщенной обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$	99
1.4. Методы численного интегрирования нелинейных систем алгебро-дифференциальных уравнений	19	3.4. Моделирование установившихся режимов работы ЯСМ	102
1.5. Определение разностных аналогов дифференциальных операторов в методах Адамса и ФДН	27	3.5. Общие свойства преобразования Парка и моделей ЯСМ в координатах $d, q, 0$	107
1.6. Расчет переходных электромеханических процессов обобщенного ЭМП как задача Коши для системы алгебродифференциальных уравнений	32	3.6. Ортогональное преобразование Парка	112
1.7. Алгоритмы расчета электромеханических процессов обобщенного ЭМП на основе явных методов численного интегрирования	33	4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВНОПОЛЮСНОЙ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ НА ОСНОВЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЕ МАГНИТОПРОВОДА	117
1.8. Алгоритмы расчета электромеханических процессов обобщенного ЭМП на основе неявных методов численного интегрирования	37	4.1. Постановка задачи и понятие эквивалентной характеристики магнитопровода ЯСМ	117
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВНОПОЛЮСНЫХ СИНХРОННЫХ МАШИН В ФАЗНЫХ КООРДИНАТАХ	41	4.2. Расчет эквивалентной характеристики магнитопровода, представленной в табличном виде	119
2.1. Объект исследования и постановка задачи	41	4.3. Рекуррентная эквивалентная характеристика и эквивалентные параметры магнитопровода	121
2.2. Моделирование ненасыщенной обобщенной ЯСМ в фазных координатах	41	4.4. Явная эквивалентная магнитно-механическая характеристика и магнитно-механические параметры ЯСМ в фазных координатах	127
2.2.1. Магнитно-механическая характеристика, магнитно-механические параметры, уравнения электрического и механического состояний ненасыщенной обобщенной ЯСМ в фазных координатах	41	4.5. Модели ЯСМ в фазных координатах, основанные на использовании эквивалентной характеристики магнитопровода	131
2.2.2. Модели ненасыщенной обобщенной ЯСМ в фазных координатах на базе явных и неявных методов численного интегрирования	45	4.6. Явная эквивалентная магнитно-механическая характеристика и магнитно-механические параметры ЯСМ в координатах d, q	133
2.3. Моделирование насыщенной обобщенной ЯСМ в фазных координатах	47	4.7. Модели ЯСМ в координатах d, q , основанные на использовании эквивалентной характеристики магнитопровода	135
2.3.1. Исходные допущения	47	5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЯВНОПОЛЮСНЫХ СИНХРОННЫХ МАШИН	138
2.3.2. Магнитно-механическая характеристика насыщенной обобщенной ЯСМ в фазных координатах	49	5.1. Постановка вопроса	138
2.3.3. Магнитно-механические параметры насыщенной обобщенной ЯСМ в фазных координатах	59	5.2. Влияние насыщения элементов магнитопровода ЯСМ на ее магнитно-механические параметры	138
2.3.4. Модель насыщенной обобщенной ЯСМ в фазных координатах на базе явных методов численного интегрирования	64	5.3. Влияние насыщения элементов магнитопровода ЯСМ на ее переходные процессы	148
2.3.5. Модель насыщенной обобщенной ЯСМ в фазных координатах на базе неявных методов численного интегрирования	66	5.4. Влияние насыщения элементов магнитопровода ЯСМ на ее статические характеристики	161
2.4. Вопросы практической реализации математических моделей	69	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	164
2.5. О направлениях дальнейшего развития теории математического моделирования ЯСМ	74	ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ	170
3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВНОПОЛЮСНЫХ СИНХРОННЫХ МАШИН В КООРДИНАТАХ $d, q, 0$	78		
3.1. Объект исследования и постановка задачи	78		
3.2. Моделирование насыщенной обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$	80		
3.2.1. Магнитно-механическая характеристика насыщенной обобщенной ЯСМ в координатах $d, q, 0$	80		

Монография

ФИЛЬЦ Роман Владимирович
ЛЯБУК Николай Никифорович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЯВНОПОЛЮСНЫХ СИНХРОННЫХ МАШИН**

Художник Г. В. Кучабский
Художественный редактор В. Д. Цейтлин
Технический редактор И. Г. Федас
Корректоры Е. Г. Логвиненко,
Р. Р. Гамада

ИБ № 13355

Сдано в набор 04.10.90. Подп. в печать 18.04.91.
Формат 60×90/16. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Выс.
печать. Усл. печ. л. 11,0. Усл. кр.-отт. 11,37.
Уч.-изд. л. 10,89. Тираж 1000 экз. Изд. № 10.
Заказ 3201. Цена 2 р. 40 к.

Издательство «Світ»
при Львовском госуниверситете.
290000 Львов, ул. Университетская, 1.

Львовская областная книжная типография.
290000 Львов, ул. Стефаника, 11.