

**ФИЗИКА
ЯДЕРНЫХ
РЕАКТОРОВ**

Э. А. СТУМБУР

**ПРИМЕНЕНИЕ
ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИИ
В ФИЗИКЕ
ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ**

Э. А. Стумбур

ПРИМЕНЕНИЕ
ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ
В ФИЗИКЕ
ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ



Москва Атомиздат 1976

Стумбур Э. А. **Применение теории возмущений в физике ядерных реакторов.** М., Атомиздат, 1976, с. 128.

Излагаются основы теории возмущений применительно к нейтронно-физическим процессам в ядерных реакторах; последовательно вводятся различные формы описания нейтронных полей в реакторах, развивается понятие ценности нейтронов, в элементарном виде излагается математический аппарат теории возмущений.

Основные методы теории возмущений приводятся как в классической формулировке (теории разных порядков), так и в варианте «прямых методов» обобщенной теории возмущений.

Анализ возмущений в реакторах строится на основе представлений о различных видах коэффициентов реактивности; показываются возможности определения ряда локальных (сечения, потоки, ценности) и глобальных (параметры кинетики, КВ, ЦНД и др.) характеристик реакторов по реактивностным эффектам. Приведены наглядные практические примеры таких применений теории возмущений при расчетно-проектных и экспериментальных исследованиях.

Книга предназначена для инженеров-физиков, занятых проектированием, эксплуатацией и исследованием ядерных реакторов, а также для научных работников и студентов старших курсов.

Рис. 14. Табл. 9. Список литературы 158 наименований.
Серия «Физика ядерных реакторов», № 6.

ИБ № 98

Эдвин Александрович Стумбур

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ФИЗИКЕ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

Редактор *Г. В. Чернышова*
Художественный редактор *А. Т. Карьянов*
Обложка художника *А. И. Шаварда*
Технический редактор *О. Н. Мощева*
Корректор *Л. С. Тимохова*

Сдано в набор 29.VII.1976 г.	Подписано к печати 3.XII.1976 г.	T-19750
Формат 60×90 ^{1/16}	Бумага типографская № 2	Усл. печ. л. 8,0.
Тираж 1600 экз.	Цена 87 коп.	Уч.-изд. л. 8,65
	Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5	Зак. изд. 74070
		Зак. тип. 1124

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Москва, И-41, Б. Переяславская ул., дом № 46

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Предисловие	3
Введение	5
§ 1. Описание нейтронных полей в реакторах	9
1.1. Определения и условные обозначения. Принятая терминология	9
1.2. Уравнения, описывающие нейтронные поля в реакторе	13
1.3. Основные формы представления нейтронных полей в реакторах	17
§ 2. Ценность нейтронов	19
2.1. Интегральное уравнение переноса нейтронов	19
2.2. Первое представление о ценности нейтронов	22
2.3. Различные формы уравнений для функции ценности. Ценность и поток как сопряженные характеристики	25
2.4. Дальнейшее развитие понятия функция ценности нейтрона	31
§ 3. Математический аппарат теории	35
3.1. Функциональный анализ — математическая основа теории реакторов	35
3.2. Функциональное пространство и линейные операторы	35
3.3. Виды линейных операторов и их свойства	41
3.4. Решение операторных уравнений	45
3.5. Операторы и функции в теории реакторов	47
§ 4. Общие положения теории возмущений	50
4.1. Постановка задач физики реакторов для теории возмущений	50
4.2. Расширение и уточнение представлений о возмущениях	54
4.3. Основной метод решения задач в теории возмущений	57
4.4. Условия целесообразности применения теории возмущений. Практические приемы и главные формы ее реализации	62
4.5. Конкретный вид рабочих формул теории возмущений	67
4.6. Прямые методы теории возмущений для оценки различных характеристик реакторов — функционалов потока и ценности	71
4.7. Теория возмущений при различных формах представления нейтронных полей	77
§ 5. Коэффициенты реактивности и анализ их свойств	81
5.1. Понятие коэффициентов реактивности. Их разновидности	81
5.2. Общие свойства коэффициентов реактивности. Их физическая интерпретация	85
5.3. Интегралы реактивности и их свойства	89
5.4. Применение интегралов реактивности при решении отдельных задач прогноза критических параметров	95
§ 6. Примеры применения теории возмущений в реакторной практике	102
6.1. Определение эффективных сечений и их отношений (k_{∞} , K_B и др.) на спектре реактора по измерениям коэффициентов реактивности	102
6.2. Анализ локальных и глобальных эффектов реактивности	108
6.3. Измерения параметров кинетики реактора, функций ценности и других реакторных характеристик по возмущениям в критических и подкритических системах	114
Список литературы	121

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемую вниманию читателей книгу можно рассматривать как элементарное учебное пособие или краткий вводный справочник для инженеров и научных работников (практиков), желающих усвоить основные принципы и возможности метода возмущений при анализе (экспериментальном и расчетном) нейтронно-физических характеристик ядерных реакторов.

Пространственно-энергетическое распределение нейтронных потоков (нейтронное поле в реакторе) может меняться под действием каких-либо возмущений: локальных изменений состава материалов реактора, сдвига границ отдельных зон, изменений температуры и т. д. Такие воздействия, как правило, приводят к изменениям критичности системы (реактивности) или к изменениям в балансе отдельных ядерных реакций. Интерпретация, расчет таких эффектов (для не очень сильных возмущений) могут быть проведены *на основе данных о нейтронном поле в невозмущенной системе*. Для этих целей служат определенный круг физических понятий и специфический математический аппарат, составляющие предмет теории возмущений в физике реакторов.

Применение теории возмущений позволяет получить интересные и полезные соотношения, связывающие различные дифференциальные и интегральные параметры физических характеристик реактора. Таким образом определяются соотношения плотностей различных ядерных реакций, запасы реактивности, параметры кинетики, характеристики спектра и ценности нейтронов и т. д.

Вместе с тем теория возмущений дает возможность получать и более полную информацию о физике реакторов: определять и корректировать групповые константы для расчета реакторов, проверять точность расчетных методик, прогнозировать условия критичности для реакторов близкого типа, оптимизировать состав и структуру реактора и т. п.

Большую пользу приносит применение теории возмущений для оценки многих эффектов в реакторе, знание которых необходимо для надежной и наиболее выгодной эксплуатации АЭС.

Все выше упомянутые (и не упомянутые) аспекты применения теории возмущений, естественно, не могут быть освещены в книге такого небольшого объема. Поэтому здесь основное внимание уделено изложению о б щ и х и д е й теории (и ее специфическому

математическому аппарату), которые иллюстрируются затем некоторыми выборочными практическими примерами.

Теоретическая трактовка, хотя и дается на основе общего кинетического уравнения переноса, отнюдь не претендует на строгость и безупречность. Для овладения методами теории возмущений (в ее современной форме) необходимы элементарные знания из области функционального анализа. Такие сведения приведены здесь в очень упрощенной форме, крайне нестрогой, но зато доступной для усвоения инженерами и физиками-экспериментаторами.

Вопросы численной реализации алгоритмов методов теории возмущений практически не затронуты.

Такой выбор материала основывался на опыте автора по чтению цикла лекций на курсах повышения квалификации, слушателями которых были инженеры эксплуатационных служб и лабораторий АЭС, а также экспериментаторы НИИ, работающие на критических сборках реакторов. Как правило, им нужно было быстро и эффективно освоить новые методы теории без необходимости изучать для этого фундаментальные монографии или научную периодику.

Естественно, специалистов по численным расчетам реакторов, и тем более теоретиков-реакторщиков, такая книга не удовлетворит, но для них нужны уже совсем другие книги, которые со временем, надо полагать, напишут другие авторы.

Однако при всех этих очевидных (и других возможных) недостатках предлагаемой книги оправданием ее появления может служить уже тот факт, что в мировой литературе (известной автору) *вообще еще нет монографии*, специально посвященной теории возмущений для ядерных реакторов. Фактически весь излагаемый материал рассеян по отдельным статьям в многочисленных журналах и не всегда легко доступных сборниках. Отдельные главы или параграфы по теории возмущений в общих курсах теории реакторов слишком лаконичны и не содержат ряда новых результатов и методов, развившихся за последние годы.

Пользуясь возможностью, автор приносит глубокую благодарность академику Г. И. Марчуку, профессорам С. Г. Михлину, В. В. Орлову, Л. Н. Усачеву и С. Б. Шихову за многочисленные обсуждения ряда вопросов теории реакторов, ее математического аппарата, ценные советы и критику, позволившие автору определить свои взгляды по ряду излагаемых в книге проблем.

Автор весьма признателен А. А. Абагяну, Е. С. Глушкову, Ю. А. Казанскому, В. А. Кузнецову, А. И. Могильнеру, Ш. С. Николайшвили, В. Я. Пупко, М. Ф. Троянову и Л. Н. Юровой, научные контакты с которыми также содействовали написанию этой книги.

ВВЕДЕНИЕ

Теория возмущений как специальный раздел математических методов точных естественных наук своим возникновением обязана астрономии. Уже в конце XVII в. выяснилось, что движение планет Солнечной системы нельзя достаточно точно описать на основе законов Кеплера и теории тяготения Ньютона, т. е. нельзя рассматривать как «задачу двух тел» — Солнца и данной планеты. Задачи с большим числом тел оказались неразрешимыми. Выход помогла найти теория возмущений — специальный математический аппарат, позволяющий на основе решения более простой задачи конструировать решение более сложной, рассматривая отличия условий этих задач как «*малые возмущения*». Таким путем удалось учесть возмущающие влияния взаимного тяготения всех планет и получить *приближенные* решения всех задач небесной механики, *достаточно точные* для практических целей.

Триумфом классической теории возмущений явилось предсказание на ее основе существования еще не открытых планет — Нептуна и Плутона — как источников слабых возмущений орбит соседних с ними планет.

«Вторую молодость» теория возмущений пережила уже в первой половине нынешнего века в связи с развитием квантовой механики. Решения уравнения Шредингера для сколько-нибудь сложных (имеющих большой практический интерес) задач оказалось наиболее эффективным находить, используя решения для значительно более элементарных ситуаций и затем применяя методы теории возмущений. Успешно применялась теория возмущений и в квантовой электродинамике, теории ядра и т. п.

Естественным было перенесение методов теории возмущений и на новую, «боковую» ветвь ядерной физики — физику ядерных реакторов. Теоретический аппарат физики ядерных реакторов базируется на уравнении переноса нейтронов — частной форме кинетического уравнения Больцмана — для случая не взаимодействующих между собой (нейтрон—нейтрон) переносимых частиц. Такое уравнение для функции распределения плотности потока нейтронов с учетом всех зависимостей от координат, энергии, угла направления полета нейтронов в каждый момент времени чрезвычайно сложно для решения. Практически используются его различные аппроксимации (прежде всего по угловой переменной):

диффузионное приближение, транспортное, P_1 -приближение сферических гармоник (гораздо реже — P_3), S_N -приближение Карлсона и т. д. Непрерывная зависимость плотности потока от энергии отображается разбиением всего интервала энергий нейтронов ($0 - 10$ Мэв) на несколько «групп» (чаще всего от 2 до 30), при этом специально «конструируются» усредненные *групповые сечения* взаимодействия нейтронов с ядрами. Реальная (многозонная или переменная по составу в пространстве) трехмерная геометрия и структура реактора заменяются моделью: эквивалентной сферой, бесконечным цилиндром (с эффективным лапласианом, «баклингом» утечки по торцам), гетерогенная структура зон «размешивается» в гомогенную и т. д. и т. п. Но даже при всех этих упрощениях решение уравнений переноса нейтронов в моделях реакторов (сколько-нибудь надежно отображающих их важнейшие характеристики) оказывается длительной, трудоемкой и дорогой работой (даже при всех возможностях современных ЭВМ!).

Это особо подчеркивает полезную роль методов теории возмущений, которая на основе сравнительно простых математических операций (порой выполняемых с помощью настольной вычислительной техники) дает возможность предсказывать физические характеристики нового реактора (или нового его состояния), исходя из известных (измеренных или рассчитанных) характеристик другого реактора, в какой-то мере близкого к изучаемому. Систематизированное изложение этих способов и приемов практической реализации теории возмущений для нейтронно-физических характеристик ядерных реакторов и составляет содержание этой книги.

Наиболее общее и строгое обоснование теории возмущений для ядерных реакторов на базе точного кинетического уравнения переноса нейтронов было дано Л. Н. Усачевым [1], сформулировавшим уравнение для *функции ценности нейтронов* — важнейшей характеристики, сопряженной нейтронному потоку (без которой вообще не может быть корректно сформулирована теория возмущений), которая получила дальнейшее обобщение в работе Б. Б. Кадомцева [2].

Естественно, в менее строгой формулировке теория возмущений возникла значительно раньше, когда появились первые реакторы, а на необходимость привлечение к анализу сопряженных функций было указано еще А. Вейнбергом [3]; многие важные аспекты теории возмущений были развиты Х. Гурвитцем [4] (частично эти результаты отражены в первом руководстве по теории ядерных реакторов [5]). Появилась и работа с более общей трактовкой вопроса с анализом возмущений на основе нестационарной задачи переноса нейтронов [6] (Е. Пендлбери).

Вполне общая постановка проблемы сопряженных функций как аппарата, лежащего в основе теории возмущений для определения различных функционалов стационарных и нестационарных задач физики реакторов, была развита в работе Г. И. Марчука и В. В. Орлова [7]. Ряд общих и конкретных вопросов теории воз-

мушений получил отражение в сборном руководстве по физике реакторов, выпущенном КАЭ США [8].

В работах [9—12] развита удобная форма практического использования теории возмущений для решения конкретных реакторных задач на базе концепции *коэффициентов реактивности* — элементарных реактивных эффектов, вносимых отдельными нуклидами в разных точках реактора. В частности, выявилась полезность анализа таких коэффициентов *усредненных* по зонам реактора, как *интегральных* характеристик реактивных эффектов [4, 10, 12, 13].

Расчетные методы теории возмущений получили отражение в монографиях А. Д. Галанина [14] и Г. И. Марчука [15].

Обстоятельные работы Х. Пакстона, Г. Хансена и др. [16—18], сочетающие экспериментальные и теоретические исследования, показали возможности теории возмущений при анализе коэффициентов и интегралов реактивности для определения нейтронных сечений на спектре реактора, а также для прогнозирования критических параметров высокообогащенных реакторов на быстрых нейтронах.

Отнюдь не преследуя здесь цели дать исторический обзор развития теории возмущений в физике ядерных реакторов и упомянуть все краеугольные моменты ее усовершенствования (а также их авторов), мы все же должны отметить принципиально новый этап ее развития, начавшийся с работы Л. Н. Усачева [19], продолженной далее им [20] и другими исследователями.

Первоначально теория возмущений главным образом была нацелена на определение эффектов реактивности. Изменения прочих характеристик реактора (если они представляли интерес) находились опосредствованно, через изменения нейтронного потока, вызванного возмущением. Л. Н. Усачев указал на возможность *прямых методов* оценки вариации нейтронно-физических характеристик при возмущении реактора, выражаемых дробно-линейными (и дробно-билинейными) функционалами потока и ценности нейтронов: отношений плотностей ядерных реакций, коэффициента воспроизводства (КВ), времени жизни нейтронов и т. п. Для этого им был предложен удобный простой алгоритм расчетов.

Теорию с применением *прямых методов* оценки вариаций в последние годы начали называть *обобщенной теорией возмущений*, хотя это вряд ли полностью оправдано, ибо метод этот не распространен пока далее чем на произведения отношений билинейных функционалов.

Как уже отмечалось, предлагаемую вниманию читателя книгу можно рассматривать как учебное пособие для начального ознакомления с применением теории возмущений в физике ядерных реакторов. Изложение материала построено следующим образом. Первые три параграфа имеют вводный характер, содержат определения главных понятий при анализе возмущений, принятых в книге: параметров нейтронных полей, сечений, форм уравнений переноса (§ 1); несколько более пространно и физически наглядно вводится

функция ценности нейтронов и описываются ее свойства (§ 2); дается самое элементарное введение в математический аппарат теории возмущений—представление об операторной форме описания нейтронных полей в реакторах (§ 3).

Основные положения классической теории возмущений (применительно к физике реакторов), включая теорию возмущений разных порядков, а также изложение новых «прямых методов» теории содержатся в § 4. Ряд формул для вычисления реактивностей и искажений нейтронного поля, вызванных возмущениями, приведен в явном виде и более подробно, в разных случаях аппроксимации кинетического уравнения (диффузионной, односкоростной, многогрупповой и др.). В заключении § 4 приводятся основные выражения теории возмущений для важных экспериментальных ситуаций (в случае подкритических реакторов, некорректно описываемых через $k_{эф}$): измерения с импульсным источником, измерения методом обратного умножения и т. п.

В § 5 излагается концепция коэффициентов реактивности, даются общий физический анализ их свойств на простых наглядных примерах, общие представления об интегралах реактивности и применении их закономерностей для прогнозирования критических параметров реакторов.

Методы теории возмущений используются в расчетных задачах физики реакторов и при экспериментальном определении ряда реакторных характеристик. Примерами такого практического применения (§ 6) выбраны некоторые общие моменты: определение сечений, глобальных параметров (типа k_{∞} , КВ, ЦНД), параметров кинетики реактора и т. п.

Более сложные задачи (температурные эффекты реактивности, оценки эффективности органов регулирования, учет и анализ эффектов гетерогенности в реакторах на тепловых и быстрых нейтронах и т. п.) включать в данную книгу представлялось нецелесообразным. Это объясняется специфичностью их трактовки для разных реакторов, а также сложностью этих задач, не позволяющей остановиться на них подробнее в этой книге, предназначенной для начального ознакомления с излагаемыми вопросами. Тем не менее надо сказать, что для решения упомянутых задач теория возмущений может оказаться весьма полезной и заинтересованный читатель сумеет и сам найти пути к их анализу на основе общей теории.

§ 1. ОПИСАНИЕ НЕЙТРОННЫХ ПОЛЕЙ В РЕАКТОРАХ

1.1. Определения и условные обозначения.

Принятая терминология

Определения. Под «нейтронным полем» в реакторе (или вообще какой-либо пространственной области) будем понимать совокупность всех нейтронов, рассматриваемых как точечные частицы, каждая из которых в момент времени t находится в точке \mathbf{r} и имеет скорость \mathbf{v} .

Иногда целесообразно разделить вектор скорости \mathbf{v} на две составляющие: ее модуль $v = |\mathbf{v}|$ (или соответствующее значение энергии нейтрона E) и единичный вектор Ω направления полета нейтрона. При этом очевидно

$$\mathbf{v} = v\Omega; \quad E = mv^2/2.$$

Простейшая характеристика нейтронного поля — функция распределения плотности нейтронов $N(\mathbf{r}, v, \Omega, t)$, равная пределу отношения числа нейтронов $n_{\mathbf{r}, v, \Omega, t}$ (имеющихся в момент времени t в элементе объема $d\mathbf{r}$ вокруг точки \mathbf{r} и со скоростью около значения v в диапазоне dv двигающихся в телесном угле $d\Omega$ вокруг направления Ω) к элементу фазового объема $drdv d\Omega$ при стремлении последнего к нулю:

$$N(\mathbf{r}, v, \Omega, t) = \lim_{(drdv d\Omega) \rightarrow 0} \frac{n_{\mathbf{r}, v, \Omega, t}}{drdv d\Omega}. \quad (1.1)$$

Поскольку интенсивность взаимодействий нейтронов с ядрами среды пропорциональна плотности нейтронов и их скорости, то более удобным в теории реакторов оказывается понятие плотности потока нейтронов — произведения их плотности на скорость. Поэтому в качестве основной характеристики нейтронного поля примем функцию распределения плотности потока нейтронов:

$$\varphi(\mathbf{r}, v, \Omega, t) \equiv vN(\mathbf{r}, v, \Omega, t) \equiv \varphi(\mathbf{r}, v, t). \quad (1.2)$$

Для краткости будем именовать эту функцию просто потоком нейтронов, как в монографии [21]. Этот же термин иногда будет использоваться и для другой формы описания потока нейтронов, так называемого полного потока:

$$\Phi(\mathbf{r}, v, t) \equiv \int_{4\pi} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\Omega, \quad (1.3)$$

суммирующего потоки нейтронов по всем направлениям углов (и определяющего число ядерных реакций для процессов изотропного характера: деления ядер, радиационного захвата и т. п.).

Поток в форме (1.3) связан с аналогично определяемой плотностью нейтронов $n(\mathbf{r}, \nu, t)$ очевидным соотношением:

$$\Phi(\mathbf{r}, \nu, t) = \nu n(\mathbf{r}, \nu, t), \quad (1.4)$$

где

$$n(\mathbf{r}, \nu, t) \equiv \int_{4\pi} N(\mathbf{r}, \nu, \Omega, t) d\Omega.$$

Величины вида (1.3) и (1.4) исключают угловые зависимости из описания нейтронного поля, и для компенсации этой потери в полноте информации они должны быть дополнены еще хотя бы одной функцией, характеризующей основное направление потоков нейтронов, — вектором тока нейтронов:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \nu, t) = \int_{4\pi} \Omega \Phi(\mathbf{r}, \nu, t) d\Omega. \quad (1.5)$$

Такой вектор дает направленную разность потоков нейтронов всех ориентаций и вместе со скалярным полным потоком (1.3) составляет основу описания нейтронных полей в диффузионном (или P_1) приближении кинетического уравнения переноса нейтронов.

Вообще же в данной книге изложение материала ведется на основе кинетического уравнения переноса нейтронов и основной характеристикой нейтронных полей служит функция распределения плотности потока нейтронов (1.2).

Описание нейтронных полей. Полное и однозначное нахождение потока нейтронов, т. е. его функции распределения $\varphi(\mathbf{r}, \nu, t)$, возможно, если для изучаемого реактора заданы макроскопические сечения взаимодействия нейтронов со средой, «посторонние» (не зависящие от нейтронного потока) *источники нейтронов*, граничные и начальные условия для потока нейтронов, параметры эмиссии запаздывающих нейтронов. Тогда будем говорить, что **реактор задан** и средствами теоретического расчета можно определить его нейтронное поле для всех фазовых точек (\mathbf{r}, ν) и моментов t .

Из множества нейтронных полей как в реакторах, так и в размножающих средах можно выделить *две основные группы*.

Стационарные нейтронные поля, для которых пространственно-энергетическое (и угловое) распределение нейтронных потоков остается неизменным во времени по виду функции и по ее абсолютному значению: $\varphi(\mathbf{r}, \nu, t) \equiv \varphi(\mathbf{r}, \nu)$ для всех t . Таковым является нейтронное поле в критическом реакторе, а также поле в подкритическом реакторе, поддерживаемое за счет «подсветки» от некоторых, не зависящих от потока нейтронов посторонних источников $S_n(\mathbf{r}, \nu)$ с постоянной во времени интенсивностью.

Нестационарные нейтронные поля, для которых функции распределения потока нейтронов $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ непрерывно меняются во времени. Исследование таких нейтронных полей в общем случае — сложная задача. Однако среди них можно выделить важный класс асимптотических временных полей, для которых справедливо разделение переменных вида

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \varphi_{ac}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) A(t). \quad (1.6)$$

Это — нейтронные поля с неизменным во времени пространственно-энергетическим распределением, в которых интенсивность потока нейтронов меняется со временем по единому закону $A(t)$ во всей системе. К этому классу нейтронных полей можно отнести поле в несильно надкритическом реакторе в состоянии установившегося периода разгона, а также поле в подкритическом реакторе (или неразмножающей среде) в стадии асимптотического затухания потока нейтронов, возбужденного импульсом нейтронов от некоторого постороннего источника.

Для однозначного определения стационарного нейтронного поля $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ необходимо задать следующие характеристики системы.

1. Прежде всего это макроскопические сечения для всех координат \mathbf{r} реактора и всех значений скоростей \mathbf{v} , а именно: $\Sigma_t(\mathbf{r}, v)$ — полное сечение; $\Sigma_q(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}')$ — сечение репродукции нейтронов.

Смысл термина «полное сечение» общеизвестен. Компоненты полного сечения — макросечения отдельных процессов: радиационного захвата, деления, упругого и неупругого рассеяний, реакций типа $(n, 2n)$, (n, p) , (n, α) и т. д., т. е.

$$\Sigma_t = \Sigma_c + \Sigma_f + \Sigma_e + \Sigma_{in} + \Sigma_{n, 2n} + \Sigma_{n, p} + \Sigma_{n, \alpha} + \dots$$

Однако в большинстве случаев это представление в нашем анализе не понадобится.

Под термином «сечение репродукции» $\Sigma_q(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}')$ будем понимать меру вероятности производства в точке \mathbf{r} нейтроном со скоростью v нейтронов со скоростью v' за счет всех процессов, ведущих к их появлению: деления, рассеяния, реакции $(n, 2n)$ и т. п. Такое представление фактически используется в ряде книг [21—23], но термин «сечение репродукции» еще не установился, а термин «дифференциальное сечение» [21] оставляет неопределенность: какого именно процесса? Поэтому здесь примем термин «сечение репродукции», имея в виду любые процессы, в которых нейтрон, взаимодействуя с ядром, не исчезает (или размножается).

Сечение репродукции может быть (аналогично полному сечению) представлено суммой парциальных компонент, но в данной книге не потребуются более детальной записи, чем выделение процесса деления:

$$\Sigma_q(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') = \frac{\chi(v')}{4\pi} v \Sigma_f(\mathbf{r}, v) + \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'). \quad (1.7)$$

Для простоты принимаем изотропный, не зависящий от скорости v , нормированный на единицу спектр нейтронов деления $\chi(v')$, а зависимость v от v' считаем включенной в сечение $\Sigma_f(\mathbf{r}, v)$.

В сечение $\Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}')$ входят сечения всех остальных процессов, репродуцирующих нейтроны: упругого и неупругого рассеяний, реакции $(n, 2n)$ и т. п.

Для полного определения стационарного нейтронного поля $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в любом реакторе вполне достаточно описать свойства его сред посредством полного сечения и сечения репродукции.

2. Для определенности нейтронного поля внутри реактора надо знать внешние условия для потока нейтронов на наружной границе реактора. Обычным граничным условием для реактора с невогнутой наружной поверхностью считается отсутствие потока извне, т. е. нейтронное поле $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ищется в классе функций, удовлетворяющих условию

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})|_{\mathbf{r} \in \mathbf{R}} = 0 \text{ при } (\mathbf{v}\mathbf{n}) < 0, \quad (1.8)$$

где \mathbf{R} — координаты любых точек наружной границы реактора, а \mathbf{n}_e — единичный вектор наружной нормали к ее поверхности.

3. Для однозначного определения стационарного нейтронного поля необходимо знать посторонние (т. е. не зависящие от потока нейтронов) источники нейтронов, расположенные внутри реактора, $S_n(\mathbf{r}, \mathbf{v})$.

Информация пп. 1—3 достаточна для нахождения стационарного нейтронного поля в любом критическом, подкритическом реакторе или в неразмножающей среде (с постоянным источником).

Для определения нестационарных нейтронных полей $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ граничные условия (см. п. 2) и посторонние источники (см. п. 3) должны быть заданы как функции времени, кроме того, должны быть определены начальные условия для потока нейтронов в некоторый «нулевой» момент времени, после которого ищется распределение $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$:

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t = 0) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}).$$

Наконец, для нестационарных задач следует учитывать, что полный спектр нейтронов деления, фигурирующий в (1.7), состоит из «мгновенной» и «запаздывающей» компонент:

$$\chi(v) = \chi_p(v) + \chi_d(v),$$

причем только генерируемые мгновенные нейтроны деления

$$\chi_p(v') \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, v) \equiv \sum_j (1 - \beta^j) f_p^j(v') \nu \Sigma_f^j(\mathbf{r}, v),$$

где j — индекс делящихся нуклидов, а β^j — суммарная доля запаздывающих нейтронов для данного нуклида, непосредственно входят в поток нейтронов в каждый данный момент времени.

Вклад же запаздывающих нейтронов со своими парциальными спектрами $f_i^j(v')$ для разных нуклидов j и групп i , имеющих выходы β_i^j ,

$$\chi_d(v') \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, v) \equiv \sum_j \sum_i \beta_i^j f_i^j(v') \nu \Sigma_f^j(\mathbf{r}, v)$$

проявляется с запаздыванием, определяемым постоянными распада λ_i^j соответствующих эмиттеров. Это, естественно, осложняет задачу нахождения нестационарного нейтронного поля $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ в общем случае, когда вкладом запаздывающих нейтронов нельзя пренебречь.

Условные обозначения. В заключение приведем основные сокращенные обозначения, используемые в дальнейшем тексте.

1. Интеграл по пространству любых функций F от координат \mathbf{r} записывается в форме $\int F d\mathbf{r}$ и в декартовых или сферических координатах имеет вид

$$\int F(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \equiv \iiint F(x, y, z) dx dy dz \equiv \iiint F(\rho, \theta, \psi) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\psi.$$

При отсутствии указания всегда будет подразумеваться, что интегрирование распространено на весь объем реактора V_p .

2. Интегралы по вектору скорости понимаются в смысле интегрирования по модулю скорости и по всему телесному углу Ω :

$$\int d\mathbf{v} f(\mathbf{v}) \equiv \int_0^{v_m} dv \int d\Omega f(\mathbf{v}) \equiv \int_0^{v_m} f(v) dv,$$

где $f(v)$ — функция, определяемая соотношением

$$f(v) \equiv \int f(\mathbf{v}) d\Omega = \int f(v, \Omega) d\Omega.$$

Для функций изотропных по направлениям Ω имеем

$$f(\mathbf{x}) = f(v)/4\pi.$$

Всюду, где нет особых указаний, интегрирование по Ω производится по всему телесному углу 4π .

Интегрирование по скалярному значению скорости всюду, кроме специально отмеченных случаев, производится от $v = 0$ и до $v_m = v_{\text{макс}} < \infty$ (считается, что скорости нейтронов в реакторе не могут превысить значения $E_{\text{макс}} \approx 10 \text{ Мэв}$).

1.2. Уравнения, описывающие нейтронные поля в реакторе

Поток нейтронов $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, являющийся основной характеристикой нейтронного поля в реакторе, подчиняется интегро-дифференциальному уравнению переноса [21—26]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = & (1 - \beta) f_p(\mathbf{v}) \int d\mathbf{v}' \mathbf{v} \Sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) + \\ & + \int d\mathbf{v}' \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) - \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \frac{\mathbf{v}}{v} \nabla \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \\ & + \sum_i f_i(\mathbf{v}) \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + S_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Смысл основных обозначений определен в предыдущих разделах, кроме $C_i(\mathbf{r}, t)$ — концентрации эмиттеров запаздывающих нейтронов, для каждой i -й группы которых записывается отдельное уравнение

$$\frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i \int \mathbf{v} \Sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}'. \quad (1.10)$$

(Для упрощения предполагаем только один вид делящихся ядер.)

При заданных граничных и начальных условиях для потока нейтронов (а также начальных условиях для эмиттеров запаздывающих нейтронов) уравнения (1.9) и (1.10) полностью определяют функцию распределения потока нейтронов $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ при всех $t > 0$.

Наибольший интерес для нас представляет нейтронное поле в отсутствие посторонних источников нейтронов: $S_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0$ (по крайней мере для $t > 0$). Тогда задача сводится к рассмотрению временного поведения потока нейтронов $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ при условии заданных начальных распределений $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t = 0)$ и $C_i(\mathbf{r}, t = 0)$.

Как известно [23], всякая нестационарная задача переноса нейтронов может быть приведена к стационарной, если применить преобразование Лапласа для всех функций от времени:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \equiv \bar{f}(s), \quad (1.11)$$

при этом функция распределения потока нейтронов $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ заменяется аналитической функцией $\bar{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s)$ параметра s (вообще говоря, комплексной величины). Трансформанты концентраций эмиттеров $\bar{C}_i(\mathbf{r}, s)$ можно явно найти из (1.10) и исключить из (1.9). В итоге получится одно уравнение для $\bar{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s)$:

$$\begin{aligned} \frac{s}{v} \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s) - \left[(1 - \beta) f_p(\mathbf{v}) + \sum_i \frac{f_i(\mathbf{v}) \lambda_i \beta_i}{\lambda_i + s} \right] \int d\mathbf{v}' \mathbf{v} \Sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \times \\ \times \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}', s) - \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}', s) d\mathbf{v}' + \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s) + \\ + \frac{\mathbf{v}}{v} \nabla \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s) = F(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $F(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — начальное распределение источников нейтронов.

Если получено решение этого уравнения $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s)$, то решение уравнения (1.9) находится обратным преобразованием Лапласа:

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s)] = \frac{1}{2\pi i} \oint \bar{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, s) e^{st} ds. \quad (1.13)$$

Такой интеграл по контуру в плоскости комплексной переменной s , как известно [77], равен сумме вычетов по особым точкам $s = s_j$, так что решение уравнения (1.9) принимает вид

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}) e^{s_j t}. \quad (1.14)$$

Множество чисел s_j составляет спектр собственных значений уравнения переноса нейтронов, исследование которого в общем случае достаточно сложно [21, 25, 27]. Однако можно показать, что для всех представляющих практический интерес реакторов всегда существует наибольшее (по вещественной части) значение s_0 . Этому числу s_0 — вещественному, единственному и простому собственному значению — соответствует однозначно определенная собственная функция $\varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, неотрицательная для всех \mathbf{r} и \mathbf{v} , непрерывная и удовлетворяющая граничным условиям вида (1.8). Поскольку s_0 — наибольшее по вещественной части значение среди всех s_j , то с течением времени все «высшие гармоники» в общем разложении потока нейтронов (1.14) затухнут и нейтронное поле приобретет асимптотическую форму неизменного во времени фундаментального распределения $\varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, экспоненциально меняющегося по интенсивности со временем:

$$\varphi_{ac}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rightarrow \varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \exp(s_0 t) \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Соответственно конкретному значению s_0 нейтронное поле затухает ($s_0 < 0$), растет по интенсивности ($s_0 > 0$) или остается постоянным ($s_0 = 0$). Реакторы же, характеризуемые такими значениями s_0 , соответственно классифицируются как подкритические, надкритические и критические.

Определение условий критичности по значению параметра s_0 как более обоснованное теоретически и точно измеримое экспериментально (по сравнению с $k_{эф}$) в последние годы начинают все чаще использовать в физике реакторов [21, 25, 28].

Для критического реактора ($s_0 = 0$) в установившемся асимптотически стационарном режиме начальное состояние $F(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ утрачивает свою роль и уравнение нейтронного поля (1.12) переходит в

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{v}) \int \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \\ - \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \frac{\mathbf{v}}{v} \nabla \varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Последнее уравнение, пользуясь более компактной символикой предыдущего раздела, можно записать в виде

$$\Omega \nabla \varphi = \int \Sigma_q(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi. \quad (1.16)$$

Здесь опущен индекс «о» у функции распределения, так как в данной книге мы почти всегда будем иметь дело с фундаментальными нейтронными полями. Аргументы функции $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, когда не может возникнуть разночтений и имеются в виду именно \mathbf{r} и \mathbf{v} , также будем по возможности опускать для краткости и прозрачности формул и уравнений.

Для иллюстрации применения теории возмущений нейтронные поля будем описывать в более простых формах уравнения переноса, чем это делалось ранее. Приведем основные формы (в случае критического реактора), на которые будем впоследствии опираться в приложениях.

Односкоростная теория. Функция распределения потока нейтронов имеет вид $\varphi(\mathbf{r}, \Omega)$. Уравнение переноса (для неоднородной среды) в общем случае имеет вид

$$\Omega \nabla \varphi(\mathbf{r}, \Omega) = v \Sigma_f(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) \varphi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' - \Sigma_t(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}, \Omega), \quad (1.17)$$

где $\Phi(\mathbf{r}) \equiv \int \varphi(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega$. В частных случаях плоской (и сферически-симметричной) геометрии угловую зависимость от Ω можно свести к одной величине μ — косинусу угла между направлением полета нейтрона и осью x (или радиусом-вектором положения нейтрона): $\varphi(x, \mu)$; уравнения переноса при этом запишутся в виде

$$\mu \frac{\partial \varphi(x, \mu)}{\partial x} = \int_{-1}^1 \Sigma_q(x, \mu' \rightarrow \mu) \varphi(x, \mu') d\mu' - \Sigma_t(x) \varphi(x, \mu); \quad (1.18)$$

$$\mu \frac{\partial \varphi(r, \mu)}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \int_{-1}^1 \Sigma_q(r, \mu' \rightarrow \mu) \varphi(r, \mu') d\mu' - \Sigma_t(r) \varphi(r, \mu). \quad (1.19)$$

Диффузионное приближение. Нейтронное поле описывается функцией распределения $\Phi(\mathbf{r}, v)$, а угловая зависимость потока принимает вид $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = [\Phi(\mathbf{r}, v) + 3\Omega \mathbf{j}(\mathbf{r}, v)]/4\pi$. Уравнение для потока нейтронов $\Phi(\mathbf{r}, v)$ [определенного по (1.3)] имеет вид

$$\begin{aligned} & \nabla D(\mathbf{r}, v) \nabla \Phi(\mathbf{r}, v) + \chi(v) \int v \Sigma_f(\mathbf{r}, v') \Phi(\mathbf{r}, v') dv' + \\ & + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, v' \rightarrow v) \Phi(\mathbf{r}, v') dv' - \Sigma_t(\mathbf{r}, v) \Phi(\mathbf{r}, v) = 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где коэффициент диффузии

$$D(\mathbf{r}, v) = 1/3 \Sigma_{tr}(\mathbf{r}, v).$$

1.3. Основные формы представления нейтронных полей в реакторах

Нейтронное поле совершенно однозначно может быть представлено только в точно критическом реакторе без посторонних источников нейтронов.

Широкое распространение получило условно-критическое представление нейтронного поля в *некритических* реакторах введением числового параметра $k_{эф}$ — эффективного коэффициента размножения нейтронов в системе. По существу фактическое среднее число ν нейтронов, испускаемых в акте деления, заменяется некоторым фиктивным $\nu_{\text{фикт}} = \nu/k_{эф}$ так, чтобы некритический реактор оказался критическим: соблюдался бы баланс числа рожденных и поглощенных (или вылетевших из реактора) нейтронов. Тогда функция распределения потока нейтронов $\varphi_{\lambda}(\mathbf{r}, \nu)$ должна удовлетворять условно-критическому уравнению

$$\lambda [\chi(\nu) \int \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, \nu') \varphi_{\lambda}(\mathbf{r}, \nu') d\nu'] + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \nu' \rightarrow \nu) \varphi_{\lambda}(\mathbf{r}, \nu') d\nu' - \Sigma_t(\mathbf{r}, \nu) \varphi_{\lambda}(\mathbf{r}, \nu) - \Omega \nabla \varphi_{\lambda}(\mathbf{r}, \nu) = 0, \quad (1.21)$$

где $\lambda \equiv 1/k_{эф}$. Такое представление нейтронного поля назовем λ -представлением. Его частный случай — поле критического реактора, когда $k_{эф} = 1$, при этом уравнение (1.21) переходит в (1.15), т. е. $\lambda = 1$. Представление это весьма удобно при теоретическом анализе и численных расчетах реакторов, но имеет весьма условную связь с действительностью, как только $k_{эф}$ сколько-нибудь значительно отличается от единицы. Дело в том, что пока у нас нет средств физически воздействовать на величину ν и любое рассчитанное по уравнению (1.21) нейтронное распределение (при $k_{эф} \neq 1$) не может наблюдаться экспериментально, оно не существует практически.

Реально в некритических системах существуют и наблюдаются нейтронные поля с функциями распределения, отличными от $\varphi_{\lambda}(\mathbf{r}, \nu)$. (При необходимости оттенить, в каком именно представлении взята функция распределения φ , будем ее снабжать соответствующим индексом.)

Для надкритических реакторов (в обычно используемом диапазоне надкритичностей $k_{эф} < 1 + \beta$) практически четко можно наблюдать асимптотическое нейтронное распределение $\varphi_0(\mathbf{r}, \nu)$. Оно образуется при увеличении мощности реактора, когда завершаются переходные процессы и установится экспоненциальный рост интенсивности потока нейтронов с периодом $T_{уст} \equiv 1/\omega$, определяемым по известной формуле Нордгейма:

$$\frac{k_{эф} - 1}{k_{эф}} = \frac{l\omega}{k_{эф}} + \sum_i \frac{\beta_i}{1 + \lambda_i/\omega}. \quad (1.22)$$

По существу это — фундаментальное распределение (из числа рассмотренных в предыдущем разделе) для конкретного значения $s_0 = \omega > 0$. Нейтронное поле такого распределения $\varphi_\omega(\mathbf{r}, \nu)$ описывается уравнением, которое получается из (1.12), если отбросить начальное распределение $F(\mathbf{r}, \nu)$ и пренебречь членом $\omega\varphi/\nu$:

$$\begin{aligned} & \left[(1-\beta) f_p(\nu) + \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i f_i(\nu)}{\lambda_i + \omega} \right] \int \nu \Sigma_t(\mathbf{r}, \nu') \varphi_\omega(\mathbf{r}, \nu') d\nu' + \\ & + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \nu' \rightarrow \nu) \varphi_\omega(\mathbf{r}, \nu') d\nu' - \Sigma_t(\mathbf{r}, \nu) \varphi_\omega(\mathbf{r}, \nu) - \\ & - \Omega \nabla \varphi_\omega(\mathbf{r}, \nu) = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

В используемом диапазоне надкритичностей значение ω/ν , как нетрудно оценить из (1.22), в 10^5 раз меньше макроскопических сечений $\Sigma_t(\mathbf{r}, \nu)$ для любых реальных реакторов.

Такое ω -представление нейтронного поля достаточно строго и реалистично, но его уравнение слишком громоздко. Если (как это имеет место в большинстве случаев) можно пренебречь разницей в спектре мгновенных нейтронов деления и полном спектре с вкладами запаздывающих, то выражение в квадратных скобках уравнения (1.23) преобразуется к виду [21]

$$\begin{aligned} \left[(1-\beta) f_p(\nu) + \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i f_i(\nu)}{\lambda_i + \omega} \right] & \approx \left[1 - \sum_i \frac{\beta_i \omega}{\lambda_i + \omega} \right] \chi(\nu) = \\ & = \frac{\chi(\nu)}{k_{\text{эф}}} \equiv \lambda \chi(\nu). \end{aligned}$$

Тогда, очевидно, ω -представление нейтронного поля становится эквивалентным λ -представлению и поток $\varphi_\omega(\mathbf{r}, \nu) = \varphi_\lambda(\mathbf{r}, \nu)$ — потоку, описываемому уравнением (1.21). Это оправдывает применение λ -представления, если не забывать, что речь идет о *малых* реактивностях.

Подкритичность реактора, в отличие от надкритичности, встречается в большом диапазоне значений $k_{\text{эф}}$ (вплоть до $k_{\text{эф}} = 0$). Это вносит определенные трудности при попытке использовать для описания нейтронного поля асимптотическое распределение в таком же виде, как и в случае надкритических систем (но при величинах $s_0 < 0$).

Асимптотическое затухание потока нейтронов в подкритическом реакторе возникает по существу на двух этапах распада начального распределения (как бы оно ни было создано). Первый этап — затухание потока, обусловленное уменьшением числа мгновенных нейтронов деления, происходящим за времена, сравнимые с временем жизни l мгновенных нейтронов в реакторе, которое обычно на два порядка (и более) короче по сравнению с временами жизни эмиттеров запаздывающих нейтронов. Поэтому на этом этапе запаздывающие нейтроны практически не вносят вклада в распределение

Нейтронного поля. Что же касается нейтронного поля «мгновенной» природы, то оно может принять асимптотический вид с фундаментальным распределением $\varphi_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, подчиняющимся уравнению

$$(1 - \beta) f_p(\mathbf{v}) \int \mathbf{v} \Sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \varphi_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \\ - \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi_\alpha - \Omega \nabla \varphi_\alpha + \frac{\alpha}{v} \varphi_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0. \quad (1.24)$$

Такое α -представление нейтронного поля получается из (1.12) при $s = -\alpha$, если исключены запаздывающие нейтроны (все $\lambda_i \equiv 0$). Однако здесь нельзя пренебречь членом с s_0/v , как было в случае ω -представления. В рамках элементарной кинетики [39] известно, что $\alpha = (\rho + \beta)/l$, где ρ — подкритическая реактивность и член, содержащий α/v , соизмерим с членами, включающими макроскопические сечения.

Второй этап асимптотического затухания наступает после исчезновения мгновенной компоненты потока и определяется значением $s_0 = -\lambda_{\min} \rho / (\rho + \beta)$, где λ_{\min} — постоянная распада наиболее долгоживущих эмиттеров запаздывающих нейтронов. Поле нейтронов при этом очень слабое, и не представляет интереса.

Наиболее удобно практически реализовать поле в α -представлении, если облучать реактор от импульсного источника и регистрировать затухание аппаратурой временного анализа [47].

Наконец, в *подкритическом* реакторе можно наблюдать поле, получаемое при «подсветке» реактора постоянным (обычно локальным) посторонним источником [Po— α —Be, (γ, n), ^{252}Cf и т. д.]. Уравнение этого поля

$$\chi(\mathbf{v}) \int \mathbf{v} \Sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \varphi_S(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi_S(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \\ - \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi_S(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \Omega \nabla \varphi_S(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + S_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0. \quad (1.25)$$

Такое s -представление нейтронного поля φ_S в подкритическом реакторе используется обычно при сборке реакторов для экстраполяции критического состояния по умножению нейтронов источника. Для этого представления нейтронного поля пояснений, по-видимому, не требуется.

§ 2. ЦЕННОСТЬ НЕЙТРОНОВ

2.1. Интегральное уравнение переноса нейтронов

До сих пор основной характеристикой нейтронного поля нам служила функция распределения плотности потока нейтронов $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Оказывается, что существует ее «двойник» — функция распределения *ценности* нейтронов $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, позволяющая столь же представительно описать все процессы, производимые нейтронами в реакторе. Чтобы наиболее естественно и физически оправданно ввести это новое понятие, очень важное для теории возмуще-

ний, сначала напомним некоторые сведения из теории реакторов [21—24].

Поток нейтронов $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ можно рассматривать как результат действия всех источников нейтронов, испускающих нейтроны со скоростью \mathbf{v} в точках \mathbf{r}' (имеется в виду стационарная задача)

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int d\mathbf{r}' P_v(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) q(\mathbf{r}', \mathbf{v}). \quad (2.1)$$

Здесь $q(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ — плотность источников нейтронов; $P_v(\mathbf{r}'|\mathbf{r})$ — фактор, описывающий ослабление потока нейтронов на пути от точки \mathbf{r}' до \mathbf{r} , обусловленное геометрией и столкновениями с ядрами среды на этом пути:

$$P_v(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \equiv \frac{\exp\left\{-\left|\int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Sigma_t(\mathbf{r}-\Omega s, v) ds\right.\right\}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \delta\left(\frac{\mathbf{v}}{v} - \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right). \quad (2.2)$$

Дельта-функция ограничивает интегрирование по пространству только теми источниками, для которых векторы скорости испускаемых нейтронов \mathbf{v} проходят через точку \mathbf{r} .

В критическом реакторе (без посторонних источников) источники плотностью $q(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ образуются в процессе взаимодействия потоков $\varphi(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ с ядрами

$$q(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = \int d\mathbf{v}' \Sigma_q(\mathbf{r}', \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}', \mathbf{v}'). \quad (2.3)$$

Граничным условием для потока нейтронов по-прежнему считаем отсутствие нейтронов, летящих извне на наружную поверхность реактора (множество координат \mathbf{R}):

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})|_{\mathbf{r} \in \mathbf{R}} = 0 \quad \text{для } (\mathbf{v}\mathbf{n}_e) < 0. \quad (2.4)$$

Подстановка (2.3) в (2.1) приводит к интегральному уравнению для потока нейтронов в критическом реакторе:

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{v}' P_v(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \Sigma_q(\mathbf{r}', \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}', \mathbf{v}'), \quad (2.5)$$

полностью эквивалентному уравнению (1.16) для определения $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$.

Продемонстрируем эту эквивалентность. Поскольку поток нейтронов $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ создают только те источники $q(\mathbf{r}', \mathbf{v})$, которые расположены на прямой $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \Omega s$ [см. дельта-функцию в (2.2)], т. е. испускают нейтроны в направлении на точку \mathbf{r} , то интегрирование по всему пространству сводится к интегрированию по прямой (рис. 1, а).

Перейдя к переменной интегрирования $s = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ — пути полета нейтрона — и учтя очевидное соотношение

$$\int \frac{f(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} d\mathbf{r}' = \int \frac{f(s)}{4\pi s^2} 4\pi s^2 ds = \int f(s) ds,$$

приведем интегральное уравнение (2.5) к виду

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int_0^{\infty} ds \exp \left[- \int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s' \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}) ds' \right] \times \\ \times \int d\mathbf{v}' \Sigma_q(\mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}'). \quad (2.6)$$

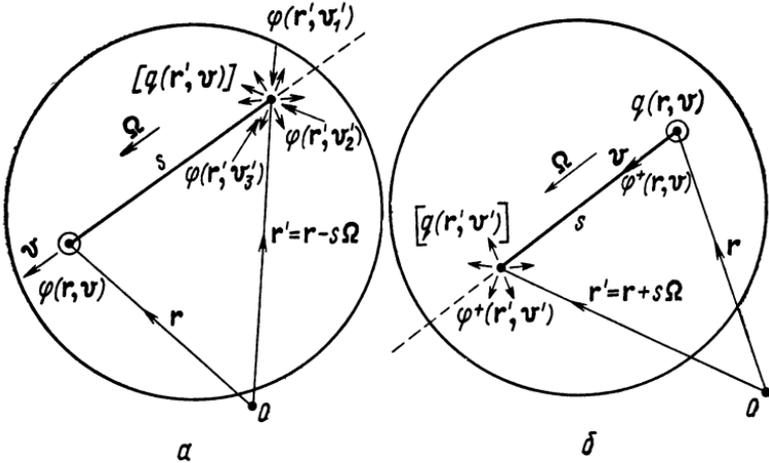


Рис. 1. Схема образования потока нейтронов $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ от источника $q(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ в точке \mathbf{r}' (а) и переноса ценности нейтронами из точки \mathbf{r} в точку \mathbf{r}' (б)

(Интеграл по s фактически равен нулю за пределами реактора, где $\Sigma_q = 0$, так что верхний предел можно выбрать бесконечным). Физический смысл уравнения (2.6) достаточно прозрачен и иллюстрируется рис. 1, а.

Покажем теперь, как из этого интегрального уравнения следует обычное интегро-дифференциальное уравнение переноса нейтронов в критическом реакторе (1.15). Для этого запишем выражение аналогичное (2.6) для потока φ в точке $\mathbf{r} - \boldsymbol{\Omega}\Delta s$, близкой к точке \mathbf{r} и расположенной на пути полета нейтрона. Составим разностное отношение:

$$\frac{\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{r} - \boldsymbol{\Omega}\Delta s, \mathbf{v})}{\Delta s} = -\Sigma_t(\mathbf{r} - \boldsymbol{\Omega}\langle\Delta s\rangle, \mathbf{v}) \times \\ \times \left\{ \int_{\Delta s}^{\infty} ds \exp \left[- \int_{\Delta s}^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s' \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}) ds' \right] \int d\mathbf{v}' \Sigma_q(\mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi \right\} + \\ + [1 - \Sigma_t(\mathbf{r} - \boldsymbol{\Omega}\langle\Delta s\rangle, \mathbf{v}) \Delta s] \int d\mathbf{v}' \Sigma_q(\mathbf{r} - \boldsymbol{\Omega}\langle\Delta s\rangle, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi. \quad (2.7)$$

Здесь использовано разложение

$$\exp \left[- \int_0^{\Delta s} \Sigma_t(\mathbf{r} - s' \boldsymbol{\Omega}, v) ds' \right] = 1 - \Sigma_t(\mathbf{r} - \boldsymbol{\Omega} \langle \Delta s \rangle, v) \Delta s + \dots,$$

где $0 \leq \langle \Delta s \rangle \leq \Delta s$.

Переходя к пределу $\Delta s \rightarrow 0$ и заменяя выражение в фигурных скобках значением потока $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в точке \mathbf{r} согласно (2.6), получаем

$$\frac{d\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{ds} = -\Sigma_t(\mathbf{r}, v) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \int \Sigma_q(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') dv'. \quad (2.8)$$

Очевидно, это и есть интегро-дифференциальное уравнение переноса нейтронов в критическом реакторе (1.15), так как

$$\frac{d\varphi}{ds} \equiv \boldsymbol{\Omega} \nabla \varphi \text{ и } \Sigma_q(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \equiv \chi(v) \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, v') + \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}).$$

2.2. Первое представление о ценности нейтронов

Рассмотрим, как и в предыдущем разделе, критический реактор (без посторонних источников нейтронов). Плотность $q(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ «собственных» источников нейтронов в реакторе определяется фундаментальным распределением $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ потока нейтронов, удовлетворяющим уравнению (2.5). Умножив обе части этого уравнения на сечение репродукции $\Sigma_q(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}')$ и проинтегрировав по скоростям \mathbf{v} , с учетом соотношения (2.3) получим интегральное уравнение для фундаментального распределения источников в критическом реакторе:

$$q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{v}' P_{\mathbf{v}'}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}) \Sigma_q(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) q(\mathbf{r}', \mathbf{v}'). \quad (2.9)$$

Это уравнение очень похоже на уравнение (2.5) для потоков нейтронов, но не тождественно ему, отличаясь некоторыми заменами переменных в подинтегральных функциях.

Физический смысл уравнения (2.9) заключается в том, что в критическом реакторе для каждой конкретной точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_k$ и каждого конкретного значения скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}_k$ плотность источника нейтронов $q(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$, образуется за счет излучения нейтронов всеми другими источниками $q(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ в разных точках \mathbf{r}' , испускающих нейтроны с различными скоростями \mathbf{v}' . При этом, однако, вклад каждого источника $q(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ в создание источника $q(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$ поступает с определенным «весом»

$$\omega(\mathbf{r}', \mathbf{v}' | \mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k) \equiv P_{\mathbf{v}'}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_k) \Sigma_q(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}_k). \quad (2.10)$$

Этот «вес» определяется: а) вероятностью $P_{\mathbf{v}'}(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_k)$ нейтрону со скоростью \mathbf{v}' долететь, не рассеявшись, от точки \mathbf{r}' до точки \mathbf{r}_k ; б) вероятностью $\Sigma_q(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}_k)$ в точке \mathbf{r}_k репродуцировать нейтро-

ны со скоростью v_k в процессах ядерных реакций для нейтрона со скоростью v' . Очевидно, для нейтронов с разными конкретными значениями \mathbf{r}' и \mathbf{v}' такие вероятности могут иметь разные значения, а из этого следует, что нейтроны с фазовыми координатами $(\mathbf{r}'_1, \mathbf{v}'_1)$ и $(\mathbf{r}'_2, \mathbf{v}'_2)$ могут, вообще говоря, оказаться не равными и по их вкладам в создание источника плотностью $q(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$. В этом смысле нейтрону в любой точке \mathbf{r} для каждого значения вектора скорости \mathbf{v} может быть приписана соответствующая характеристика — его ценность относительно некоторого вызываемого им процесса, в данном случае — процесса образования источника нейтронов плотностью $q(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$ в точке \mathbf{r}_k со скоростью \mathbf{v}_k .

За меру такой ценности естественно принять величину, пропорциональную весовому фактору (2.10), т. е. вероятности нейтрону с фазовыми координатами (\mathbf{r}, \mathbf{v}) репродуцировать нейтроны с фазовыми координатами $(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$:

$$\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v} | \mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k) = P_{\mathbf{v}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_k) \Sigma_q(\mathbf{r}_k, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_k) C_{r_k v_k}. \quad (2.11)$$

Такая функция ценности переменных \mathbf{r} и \mathbf{v} (считаем \mathbf{r}_k и \mathbf{v}_k фиксированными) выражает относительный вклад нейтронов разных фазовых точек (\mathbf{r}, \mathbf{v}) в образование источника плотностью $q(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$. [Специфическое обозначение этой функции символом φ^+ , как будет видно из дальнейшего (см. § 3), имеет вполне определенный смысл.]

Коэффициент пропорциональности C_{r_k, v_k} , вводимый здесь пока из общих соображений нормировки, — некоторая константа, единая при всех \mathbf{r} и \mathbf{v} (но, возможно, зависящая от выбора фиксированных значений параметров \mathbf{r}_k и \mathbf{v}_k).

Определенная в форме (2.11) функция ценности является узким понятием, оценивающим роль нейтрона с координатами (\mathbf{r}, \mathbf{v}) относительно его вклада в создание источников в одной конкретной точке \mathbf{r}_k и с одним значением \mathbf{v}_k . Нейтрон с координатами (\mathbf{r}, \mathbf{v}) может создать источники в целом ряде точек \mathbf{r}' и с различными скоростями \mathbf{v}' . Поэтому напрашивается более общее определение, так сказать, *полной* функции ценности $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, отражающей возможный вклад данного нейтрона с координатами (\mathbf{r}, \mathbf{v}) в плотность источников реактора во всех точках и для всех скоростей:

$$\begin{aligned} \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &\equiv \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{v}' \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v} | \mathbf{r}', \mathbf{v}') = \\ &= \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{v}' P_{\mathbf{v}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \Sigma_q(\mathbf{r}', \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') C_{r', v'}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Именно это более широкое понятие и будем впредь именовать функцией ценности нейтронов в критическом реакторе или, короче, просто ценностью. Такая ценность представляет меру сравнительного вклада одного нейтрона с фазовыми координатами (\mathbf{r}, \mathbf{v}) в поддержание фундаментального распределения $q(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ плотности источников нейтронов в критическом реакторе.

Для дальнейшей конкретизации выражения (2.12) функции ценности необходимо выяснить смысл величины $C_{r', v'}$. Возвращаясь к частному определению (2.11), можно заметить, что ценность нейтрона с координатами (\mathbf{r}, \mathbf{v}) выражается вероятностью образования $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_k) \Sigma_q(\mathbf{r}_k, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_k)$ некоторого числа нейтронов в точке \mathbf{r}_k со скоростью \mathbf{v}_k . Однако эти «новые» нейтроны, в свою очередь, будут иметь некоторую ценность относительно создания источников плотностью $q(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ в разных других точках \mathbf{r}', \mathbf{v}' . Таким образом, величина C_{r_k, v_k} должна быть каким-то образом связана с ценностью нейтронов, имеющих фазовые координаты \mathbf{r}_k и \mathbf{v}_k , а именно отражать «перенос» ценности нейтрона (\mathbf{r}, \mathbf{v}) на нейтроны $(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$.

Чтобы вскрыть такую связь, умножим левую и правую части (2.11) на плотность источников $q(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и проинтегрируем их по всем значениям \mathbf{r} и \mathbf{v} . Используя общее уравнение (2.9), приводим правую часть к виду $q(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k) C_{r_k, v_k}$, т. е. имеем

$$C_{r_k, v_k} = \iint d\mathbf{r} d\mathbf{v} \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v} | \mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k) q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) / q(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k) = f(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k). \quad (2.13)$$

Как видно, величина C_{r_k, v_k} действительно зависит от \mathbf{r}_k и \mathbf{v}_k и представляет собой функцию $f(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$, которая равна полной «затрате» ценности $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v} | \mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$ в себе и источниками нейтронов в реакторе на образование источника плотностью $q(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$, отнесенной к этой плотности, т. е. на один нейтрон с фазовыми координатами $(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$.

Такая функция $f(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$ может быть отождествлена с функцией ценности нейтрона $\varphi^+(\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k)$ в духе предыдущих рассуждений о «переносе» ценности. Это подтверждается определением (2.12): если обе части его умножить на $q(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и проинтегрировать по \mathbf{r} и \mathbf{v} , используя (2.9), то получим

$$\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{v}' q(\mathbf{r}', \mathbf{v}') C_{r', v'},$$

т. е. $C_{r', v'}$ играет роль $\varphi^+(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$.

Естественно, проведенный анализ отнюдь не претендует на то, чтобы быть доказательством различных свойств и соотношений для функций ценности. Скорее, это лишь цепь правдоподобных рассуждений, цель которых — сделать возможно более физически наглядным и практически понятным *новое представление* о ценности нейтронов в критическом реакторе.

Понятие функции ценности, обычно вводимое как некоторая искусственная математическая конструкция, для инженеров-практиков и физиков-экспериментаторов (конечно, не всегда, но, увы, часто!) остается умозрительной абстракцией, вещь в себе, которой они, по возможности, избегают пользоваться. Интерпретация физического смысла функции ценности нейтрона в критическом реакторе как той асимптотической мощности, на которую выйдет реактор,

имеющий мощность первоначально равную нулю (предложена Л. Н. Усачевым [1]), после ввода в него нейтрона с фазовыми координатами (\mathbf{r}, \mathbf{v}) , вполне точна, но лишена наглядности. Для ее «чувственного восприятия» надо бы как-то проследить весь переходный процесс — от впуска данного нейтрона и до образования фундаментального распределения... Это представляется сложным. Поэтому здесь (как первое вводное знакомство с понятием ценности нейтронов в критическом реакторе) принята другая, на наш взгляд более простая, качественная интерпретация. Возможны, конечно, и другие интерпретации функции ценности (см., например, [3, 8, 22, 31—36]), но выбор одной из них для первого ознакомления — дело уже вкуса.

Теперь, продолжая развиваемый подход, представим выражение ценности нейтрона с фазовыми координатами (\mathbf{r}, \mathbf{v}) по отношению к генерации источников в точке с фазовыми координатами $(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ (2.11) в более явной форме:

$$\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v} | \mathbf{r}', \mathbf{v}') = P_{\mathbf{v}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \Sigma_q(\mathbf{r}', \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') \varphi^+(\mathbf{r}', \mathbf{v}'), \quad (2.14)$$

следующей из нашей интерпретации коэффициентов вида $C_{r', v'}$. Интегрируя (2.14) по всем значениям \mathbf{r}' и \mathbf{v}' и используя определение (2.12), получаем *интегральное уравнение, определяющее функцию ценности* (для произвольного критического реактора)

$$\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{v}' P_{\mathbf{v}}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \Sigma_q(\mathbf{r}', \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') \varphi^+(\mathbf{r}', \mathbf{v}'). \quad (2.15)$$

Как видно, такое уравнение определяет функцию ценности с точностью до произвольного постоянного множителя аналогично тому, как уравнение (2.5) определяет функцию распределения потока нейтронов в критическом реакторе с точностью до постоянного фактора.

2.3. Различные формы уравнений для функции ценности. Ценность и поток как сопряженные характеристики

Уравнения для функции ценности. Уравнение (2.15), полученное в разд. 2.2 из качественных физических рассуждений, еще не определяет однозначно функцию ценности $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Его должны дополнять граничные условия аналогично тому, как уравнение для потока (2.5) решается при граничных условиях вида (2.4). Из приведенной интерпретации ценности нейтрона как меры его способности создавать новые источники нейтронов следует, что ценность нейтронов на внешней (невогнутой) границе реактора должна равняться нулю *при направлении полета наружу*. Это позволяет принять для функции ценности граничное условие

$$\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})|_{\mathbf{r} \in R} = 0 \text{ при } (\mathbf{v} \mathbf{n}_e) > 0. \quad (2.16)$$

Как видно, такое граничное условие «зеркально противоположно» граничному условию для потока (2.4).

Таковую же «зеркальность» можно заметить и при сравнении самих уравнений (2.15) — для функции ценности — и (2.5) — для функции распределения потока. Хотя в обоих уравнениях в качестве ядра интегрального уравнения фигурирует одно и то же выражение — произведение $P_v \Sigma_q$ функций, зависящих от четырех векторных аргументов: $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{v}, \mathbf{v}'$, это ядро «обыгрывается» по-разному. В уравнении (2.5) интегрирование производится по значениям скоростей до акта взаимодействия с ядрами среды в точке \mathbf{r}' , а в уравнении (2.15) — по значениям скоростей после такого взаимодействия (см. рис. 1, а, б). Иначе говоря, поток $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ по уравнению (2.5) суммируется из «прошлого» потока нейтронов $\phi(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$, а ценность $\phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ по уравнению (2.15) выражается в «будущем» создании нейтроном ценности $\phi^+(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$.

Такая «зеркальность» уравнений (2.5) и (2.15) вместе с «зеркальностью» граничных условий (2.4) и (2.16) позволяет назвать определяемые ими функции $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ взаимно сопряженными. Этим же определяется выбор близких символов для обозначения таких функций. Более строгое определение понятия сопряженности будет дано в § 3.

Сейчас же построим другие возможные формы уравнений для описания функции ценности, позволяющие раскрыть ее свойства более удобно, чем на основе интегрального уравнения (2.15). Уравнение для $\phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ (2.15) можно привести к такому же виду, как и уравнение (2.8) для потока нейтронов $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$.

Процедура этого преобразования аналогична проведенной в разд. 2.1 при получении (2.8) из уравнения (2.5). Надо лишь учесть, что аргументы \mathbf{r} и \mathbf{r}' в выражении P_v поменялись местами и дельта-функция [см. (2.2)] теперь в интеграле (2.15) ограничивает пространственное интегрирование точками, лежащими на прямой, проходящей через точку \mathbf{r} в направлении по вектору скорости \mathbf{v} полета нейтрона от этой точки, т. е. по точкам $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + s\Omega$ (см. рис. 1, б). (Для потока нейтронов наблюдалась обратная картина: интегрирование велось по точкам $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - s\Omega$.) Таким путем из (2.15) получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = & \int_0^{\infty} ds \exp \left[- \int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} + s'\Omega, v) ds' \right] \times \\ & \times \int d\mathbf{v}' \Sigma_q(\mathbf{r} + s\Omega, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') \phi^+(\mathbf{r} + s\Omega, \mathbf{v}'). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Физический смысл его очевиден: *ценность нейтрона, вылетевшего из точки \mathbf{r} со скоростью \mathbf{v} , равна суммарной ценности всех нейтронов $\phi^+(\mathbf{r} + s\Omega, \mathbf{v}')$, создаваемых им на своем пути в точках \mathbf{r}' со скоростями \mathbf{v}' . Это положение иногда называют постулатом теории ценности [36], хотя, скорее, это просто следствие из самого определения понятия ценности.*

Исходя из уравнения (2.17), можно построить интегро-дифференциальное уравнение для функции ценности аналогично тому,

как это было сделано в разд. 2.1 для потока нейтронов в преобразованиях (2.6) — (2.8). Отыскивая производную функцию $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ по пути s полета нейтрона, из (2.17) получаем

$$-\frac{d\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{ds} = \int d\mathbf{v}' \Sigma_q(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}') - \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (2.18)$$

или в развернутой форме

$$-\Omega \nabla \varphi^+ = \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \int \chi(\mathbf{v}') \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' + \\ + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (2.19)$$

Как видно, интегро-дифференциальное уравнение для функции ценности φ^+ отличается от интегро-дифференциального уравнения для φ — потока нейтронов (1.15) или (1.16) знаком градиентного члена и перестановкой переменных \mathbf{v} и \mathbf{v}' в членах, учитывающих реакции деления и рассеяния. Эти небольшие различия, однако, приводят к тому, что функции $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в общем случае заметно различаются по своим зависимостям от координат и скоростей.

В односкоростной теории функция ценности оказывается эквивалентной функции распределения потока нейтронов. Действительно, из (2.19) для односкоростной ценности $\varphi^+(\mathbf{r}, \Omega)$ имеем

$$-\Omega \nabla \varphi^+(\mathbf{r}, \Omega) = \nu \Sigma_f(\mathbf{r}) \Phi^+(\mathbf{r}) + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega \rightarrow \Omega') \varphi^+(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' - \\ - \Sigma_t(\mathbf{r}) \varphi^+(\mathbf{r}, \Omega), \quad (2.20)$$

где $\Phi^+(\mathbf{r}) \equiv \int \varphi^+(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega$ определено аналогично (1.3) для полного потока.

Если в (2.20) заменить Ω аргументом $-\Omega$, то это уравнение станет тождественным уравнению (1.17) для односкоростной функции потока при обратном направлении Ω :

$$\varphi^+(\mathbf{r}, \Omega) = \varphi(\mathbf{r}, -\Omega) \text{ и } \Phi^+(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) \quad (2.21)$$

[если принять, что $\Sigma_s(-\Omega \rightarrow -\Omega') \equiv \Sigma_s(\Omega' \rightarrow -\Omega)$].

В диффузионном приближении с энергетической зависимостью такого совпадения уже нет. Введем для ценности представления «полной» ценности и «тока» ценности аналогично (1.3) и (1.5):

$$\Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv \int \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\Omega; \quad \mathbf{j}^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv \int \Omega \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\Omega. \quad (2.22)$$

Используя (2.22), угловую зависимость приведем к виду $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = = [\Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + 3\Omega \mathbf{j}^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})]/4\pi$. В результате из (2.19) получим уравнение для функции $\Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$:

$$\nabla D(\mathbf{r}, v) \nabla \Phi^+(\mathbf{r}, v) + v \Sigma_f(\mathbf{r}, v) \int \chi(v') \Phi^+(\mathbf{r}, v') dv' + \\ + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, v \rightarrow v') \Phi^+(\mathbf{r}, v') dv' - \Sigma_t(\mathbf{r}, v) \Phi^+(\mathbf{r}, v) = 0. \quad (2.23)$$

Как видно, (2.23) отличается от уравнения (1.20) для потока нейтронов $\Phi(\mathbf{r}, v)$ в диффузионном приближении конструкцией членов, связанных с процессами деления и рассеяния.

Свойства функции ценности. Для того чтобы хотя бы качественно уяснить основные особенности пространственной и энергетической зависимости функций ценности (по сравнению с общеизвестными аналогичными зависимостями для потока нейтронов), рассмотрим некоторый критический реактор, состоящий из гомогенной сферической активной зоны и сферической оболочки-отражателя. В центре ($\mathbf{r} = 0$) такого реактора градиент нейтронного поля равен нулю, и этого же можно ожидать от градиента функции ценности в силу симметрии системы. Тогда уравнения для потока нейтронов и для ценности, согласно (1.20) и (2.23), можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \chi(v) Q + \int \Sigma_s(v' \rightarrow v) \Phi(v') dv' - \Sigma_t(v) \Phi(v) = 0; \\ v \Sigma_f(v) Q + \int \Sigma_s(v \rightarrow v') \Phi^+(v') dv' - \Sigma_t(v) \Phi^+(v) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Здесь координаты ($\mathbf{r} \equiv 0$) опущены, Q и Q^+ обозначают ч и с л а:

$$Q \equiv \int v \Sigma_f(v) \Phi(v) dv; \quad Q^+ \equiv \int \chi(v) \Phi^+(v) dv. \quad (2.25)$$

Рассматривая реактор на быстрых нейтронах (или на промежуточных с малым вкладом тепловых нейтронов), можем аппроксимировать процессы рассеяния с замедлением выражениями

$$\left. \begin{aligned} \int \Sigma_s(v' \rightarrow v) \Phi(v') dv' = CZ(v); \\ \int \Sigma_s(v \rightarrow v') \Phi^+(v') dv' = \Sigma_s(v) Z^+(v), \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

где $Z(v)$ — нейтронный спектр типа фермиевского [57] или даже более общей формы $1/E^{1-m}$ (см. [22, 30]) с плавной энергетической зависимостью [такой же характер зависимости можно предположить и для $Z^+(v)$ — интеграла ценности с весом индикатрисы замедления]; $C = \text{const}$. Тогда зависимости потока нейтронов и функции ценности от энергии представляются в виде

$$\Phi(v) = \frac{\chi(v) Q + Z(v) C}{\Sigma_t(v)}; \quad \Phi^+(v) = \frac{v \Sigma_f(v) Q + \Sigma_s(v) Z^+(v)}{\Sigma_t(v)}. \quad (2.27)$$

Спектр деления $\chi(v) \approx v \exp(-v^2)$ [22] имеет характерную форму колоколообразной кривой с изменениями интенсивности на много порядков. Особенности $\Sigma_t(v)$ — резонансы — также ведут к различным сильным максимумам и минимумам функции $\Phi(v)$ [53]. Таким образом, энергетическая зависимость потока ней-

тронов описывается функцией, испытывающей значительные колебания в общем диапазоне энергий нейтронов реактора.

В отличие от потока нейтронов функция ценности $\Phi^+(v)$ выражается отношением макросечений, так что резонансы сечений (деления и рассеяния) практически компенсируются соответствующими вкладами в полное сечение и не приводят к резким колебаниям функции ценности в зависимости от энергии нейтронов. (Резонансы поглощения неявно входят в функцию $Z^+(v)$, определяющую ве-

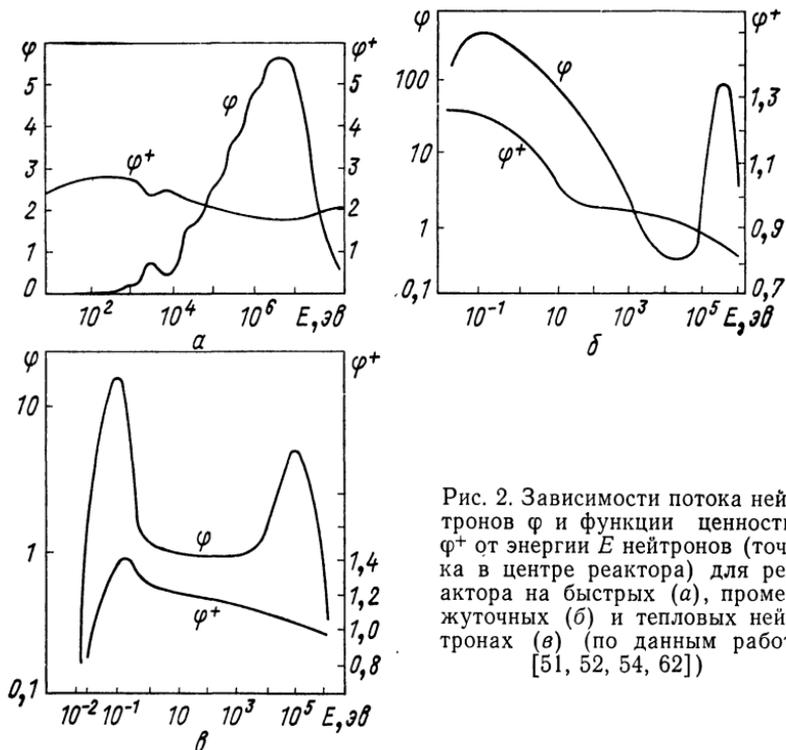


Рис. 2. Зависимости потока нейтронов φ и функции ценности φ^+ от энергии E нейтронов (точка в центре реактора) для реактора на быстрых (а), промежуточных (б) и тепловых нейтронах (в) (по данным работ [51, 52, 54, 62])

роятность замедления от скорости v вниз, и также резко не проявляются.)

В целом функция ценности $\Phi^+(v)$ изменяется плавно, медленно, в ограниченном интервале значений в зависимости от энергии нейтронов.

Приведенное здесь рассмотрение довольно приближенно, оно не учитывает ряда факторов, например тепловых нейтронов и др. Однако отмеченная «ленивость» функции ценности равно характерна для реакторов как на быстрых нейтронах, так и на промежуточных и тепловых (рис. 2) и не является особенностью лишь для центра реактора. Такое поведение Φ^+ вполне объяснимо [см. (2.11)]: если, например, с изменением v растет $\Sigma_a(v \rightarrow v')$, то это должно бы повести к возрастанию ценности; но поскольку при этом

неизбежно увеличивается $\Sigma_t(v)$, т. е. снижается P_v , то в результате ценность сохраняется почти постоянной.

Пространственное поведение функции ценности, как правило, также более консервативно, чем изменение потока нейтронов по координатам (при одной и той же энергии).

Естественно, в односкоростном представлении ценность $\Phi^+(r)$ и поток $\Phi(r)$ совпадают по своим пространственным зависимостям [см. (2.21)]. В общем же случае градиент $d\phi^+/ds$ будет слабее

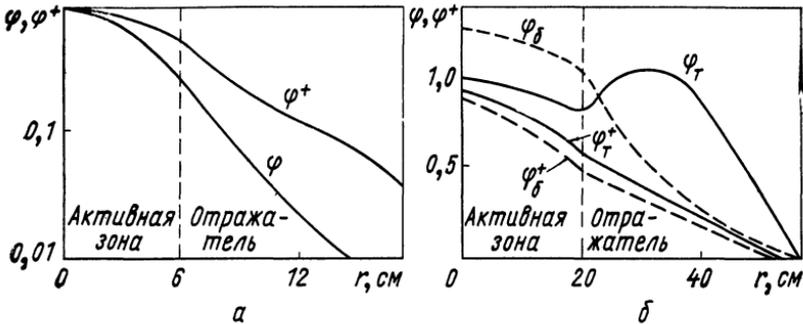


Рис. 3. Пространственный ход потока нейтронов ϕ и функции ценности ϕ^+ для сферических гомогенных реакторов с отражателем:

a — для нейтронов с энергией спектра деления в реакторе на быстрых нейтронах; b — для быстрых нейтронов (ϕ_b, ϕ_b^+) и тепловых (ϕ_T, ϕ_T^+) в реакторе на тепловых нейтронах (по данным работ [22, 36, 67]). По оси ординат отложены величины в относительных единицах

меняться по направлению s при изменении сечений. Это видно из (2.18), если учесть сказанное ранее о слабой зависимости функций ценности от энергии и представить (2.19) приближенно в форме

$$-\frac{d\phi^+}{ds} = [v\Sigma_f(r, v) + \Sigma_s(r, v) - \Sigma_t(r, v)] \langle \phi^+ \rangle_v, \quad (2.28)$$

где $\langle \phi^+ \rangle_v$ — некоторое среднее по энергии значение ценности $\phi^+(v)$.

Изменение Σ_f и Σ_s в зависимости от координат компенсируется изменением Σ_t , входящим в (2.28) с противоположным знаком.

Для оценки градиента потока нейтронов такого представления не удается сделать, ибо члены деления и рассеяния суммируют потоки в широком диапазоне энергий [см. (1.15)] и градиент потока нейтронов данной энергии главным образом обусловлен значениями $\Sigma_t(r, v)$.

Обычно функция ценности монотонно убывает от центра реактора к его наружной границе (что справедливо и для быстрых и для медленных нейтронов) соответственно общему падению вероятности нейтрону испытать столкновение в системе и создать новые нейтроны [22, 36].

Характерные примеры пространственного поведения потока $\phi(r, v)$ и ценности $\phi^+(r, v)$ приводятся на рис. 3.

2.4. Дальнейшее развитие понятия функция ценности нейтрона

До сих пор функция ценности нейтрона $\varphi^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ была представлена как относительная мера вклада нейтрона с фазовыми координатами \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 в процесс создания и поддержания фундаментального распределения $q(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — плотности источников нейтронов в критическом реакторе.

Функция ценности $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ [см. (2.15)] и плотность источников $q(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ [см. (2.9)] определены с точностью до произвольных постоянных множителей. Эту неопределенность можно устранить, введя некоторую нормировку этих функций. Так, если задать конкретное число Q — полную интенсивность источников реактора:

$$Q = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \Sigma_q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (2.29)$$

то $q(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ [и связанное с ним $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$] становится однозначной величиной, функционалом которой является число Q .

Нормировку функции ценности выберем из следующих соображений. Каждый нейтрон источника плотностью $q(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ имеет ценность $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, а все нейтроны, испускаемые всеми источниками критического реактора, имеют суммарную ценность, равную $\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Если эту величину положить равной Q , то для нормированной таким образом функции ценности $\varphi_Q^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ получим соотношение

$$\langle \varphi_Q^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \rangle_{\text{ср}} \equiv \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \varphi_Q^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) / \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 1. \quad (2.30)$$

Иными словами, среднее значение функции ценности по всем нейтронам реактора равно единице, т. е. каждый нейтрон в среднем создает снова один нейтрон, поддерживая постоянным поток нейтронов фундаментального распределения в критическом реакторе. Парциальный вклад $\varepsilon(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ одного нейтрона с фазовыми координатами \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 , создающего поток $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v} | \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ в фундаментальном распределении $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, тогда выразится отношением его функции ценности $\varphi_Q^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ к полной ценности всех нейтронов:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) &\equiv \frac{\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v} | \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}{\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})} = \\ &= \frac{\varphi_Q^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}{\int d\mathbf{r}_0 \int d\mathbf{v}_0 \varphi_Q^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) q(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)} \equiv \frac{\varphi_Q^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)}{Q}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Отсюда видно, что для любого ядерного процесса «А», протекающего в реакторе с сечением $\Sigma_A(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, вклад реакций, вызванных нейтроном с координатами $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$, составит

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) &\equiv \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \Sigma_A(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v} | \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) = \\
 &= A\varepsilon(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \equiv \frac{A}{Q} \varphi_{\dot{A}}^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0),
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

где $A \equiv \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \Sigma_A(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — полное число реакций данного вида, происходящих во всем критическом реакторе.

В этом смысле величина $a(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ играет роль функции ценности $\varphi_{\dot{A}}^+$ нейтрона с координатами $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ относительно ядерного процесса «А» и связанного с ним функционала — числа A таких реакций во всем критическом реакторе:

$$\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \varphi_{\dot{A}}^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv \int d\mathbf{r}_0 \int d\mathbf{v}_0 a(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) q(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) = A. \tag{2.33}$$

Как видно из (2.32), в критическом реакторе существует единая для любых процессов функция ценности нейтронов $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, отличающаяся для различных процессов лишь постоянным множителем. Такая ситуация вполне естественна для критического реактора без посторонних источников нейтронов, обладающего нейтронным полем собственного фундаментального распределения. Последнее формируется соответственно основным процессам с сечениями Σ_t и Σ_q (в которые входят парциальными компонентами сечения $\Sigma_A, \Sigma_B, \dots$, а также сечения всех прочих ядерных процессов) [26].

Понятие функции ценности нейтронов, введенное для критического реактора, может быть распространено и на некритические реакторы, которые удобно описывать в формах λ -представления (где $\lambda = 1/k_{\text{эф}}$) и α -представления (см. разд. 1.3). В этих представлениях уравнения для потока нейтронов $\varphi_\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ (1.21) и для $\varphi_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ (1.24) формально тождественны уравнению для потока в критическом реакторе (1.15), если ν заменить $\lambda\nu$ [для (1.21)] или Σ_t заменить $(\Sigma_t - \alpha/\nu)$ [для (1.24)]*.

В обоих представлениях некритический реактор, согласно (1.21) и (1.24), представляет собой условно-критическую систему без посторонних источников, нейтронное поле в которой описывается однородным уравнением переноса вида (1.15), хотя и с несколько модифицированными ядерными характеристиками. Поэтому для некритических реакторов в λ - или α -представлении можно ввести функции ценности нейтронов совершенно аналогично тому, как это было сделано в предыдущих разделах для критического реактора. При этом для функции ценности $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ получаются уравнения близкие к (2.19). Для λ -представления нейтронного поля

* Для α -представления $\chi(\mathbf{v})$, фигурирующий в (1.15), заменяется спектром мгновенных нейтронов деления $(1 - \beta)f_p(\mathbf{v})$, учитываемым в уравнении (1.24). Однако это не меняет всей идеологии введения функции ценности, как она была построена выше для критического реактора.

уравнение потока нейтронов имеет вид (1.21), а функция ценности задается уравнением

$$\lambda [v \Sigma_f(\mathbf{r}, v) \int \chi(v') \varphi^+(\mathbf{r}, v') dv'] + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, v \rightarrow v') \varphi^+(\mathbf{r}, v') dv' - \Sigma_t(\mathbf{r}, v) \varphi^+(\mathbf{r}, v) + \Omega \nabla \varphi^+(\mathbf{r}, v) = 0, \quad (2.34)$$

где по-прежнему $\lambda = 1/k_{\text{эф}}$.

Для α -представления поток нейтронов описывается уравнением (1.24), а функция ценности определяется уравнением

$$v \Sigma_f(\mathbf{r}, v) \int (1 - \beta) f_p(v') \varphi^+(\mathbf{r}, v') dv' + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, v \rightarrow v') \varphi^+(\mathbf{r}, v') dv' - \Sigma_t(\mathbf{r}, v) \varphi^+(\mathbf{r}, v) + \frac{\alpha}{v} \varphi^+(\mathbf{r}, v) + \Omega \nabla \varphi^+(\mathbf{r}, v) = 0. \quad (2.35)$$

Нетрудно видеть, что структура уравнений для функции ценности в λ - и α -представлениях по существу повторяет структуру уравнения (2.19) для функции ценности в критическом реакторе.

Значительно более оригинальным оказывается случай S -представления нейтронного поля в подкритическом реакторе (см. разд. 1.3), когда поток нейтронов не являет собой собственной функции системы, а создается в результате «подсветки» от постороннего источника нейтронов интенсивностью $S_n(\mathbf{r}, v)$ и зависит от его свойств. Поток нейтронов при этом определяется уравнением (1.25).

Для каждого отдельного процесса «А» имеется своя функция ценности $\varphi_A^+(\mathbf{r}, v)$, которую можно представить в виде

$$\varphi_A^+(\mathbf{r}_0, v_0) = \int d\mathbf{r} P_{v_0}(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}) \Sigma_A(\mathbf{r}, v_0) + \int d\mathbf{r} P_{v_0}(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}) \int dv \Sigma_q(\mathbf{r}, v_0 \rightarrow v) \varphi_A^+(\mathbf{r}, v). \quad (2.36)$$

Смысл этого выражения очевиден: ценность нейтрона с фазовыми координатами (\mathbf{r}_0, v_0) в отношении процесса «А» с сечением $\Sigma_A(\mathbf{r}, v)$ определяется вероятностью достижения нейтроном различных точек \mathbf{r} , где процесс «А» происходит с сечением $\Sigma_A(\mathbf{r}, v_0)$, а также вероятностью репродукции $\Sigma_q(\mathbf{r}, v_0 \rightarrow v)$ нейтронов во всех точках \mathbf{r} со скоростями v , обладающих, в свою очередь, ценностями $\varphi_A^+(\mathbf{r}, v)$ в отношении этого же процесса «А».

Интегральное уравнение (2.36) можно преобразовать в интегро-дифференциальное аналогично тому, как это было сделано в разд. 2.1 для потока и в разд. 2.2 — для ценности. Таким путем получаем неоднородное уравнение вида

$$v \Sigma_f(\mathbf{r}, v) \int \chi(v') \varphi_A^+(\mathbf{r}, v') dv' + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, v \rightarrow v') \varphi_A^+(\mathbf{r}, v') dv' - \Sigma_t(\mathbf{r}, v) \varphi_A^+(\mathbf{r}, v) + \Omega \nabla \varphi_A^+(\mathbf{r}, v) = -\Sigma_A(\mathbf{r}, v). \quad (2.37)$$

В этом случае для каждого ядерного процесса «А» существует с о я функция ценности $\varphi_A^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, определяемая однозначно заданным сечением процесса $\Sigma_A(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Только в случае критического реактора все такие функции вырождаются в единую функцию ценности, отличающуюся для разных процессов лишь п о с т о я н н ы м м н о ж и т е л е м. Поскольку все нейтроны распределения $\varphi_S(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в данной подкритической системе обязаны своим существованием первоначальным нейтронам от постороннего источника интенсивностью $S_n(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, то представляется вполне естественным, что полное число реакций некоторого типа «А», вызываемых потоком $\varphi_S(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, может быть выражено через полную ценность нейтронов источника $S_n(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ для этого процесса.

Действительно, запишем уравнение для потока (1.25) в форме

$$\Omega \nabla \varphi_S = \int \Sigma_q(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi_S(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi_S + S_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (2.38)$$

а уравнение для ценности (2.37)—в таком же компактном виде:

$$\begin{aligned} -\Omega \nabla \varphi_A^{\dagger} &= \int \Sigma_q(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') \varphi_A^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \\ &- \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi_A^{\dagger} + \Sigma_A(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Умножим обе части уравнений (2.39) и (2.38) соответственно на $\varphi_S(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\varphi_A^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и проинтегрируем их по всей области переменных \mathbf{r} и \mathbf{v} . Затем, вычитая почленно второе уравнение из первого, получаем

$$\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} [\varphi_A^{\dagger} \Omega \nabla \varphi_S + \varphi_S \Omega \nabla \varphi_A^{\dagger}] = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \varphi_A^{\dagger} S_n - \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \Sigma_A \varphi_S. \quad (2.40)$$

Левая часть (2.40) может быть представлена в виде дивергенции вектора $(\Omega \varphi_A^{\dagger} \varphi_S)$ и по теореме Гаусса — Остроградского приведена к интегралу по наружной поверхности реактора $d\sigma$:

$$\int d\mathbf{v} \int d\mathbf{r} \operatorname{div} (\Omega \varphi_A^{\dagger} \varphi_S) = \int d\sigma \int d\Omega (\Omega \mathbf{n}) \varphi_A^{\dagger} \varphi_S \equiv 0. \quad (2.41)$$

Интегрирование по угловой переменной Ω дает нуль. Действительно, для направлений Ω внутрь реактора поток φ_S равен нулю согласно граничному условию (2.4), а для Ω , направленных из реактора, ценность φ_A^{\dagger} равна нулю по условию (2.16). Тогда с учетом тождества (2.41) из (2.40) получаем соотношение

$$A \equiv \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \Sigma_A(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi_S(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \varphi_A^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) S_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (2.42)$$

т. е. полное число процессов «А», являющееся функционалом потока нейтронов $\varphi_S(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, может быть представлено как функционал от ценности нейтронов источника в данном подкритическом реакторе $\varphi_A^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$.

Более подробные сведения о функциях ценности нам не понадобятся, при желании их можно найти в ряде источников [1, 7, 21, 24, 26, 36].

§ 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ

3.1. Функциональный анализ — математическая основа теории реакторов

Роль математики в современной науке и технике неизмеримо возросла, особенно за последние три-четыре десятилетия. Для надежного, точного, корректного описания физических процессов в различных технических устройствах, в том числе реакторах, требуется весьма сложный математический аппарат. Использование классического математического анализа Ньютона — Лейбница приводит к громоздким формулам, которые трудно преобразовывать, при этом часто утрачивается наглядность итогов вычислений.

Широкое распространение сейчас получил функциональный анализ — новый раздел математики, построенный на обобщении ряда понятий и методов классического математического анализа, линейной алгебры, геометрии, векторного анализа и др. В основе функционального анализа лежат представления о *пространстве функций и об операторе* как о весьма общем средстве преобразования одной функции («точки функционального пространства») в другую функцию. В этом смысле оператор является обобщением понятия функции — способа преобразования одного числа в другое по заданному правилу.

Функциональный анализ — очень обширная и сложная математическая дисциплина, овладение которой необходимо для строгого обоснования теории реакторов [25]. Однако даже самые начальные, максимально упрощенные, лишенные строгости и большой общности элементы понятий и методов функционального анализа настолько упрощают изложение теории реакторов вообще, и теории возмущений в частности, что их освоение просто необходимо каждому инженеру, экспериментатору, проектанту. (Для углубленного ознакомления можно рекомендовать ряд книг, например: [71, 78] — для начала, [25, 73 — 76, 79] — как фундаментальные.)

3.2. Функциональное пространство и линейные операторы

Функциональное пространство. Обычное представление о пространстве состоит в том, что мы имеем в виду трехмерную область точек, положение каждой из которых может быть описано вектором \mathbf{r} , проведенным из начала выбранной системы координат, т. е. тремя упорядоченными числами x, y, z . Длина каждого вектора равна $\|\mathbf{r}\| = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и представляет собой вещественное неотрицательное число, которое называется длиной или нормой вектора \mathbf{r} и обозначается $\|\mathbf{r}\|$. Из элементарной геометрии

трии ясно, что норма суммы двух векторов не превышает суммы норм слагаемых (свойство треугольника), а для вектора, коллинеарного данному, но имеющего длину в ξ раз большую, норма в $|\xi|$ раз больше.

Всякий вектор можно разложить по единичным ортогональным векторам, ортам: $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$.

Скалярное произведение двух векторов равно $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, причем косинус угла между ними выражается соотношением $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle / \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$. Скалярное произведение обладает свойствами коммутативности, ассоциативности к числовым множителям и дистрибутивности:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle; \langle \mathbf{a}, (\xi \mathbf{b} + \eta \mathbf{c}) \rangle = \xi \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \eta \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle.$$

Пространство элементов (векторов), обладающее такими свойствами, называется линейным нормированным евклидовым пространством (в данном случае трех измерений). Это понятие можно обобщить также на пространство n измерений ($n > 3$). Хотя это уже не так наглядно, но нетрудно и для него ввести понятия нормы и скалярного произведения:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}; \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (3.1)$$

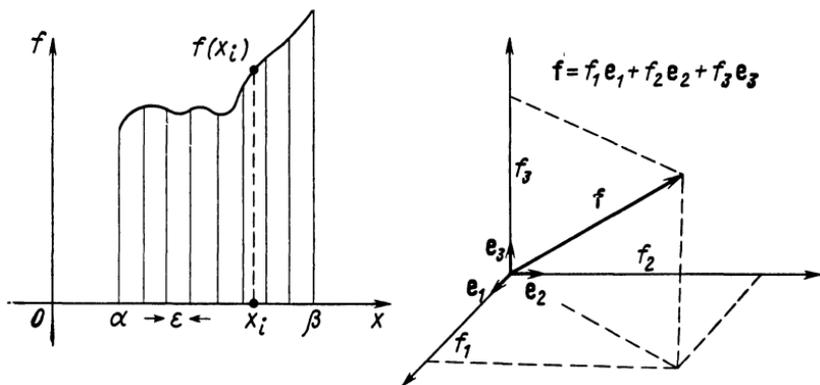


Рис. 4. Представление функции $f(x)$ как многомерного вектора (аналогично разложению обычных векторов по ортам)

Полагаем также, что можно разложить любой вектор по ортам \mathbf{e}_j : $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_n \mathbf{e}_n$, каждый из которых является единичным вектором вида $\mathbf{e}_j = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, где «1» стоит на j -м месте.

Аналогично можно считать справедливыми для элементов n -мерного пространства «свойства треугольника» и коммутативно-дистрибутивные свойства скалярного произведения для n -мерных век-

торов. Такое обобщение представления о пространстве интуитивно вряд ли может вызвать какие-то возражения, хотя и не сразу ясно, какую пользу оно может принести для практических целей.

Решающий шаг в дальнейшем обобщении понятия о пространстве был сделан в начале нынешнего века Д. Гильбертом, М. Фреше, Ф. Риссом и др., перешедшими к рассмотрению бесконечномерных пространств. Это позволило представить функции как векторы в бесконечномерном функциональном пространстве, сохранив наглядную простоту векторной алгебры при обращении с функциями весьма сложной природы.

Для иллюстрации рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на интервале $\alpha \leq x \leq \beta$ (рис. 4). Разбив интервал на n равных отрезков длиной ε , можем на каждом из них выбрать одну точку x_i и аппроксимировать функцию $f(x)$ упорядоченной последовательностью ее значений: $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)$. Определим теперь n -мерный вектор \mathbf{f} как сумму векторных ортов \mathbf{e}_i , взятых со значениями коэффициентов — проекций, равных соответственно $\sqrt{\varepsilon} f(x_i) \equiv f_i$:

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n f_i \mathbf{e}_i. \quad (3.2)$$

Тогда, по общему определению нормы и скалярного произведения для n -мерных векторов (3.1), имеем

$$\|\mathbf{f}\| \equiv \sqrt{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon [f(x_i)]^2}; \quad (3.3)$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon f(x_i) g(x_i). \quad (3.4)$$

Устремляя n к бесконечности и ε к нулю, получаем все более точное отображение функции $f(x)$, при этом суммы (3.3) и (3.4) можно заменить интегралами:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 dx}; \quad (3.5)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) dx. \quad (3.6)$$

Такие определения нормы и скалярного произведения функций принимаются для функционального пространства (вещественных функций вещественных аргументов).*

* Для скалярных произведений в общем понимании вида (3.3) — (3.6) будем использовать угловые скобки с разделяющей векторы запятой.

По аналогии за косинус угла между двумя функциями принимается отношение скалярного произведения к произведению норм функций:

$$\cos \angle (f, g) = \langle f, g \rangle / \|f\| \cdot \|g\|; \quad (3.7)$$

если скалярное произведение двух функций равно нулю, то такие функции называют ортогональными друг другу.

Нетрудно видеть, что при определениях (3.5) и (3.6) сохраняются все свойства нормы и скалярного произведения, как и для обычных трехмерных векторов:

$$\|f\| \geq 0; \quad \|\xi f\| = |\xi| \cdot \|f\|; \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|; \quad (3.8a)$$

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle; \quad |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|; \quad (3.8б)$$

$$\langle f, (\xi g + \eta h) \rangle = \xi \langle f, g \rangle + \eta \langle f, h \rangle. \quad (3.8в)$$

(Значение квадратного корня в (3.5) всегда берется арифметическое, т. е. со знаком плюс.)

Для того чтобы сделанное выше обобщение перехода в представлении функции $f(x)$ от n -мерного вектора \mathbf{f} к ее истинному значению как элемента бесконечномерного функционального пространства имело реальный смысл, нужно как-то ограничить класс приемлемых функций. Для этого необходимо прежде всего потребовать сходимости рядов в (3.3) и (3.4) при $n \rightarrow \infty$. Из (3.8б) очевидно, что для этого достаточно потребовать от нормы каждой функции:

$$\|f(x)\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 f^2(x_i) = \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx < +\infty. \quad (3.9)$$

Тогда выражения (3.5) и (3.6) имеют смысл и можно определить функциональное пространство как множество всех непрерывных функций на отрезке (α, β) , имеющих конечное значение интеграла от квадрата их значений на этом отрезке. Такое пространство функций носит название гильбертова пространства*.

Остается, однако, еще выяснить, что следует понимать под ортами \mathbf{e}_i , по которым разлагали функцию $f(x)$ при переходе к ее представлению в бесконечномерном пространстве:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \mathbf{e}_i. \quad (3.10)$$

* Требование непрерывности, вообще говоря, не является строго обязательным, но так как практически всегда при рассмотрении нейтронных полей мы имеем дело с функциями непрерывными «почти всюду» (в смысле интегрирования по Лебегу), то не будем вдаваться в подробности этого сложного вопроса.

В духе нашей векторной интерпретации для функционального бесконечномерного пространства под ортами e_i , очевидно, следует подразумевать бесконечное число некоторых функций $e_i(x)$, причем они все должны быть ортогональны друг другу (т. е. линейно независимы) в смысле соотношения (3.7), а также иметь единичную длину, т. е. норму $\|e_i\|$ [(по определению (3.5)], равную единице.

Простейшим примером такой системы функций на интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ может служить система тригонометрических функций вида:

$$e_n = e_n(x) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ; \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} , \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} , \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (3.11)$$

Выполнение требований взаимной ортогональности и нормированности на единицу любых функций этой системы легко проверить. Разложение произвольной функции класса (3.9) по таким ортам представляет известное разложение в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e_n(x) \equiv \frac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \beta_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right). \quad (3.12)$$

Коэффициенты α_0 , α_n , β_n — коэффициенты Фурье, — находятся из скалярного умножения (3.12) на соответствующие орты:

$$f_n = \langle f, e_n \rangle \quad \text{или} \quad \alpha_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx \quad \text{и} \quad \beta_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx, \quad (3.13)$$

так как $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (в точной аналогии с векторной алгеброй).

Для разных случаев и разных задач можно построить другие аналогичные ортонормированные системы функций, образующие «базис» функционального пространства, по которому раскладывается каждая функция допустимого класса данного пространства.

Линейные операторы. В основе математического анализа лежит понятие функции как определенного закона, по которому одному множеству чисел ставится в соответствие другое множество чисел — значений этой функции. Аналогично, над функциями могут производиться различные математические действия, *операции*, в результате которых каждая данная функция $f(x)$ превращается в некоторую другую функцию $g(x)$. Символически это можно записать с помощью некоторого оператора L , — сокращенного обозначения данного конкретного способа преобразования функции $f(x)$ в некоторую другую $g(x)$:

$$L f(x) = g(x). \quad (3.14)$$

Такие операторы могут иметь самый различный смысл: сложения $L_1 f = g_1(x, y, \dots) \equiv f(x, y, \dots) + p(x, y, \dots)$; умножения $L_2 f =$

$= g_2(x, y \dots) \equiv f(x, y \dots) \times h(x, y \dots)$; дифференцирования $L_3 f = g_3(x, y \dots) \equiv \frac{\partial}{\partial y} f(x, y \dots)$; интегрирования [в том числе например, с весовой функцией $K(x, y, z)$] $L_4 f = g_4(y, z) \equiv \int K(x, y, z) f(x, y) dx$ и т. д. [считаем $p(x, y \dots)$, $h(x, y \dots)$, $K(x, y, z)$ заданными функциями]. Естественно, оператор может быть комбинацией таких действий:

$$L_5 f = g_5(x, y, z) \equiv \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) + h(x, y) \times f(x, y, z) - \iint dx dy f(x, y, z \dots).$$

Каждая такая математическая операция имеет, вообще говоря, свои оригинальные свойства, и применение одного и того же оператора к различным функциям дает различные результаты, многообразие которых трудно представить. Однако если вернуться от функционального пространства к исходному представлению обычного трехмерного пространства, то станет очевидно, что любой (конечной длины) вектор \mathbf{g} : $\{g_x, g_y, g_z\}$ может быть построен из компонент-проекций другого (конечного и не равного нулю) вектора \mathbf{f} : $\{f_x, f_y, f_z\}$ посредством элементарного линейного преобразования:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= L_{xx} f_x + L_{xy} f_y + L_{xz} f_z \\ g_y &= L_{yx} f_x + L_{yy} f_y + L_{yz} f_z \\ g_z &= L_{zx} f_x + L_{zy} f_y + L_{zz} f_z \end{aligned} \right\}. \quad (3.15)$$

Такой простейший способ превращения вектора \mathbf{f} в вектор \mathbf{g} обладает полной общностью: каждая компонента вектора \mathbf{g} определяется через все компоненты вектора \mathbf{f} . Совокупность коэффициентов преобразования L_{ij} ($0 \leq L_{ij} < \infty$) представляет квадратную матрицу — оператор преобразования вектора \mathbf{f} в вектор \mathbf{g} :

$$\mathbf{L} \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{array} \right\}. \quad (3.16)$$

Итак, превращение вектора \mathbf{f} в вектор \mathbf{g} можно записать в символической форме с применением оператора \mathbf{L} к вектору \mathbf{f} :

$$\mathbf{g} = \mathbf{L}\mathbf{f}, \text{ или } \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

производя действия в соответствии с законами линейной алгебры, т. е.

$$g_i = \sum_{j=1}^3 L_{ij} f_j \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.18)$$

Переходя к обобщению этого представления на бесконечномерное пространство, векторами в котором являются функции допустимого класса, естественно принять в качестве линейного оператора бесконечномерную матрицу, преобразующую проекции f_i одной функции $f(x)$ (в некотором ортонормированном базисе) в проекции g_i другой функции $g(x)$ (в этом же базисе) по закону

$$g_i = \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij} f_j \quad (i=1, 2 \dots \infty), \quad (3.19)$$

т. е.
$$g(x) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} g_i e_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij} f_j e_i(x), \text{ где } f_j = \langle f, e_j \rangle. \quad (3.20)$$

3.3. Виды линейных операторов и их свойства

Операторы, введенные в предыдущем разделе для функционального пространства, *линейны* (по способу их определения) как обобщение линейных преобразований в пространстве векторов. Для линейных операторов всегда справедливо соотношение

$$L[\xi f(x) + \eta g(x)] = \xi Lf(x) + \eta Lg(x), \quad (3.21)$$

где ξ и η — любые числа, а $f(x)$ и $g(x)$ — любые функции из допустимого класса нашего функционального пространства. (Заметим, что оператор действует только на функции, записанные *справа* от него!) Впредь будем рассматривать только линейные операторы. Далее обычно рассматриваются операторы ограниченные, т. е. такие, которые, будучи применены к функциям допущенного класса [в смысле (3.9)], не выводят их из функционального пространства. По определению (3.19), для этого необходима ограниченность нормы $\|g\|$ при ограниченности $\|f\|$:

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} L_{ij} f_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} L_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j^2 \right) \right] = \\ &= \|f\|^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij}^2 \right), \end{aligned}$$

т. е. должно выполняться условие на двойную сумму компонент оператора L , или его «норму»*:

$$\|L\|^2 \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij}^2 < \infty, \quad (3.22)$$

* Общее определение нормы оператора: $\|L\| = \sup_{\{f\}} \|Lf\| / \|f\|$ для некоторого заданного множества функций $\{f\}$.

при этом [71, 78] можно показать, что оператор L будет также и непрерывным, т. е. сходящуюся к $f(x)$ последовательность функций $f_1(x), f_2(x) \dots$ он переводит в сходящуюся же последовательность: $g_k(x) \rightarrow g(x)$. Более детального, общего и математически строгого определения используемых в этой книге операторов не потребуется.

Для линейных операторов могут быть сформулированы правила их «алгебры», композиции из них новых операторов: сложение операторов A и B : $C = A + B$, причем $Cf = Af + Bf$; умножение оператора на число: $C = \lambda A$, при этом $Cf = \lambda (Af)$; умножение операторов: $C = AB$, что означает $Cf = A(Bf)$, т. е. на функцию $f(x)$ действует сначала оператор B , а затем уже оператор A . Умножение операторов в общем случае не коммутативно: $AB \neq BA$. Дистрибутивность и ассоциативность операций, а также коммутативность сложения выполняются.

В результате всех таких операций над линейными операторами их линейность сохраняется.

Убедиться в справедливости указанных свойств легко на примерах операторов линейных преобразований для обычного трехмерного векторного пространства. Так же можно получить правило вычисления матричного элемента произведения операторов $C = AB$:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} B_{kj}. \quad (3.23)$$

Рассмотрим основные важнейшие виды операторов.

1. Е д и н и ч н ы й оператор I преобразует каждую функцию в самое себя: $If = f$. Нетрудно понять, что в конечномерном векторном пространстве матрица такого оператора состоит из единиц на главной диагонали и нулей всюду, кроме нее. Для бесконечномерного функционального пространства единичный оператор выражается через дельта-функцию Дирака [77]:

$$If(x) = \int \delta(x-t) f(t) dt = f(x).$$

2. О б р а т н ы й оператор L^{-1} «нейтрализует» действие оператора L , образуя в сочетании с ним единичный оператор:

$$[L^{-1}L = I; L^{-1}Lf(x) = f(x); LL^{-1} = I.$$

Так как свойство обратности должно быть взаимным, то прямой и обратный операторы коммутируют. Но если операторы A и B имеют обратные, то существует обратный оператор их произведения вида

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(что легко показать, памятуя правило: применяя оператор к уже имеющимся, всегда надо записывать его слева от них!). Обратный

оператор в общем смысле дает решение операторного уравнения: если $Lf(x) = g(x)$, то $f(x) = L^{-1}g(x)$.

Однако не для всякого оператора L может существовать его обратный L^{-1} . Но даже если он и существует, получить его явный вид в аналитической форме часто бывает довольно трудно.

Для конечномерного векторного пространства обратный оператор изображается обратной матрицей. Если $L = \{L_{ij}\}$, то $L^{-1} = \{l_{ij}\}/\Delta$, где l_{ij} — миноры (алгебраические дополнения) элемен-

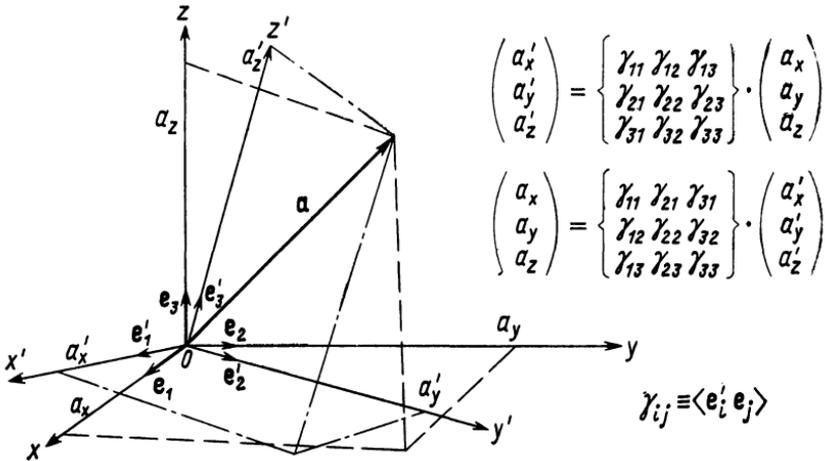


Рис. 5. Преобразование компонент вектора a при переходе от одной системы координат к другой посредством взаимно транспонированных матриц

тов L_{ji} матрицы L , а Δ — детерминант матрицы L . Для существования обратного оператора значение Δ не должно равняться нулю.

Для функционального гильбертова пространства можно доказать, что если оператор A имеет норму [в смысле (3.22)] меньше единицы, то у оператора $(I - A)$ существует обратный и он может быть представлен рядом Неймана [72]:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots \quad (3.24)$$

3. С о п р я ж е н н ы й оператор L^+ является как бы зеркальным отражением оператора L (и обратно). Понятие сопряженности впервые появилось при представлении вектора в двух координатных системах, повернутых на некоторый угол одна относительно другой (рис. 5). Проекции вектора a в разных системах координат связаны между собой транспонированными матрицами, т. е. содержащими одни и те же элементы $\gamma_{ij} = \cos \angle(e'_i, e_j)$, но зеркально отраженные относительно главной диагонали. (Заметим, что при этом преобразовании остается неизменной длина вектора a .)

Обобщение этого представления привело к понятию сопряженной матрицы в общем случае (не обязательно для координатных преобразований) как матрицы

с транспонированными элементами (в общем подходе добавляется еще их комплексная сопряженность, но для нас это не нужно).

Сопряженные операторы L^+ , изображаемые сопряженными матрицами, обладают рядом характерных свойств.

1) Поскольку они состоят из всех тех же элементов, что и оператор L (так как $L_{ij}^+ \equiv L_{ji}$), то операторы L^+ содержат ту же полноту информации, что и L .

2) Оператор L^+ линеен, если линеен L , а их нормы равны: $\|L^+\| = \|L\|$.

3) Если L имеет обратный L^{-1} , то существует обратный $(L^+)^{-1} = (L^{-1})^+$.

4) Для алгебры сопряженных операторов действуют правила: $(L^+)^+ = L$; $(L + M)^+ = L^+ + M^+$; $(AB)^+ = B^+A^+$.

5. Значение скалярного произведения сохраняется, если оператор из одной части «скобки» перенести в другую, заменив его сопряженным:

$$\langle f, Lg \rangle = \langle L^+f, g \rangle. \quad (3.25)$$

Все эти свойства сопряженных операторов легко доказать, пользуясь матричным представлением таких операторов*.

Аналитические выражения для сопряженных операторов, чаще всего встречающихся в теории реакторов, выглядят следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } Lf = f(x, y \dots) \times h(x, y \dots), \text{ то} \\ \quad L^+ f = f(x, y \dots) \times h(x, y \dots) \equiv Lf; \\ \text{если } Lf = p(x, y \dots) \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y \dots), \text{ то.} \\ L^+ f = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} [f(x, y \dots) p(x, y \dots)]; \\ \text{если } Lf = \int K(x, y) f(x) dx, \text{ то} \\ \quad L^+ f = \int K(x, y) f(y) dy. \end{array} \right\} \quad (3.26)$$

4. Ф у н к ц и о н а л ы — частный вид операторов, превращающих своим действием функцию в число (зависящее от функции):

а) линейный функционал $\xi [f(x)] = \langle f(x), h(x) \rangle$;

б) билинейный функционал $\eta_L [f(x), g(x)] = \langle f(x), Lg(x) \rangle$, где $h(x)$ и L считаются заданными, а $f(x)$ и $g(x)$ — «аргументы», определяющие значения функционалов [79].

* В квантовой механике используются самосопряженные операторы: $L^+ \equiv L$. Этого крайне ценного упрощения, к сожалению, лишена теория реакторов.

3.4. Решение операторных уравнений

Единичный оператор каждую функцию превращает в самое себя. Однако и другие операторы могут, действуя на функции, не изменять их вида с точностью до числового множителя λ :

$$L f(x) = \lambda f(x). \quad (3.27)$$

Естественно, это может оказаться верным лишь для некоторого набора функций $f_i(x)$ при конкретных значениях чисел λ_i , своих для каждого конкретного оператора L . Если такие решения $f_i(x)$ уравнения (3.27) существуют, то их называют **с о б с т в е н н ы м и** **ф у н к ц и я м и** оператора L , а числа λ_i — **с о б с т в е н н ы м и** **ч и с л а м и** (или значениями).

Покажем такую возможность на примере n -мерного векторного пространства. Уравнение вида (3.27) в этом случае означает, что оператор не меняет ориентации вектора, а лишь изменяет его длину в λ раз. В векторно-матричной записи уравнение $L a = \lambda a$ эквивалентно системе линейных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} (L_{11} - \lambda) a_1 + L_{12} a_2 + \dots + L_{1n} a_n &= 0; \\ \dots & \\ L_{n1} a_1 + L_{n2} a_2 + \dots + (L_{nn} - \lambda) a_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Эти уравнения совместны и имеют ненулевые решения a_k , если детерминант из коэффициентов системы равен нулю. Это приводит к *характеристическому* уравнению для параметра λ степени n :

$$\lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + \dots + C_{n-1} \lambda + C_n = 0. \quad (3.29)$$

Коэффициенты уравнения (3.29) выражаются через миноры матрицы $\{L_{ij}\}$, причем сумма и произведение корней характеристического уравнения (имеющего, вообще говоря, n корней λ_i) выражаются через суммы диагональных элементов матрицы-оператора и детерминант матрицы:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = -C_1 \equiv -\sum_{i=1}^n L_{ii}; \quad \prod_{i=1}^n \lambda_i = (-1)^n C_n \equiv |L_{ij}|. \quad (3.30)$$

Для каждого значения λ_i из (3.28) получается свой набор компонент $a_k^{(i)}$, т. е. свой *собственный вектор* $a^{(i)}$: $\{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}\}$.

Нетрудно видеть, что для сопряженного оператора с транспонированной матрицей $\{L_{ij}^+\} \equiv \{L_{ji}\}$ характеристическое уравнение не изменяется и его корни — собственные значения λ_i операторов L^+ и L — будут одни и те же. Однако в силу транспозиции недиагональных элементов уравнения вида (3.28) для сопряженного оператора будут иными, и их решения — компоненты собственного вектора для L^+ — будут отличными от $a^{(i)}$.

Обобщая эти представления на вещественное пространство функций, приходим к выводу, что *однородные операторные уравнения могут иметь решениями собственные функции* $f_i(x)$ и $f_j^+(x)$ при значениях λ_i и λ_j *собственных чисел* (множество которых для прямого и сопряженного операторов совпадает):

$$(\mathbf{L} - \lambda_i) f_i(x) = 0; \quad (\mathbf{L}^+ - \lambda_j) f_j^+(x) = 0. \quad (3.31)$$

Если скалярно умножить первое из этих уравнений на $f_j^+(x)$, а второе — на $f_i(x)$ и вычесть одно из другого, то получим

$$\langle f_j^+(x), \mathbf{L} f_i(x) \rangle - \langle \mathbf{L}^+ f_j^+(x), f_i(x) \rangle = (\lambda_i - \lambda_j) \langle f_i(x), f_j^+(x) \rangle. \quad (3.32)$$

Согласно свойству 5 (см. с. 44) сопряженных операторов (3.25) левая часть равна нулю. Это означает, что собственные функции операторов \mathbf{L} и \mathbf{L}^+ , соответствующие различным собственным значениям λ_i , взаимно ортогональны:

$$\langle f_i(x), f_j^+(x) \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ N_i & i = j. \end{cases} \quad (3.33)$$

Здесь N_i — некоторое число, «смешанная норма» функций f и f^+ : $N_i \equiv \langle f_i^+, f_i \rangle$.

Величины λ_j (по модулю) ограничены нормой оператора $\|\mathbf{L}\|$, так как $\|\mathbf{L}\| \geq \|\mathbf{L} f_i\| / \|f_i\| = |\lambda_i|$ (см. прим. на с. 41), и по (3.30) сумма их равна сумме диагональных элементов матрицы оператора, а их общее произведение равно детерминанту $|\mathbf{L}_{ij}| < \infty$.

Максимальное в алгебраическом смысле собственное значение λ_i , обозначаемое обычно как λ_0 , играет важную роль при изучении физических процессов, математическое описание которых задано данным операторным уравнением. Соответствующие ему собственные функции $f_0(x)$ и $f_0^+(x)$ называются *фундаментальными*, *основными*, *первыми гармониками*.

Именно λ_0 , $f_0(x)$, $f_0^+(x)$ являются характеристиками *стационарных* или *асимптотических* процессов.

Вопрос о составе и структуре *спектра* собственных значений (набора чисел λ_i) для оператора \mathbf{L} в общем случае довольно сложен. Однако «ведущее» собственное значение λ_0 и его собственная функция $f_0(x)$ почти для всех практических задач реакторной физики существуют.

В λ -представлении нейтронных полей (см. разд. 1.3) в диффузионном приближении [58] может существовать бесконечное число значений λ_i с функциями $f_i(x)$, по которым можно разложить в ряд Фурье почти всякую функцию:

$$z(x) = \sum_k c_k f_k(x), \quad \text{где } c_k = \langle z(x), f_k^+(x) \rangle \frac{1}{N_k}. \quad (3.34)$$

Перейдем теперь к решению неоднородных операторных уравнений

$$(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I}) y(x) = g(x), \quad (3.35)$$

где λ — пока просто некоторый заданный числовой параметр. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = (\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I})^{-1} g(x). \quad (3.36)$$

Для существования такого «разрешающего оператора» $(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I})^{-1}$ (резольвенты), приводящего к решению в виде ряда (3.24), необходимо, чтобы $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{L}/\lambda\| < 1$, т. е. чтобы норма оператора $\|\mathbf{L}\|$ была меньше $|\lambda|$. Тогда решение уравнения (3.35) существует при любой правой части $g(x)$ и выражается сходящимся рядом

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda} [1 + \mathbf{L}/\lambda + (\mathbf{L}/\lambda)^2 + \dots] g(x). \quad (3.37)$$

Но поскольку все собственные значения λ_i по модулю не превышают $\|\mathbf{L}\|$, то однородные уравнения (3.31) в этом случае решений не имеют. Напротив, в области значений параметра $|\lambda| \leq \|\mathbf{L}\|$ уравнения (3.31) могут иметь решения $f_i(x)$ и $f_i^+(x)$ при $\lambda = \lambda_i$. В этом случае решения $y(x)$ неоднородного уравнения (3.35) могут существовать лишь при специальном условии, наложенном на функцию $g(x)$:

$$\langle g(x), f_i^+(x) \rangle = 0. \quad (3.38)$$

Это очевидно, если скалярно умножить (3.35) на $f_i^+(x)$ (при $\lambda = \lambda_i$):

$$\langle (\mathbf{L} - \lambda_i) y, f_i^+ \rangle = \langle g, f_i^+ \rangle. \quad (3.39)$$

Перенося оператор $(\mathbf{L} - \lambda_i)$ в другую часть скобки, с заменой его сопряженным по правилу (3.25) имеем

$$\langle (\mathbf{L} - \lambda_i) y, f_i^+ \rangle = \langle y, (\mathbf{L}^+ - \lambda_i) f_i^+ \rangle. \quad (3.40)$$

Поскольку $\mathbf{L}^+ f_i^+ = \lambda_i f_i^+$, то получаем условие (3.38). Оно является необходимым и достаточным для разрешимости уравнения (3.35) [78]. Это служит основанием для формулирования важной теоремы (альтернативы Фредгольма):

Неоднородное уравнение (3.35) имеет однозначное решение, если однородные уравнения (3.31) имеют лишь нулевые решения либо если его правая часть $g(x)$ ортогональна к собственным функциям $f_k^+(x)$ сопряженного однородного уравнения. Однородные уравнения (3.31) при этом имеют ненулевые решения.

Более подробные сведения об операторных уравнениях можно найти в ряде книг, например [71, 75—78] и др.

3.5. Операторы и функции в теории реакторов

Основными функциями, характеризующими нейтронное поле реактора, являются поток нейтронов $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и функция ценности $\Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Они должны быть определены на вещественном множестве

значений координат $\mathbf{r}: \{x, y, z\}$ [в конечном выпуклом объеме реактора при граничных условиях вида (2.4) или (2.16) соответственно] и скоростей: $0 < v_x, v_y, v_z < v_{\text{макс}}$. Из физического смысла ясно, что эти функции конечны при всех значениях аргументов и непрерывны «почти всюду» (за исключением поверхностей раздела различных сред в реакторе, в том числе его наружной границы) [21, 25].

Подчинение функций φ и φ^+ соответствующим уравнениям (1.15) или (2.19) можно рассматривать как применение к ним операторов:

$$\text{деления } \mathbf{F}\varphi \equiv \int \chi(\mathbf{v}) v \Sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}'; \quad (3.41)$$

$$\text{замедления } \mathbf{Z}\varphi \equiv \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}'; \quad (3.42)$$

$$\text{столкновений } \mathbf{C}\varphi \equiv \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}); \quad (3.43)$$

$$\text{утечки } \mathbf{Y}\varphi \equiv \frac{\mathbf{v}}{v} \nabla \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv \boldsymbol{\Omega} \nabla \varphi. \quad (3.44)$$

Полезно ввести их некоторые комбинации: оператор репродукции

$$\mathbf{Q}\varphi \equiv (\mathbf{F} + \mathbf{Z}) \varphi \equiv \int \Sigma_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}'; \quad (3.45)$$

$$\text{оператор увода } \mathbf{L}\varphi \equiv (\mathbf{C} + \mathbf{Y}) \varphi \equiv \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \boldsymbol{\Omega} \nabla \varphi; \quad (3.46)$$

$$\text{оператор деструкции } \mathbf{G}\varphi \equiv (\mathbf{L} - \mathbf{Z}) \varphi \equiv (\mathbf{C} + \mathbf{Y} - \mathbf{Z}) \varphi. \quad (3.47)$$

Тогда нейтронные поля можно описать компактными формами операторных уравнений:

для критического реактора вместо (1.15) или (1.16)

$$(\mathbf{F} - \mathbf{G}) \varphi = 0 \text{ или } (\mathbf{Q} - \mathbf{L}) \varphi = 0; \quad (3.48)$$

для некритических реакторов в λ -представлении вместо (1.21)

$$(\lambda \mathbf{F} - \mathbf{G}) \varphi_\lambda = 0; \quad (3.49)$$

в S -представлении вместо (1.25)

$$(\mathbf{F} - \mathbf{G}) \varphi_S = -S_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}); \quad (3.50)$$

в α -представлении вместо (1.24)

$$(\mathbf{F}_p - \mathbf{G}) \varphi_\alpha = -\frac{\alpha}{v} \varphi_\alpha \quad (3.51)$$

[где оператор \mathbf{F}_p отличен от \mathbf{F} (3.41) лишь заменой $\chi(\mathbf{v})$ на $\chi_p(\mathbf{v})$].

Аналогичные операторные формы можно записать и для функции ценности $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, если использовать сопряженные операторы, построенные по общим законам сопряжения (3.26) к операторам (3.41) — (3.47). Тогда вместо уравнений (2.18), (2.19), (2.34), (2.35), (2.37) получим:

$$(\mathbf{F}^+ - \mathbf{G}^+) \varphi^+ = 0; (\mathbf{Q}^+ - \mathbf{L}^+) \varphi^+ = 0; (\mathbf{F}^+ - \mathbf{G}^+) \varphi_A^\dagger = -\Sigma_A(\mathbf{r}, \mathbf{v}); \quad (3.52)$$

$$(\lambda \mathbf{F}^+ - \mathbf{G}^+) \varphi_\lambda^\dagger = 0; (\mathbf{F}_p^+ - \mathbf{G}^+) \varphi_\alpha^\dagger = -\frac{\alpha}{v} \varphi_\alpha^\dagger. \quad (3.53)$$

Таким образом, видно, что представление функции ценности — частный пример общего представления о сопряженных операторах и их соответствующих сопряженных функциях, вводимого функциональным анализом. В частности, если рассматривать уравнения (3.49)—(3.53) как пары сопряженных уравнений на собственные значения λ (или α), то они также будут иметь совпадающие спектры собственных значений и взаимно ортогональные собственные функции

$$\langle \varphi_{\lambda'}, \mathbf{F}^+ \varphi_\lambda^+ \rangle = \begin{cases} 0, & \lambda \neq \lambda' \\ N_\lambda, & \lambda = \lambda' \end{cases}; \quad \left\langle \varphi_\alpha^\dagger, \frac{1}{v} \varphi_{\alpha'} \right\rangle = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \alpha' \\ N_\alpha, & \alpha = \alpha' \end{cases}. \quad (3.54)$$

Ортогональность здесь выражается в более общей форме — с весовой функцией вида $1/v$ или даже оператора \mathbf{F} . Скалярное произведение при этом имеет форму интеграла

$$\langle f, g \rangle \equiv \int d\mathbf{r} \int dv f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv \int_{V_p} d\mathbf{r} \int_0^{v_{\max}} dv \int_{4\pi} d\Omega f(\mathbf{r}, v, \Omega) g(\mathbf{r}, v, \Omega). \quad (3.55)$$

Возможности, ограничения и обоснования, общая корректность применений функционально-аналитических представлений для построения строгой теории реакторов составляют предмет обширных сложных и глубоких исследований. В этом направлении достигнуты крупные успехи благодаря работам В. С. Владимирова [41], Г. И. Марчука [15, 24, 42], С. Б. Шихова и его коллег [25, 82, 83] и других исследователей.

В заключение все же отметим, что (как в эксперименте, так и в численном расчете реакторов) нейтронное поле всегда определяется в к о н е ч н о м ч и с л е пространственных точек M (точек размещения детекторов или расчетных узлов) и для к о н е ч н о г о ч и с л а Γ значений энергии нейтронов (летаргических групп, интервалов разрешения спектрометров).

Таким образом, п р а к т и ч е с к а я информация о нейтронном поле (потоке или ценности) как для экспериментатора, так и для расчетчика всегда предстает в форме к о н е ч н о м е р н о г о вектора с компонентами $\varphi_j = \varphi(r_h, v_i)$ или $\varphi_i^\dagger = \varphi^\dagger(r_m, v_n)$. Они могут быть приняты за проекции $(M \times \Gamma)$ -мерного вектора в пространстве, которое задано «о р т а м и», определяемыми каждой из комбинаций переменных $(k, l), (m, n)$. В таком представлении операторы становятся конечномерными матрицами, преобразующими многомерные векторы, и развитый выше математический аппарат приобретает наглядность и обоснованность.

§ 4. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

4.1. Постановка задач физики реакторов для теории возмущений

Получение полного пространственно-энергетического распределения нейтронного поля по всему реактору численными или экспериментальными методами — довольно длительная, трудоемкая и дорогостоящая работа. При этом может оказаться, что найденное распределение потоков нейтронов $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ не удовлетворяет намеченным практическим целям. Возможно, что неравномерность тепловыделения при данном пространственном поведении потока нейтронов вызовет недопустимые для некоторой группы твэлов температуры и практическая энергоотдача АЭС понизится. В численных расчетах может, например, обнаружиться, что реактор с предполагаемым составом и размерами зон имеет $k_{эф} < 1$. Наконец, после серии расчетно-проектных исследований по выбору оптимальной конструкции реактора, уже на стадии рабочего проектирования может выявиться необходимость перехода к другим конструкционным материалам с иным ядерным составом и т. п.

Во всех подобных ситуациях надо рассматривать (рассчитывать или экспериментально моделировать) некоторый «новый» реактор. Однако, не повторяя всей проделанной ранее трудоемкой и сложной работы, для нового реактора можно достаточно эффективно использовать уже имеющуюся информацию о нейтронных распределениях в «старом» реакторе, рассматривая происшедшие (или предполагаемые) изменения в реакторе как в о з м у щ е н и я, при которых сохраняются в той или иной мере свойства его нейтронных пространственно-энергетических распределений $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Задачей теории возмущений является построение алгоритма нахождения п р и б л и ж е н н ы х решений для оценки характеристик возмущенного реактора, с возможностью у т о ч н е н и я их до любого порядка.

Возможность такого подхода удобно проиллюстрировать на простом примере, наглядно выявляющем все основные черты метода возмущений: способ анализа, его преимущества и ограничения.

Рассмотрим сферически-симметричный критический реактор с гомогенной активной зоной и оболочкой-отражателем (рис. 6). Распределение потока нейтронов в нем приведено на рис. 6, а (одногрупповое описание). Оно удовлетворяет известному граничному условию (2.4) на наружной поверхности отражателя, симметрично относительно центра системы, непрерывно по потоку и току нейтронов на границе активной зоны и отражателя (в диффузионном описании):

$$\Phi_{a,z} = \Phi_{отр}; \quad D_{a,z} \frac{d\Phi_{a,z}}{dr} = D_{отр} \frac{d\Phi_{отр}}{dr} \quad \text{при } r = r_{a,z}. \quad (4.1)$$

Внесем теперь в этот реактор некоторое «возмущение»: в выделенной пунктиром сферической области V_w вокруг центра активной зоны

(см. рис. 6) заменим урансодержащую композицию композицией, содержащей плутоний (с той же плотностью ядер). При этом предположим, что размер области возмущения гораздо меньше размеров самой активной зоны. По-видимому, реактор станет надкритическим, изменится распределение нейтронного поля в возмущенной области и ее окрестности (а при учете энергетической зависимости и спектр потока нейтронов).

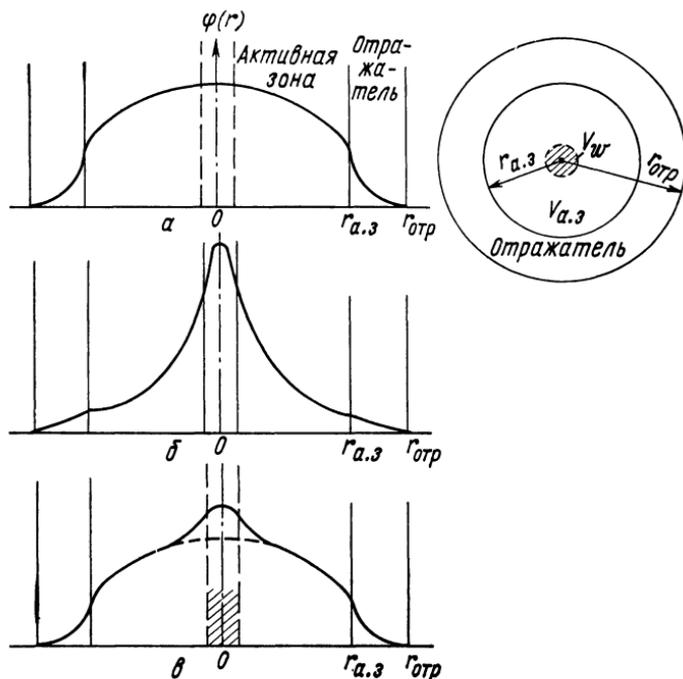


Рис. 6. Распределение потока нейтронов в сферическом реакторе с отражателем:

a — в невозмущенном критическом реакторе; *б* — в подкритическом гипотетическом реакторе (при удалении из него материала объемом V_w и помещении вместо него источника нейтронов S_w); *в* — в возмущенном реакторе (при компенсации некритичности параметром λ)

Однако попытаемся рассмотреть этот возмущенный реактор условно как критический, пользуясь λ -представлением некритических реакторов (см. разд. 1.3), т. е. вводя отличное от единицы $k_{эф}$ ($k_{эф} > 1$, т. е. $\lambda < 1$), которое привело бы новую систему в стационарное критическое состояние.

Для нового критического реактора распределение потоков нейтронов должно подчиняться прежнему граничному условию (2.4), т. е. функция распределения потока нейтронов на границе отражателя с внешним «вакуумом» будет такой же, как и у невозмущенного реактора. Поэтому можно предположить, что ход потока нейтронов в отражателе возмущенного реактора весьма близок к нейтрон-

ному полю в невозмущенной системе. Условия шивки потока нейтронов и тока на границе (4.1) сохранятся. Тогда нейтронное поле в активной зоне возмущенного реактора должно удовлетворять тому же условию на границе, что и невозмущенного. Если надкритичность получилась небольшой ($1 - \lambda \ll 1$ или $k_{эф} - 1 \ll 1$), то решение уравнения (1.21) для возмущенного реактора описывается функцией, близкой к его решению в случае невозмущенной системы.

Несомненно, что в самой возмущенной области поведение потока нейтронов может и должно отличаться от поведения потока (и спектра при энергетическом рассмотрении) в невозмущенном реакторе.

Для качественной оценки характера потока в области возмущения и ее окрестности предположим сначала, что нейтронное поле в этой области осталось бы прежним. Но тогда (в силу более высоких размножающих свойств плутония по сравнению с ураном) возмущенная область стала бы *более интенсивным источником* нейтронов, чем она была до внесения возмущения.

Интенсивность этого дополнительного источника S_w можно представить как разность интенсивности процессов репродукции и увода нейтронов в каждой точке возмущенной области при изменении состава среды, т. е.:

$$S_w(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int [\tilde{\Sigma}_q(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) - \Sigma_q(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})] \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - [\tilde{\Sigma}_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v})] \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (4.2)$$

В операторной форме (см. разд. 3.5) это записывается как

$$S_w(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (\delta\mathbf{Q} - \delta\mathbf{L}) \varphi \text{ или } S_w(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (\delta\mathbf{F} - \delta\mathbf{G}) \varphi, \quad (4.3)$$

$$\text{где } \delta\mathbf{Q} \equiv \tilde{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q}; \delta\mathbf{L} \equiv \tilde{\mathbf{L}} - \mathbf{L}; \delta\mathbf{F} \equiv \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}; \delta\mathbf{G} \equiv \tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{G}. \quad (4.4)$$

Тильдой над \mathbf{Q} , \mathbf{F} , Σ_q и т. д. отмечены операторы и сечения для возмущенного реактора.

Такой источник в окружающей среде реактора создаст поток нейтронов с функцией распределения φ_s , описываемой уравнением (1.25) или его эквивалентом (3.50):

$$(\mathbf{F} - \mathbf{G}) \varphi_s = -S_w(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (4.5)$$

если считать, что в объеме V_w сохранился нематериальный нейтронный источник интенсивностью $S_w(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, а нейтронное поле критического реактора с собственным распределением исчезло (в связи с переходом его в подкритическое состояние из-за полного изъятия вещества из объема V_w).

Распределение нейтронного поля (в одnogрупповом описании), создаваемого таким локальным источником, приведено на рис. 6, б. Интенсивность потока нейтронов (при гомогенности сред реактора) монотонно падает с удалением от источника как по активной зоне, так и в отражателе (хотя, возможно, с различными длинами релаксации). Естественно, в условно-критическом реакторе создается собственное фундаментальное поле (см. рис. 6, а). Сложение этих

двух полей и представит в первом приближении распределение нейтронного поля в возмущенном реакторе (см. рис. 6, в).

Как известно, средний поток нейтронов в сфере примерно в 3 раза меньше, чем в центре критической системы [22]. Поэтому сравнить интенсивности нейтронных полей вида φ_S (см. рис. 6, б) и вида φ (см. рис. 6, а) можно, используя соотношение

$$\|\varphi_S\|/\|\varphi\| \approx 3 \int_{V_w} \int S_w dr dv \Big/ \int_{V_{a.з}} Q \varphi dr dv. \quad (4.6)$$

Если предположить, что замена в возмущенной области урановой композиции плутониевой в д в о е увеличивает интенсивность источника нейтронов в центре, т. е. что $\delta Q - \delta L \approx Q$, то [см. (4.3)]

$$\|\varphi_S\|/\|\varphi\| \approx 3V_w/V_{a.з}. \quad (4.7)$$

Отсюда ясно, что если объем возмущенной области составляет $\sim 1\%$ объема активной зоны, то интегральный вклад потока φ_S , вызванного возмущением, составит $\sim 3\%$ интегральной интенсивности потока фундаментального распределения φ . При этом, однако, следует иметь в виду, что из-за релаксирующего по пространству характера потока φ_S эти 3% могут проявиться в малой пространственной области (2—3 длины пробега нейтрона) в области возмущения и ее окрестности. В этой области искажение потока может быть значительным, а фундаментальное поле изменится на все 100%*!

В общем же случае распределение φ_S добавляется к фундаментальному с малым весом и распределение нейтронного поля в возмущенном реакторе выглядит примерно так, как изображено на рис. 6, в. Для этого распределения характерно, что в основном объеме реактора нейтронные поля для возмущенного и невозмущенного состояний различаются крайне незначительно. А это означает, что для оценки характеристик возмущенной системы можно (с некоторой погрешностью, конечно!) использовать расчетные или экспериментальные данные о нейтронном поле невозмущенного реактора.

Покажем, как можно оценить изменение $k_{эф}$ реактора, например, при описанном выше случае его возмущения. Так как замена делящегося вещества в возмущенной области V_w приводит реактор в надкритическое состояние, то для возврата к критичности (в λ -представлении) необходимо снизить генерацию нейтронов деления, заменяя F оператором λF при $\lambda < 1$. Это означает, что такая «убыль» ценности нейтронов для поддержания критической цепной реакции должна компенсироваться «притоком» лишней ценности, вносимой нейтронами возмущенной области как источника нейтронов (4.2), т. е. должен иметь место баланс:

$$\int_{V_w} d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) S_w(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (1 - \lambda) \int_{V_{a.з}} d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) F\varphi, \quad (4.8)$$

* Например, при помещении бора или кадмия в реактор на тепловых нейтронах.

или в компактной записи математического формализма разд. 3.5:

$$\langle \varphi^+, S_w \rangle = (1 - \lambda) \langle \varphi^+, F\varphi \rangle \quad (4.9)$$

[то, что скалярные произведения $\langle f, g \rangle$ по (3.55) определены с интегрированием по всему реактору, не вносит неудобств: вне области V_w источник $S_w \equiv 0$, а оператор деления $F \equiv 0$ вне $V_{a.s.}$].

Таким образом, вводя выражения источника $S_w(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ через потоки (4.3), получаем оценку $k_{эф}$ возмущенного реактора через невозмущенные потоки и ценности φ и φ^+ :

$$\frac{k_{эф} - 1}{k_{эф}} \equiv (1 - \lambda) = \frac{\langle \varphi^+, S_w \rangle}{\langle \varphi^+, F\varphi \rangle} = \frac{\langle \varphi^+, (\delta F - \delta G)\varphi \rangle}{\langle \varphi^+, F\varphi \rangle} \quad (4.10)$$

$$\text{или } (1 - \lambda) \equiv \frac{\langle \varphi^+, (\delta Q - \delta L)\varphi \rangle}{\langle \varphi^+, F\varphi \rangle}. \quad (4.11)$$

4.2. Расширение и уточнение представлений о возмущениях

Возмущение, рассмотренное в разд. 4.1, имело иллюстративно учебный характер, а при его теоретической трактовке были допущены отдельные нестрогости, чтобы максимально упростить проблему при первом знакомстве. Возмущения реактора могут быть очень разнообразными.

Геометрия возмущенной области. Область возмущения V_w может быть расположена не только в центре реактора, может иметь сложную конфигурацию и захватывать смежные зоны (например, активную зону и отражатель) и т. д. Если при всем этом сохраняется условие $V_w \ll V_p$, то теория возмущений применима.

Ядерно-физический характер возмущения. Возмущение может состоять в любом изменении макроскопических сечений в области V_w . Достаточно лишь требования, чтобы новые, возмущенные макросечения $\bar{\Sigma}_g, \bar{\Sigma}_t$ имели конечные значения (но всегда ≥ 0), были непрерывны почти всюду по переменной \mathbf{v} и кусочно-непрерывны по \mathbf{r} .

Заметим, что при введении в возмущенную область поглотителя (вместо делящейся или рассеивающей среды) интенсивность «источника» (4.2) $S_w(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, эквивалентного эффекту возмущения, может оказаться отрицательной и, следовательно, реактор из критического становится подкритическим (для условного возврата к критическому состоянию тогда придется ввести $\lambda > 1$).

Введение чисто рассеивающих материалов [$\Sigma_f = 0, \Sigma_c = 0, \Sigma_s(v' \rightarrow v) \neq 0$] эквивалентно введению источника интенсивностью $S_w \equiv 0$. Знак \geq зависит от соотношения ценностей нейтронов до и после рассеяния: $\varphi^+(v) \leq \varphi^+(v')$.

Возмущения граничных условий (на внутренних границах реактора, который считается состоящим из совокупности однородных зон). Они происходят при любом возмущении на границах возмущен-

ной области, а также на границе активная зона — отражатель при λ -компенсации некритичности от возмущения.

Важным частным случаем возмущения граничных условий является также пространственный сдвиг границ отдельных зон (например, при перемещении регулирующего стержня в реакторе, температурных расширениях разных его областей и т. п.). Как правило, такие изменения производятся либо на малом участке границы, либо на большом, но зато с малым смещением.

Возмущения в больших объемах (вплоть до всего объема реактора), но при относительно малых изменениях сечений Σ_g и Σ_t . Они также могут рассматриваться теорией возмущений. Примеры таких возмущений — температурный эффект при изменении мощности реактора, изменения обогащения делящегося материала при проектно-расчетных исследованиях и т. п.

Возмущения наружных границ реактора. В подавляющем большинстве реакторных задач теория таких возмущений не предполагается. Сохранение положения внешней границы и граничных условий для потока $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ (2.4) и ценности $\phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ (2.16) как для невозмущенного, так и для возмущенного реактора позволяет при оценках эффектов любых возмущений исключать член вида

$$\langle \phi^+, (\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}) \tilde{\phi} \rangle = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} (\phi^+ \Omega \nabla \tilde{\phi} + \tilde{\phi} \Omega \nabla \phi^+), \quad (4.12)$$

который обращается в нуль при неизменности внешней границы и условий на ней [см. разд. 2.4, формулы (2.40) и (2.41)]. Поэтому возмущения операторов \mathbf{G} и \mathbf{L} содержат только члены, связанные с макросечениями:

$$\delta \mathbf{G} \equiv \tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{G} = (\tilde{\mathbf{C}} - \mathbf{C}) - (\tilde{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z}); \quad \delta \mathbf{L} \equiv \tilde{\mathbf{L}} - \mathbf{L} = \tilde{\mathbf{C}} - \mathbf{C}. \quad (4.13)$$

(Впрочем, как будет показано в § 5, можно изучать и такие возмущения, которые затрагивают внешнюю границу реактора тоже.)

Виртуальные расчетно-теоретические возмущения. Можно рассмотреть целый ряд эффектов возмущения, не осуществляемых экспериментально, но вводимых в схему расчетного описания нейтронных полей реактора: вариации микроскопических сечений, изменения систем групповых констант, модификация граничных условий, гомогенизация гетерогенных зон реактора, изменения самой модели описания переноса нейтронов по числу энергетических групп, приближению кинетического уравнения и т. п. (см. [7, 24, 44, 53]). Эти виды возмущений в данной книге не рассматриваются.

Естественно, возможные возмущения могут выступать в разных сочетаниях и вариантах. Однако любое возмущение реактора всегда можно представить через изменения его основных макроскопических сечений:

$$\left. \begin{aligned} \delta [\chi(\mathbf{v}) \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, \nu')] &\equiv [\tilde{\chi}(\mathbf{v}) \tilde{\nu} \tilde{\Sigma}_f(\mathbf{r}, \nu')] - [\chi(\mathbf{v}) \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, \nu)]; \\ \delta [\Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})] &\equiv \tilde{\Sigma}_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) - \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}); \\ \delta [\Sigma_t(\mathbf{r}, \nu)] &\equiv \tilde{\Sigma}_t(\mathbf{r}, \nu) - \Sigma_t(\mathbf{r}, \nu). \end{aligned} \right\} (4.14)$$

Здесь тильдой над сечениями отмечены их значения для возмущенного реактора*.

В свою очередь, изменение макроскопического сечения для каждой реакции можно представить как результат изменения концентрации ядер различных изотопов всех элементов и изменения их микроскопических сечений для данной реакции:

$$\delta \Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \sum_k \{ \delta N_k(\mathbf{r}) \sigma_k(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) + [N_k(\mathbf{r}) + \delta N_k(\mathbf{r})] \delta \sigma_k(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \}. \quad (4.15)$$

Здесь $\delta N_k(\mathbf{r})$ — изменение концентрации ядер сорта k при возмущении, происшедшее в точке \mathbf{r} : $\delta N_k(\mathbf{r}) \equiv \tilde{N}_k(\mathbf{r}) - N_k(\mathbf{r})$; $\delta \sigma_k(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ — изменение микроскопического сечения:

$$\delta \sigma_k \equiv \tilde{\sigma}_k(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) - \sigma_k(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}).$$

Изменение δN_k может вызываться: заменой материалов в области возмущения, зависимостью плотности вещества от температуры, давления, фазовых переходов, сдвигом границ сред при температурных расширениях, выгоранием делящихся нуклидов, накоплением осколков деления или других продуктов ядерных реакций и т. п.

Изменение микроскопических сечений $\delta \sigma_k(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ может быть двух видов: **п р я м о е** (только при расчетно-теоретических исследованиях) в связи с появлением новых ядерно-физических данных или при специальном их варьировании для оптимизации групповых констант для расчета реакторов (см., например, [44, 45, 139, 140]) и **в ы н у ж д е н н о е**, проявляющееся и в расчете, и в эксперименте из-за зависимости сечений от температуры среды (термализация, доплер-эффект), влияния химических и кристаллических связей атомов, а также резонансной блокировки (зависящей от концентрации и сечений других ядер среды, помимо самого изотопа k).

Прямые изменения микроскопических сечений при возмущениях в данной книге не анализируются. Учет вынужденного изменения микроскопических сечений для произвольных возмущений чрезвычайно сложен. Поэтому анализ этой составляющей возмущения будет сделан (там, где это необходимо) при рассмотрении конкретных примеров в § 6.

* Для процессов деления могут меняться как Σ_f , так и ν , и спектр $\chi(\mathbf{v})$.

4.3. Основной метод решения задач в теории возмущений

При всех рассматриваемых возмущениях как для невозмущенного реактора, так и для возмущенного будем предполагать нейтронное поле реактора стационарным (или асимптотическим)*, описываемым уравнениями (1.21), (1.24), (1.25) или их операторными эквивалентами (3.49) — (3.51).

Для изложения основного метода теории (следуя [61, 63]) выберем λ -представление нейтронных полей**. Пусть невозмущенный реактор занимает в пространстве неогнутой объем V_p , на внешних границах которого соблюдаются обычные граничные условия для потока (2.4) и для ценности (2.16). Структура реактора пусть задана сечениями Σ_g и Σ_t (или же Σ_f , Σ_s , Σ_t) как функциями переменных \mathbf{r} , \mathbf{v}' , \mathbf{v} . Нейтронное поле реактора $\varphi_\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ определяется уравнением (3.49), где операторы \mathbf{F} и \mathbf{G} конструируются на основе заданных сечений по общим правилам (3.41) и (3.47):

$$(\lambda\mathbf{F} - \mathbf{G})\varphi_\lambda = 0. \quad (4.16)$$

Аналогично функция ценности нейтронов для невозмущенного реактора определяется сопряженным уравнением (3.53) в λ -представлении:

$$(\lambda\mathbf{F}^+ - \mathbf{G}^+)\varphi_\lambda^+ = 0. \quad (4.17)$$

Решения уравнений (4.16) и (4.17) возможны в принципе для множества значений λ , спектра собственных чисел $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$, совпадающих для обоих уравнений и дающих соответствующий им ряд собственных функций: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ и $\varphi_0^+, \varphi_1^+, \varphi_2^+, \dots$

Функции φ_i и φ_j^+ различных собственных значений взаимно ортогональны [в смысле соотношения (3.54) для λ -представления]:

$$\langle \varphi_i^+, \mathbf{F}\varphi_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ N_i, & i = j \quad (N_j = \langle \varphi_j^+, \mathbf{F}\varphi_j \rangle). \end{cases} \quad (4.18)$$

Если такие функции известны и их система достаточно полна, то всякую (не «патологическую») функцию $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, заданную в области аргументов $\mathbf{r} \in V_p$ и $0 \leq v < v_{\text{макс}}$, можно разложить в ряд Фурье, как это было показано для общего случая в разд. 3.3:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_k c_k \varphi_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \text{где } c_k = \frac{1}{N_k} \langle \varphi_k^+, \mathbf{F}f \rangle. \quad (4.19)$$

Однако, как правило, для реактора известно только одно фундаментальное решение $\varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ уравнения (4.16), соответствующее

* Переходный процесс, неизбежно возникающий в реальном реакторе при внесении в него возмущения, будем считать уже завершившимся, и в возмущенном реакторе будем исследовать только установившееся (стационарное или асимптотическое) распределение потока нейтронов.

** Теория возмущений при других формах представления нейтронных полей приводится далее в разд. 4.7.

λ_0 — наименьшему собственному значению*. Эта функция $\varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ всюду неотрицательна и описывает в критическом реакторе истинное распределение потока нейтронов, а в некритическом — его условный эквивалент при λ -представлении (основную гармонику).

Среди всех возможных решений уравнения (4.17) обычно известно лишь соответствующее тому же «ведущему» собственному значению λ_0 фундаментальное сопряженное решение $\varphi_0^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, также отрицательное для всех рассматриваемых аргументов \mathbf{r} и \mathbf{v} и представляющее функцию ценности нейтронов по отношению к поддержанию стационарного собственного нейтронного поля критического (возможно, условно-критического) реактора.

Можно показать [21, 25, 58], что решения $\varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\varphi_0^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ являются единственными, и это отсутствие других собственных функций у значения λ_0 снимает при нашем подходе (см. разд. 1.2) *проблему вырождения*, серьезно осложняющую анализ в теории возмущений [74, 77].

Соответствующие фундаментальные решения уравнения (4.16) и (4.17) φ_0 и φ_0^+ будем для удобства в данном разделе обозначать как $\varphi^{(0)}$ и φ^+ (без индекса), а основное собственное значение λ_0 как $\lambda^{(0)}$, т. е.

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv \varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}); \quad \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv \varphi_0^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}); \quad \lambda^{(0)} \equiv \lambda_0. \quad (4.20)$$

Рассмотрим теперь возмущенный реактор, имеющий такие же внешнюю форму и границы, как и невозмущенный, с теми же интервалами значений аргументов \mathbf{r} и \mathbf{v} для сечений и потоков, с теми же условиями на границе для потоков и ценностей, но отличающийся от невозмущенного измененными согласно общему определению возмущения по формулам (4.14) макроскопическими сечениями. Нейтронное поле этого возмущенного реактора имеет распределение потока нейтронов $\tilde{\varphi}_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, удовлетворяющее уравнению

$$(\tilde{\lambda}\tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{G}})\tilde{\varphi}_{\tilde{\lambda}} = 0. \quad (4.21)$$

Здесь под $\tilde{\varphi}_{\tilde{\lambda}}$ понимается опять *фундаментальное* решение уравнения, соответствующее его наименьшему собственному значению $\tilde{\lambda}$.

* Исследование свойств уравнения (4.16), т. е. спектра его собственных значений λ_i , затруднено из-за неограниченности оператора \mathbf{L} , входящего в $\mathbf{G} \equiv \mathbf{L} - \mathbf{Z}$ [см. (3.47)]. $\mathbf{L} \equiv \Sigma_t + \Omega\nabla$ содержит операцию дифференцирования, ведущую к бесконечностям в точках скачков φ (границ сред). Вместо \mathbf{L} вводят в рассмотрение [25, 41] оператор \mathbf{L}^{-1} , по действию близкий к $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}'|\mathbf{r})$ [см. (2.2)]. Тогда (4.16) можно преобразовать к уравнению $\mathbf{M}\varphi = \mu\varphi$. Оператор $\mathbf{M} \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{F}$ обладает хорошими свойствами и имеет конечную норму $\|\mathbf{M}\| < \infty$. Его собственные значения $\mu_i \equiv 1/\lambda_i$. Поэтому *наибольшему* его собственному числу μ_0 , связанному с фундаментальным решением φ_0 (в полном соответствии с разд. 3.4), отвечает *наименьшее* собственное число λ_0 . Это нетрудно понять, так как $\mu_0 = 1/\lambda_0 = k_{\text{эф}}$.

Изменение сечений выразится в изменениях операторов:

$$\delta F \equiv \tilde{F} - F; \quad \delta G \equiv \tilde{G} - G, \quad (4.22)$$

а изменения собственных значений и фундаментального распределения выразятся в форме

$$\delta \lambda \equiv \tilde{\lambda} - \lambda^{(0)}; \quad \delta \varphi = \tilde{\varphi}_{\tilde{\lambda}} - \varphi^{(0)}. \quad (4.23)$$

Задача теории возмущений — определить эти изменения собственного значения $\delta \lambda$ и собственной функции $\delta \varphi$ по данным о возмущении операторов (4.22), не решая уравнения (4.21), а используя данные о значении $\lambda^{(0)}$ и функции $\varphi^{(0)}$ невозмущенного реактора.

Построим алгоритм последовательного приближения к решению такой задачи, чтобы получить возможность все более и более точно оценивать искомые характеристики возмущенного реактора. Для этого предположим, что в реактор вносится не все возмущение целиком, а сначала некоторая его доля $\varepsilon < 1$:

$$\delta F \rightarrow \varepsilon \cdot (\delta F); \quad \delta G \rightarrow \varepsilon \cdot (\delta G).$$

Изменения собственного значения и функций (4.24) представим в виде разложений в ряды по степеням параметра малости ε :

$$\delta \lambda \equiv \tilde{\lambda} - \lambda^{(0)} = \lambda^{(1)} \varepsilon + \lambda^{(2)} \varepsilon^2 + \lambda^{(3)} \varepsilon^3 + \dots; \quad (4.24)$$

$$\delta \varphi \equiv \tilde{\varphi}_{\tilde{\lambda}} - \varphi^{(0)} = \varphi^{(1)} \varepsilon + \varphi^{(2)} \varepsilon^2 + \varphi^{(3)} \varepsilon^3 + \dots \quad (4.25)$$

Здесь коэффициентами рядов проставлены некоторые пока не определенные числа $\lambda^{(i)}$ и функции $\varphi^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. (Не следует их смешивать с собственными значениями λ_i и собственными функциями φ_i !).

Уравнение вида (4.21) для такого «частично» возмущенного реактора при подстановке разложений (4.24) и (4.25) примет вид

$$\left\{ \left(\lambda^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(n)} \varepsilon^n \right) [F + \varepsilon \cdot (\delta F)] - [G + \varepsilon \cdot (\delta G)] \right\} \left(\varphi^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)} \varepsilon^n \right) = 0. \quad (4.26)$$

Очевидно, при $\varepsilon = 0$ отсюда получается уравнение (4.16) для невозмущенного реактора [с учетом обозначений (4.20)], а при $\varepsilon = 1$ — уравнение для возмущенного реактора (4.21), причем его собственное значение и собственная функция выразятся рядами

$$\tilde{\lambda} = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} + \dots; \quad (4.27)$$

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{\lambda}} = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(3)} + \dots \quad (4.28)$$

Сходимость таких рядов требует доказательства, но если есть уверенность, что решение $\tilde{\varphi}_{\tilde{\lambda}}$ для возмущенного реактора, описываемого уравнением (4.21), вообще существует, то это можно доказать. Для большинства практически интересных задач реакторной физики это имеет место.

Полагая пока параметр малости $\varepsilon < 1$ (например, $\varepsilon \sim 0,1$), можем из уравнения (4.26) выделить аппроксимирующие уравнения, которые обращают в нуль группу членов, составляющих коэффициент разложения при заданной степени параметра малости ε^n :

$$\varepsilon \equiv 0 \quad (\lambda^{(0)} \mathbf{F} - \mathbf{G})\varphi^{(0)} = 0; \quad (4.29)$$

$$\varepsilon^1 \quad (\mathbf{G} - \lambda^{(0)}\mathbf{F})\varphi^{(1)} = -(\delta\mathbf{G} - \lambda^{(0)}\delta\mathbf{F})\varphi^{(0)} + \lambda^{(1)}\mathbf{F}\varphi^{(0)}; \quad (4.30)$$

$$\varepsilon^2 \quad (\mathbf{G} - \lambda^{(0)}\mathbf{F})\varphi^{(2)} = -(\delta\mathbf{G} - \lambda^{(0)}\delta\mathbf{F})\varphi^{(1)} + \lambda^{(1)}(\mathbf{F}\varphi^{(1)} + \delta\mathbf{F}\varphi^{(0)}) + \lambda^{(2)}\mathbf{F}\varphi^{(0)}; \quad (4.31)$$

$$\varepsilon^3 \quad (\mathbf{G} - \lambda^{(0)}\mathbf{F})\varphi^{(3)} = -(\delta\mathbf{G} - \lambda^{(0)}\delta\mathbf{F})\varphi^{(2)} + \lambda^{(1)}(\mathbf{F}\varphi^{(2)} + \delta\mathbf{F}\varphi^{(1)}) + \lambda^{(2)}(\mathbf{F}\varphi^{(1)} + \delta\mathbf{F}\varphi^{(0)}) + \lambda^{(3)}\mathbf{F}\varphi^{(0)} \quad (4.32)$$

и т. д.

Для сокращения и удобства записи введем операторы:

$$\text{переноса} \quad \mathbf{T}_{\lambda} \equiv \mathbf{G} - \lambda^{(0)}\mathbf{F}; \quad (4.33)$$

$$\text{возмущения} \quad \mathbf{W}_{\lambda} \equiv \delta\mathbf{G} - \lambda^{(0)}\delta\mathbf{F}. \quad (4.34)$$

(Индекс λ у этих операторов указывает на наличие в их конструкции числа $\lambda^{(0)} \equiv \lambda_0$ — собственного значения невозмущенной задачи.) Тогда общей формой уравнений вида (4.30) — (4.32) для $\varphi^{(n)}$ будет

$$\mathbf{T}_{\lambda} \varphi^{(n)} = -\mathbf{S}_n. \quad (4.35)$$

Поправочные функции $\varphi^{(n)}$ различных порядков n могут быть получены как решения неоднородного уравнения (4.35) с правой частью \mathbf{S}_n вида

$$\mathbf{S}_n \equiv \mathbf{W}_{\lambda} \varphi^{(n-1)} - \sum_{k=1}^{n-1} [\lambda^{(k)} (\mathbf{F}\varphi^{(n-k)} + \delta\mathbf{F}\varphi^{(n-k-1)})] - \lambda^{(n)} \mathbf{F}\varphi^{(0)}. \quad (4.36)$$

Заметим, что \mathbf{S}_n содержит функции порядков *только* до $n - 1$ включительно, т. е. может быть построено на основе решений предыдущих уравнений, начиная с (4.30), для решения $\varphi^{(1)}$ которого нужно знать лишь $\varphi^{(0)}$ — собственную функцию невозмущенного реактора [см. (4.20)]. Однако в \mathbf{S}_n также входят поправочные коэффициенты $\lambda^{(k)}$ порядков от $k = 1$ до $k = n$ включительно, которые нам пока не известны. Для их нахождения воспользуемся следующим

обстоятельством. Решения уравнений (4.35) как вообще неоднородных уравнений (см. разд. 3.4) могут существовать, по теореме Фредгольма, лишь при условии, что их правые части S_n ортогональны к решениям $\varphi_\lambda^+ : \langle S_n, \varphi_\lambda^+ \rangle = 0$, где φ_λ^+ — решения соответствующего однородного уравнения, т. е. в данном случае

$$\Gamma_\lambda^+ \varphi_\lambda^+ = 0 \text{ или, согласно (4.33), } (\lambda F^+ - G^+) \varphi_\lambda^+ = 0. \quad (4.37)$$

Но решением уравнения (4.37) является также и функция ценности φ^+ для невозмущенного реактора [см. (4.17)]. Поэтому для существования функций $\varphi^{(n)}$ необходимо выполнение тождества $\langle \varphi^+, S_n \rangle \equiv 0$. Заметим еще, что любая поправочная функция $\varphi^{(n)}$ ($n \neq 0$), будучи разложена в ряд Фурье (4.19) по собственным функциям φ_k невозмущенного реактора, не может содержать в разложении функции φ_0 , т. е.

$$\varphi^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (4.38)$$

поскольку все $\varphi^{(n)}$ [см. (4.28)] как раз являются поправкой к $\varphi^{(0)}$ — функции фундаментального распределения невозмущенной системы — и должны быть относительно нее линейно независимы. Из (4.38) следует

$$\langle \varphi^+, F\varphi^{(n)} \rangle = 0. \quad (4.39)$$

для всех $n \neq 0$ согласно условию ортогональности (4.18).

Таким образом, скалярно умножая (4.36) на φ^+ , с учетом $\langle \varphi^+, S_n \rangle = 0$ и условия (4.39) получаем общее соотношение

$$\lambda^{(n)} \langle \varphi^+, F\varphi^{(0)} \rangle = \langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi^{(n-1)} \rangle - \sum_{k=1}^{n-1} [\lambda^{(k)} \langle \varphi^+, \delta F\varphi^{(n-k-1)} \rangle]. \quad (4.40)$$

Для уравнений (4.30) — (4.32) получаем тогда следующие выражения «поправочных коэффициентов»:

$$\lambda^{(1)} = \frac{\langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi^{(0)} \rangle}{\langle \varphi^+, F\varphi^{(0)} \rangle}; \quad (4.41)$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{1}{\langle \varphi^+, F\varphi^{(0)} \rangle} \{ \langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi^{(1)} \rangle - \lambda^{(1)} \langle \varphi^+, \delta F\varphi^{(0)} \rangle \}; \quad (4.42)$$

$$\lambda^{(3)} = \frac{1}{\langle \varphi^+, F\varphi^{(0)} \rangle} \{ \langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi^{(2)} \rangle - \lambda^{(1)} \langle \varphi^+, \delta F\varphi^{(1)} \rangle - \lambda^{(2)} \langle \varphi^+, \delta F\varphi^{(0)} \rangle \}. \quad (4.43)$$

Как видно, для нахождения величин $\lambda^{(n)}$ порядка n нужны лишь функции $\varphi^{(k)}$ порядка не выше $n - 1$. Для определения первой поправочной величины $\lambda^{(1)}$ используется только функция $\varphi^{(0)}$ — фундаментальное распределение невозмущенного реактора, — являющаяся решением уравнения (4.16). Зная $\varphi^{(0)}$ и $\lambda^{(1)}$, можем построить S_1 :

$$S_1 = W_\lambda \varphi_0 - \lambda^{(1)} F \varphi^{(0)}, \quad (4.44)$$

и с его помощью решить (4.35) в форме уравнения (4.30), т. е. найти $\varphi^{(1)}$. Отсюда по (4.42) найдем $\lambda^{(2)}$, т. е. сможем построить S_2 , что в свою очередь позволит найти $\varphi^{(2)}$ и т. д.

Таким путем можно построить последовательную цепочку величин $\lambda^{(n)}$ и функций $\varphi^{(n)}$ любого порядка:

$$(\varphi^{(0)}, \lambda^{(0)}, \varphi^+) \rightarrow \lambda^{(1)} \rightarrow (S_1) \rightarrow \varphi^{(1)} \rightarrow \lambda^{(2)} \rightarrow (S_2) \rightarrow \varphi^{(2)} \rightarrow \lambda^{(3)} \rightarrow \dots \quad (4.45)$$

Следовательно, построен алгоритм, позволяющий, исходя из характеристик невозмущенного реактора (основного собственного значения $\lambda_0 \equiv \lambda^{(0)}$, фундаментального распределения потока $\varphi_0 \equiv \varphi^{(0)}$ и ценности $\varphi^+ \equiv \varphi_0^+$), последовательно получать числа $\lambda^{(n)}$ и функции $\varphi^{(n)}$, которые служат для построения значения $\tilde{\lambda}$ и нейтронного распределения $\tilde{\varphi}_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — характеристик возмущенного реактора [с использованием представлений рядов (4.27) и (4.28)].

Так может быть решена основная задача теории возмущений с последовательным определением поправок различной степени малости, дающих возможность получить приближенно $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\varphi}_{\tilde{\lambda}}$ на основании данных невозмущенной задачи: λ , φ , φ^+ . Зная собственное число и поток для возмущенного реактора, можно легко получить все остальные реакторно-физические характеристики.

Теория возмущений, использующая для оценок характеристик возмущенного реактора поправки $\lambda^{(n)}$ собственных значений порядка n (и функции порядка не выше n), называется теорией возмущений n -го порядка.

При рассмотрении первого учебного примера теории возмущений в разд. 4.1 из наглядных физических соображений мы получили как раз результат общей теории возмущений первого порядка — формулу (4.11). Так как невозмущенный реактор был при этом критическим, оператор возмущения W_λ имел вид $\delta \mathbf{G} - \delta \mathbf{F}$, а первая оценка изменения $\delta \lambda$ в результате возмущения была $\lambda^{(1)} = \lambda - 1$.

4.4. Условия целесообразности применения теории возмущений.

Практические приемы и главные формы ее реализации

В разд. 4.3 был представлен общий алгоритм, на основе которого по характеристикам невозмущенного реактора (λ , \mathbf{F} , \mathbf{G} , φ , φ^+) и заданному возмущению ($\delta \mathbf{F}$, $\delta \mathbf{G}$) можно определить параметр критичности $\tilde{\lambda}$ и распределение потока нейтронов $\tilde{\varphi}_{\tilde{\lambda}}$ для возмущенного реактора. Однако этот алгоритм связан с рядом вычислительных процедур: простых (интегрирование, сложение, деление) — для оце-

нок $\lambda^{(n)}$ — и более сложных [решение уравнений вида (4.35)], если желательно найти не только $\lambda^{(1)}$, но и $\lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}$ или хотя бы первое приближение возмущения потока $\varphi^{(1)}$. Поправочная функция $\varphi^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ выражает в теории возмущений 1-го порядка изменения пространственного поведения нейтронного поля и изменения спектра потока нейтронов, вызванные возмущением реактора. Таким образом, она весьма существенна для оценок вариации многих реакторных характеристик, функционалов потока: коэффициента неравномерности тепловыделения, баланса реакций (КВ и т. п.), времени жизни мгновенных нейтронов и др.].

Но естественно, возникает вопрос, насколько выгоднее этот путь, чем поиск непосредственно решения возмущенного уравнения

$$(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\lambda} \tilde{\mathbf{F}}) \tilde{\varphi}_{\tilde{\lambda}} = 0. \quad (4.46)$$

Попытаемся ответить на это в возможно более общей форме.

Во-первых, оценка $\lambda^{(1)}$ (не требующая данных о потоке в возмущенном реакторе) по формуле (4.41) сразу дает главному долю в изменении параметра критичности: $(\tilde{\lambda} - \lambda)$ при погрешности порядка $\|\delta\varphi\| / \|\varphi\|$, $\|\delta\mathbf{F}\| / \|\mathbf{F}\|$ или даже высших порядков малости. Это становится очевидным, если представить возмущенные величины, входящие в (4.46), в форме

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} + \delta\mathbf{G}; \quad \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} + \delta\mathbf{F}; \quad (4.47)$$

$$\tilde{\lambda} = \lambda + \delta\lambda; \quad \tilde{\varphi}_{\tilde{\lambda}} = \varphi + \delta\varphi. \quad (4.48)$$

Тогда (4.46) можно переписать в виде

$$[(\mathbf{G} + \delta\mathbf{G}) - (\lambda + \delta\lambda)(\mathbf{F} + \delta\mathbf{F})](\varphi + \delta\varphi) = 0. \quad (4.49)$$

Вычитая из (4.49) уравнение для невозмущенного реактора

$$(\mathbf{G} - \lambda\mathbf{F})\varphi = 0 \quad (4.50)$$

и умножая скалярно получающуюся разность на функцию ценности φ^+ для невозмущенного реактора, приходим к соотношению

$$\delta\lambda = \frac{\langle \varphi^+, (\delta\mathbf{G} - \lambda\delta\mathbf{F})\varphi \rangle + \langle \varphi^+, (\mathbf{G} - \lambda\mathbf{F})\delta\varphi \rangle + \langle \varphi^+, (\delta\mathbf{G} - \lambda\delta\mathbf{F})\delta\varphi \rangle}{\langle \varphi^+, \mathbf{F}\varphi \rangle + \langle \varphi^+, \mathbf{F}\delta\varphi \rangle + \langle \varphi^+, \delta\mathbf{F}\varphi \rangle + \langle \varphi^+, \delta\mathbf{F}\delta\varphi \rangle}. \quad (4.51)$$

Вводя оператор возмущения, аналогичный (4.34): $\mathbf{W}_\lambda \equiv (\delta\mathbf{G} - \lambda\delta\mathbf{F})$, получаем выражение

$$\delta\lambda = \frac{\langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \tilde{\varphi} \rangle}{\langle \varphi^+, \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\varphi} \rangle} = \frac{\langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi \rangle + \langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \delta\varphi \rangle}{\langle \varphi^+, \mathbf{F}\varphi \rangle + \langle \varphi^+, \delta\mathbf{F}\delta\varphi \rangle + \langle \varphi^+, \delta\mathbf{F}\varphi \rangle}, \quad (4.52)$$

так как $\langle \varphi^+, (\mathbf{G} - \lambda\mathbf{F})\delta\varphi \rangle = \langle (\mathbf{G}^+ - \lambda\mathbf{F}^+)\varphi^+, \delta\varphi \rangle \equiv 0$, а согласно уравнениям (4.28) и (4.39)

$$\langle \varphi^+, \mathbf{F}\delta\varphi \rangle = 0, \quad (4.53)$$

поэтому (4.52) приводится к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= \frac{\langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \tilde{\varphi} \rangle}{\langle \varphi^+, \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\varphi} \rangle} = \lambda^{(1)} \frac{1 + \langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \delta\varphi \rangle / \langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi \rangle}{1 + \langle \varphi^+, \delta\mathbf{F} \tilde{\varphi} \rangle / \langle \varphi^+, \mathbf{F} \varphi \rangle} = \\ &= \lambda^{(1)} [1 + O(\delta\varphi/\varphi) + O(\delta\mathbf{F}/\mathbf{F}) + O(\delta\mathbf{F}\delta\varphi/\mathbf{F}\varphi)] \end{aligned} \quad (4.54)$$

или

$$\delta\lambda = (\delta\lambda)_* [1 + O(\delta\varphi/\varphi)], \quad \text{где } (\delta\lambda)_* \equiv \frac{\langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi \rangle}{\langle \varphi^+, \tilde{\mathbf{F}} \varphi \rangle}. \quad (4.55)$$

Оценка $(\delta\lambda)_*$ является у л у ч ш е н н ы м значением для $\delta\lambda$ (по сравнению с $\lambda^{(1)}$), хотя $(\delta\lambda)_*$ также построена т о л ь к о на н е в о з м у щ е н н ы х φ и φ^+ (но при использовании $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} + \delta\mathbf{F}$). (Если возмущение не меняет делящегося вещества, т. е. $\delta\mathbf{F} = 0$, то $(\delta\lambda)_* \equiv \lambda^{(1)}$).

Погрешность оценки $(\delta\lambda)_*$ состоит только в замене $\tilde{\varphi} = \varphi + \delta\varphi$ на φ , и ее меру можно определить, если вычислить отношения норм:

$$\eta \equiv \|\delta\varphi\|/\|\varphi\| \approx \|\varphi^{(1)}\|/\|\varphi\| \gtrsim \|\varphi^{(n+1)}\|/\|\varphi^{(n)}\|. \quad (4.56)$$

Упрощая анализ, полагаем, что первая поправка $\varphi^{(1)}$ уже несет в себе главную долю $\delta\varphi$, а отношения норм последующих поправок не больше η). Относительное возмущение потока (4.56) зависит от относительного «размера» возмущения, который можно охарактеризовать параметром ξ :

$$\xi \equiv (\|\delta\mathbf{G}\| + \lambda \|\delta\mathbf{F}\|) \cdot \|\mathbf{G}^{-1}\|. \quad (4.57)$$

Величина ξ является некоторой глобальной мерой возмущения, и хотя строгий анализ [74] сложен, следуя [81], можно получить ее оценку:

$$\eta \leq 2\xi/(1 - 2\xi). \quad (4.58)$$

Для сходимости ряда (4.28) и, соответственно, (4.27) потребуем, чтобы $\eta < 1$. Тогда из (4.58) следует ограничение на размер возмущения: $\xi < 1/4$. Это — оценочное предельное условие применимости теории возмущений. Образно говоря, возмущение реактора должно ограничиваться изменением не более четверти всех его свойств во всем его объеме*. Тогда, оценки теории возмущений первого порядка можно представить в виде

$$\tilde{\lambda} = \lambda_0 + (\delta\lambda)_* + O(\xi\eta); \quad (4.59)$$

$$\|\tilde{\varphi} - \varphi^{(0)}\| = O(\eta), \quad (4.60)$$

Как видно, используя невозмущенные потоки и ценности, можно получить оценку собственного значения $\tilde{\lambda}$ с точностью до второго

* Разумеется, практически столь сильные возмущения не используются для применения теории возмущений; фактические задачи ограничиваются значением параметра ξ не более, чем $\xi < 0,1$, обычно даже гораздо меньше 0,1.

порядка малости, тогда как возмущенный поток $\tilde{\varphi}$ по норме оценивается с погрешностью первого порядка.

Таким образом, для реакторных задач, где необходима только оценка $\tilde{\lambda}$, т. е. определение реактивности $\delta\lambda = (k_{эф} - 1)/k_{эф}$, вносимой возмущением \mathbf{W}_λ , вполне удовлетворительные результаты дает теория возмущений первого порядка, полностью основанная на характеристиках для невозмущенного реактора: φ , φ^+ , λ . Оценки различных реакторных функционалов: отношений чисел различных ядерных реакций, коэффициента неравномерности тепловыделения, времени жизни мгновенных нейтронов, КВ, спектра нейтронов и т. п., для возмущенного реактора с точностью до второго порядка малости требуют вычисления $\varphi^{(1)}$. Теория возмущений в таком объеме именуется обычно теорией малых возмущений, так как качество ее оценок существенно определяется малостью параметра ξ .

Во-вторых, при желании улучшить оценку $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\varphi}$ посредством следующих порядков теории возмущений нужно находить поправочные функции $\varphi^{(n)}$, решая уравнения (4.35) начиная с (4.30) для $\varphi^{(1)}$. Однако решение таких неоднородных уравнений с известной правой частью S_n всегда проще* решения однородного уравнения (4.46), т. е. $\tilde{\mathbf{T}}_\lambda \tilde{\varphi}_\lambda = 0$. Более того, решение уравнений вида (4.35) можно свести к простой итерационной процедуре, которая впервые в реакторных задачах теории возмущений была предложена Л. Н. Усачевым [19]. Суть ее состоит в том, что вместо представления решения f уравнения $\mathbf{T}_\lambda f = q$ в общей форме [считаем, что $\langle q, \varphi^+ \rangle = 0$ и, следовательно (см. разд. 3.4), f существует!], т. е.

$$(\mathbf{G} - \lambda\mathbf{F})f = q; \quad f = (\mathbf{G} - \lambda\mathbf{F})^{-1}q, \quad (4.61)$$

решается последовательность неоднородных уравнений вида:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{G}f_0 = q; \\ \mathbf{G}f_1 = \lambda\mathbf{F}f_0; \\ \mathbf{G}f_2 = \lambda\mathbf{F}f_1; \\ \dots \\ \mathbf{G}f_n = \lambda\mathbf{F}f_{n-1} \end{array} \right\} \text{или} \left. \begin{array}{l} f_0 = \mathbf{G}^{-1}q; \\ f_1 = \mathbf{G}^{-1}(\lambda\mathbf{F}f_0); \\ f_2 = \mathbf{G}^{-1}(\lambda\mathbf{F}f_1); \\ \dots \\ f_n = \mathbf{G}^{-1}(\lambda\mathbf{F}f_{n-1}). \end{array} \right\} \quad (4.62)$$

Оператор \mathbf{G}^{-1} , в отличие от $(\mathbf{G} - \lambda\mathbf{F})^{-1}$, можно легко построить [80], так как \mathbf{G} — треугольная матрица, поскольку она содержит [см. (3.42), (3.43), (3.47)] только сечения Σ_t и Σ_s процессов, которые

* Для решения однородного уравнения (4.46) приходится решать серию неоднородных уравнений вида (4.35), циклом внешних итераций добиваясь сходимости $S_n \rightarrow 0$, $\|\mathbf{F}\varphi_n\| / \|\mathbf{F}\varphi_{n-1}\| \rightarrow \lambda$ [15, 21, 24, 42].

не увеличивают энергию нейтронов*, и таким образом половина матрицы групповых констант заполнена нулями (чего нет в матрице оператора \mathbf{F} и, следовательно, \mathbf{T}_λ). Найти же $\mathbf{F}f_n$ по известному f_n довольно просто (одним суммированием).

Складывая уравнения (4.62) (левый столбик), имеем

$$(\mathbf{G} - \lambda\mathbf{F}) \sum_{k=0}^{n-1} f_k = q - \mathbf{G}f_n. \quad (4.63)$$

Последовательность функций f_0, f_1, f_2, \dots при $n \rightarrow \infty$ стремится в пределе, как видно из последнего уравнения (4.62), к решению φ однородного уравнения (4.50): $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = C\varphi$, где C — константа,

с точностью до которой оно вообще определено (см. разд. 2.1). Однако, по теореме Фредгольма (см. разд. 3.4), решение уравнения $\mathbf{T}_\lambda f = q$ существует лишь при условии $\langle \varphi^+, q \rangle = 0$, поэтому для $n \rightarrow \infty$ из (4.63) имеем ($\mathbf{G}f_\infty = \lambda\mathbf{F}f_\infty$):

$$\langle q, \varphi^+ \rangle = \langle \mathbf{G}f_\infty, \varphi^+ \rangle = C\lambda \langle \varphi^+, \mathbf{F}\varphi \rangle, \quad (4.64)$$

причем так как $\langle q, \varphi^+ \rangle = 0$, то

$$C\lambda \langle \varphi^+, \mathbf{F}\varphi \rangle = 0. \quad (4.65)$$

Поскольку $\langle \varphi^+, \mathbf{F}\varphi \rangle \neq 0$, то неизбежно $C \equiv 0$.

Таким образом, последовательность функций $f_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и решение уравнения (4.61) можно получить в виде сходящегося ряда:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k = f_0 + f_1 + f_2 + \dots \quad (4.66)$$

Практически ряд обрывают на конечном значении n при достижении желаемой точности оценки f . Примеры типичных реакторных задач показывают [63, 68, 70, 156], что уже 5—10 членов ряда дают f с погрешностью около 1%.

В-трегьях, для подавляющего большинства реакторных задач, связанных с оценкой изменения реакторных функционалов, для которых обязателен учет изменения потока $\delta\varphi$ при возмущении (в рамках общей целесообразности теории возмущений, т. е. при $\xi \lesssim 0,1$), вполне достаточно найти только первую поправочную функцию $\varphi^{(1)}$. (Это, кстати, позволяет и более прецизионно оценить реактивность — поправкой $\lambda^{(2)}$). Итерационный алгоритм для нахождения $\varphi^{(1)}$ как решения f уравнения (4.61) приведен выше.

Для произвольного конкретного вида возмущений трудно иногда бывает указать критерий целесообразности применения развитого аппарата. Однако практически объем вычислений при попытке определить следующую поправочную функцию $\varphi^{(2)}$ уже сравнивает-

* Если считать тепловые нейтроны одной группой, то все процессы рассеяния (упругого и неупругого) только замедляют нейтроны.

ся с затратами труда и машинного времени на прямое решение уравнения (4.46) для возмущенного реактора [63], и это определяет границы полезности теории возмущений.

Наконец, укажем еще один полезный прием уточненного определения $\delta\varphi$ в рамках теории возмущений первого порядка [70]. Из (4.49) следует строгое уравнение для нахождения $\delta\varphi$:

$$(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\lambda} \tilde{\mathbf{F}}) \delta\varphi = -\mathbf{W}_\lambda \varphi + \delta\lambda \tilde{\mathbf{F}} \varphi, \quad (4.67)$$

но оно бесполезно без знания $\tilde{\lambda}$. Возьмем для $\delta\lambda$ оценку $(\delta\lambda)_*$ по (4.55). Тогда (4.67) можно аппроксимировать уравнением

$$(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\lambda}_* \tilde{\mathbf{F}}) (\delta\varphi)_* = -\mathbf{W}_\lambda \varphi + (\delta\lambda)_* \tilde{\mathbf{F}} \varphi. \quad (4.68)$$

Решение его $(\delta\varphi)_*$ можно получить уже описанным способом [см. (4.61)—(4.66)]; оно аппроксимирует $\delta\varphi$ с точностью порядка (ξ^2) . Неудобство этого приема состоит лишь в том, что для каждого нового вида возмущения \mathbf{W}_λ надо строить свою обратную матрицу $\tilde{\mathbf{G}}^{-1}$.

4.5. Конкретный вид рабочих формул теории возмущений

Для практического использования при расчетах (и в справочных целях) приведем в явном виде, *раскрывая операторную символику*, основные формулы теории возмущений первого порядка, служащие для вычисления $\delta\lambda$ и $\delta\varphi$ (следуя работам [1, 9, 12, 21, 24, 37, 42, 61, 85, 86] и др.).

1. Оценка параметра малости возмущения ξ . При общем определении параметра ξ (4.57) ограничимся узким пониманием нормы операторов, базируя ее на одной функции φ — потоке в невозмущенном реакторе (единственной пока известной нам функции):

$$\xi \equiv (\|\delta\mathbf{G}\varphi\| + \lambda \|\delta\mathbf{F}\varphi\|) \|\mathbf{G}^{-1}\varphi\|. \quad (4.69)$$

Выражения таких слагаемых при частных аппроксимациях кинетического уравнения не приводим, так как операторы $\delta\mathbf{G}$, $\delta\mathbf{F}$, \mathbf{G} , \mathbf{F} будут явно записаны при раскрытии операторных формул для $\delta\lambda$ и $\delta\varphi$ в дальнейшем тексте.

2. Оценка изменения собственного значения $\delta\lambda$ (реактивности). Строго точное значение $\delta\lambda$ (4.67) выражается в развернутой форме отношением

$$\delta\lambda = \langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \tilde{\varphi} \rangle / \langle \varphi^+, \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\varphi} \rangle, \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \text{т. е.} \quad \delta\lambda = & \frac{1}{\tilde{J}_{\tilde{F}}} \left\{ \int dr \int dv \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) [\delta\Sigma_t(\mathbf{r}, v) \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \right. \\ & - \int \delta\Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}') dv' - \\ & \left. - \lambda \int \delta[\chi(\mathbf{v}) \nu\Sigma_f(\mathbf{r}, v')] \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}') dv' \right\}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad \tilde{J}_{\tilde{F}} \equiv & \int dr \int dv \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \int \{ \chi(\mathbf{v}) \nu\Sigma_f(\mathbf{r}, v') + \\ & + \delta[\chi(\mathbf{v}) \nu\Sigma_f(\mathbf{r}, v')] \} \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}') dv'. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Это общее точное выражение бесполезно, пока неизвестен поток $\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в возмущенном реакторе. Если вместо него использовать невозмущенный поток φ , то получим хорошую оценку $(\delta\lambda)_*$, позволяющую найти $(\delta\varphi)_*$ из (4.68).

Формула для $(\delta\lambda)_*$ совпадает с (4.71) при замене $\tilde{\varphi}$ на φ :

$$(\delta\lambda)_* = \delta\lambda [\tilde{\varphi} \rightarrow \varphi]; \quad \tilde{J}_{\tilde{F}} [\tilde{\varphi}] \rightarrow J_{\tilde{F}} [\varphi]. \quad (4.73)$$

Некоторое неудобство оценки $(\delta\lambda)_*$ состоит в том, что для различных возмущений $\mathbf{W}_\lambda^{(I)}$ и $\mathbf{W}_\lambda^{(II)}$ (если $\delta\mathbf{F}^{(I)} \neq \delta\mathbf{F}^{(II)}$) приходится вычислять заново интеграл $J_{\tilde{F}}$, стоящий в знаменателе. Если возмущения таковы, что не меняют размножающих свойств реактора (т. е. $\delta[\chi\nu\Sigma_f] \equiv 0$) или меняют очень незначительно ($\|\delta\mathbf{F}\| \ll \|\mathbf{F}\|$), то тогда поправкой $\delta[\chi\nu\Sigma_f]$ в интеграле $J_{\tilde{F}}$ можно пренебречь: $J_{\tilde{F}} \approx J_F$. При этом для сравнения различных возмущений по их реактивным эффектам достаточно вычислять только интегралы числителя, а J_F будет всегда одним и тем же нормированным интегралом (в терминологии работы [84]).

Чаще всего используется именно такая формула для оценок реактивных эффектов возмущений, дающая $(\delta\lambda)_1 \equiv \lambda^{(1)}$ (см. разд. 4.3):

а) в общем случае описания реактора кинетическим уравнением

$$\begin{aligned} (\delta\lambda)_1 = & \frac{1}{J_F} \left\{ \int dr \int dv \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \left[\delta\Sigma_t(\mathbf{r}, v) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \right. \right. \\ & - \int \delta\Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') dv' - \\ & \left. \left. - \lambda \int \delta[\chi(\mathbf{v}) \nu\Sigma_f(\mathbf{r}, v')] \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') dv' \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

при этом

$$J_F \equiv \int dr \int dv \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \chi(\mathbf{v}) \int \nu\Sigma_f(\mathbf{r}, v') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') dv' \equiv \text{ЦНД} - \quad (4.75)$$

интегральная ценность нейтронов деления (по терминологии Л. Н. Усачева [1]);

б) при односкоростном кинетическом уравнении переноса

$$(\delta\lambda)_1 = \frac{1}{J_F} \int d\mathbf{r} \{ [g(\mathbf{r}) \delta\Sigma_t(\mathbf{r}) - \lambda \delta v \Sigma_f(\mathbf{r})] \Phi^2(\mathbf{r}) - \int d\Omega' \int d\Omega'' \delta\Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega', \Omega'') \varphi(\mathbf{r}, -\Omega') \varphi(\mathbf{r}, \Omega'') \}, \quad (4.76)$$

где $J_F \equiv \int d\mathbf{r} v \Sigma_f(\mathbf{r}) \Phi^2(\mathbf{r})$; $g(\mathbf{r}) \equiv \frac{4\pi}{\Phi^2(\mathbf{r})} \int \varphi(\mathbf{r}, \Omega) \varphi(\mathbf{r}, -\Omega) d\Omega$.

в) в диффузионном приближении уравнения переноса

$$(\delta\lambda)_1 = \frac{1}{J_F} \int d\mathbf{r} \int dv \{ \Phi^+(\mathbf{r}, v) [\delta\Sigma_t(\mathbf{r}, v) \Phi(\mathbf{r}, v) - \int \delta\Sigma_s(\mathbf{r}, v' \rightarrow v) \Phi(\mathbf{r}, v') dv' - \lambda \int \delta[\chi(v) v \Sigma_f(\mathbf{r}, v')] \Phi(\mathbf{r}, v') dv'] - 3D(\mathbf{r}, v) (\nabla\Phi^+) \delta\Sigma_{tr}(\mathbf{r}, v) D(\mathbf{r}, v) (\nabla\Phi) \}. \quad (4.77)$$

Здесь $J_F \equiv \int d\mathbf{r} \int dv \Phi^+(\mathbf{r}, v) \chi(v) \int v \Sigma_f(\mathbf{r}, v') \Phi(\mathbf{r}, v') dv'$;

г) в многогрупповом диффузионном приближении

$$(\delta\lambda)_1 = \frac{1}{J_F} \sum_g \int d\mathbf{r} \{ \Phi_g^+ [\delta\Sigma_t^{(g)} \Phi_g - \sum_{k \leq g} \delta\Sigma_s^{(k \rightarrow g)} \Phi_k - \lambda \sum_m \delta(\chi_g v \Sigma_f^{(m)}) \Phi_m] - 3D_g (\nabla\Phi_g^+) \delta\Sigma_{tr}^g D_g (\nabla\Phi_g) \}, \quad (4.78)$$

где $J_F = \sum_g \int d\mathbf{r} [\Phi_g^+ \chi_g \sum_m v \Sigma_f^{(m)} \Phi_m]$.

В многогрупповом диффузионном представлении весь интервал скоростей (энергий, летаргий) описан Γ -группами и интегрирование заменено суммированием: по индексам g и m для всех Γ групп, по индексу k только для групп $k \leq g$, т. е. с энергией не меньше, чем в группе g . Групповые потоки и ценности обозначены нижними индексами: Φ_g и Φ_g^+ ; групповые индексы у макросечений проставлены сверху: $\Sigma_t^{(g)}$, $\Sigma_f^{(m)}$, $\Sigma_{tr}^{(g)}$; сечение $\Sigma_s^{k \rightarrow g}$ включает все процессы замедления (упругое и неупругое рассеяния) из группы k в группу g ; χ_g — спектр деления в групповом представлении; $D_g \equiv 1/3\Sigma_{tr}^{(g)}$ (зависимости Φ , Φ^+ и макроскопических сечений от координат \mathbf{r} опущены, чтобы не загромождать формулы);

д) в одногрупповом диффузионном представлении

$$\delta\lambda_1 = \frac{1}{J_F} \int d\mathbf{r} \{ [\delta\Sigma_a(\mathbf{r}) - \lambda \delta v \Sigma_f(\mathbf{r})] \Phi^2(\mathbf{r}) - 3D^2 (\nabla\Phi)^2 \delta\Sigma_{tr}(\mathbf{r}) \}, \quad (4.79)$$

где $J_F \equiv \int d\mathbf{r} v \Sigma_f(\mathbf{r}) \Phi^2(\mathbf{r})$.

В одnogрупповом представлении отсутствие процесса замедления исключает эффект рассеяния: $\delta\Sigma_t - \delta\Sigma_s = \delta\Sigma_a$, сводя его к влиянию на утечку нейтронов через $\delta\Sigma_{tr}$.

В представленных выше формулах (4.71) — (4.79) возмущения $\delta\Sigma_t$, $\delta\Sigma_s$, $\delta[\chi v \Sigma_f]$, $\delta\Sigma_{tr}$ рассматриваются в смысле общих определений (4.14); интегрирование по пространству распространяется на весь объем реактора с автоматическим исключением для числителей области, где $\delta\Sigma = 0$, а для J_F — области, где $\Sigma_f = 0$.

3. Оценки возмущения нейтронного потока $\delta\phi$. Наилучшая оценка возмущения нейтронного потока $\delta\phi$ дается решением $(\delta\phi)_*$ уравнения (4.68), основанного на вычислении $(\delta\lambda)_*$ по (4.73) (в рамках теории возмущений первого порядка). Однако поскольку обычно интерес представляет рассмотрение *целой серии* различных возмущений, то решение уравнений вида (4.68), требующее для каждого нового возмущения строить свою обратную матрицу $\tilde{\mathbf{G}}^{-1}$, становится обременительным. Поэтому чаще ограничиваются оценкой $(\delta\phi)_1 \equiv \varphi^{(1)}$, такой, как она определена уравнением (4.30),

$$(\mathbf{G} - \lambda\mathbf{F})(\delta\phi)_1 = -(\delta\mathbf{G} - \lambda\delta\mathbf{F})\varphi + (\delta\lambda)_1\mathbf{F}\varphi. \quad (4.80)$$

Раскроем операторную символику для *кинетического уравнения переноса*, обозначив $(\delta\phi)_1 \equiv \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$:

$$\begin{aligned} & \Omega\nabla\Psi + \Sigma_t(\mathbf{r}, v)\Psi(\mathbf{r}, v) - \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') dv' - \\ & - \lambda \int \chi(\mathbf{v}) v \Sigma_f(\mathbf{r}, v')\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') dv' = \\ & = (\delta\lambda)_1 \int \chi(\mathbf{v}) v \Sigma_f(\mathbf{r}, v')\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') dv' - \left\{ \delta\Sigma_t(\mathbf{r}, v)\varphi(\mathbf{r}, v) - \right. \\ & \left. - \int \delta\Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') dv' - \lambda \int \delta[\chi(\mathbf{v}) v \Sigma_f(\mathbf{r}, v')]\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') dv' \right\}. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Для *многогруппового диффузионного приближения*, обозначив $(\delta\phi)_1 \equiv \{\psi_g(\mathbf{r})\}$, получим уравнение

$$\begin{aligned} & \nabla(D_g \nabla\psi_g) - \Sigma_t^{(g)}\psi_g + \sum_{k \leq g} \Sigma_s^{(k \rightarrow g)}\psi_k + \lambda \sum_m \chi_g v \Sigma_f^{(m)}\psi_m = \\ & = \delta\Sigma_t^g \Phi_g - \sum_{k \leq g} \delta\Sigma_s^{(k \rightarrow g)}\Phi_k - \lambda \sum_m \delta(\chi_g v \Sigma_f^m)\Phi_m - \\ & - \nabla\delta D_g \nabla\Phi_g - (\delta\lambda)_1 \sum_m \chi_g v \Sigma_f^{(m)}\Phi_m \quad (g = 1, 2, \dots, \Gamma). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Здесь приняты те же обозначения групповых потоков и сечений, что и в п. 1) на с. 69.

4.6. Прямые методы теории возмущений для оценки различных характеристик реакторов — функционалов потока и ценности

Изложенная теория возмущений представлялась как метод нахождения для возмущенного реактора его двух основных характеристик: собственного числа $\tilde{\lambda}$ (определяющего реактивность) и изменения потока нейтронов $\delta\phi$, вызванного заданным возмущением. Неявно предполагалось, что изменения остальных характерных параметров реактора (коэффициент неравномерности, отношение количества накопленного изотопа к выгоранию, КВ, время жизни нейтронов и т. п.) могут быть рассчитаны с использованием полученных изменений $\delta\lambda$ и $\delta\phi$.

Перечисленные выше (и аналогичные) параметры реактора являются **ч и с л а м и**, которые будут **ф у н к ц и о н а л а м и** потока нейтронов или их ценности.

Еще в первых работах Г. И. Марчука и В. В. Орлова [7, 32] была показана возможность построения теории возмущений непосредственно для оценки изменений заданного вида функционалов при возмущениях реактора. Однако практическая реализация этого подхода началась с работы Л. Н. Усачева [19], который указал удобный путь получения рабочих формул теории возмущений для *отношений* линейных функционалов, описывающих различные характеристики критических реакторов (поскольку в критическом реакторе поток и ценность определены с точностью до произвольного множителя, то имеет смысл лишь *отношение чисел*).

Результаты работ ряда советских и зарубежных ученых [20, 33—35, 38, 40, 65, 87] показали плодотворность этого нового подхода, возможности его дальнейшего развития. В иностранной литературе появился даже специальный термин *обобщенная теория возмущений* [35, 37, 38]. Однако пока это обобщение не пошло дальше рассмотрения отношений билинейных функционалов [38]*, и мы ограничимся названием этого подхода как «прямых методов» теории возмущений. Кратко изложим сущность этих прямых методов (следуя подходам работ [19, 34, 35, 38, 66] с некоторыми модификациями).

Рассмотрим некоторый условно-критический реактор, нейтронное поле в котором описывается уравнением

$$(\mathbf{G} - \lambda\mathbf{F})\phi = 0, \quad (4.83)$$

а функция ценности подчинена уравнению

$$(\mathbf{G}^+ - \lambda\mathbf{F}^+)\phi^+ = 0. \quad (4.84)$$

* В работе [32] показана возможность гораздо более широкого обобщения теории возмущений с охватом и нелинейных функционалов.

Тогда по известным характеристикам этого реактора φ , φ^+ и λ можно вычислить различные и н т е р г р а л ь н ы е параметры, отражающие его глобальные свойства в продуктивно-производственном, эксплуатационно-физическом и иных аспектах. Так, например, отношение числа c_i ядер получаемого при облучении в реакторе изотопа i с сечением образования $\Sigma_a^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ к числу разделившихся ядер (т. е. в нужной нормировке — на киловатт-час) выразится формулой

$$\zeta \equiv c_i/f = \langle \Sigma_a^i, \varphi \rangle / \langle \Sigma_f, \varphi \rangle, \quad (4.85)$$

где, очевидно, f — полное число делений в секунду в реакторе.

Коэффициент воспроизводства ядерного горючего в реакторе на быстрых нейтронах, сжигающем плутоний и накапливающим его за счет радиационного захвата нейтронов в ^{238}U , выразится отношением

$$\text{KB} \equiv c_8/p_9 = \langle \Sigma_c^{238}, \varphi \rangle / \langle (\Sigma_f^{239} + \Sigma_c^{239}), \varphi \rangle, \quad (4.86)$$

где c_8 — число поглощений нейтронов в ^{238}U во всем реакторе, а p_9 — число ядер ^{239}Pu , исчезнувших при делении или захвате нейтронов с образованием «балласта» ^{240}Pu .

Можно определить важные в эксплуатационном аспекте отношения эффективностей двух различных органов регулирования:

$$\mu \equiv \delta\lambda^{(1)}/\delta\lambda^{(2)} = \langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda^{(1)}\varphi \rangle / \langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda^{(2)}\varphi \rangle. \quad (4.87)$$

При оценке их (в рамках теории возмущений первого порядка) знаменатели J_F для соответствующих эффектов в $\delta\lambda^{(1)}$ и $\delta\lambda^{(2)}$ сокращаются. Для оценки характеристик кинетики можно определить *время генерации* мгновенных нейтронов [39], которое в общей форме выразится как

$$\Lambda \equiv n/J_F = \langle \varphi^+, \frac{1}{v}\varphi \rangle / \langle \varphi^+, \mathbf{F}\varphi \rangle. \quad (4.88)$$

Здесь n — полное число нейтронов в реакторе с весом их ценности; J_F — скорость генерации нейтронов деления тоже с весом φ^+ .

Такие (и аналогичные) выражения для разных реакторных характеристик по своей форме имеют вид дробно-линейных (4.85), (4.86) или же дробно-билинейных (4.87), (4.88) функционалов.

Для оценки изменения таких величин и развита новая ветвь теории возмущений, предусматривающая возможность вариации как самих величин (функций, операторов), входящих в функционалы, так и связанного с ними (или не связанного) возмущения реактора.

Как более *общий случай* рассмотрим изменение билинейного функционала, выраженного через потоки и ценности φ и φ^+ :

$$R \equiv a/b \equiv \langle \varphi^+, \mathbf{A}\varphi \rangle / \langle \varphi^+, \mathbf{B}\varphi \rangle. \quad (4.89)$$

Предположим, что операторы, входящие в функционал, изменились:

$$\mathbf{A} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \delta\mathbf{A}; \quad \mathbf{B} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \delta\mathbf{B},$$

но характер и размеры этих изменений *пока не будем ничем ограничивать* (кроме условия $\tilde{\mathbf{B}} \neq 0$). Такие изменения могут отразиться на изменениях операторов \mathbf{G} и \mathbf{F} , определяющих поток нейтронов ($\delta\mathbf{G}_A, \delta\mathbf{G}_B, \delta\mathbf{F}_A, \delta\mathbf{F}_B$), если $\delta\mathbf{A}$ и $\delta\mathbf{B}$ связаны с изменением структуры реактора. Можно также полагать, что одновременно с изменением \mathbf{A} и \mathbf{B} в реакторе произведены еще какие-то изменения, не связанные с $\delta\mathbf{A}$ и $\delta\mathbf{B}$, но также ведущие к возмущению реактора (например, необходимые для компенсации некритичности и т. п.). Поэтому целесообразно рассмотреть вариацию функционала R в условиях, когда его значение требуется определить для возмущенного состояния реактора, описав его уравнениями для потока и ценности:

$$(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\lambda} \tilde{\mathbf{F}}) \tilde{\varphi} = 0; \quad (\tilde{\mathbf{G}}^+ - \tilde{\lambda} \tilde{\mathbf{F}}^+) \tilde{\varphi}^+ = 0. \quad (4.90)$$

Хотя на $\delta\mathbf{A}$ и $\delta\mathbf{B}$ мы не наложили ограничений, но по-прежнему считаем, что результирующие возмущения операторов реактора $\delta\mathbf{G}$ и $\delta\mathbf{F}$ удовлетворяют общему условию применимости теории возмущений. (Изменения $\delta\mathbf{G}_A, \delta\mathbf{F}_A, \delta\mathbf{G}_B, \delta\mathbf{F}_B$ могут компенсировать друг друга даже в случае, когда $\delta\mathbf{A}$ и $\delta\mathbf{B}$ сами велики.) Тогда функционал \tilde{R} в возмущенном реакторе имеет новое значение:

$$\tilde{R} \equiv \frac{\langle \tilde{\varphi}^+, \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\varphi} \rangle}{\langle \tilde{\varphi}^+, \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\varphi} \rangle} = \frac{a_0}{b_0} \left[\frac{1 + \langle \delta\varphi^+, \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\varphi} \rangle / a_0 + \langle \tilde{\varphi}^+, \tilde{\mathbf{A}} \delta\varphi \rangle / a_0}{1 + \langle \delta\varphi^+, \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\varphi} \rangle / b_0 + \langle \tilde{\varphi}^+, \tilde{\mathbf{B}} \delta\varphi \rangle / b_0} \right], \quad (4.91)$$

где

$$\delta\varphi^+ = \tilde{\varphi}^+ - \varphi^+; \quad \delta\varphi = \tilde{\varphi} - \varphi; \quad (4.92)$$

$$a_0 \equiv \langle \varphi^+, \tilde{\mathbf{A}} \varphi \rangle; \quad b_0 \equiv \langle \varphi^+, \tilde{\mathbf{B}} \varphi \rangle. \quad (4.93)$$

Таким путем находим первую оценку нового значения функционала \tilde{R}_0 , определенную в нулевом приближении — на потоке и ценности невозмущенного реактора: $\tilde{R}_0 = a_0/b_0$. Для ее уточнения разложим дробь в квадратных скобках (4.91) до величин второго порядка малости относительно $\delta\varphi$ и $\delta\varphi^+$:

$$\begin{aligned} \tilde{R} = & \frac{a_0}{b_0} \left[1 + \left\langle \delta\varphi^+, \left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{a_0} - \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{b_0} \right) \varphi \right\rangle + \right. \\ & \left. + \left\langle \varphi^+, \left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{a_0} - \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{b_0} \right) \delta\varphi \right\rangle \right] + O[\delta\varphi^2, (\delta\varphi^+)^2, \delta\varphi\delta\varphi^+] \quad (4.94) \end{aligned}$$

группируя при этом скалярные произведения, содержащие функции $\delta\varphi$ и $\delta\varphi^+$.

Для определения возмущений $\delta\varphi$ потока нейтронов и ценности $\delta\varphi^+$ применим уравнение (4.80) теории первого порядка, записав его в компактной форме через операторы \mathbf{T}_λ и \mathbf{W}_λ [см. (4.33) и (4.34)]:

$$\mathbf{T}_\lambda \delta\varphi = -\mathbf{W}_\lambda \varphi + \delta\lambda \mathbf{F}\varphi; \quad \mathbf{T}_\lambda^+ \delta\varphi^+ = -\mathbf{W}_\lambda^+ \varphi^+ + \delta\lambda \mathbf{F}^+ \varphi^+. \quad (4.95)$$

(Уравнение для $\delta\varphi^+$ можно элементарно построить, исходя из общей формы (4.49) разложения уравнения возмущенного реактора, но только с использованием уравнения (4.90) для φ^+).

Запишем решения уравнений (4.95) в символической форме:

$$\delta\varphi = -\mathbf{T}_\lambda^{-1} (\mathbf{W}_\lambda \varphi - \delta\lambda \mathbf{F}\varphi); \quad \delta\varphi^+ = -(\mathbf{T}_\lambda^+)^{-1} (\mathbf{W}_\lambda^+ \varphi^+ - \delta\lambda \mathbf{F}^+ \varphi^+). \quad (4.96)$$

Подстановкой их в скалярные произведения выражения (4.94) и переносом операторов $(\mathbf{T}_\lambda^+)^{-1}$ и $(\tilde{\mathbf{A}}/a_0 - \tilde{\mathbf{B}}/b_0)\mathbf{T}_\lambda^{-1}$ в другую половину скобок (с заменой на сопряженные) приведем эти скалярные произведения к виду

$$\left\langle \delta\varphi^+, \left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{a_0} - \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{b_0} \varphi \right) \right\rangle = -\left\langle (\mathbf{W}_\lambda^+ \varphi^+ - \delta\lambda \mathbf{F}^+ \varphi^+), \right. \\ \left. \mathbf{T}_\lambda^{-1} \left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{a_0} - \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{b_0} \right) \varphi \right\rangle; \quad (4.97a)$$

$$\left\langle \varphi^+, \left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{a_0} - \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{b_0} \right) \delta\varphi \right\rangle = \\ = -\left\langle (\mathbf{T}_\lambda^+)^{-1} \left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}^+}{a_0} - \frac{\tilde{\mathbf{B}}^+}{b_0} \right) \varphi^+, (\mathbf{W}_\lambda \varphi - \delta\lambda \mathbf{F}\varphi) \right\rangle. \quad (4.97b)$$

Тогда части скалярных произведений (4.97) будут содержать функции Θ_{AB}^- и Θ_{AB}^+ , образованные из φ и φ^+ по «рецептам»:

$$\Theta_{AB}^- \equiv \mathbf{T}_\lambda^{-1} \left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{a_0} - \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{b_0} \right) \varphi; \quad \Theta_{AB}^+ \equiv (\mathbf{T}_\lambda^+)^{-1} \left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}^+}{a_0} - \frac{\tilde{\mathbf{B}}^+}{b_0} \right) \varphi^+. \quad (4.98)$$

Очевидно, что эти функции определяются неоднородными уравнениями

$$\mathbf{T}_\lambda \Theta_{AB}^- = \tilde{\mathbf{A}}\varphi/a_0 - \tilde{\mathbf{B}}\varphi/b_0; \quad (4.99a)$$

$$\mathbf{T}_\lambda^+ \Theta_{AB}^+ = \tilde{\mathbf{A}}^+ \varphi^+/a_0 - \tilde{\mathbf{B}}^+ \varphi^+/b_0. \quad (4.99b)$$

Решения таких уравнений существуют, так как их правые части ортогональны решениям φ^+ и φ однородных уравнений: $\mathbf{T}_\lambda \varphi^+ = 0$ для (4.99a) и $\mathbf{T}_\lambda \varphi = 0$ для (4.99b) соответственно. Заметим еще, что Θ_{AB}^- и Θ_{AB}^+ будут ортогональны и к функциям $\mathbf{F}^+ \varphi^+$ и $\mathbf{F}\varphi$ соответственно [это было уже показано на примере решений неоднородных уравнений (4.35) с условием (4.39) в разд. 4.3]. Таким пу-

тем, используя (4.97) и (4.98), приводим (4.94) к компактному виду для оценки значения первого приближения функционала $\tilde{R} \approx \tilde{R}_1$ в возмущенном реакторе:

$$\tilde{R}_1 = \frac{a_0}{b_0} [1 - \langle \mathbf{W}_\lambda^+ \varphi^+, \Theta_{AB} \rangle - \langle \Theta_{AB}^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi \rangle]. \quad (4.100)$$

Полученная оценка нового значения функционала R_1 при возмущенных операторах $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ для возмущенного реактора имеет погрешность не более второй степени малости относительно возмущений $\delta\varphi$, $\delta\varphi^+$ (или их произведения $\delta\varphi \cdot \delta\varphi^+$), как это следует из (4.94) и определения функций Θ_{AB} и Θ_{AB}^+ по уравнениям (4.99).

По определению [см. уравнения (4.99а) и (4.99б)] Θ_{AB} и Θ_{AB}^+ играют роль «обобщенных» понятий потока и ценности, обусловленных источниками в форме возмущений, внесенных вариацией операторов дробного функционала.

Уравнения (4.99) можно решить итерационным алгоритмом (4.61) — (4.66), развитым в разд. 4.4 для нахождения обычного потока из решения неоднородных уравнений. (Перенесение этого способа на случай нахождения функций ценности вполне очевидно.)

Если рассматривать только малые вариации операторов $\delta\mathbf{A}$ и $\delta\mathbf{B}$, то более удобным может быть несколько иное определение функций Θ_{AB} и Θ_{AB}^+ , не требующее их вычисления для каждого нового случая с различными $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$. Такой подход применен Л. Н. Усачевым и С. М. Зарицким [34]. Для этого в уравнениях (4.99) в правых частях делаются замены:

$$\tilde{\mathbf{A}}/a_0 \rightarrow \mathbf{A}/a; \quad \tilde{\mathbf{B}}/b_0 \rightarrow \mathbf{B}/b; \quad \tilde{\mathbf{A}}^+/a_0 \rightarrow \mathbf{A}^+/a; \quad \tilde{\mathbf{B}}^+/b_0 \rightarrow \mathbf{B}^+/b.$$

Полученные (из таким образом унифицированных уравнений) функции Θ_{AB} и Θ_{AB}^+ затем можно использовать для расчета вариаций дробных функционалов $\delta R = \tilde{R}_1 - R$ при проведении целой серии расчетных оценок:

$$\tilde{R}_1 = \frac{a}{b} [1 - \langle \mathbf{W}_\lambda^+ \varphi^+, \Theta_{AB} \rangle - \langle \Theta_{AB}^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi \rangle]. \quad (4.101)$$

Аналогичным способом можно определить вариации дробно-линейных функционалов вида (4.85) и (4.86) или же дробно-линейных функционалов от функции ценности. Для нового значения \tilde{R} при возмущении операторов и реактора получается формула такого же вида, как (4.100), но без первого члена в квадратных скобках. Так, для величины КВ имеем ($\eta = \|\delta\varphi\| / \|\varphi\|$):

$$\tilde{KB} = \frac{\langle \tilde{\Sigma}_{8,9}, \varphi \rangle}{\langle \tilde{\Sigma}_9, \varphi \rangle} [1 - \langle \Theta_{8,9}^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi \rangle] + O(\eta^2). \quad (4.102)$$

Естественно, при этом нужно решать только уравнение вида (4.99б) для нахождения $\Theta_{8,9}^+$. Сказанное выше о возможности упростить задачу для массовых расчетов при малых изменениях в ядрах функ-

ционалов относится и к этому частному виду функционалов. Тогда уравнение для $\theta_{8,9}^{\pm}$ выглядит следующим образом:

$$T_{\lambda}^{\pm} \theta_{8,9}^{\pm} = \Sigma_8 / c_8 - \Sigma_9 / p_9, \quad (4.103)$$

где $\Sigma_8 \equiv \Sigma_c^{238}(\mathbf{r}, v)$ и $\Sigma_9 \equiv \Sigma_f^{239}(\mathbf{r}, v) + \Sigma_c^{239}(\mathbf{r}, v)$;
 $c_8 \equiv \langle \Sigma_8, \varphi \rangle$ и $p_9 \equiv \langle \Sigma_9, \varphi \rangle$; $K_B = c_8 / p_9$.

Произвольные изменения операторов δA и δB , даже если они малы [см. общую форму функционала (4.89)], могут не сохранить критического состояния реактора при условии, что они содержат компоненты δG и δF :

$$\delta A = \delta G_A + \delta F_A + \dots; \quad \delta B = \delta G_B + \delta F_B + \dots$$

$$\text{и } W_{\lambda} = (\delta G_A + \delta G_B) - \lambda (\delta F_A + \delta F_B) \neq 0. \quad (4.104)$$

Однако часто бывает желательным сохранить состояние критичности, бывшее до возмущения функционала [20]. Проще всего это сделать, дополнив возмущение (4.104) компенсирующим изменением концентрации делящегося вещества, т. е. выбрав дополнительный оператор $\delta F_C \equiv \gamma F$, где параметр γ определяется условием

$$\delta \lambda \equiv \frac{\langle \varphi^+, (W_{\lambda} - \lambda \delta F_C) \tilde{\varphi} \rangle}{\langle \varphi^+, \tilde{F} \tilde{\varphi} \rangle} = 0. \quad (4.105)$$

Применяя развитый выше метод прямой оценки дробных функционалов, находим

$$\gamma = \frac{\langle \varphi^+, W_{\lambda} \tilde{\varphi} \rangle}{\lambda \langle \varphi^+, \tilde{F} \tilde{\varphi} \rangle} = \frac{\langle \varphi^+, W_{\lambda} \varphi \rangle}{\lambda \langle \varphi^+, F \varphi \rangle} [1 - \langle \Theta_{WF}^{\pm}, W_{\lambda} \varphi \rangle] + O(\eta^2). \quad (4.106)$$

Здесь функция эффективной ценности Θ_{WF}^{\pm} подчинена уравнению

$$T_{\lambda}^{\pm} \Theta_{WF}^{\pm} = W_{\lambda}^{\pm} \varphi^+ / \omega_0 - F^{\pm} \varphi^+ / f; \quad \omega_0 \equiv \langle \varphi^+, W_{\lambda} \varphi \rangle; \quad f \equiv \langle \varphi^+, F \varphi \rangle. \quad (4.107)$$

Специфика выбранного компенсирующего возмущения не меняет вида формулы (4.100), так как $\langle \Theta_{AB}^{\pm}, F \varphi \rangle = 0$ и $\langle \Theta_{AB}, F^+ \varphi^+ \rangle = 0$. Следует лишь учесть, что оценка \tilde{R}_1 соответствует реактору с $\tilde{\lambda} = \lambda$ при $\tilde{F} = \delta F_A + \delta F_B + (1 + \gamma) F$. [Часто можно ограничиться оценкой $\gamma_1 = \langle \varphi^+ W_{\lambda} \varphi \rangle / \lambda \langle \varphi^+ F \varphi \rangle$ вместо (4.106)].

Прямые методы теории возмущений для оценок реакторных функционалов находят широкое применение при оптимизационном поиске и расчетах на разных стадиях проектирования реакторов для АЭС. Подробнее об этих прямых методах можно прочесть в работах [40, 87]. Здесь же приведем только один важный для практики пример использования общего подхода прямых методов теории

возмущений для определения изменения собственного числа $\delta\lambda$ с точностью более высокой, чем $(\delta\lambda)_*$ (т. е. до второго порядка относительно η).

Запишем $\delta\lambda$ в общей форме (4.52) и применим подход, развитый для дробно-билинейных функционалов, начиная с (4.91). В результате имеем:

$$\delta\lambda = \frac{\langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \tilde{\varphi} \rangle}{\langle \varphi^+, \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\varphi} \rangle} = \frac{\omega_0}{f_0} \left[1 + \frac{\langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \delta\varphi \rangle}{\omega_0} - \frac{\langle \varphi^+, \tilde{\mathbf{F}} \delta\varphi \rangle}{f_0} \right] + O(\eta^2), \quad (4.108)$$

где $\omega_0 \equiv \langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi \rangle$; $f_0 \equiv \langle \varphi^+, \tilde{\mathbf{F}} \varphi \rangle$ и $\omega_0/f_0 \equiv (\delta\lambda)_*$. Как видно, члены в квадратных скобках содержат поправки порядка малости η и, таким образом, дают следующий шаг уточнения $\delta\lambda$ по сравнению с $(\delta\lambda)_*$.

В связи с особой важностью оценок реактивных эффектов при оптимизации реакторов и для безопасной эксплуатации такие прецизионные оценки могут оказаться нужными.

Используя для нахождения возмущения потока уравнение вида (4.96) и подставляя его в (4.108), приходим к явному выражению:

$$\delta\lambda = \frac{\omega_0}{f_0} [1 - \langle \Theta_{\tilde{\mathbf{W}}F}^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi \rangle] + O(\eta^2). \quad (4.109)$$

Здесь эффективная функция ценности $\Theta_{\tilde{\mathbf{W}}F}^+$ находится как решение уравнения

$$\mathbf{T}_\lambda^+ \Theta_{\tilde{\mathbf{W}}F}^+ = \mathbf{W}_\lambda^+ \varphi^+ / \omega_0 - \tilde{\mathbf{F}}^+ \varphi^+ / f_0, \quad (4.110)$$

получаемого уже известным приемом — последовательным решением серии неоднородных уравнений [см. (4.61) — (4.66)].

4.7. Теория возмущений при различных формах представления нейтронных полей

До сих пор все понятия, методы, рабочие формулы теории возмущений излагались в рамках λ -представления нейтронных полей. Однако, как было показано в разд. 1.3, часто эксперименту реально адекватны α -и S -представления, наблюдаемые в подкритических реакторах.

Теория возмущений может быть построена для этих форм описания нейтронных полей почти так же, как и для λ -представления. Приведем основные результаты теории возмущений в α - и S -представлениях, поскольку они полезны при анализе экспериментальных данных.

α -Представление. Описание нейтронных полей дается уравнениями (1.24) для асимптотического потока $\varphi_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и (2.35) для соответствующей функции ценности φ_α^+ . Их операторные эквиваленты — уравнения (3.51) и (3.53). Тогда уравнения для невозмущенного реактора имеют вид

$$(\mathbf{G} - \mathbf{F}_p) \varphi_\alpha = \frac{\alpha}{v} \varphi_\alpha; \quad (\mathbf{G}^+ - \mathbf{F}_p^+) \varphi_\alpha^+ = \frac{\alpha}{v} \varphi_\alpha^+ \quad (4.111)$$

и для возмущенного

$$(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{F}}_p) \tilde{\varphi}_\alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{v} \tilde{\varphi}_\alpha; \quad (\tilde{\mathbf{G}}^+ - \tilde{\mathbf{F}}_p^+) \tilde{\varphi}_\alpha^+ = \frac{\tilde{\alpha}}{v} \tilde{\varphi}_\alpha^+. \quad (4.112)$$

Введем обычные записи вариаций входящих величин:

$$\delta \mathbf{G} = \tilde{\mathbf{G}} - \mathbf{G}; \quad \delta \mathbf{F}_p = \tilde{\mathbf{F}}_p - \mathbf{F}_p; \quad \delta \alpha = \tilde{\alpha} - \alpha; \quad \delta \varphi = \tilde{\varphi}_\alpha - \varphi_\alpha.$$

Индексы α и $\tilde{\alpha}$ опустим, обозначив функции в прежней форме: $\varphi_\alpha \rightarrow \varphi$; $\tilde{\varphi}_\alpha \rightarrow \tilde{\varphi}$; $\varphi_\alpha^+ \rightarrow \varphi^+$; $\tilde{\varphi}_\alpha^+ \rightarrow \tilde{\varphi}^+$. Однако следует помнить, что φ и φ^+ не тождественны соответствующим аналогам λ -представления, и, например, условие ортогональности при α -представлении имеет вид

$$\left\langle \varphi_\alpha^+, \frac{1}{v} \varphi_{\alpha'} \right\rangle = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \alpha'; \\ N_\alpha, & \alpha = \alpha' \end{cases}$$

[вместо (4.18) в λ -представлении: $\langle \varphi_j^+, \mathbf{F} \varphi_i \rangle = N_i \delta_{ij}$].

Представляя (4.112) в виде

$$\left[\mathbf{G} + \delta \mathbf{G} - (\mathbf{F}_p + \delta \mathbf{F}_p) - \frac{\alpha + \delta \alpha}{v} \right] (\varphi + \delta \varphi) = 0,$$

с учетом (4.111) получаем уравнение для возмущения потока и собственного значения $\delta \alpha$:

$$\left(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{F}}_p - \frac{\tilde{\alpha}}{v} \right) \delta \varphi = -\mathbf{W} \varphi + \frac{\delta \alpha}{v} \varphi. \quad (4.113)$$

Здесь $\mathbf{W} \equiv (\delta \mathbf{G} - \delta \mathbf{F}_p)$ — новая форма оператора возмущения, не зависящая от собственного числа, в отличие от λ -представления, где $\mathbf{W}_\lambda = \delta \mathbf{G} - \lambda \delta \mathbf{F}$.

Умножим (4.113) скалярно на φ^+ — решение сопряженного уравнения невозмущенного реактора (4.111) и получим формулу для $\delta \alpha$:

$$\delta \alpha = \langle \varphi^+, \mathbf{W} \tilde{\varphi} \rangle / \left\langle \varphi^+, \frac{1}{v} \tilde{\varphi} \right\rangle = (\delta \alpha)_1 \left[1 + \frac{\langle \varphi^+, \mathbf{W} \delta \varphi \rangle}{\langle \varphi^+, \mathbf{W} \varphi \rangle} \right];$$

$$(\delta \alpha)_1 \equiv \langle \varphi^+, \mathbf{W} \varphi \rangle / \left\langle \varphi^+, \frac{1}{v} \varphi \right\rangle. \quad (4.114)$$

Оценка теории возмущений первого порядка для $(\delta \alpha)_1$ имеет погрешность первого порядка малости относительно параметра возмущения $\eta \sim \|\delta \varphi\| / \|\varphi\|$.

Считая величины $\delta \mathbf{G}$, $\delta \mathbf{F}_p$, $\delta \varphi$, $\delta \alpha$ примерно одного порядка малости, из (4.113) можем выделить аппроксимирующее уравнение для оценки $(\delta \varphi)_1$ — возмущения потока в теории первого порядка [аналог (4.30)]:

$$\left[\left(\mathbf{G} - \frac{\alpha}{v} \right) - \mathbf{F}_p \right] (\delta\varphi)_1 = -\mathbf{W}\varphi + \frac{(\delta\alpha)_1}{v} \varphi. \quad (4.115)$$

Решение его может быть получено с помощью того же алгоритма (4.62) — (4.66), поскольку матрица $(\mathbf{G} - \alpha/v)$, как и \mathbf{G} , является треугольной, и построить обратный оператор $(\mathbf{G} - \alpha/v)^{-1}$ несложно.

Используя $(\delta\varphi)_1$, уже можно получить оценку $\delta\alpha$ с погрешностью до второго порядка относительно параметра η :

$$(\delta\alpha)_{II} = [\langle \varphi^+, \mathbf{W}\varphi \rangle + \langle \varphi^+, \mathbf{W}(\delta\varphi)_1 \rangle] / \left\langle \varphi^+, \frac{1}{v} \varphi \right\rangle. \quad (4.116)$$

Аналогично построениям разд. 4.3, можно продолжить запись формул теории возмущений высших порядков и для α -представления.

Приемами, похожими на изложенные в разд. 4.6 для λ -представления, для α -представления можно получить формулы прямых методов оценки вариаций различных дробно-линейных и дробно-билинейных функционалов, отражающих изменения отдельных характеристик реакторов при возмущениях операторов функционалов и возмущениях реактора. Здесь они не приводятся, но надо сказать, что теория возмущений в α -представлении весьма перспективна [28, 89—93].

S-представление. Описание нейтронных полей дается уравнениями (1.25) для потока нейтронов φ_S и (2.37) для функции ценности φ_A^+ [своей для каждого специфического процесса, идущего с сечением $\Sigma_A(\mathbf{r}, \mathbf{v})$] или в операторной записи соответственно уравнениями (3.50) и (3.52). Для невозмущенного реактора имеем уравнения

$$(\mathbf{G} - \mathbf{F}) \varphi_S = \mathbf{S}_n; (\mathbf{G}^+ - \mathbf{F}^+) \varphi_A^+ = \Sigma_A(\mathbf{r}, \mathbf{v}); \quad (4.117)$$

для возмущенного (считая, что возмущение может коснуться и источника, например, при загрузке в реактор веществ, дающих спонтанные нейтроны деления)

$$(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{F}}) \tilde{\varphi}_S = \tilde{\mathbf{S}}_n; (\tilde{\mathbf{G}}^+ - \tilde{\mathbf{F}}^+) \tilde{\varphi}_A^+ = \tilde{\Sigma}_A(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (4.118)$$

Поскольку в этом представлении нет собственных значений, то эффект возмущения проявится в изменении числа процессов ядерных реакций какого-либо вида, в данном случае определяемых сечением $\Sigma_A(\mathbf{r}, \mathbf{v})$:

$$\delta a \equiv \langle \tilde{\Sigma}_A, \tilde{\varphi}_S \rangle - \langle \Sigma_A, \varphi_S \rangle \equiv (\delta a)_0 + (\tilde{\Sigma}_A, \delta\varphi); \quad (4.119)$$

$$(\delta a)_0 \equiv \langle (\tilde{\Sigma}_A - \Sigma_A), \varphi_S \rangle,$$

Здесь $(\delta a)_0$ — начальная оценка изменения числа процессов, полученная на невозмущенном потоке. Для ее уточнения из (4.118) и (4.117) составим уравнение для возмущения потока:

$$(\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{F}}) \delta\varphi = -\mathbf{W}\varphi_S + \delta S, \quad (4.120)$$

где оператор возмущения $\mathbf{W} = \delta\mathbf{G} - \delta\mathbf{F}$, а $\delta S \equiv \tilde{S}_n - S_n$.

Аппроксимация (4.120) уравнением (первого порядка малости по η)

$$(\mathbf{G} - \mathbf{F})(\delta\varphi)_1 = -\mathbf{W}\varphi_S + \delta S \quad (4.121)$$

дает возможность найти $(\delta\varphi)_1$ (обычным приемом типа описанного в разд. 4.4) и получить оценку $(\delta a)_1$ с точностью до второго порядка малости даже без вычисления $(\delta\varphi)_1$, так как

$$\langle \varphi_A^+, (\mathbf{G} - \mathbf{F})(\delta\varphi)_1 \rangle = \langle (\mathbf{G}^+ - \mathbf{F}^+) \varphi_A^+, (\delta\varphi)_1 \rangle = \langle \Sigma_A, (\delta\varphi)_1 \rangle. \quad (4.122)$$

Следовательно, умножая (4.121) скалярно на φ_A^+ , имеем

$$\begin{aligned} (\delta a)_1 &= (\delta a)_0 + \langle \Sigma_A, (\delta\varphi)_1 \rangle = (\delta a)_0 + \langle \varphi_A^+, \delta S \rangle - \\ &\quad - \langle \varphi_A^+, \mathbf{W}\varphi_S \rangle. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Прямые методы оценок изменения дробных функционалов для S -представления могут быть развиты аналогично λ -представлению. Так, аналогично (4.102) для дробно-линейного функционала $R = \langle \Sigma_A, \varphi \rangle / \langle \Sigma_B, \varphi \rangle$ можно построить его выражение в возмущенной системе (с новыми $\tilde{\Sigma}_A$ и $\tilde{\Sigma}_B$)

$$\tilde{R}_1 = \frac{\langle \tilde{\Sigma}_A, \varphi \rangle}{\langle \tilde{\Sigma}_B, \varphi \rangle} [1 - \langle \theta_{AB}^+, (\mathbf{W}\varphi - \delta S) \rangle] + O(\eta^2). \quad (4.124)$$

Функция ценности для функционала R удовлетворяет уравнению

$$(\mathbf{G}^+ - \mathbf{F}^+) \theta_{AB}^+ = \Sigma_A / \langle \Sigma_A, \varphi \rangle - \Sigma_B / \langle \Sigma_B, \varphi \rangle \quad (4.125)$$

(если $\delta\Sigma_A$ и $\delta\Sigma_B$ малы).

В более общем случае изменение дробно-билинейного функционала $R = \langle \varphi^+, \mathbf{A}\varphi \rangle / \langle \varphi^+, \mathbf{B}\varphi \rangle$, построенного на основе операторов \mathbf{A} и \mathbf{B} потока φ и функции ценности φ^+ , относительно некоторого процесса $S^+ : (\mathbf{G}^+ - \mathbf{F}^+) \varphi^+ = S^+$ можно получить в форме прямой оценки R_1 , точной до малых второго порядка (и не налагая условий малости на $\delta\mathbf{A}$ и $\delta\mathbf{B}$):

$$\tilde{R}_1 = \frac{a_0}{b_0} [1 - \langle \theta_{AB}^+, (\mathbf{W}\varphi - \delta S) \rangle - \langle \theta_{AB}, (\mathbf{W}^+ \varphi^+ - \delta S^+) \rangle], \quad (4.126)$$

при этом эффективные функции θ_{AB}^+ и θ_{AB} определяются из уравнений:

$$(\mathbf{G}^+ - \mathbf{F}^+) \theta_{AB}^+ = \frac{\tilde{\mathbf{A}}^+ \varphi^+}{a_0} - \frac{\tilde{\mathbf{B}}^+ \varphi^+}{b_0}; \quad (\mathbf{G} - \mathbf{F}) \theta_{AB} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}\varphi}{a_0} - \frac{\tilde{\mathbf{B}}\varphi}{b_0}; \quad (4.127)$$

$$\alpha_0 \equiv \langle \varphi^+, \tilde{\mathbf{A}}\varphi \rangle; \quad b_0 \equiv \langle \varphi^+, \tilde{\mathbf{B}}\varphi \rangle,$$

которые подробно рассматривались в разд. 4.6.

Иногда бывает необходимо использовать одновременно два различных представления нейтронного поля, устанавливая связь между их характерными параметрами. Например, для подкритического реактора можно взять α - и λ -представления, выбрав уравнения

$$(\mathbf{G} - \mathbf{F}_p) \varphi_\alpha = \frac{\alpha}{v} \varphi_\alpha; \quad (\mathbf{G}^+ - \lambda \mathbf{F}^+) \varphi_\lambda^+ = 0. \quad (4.128)$$

Напомним, что оператор $\mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_d$, где

$$\mathbf{F}_d \varphi \equiv \int \chi_d(\mathbf{v}) v \Sigma_f(\mathbf{r}, v') \varphi(\mathbf{r}, v') dv',$$

отражает вклад запаздывающих нейтронов (см. разд. 1.1 и 1.3).

Умножая скалярно первое из уравнений (4.128) на φ_λ^+ , а второе — на φ_α и вычитая одно из другого, получаем

$$(\lambda - 1) \langle \varphi_\lambda^+, \mathbf{F} \varphi_\alpha \rangle = \alpha \left\langle \varphi_\lambda^+, \frac{1}{v} \varphi_\alpha \right\rangle - \langle \varphi_\lambda^+, \mathbf{F}_d \varphi_\alpha \rangle,$$

или

$$\lambda - 1 = \alpha \Lambda_0 - \beta_0, \quad (4.129)$$

где

$$\Lambda_0 \equiv \left\langle \varphi_\lambda^+, \frac{1}{v} \varphi_\alpha \right\rangle / \langle \varphi_\lambda^+, \mathbf{F} \varphi_\alpha \rangle; \quad \beta_0 \equiv \langle \varphi_\lambda^+, \mathbf{F}_d \varphi_\alpha \rangle / \langle \varphi_\lambda^+, \mathbf{F} \varphi_\alpha \rangle \quad (4.130)$$

— соответственно среднее время генерации мгновенных нейтронов и эффективная доля запаздывающих нейтронов в реакторе.

Соотношение (4.129) позволяет связать значение декремента α , получаемое в экспериментах с импульсным источником нейтронов на подкритическом реакторе [56], со значением реактивности $(1 - k_{эф})/k_{эф} \equiv (\lambda - 1)$, определяемом в сущности только из расчетов. В частности, из (4.129) следует вывод о более высокой чувствительности α к возмущениям по сравнению с числом λ , и поэтому α может эффективно использоваться для апробирования и корректировки систем групповых констант расчета реакторов (сравнением расчетов и данных импульсных экспериментов [29]).

§ 5. КОЭФФИЦИЕНТЫ РЕАКТИВНОСТИ И АНАЛИЗ ИХ СВОЙСТВ

5.1. Понятие коэффициентов реактивности. Их разновидности

Представление о коэффициентах реактивности (КР) сложилось уже на ранних стадиях применения теории возмущений в физике ядерных реакторов. В то время интересовались

главным образом задачами оценки изменений собственных значений $\delta\lambda \equiv \delta(1/k_{\text{эф}})$, т. е. реактивностей, вызванных изменением состава материалов реактора в малой пространственной области вокруг точки \mathbf{r} [9—12, 16, 54, 55]. Поскольку такие малые возмущения дают и малые реактивности, которые наиболее удобно измерять на критическом реакторе, то предполагается, что до указанных изменений реактор был точно критическим: $\lambda = 1$.

При общем представлении возмущений макросечений (4.15), ограничиваясь малыми первого порядка и изменением концентрации нуклидов $N_i(\mathbf{r})$ только одного сорта i , возмущение макросечений можно записать в виде

$$\delta\Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \sigma^{(i)}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \delta N_i(\mathbf{r}) + N_i(\mathbf{r}) \delta\sigma^{(i)}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}). \quad (5.1)$$

При условии малости изменений $\delta N_i(\mathbf{r})$ и постоянства температуры реактора микроскопические сечения $\sigma^{(i)}$ не изменяются (см. разд. 4.2). Поэтому возмущения макросечений (4.14) примут форму:

$$\left. \begin{aligned} \delta[\chi(\mathbf{v})\nu\Sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}')] &= \chi_i(\mathbf{v})\nu\sigma_f^{(i)}(\mathbf{v}') \delta N_i(\mathbf{r}); \\ \delta[\Sigma_S(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})] &= \sigma_s^{(i)}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \delta N_i(\mathbf{r}); \\ \delta[\Sigma_i(\mathbf{r}, \mathbf{v})] &= \sigma_i^{(i)}(\mathbf{v}) \delta N_i(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Согласно общей формуле теории возмущений первого порядка (4.74) получим эффект реактивности для первоначально критического реактора:

$$\delta\lambda \equiv \frac{1 - k_{\text{эф}}}{k_{\text{эф}}} = \frac{1}{J_F} \left\{ \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \left[\sigma_i^{(i)}(\mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \int \sigma_s^{(i)}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \int \chi_i(\mathbf{v}) \nu \sigma_f^{(i)}(\mathbf{v}') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' \right] \delta N_i(\mathbf{r}) \right\}, \quad (5.3)$$

где J_F — интегральная ценность нейтронов деления (ЦНД) по (4.75), нормировочный интеграл, константа (для данного критического реактора), единая при таких малых возмущениях всех видов.

Если область, где $\delta N_i \neq 0$, ограничена объемом V_0 , который считаем малым настолько, что поток $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и ценность $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в нем практически постоянны, а изменение концентрации ядер $\delta N_i(\mathbf{r})$ выражено через полное изменение числа ядер δN_i в объеме V_0 :

$$\delta N_i \equiv \int_{V_0} \delta N_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (5.4)$$

то получим соотношение

$$\delta\lambda \equiv \frac{1 - k_{\text{эф}}}{k_{\text{эф}}} = -\frac{1}{J_F} \left\{ \int d\mathbf{v} \varphi^+(\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{v}) \left[\chi_i(\mathbf{v}) \int \nu \sigma_f^{(i)}(\mathbf{v}') \varphi(\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' + \int \sigma_s^{(i)}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \sigma_i^{(i)}(\mathbf{v}) \varphi(\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{v}) \right] \right\} \delta N_i. \quad (5.5)$$

Здесь под $\bar{\mathbf{r}}$ понимается некоторое среднее значение координаты \mathbf{r} в пределах объема V_0 , возникающее при выносе из-под интеграла (по пространству) произведений потоков и ценностей. (В квадратных скобках также изменены знаки членов, что имеет, как увидим, практические удобства.)

Средним коэффициентом реактивности i -го нуклида для области V_0 называется предел отношения

$$k_i(\bar{\mathbf{r}})_{V_0} = -\lim_{\delta N_i \rightarrow 0} \left(\frac{\delta \lambda}{\delta N_i} \right) \equiv \lim_{\delta N_i \rightarrow 0} \left(\frac{\delta k_{\text{эф}}}{k_{\text{эф}} \delta N_i} \right). \quad (5.6)$$

В эксперименте обычно такая величина находится путем измерения реактивностей от возмущающего образца фиксированных размеров при различных содержаниях изучаемого нуклида и экстраполяцией данных к нулевому его содержанию.

Коэффициентом реактивности $k_i(\mathbf{r})$ i -го нуклида в точке \mathbf{r} называют предельное значение среднего КР $k_i(\bar{\mathbf{r}})_{V_0}$. [см. (5.6)] при стягивании до нуля объема V_0 вокруг точки \mathbf{r} : $k_i(\mathbf{r}) = \lim_{V_0 \rightarrow 0} k_i(\bar{\mathbf{r}})_{V_0}$. Из (5.5) и (5.6) можно явно выразить k_i через φ , φ^+ и сечения:

$$k_i(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{J_F} \left\{ \int d\mathbf{v} \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \left[\chi(\mathbf{v}) \int \mathbf{v} \sigma_f^{(i)}(v') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' + \right. \right. \\ \left. \left. + \int \sigma_s^{(i)}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \sigma_i^{(i)}(v) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \right] \right\}. \quad (5.7)$$

Такой «атомный» КР [16], или «КР на одно ядро» [46], характеризует *реактивный вклад нуклида* при внесении его ($\delta N_i > 0$) в точку \mathbf{r} реактора: положительный при $k_i(\mathbf{r}) > 0$ и отрицательный при $k_i(\mathbf{r}) < 0$, как это видно из (5.6) [что и стимулировало изменение знака в (5.5)]*.

Такой «атомный» (или «ядерный») КР $k_i(\mathbf{r})$ на практике приводится в форму «массового» КР, т. е. выражается в изменениях реактивности критического реактора при внесении в него 1 г (или 1 г-атома) данного нуклида. Выражая изменения реактивности в сотых долях $\beta_{\text{эф}}$ (центах), получаем соотношение пересчета:

$$k_i \left[\frac{\text{цент}}{\text{ядро}} \right] \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = k_i \left[\frac{\text{цент}}{\text{г-атом}} \right] = k_i \left[\frac{\text{цент}}{\text{г}} \right] \cdot A_i, \quad (5.8)$$

где A_i — атомная масса нуклида; $6,02 \cdot 10^{23}$ — число Авогадро. В эксперименте $k_i(\mathbf{r})$ находится из результатов измерений $k_i(\bar{\mathbf{r}})_{V_0}$.

* В некоторых работах [20, 104] коэффициент реактивности называют «функцией эффективности» $f_i(\mathbf{r})$ и определяют ее через функциональную производную: $\delta^2 \lambda / \delta N_i \delta V$.

для образцов разных размеров V_0 экстраполяцией данных к образцу нулевого размера.

КР отдельного нуклида, как он определен выше, является тем элементарным «кирпичиком», с помощью которого можно строить анализ более сложных реактивных эффектов (в теории малых возмущений) удобным и компактным образом. Например, для определения эффекта реактивности при изменении плотностей $\delta N_k(\mathbf{r})$ ряда нуклидов, принимая в рамках теории малых возмущений аддитивность эффектов, имеем

$$-\delta\lambda \equiv \frac{k_{эф}-1}{k_{эф}} = \frac{1}{J_F} \int \left[\sum_k k_k(\mathbf{r}) \delta N_k(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r}. \quad (5.9)$$

В частности, таким путем можно ввести полезное понятие собственного коэффициента реактивности материала реактора (СКР) $k(\mathbf{r})$ — усредненного значения КР по всем компонентам реактора, образующим его состав в точке \mathbf{r} :

$$k(\mathbf{r}) \equiv \sum_j k_j(\mathbf{r}) N_j(\mathbf{r}) / \sum_j N_j(\mathbf{r}). \quad (5.10)$$

Практически более удобен СКР, отнесенный к единице объема:

$$K(\mathbf{r}) \left[\frac{\text{цент}}{\text{см}^3} \right] = k(\mathbf{r}) \left[\frac{\text{цент}}{\text{ядро}} \right] \cdot N(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r}) \left[\frac{\text{цент}}{\text{г}} \right] \cdot \gamma(\mathbf{r}), \quad (5.11)$$

где $\gamma(\mathbf{r})$ — плотность материала реактора в точке \mathbf{r} ; $N(\mathbf{r}) \equiv \sum_j N_j(\mathbf{r})$.

Экспериментально такие «объемные» СКР обычно [10, 17, 108] находят из измерений реактивностей при уменьшении ($\delta\gamma < 0$) плотности вещества реактора с сохранением соотношения компонент (или полного изъятия композиции) в малом объеме V_0 первоначально критического реактора:

$$K(\bar{\mathbf{r}})_{V_0} = -\gamma(\bar{\mathbf{r}}) \lim_{\delta\gamma \rightarrow 0} \frac{\delta\lambda}{V_0 \delta\gamma}. \quad (5.12)$$

Весьма полезен центральный коэффициент реактивности (ЦКР) — КР в центре зоны реактора, где пространственный градиент потока нейтронов и функции ценности равен нулю (или очень мал). Для интерпретации значений ЦКР сначала запишем выражение общего КР в рамках диффузионного приближения, исходя из формулы (4.77):

$$k_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{J_F} \int d\nu [\Phi_f^+(\mathbf{r}) \nu \sigma_f^{(i)}(\nu) \Phi(\mathbf{r}, \nu) + \delta\Phi_s^+(\mathbf{r}, \nu) \sigma_s^{(i)}(\nu) \Phi(\mathbf{r}, \nu) - \Phi^+(\mathbf{r}, \nu) \sigma_a^{(i)}(\nu) \Phi(\mathbf{r}, \nu) + 3\sigma_{tr}^{(i)}(\nu) D^2(\mathbf{r}, \nu) \nabla\Phi^+ \nabla\Phi]. \quad (5.13)$$

Здесь $J_F \equiv \int dr \int dv \Phi_f^+(\mathbf{r}) v \Sigma_f(\mathbf{r}, v) \Phi(\mathbf{r}, v)$ — нормировочный интеграл (ЦНД); $\Phi_f^+(\mathbf{r}) \equiv \int \chi(v) \Phi^+(\mathbf{r}, v) dv$ — ценность нейтронов спектра деления, а $\delta\Phi_s^+$ — сокращенная запись изменения ценности нейтронов в процессах рассеяния: $\delta\Phi_s^+(\mathbf{r}, v) \sigma_s^{(i)}(v) \equiv \left[\int \sigma_s^{(i)}(v \rightarrow v') \Phi^+(\mathbf{r}, v') dv' - \Phi^+(\mathbf{r}, v) \sigma_s^{(i)}(v) \right]$.

Для точки в центре реактора ($\mathbf{r} = 0$) при исчезновении члена с градиентами из (5.13) получаем ЦКР для i -го нуклида:

$$k_i(0) = \frac{1}{J_F} \int dv [\Phi_f^+ v \sigma_f^{(i)}(v) \Phi(v) + \delta\Phi_s^+ \sigma_s^{(i)}(v) \Phi(v) - \Phi^+(v) \sigma_a^{(i)}(v) \Phi(v)]. \quad (5.14)$$

В частности, *собственный* ЦКР материала активной зоны равен

$$k(0) = \frac{1}{J_F} \int dv [\Phi_f^+ v \sigma_f(v) \Phi(v) + \delta\Phi_s^+ \sigma_s(v) \Phi(v) - \Phi^+(v) \sigma_a(v) \Phi(v)] \quad (5.15)$$

(здесь сечения указаны без индексов, поскольку, согласно (5.10), $\sigma = \sum_i \sigma^{(i)} N_i / \sum_i N_i$, т. е. отображают макроскопические сечения активной зоны, приведенные на одно ядро общей плотности всех нуклидов состава зоны).

Отдельную важную группу составляют температурные коэффициенты реактивности (ТКР), однако их рассмотрение не входит в рамки данной книги.

5.2. Общие свойства коэффициентов реактивности. Их физическая интерпретация

Общий смысл, заложенный в определении КР (5.7), состоит в том, что КР отражает (в некоторой числовой мере) влияние на реактивность критического реактора одного атома i -го нуклида, помещенного в точку \mathbf{r} . Ядро этого атома под действием потока нейтронов $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ становится новым источником, репродуцирующим и поглощающим нейтроны с соответствующими для этой точки ценностями $\varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Таким образом, $k_i(\mathbf{r})$ становится функционалом потока φ и ценности φ^+ , т. е. отражает собственные характеристики нейтронного поля реактора. Как правило, почти для всех реакторов экспериментально определяются ЦКР материалов, образующих композицию его активной зоны (и еще некоторых характерных элементов, имеющих четко выраженную энергетическую зависимость сечений, например ^{10}B , Cd , ^{197}Au и др.)

Удобство использования КР для анализа нейтронно-физических характеристик реакторов состоит в том, что $k_i(\mathbf{r})$ представляют собой *интегральные* (в отношении энергетических и угловых зависимостей φ и φ^+) *параметры*, дающие непосредственно реактивностные эффекты разных веществ в реакторе и их пространственные зависи-

мости. Это крайне удобно при изучении различных аспектов кинетики, динамики, температурных и мощностных эффектов реактивности, проектно-технологической и эксплуатационной оптимизации структуры реактора и т. п.

Кроме того, практическое определение КР, которое сводится по существу к измерениям реактивности от малых образцов разных веществ, помещаемых в реактор, может быть сделано достаточно быстро, точно и гораздо менее трудоемко, чем измерения нейтронных спектров и функций ценности.

В свете сказанного целесообразно рассмотреть общее поведение функций КР, СКР, значений ЦКР для характерных веществ в типичных примерах реакторов. Для наглядности рассмотрим высокообогащенные сферические реакторы на быстрых нейтронах системы «Годива» и «Топси», для которых экспериментальные данные по КР допускают простую одnogрупповую интерпретацию [9, 17].

Выражение для $k_i(\mathbf{r})$ на основе (5.7) и (4.76) в представлении односкоростного кинетического уравнения переноса имеет вид (при изотропном рассеянии)

$$k_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{J_F} \left[(\nu\sigma_f^{(i)} + \sigma_s^{(i)}) \Phi^2(\mathbf{r}) - 4\pi\sigma_t^{(i)} \int \varphi(\mathbf{r}, \Omega) \varphi(\mathbf{r}, -\Omega) d\Omega \right], \quad (5.16)$$

а в одnogрупповом диффузионном приближении на основе (4.79)

$$k_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{J_F} [(\nu\sigma_f^{(i)} - \sigma_a^{(i)}) \Phi^2(\mathbf{r}) + 3\sigma_{tr} D^2 (\nabla\Phi)^2]. \quad (5.17)$$

На рис. 7 представлены распределения по радиусу нейтронного одnogруппового потока и КР ряда нуклидов для голого сферического гомогенного реактора «Годива» (на основе металлического урана 90%-ного обогащения) и для реактора «Топси» с таким же материалом активной зоны и толстым отражателем из естественного урана.

Общий характер пространственного поведения функции $k_i(\mathbf{r})$ легко интерпретируется на основе схемы поведения потока нейтронов (см. рис. 7, а) и выражения КР в одnogрупповом приближении (5.17). В центре реакторов, где градиент потока равен нулю, значения КР определяются в основном процессами деления и поглощения нейтронов ядром данного нуклида. Для делящихся веществ ^{239}Pu и ^{235}U $\nu\sigma_f > \sigma_a$ и их ЦКР имеет положительное значение; то же наблюдается и для ^{238}U в условиях жесткого спектра таких реакторов, но пороговый характер его сечения деления приводит к значительно меньшему значению ЦКР.

В случае неделящихся веществ (Bi, Fe, C, B) их значения ЦКР определяет величина σ_a , дающая отрицательное значение $k_i(0)$ для B, близкое к нулю для Fe (что естественно для жесткого спектра таких реакторов) и слабopоложительное для C. Последнее не объяснимо в односкоростной трактовке, но вполне может быть понято из более общей формы представления ЦКР (5.14): рассеяние на ядрах C изменяет энергию нейтронов, приводя к возрастанию их ценности,

$\delta\Phi_s^+ > 0$. Еще более заметен такой эффект при рассеянии на ядрах H, способных существенно изменить энергию нейтронов.

С продвижением по радиусу от центра к периферии поток нейтронов падает (см. рис. 7, а) и перечисленные эффекты, определяю-

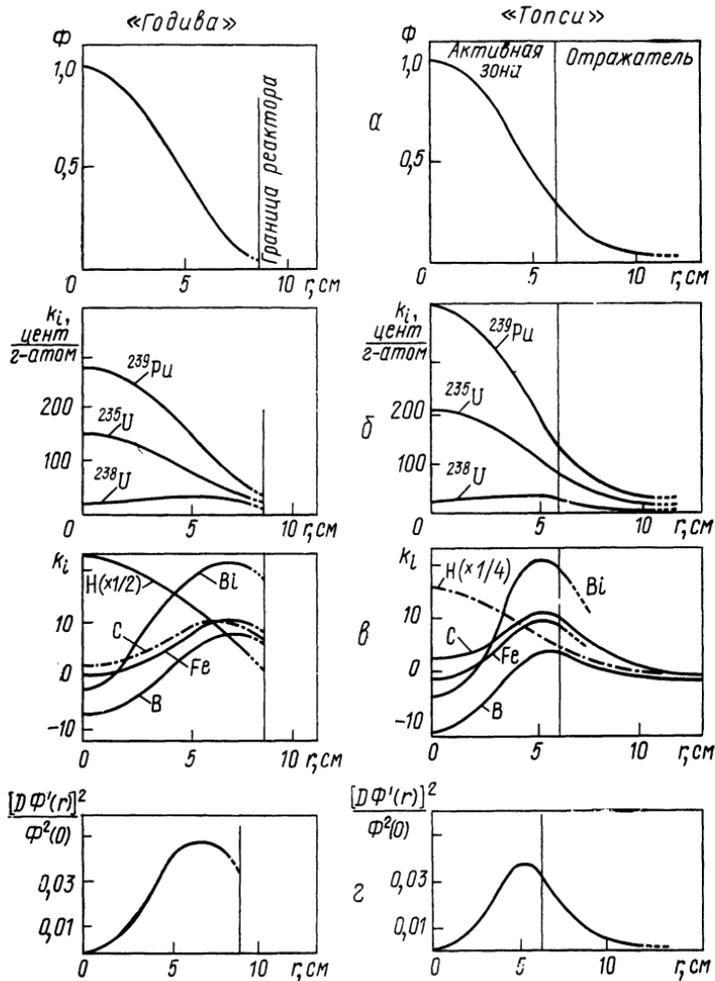


Рис. 7. Пространственные зависимости потоков нейтронов и КР в сферических реакторах — голый сфере «Годива» и в сфере с толстым отражателем «Топси»:

a — одногрупповой нейтронный поток; b — КР для делящихся нуклидов; δ — КР для неделящихся веществ; ε — относительный вклад компоненты тока нейтронов (по данным экспериментов [9, 17])

щие значения КР, ослабевают. Вместе с тем возрастает градиент потока нейтронов и в значениях КР начинает проявляться роль второго члена в (5.17), отражающего рассеивающие свойства ядер

данного нуклида. Так как относительный вес градиентного члена сравнительно невелик (см. рис. 7, з), то вклад в $k_i(r)$ эффекта рассеяния ощутим лишь у тех нуклидов, для которых мало значение $(\nu\sigma_f - \sigma_a)$, т. е. у таких элементов, как Fe, В, С и т. п. Их КР возрастают к периферии активной зоны соответственно увеличению градиента потока, и если ЦКР отрицателен, то положительный эффект от рассеяния может привести к перемене знака КР на обратный (см. рис. 7, в).

Вообще же к наружной границе реактора значения всех КР убывают, но все они положительные на границе, а обращаются в нуль только на бесконечности!

Все функции $k_i(r)$ не прерывны по пространству в силу непрерывности потоков Φ и токов нейтронов $D\nabla\Phi$, сшиваемых, как известно, в диффузионной теории на всех границах отдельных зон. (Поскольку $\sigma^{(i)}$ не зависят от координат, а ϕ и ϕ^+ входят в КР проинтегрированными по ν , т. е. и по всему телесному углу Ω , то такой же вывод справедлив и в общей кинетической теории переноса.)

Несколько иным является поведение СКР, определенных, согласно (5.10), как функции, зависящие не только от потоков и ценностей, но и от состава реактора в каждой данной точке. Как следует из (5.11), СКР в выражении на единицу объема вообще определяется через *макроскопические* сечения материала реактора в данной точке:

$$K(r) = \frac{1}{J_F} \left\{ \int dv \phi^+(r, \nu) \left[\chi(\nu) \int \nu \Sigma_f(r, \nu') \phi(r, \nu') dv' + \int \Sigma_s(r, \nu' \rightarrow \nu) \phi(r, \nu') dv' - \Sigma_t(r, \nu) \phi(r, \nu) \right] \right\}, \quad (5.18)$$

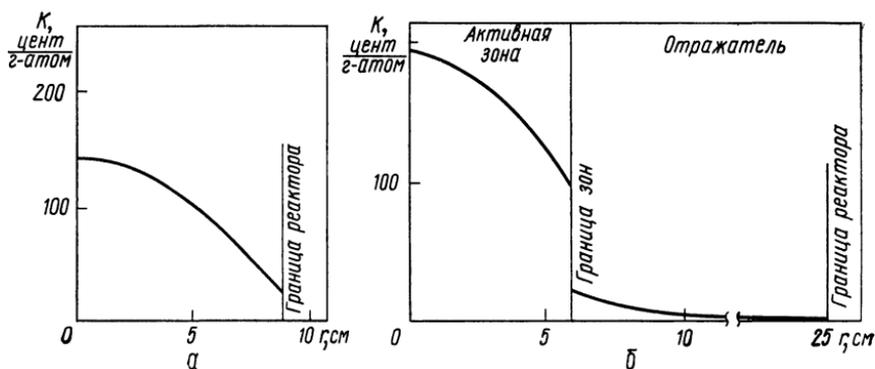


Рис. 8. Пространственная зависимость СКР для сферических реакторов «Годива» (а) и «Топси» (б)

Естественно, на границах однородных зон реактора значения СКР будут в общем случае испытывать скачки (рис. 8), а вне реактора обращаться в нуль.

5.3. Интегралы реактивности и их свойства

В целом ряде конкретных задач представляет интерес оценка реактивных эффектов при изменении состава реактора не в отдельных точках, а при равномерном изменении по целой области, зоне реактора и даже всему его объему (например, изменение обогащения в активной зоне, соотношений горючего и замедлителя, и изменение плотности или состава теплоносителя). Для этих целей полезны и интегральные коэффициенты реактивности, усредненные по зоне или по всему объему реактора [55]. Такие величины для краткости назовем интегралами реактивности [96, 97]*. Определения их строятся на понятиях КР, данных в предыдущих разделах этого параграфа.

Так, интегралом реактивности i -го нуклида для области V_k реактора назовем величину

$$I_i^{(k)} \equiv \int_{V_k} k_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (5.19)$$

где $k_i(\mathbf{r})$ в общем случае определено по (5.7).

Парциальным интегралом реактивности вещества Z в области V_k назовем величину

$$J_Z^{(k)} \equiv \int_{V_k} \left[\sum_i k_i(\mathbf{r}) N_i(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r}. \quad (5.20)$$

Здесь суммирование ведется по всем нуклидам i , входящим в вещество Z . [Для интегралов реактивности, включающих плотности ядер N_i , используем обозначение буквой J , в отличие от не зависящих от ядерных концентраций интегралов типа (5.19), обозначаемых I .]

Интегралом реактивности (без дальнейших пояснений) назовем интеграл от СКР материалов реактора [см. (5.11) или в явной форме (5.18)] по всему объему реактора:

$$J \equiv \int K(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \equiv \frac{1}{J_F} \left\{ J_F + \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \times \right. \\ \left. \times \left[\int \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \Sigma_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \right] \right\}. \quad (5.21)$$

Заметим, что первый член в (5.18) дает в составе J нормировочный интеграл (ЦНД) J_F общей теории возмущений, как он был введен в разд. 4.5. (При необходимости сужения области интегрирования это будет оговариваться специально.)

Отдельные виды интегралов реактивности, аналогичные представленным выше, уже давно использовались в ряде работ [10 —

* В работах [12, 55] их называют «средними КР», в [13, 20, 104] — «показателями эффективности», в [46, 108] — «полным статвесом» и т. п.

13, 16, 17, 20, 43, 46 и др.] при анализе различных реакторных задач методами теории возмущений. При этом были выяснены некоторые интересные и полезные общие свойства таких интегралов.

Построим СКР в рамках диффузионного приближения [по общим определениям (5.11) и (5.13)], т. е.

$$K_{\text{диф}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{J_F} \int dv [\Phi_f^+(\mathbf{r}) \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, v) \Phi(\mathbf{r}, v) + \delta \Phi_s^+(\mathbf{r}, v) \Sigma_s(\mathbf{r}, v) \times \\ \times \Phi(\mathbf{r}, v) - \Phi^+(\mathbf{r}, v) \Sigma_a(\mathbf{r}, v) \Phi(\mathbf{r}, v) + D(\mathbf{r}, v) \nabla \Phi \nabla \Phi^+]. \quad (5.22)$$

Интеграл реактивности в смысле определения (5.21) записывается в виде суммы двух равных слагаемых [55]:

$$J_{\text{диф}} = \frac{1}{J_F} \left\{ \int T(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int U(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right\} = \frac{2}{J_F} \int T(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\ = \frac{2}{J_F} \int U(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (5.23)$$

Здесь $T(\mathbf{r})$ и $U(\mathbf{r})$ в явном виде выражаются как:

$$\left. \begin{aligned} T(\mathbf{r}) &\equiv \int D \nabla \Phi \nabla \Phi^+ dv; \\ U(\mathbf{r}) &\equiv \int [\Phi_f^+ \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, v) \Phi + \delta \Phi_s^+ \Sigma_s(\mathbf{r}, v) \Phi - \Phi^+ \Sigma_a(\mathbf{r}, v) \Phi] dv. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Равенство интегралов по объему всего реактора (до экстраполированной наружной границы!) от таких величин нетрудно показать, применяя теорему Грина для интегралов от градиентов и используя уравнения (1.20) и (2.23): $\int T(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = - \int \Phi^+ \nabla (D \nabla \Phi) d\mathbf{r} + \int_{S_{\text{экстр}}} \Phi^+ D \nabla \Phi dS$, но $\Phi^+ \Big|_{S_{\text{экстр}}} = 0$.

На основе (5.23) А. И. Могильнер [46] сформулировал теорему, связывающую интеграл реактивности (называемый им «полным статвесом материалов реактора») с паллиативом k_∞ — величиной k^+ — как некоторым новым общим параметром свойств реактора:

$$J_{\text{диф}} = 2(1 - 1/k^+), \quad (5.25)$$

где $k^+ \equiv J_F / \int d\mathbf{r} \int dv (\Phi^+ \Sigma_a \Phi - \delta \Phi_s^+ \Sigma_s \Phi)$.

В работах [10, 12, 13, 20, 55, 108] показаны возможности применения величин J , I_i , J_F и их комбинаций для анализа температурного эффекта реактивности, зависимости критической загрузки от критического объема реакторов, разбавлений активной зоны, сравнения эффективностей отражателей и т. д. Эти успешные отдельные результаты стимулировали также поиск общих принципов, отражающих свойства интегралов реактивности.

Так, в рамках многогруппового диффузионного описания интегралы от функций $T(\mathbf{r})$ и $U(\mathbf{r})$ по объему реактора [см. (5.24)] были рассмотрены соответственно как «кинетическая» и «потенциальная»

энергии [109, 111], а интеграл реактивности (5.23) — как гамма-функция — вытекающим отсюда (аналогично классической механике) принципом наименьшего действия:

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta \int [T(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r})] d\mathbf{r} = 0. \quad (5.26)$$

Здесь $\mathcal{L}(\mathbf{r}) \equiv T(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = \mathcal{L}[\Phi, \Phi^+, \nabla\Phi, \nabla\Phi^+]$ играет роль плотности лагранжиана нейтронного поля в реакторе, функции обобщенных координат Φ, Φ^+ и их производных $\nabla\Phi$ и $\nabla\Phi^+$. (Переменной интегрирования в классической механике — времени — здесь соответствует координата \mathbf{r} .)

Для кинетического уравнения переноса нейтронов аналогичный вариационный принцип экстремальности действия развивался, начиная с работы В. С. Владимирова [41] в односкоростной теории. Однако для реактора произвольной геометрии он выразился в очень громоздкой математической конструкции [113] и практически вариационный метод* остался в рамках диффузионной теории [70, 112]. Не преследуя глубоких аналогий с классической механикой, все же можно сформулировать вполне общий вариационный принцип, правомерный для нейтронного поля, описываемого кинетическим уравнением с энергетической зависимостью в случае произвольного реактора с невогнутой внешней границей и обычными граничными условиями (2.4) и (2.16).

Для реактора произвольной критичности в α -представлении вариационный принцип выражается условием

$$\delta \left\{ \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \left[\hat{\Sigma}_p + \mathbf{r}(\nabla \hat{\Sigma}_p) + \frac{\alpha}{v} \right] \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \right\} = 0, \quad (5.27)$$

где $\hat{\Sigma}_p$ и $\mathbf{r}(\nabla \hat{\Sigma}_p)$ — операторы, имеющие следующий явный вид:

$$\hat{\Sigma}_p \varphi \equiv \chi_p(\mathbf{v}) \int \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}); \quad (5.28)$$

$$\mathbf{r}(\nabla \hat{\Sigma}_p) \varphi \equiv \chi_p(\mathbf{v}) \int \{\mathbf{r} \nabla [\nu \Sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}')]\} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' + \int \{\mathbf{r} \nabla [\Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})]\} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \{\mathbf{r} \nabla [\Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v})]\} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (5.29)$$

(Варьирование интеграла (5.27) не ограничено вариациями входящих под знак интеграла функций, но допускает вариацию границ области пространственного интегрирования при условии сохранения их невогнутости.)

Для других форм представления нейтронного поля, например для λ -представления, достаточно положить $\alpha = 0$ и, заменив $\chi_p(\mathbf{v})$ на $\chi(\mathbf{v})$, ввести собственное число λ перед членами с $\nu \Sigma_f$; само значение λ , так же как и α , может испытывать вариации.

* Как показали работы [114, 118] и «дискуссия» [115—110], вариационный подход эквивалентен прямым методам теории возмущений (см. разд. 4.6).

Общее выражение такого инвариантного интегрального функционала для реактора произвольной структуры и состояния относительно критичности (5.27) получил автор [95, 96] как развитие теоремы об интеграле реактивности критического реактора [49, 59]. Более наглядная интерпретация последней была дана в работе В. В. Орлова и Э. А. Стумбура [97].

Как видно из (5.27) и (5.28), первый член в квадратных скобках при интегрировании дает числитель интеграла реактивности (5.21). Поэтому выяснить смысл вариационного соотношения (5.27) и объяснить его можно, рассмотрев некоторые свойства интегралов реактивности, общие для любых реакторов с невогнутой внешней границей и условиями на ней для потока (2.4) и ценности (2.16). При этом рассмотрении будем пользоваться «ненормированными» СКР материала реактора, т. е. (5.18) без множителя $1/J_F$ — постоянного числа, общего для всех КР в данном реакторе:

$$K(\mathbf{r}) \equiv \int d\mathbf{v} \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) [\chi(\mathbf{v}) \int \mathbf{v} \Sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' - \Sigma_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})]. \quad (5.30)$$

Ограничимся для начала точно критическими реакторами, нейтронное поле которых в компактной записи удовлетворяет уравнениям

$$\Omega \nabla \varphi = \hat{\Sigma} \varphi; \quad -\Omega \nabla \varphi^+ = \hat{\Sigma}^+ \varphi^+, \quad (5.31)$$

[где оператор $\hat{\Sigma}$ отличен от $\hat{\Sigma}_p$ в (5.28) только заменой $\chi_p(\mathbf{v})$ на $\chi(\mathbf{v})$], полностью эквивалентным обычным формам (1.15) и (2.19). Тогда СКР (5.30) можно записать в любой из эквивалентных форм:

$$K(\mathbf{r}) \equiv \int d\mathbf{v} (\varphi^+ \hat{\Sigma} \varphi) = \int d\mathbf{v} (\varphi^+ \Omega \nabla \varphi) = \int d\mathbf{v} (\varphi \hat{\Sigma}^+ \varphi^+) = - \int d\mathbf{v} (\varphi \Omega \nabla \varphi^+), \quad (5.32)$$

а интеграл реактивности (5.21) — тоже в «ненормированном» виде:

$$J \equiv \int K(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} (\varphi^+ \hat{\Sigma} \varphi) = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} (\varphi^+ \Omega \nabla \varphi) = \dots \text{ и т. д.} \quad (5.33)$$

Первые два явных выражения интеграла реактивности для критического реактора отражают очевидное соотношение между генерацией ценности во всем объеме реактора и утечкой избытка ценности из него:

$$\int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} (\varphi^+ \hat{\Sigma} \varphi) = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v} (\varphi^+ \Omega \nabla \varphi). \quad (5.34)$$

Наиболее простой формой изменений $\hat{\Sigma}$, сохраняющих критичность, является преобразование подобия [22] — изменение всех размеров реактора в $1/m$ раз при одновременном изменении всех плотностей в m раз, т. е. условие преобразования координат и сечений вида

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/m; \quad \tilde{\Sigma}(\tilde{\mathbf{r}}) = m\Sigma(\mathbf{r}) \quad \text{или} \quad \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\Sigma} = \mathbf{r} \hat{\Sigma}. \quad (5.35)$$

Это преобразование сохраняет инвариантным уравнение переноса нейтронов в его общем виде кинетического уравнения Больцмана [153 — 155]. Произведем бесконечно малое преобразование системы: $m = 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$. Его можно описать как возмущение реактора вида $\delta \Sigma = \hat{\Sigma}(\mathbf{r}) - \Sigma(\mathbf{r})$, причем

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(\mathbf{r}) &= m \Sigma(\mathbf{r} \cdot m) = (1 + \varepsilon) \Sigma(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{r}) = \\ &= \Sigma(\mathbf{r}) + \varepsilon \Sigma(\mathbf{r}) + \varepsilon \mathbf{r} \nabla \Sigma + \dots \end{aligned} \quad (5.36)$$

Но так как при этом возмущении реактор остается критическим, то по теории малых возмущений следует общий результат:

$$\delta \lambda = \frac{1}{J_F} \int d\mathbf{r} \int dv (\varphi^+ \delta \hat{\Sigma} \varphi) = 0;$$

$$\left| \int d\mathbf{r} \int dv \varphi^+ [\hat{\Sigma} + (\mathbf{r} \nabla \hat{\Sigma})] \varphi \equiv 0 \right| \quad (k_{\infty \varphi} = 1). \quad (5.37)$$

Этот вывод [96, 97] можно получить и в общем анализе кинетического уравнения, не привлекая теорию возмущений, но его доказательство оказывается более сложным [49, 59].

Таким образом, интеграл реактивности (5.33) для критического реактора можно записать еще в форме

$$J \equiv \int d\mathbf{r} \int dv \varphi^+ \hat{\Sigma} \varphi = - \int d\mathbf{r} \int dv \varphi^+ (\mathbf{r} \nabla \hat{\Sigma}) \varphi, \quad (5.38)$$

которая показывает, что утечка ценности [см. (5.34)] может быть выражена через потоки, ценности и *градиенты сечений* среды реактора.

Для реактора, состоящего из совокупности однородных зон с постоянными макроскопическими сечениями, преобразование приведенного вида сводится к смещению границ зон на расстояния $\delta \mathbf{r}_s = -\varepsilon \mathbf{r}_s$ и замене сечений Σ_{int} в одной среде на сечения Σ_{ext} смежной среды в объеме $dV = |\mathbf{n} d\mathbf{r}_s| dS = \varepsilon |\mathbf{n} \mathbf{r}_s| dS$ (рис. 9). Тогда аналогичным путем приходим к выражению для интеграла реактивности:

$$J \equiv \int d\mathbf{r} \int dv \varphi^+ \hat{\Sigma} \varphi = \sum_j \int_{S_j} (\mathbf{r} \mathbf{n}_s) dS \int dv \varphi^+ (\hat{\Sigma}_{\text{int}} - \hat{\Sigma}_{\text{ext}}) \varphi, \quad (5.39)$$

где суммирование должно проводиться по всем границам S_j раздела сред, включая наружную поверхность реактора. Это означает, что интеграл реактивности выражается через скачки СКР на границах однородных зон реактора (см. рис. 8):

$$\int K(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \sum_j \int_{S_j} (\mathbf{r} \mathbf{n}) [K_{\text{int}} - K_{\text{ext}}] dS. \quad (5.40)$$

Образно говоря, как бы «потенциальная энергия» ценности нейтронов, накопленная в объемах зон, реализуется в «кинетической энергии» утечки ценности в форме «водопадов» на границах этих зон.

Инвариантность соотношения (5.37) для любого критического реактора ведет к вариационному условию (5.27) (обобщенному и на некритические системы).

Могут быть сконструированы различные формы вариационных соотношений, связывающих макроскопические сечения и характе-

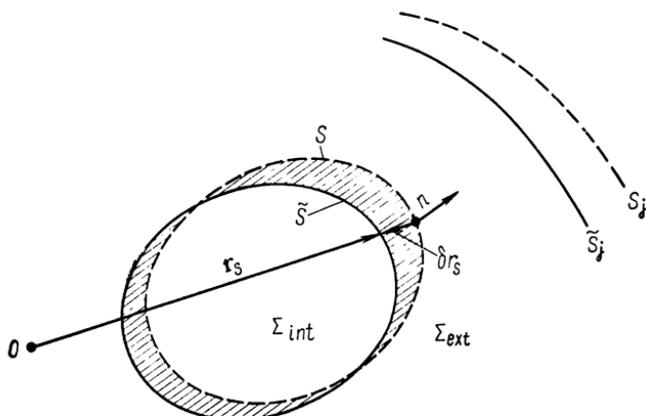


Рис. 9. Смещение однородных зон реактора при бесконечно малом сжатии

ристики нейтронного поля в разных аппроксимациях кинетического уравнения [70, 109 — 114, 118].

Вариационное соотношение, следующее из тождества (5.37) для всякого критического реактора, т. е.

$$\delta \left\{ \int dr \int dv \varphi^+ [\hat{\Sigma} + (r\nabla\hat{\Sigma})] \varphi \right\} = 0 \text{ при } k_{\text{эф}} = 1, \quad (5.41)$$

имеет следующие преимущества.

Во-первых, оно основано на точном кинетическом уравнении переноса нейтронов, во-вторых, в него входят только сами потоки φ и ценности φ^+ , но не их градиенты, которые всегда определяются значительно менее точно; в-третьих, вариационное соотношение (5.41) не требует неизменности наружной границы реактора (обычное требование теории возмущений).

Пусть один критический реактор занимает объем V_1 и характеризуется оператором сечений $\hat{\Sigma}$ и потоками φ и ценностями φ^+ , а возмущенный с характеристиками $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}^+$ занимает объем V_2 и оба они имеют общую часть объемом V_0 (считаем, что критичность при возмущении сохранилась). Тогда из (5.41) следует:

$$\begin{aligned} & \int_{V_2 - V_0} dr \int dv \tilde{\varphi}^+ [\tilde{\Sigma} + (r\nabla\tilde{\Sigma})] \tilde{\varphi} - \int_{V_1 - V_0} dr \int dv \varphi^+ [\hat{\Sigma} + (r\nabla\hat{\Sigma})] \varphi + \\ & + \int_{V_0} dr \int dv \{ \varphi^+ \delta [\hat{\Sigma} + (r\nabla\hat{\Sigma})] \varphi + \delta \varphi^+ [\tilde{\Sigma} + (r\nabla\tilde{\Sigma})] \varphi + \varphi^+ [\tilde{\Sigma} + \\ & + (r\nabla\tilde{\Sigma})] \delta \varphi \} = 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

— вполне точное соотношение. Применение его для некоторых задач (теории возмущений с изменением границ реактора) дано далее.

5.4. Применение интегралов реактивности при решении отдельных задач прогноза критических параметров

Математически более корректная трактовка свойств интеграла реактивности (базирующаяся на понятии обобщенных функций — распределений Соболева — Шварца [101 — 103]) сохраняет полученные выше результаты, если понятие градиентов макроскопических сечений толковать в расширенном смысле, включая наряду с обычными производными также скачки на границах S_j отдельных однородных сред:

$$(\nabla\Sigma) = \{\nabla\Sigma\} + \mathbf{n}_e [\Sigma_{\text{ext}}(\mathbf{r}_{S_j}) - \Sigma_{\text{int}}(\mathbf{r}_{S_j})] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{S_j}), \quad (5.43)$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{S_j})$ — дельта-функция Дирака, а $\{\nabla\Sigma\}$ — обычный градиент. Тогда для реакторов, состоящих из совокупности однородных сред, в каждой из которых макроскопические сечения не зависят от координат (случай критических сборок или энергетических реакторов в начале кампании), все градиенты сечений вырождаются только в скачки на границах однородных зон (включая наружную границу реактора) [49, 95]. В результате интеграл реактивности выразится через скачки СКР материалов реактора на границах всех таких зон:

$$J \equiv \int K(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \sum_j \oint_{S_j} (\mathbf{r}\mathbf{n}_e) [K_{\text{int}}(\mathbf{r}) - K_{\text{ext}}(\mathbf{r})] dS. \quad (5.44)$$

(Напомним еще раз, что сюда обязательно должен входить скачок СКР на наружной границе реактора.) Например, для голого сферического реактора с однородным составом общая формула (5.44) выразится соотношением

$$J \equiv 4\pi \int_0^R K(r) r^2 dr = 4\pi K(R) R^3, \quad (5.45)$$

т. е. очевидно, что СКР материала реактора на границе зоны равен $1/3$ его среднего значения по зоне.

Для сферического реактора с отражателем интеграл реактивности выражается через скачок СКР на границе активная зона — отражатель и СКР на наружной границе отражателя:

$$\begin{aligned} \frac{J}{4\pi} &\equiv \int_0^{R_{a.з}} K_{a.з}(r) r^2 dr + \int_{R_{a.з}}^{R_{отр}} K_{отр}(r) r^2 dr = \\ &= [K_{a.з}(R_{a.з}) - K_{отр}(R_{a.з})] R_{a.з}^3 + K_{отр}(R_{отр}) R_{отр}^3. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Уже на этих примерах видно, что скачки КР входят в интеграл реактивности с «весами», равными утроенным объемам, окруженным поверхностями разрыва макроскопических сечений. Здесь скачки СКР не зависят от места на поверхности раздела и выносятся из-под знака интеграла вида (5.44), который тогда равен [77]

$$\oint_{S_j} (\mathbf{r}\mathbf{n}) dS = 3V_j. \quad (5.47)$$

В случае более сложных геометрий скачки СКР должны быть соответственно усреднены, и тогда соотношение (5.44) также можно привести к аналогичному виду с «весами» равными утроенным объемам. Так, для симметричного цилиндрического реактора с активной зоной радиусом ρ и высотой h , которая окружена симметричным отражателем с наружным радиусом R и высотой H , интеграл реактивности (по всему объему реактора) равен

$$J_0 \equiv \int K(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 3\pi\rho^2 h [\overline{K_{a.з}}(\rho, h) - \overline{K_{отр}}(\rho, h)] + 3\pi R^2 \overline{HK_{отр}}(R, H). \quad (5.48)$$

Здесь СКР выражается через боковой $K_{бок}$ и торцовый $K_{тор}$ КР: $\overline{K}(\rho, h) = 2/3 K_{бок} + 1/3 K_{тор}$, причем

$$K_{бок} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} K(\rho, z) dz; \quad K_{тор} = \frac{1}{\pi\rho^2} \int_0^\rho K\left(r, \left|\frac{h}{2}\right|\right) 2\pi r dr \text{ и т. д.}$$

Аналогично через скачки на границах гомогенных зон можно записать интегралы реактивности для реакторов других конфигураций и более сложной структуры зон. Графическая иллюстрация таких соотношений для сферических систем дана на рис. 10.

Одно из преимуществ соотношений вида (5.44) или его частных выражений (5.45), (5.46), (5.48) и т. п. состоит в том, что они следуют из вполне общего и строгого кинетического уравнения. В этом смысле они могут служить для апробации правильности численных расчетов реактора, качества принятой аппроксимации кинетического уравнения, корректности граничных условий и т. д. В частности, их использование дает возможность находить некоторые точные значения величин, пользуясь более грубыми аппроксимациями*.

В экспериментальном аспекте такие соотношения могут быть использованы для определения интегралов реактивности по значениям СКР на границах зон и, наоборот, для определения по интегралам значений СКР на границах, где они обычно трудноизмеримы. При этом не следует смущаться от того, что экспериментально определяются не ρ и r о в а н н ы е СКР, а не $K(\mathbf{r})$ без нормировки

* Например, в работе [97] показано, как из данных диффузионного расчета с помощью интегралов реактивности можно получить точные значения потоков на границе системы (с погрешностью 2—3%).

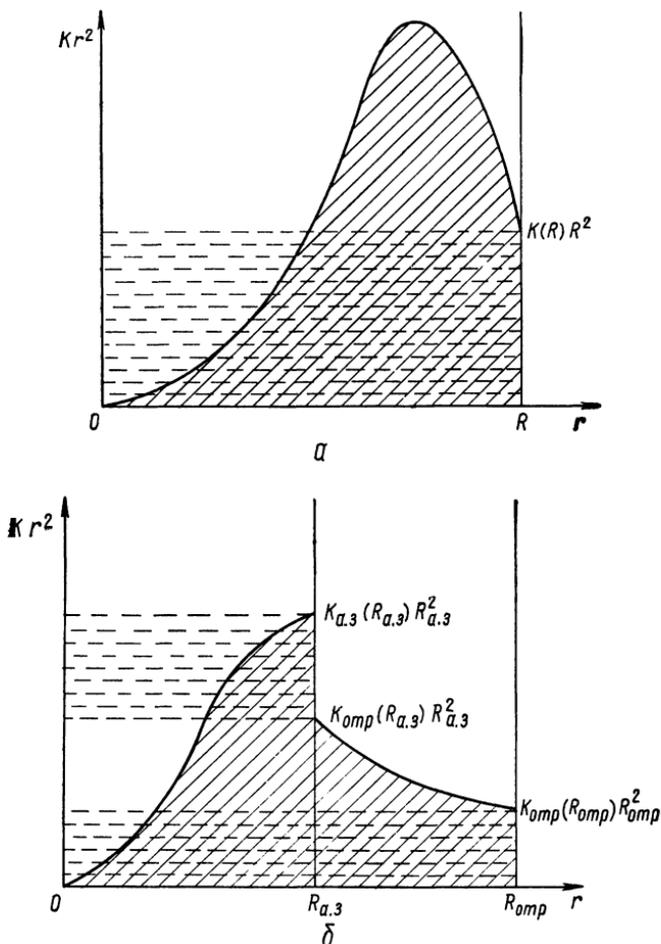


Рис. 10. Выражение интегралов реактивности через скачки СКР на границах однородных зон: а — для критической голой сферы [см. (5.45)]; б — для сферического реактора с отражателем [см. (5.46)]. Площадь областей с косой штриховкой равна интегралам реактивности; площади зон с горизонтальной прерывистой штриховкой отражают интегралы реактивности через скачки СКР на границах. (Площади, имеющие штриховку только одного вида, равны друг другу для каждой системы)

на J_F , для которых проведено рассмотрение и получены все соотношения. Пока речь идет об одном и том же реакторе, все вышеприведенные результаты сохраняются, если все соотношения поделить на нормировочный интеграл J_F (ЦНД).

Основное использование свойств интегралов реактивности в теории возмущений базируется на вариационном соотношении (5.27), которое в α -представлении (для реактора, состоящего из совокупности однородных зон) принимает вид:

$$\int \delta K(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \sum_I \oint_{S_j} [K_{\text{int}}(\mathbf{r}) - K_{\text{ext}}(\mathbf{r})] (n \delta \mathbf{r}_j) dS + \\ + \delta \alpha \int d\mathbf{r} \int dv \varphi + \frac{1}{v} \varphi = 0. \quad (5.49)$$

Здесь в рамках теории возмущений первого порядка рассматриваются вариации свойств реактора трех видов: а) возмущения от изменений состава среды реактора: $\delta K = \sum_i k_i(\mathbf{r}) \delta N_i(\mathbf{r})$; б) возмущения от сдвигов границ отдельных гомогенных сред: $\delta \mathbf{r}_j$; в) изменения реактивности, отражаемые вариацией собственного числа: $\delta \alpha$. При этом, сохраняя малые первого порядка, вариации состава берем при неизменных границах зон реактора, вариации границ — при неизменном составе сред, а вариации собственного числа — при неизменной структуре реактора, определяющей множитель u $\delta \alpha$ по невозмущенным потоку и ценности.

Более интересна при рассмотрении практических задач частная форма аналогичного вариационного соотношения, связывающая совокупность возмущений, суммарное воздействие которых сохраняет реактор в критическом состоянии [95, 99]. Вариационное соотношение теории возмущений первого порядка в развернутой форме при этом имеет общий вид:

$$\sum_k \sum_i \int_{V_k} k_i(\mathbf{r}) \delta N_i d\mathbf{r} + \sum_j \sum_i \oint_{S_j} k_i(\mathbf{r}) [N_i^{(\text{int})} - N_i^{(\text{ext})}] (n \delta \mathbf{r}_j) dS = 0 \\ (\delta k_{\text{эф}} \equiv 0), \quad (5.50)$$

где коэффициенты реактивности могут пониматься как нормированные, так и ненормированные.

На основе (5.50) и общего соотношения для интегралов реактивности (5.44) автором и С. П. Сазоновым [43, 99] был построен метод компенсации возмущений для определения критических параметров реакторов, состоящих из гомогенных зон. Сущность этого метода состоит в том, что на основе (5.50) и (5.44) при выбранной форме возмущений конструируются дифференциальные уравнения, описывающие зависимости критических параметров при малых изменениях в составе реактора, размерах или конфигурации отдельных гомогенных зон. Интегрирование таких уравнений приводит к аналитическим формулам, связывающим различные критические параметры, которые в ряде случаев работоспособны в довольно широких пределах их изменений.

Для простоты такой подход проиллюстрируем на примере сферически-симметричных реакторов, используя для интегралов реактивности формулы (5.45) и (5.46).

Зависимость критического радиуса от плотностей активной зоны и отражателя реактора. Вариационное соотношение для однородных изменений плотностей активной зоны $\gamma_{a,z}$ и отражателя

$\gamma_{отр}$ (при компенсирующем не критичность изменении радиуса ρ активной зоны и постоянном наружном радиусе отражателя R) можно записать в виде

$$J_{a.z} \frac{\delta \gamma_{a.z}}{\gamma_{a.z}} + J_{отр} \frac{\delta \gamma_{отр}}{\gamma_{отр}} + [K_{a.z}(\rho) - K_{отр}(\rho)] 4\pi \rho^2 \delta \rho = 0, \quad (5.51)$$

где $J_{a.z}$ и $J_{отр}$ — слагаемые интеграла реактивности по активной зоне и отражателю соответственно: $J = J_{a.z} + J_{отр}$.

Используя (5.46), приводим (5.51) к дифференциальному уравнению

$$\rho d(\ln \gamma_{a.z}) + \omega d(\ln \gamma_{отр}) + d \ln \rho = 0, \quad (5.52)$$

коэффициенты которого $\rho = J_{a.z}/[J - 4\pi R^3 K_{отр}(R)]$; $\omega = J_{отр}/[J - 4\pi R^3 K_{отр}(R)]$. Считая их при малых изменениях постоянными, получаем из (5.52) форму связи критического радиуса с плотностями зон в виде

$$\rho(\gamma_{a.z}, \gamma_{отр}) = \rho(\gamma_{a.z}^{ном}, \gamma_{отр}^{ном}) \left(\frac{\gamma_{a.z}}{\gamma_{a.z}^{ном}} \right)^{-\rho} \left(\frac{\gamma_{отр}}{\gamma_{отр}^{ном}} \right)^{-\omega}. \quad (5.53)$$

Эта форма обобщает уже ранее сформулированный закон степенной зависимости критического радиуса [10, 17, 122] от плотности активной зоны, включая еще и зависимость от плотности отражателя. Аналогично можно построить форму степенной зависимости критического радиуса от концентрации введенных в активную зону разных разбавителей делящегося вещества [10, 17]. Для высокообогащенных реакторов на быстрых нейтронах такие формулы успешно работают в пределах разбавлений до 50% номинальной плотности $\gamma^{ном}$.

Зависимость критического радиуса от толщины отражателя. Изменение толщины отражателя Δ при малых вариациях наружного радиуса реактора R и компенсирующем его изменении радиуса активной зоны ρ (для неизменных составов и плотностей зон) дает вариационное соотношение

$$4\pi \rho^2 [K_{a.z}(\rho) - K_{отр}(\rho)] \delta \rho + 4\pi R^2 K_{отр}(R) \delta R = 0. \quad (5.54)$$

Используя (5.46), приводим (5.54) к виду

$$\frac{d \ln \rho}{dR} = \frac{4\pi R^2 K_{отр}(R)}{J - 4\pi R^3 K_{отр}(R)} \equiv f(R) = F \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \right), \quad (5.55)$$

где функция $F [(\rho_0 - \rho)/\rho_0]$ отражает однозначное соответствие каждому R значения ρ ; ρ_0 — критический радиус голой сферы того же состава, что и активная зона. Выбранный вид аргумента $[0 \leq (\rho_0 - \rho)/\rho_0 \leq 1/2]$ позволяет разложить F в ряд Тейлора

и ограничиться первыми двумя членами. Переходя от аргумента R к толщине отражателя $\Delta = R - \rho$, получаем интеграл уравнения (5.55) в форме

$$\rho = \rho_0 / \{1 + \Gamma [1 - \exp(-\mu\Delta)]\}, \quad (5.56)$$

где

$$\Gamma \equiv (\rho_0 - \rho_\infty) / \rho_\infty; \mu = K_{\text{отр}}(\rho_0) / \rho_0 \Gamma K_{\text{а.з}}(\rho_0). \quad (5.57)$$

Здесь ρ_∞ — критический радиус сферы с отражателем бесконечной толщины (для данного материала); $K_{\text{а.з}}(\rho_0)$, $K_{\text{отр}}(\rho_0)$ — значения КР материалов активной зоны и отражателя соответственно, определенные на границе голой критической сферы.

Формула (5.56) для высокообогащенных реакторов на быстрых нейтронах дает критические радиусы в зависимости от толщины Δ (в диапазоне $0 \leq \Delta \leq \infty$) с погрешностью не хуже 1,5% для самых разных материалов отражателей (H_2O , Be, C, Fe, Ni, W, ^{238}U и др.) [99] (при сравнении с экспериментальными данными [122, 123]). Коэффициенты μ могут быть успешно [96] вычислены по сечениям, измеренным на голой сфере [9, 17].

Зависимость критического радиуса голой гомогенной сферы от соотношения делящегося вещества и разбавителя. Рассмотрим сферу критического радиуса ρ , состоящую из гомогенной смеси делящегося нейтронами всех энергий горючего (^{235}U , ^{239}Pu и т. п.) с ядерной концентрацией N_f и некоторого неделящегося разбавителя с концентрацией N_x атом/см³. Составим вариационное уравнение сохранения критичности при изменениях указанных выше величин:

$$I_f \delta N_f + I_x \delta N_x + 4\pi K(\rho) \rho^2 \delta \rho = 0. \quad (5.58)$$

Здесь I_f и I_x — соответственно «атомные» интегралы реактивности делящегося вещества и разбавителя [в смысле определения (5.19)].

Форму связи интеграла реактивности с граничным значением СКР [см. (5.45)] можно переписать в виде

$$J = I_f N_f + I_x N_x = 4\pi K(\rho) \rho^3.$$

Тогда из этого выражения и (5.58) получим дифференциальное уравнение Пфаффа [77]:

$$dN_f + \frac{I_x}{I_f} dN_x + \left(N_f + \frac{I_x}{I_f} N_x \right) \frac{d\rho}{\rho} = 0. \quad (5.59)$$

Коэффициент I_x/I_f для голой сферы является функцией спектра нейтронов, который, естественно, зависит от соотношения концентраций $\alpha_x = N_x/N_f$. В случае $I_x/I_f = f(\alpha_x)$ уравнение (5.59) удовлетворяет условию интегрируемости [77], а так как спектр нейтронов сравнительно медленно меняется с изменением α_x , то в ограни-

ченном диапазоне значений $\{\alpha_x\}$ можно считать $f(\alpha_x)$ постоянной: $f(\alpha_x) = C\{\alpha_x\} \approx \text{const}$. Поэтому общий интеграл уравнения (5.59) можно представить как

$$\rho(N_f, N_x) = \frac{\rho_0 N_f^0}{N_f + N_x C(\alpha_x)}. \quad (5.60)$$

Здесь ρ_0 — критический радиус неразбавленной голый сферы с номинальной концентрацией делящегося вещества N_f^0 : Формула (5.60) справедлива для всех значений α_x , если известна $C(\alpha_x)$. Для типичных случаев разбавления замедлителями (H_2O , Be, C, ZrH и т. п.) $C(\alpha_x)$ можно построить в явном виде [99]:

$$C(\alpha_x) \approx C_x (1 - \varepsilon_x \ln \alpha_x) \approx C_x \alpha_x^{-\varepsilon_x},$$

где C_x — значение I_x/I_f для $\alpha_x = 1$ (т. е. $N_x = N_f$), а ε_x — малая константа, определяемая предельным разбавлением, ведущим к $k_\infty = 1$. При этом (5.60) принимает форму

$$\rho(N_f, \alpha_x) = \frac{\rho_0 N_f^0}{N_f (1 + C_x \alpha_x^{1-\varepsilon_x})}. \quad (5.61)$$

Критические радиусы по формуле (5.61) определяются как функции N_f и N_x на основе всего трех опорных параметров: числителя $\rho_0 N_f^0$ — единой константы для данного делящегося вещества, и двух постоянных C_x и ε_x , характеризующих данный конкретный разбавитель-замедлитель. Оказывается, что критические радиусы по этому минимуму информации могут быть определены с погрешностью не более 1,5% в широком диапазоне изменения относительных концентраций замедлителей: $0 \leq \alpha_x \leq 10^3$. (При этом характер нейтронного спектра существенно меняется — перекрываются области, принадлежащие реакторам на быстрых нейтронах, с весьма жестким спектром, и типичным реакторам на тепловых нейтронах.) Такие возможности формулы (5.61) подтверждаются сопоставлением результатов, полученных с ее помощью, с данными многогрупповых расчетов критических параметров гомогенных систем [50] и с экспериментальными. Сопоставление значительно облегчается благодаря систематизации обширного экспериментального материала по критическим параметрам большого числа реакторов, проведенной В. А. Кузнецовым [121].

§ 6. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В РЕАКТОРНОЙ ПРАКТИКЕ

6.1. Определение эффективных сечений и их отношений (k_{∞} , КВ и др.) на спектре реактора по измерениям коэффициентов реактивности

Прямым следствием определения коэффициентов реактивности, как оно было дано в разд. 5.1, является возможность нахождения эффективных сечений различных ядерных реакций для разных нуклидов на нейтронном спектре, который имеет поток нейтронов в той точке реактора, где измеряются данные КР. Пользуясь диффузионным описанием для КР (5.13), можно преобразовать его, выразив компоненты $k_i(\mathbf{r})$ через плотности различных ядерных реакций или же через усредненные по спектру потока сечения.

Введем следующие определения средних сечений $\bar{\sigma}^{(i)}$ и плотностей реакций: деления — $f_i(\mathbf{r})$, рассеяния — $s_i(\mathbf{r})$, поглощения — $a_i(\mathbf{r})$, переноса — $y_i(\mathbf{r})$, на потоке $\Phi(\mathbf{r}) \equiv \int \Phi(\mathbf{r}, v) dv$

$$\bar{v}_i f_i(\mathbf{r}) \equiv \int v \sigma_f^{(i)}(v) \Phi(\mathbf{r}, v) dv \equiv (\bar{v} \sigma_f^{(i)}) \Phi(\mathbf{r}); \quad (6.1a)$$

$$s_i(\mathbf{r}) \equiv \int \sigma_s^{(i)}(v) \Phi(\mathbf{r}, v) dv \equiv \bar{\sigma}_s^{(i)} \Phi(\mathbf{r}); \quad (6.1б)$$

$$a_i(\mathbf{r}) \equiv \int \sigma_a^{(i)}(v) \Phi(\mathbf{r}, v) dv \equiv \bar{\sigma}_a^{(i)} \Phi(\mathbf{r}); \quad (6.1в)$$

$$y_i(\mathbf{r}) \equiv \int \sigma_{tr}^{(i)}(v) \Phi(\mathbf{r}, v) dv \equiv \bar{\sigma}_{tr}^{(i)} \Phi(\mathbf{r}). \quad (6.1г)$$

Функции ценности, усредненные по соответствующим ядерным процессам и энергетической зависимости $\Phi^+(\mathbf{r}, v)$, перепишем в виде:

$$\Phi_f^+(\mathbf{r}) \equiv \int \chi(v) \Phi^+(\mathbf{r}, v) dv; \quad (6.2a)$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi_s^+(\mathbf{r}) \equiv & \frac{1}{s(\mathbf{r})} \int \Phi^+(\mathbf{r}, v) [\sigma_s(v) \Phi(\mathbf{r}, v) - \\ & - \int \sigma_s(v' \rightarrow v) \Phi(\mathbf{r}, v') dv'] dv; \end{aligned} \quad (6.2б)$$

$$\Phi_a^+(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{a(\mathbf{r})} \int \Phi^+(\mathbf{r}, v) \sigma_a(v) \Phi(\mathbf{r}, v) dv; \quad (6.2в)$$

$$\Phi_{tr}^+(\mathbf{r}) \equiv \frac{3}{y(\mathbf{r})} \int \sigma_{tr}(v) D^2(\mathbf{r}, v) \nabla\Phi^+ \nabla\Phi dv. \quad (6.2г)$$

Тогда КР (5.13) можно выразить как

$$\begin{aligned} k_i(\mathbf{r}) = & \frac{1}{J_F} \{ \Phi_f^+(\mathbf{r}) \bar{v}_i f_i(\mathbf{r}) - [\Phi_a^+(\mathbf{r}) a_i(\mathbf{r}) + \\ & + \delta\Phi_s^+(\mathbf{r}) s_i(\mathbf{r})] + \Phi_{tr}^+(\mathbf{r}) y_i(\mathbf{r}) \}; \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$k_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{J_F} \{ \Phi_f^+(\mathbf{r}) (\overline{v\sigma_f^{(i)}}) - [\Phi_a^+(\mathbf{r}) \overline{\sigma_a^{(i)}} + \delta\Phi_s^+(\mathbf{r}) \overline{\sigma_s^{(i)}}] + \Phi_{tr}^+(\mathbf{r}) \overline{\sigma_{tr}^{(i)}} \} \Phi(\mathbf{r}). \quad (6.4)$$

Первая из этих форм связывает $k_i(\mathbf{r})$ с плотностями реакций и более пригодна для анализа задач со спектром нейтронов в широком диапазоне энергий, когда усредненные значения сечений трудно декондируемы, а плотности реакций являются реально измеримыми величинами).

Вторая форма (6.4) более удобна для анализа характеристик реакторов, нейтронный спектр которых может быть удачно описан одnogрупповой теорией. Вводя односкоростную аппроксимацию (см. разд. 4.5): $\Phi_f^+ = \Phi_a^+ = \Phi$; $|\nabla\Phi^+| = |\nabla\Phi|$, получаем

$$k_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{J_F} \{ [v_i \sigma_f^{(i)} - (\sigma_a^{(i)} + \sigma_x^{(i)}) + \sigma_{tr}^{(i)} g(\mathbf{r})] \Phi^2(\mathbf{r}) \}. \quad (6.5)$$

Здесь $g(\mathbf{r}) \equiv \frac{3}{\Phi^2(\mathbf{r})} [D\nabla\Phi]^2$, $\sigma_x^{(i)} \equiv \frac{\delta\Phi_s^+(\mathbf{r})}{\Phi_a^+(\mathbf{r})} \overline{\sigma_s^{(i)}}$. Величина $\sigma_x^{(i)}$ — «псевдосечение» захвата [9] (положительное или отрицательное); оно должно быть введено для корректного описания экспериментальных ситуаций в рамках одnogрупповой теории, поскольку неупругое рассеяние на тяжелых ядрах и упругое замедление на самых легких (H, Be, C и т. п.) значительно меняют ценность нейтронов. Этот реактивностный эффект не содержится в σ_a — истинном сечении поглощения, которое нельзя изменить, так как оно жестко связано с балансом рождения и утечки нейтронов.

В частном случае измерений ЦКР, т. е. в центре реактора, где $g(\mathbf{r}) = 0$,

$$k_i(0) = \frac{1}{J_F} [v_i \sigma_f^{(i)} - (\sigma_a^{(i)} + \sigma_x^{(i)})] \Phi^2(0). \quad (6.6)$$

Если вычислено (или измерено) значение нормирующего интеграла J_F , то из (6.6) можно найти комбинацию сечений для данного нуклида — сечение возмущения σ_p :

$$\sigma_p^{(i)} \equiv (v_i - 1) \sigma_f^{(i)} - (\sigma_c^{(i)} + \sigma_x^{(i)}) \quad (6.7)$$

(выделяя в данном случае из σ_a сечение радиационного захвата σ_c : $\sigma_a = \sigma_f + \sigma_c$). Для делящихся на нейтронах всех энергий нуклидов (^{235}U , ^{239}Pu , ^{233}U) величина $(v - 1) \sigma_f$ значительно превышает σ_x , пренебрежение которой дает погрешность около 1% [124]*, и, таким образом, из ЦКР практически можно получить

$$\sigma_p^{(i)} \approx (v_i - 1 - \bar{\alpha}_i) \sigma_f^{(i)}, \quad \text{где } \bar{\alpha}_i \equiv \sigma_c^{(i)} / \sigma_f^{(i)}. \quad (6.8)$$

* Для реакторов на быстрых нейтронах с достаточно жестким спектром нейтронов.

(Величина α_i важна для оценки КВ реакторов на быстрых нейтронах.) Если независимым путем можно определить $\sigma_f^{(i)}$ и ν_i , то из ЦКР находится значение α_i .

Для неделящихся нуклидов, кроме элементов с высоким σ_a (например, ^{10}B , ^6Li), ЦКР неизбежно дает сумму σ_a и σ_x , разделение которых затруднительно. В тех случаях, когда σ_a можно определить независимо (например, из активационных измерений), знание σ_p и σ_a позволяет найти σ_x — сечение, характеризующее роль нуклида в смягчении нейтронного спектра и его реактивностное влияние [9, 17, 21].

Представляя КР в общем случае неделящегося нуклида по (6.5) как

$$k_i(r) = - \frac{1}{J_F} (\sigma_a^{(i)} + \sigma_x^{(i)}) \Phi^2(r) + \frac{3}{J_F} D^2 (\nabla\Phi)^2 \sigma_{tr}^{(i)} \quad (6.9)$$

и имея возможность рассчитать $\nabla\Phi$ для некоторой точки r , где $(\nabla\Phi)^2 \neq 0$, можем из ЦКР и $k_i(r)$ определить $\sigma_{tr}^{(i)}$ этого нуклида.

Примером такого пути определения сечений на спектре нейтронов реактора может служить измерение $k_i(r)$ (см. рис. 7), проведенное на сферических быстрых системах «Годива» и «Топси» [9, 17] (см. разд. 5.2). Результаты измерения одnogрупповых сечений σ_p и σ_{tr} и их последующего использования для нескольких характерных элементов приведены в табл. 1, 2.

Рассмотренный путь определения σ_{tr} с использованием формулы (6.9) непригоден для делящихся нуклидов, σ_p которых маскирует вклад σ_{tr} (см. рис. 7). Поэтому для оценки σ_{tr} приходится измерять КР на наружной границе реактора $r = R$, где согласно односкоростной кинетической теории [см. (5.16)*] КР выражается

Таблица 1

Сечения σ_p и σ_{tr} (барн), измеренные по возмущениям в реакторах «Годива» и «Топси» [9, 17]

Нуклид	«Годива»		«Топси»	
	σ_p	σ_{tr}	σ_p	σ_{tr}
^{239}Pu	3,55	(7,6)	3,66	(6,2)
^{235}U	1,87	(6,5)	1,89	(6,5)
^{238}U	0,30	5,0	0,24	5,1
H	0,6	—	0,61	—
^{10}B	-0,72	2,62	—	2,0
C	-0,03	2,17	-0,02	2,13
Fe	-0,006	2,29	-0,02	2,29
Bi	-0,02	4,60	-0,04	4,64

* Вблизи границы реактора диффузионное выражение КР неточно, и вместо (5.13) или (6.5) более корректно брать (5.16).

Таблица 2

Некоторые параметры делящихся нуклидов, полученные из последующей обработки данных по σ_p , σ_{tr} и σ_f [9,17]

Нуклид	«Годива»			«Топси»		
	σ_f , барн	$\nu - \sigma_c / \sigma_f$	ν	σ_f , барн	$\nu - \sigma_c / \sigma_f$	ν
^{238}Pu	1,87	3,01	3,07	1,87	3,04	3,10
^{238}U	1,29	2,48	2,59	1,35	2,47	2,59
^{238}U	0,20	2,18	2,61	0,19	2,12	2,61

формулой

$$k_i(R) = \frac{1}{J_F} [(\nu_i \sigma_f^{(i)} + \sigma_s^{(i)}) \Phi^2(R)], \quad (6.10)$$

так как $\int \varphi(r, -\Omega) \varphi(r, \Omega) d\Omega = 0$ на наружной границе по условиям (2.4) и (2.16). Тогда из комбинации значений $(\nu\sigma_f + \sigma_s)$ и σ_p можно получить σ_t :

$$(\nu\sigma_f + \sigma_s) - \sigma_p = \sigma_s + \sigma_f + \sigma_c = \sigma_t \quad (6.11)$$

— полное сечение, близкое к σ_{tr} . Значения σ_t в табл. 1 даны в колонках для σ_{tr} в скобках.

Несомненный интерес представляет также измерение КР (особенно ЦКР) для прямого сопоставления экспериментальных значений ЦКР разных нуклидов (или даже их отношений) с их расчетно-теоретическими значениями, получаемыми по общей формуле (5.7); для проверки точности ядерных констант в разных групповых системах, корректности расчетной аппроксимации и т. п. [62, 64, 125 — 130 и др.].

Весьма интересны задачи получения общих параметров, характеризующих размножающие или же воспроизводящие свойства активной зоны реактора, например, таких, как k_∞ и КВА — коэффициент воспроизводства делящегося вещества в активной зоне реакторов на быстрых нейтронах.

Классическое определение величины k_∞ предусматривает [5,22] неизменный по пространству нейтронный спектр $\Phi_\infty(v)$ в однородной бесконечной среде; при этом k_∞ выражается как отношение интеграла производства нейтронов деления к интегралу поглощения:

$$k_\infty \equiv \int \nu \Sigma_f(v) \Phi_\infty(v) dv / \int \Sigma_a(v) \Phi_\infty(v) dv. \quad (6.12)$$

Для однородной активной зоны без отражателя можно построить аналогичное выражение, но при наличии отражателя спектр будет зависеть от координат, и в каждой точке зоны будет свое значение $k_\infty(r)$. Естественными представляются предложения [8, 46, 96,

119, 120 и др.] как-то переопределить понятие k_∞ и, введя функцию ценности рожденных и поглощенных нейтронов, сделать его представительной характеристикой размножающих свойств активной зоны. Однако конструкции типа k^+ (5.25) [46] или k^*

$$k^* \equiv \langle \varphi^+, \mathbf{F}\varphi \rangle / \langle \varphi^+, (\mathbf{C} - \mathbf{Z})\varphi \rangle_{\text{а.з.}} \quad (6.13)$$

(см. [96]) и т. п. оказываются чувствительными к свойствам отражателя, и практическое распространение получила только величина k_m^+ [105 — 107], характеризующая отношение производства ценностей к потерям ценности в точке центра активной зоны:

$$k_m^+ \equiv \frac{\int dv \Phi^+(v) \chi(v) \int v \Sigma_f(v') \Phi(v') dv'}{\int \Phi^+ \Sigma_a(v) \Phi dv - \int \delta \Phi_s^+ \Sigma_s(v) \Phi dv} \quad (6.14)$$

Экспериментальное определение этого параметра для реакторов на быстрых нейтронах основано на сравнении СКР материала активной зоны реактора и КР делящихся веществ, входящих в состав композиции активной зоны.

В свете изложенного [см. (6.1)] СКР можно записать в виде

$$k(0) = \frac{1}{J_F} \{ [\Phi_f^+ \bar{v} - (1 + \bar{\alpha}) \Phi^+] f - (\Phi_c^+ c + \delta \Phi_s^+ s) \}, \quad (6.15)$$

выделяя плотность реакции c поглощения нейтронов неделящими материалами со средней ценностью Φ_c^+ и изменения ценности при рассеянии на них $\delta \Phi_s^+ s$. Для КР делящихся материалов как компонента СКР согласно (6.8) имеем

$$k_f(0) = \frac{1}{J_F} [\Phi_f^+ \bar{v} - (1 + \bar{\alpha}) \Phi^+] f, \quad (6.16)$$

Отношение СКР (6.15) и $k_f(0)$ (6.16) дает значение k_m^+ (где вновь объединены все процессы поглощения: $\Phi_a^+ a \equiv \Phi^+ c^{(f)} + \Phi_c^+ c$):

$$k_m^+ \equiv \frac{\Phi^+ \bar{v} f}{\Phi_a^+ a + \delta \Phi_s^+ s} = \frac{1}{1 - g [k(0)/k_f(0)]}. \quad (6.17)$$

Здесь g — поправочный множитель (вообще говоря, расчетный) вида

$$g = \left[1 - \frac{(1 + \bar{\alpha})}{\bar{v}} \frac{\Phi^+}{\Phi_f^+} \right]. \quad (6.18)$$

Для его определения необходимо знать отношение ценности поглощенных делящимся веществом нейтронов Φ^+ к ценности нейтронов деления Φ_f^+ и число $\bar{\alpha}$.

Практическое определение $k(0)$ и $k_f(0)$ состоит в измерениях: а) реактивности при изъятии из центра реактора небольшого объема его композиции и б) реактивности при изъятии из такого же объема всех делящихся веществ, но с сохранением всех остальных.

Возвращаясь к поправочному множителю (6.18), заметим, что главную неопределенность в нем составляет величина $\bar{\alpha}$ [в силу общей «ленивости» функции ценности (см. разд. 2.3) Φ^+/Φ_f^+ оценить проще]. Поскольку величина $\bar{\alpha} = \sigma_c^{(f)}/\sigma_f^{(f)}$ вообще весьма важна для расчета и анализа характеристик высокообогащенных реакторов и оценки КВА (бридеров как на быстрых, так и на тепловых нейтронах)*, рассмотрим возможности ее экспериментального определения на реакторном спектре [124, 131, 133].

Принцип этого измерения состоит в сравнении ЦКР делящегося нуклида

$$k_f(0) = \frac{1}{J_F} \{[\Phi_f^+ \bar{v} - \Phi^+ (1 + \bar{\alpha})] f - \delta\Phi_{sf}^+ s_f\} \quad (6.19)$$

и ЦКР эквивалентного поглотителя некоторого вида A с зависимостью сечения поглощения от энергии близкой к таковой для делящегося нуклида $\sigma_a^{(f)}(v)$ (в области энергий, где имеет место преобладающая доля поглощений нейтронов). В качестве такового для уран-водного реактора на тепловых нейтронах с 3%-ным обогащением ^{235}U композиции активной зоны выбран ^{56}Mn [131], а для реактора на быстрых нейтронах ZPR-9 [124] с 9%-ным обогащением выбран ^6Li [124]. Дополнительным условием служит требование $\delta\Phi_{sA}^+ \ll \Phi_a^+$, а в ЦКР $_A$:

$$k_A(0) = -[\Phi_a^+ a_A + \delta\Phi_{sA}^+]/J_F. \quad (6.20)$$

Наконец, должен быть еще измерен коэффициент псевдореактивности постоянного источника нейтронов Q со спектром близким к спектру деления изучаемого нуклида (наиболее удобен источник спонтанного деления ^{252}Cf) для той же точки центра активной зоны:

$$k_Q(0) = \Phi_Q^+ Q/J_F. \quad (6.21)$$

(Помещение постоянного источника в точно критический реактор вызывает линейный рост мощности, по темпу которого можно найти k_Q [84]; это же измерение можно выполнить и в условиях неглубокой подкритичности по дополнительному умножению, вызываемому таким источником [132]).

При проверяемом расчетным путем условии: $\delta\Phi_{sf}^+ s_f \ll \ll k_f(0) J_F$, $\Phi_a^+ \approx \Phi^+$; $\Phi_Q^+ \approx \Phi_f^+$, из (6.19) — (6.21) следует

$$(1 + \bar{\alpha}) = \frac{a_A [k_f(0)/f - k_Q(0) \bar{v}/Q]}{k_A(0)}. \quad (6.22)$$

* См. (4.86).

Таким образом, $\bar{\alpha}$ может быть найдена по указанным ЦКР и абсолютным значениям плотностей реакций деления, поглощения и интенсивности источника Q (методы их определения достаточно разработаны [84, 124, 131, 132 и др.]).

6.2. Анализ локальных и глобальных эффектов реактивности

Принципиальные возможности определения эффективных сечений на нейтронном спектре реактора, а также важных их отношений на основе измерений КР были показаны в разд. 6.1. Однако следует иметь в виду, что истинные значения КР являются, по определению разд. 5.1, предельными экстраполированными величинами. Для их нахождения используется серия ненулевых локальных возмущений от образцов изучаемых веществ объемом от одного и до нескольких сот кубических сантиметров.

Измерения реактивностей по периоду разгона дают точность $\sim 10^{-6} k_{эф}$ [135], а с применением осцилляторной техники $\sim 5 \times 10^{-8} k_{эф}$ [124], что и ограничивает уменьшение объемов образцов. В то же время введение инородного вещества в реактор неизбежно искажает нейтронное поле как в самом «объеме возмущения», так и в прилегающей невозмущенной окрестности. Зависимость таких искажений от размеров или от плотности возмущающего образца, как правило, нелинейная, и это заметно усложняет задачу определения КР путем экстраполяции данных к нулевому размеру образца (рис. 11).

При расчетном анализе таких малых локальных возмущений, в которых практически измеряются ЦКР, надо учитывать следующие обстоятельства. Во-первых, возмущающий образец обычно имеет размер h (средняя длина хорды $h = 4V_w/A_w$, где V_w — объем образца, A_w — его поверхность, как это следует из принципа эквивалентности [21]), сравнимой со средней длиной пробега нейтрона. Поэтому для расчета возмущения потока нейтронов предпочтительнее пользоваться кинетическим уравнением переноса нейтронов, а не диффузионным приближением. Наиболее удобна интегральная форма кинетического уравнения (см. разд. 2.1), расчет с помощью которой может быть ограничен областью реактора радиусом в 2 — 3 длины свободного пробега вокруг образца [62].

Во-вторых, при обычном многогрупповом представлении нейтронного спектра (10 — 30 групп) следует иметь в виду необходимость поправки коэффициентов резонансной самоэкранировки f_c , f_f , f_e [134] для групповых сечений образца с учетом их зависимости от размеров образца через псевдосечение $\sigma_m = 1/Nh$ (N — плотность ядер в образце). Это приводит к изменению интенсивности групповых потоков Φ_j в образце [128, 136]:

$$\bar{\Phi}_j = \Phi_j \frac{[f_c^{(j)}(\sigma_m)\sigma_c^{(j)} + f_f^{(j)}(\sigma_m)\sigma_f^{(j)}](\sigma_{\text{pot}}^{(j)} + \sigma_m)}{(\sigma_c^{(j)} + \sigma_f^{(j)})[f_c^{(j)}(\sigma_m)\sigma_c^{(j)} + f_e^{(j)}(\sigma_m)\sigma_e^{(j)} + \sigma_m]}, \quad (6.23)$$

где σ_{pot} — потенциальное сечение рассеяния, а σ_e — сечение упругого рассеяния.

В-третьих, введение возмущающего образца влечет за собой не только пространственное искажение нейтронного поля (депрессию

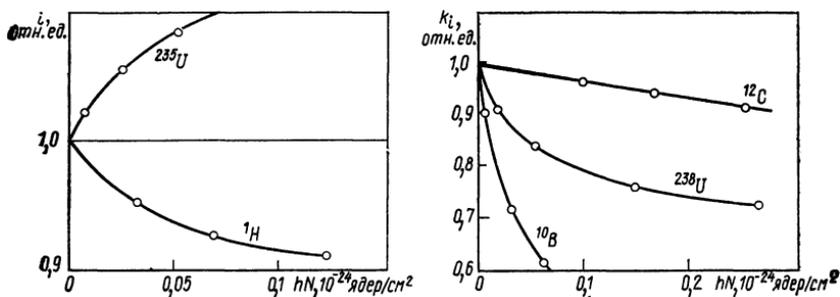


Рис. 11. Зависимости измеряемых ЦКР от размера образцов (выраженного как произведение средней хорды h на плотность ядер N) для ряда нуклидов по измерениям на реакторе БФС [128, 136]. (Все ЦКР приведены в относительном масштабе с нормировкой на значения ЦКР для образцов нулевого размера)

потока) в окружающей среде реактора, но и изменение условий блокировки резонансных сечений в этой среде (из-за эффектов замедления нейтронов при рассеянии в образце.) Этот эффект для чисто рассеивающих образцов может оказаться сравнимым по реактивности с эффектами в самом образце.

Как показано в [135, 137], такой дополнительный реактивный эффект в первом приближении можно описать поправкой макросечений Σ_a и Σ_f окружающей среды реактора вида

$$\frac{\Sigma_s^{\text{обп}}}{\Sigma_s(1 + h\Sigma_s^{\text{обп}})} \left[-\Sigma_a \frac{1-f_a^2}{2} + \left(\nu \frac{\Phi_f^+}{\Phi^+} - 1 \right) \Sigma_f \frac{1-f_f^2}{2} \right], \quad (6.24)$$

где $\Sigma_s^{\text{обп}}$ — сечение рассеяния в образце, Σ_s — в среде реактора.

Следует, однако, заметить, что применение указанных выше (и других аналогичных) уточнений при расчете ЦКР все же не дает еще достаточно хорошего согласия расчетных и экспериментальных результатов [126, 128, 129, 130, 138 и др.] (табл. 3). Это побуждает,

Таблица 3

Отношение экспериментальных (α) и расчетных (ρ) ЦКР $k_{i\alpha}/k_{i\rho}$
в сборках [149] на быстрых нейтронах [129, 138]

Нуклид i	Номер сборки в реакторе ZPR-III			Номер сборки в реакторе ZPR-6	
	48	49	50	5	6
^{239}Pu	0,78	0,82	0,77	—	—
^{235}U	0,82	0,79	0,81	0,94	1,01
^{238}U	0,81	0,80	0,83	1,09	0,89
^{10}B	0,96	0,83	0,80	0,99	0,98
Fe	0,77	0,94	0,63	0,87	0,68
Na	—	—	—	1,28	0,50
Ta	0,77	0,83	0,76	0,99	—

с одной стороны, к поиску причин расхождений теории и эксперимента путем специальных измерений и анализа основных параметров и характеристик, входящих во все формулы теории возмущений (и их практического использования): функций ценности, нормировочного интеграла J_F (ЦНД), $\beta_{\alpha\phi}$ — эффективной доли запаздывающих нейтронов, как правило, основной единицы масштаба реактивностей и т. д. [84, 127, 130]. Однако расхождения сохраняются и для отношений ЦКР (табл. 4), исключающих возможные отличия расчетных и фактических значений $\beta_{\alpha\phi}$ и J_F . Поэтому, с другой стороны, возникает потребность переоценки и корректировки ядерных данных, усовершенствования систем групповых констант.

Вместе с тем эта ситуация показывает, что при расчетно-теоретической оценке эффектов возмущений в больших объемах реактора (при глобальных изменениях состава или температур по целым зонам реактора) следует проявлять осторожность и использовать

Таблица 4

Сравнение экспериментальных и расчетных отношений ЦКР различных нуклидов к ЦКР ^{235}U $[k_i(0)/k_{235}(0)]_{\alpha}/[k_i(0)/k_{235}(0)]_{\rho}$ для критических сборок БФС [150, 151] на быстрых нейтронах [128]

Нуклид i	Номер сборки			
	26	27	28	30
^{239}Pu	1,01	1,00	1,05	1,02
^{238}U	—	—	—	0,82
^1H	1,03	1,12	1,64	1,49
^6Li	1,16	1,12	1,00	1,01
^{10}B	1,20	1,20	1,21	1,32
^{12}C	11,1	1,08	4,7	1,85
^{23}Na	—	—	—	3,8

возможно более высокие приближения теории, более точно аппроксимировать геометрию и граничные условия, учитывать эффекты гетерогенности и др. Надежность предсказаний различных глобальных эффектов теорией возмущений несомненно должна, по возможности, оцениваться по сериям экспериментальных измерений таких эффектов в условиях модельных критических сборок реакторов.

Проиллюстрируем оценки различных эффектов реактивности при изменениях в больших объемах реактора с использованием различных форм теории возмущений. Рассмотрим две задачи.

1. Возмущение в центральной области активной зоны сферической модели реактора на быстрых нейтронах ZEBRA-II [141]. Структура реактора идентична структуре модели на рис. 6. Гомогенная активная зона радиусом 45 см окружена отражателем толщиной 30 см. Область возмущения — центральная сферическая часть зоны диаметром 20 см. Возмущение состоит в раздельном введении в эту область гомогенно размещенных дополнительных нуклидов: ^{235}U , ^{10}B , ^{12}C (при разных концентрациях, меняющихся в 10 раз).

Примерный состав активной зоны и отражателя приведен в табл. 5, а набор концентраций вводимых возмущающих добавок — в табл. 6. В табл. 6 приведены также реактивности, вносимые соответствующими возмущениями, рассчитанные по общему алгоритму основного метода теории возмущений (см. разд. 4.3) с последовательным применением теории возмущений первого, второго и третьего порядков: $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$.

Таблица 6

Реактивности при введении в центральную часть зоны различных возмущающих нуклидов [63]

Нуклид	Концентрация, 10^{22} ядер/см ³	Реактивность			Суммарная реактивность
		$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\delta\lambda = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)}$
^{235}U	0,0275	$1,566 \cdot 10^{-3}$	$3,06 \cdot 10^{-6}$	$2,73 \cdot 10^{-7}$	$1,569 \cdot 10^{-3}$
	0,1375	$7,829 \cdot 10^{-3}$	$7,61 \cdot 10^{-5}$	$3,42 \cdot 10^{-5}$	$7,939 \cdot 10^{-3}$
	0,2750	$1,566 \cdot 10^{-2}$	$3,02 \cdot 10^{-4}$	$2,74 \cdot 10^{-4}$	$1,623 \cdot 10^{-2}$
^{10}B	0,0286	$-1,348 \cdot 10^{-3}$	$5,00 \cdot 10^{-5}$	$-3,17 \cdot 10^{-6}$	$-1,301 \cdot 10^{-3}$
	0,143	$-6,739 \cdot 10^{-3}$	$1,252 \cdot 10^{-3}$	$-3,97 \cdot 10^{-4}$	$-5,884 \cdot 10^{-3}$
	0,286	$-1,348 \cdot 10^{-2}$	$5,00 \cdot 10^{-3}$	$-3,19 \cdot 10^{-3}$	$-1,167 \cdot 10^{-2}$
^{12}C	0,0286	$4,421 \cdot 10^{-6}$	$1,06 \cdot 10^{-8}$	$3,99 \cdot 10^{-12}$	$4,432 \cdot 10^{-6}$
	0,143	$2,211 \cdot 10^{-5}$	$2,65 \cdot 10^{-7}$	$4,80 \cdot 10^{-10}$	$2,237 \cdot 10^{-5}$
	0,286	$4,413 \cdot 10^{-5}$	$1,06 \cdot 10^{-6}$	$3,74 \cdot 10^{-9}$	$4,519 \cdot 10^{-5}$

Таблица 5
Состав активной зоны и отражателя реактора ZEBRA-II [141]

Нуклид	Концентрация компонента, 10^{22} ядер/см ³	
	в активной зоне	в отражателе
^{235}U	0,2523	0,0301
^{238}U	1,555	4,0999
Fe + Ni + Cr	0,523	0,4777
^{12}C	3,795	—

На рис. 12 показаны распределения нейтронных потоков $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ (как пример для 11-й группы, т. е. ~ 15 кэв) в случае возмущения введением ^{10}B (с концентрацией $0,143 \cdot 10^{22}$ ядер/см³). Расчеты проводились [63] в 26-групповом представлении по системе констант БНАБ [134] в диффузионном приближении. Как видно, для всех случаев возмущений (делящимся веществом, рассеивателем и поглотителем) уже первое приближение теории возмущений дает сравнительно хорошие оценки. Второе приближение немного улучшает результат, третье дает сравнимый с ним вклад только для максимальных концентраций*.

Пример расчета возмущений потока показывает, что основное искажение описывается первой поправочной функцией $\varphi^{(1)}$, а поправка второго порядка уже малозначительна (см. рис. 12).

2. Возмущение, охватывающее значительную часть активной зоны сферического модельного реактора-конвертора с плутониевой активной зоной и натриевым теплоносителем (при удалении послед-

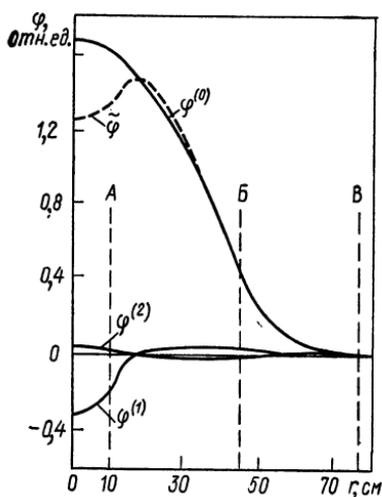


Рис. 12. Потоки $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ при возмущении центральной части активной зоны реактора ZEBRA-II. (A — граница зоны возмущения; B — активной зоны реактора; B — реактора. Штриховая кривая — возмущенный поток $\tilde{\varphi}$) [63]

Таблица 7

Составы активной зоны и отражателя сферической модели реактора на быстрых нейтронах [142]

Нуклид	Концентрации компонента, 10^{22} ядер/см ³	
	в активной зоне	в отражателе
^{239}Pu	0,0887	—
^{240}Pu	0,0119	—
^{238}U	0,5780	3,962
^{23}Na	0,9290	—
Fe+Cr+Ni	1,6919	0,649
^{16}O	1,3980	0,002

него) [142]. Структура реактора та же (см. рис. 6). Гомогенная активная зона радиусом 90 см окружена отражателем толщиной 32 см. Область возмущения — центральная сферическая часть активной зоны диаметром 100 см. Из этой области полностью удаляется натрий, компонент зоны состава, приведенного в табл. 7.

* Заметим (см. табл. 5,6), что максимальное возмущение делящимся материалом фактически означает удвоение обогащения делящейся композиции активной зоны в заданном объеме, т. е. определенно выходит за рамки обычного понятия «малых возмущений». Однако теория возмущений даже в первом порядке дает хорошую оценку эффекта.

Результаты расчета реактивности по теории возмущений первого порядка дают оценку с погрешностью $\sim 10\%$ (по сравнению с расчетом «в лоб» возмущенной системы). Для получения более корректного результата в работе применяется «прямой метод» теории возмущений (см. разд. 4.6), что фактически эквивалентно использованию формулы (4.109). Вместо (4.109) в работе [142] расчет строился на выражении реактивности через возмущенную ценность и невозмущенный поток:

$$\delta\lambda = \langle \tilde{\varphi}^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi \rangle / \langle \tilde{\varphi}^+, \tilde{\mathbf{F}} \varphi \rangle = \langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \tilde{\varphi} \rangle / \langle \varphi^+, \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\varphi} \rangle. \quad (6.25)$$

Отсюда следует выражение, аналогичное (4.108), $\omega_0/f_0 = \lambda^{(1)}$ и

$$\delta\lambda_{\text{пр}} = \frac{\omega_0}{f_0} \left[1 + \frac{\langle \delta\varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \varphi \rangle}{\omega_0} - \frac{\langle \delta\varphi^+, \tilde{\mathbf{F}} \varphi \rangle}{f_0^0} \right]. \quad (6.26)$$

Определяя $\delta\varphi^+$ по (4.96), приходим к формуле

$$\delta\lambda_{\text{пр}} = \frac{\omega_0}{f_0} [1 - \langle \Theta_{WF}, \mathbf{W}_\lambda^+ \varphi^+ \rangle] \equiv \frac{\omega_0}{f_0} [1 - \langle \varphi^+, \mathbf{W}_\lambda \Theta_{WF} \rangle] \quad (6.27)$$

— аналогу (4.109), которая дает то же значение $\delta\lambda$. Обобщенный или эффективный поток Θ_{WF} здесь подчинен уравнению — аналогу (4.110):

$$\mathbf{T}_\lambda \Theta_{WF} = \mathbf{W}_\lambda \varphi / \omega_0 - \tilde{\mathbf{F}} \varphi / f_0. \quad (6.28)$$

Функция Θ_{WF} играет роль поправки потока на возмущение $\varphi^{(1)}$. Ее вид и сравнение с истинным $\delta\varphi$ приведены на рис. 13.

Результаты расчета реактивности по теории возмущений первого порядка и прямым методом даны в табл. 8. Видно, что расчет

Таблица 8

Эффект реактивности при удалении натрия

Метод	$\delta\lambda_x \cdot 10^{-8}$	$\delta\lambda_x / \delta\lambda$
Точный расчет ($\delta\lambda$)	-7,725	1
Теория возмущений первого порядка ($\delta\lambda_x = \lambda^{(1)}$)	-6,972	0,902
«Прямой метод» ($\delta\lambda_x = \delta\lambda_{\text{пр}}$); радиус ограничения расчета ($\Theta_{WF} = 0$), см:		
122 (весь реактор)	-7,966	1,0308
90 (граница активной зоны)	-7,967	1,0309
66 (область $\delta\varphi \neq 0$)	-7,955	1,0293
50 (зона возмущения)	-7,687	1,9947

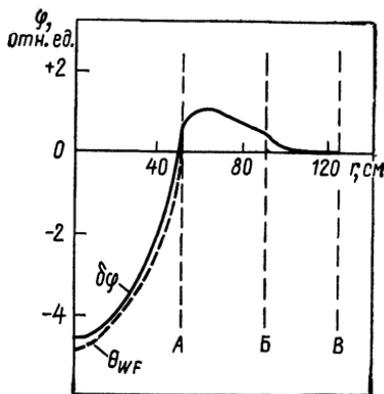


Рис. 13. Сравнение возмущения потока $\delta\varphi$ и эффективной функции Θ_{WF} при возмущении реактора удалением натрия из центральной части активной зоны (область с границей А) (Б — граница активной зоны, В — реактора [142])

функции Θ_{WF} можно ограничить пространственной областью возмущенной зоны, точнее большей зоны возмущения на две—три длины пробега нейтрона [64].

6.3. Измерения параметров кинетики реактора, функций ценности и других реакторных характеристик по возмущениям в критических и подкритических системах

Покажем возможности измерения отдельных характеристик реакторов по возмущениям на критических и подкритических реакторах*.

1. Измерение параметров кинетики. А. Измерения среднего времени жизни мгновенных нейтронов l и среднего времени генерации мгновенных нейтронов Λ . Согласно общему определению, время генерации мгновенных нейтронов (в λ -представлении) и время их жизни выражаются отношениями [39]

$$\Lambda \equiv \left\langle \varphi_{\lambda}^{\dagger}, \frac{1}{v} \varphi_{\lambda} \right\rangle / \left\langle \varphi_{\lambda}^{\dagger}, \mathbf{F} \varphi_{\lambda} \right\rangle; l \equiv \left\langle \varphi_{\lambda}^{\dagger}, \frac{1}{v} \varphi_{\lambda} \right\rangle / \left\langle \varphi_{\lambda}^{\dagger}, \mathbf{G} \varphi_{\lambda} \right\rangle;$$

$$\Lambda = k_{\text{эф}} \cdot l, \quad (6.29)$$

совпадающими в критическом реакторе ($k_{\text{эф}} = 1$). Для экспериментальных ситуаций более адекватно определение этих величин на асимптотических функциях φ_{α} и $\varphi_{\alpha}^{\dagger}$ (см. разд. 1.3; 2.3; 4.7) с соотношением связи через асимптотический декремент α [89]:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_p &\equiv \left\langle \varphi_{\alpha}^{\dagger}, \frac{1}{v} \varphi_{\alpha} \right\rangle / \left\langle \varphi_{\alpha}^{\dagger}, \mathbf{F}_p \varphi_{\alpha} \right\rangle; \\ l &\equiv \left\langle \varphi_{\alpha}^{\dagger}, \frac{1}{v} \varphi_{\alpha} \right\rangle / \left\langle \varphi_{\alpha}^{\dagger}, \mathbf{G} \varphi_{\alpha} \right\rangle; \alpha = 1/l - 1/\Lambda_p. \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

В реакторах на тепловых или промежуточных нейтронах подавляющая доля поглощений приходится на область энергий, в которой сечение поглощения ^{10}B имеет характер $1/v$, и простейший способ определения $\Lambda = l$ в критическом реакторе состоит в измерении КР бора [8]. По общей форме, следуя (5.13), можно записать

$$k_{^{10}\text{B}} = - \frac{1}{J_F} \int \left[\sigma_0 v_0 \left(\Phi + \frac{1}{v} \Phi \right) + \delta \Phi_s^+ \sigma_s \Phi - 3\sigma_{lr} D^2 \nabla \Phi + \nabla \Phi \right] dv. \quad (6.31)$$

* В последнем случае эксперименту более адекватны α - или S -представления нейтронного поля при регистрации реактивности по декременту затухания мгновенных нейтронов α после облучения реактора от импульсного источника нейтронов либо по изменениям размножения m в системе с подсветкой от постоянного источника (см. разд. 1.3).

В то же время для изотопа ^{11}B сечение поглощения равно нулю [134], и в выражении (6.31) для ^{11}B остаются только два последних слагаемых с заменой $\sigma_s^{(10)}$ и $\sigma_{tr}^{(10)}$ на $\sigma_s^{(11)}$ и $\sigma_{tr}^{(11)}$. Величины эти постоянны в широком диапазоне энергий, и поэтому, проведя интегрирование КР по всему объему реактора, получим соотношение для времени генерации через интегралы реактивности [в смысле (5.17) для этих нуклидов]:

$$I_{11\text{B}} \left(\frac{\sigma_{tr}^{(10)}}{\sigma_{tr}^{(11)}} \right) - I_{10\text{B}} = \frac{\sigma_0 v_0}{J_F} \int d\mathbf{r} \int dv \Phi^+ \frac{1}{v} \Phi \equiv \sigma_0 v_0 \Lambda. \quad (6.32)$$

Здесь σ_0 — калибровочное значение сечения поглощения ^{10}B при некоторой выбранной скорости v_0 .

Так как КР обычно измеряют в долях $\beta_{\text{эф}}$, то для получения Λ еще надо знать $\beta_{\text{эф}}$ (из расчета или отдельного эксперимента).

Метод этот применим также и для реакторов на быстрых нейтронах, если они имеют замедляющие отражатели (Be, BeO и др.), определяющие основной вклад во время жизни нейтронов в системе [100].

Более общим методом для измерения времени генерации, пригодным для реакторов с любым нейтронным спектром и для систем в различном подкритическом состоянии, является метод замены делящегося вещества в реакторе эквивалентным поглотителем [39, 89, 90] с измерением эффекта возмущения по изменению декремента затухания α .

Если в объеме δV_k активной зоны произведено возмущение, состоящее в замене делящегося вещества неделящимся материалом с такими же поглощающими и рассеивающими свойствами (примеры таких замен при измерении $\bar{\alpha}$ см. в разд. 6.1), то изменение α , согласно общей формуле (4.114), составит

$$\delta\alpha = \frac{\delta V_k}{\langle \varphi_\alpha^+, \frac{1}{v} \varphi_\alpha \rangle} \int \varphi_\alpha^+ \mathbf{F}_p \varphi_\alpha dv. \quad (6.33)$$

Последовательное измерение таких возмущений для всех элементов объема δV_k , содержащих делящееся вещество*, и интегрирование по объему дает значение Λ_p :

$$\int \left(\frac{\delta\alpha}{\delta V_k} \right) d\mathbf{r} = \left[\langle \varphi_\alpha^+, \frac{1}{v} \varphi_\alpha \rangle / \langle \varphi_\alpha^+, \mathbf{F}_p \varphi_\alpha \rangle \right]^{-1} \equiv 1/\Lambda_p. \quad (6.34)$$

Зная Λ_p и α , можно определить l из соотношения (6.30).

Пример измерений такого рода приведен на рис. 14 для гетерогенной уран-водной системы. Реактор из критического состояния

* Заметим, что объем измерений здесь меньше, чем в предыдущем методе, где КР должны измеряться не только в активной зоне, но и во всем отражателе.

последовательно переводился в подкритические состояния (отгрузкой урановых стержней), и в каждом из них импульсным нейтронным методом определялось α и возмущение от замещения ураносодержащей композиции эквивалентным поглотителем по изменениям $(\delta\alpha/\delta V_k)$ для всех элементарных объемчиков δV_k активной зоны.

Знание зависимости Λ или l для разных подкритических состояний реактора обеспечивает возможность надежного измерения $k_{эф}$ и запасов реактивности на основе импульсного α -метода [28, 39, 47, 143]:

$$(\rho/\beta) \equiv \frac{1 - k_{эф}}{k_{эф} \beta_{эф}} = \frac{\alpha}{\alpha_{кр}} \cdot \frac{\Lambda}{\Lambda_{кр}} - 1. \quad (6.35)$$

Следует заметить, что во многих случаях l (или Λ) довольно неудовлетворительно определяются многогрупповыми расчетами (для реакторов на быстрых нейтронах расхождение с экспериментом

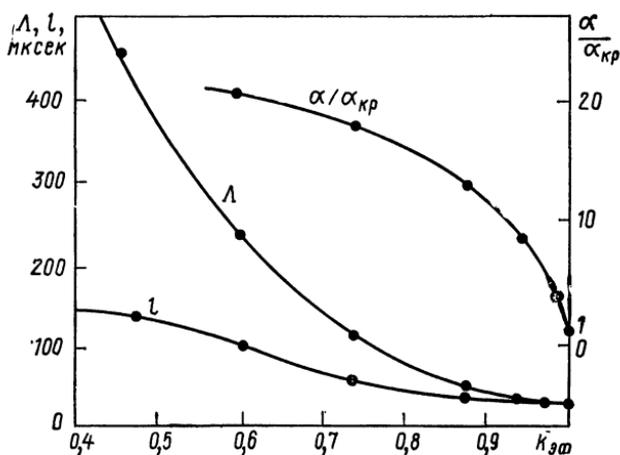


Рис. 14. Зависимость Λ , l , $\alpha/\alpha_{кр}$ от $k_{эф}$, измеренная импульсным методом при эквивалентном замещении делящегося вещества в активной зоне ($\alpha/\alpha_{кр}$ — изменение асимптотического декремента при увеличении подкритичности, отнесенное к критическому $\alpha_{кр}$) [89, 93]

нередко достигает 50%, а иногда и 100%!). Поэтому для анализа быстротекающих динамических процессов предпочтительнее использовать экспериментальные данные по l и Λ .

Б. Измерения эффективной доли западывающих нейтронов $\beta_{эф}$. Параметр $\beta_{эф}$ — основная естественная масштабная единица для каждого реактора при измерении на практике всяких реактивностей, и в этом смысле $\beta_{эф}$ является величиной первостепенной важности при всяких сравнениях эксперимента и расчета (не говоря уже о том, что она служит мерой

безопасных надкритичностей при всех работах на реакторе!). По общему определению $\beta_{\text{эф}}$ выражается отношением [39]

$$\beta_{\text{эф}} = \frac{1}{J_F} \sum_{i=1}^6 \beta_i \int dr \int dv \varphi^+ f_i(v) \int v \Sigma_f(r, v') \varphi(r, v') dv'. \quad (6.36)$$

Рассмотрим пять способов измерения $\beta_{\text{эф}}$, основанных на теории возмущений.

1. Заменяв делящееся вещество в объеме δV_k эквивалентным поглотителем (аналогично тому, как это сделано в описанном методе измерения Λ_p) в реакторе вблизи критического состояния и измерив возмущения не в $\delta\alpha$ (как для определения Λ_p), а в долях $\beta_{\text{эф}}$ по периоду разгона, получим

$$\delta\rho_k \equiv \left(\frac{\delta k_{\text{эф}}}{\beta_{\text{эф}}} \right) = \frac{1}{\beta_{\text{эф}}} \left[\frac{\delta V_k}{J_F} \int \varphi^+ \mathbf{F} \varphi dv \right]. \quad (6.37)$$

Интегрирование таких эффектов по всей активной зоне дает в квадратных скобках 1, т. е. сумма эффектов возмущений $\delta\rho$ даст $1/\beta_{\text{эф}}$ [39]. Этот способ определения $\beta_{\text{эф}}$ осложняется необходимостью расчетных поправок на неполную эквивалентность поглощения нейтронов в делящемся веществе и его заместителе.

2. Определяя величины Λ_p для нескольких подкритических состояний реактора и значения декрементов α для них [как было описано в п. А], экстраполируем данные к состоянию $k_{\text{эф}} = 1$ (например, по калиброванному органу регулирования). Полученные данные $\alpha_{\text{кр}}$ и $\Lambda_{\text{кр}}$ дают $\beta_{\text{эф}} = \alpha_{\text{кр}} \Lambda_{\text{кр}}$. Этот способ [90] точнее предыдущего, так как опирается на данные для серии состояний реактора, а не на одно критическое.

3. Для однородных однозонных голых систем типа «Годива» (см. разд. 5.2) или «Джезбель» [10, 144] величины $\beta_{\text{эф}}$ можно определить, измерив СКР на границе реактора. По данным таких измерений (СКР в долях $\beta_{\text{эф}}$) находится увеличение радиуса ($\delta R/R$), нужное для перевода реактора из критического состояния в критическое состояние на одних мгновенных нейтронах. Различие в $k_{\text{эф}}$ (получаемое для двух таких сферических систем многогрупповым расчетом в S_4 -приближении)* дает абсолютное значение $\beta_{\text{эф}}$.

Таким путем были определены первые точные значения $\beta_{\text{эф}}$ для голых сфер из ^{235}U , ^{239}Pu , ^{233}U («Годива», «Джезбель», «Скайду») [10, 39, 144].

4. Интеграл реактивности J материалов реактора (измеренный в долях $\beta_{\text{эф}}$) согласно (5.25) должен равняться $2(1 - 1/k^+)/\beta_{\text{эф}}$. Если k^+ получить из численных расчетов реактора, то из J можно

* Этого расчета можно было бы избежать, так как, зная, что $4\pi R^2 K(R) \delta R = \beta_{\text{эф}}$, по соотношению (5.45) имеем $\beta_{\text{эф}} = J \delta R/R$. Вычисление интеграла реактивности J даже в диффузионном приближении дает погрешность 2% [97] и приводит к нужному результату оценки $\beta_{\text{эф}}$.

найти $\beta_{\text{эф}}$. Такой путь был опробован в работе [146] для критической сборки ZR-4 и дал результаты близкие к результатам, полученным методом Фейнмана [39].

5. Вклад в реактивность, вносимый нейтронами деления, рождающимися в активной зоне реактора, составляет (для объема ΔV вокруг точки r)

$$K_F(r) = \frac{\Phi_f^+(r) \int v \Sigma_f(r, v) \Phi(r, v) dv}{J_F} \Delta V \equiv \frac{\Phi_f^+(r) v f(r)}{\int \Phi_f^+(r) v f(r) dr} \Delta V. \quad (6.38)$$

Если $K_F(r)$ измерено в долях $\beta_{\text{эф}}$ и результаты проинтегрированы по всему объему системы, то

$$\beta_{\text{эф}} = \int K_F(r) dr. \quad (6.39)$$

Задачу можно упростить, если измерять абсолютное число делений в одной точке $f(0)$ (например, в центре реактора)* и относительное $q(r) = f(r)/f(0)$ распределение плотности делений в реакторе — по отношению к этой точке. Затем должна быть измерена псевдореактивность нейтронов источника деления (^{252}Cf) калиброванной интенсивности Q по всем точкам активной зоны в долях $\beta_{\text{эф}}$:

$$[k_Q(r)/\beta_{\text{эф}}] = \Phi_f^+(r) Q / J_F \beta_{\text{эф}}. \quad (6.40)$$

Тогда из (6.38) — (6.40) получаем

$$\beta_{\text{эф}} = \frac{f(0)}{Q} \int q(r) k_Q(r) dr. \quad (6.41)$$

Этим методом были измерены $\beta_{\text{эф}}$ на двух сборках реакторов на быстрых нейтронах с ураном (40%-ного обогащения) и плутонием [127].

Результаты измерений $\beta_{\text{эф}}$ различными способами на разных реакторах сравниваются с расчетными значениями в табл. 9. Следует заметить, что $\beta_{\text{эф}}$ — вообще весьма консервативная величина, слабо меняющаяся с подкритичностью реактора, мало чувствительная к выбору функций (φ_λ^+ , φ_λ , φ_α^+ , φ_α и т. п.), на которых она определяется [естественно, если в интеграле (6.36) и в J_F они одни и те же] [145]. Для величин Λ и l , напротив, выбор таких функций весьма существен и сильно меняет значения этих параметров [143].

2. Измерения функций ценности и других реакторных характеристик. Измерения функций ценности. Простейший способ заключается в помещении в выбранную точку реактора постоянного источника нейтронов с известным спектром энергий и регистрации отклика реактора на его излучение. Применение

* Ионизационной камерой деления абсолютного счета, лавсановыми пленками и т. п.

Эффективная доля запаздывающих нейтронов $\beta_{эф}$

Тип реактора	Способ измерения [литература]	Эксперимент	Расчет
Тепловой, гетерогенный, уран-водный	1 [152]	$0,0080 \pm 0,0002$	0,0080
Тепловой, гетерогенный, уран-водный	2 [90]	$0,0081 \pm 0,0001$	0,0079
Быстрые голые гомогенные: «Годива» (урановый)	3 [10, 39, 144]	$0,00659 \pm 0,00009$	0,00664
«Джезель» (плутониевый)		$0,00194 \pm 0,00006$	0,00195
Тепловой, гетерогенный	4 [146]	$0,0076 \pm 0,0003$	0,0079
Быстрый, квазигомогенный: урановый (40%-ное обогащение), плутониевый	5 [127]	$0,0078 \pm 0,0003$ $0,00233 \pm 0,00010$	0,0072 0,00230

источников на основе реакций (γ, n) , (α, n) $Sb - Be$, $Po - {}^7Li$, $Po - CaF_2$, $Po - {}^{11}B$, $Po - Be$ и других перекрывает область энергий от 39 кэв и до 4,5 Мэв [147], хотя протяженность спектров нейтронов таких источников не позволяет легко отнестись измеренные ценности к конкретным значениям энергии нейтронов [147].

Различные модификации способов измерения функций ценности в основном разработаны применительно к критическим либо неглубоко подкритическим реакторам. Их подробный обзор дан в работе [69]. Целый ряд практических предосторожностей см. в [67].

Здесь же упомянем еще только об одном способе измерения функции ценности нейтронов деления, применимом для глубоко подкритических реакторов и позволяющем определить для них условно-критическую функцию ценности, служащую для определения больших реактивностей [28, 56, 98, 145].

Нейтронное поле в подкритическом реакторе φ_S при помещении в точку \mathbf{r}_S «точечного» источника со спектром деления (${}^{252}Cf$) интенсивностью Q описывается известным уравнением (см. разд. 1.3)

$$F\varphi_S - G\varphi_S = -\chi Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S). \quad (6.42)$$

Это же состояние подкритического реактора можно описать условно-критическим сопряженным уравнением (2.34), т. е.

$$\lambda F^+\varphi^+ - G^+\varphi^+ = 0. \quad (6.43)$$

Умножим скалярно (6.42) на φ^+ и (6.43) на φ_S и вычтем второе из первого. В результате получим

$$\int \Phi_f^+(\mathbf{r}) f(\mathbf{r} | \mathbf{r}_S) d\mathbf{r} = \frac{Q}{\lambda - 1} \Phi_f^+(\mathbf{r}_S), \quad (6.44)$$

где $f(\mathbf{r} | \mathbf{r}_S)$ — плотность делений в точке \mathbf{r} реактора при положении источника в точке \mathbf{r}_S .

В эксперименте показания детектора в малом объеме δV_i (вокруг точки r_i) дают значения $C(r_i) = \eta^f(r_i)$, где η — эффективность детектора по отношению к плотности делений в веществе активной зоны. (Всю активную зону реактора считаем разбитой на N таких объемов δV_i .) При расположении источника в элементе объема δV_S можно представить (6.44) системой линейных уравнений, заменяющих интегральное уравнение (источник последовательно располагается в каждом из N элементарных объемов активной зоны):

$$\sum_{i=1}^N \bar{\Phi}_i^+ C_{iS} \delta V_i = \xi \bar{\Phi}_S^+ \delta V_S; \quad S = 1, 2, \dots, N. \quad (6.45)$$

Здесь $\bar{\Phi}_i^+$ — ценность нейтронов Φ_i^+ , усредненная по объему δV_i ; C_{iS} — показания детектора в объеме δV_i при положении источника в δV_S . Постоянная $\xi = Q/\eta(\lambda - 1)$ может быть найдена как наибольшее собственное значение матрицы коэффициентов системы уравнений (6.45), — тем самым отпадает необходимость калибровки источника, эффективности детектора и т. п. Последующее нахождение ценностей $\bar{\Phi}_i^+$ — дело уже простой обработки, возможной на малых ЭВМ. Пример такого пути определения ценности дан в [98, 145].

Измерения нормировочного интеграла в о з м у щ е н и й (ЦНД). Поскольку в подавляющее большинство формул теории возмущений входит нормировочный интеграл J_F (ЦНД), то для сравнения экспериментальных и расчетных результатов весьма ценно определить эту величину для данного реактора непосредственно экспериментальным путем.

Наиболее простым способом определения J_F служит прецизионное измерение псевдореактивности калифорниевского источника (калиброванной интенсивности) в режиме линейного роста мощности точно критического реактора. Тогда из (6.21) можно получить значение J_F , если интенсивность источника Q заменить фактической интенсивностью генерации нейтронов деления в материале реактора. Для этого должно быть измерено абсолютное число делений (в месте, где располагался источник) [84, 148].

— * —

Рассмотренные выше отдельные частные примеры определения характеристик реакторов на основе использования теории возмущений далеко не полностью демонстрируют ее возможности. В частности, многочисленные случаи применения теории возмущений для определения и анализа температурных, мощностных и динамических эффектов в реакторах различных типов остались вне рамок этой книги. Ознакомиться с ними можно по ряду специальных книг, например [157, 158].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Усачев Л. Н. Уравнение для ценности нейтронов, кинетика реакторов и теория возмущений. — В кн.: Реакторостроение и теория реакторов. М., Изд-во АН СССР, 1955, с. 251.
2. Кадомцев Б. Б. О функции влияния в теории переноса лучистой энергии. — «Докл. АН СССР», 1957, т. 113, № 3, с. 541.
3. Weinberg A. M. Current Status of Nuclear Reactor Theory. — «Amer. J. Phys.», 1952, v. 20, N 7, p. 401.
4. Hurwitz H. Note on Theory of Danger Coefficients. — Report KAPL-98, Sept. 1948.
5. Глестон С., Эдлунд М. Основы теории ядерных реакторов. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
6. Pendlebury E. D. General Perturbation Theory in Neutronics. — «Proc. Phys. Soc. A», 1955, v. 67, N 413A, p. 474.
7. Марчук Г. И., Орлов В. В. К теории сопряженных функций. — В кн.: Нейтронная физика. Под ред. П. А. Крупчицкого. М., Госатомиздат, 1961, с. 30.
8. Ядерные реакторы для исследовательских целей (Материалы Комиссии по атомной энергии США). Т. 1. Физика ядерных реакторов. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
9. Кодд Д., Шеферд Л., Тайт Д. Физика реакторов на быстрых нейтронах. — В кн.: Успехи в области ядерной энергии. Пер. с англ. Под ред. В. И. Калашниковой. М., Изд-во иностр. лит., 1958, с. 289.
10. Хансен Дж. Доклад № 592 (США) на Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958. — В кн.: Физика ядерных реакторов (Избранные доклады иностранных ученых. Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии). М., Изд-во ГУИАЭ, 1959, с. 145.
11. Гурвиц Х., Эрлих Р. Системы на высокообогащенном ядерном горючем с использованием тепловых и промежуточных нейтронов. — См. [9], с. 362.
12. The Physics of Intermediate Spectrum Reactors. Ed. J. R. Stehn (US AEC, 1958). (См.: Физика промежуточных реакторов. Пер. с англ. Под ред. И. А. Стенбока. М., Госатомиздат, 1961.)
13. Пупко В. Я. Анализ зависимости между критической загрузкой и критическим объемом для реакторов различного типа. — В сб.: Физика и теплофизика реакторов. Приложение № 1 к журн. «Атомная энергия». М., Госатомиздат, 1961.
14. Галанин А. Д. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М., Атомиздат, 1957.
15. Марчук Г. И. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958.
16. Hansen G. E., Maier C. Perturbation Theory of Reactivity Coefficient for Fast-Neutron Critical Systems. — «Nucl. Sci. Engng», 1960, v. 8, N 6, p. 532.
17. Engle L. B., Hansen G. E., Paxton H. C. Reactivity Contributions of Various Materials in Topsy, Godiva and Jezebel. — Ibid., p. 543.
18. Roach W. H. Computational Survey of Idealized Fast Breeder Reactors. — Ibid., p. 621.
19. Усачев Л. Н. Теория возмущений для коэффициента воспроизводства и других отношений чисел различных процессов в реакторе. — «Атомная энергия», 1963, т. 15, вып. 6, с. 472.
20. Некоторые новые аспекты применения сопряженных функций и теории возмущений в расчетах реакторов и защиты. Доклад № 364 (СССР) на Третьей международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1964. N. Y., 1965, v. 4, p. 359. Авт.: А. А. Абагян, Г. И. Дружинина, А. А. Дубинин и др.
21. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов. Пер. с англ. Под ред. В. Н. Артамкина. М., Атомиздат, 1974.

22. **Вейнберг А., Вигнер Е.** Физическая теория ядерных реакторов. Пер. с англ. Под ред. Я. В. Шелелева. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
23. **Дэвисон Б.** Теория переноса нейтронов. Пер. с англ. Под ред. Г. И. Марчука. М., Атомиздат, 1960.
24. **Марчук Г. И.** Методы расчета ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1961.
25. **Шихов С. Б.** Вопросы математической теории реакторов. М., Атомиздат, 1973.
26. **Смелов В. В.** Лекции по теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1972.
27. **Стумбур Э. А.** Импульсный нейтронный метод и элементы его теоретического обоснования. — В кн.: Теоретические и экспериментальные проблемы нестационарного переноса нейтронов. Под ред. В. В. Орлова, Э. А. Стумбура. М., Атомиздат, 1972, с. 80.
28. **Стумбур Э. А., Матвеенко И. П., Шокодько А. Г.** Интегральные импульсные методы измерения реактивности. — Там же, с. 245.
29. **Определение** нейтронно-физических констант в экспериментах с импульсными нейтронными источниками. — «Ядерные константы», 1972, вып. 10, с. 246 (М., ЦНИИАтоминформ). Авт.: Э. А. Стумбур, А. М. Аврамов, Ю. Е. Егоров и др.
30. **Нейтронно-физические характеристики** $U+Ve$ - и $U+BeO$ -систем. Доклад № 362 (СССР) на Третьей международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1964. N. Y., 1965, v. 3, p. 248. Авт.: И. И. Бондаренко, В. П. Гарин, Р. К. Гончаров и др.
31. **Галанин А. Д.** Распределение нейтронной плотности в решетке гетерогенного реактора вблизи слабого возмущения. — В сб.: Физика ядерных реакторов. Т. 1. М., Атомиздат, 1966, с. 280.
32. **Орлов В. В.** Препринт ФЭИ-62, Обнинск, 1966.
33. **Орлов В. В.** О ценности нейтронов и теории возмущений для расчета характеристик ядерных реакторов. — В сб.: Вопросы физики ядерных реакторов. Труды Физико-энергетического ин-та. Обнинск, Изд. ФЭИ, 1968, т. 1, вып. 1, с. 38.
34. **Усачев Л. Н., Зарицкий С. М.** Вычисление вариаций времени жизни нейтронов, реактивности, вносимой образцом, и эффективной доли запаздывающих нейтронов при помощи теории возмущений. — «Бюлл. информ. центра по ядерным данным», 1965, вып. 2, с. 242 (М., ЦНИИАтоминформ).
35. **Gandini A.** A Generalized Perturbation Method for Bi-Linear Functionals of the Real and Adjoint Neutron Fluxes. — «J. Nucl. Energy», 1967, v. 21, N 10, p. 755.
36. **Льюинс Дж.** Ценность. Сопряженная функция. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1972.
37. **Stacey W. H.** Variational Estimates of Reactivity Worths and Reaction Rate Ratios in Critical Nuclear Reactors. — «Nucl. Sci. Engng», 1972, v. 48, N 4, p. 444.
38. **Greenspan E.** A Generalized Perturbation and Variational Principle for Multiple Ratios of Linear and Bilinear Functionals. — «Nucl. Sci. Engng», 1975, v. 56, N 1, p. 107.
39. **Кипин Д. Р.** Физические основы кинетики ядерных реакторов. Пер. с англ. Под ред. В. А. Кузнецова. М., Атомиздат, 1967.
40. **Зарицкий С. М., Ракитин И. Д.** Вычисление вариации реактивных эффектов с помощью теории возмущений. — Препринт ФЭИ-136, Обнинск, 1968.
41. **Владимиров В. С.** Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. — «Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР», 1959, № 59 (М., Изд-во АН СССР).
42. **Марчук Г. И., Лебедев В. И.** Численные методы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1971.
43. **Стумбур Э. А., Сазонов С. П.** Применение теоремы об интеграле реактивности для анализа отдельных задач реакторной физики. — См. [33], с. 203.

44. Усачев Л. Н., Зарицкий С. М. Точность расчета характеристик реакторов в зависимости от точности элементарных констант. — Там же, с. 82.
45. Зарицкий С. М., Троянов М. Ф. О требованиях к точности констант для расчета реакторов. — В сб.: Физика ядерных реакторов. Вып. 2. М., Атомиздат, 1970, с. 168.
46. Могильнер А. И. Интегральный метод абсолютных измерений некоторых характеристик ядерных реакторов. — «Атомная энергия», 1968, т. 24, № 1, с. 78.
47. Стумбур Э. А. Исследования размножающих сред импульсным нейтронным методом. — В кн.: Импульсные и статистические методы исследования реакторов (Труды Всесоюзной летней школы физиков). Т. 1. Обнинск, Изд. ФЭИ, 1969, с. 227.
48. Экспериментальные быстрые реакторы в СССР. — В кн.: Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1958. (Доклады советских ученых). Т. 2. Ядерные реакторы и ядерная энергетика. М., Атомиздат, 1959, с. 215. Авт.: А. И. Лейпунский, В. Г. Грабин, Н. Н. Аристархов и др.
49. Стумбур Э. А. Теорема об интеграле реактивности. — «Атомная энергия», 1967, т. 23, вып. 3, с. 255.
50. Критические параметры гомогенных размножающих систем. М., Атомиздат, 1965. Авт.: Г. И. Марчук, В. П. Кочергин, А. И. Невиница, О. П. Узнадзе.
51. Мегреблиан Р., Холмс Д. Теория реакторов. Пер. с англ. Под ред. П. А. Гаврилова. М., Госатомиздат, 1962.
52. Мёррей Р. Физика ядерных реакторов. Пер. с англ. Под ред. Г. А. Батя. М., Атомиздат, 1959.
53. Лукьянов А. А. Замедление и поглощение резонансных нейтронов. М., Атомиздат, 1974.
54. Кинг Дж. С. Измерения коэффициентов реактивности и эффекта самоэкранирования. — См. [12], с. 145.
55. Стюарт Х. Б., Сторм М. Л. Систематизация коэффициентов реактивности. — Там же, с. 123.
56. Стумбур Э. А. Об измерениях реактивности импульсными методами. — «Атомная энергия», 1970, т. 29, № 3, с. 212.
57. Бекурц К., Виртц К. Нейтронная физика. Пер. с англ. Под ред. Л. А. Микаэляна, В. И. Лебедева. М., Атомиздат, 1968.
58. Габетлер Г. И., Мартино М. А. Теория существования и теория спектров для многогрупповой диффузионной модели. — В кн.: Теория ядерных реакторов. Пер. с англ. Под ред. Г. А. Батя. М., Госатомиздат, 1963, с. 145.
59. Stumber E. A. Reactivity Integral Theorem for a Critical Reactor. — ANL-Trans-645 (1968).
60. Винг Дж. М. Кинетическая теория и спектральные проблемы. — См. [58], с. 160.
61. Heterogeneity Calculation for Fast Reactors by a Perturbation Method. — «Nucl. Sci. Engng», 1966, v. 24, N 2, p. 153. Auth.: F. Storrer, A. Khairallah, M. Cadilhac, P. Benoist.
62. McGrath P. E., Foell W. K. Integral Transport Theory Analysis of Central Reactivity Worth Measurements. — «Nucl. Sci. Engng», 1971, v. 45, N 3, p. 237.
63. Mitani H. Higher Order Perturbation Method in Reactor Calculations. — «Nucl. Sci. Engng», 1973, v. 51, N 2, p. 180.
64. Akl D., Laponche B. Calculation of the Flux Variation and the Reactivity Change Induced by a Central Perturbation in a Fast Critical Assembly. The Reduced Reactor Model. — «Nucl. Sci. Engng», 1974, v. 54, N 4, p. 387.
65. Komata M. New Interpretations for the Usachev-Gandini Perturbation Theory. — «Nucl. Sci. Engng», 1972, v. 47, N 4, p. 489.
66. Stacey W. M. Variational Estimates and Generalized Perturbation Theory for the Ratios of Linear and Bilinear Functionals. — «J. Math. Phys.», 1972, v. 13, N 8, p. 1119.

67. **Mihalczo J. T.** Neutron Importance and Fission Density in Uranium-235 — Enriched Uranium and Plutonium Metal Spheres. — «Nucl. Sci. Engng», 1975, v. 56, N 3, p. 271.
68. **Gandini A., Salvatores M.** New Perturbation Methods for Coupled Reactors. — «Nucleonik», 1969, Bd 12, N 2, S. 80.
69. **Greenspan E., Cady K. B.** The Measurement of Neutron Importance Functions. — «J. Nucl. Energy», 1970, v. 24, N 11, p. 529.
70. **Stacey W. M.** Variational Methods in Nuclear Reactor Physics. N. Y., Academic Press, 1974.
71. **Вулих Б. З.** Введение в функциональный анализ. М., «Наука», 1967.
72. **Краснов М. Л.** Интегральные уравнения. М., «Наука», 1975.
73. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Пер. с англ. Под ред. А. Г. Костюченко. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
74. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. Пер. с англ. Под ред. В. П. Маслова. М., «Мир», 1972.
75. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
76. **Рисс Ф., Секефальвь-Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. Пер. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
77. **Маделунг Э.** Математический аппарат физики. Пер. с нем. Под ред. В. И. Левина. М., Физматгиз, 1960.
78. **Соболев В. И.** Лекции по дополнительным главам математического анализа. М., «Наука», 1968.
79. **Ахиезер Н. И., Глазман И. М.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., Гостехтеориздат, 1950.
80. **Воеводин В. В.** Численные методы алгебры. М., «Наука», 1966.
81. **Воеводин В. В.** Линейная алгебра. М., «Наука», 1974.
82. **Шихов С. Б., Шкурпелов А. А.** Анализ нестационарного кинетического уравнения переноса нейтронов в замедляющих и размножающих средах. — См. [27], с. 97.
83. **Шихов С. Б., Шишков Л. К.** Теория возмущений высших порядков для решения некоторых задач расчета реактора. — В сб.: Теория и физика реакторов. Под ред. Л. Н. Юровой. М., Атомиздат, 1967, с. 3.
84. **Karam R. A.** Measurements of the Normalization Integral and the Spatial Distribution of the Importance of Fission Neutrons. — «Nucl. Sci. Engng», 1969, v. 37, N 2, p. 192.
85. **Mizoo N.** The Perturbation Method for the Neutron Diffusion Approximation. — «J. Nucl. Sci. Technol.», 1968, v. 5, N 1, p. 36.
86. **Gandini A.** Perturbation Methods in Nuclear Reactors from the Importance Conservation Principle. — «Nucl. Sci. Engng», 1969, v. 35, N 1, p. 141.
87. **Зарицкий С. М.** О некоторых возможных формулах теории возмущений. — В сб.: Физика ядерных реакторов. Вып. 1. Под ред. Л. Н. Юровой. М., Атомиздат, 1968, с. 39.
88. **Зарицкий С. М.** Диффузионные формулы теории возмущений. — См. [87], с. 55.
89. **Определение параметров кинетики подкритических сборок.** — «Атомная энергия», 1972, т. 33, вып. 1, с. 579. Авт.: Б. И. Колосов, И. П. Матвеевко, В. Я. Пупко и др.
90. **Изучение высокообогащенных уран-водных систем в глубокой подкритичности методом импульсного нейтронного источника.** — См. [27], с. 299. Авт.: Э. А. Стумбур, И. П. Матвеевко, В. А. Тарасов, А. Г. Шокдько.
91. **Применение метода импульсного нейтронного источника к системам с неоднородностями.** — См. [87], с. 3. Авт.: Л. Н. Юрова, В. Л. Ромоданов, В. Е. Смирнов и др.
92. **Экспериментальное и расчетное определение влияния пространственного расположения локальной неоднородности на диффузионные свойства среды.** — Там же, с. 11, Авт.: Л. Н. Юрова, В. Л. Ромоданов, В. И. Давыдов и др.

93. **Исследования** размножающих систем и замедлителей с помощью импульсного нейтронного источника. — В кн.: Труды Физико-энергетического института. Под общ. ред. В. А. Кузнецова. М., Атомиздат, 1974, с. 138. Авт.: Э. А. Стумбур, Б. И. Колосов, И. П. Матвеевко и др.
94. **Стюарт Х. Б., Ла-Виолетт Ф. Дж., Кригер Т. Дж.** Методика обратного размножения нейтронов в сборке. — См. [12], с. 66.
95. **Стумбур Э. А.** О некоторых интегральных соотношениях в теории реакторов. — «Атомная энергия», 1968, т. 25, № 6, с. 522.
96. **Стумбур Э. А.** Интегралы реактивности и их применение для решения некоторых задач физики реакторов. Препринт ФЭИ-142. Обнинск, 1968.
97. **Орлов В. В., Стумбур Э. А.** Физическая интерпретация теоремы об интеграле реактивности. — «Атомная энергия», 1970, т. 28, вып. 4, с. 353.
98. **Комбинированный** импульсный метод измерения больших реактивностей для реакторов с отражателями. — «Атомная энергия», 1974, т. 36, вып. 3, с. 178. Авт.: Э. А. Стумбур, А. Г. Шокодько, В. И. Журавлев и др.
99. **Стумбур Э. А., Сазонов С. П.** Определение критических параметров гомогенных реакторов методом компенсированных возмущений. — «Атомная энергия», 1969, т. 27, вып. 1, с. 55.
100. См. [30].
101. **Шварц Л.** Математические методы для физических наук. Пер. с франц. М., «Мир», 1965.
102. **Шилов Г. Е.** Математический анализ. Второй специальный курс. М., «Наука», 1965.
103. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967.
104. **Левин В. Е., Пупко В. Я.** Показатели эффективности материалов реактора и факторы утечки нейтронов. Препринт ФЭИ-298, Обнинск, 1972.
105. **Nakano M., Iijima T.** Interpretation of the Central Cell Reactivity Worth and Experimental Determination of a Characteristic Value of the Reactor Cell Composition k_m^+ . — «J. Nucl. Sci. Technol.», 1973, v. 10, N 2, p. 69.
106. **Nakano M.** Measurements of k -Infinity on Zero-Leakage Zoned System FCA IV). — «J. Nucl. Sci. Technol.», 1972, v. 9, N 7, p. 395.
107. **Studios of Unit K_∞ Lattices in Metallic Uranium Assemblies ZEBRA 8H, SNEAK 8, ERMINE and HARMONIE UK.** — In: Proc. of Intern. Symp. on Physics of Fast Reactors. Tokyo, 16—19 Oct. 1973, rep. A-28, v. 1, p. 537. Auth.: E. Darrouzet e. a.
108. **Могильнер А. И., Осипов В. А., Фокин Г. Н.** Экспериментальное определение абсолютной реактивности и других величин методом статистических весов. — «Атомная энергия», 1968, т. 24, № 1, с. 42.
109. **Kaplan S.** An Analogy between the Variational Principles of Reactor Theory and Those of Classical Mechanics. — «Nucl. Sci. Engng», 1965, v. 23, N 3, p. 234.
110. **Devooght J.** Perturbations, Mass and Critical Mass. — «Nucl. Sci. Engng», 1966, v. 26, N 3, p. 385.
111. **Tavel M. A., Clancy B. E., Pomraning G. C.** The Use of Noether's Theorem in Reactor Physics. — «Nucl. Sci. Engng», 1967, v. 29, N 1, p. 58.
112. **Stacey W. M.** Variational Flux Synthesis Methods for Multigroup Neutron Diffusion Theory. — «Nucl. Sci. Engng», 1972, v. 47, N 4, p. 449.
113. **Buslik A. J.** Extremum Variational Principles for the Monoenergetic Neutron Transport Equation with Arbitrary Adjoint Source. — «Nucl. Sci. Engng», 1969, v. 35, N 3, p. 303.
114. **Pomraning G. C.** Variational Principle for Eigenvalue Equations. — «J. Math. Phys.», 1967, v. 8, N 1, p. 149.
115. **Gandini A.** Comments on Variational Theory and Generalized Perturbation Methods. — «Nucl. Sci. Engng», 1975, v. 57, N 3, p. 248.
116. **Stacey W. M.** Response to «Comments on Variational Theory and Generalized Perturbation Methods». — Ibid., p. 249.
117. **Greenspan E.** Variational Versus Generalized Perturbation Theories — Are They Different? — Ibid., p. 250.
118. **Pomraning G. C.** A Derivation of Variational Principles for Inhomogeneous Equations. — «Nucl. Sci. Engng», 1967, v. 29, N 2, p. 220.

119. **Humbach W., Oldekop W.** Zur Theorie der Reaktivitäts befrages von Hoheräumen und eines Verfahrens zur Bestimmung von k_{∞} . — «Nukleonik», Bd 1, N 7, S. 265.
120. **Dušek H., Oldekop W.** Zur reaktorphysikalischen Störungstheorie höherer Ordnung und dem Gültigkeitsbereich der Störungstheorie erster Ordnung bei der Behandlung von Hohlräumen. — «Nukleonik», 1959, Bd. 1, N 9, S. 342.
121. **Кузнецов В. А.** Систематизация экспериментальных данных по критическим параметрам высокообогащенных реакторных систем. — В сб.: Физика ядерных реакторов. Т. 3. Обнинск, Изд. ФЭИ, 1966, с. 137.
122. **Graves G. A., Paxton H. C.** Critical Masses of Oralloy Assemblies. — «Nucleonics», 1957, v. 15, N 6, p. 90.
123. **Физика ядерных реакторов.** Пер. с англ. Под ред. И. А. Стенбока. М., Атомиздат, 1964.
124. **Bretscher M. M., Redman W. C.** Low Flux Measurements of ^{239}Pu and ^{235}U Capture-to-Fission Ratios in a Fast Reactor Spectrum. — «Nucl. Sci. Engng», 1970, v. 39, N 3, p. 368.
125. **Investigation of Neutron Spectra in Fast Critical Assemblies.** — См. [107], Rep. B-19, v. 2, p. 930. Auth.: Ju. A. Kazanskii e. a.
126. **Analysis of Integral Experiments Performed on Fast Critical Assemblies.** — См. [107], Rep. A-26, v. 1, p. 464. Auth.: V. A. Doolin e. a.
127. **Carpenter S. G., Gasidlo J. M., Stevenson J. M.** Measurements of the Effective Delayed-Neutron Fraction in Two Fast Critical Experiments. — «Nucl. Sci. Engng», 1972, v. 49, N 2, p. 236.
128. **Некоторые физические исследования на быстрых критических сборках БФС-1.** — «Атомная энергия», 1976, т. 40, вып. 5, с. 377. Авт.: В. А. Дулин, Ю. А. Казанский, В. Ф. Мамонтов, Г. И. Сидоров.
129. **Analysis of Central Reactivity Worths in Fast Critical Assemblies.** — «Nucl. Sci. Engng», 1970, v. 40, N 3, p. 414. Auth.: R. A. Karam, K. D. Dance, T. Nakamura, J. E. Marschall.
130. **Karam R. A., Kato W. Y.** On the Discrepancy between Measured and Calculated Central Reactivity Coefficients. — «Nucl. Sci. Engng», 1973, v. 52, N 2, p. 201.
131. **Redman W. C., Bretscher M. M.** Direct Determination of Uranium-235 Capture-to-Fission Ratio in a Zero-Power Reactor. — «Nucl. Sci. Engng», 1967, v. 27, N 1, p. 34.
132. **Изучение отношения ценности нейтронов спектра деления к ценности поглощаемых нейтронов в быстрых критических сборках.** Препринт ФЭИ-422, Обнинск, 1973. Авт.: В. А. Дулин, Ю. А. Казанский, В. Ф. Мамонтов и др.
133. **Redman W. C., Bretscher M. M.** Low-Flux Measurement of ^{235}U Episcadmium Capture-to-Fission Ratio. — «Nucl. Sci. Engng», 1968, v. 31, N 2, p. 247.
134. **Групповые константы для расчета ядерных реакторов.** М., Атомиздат, 1964. Авт.: Л. П. Абагян, Н. О. Базазянц, И. И. Бондаренко, М. Н. Николаев.
135. **Исследование эффективности различных материалов в быстрой сборке БФС-16.** — В кн.: Труды трехстороннего советско-бельгийско-голландского симпозиума по некоторым проблемам физики быстрых реакторов. Т. 2. М., ЦНИИАтоминформ, 1970, доклад № 36. Авт.: Н. Е. Горбатов, В. Ф. Мамонтов, В. И. Матвеев и др.
136. **Дулин В. А., Мамонтов В. Ф.** Учет эффектов самоэкранирования при измерении коэффициентов реактивности. Препринт ФЭИ-392, Обнинск, 1973.
137. **Основные принципы выбора органов регулирования быстрых энергетических реакторов, температурные и мощностные эффекты в быстрых реакторах.** — «Kernenergie», 1969, Bd 12, N. 4, S. 112. Авт.: В. В. Орлов, В. И. Матвеев, А. В. Жуков и др.
138. **Little W. W., Hardie R. W.** Discrepancy Between Measured and Calculated Reactivity Coefficients in Dilute Plutonium Fueled Fast Criticals. — «Nucl. Sci. Engng», 1969, v. 36, N 1, p. 115.
139. **Усачев Л. Н., Бобков Ю. Г.** Математическая теория эксперимента и обоб-

- шенная теория возмущений — эффективный подход к исследованию физики реакторов. — См. [29], с. 3.
140. **Hummel H. H., Stacey W. M.** Sensitivity of a Fast Critical Assembly to Uncertainties in Input Data Determined by Perturbation Theory. — «Nucl. Sci. Engng», 1974, v. 54, N 1, p. 35.
 141. **Baker A. R.** Comparative Studies of the Criticality of Fast Critical Assemblies. — In: Proceedings of the International Conference on Fast Critical Experiments and their Analysis. Argonne, 1966, Oct. 10—13. — ANL-7320, 1966, p. 116.
 142. **Lineberry M. J.** Estimation of Reactivity Worths by Local Calculation. — «Nucl. Sci. Engng», 1974, v. 54, N 2, p. 157.
 143. **Границы применимости α -метода для измерения реактивности в урановодных системах.** — См. [27], с. 275. Авт.: Э. А. Стумбур, Ш. С. Николайшвили, Б. И. Колосов и др.
 144. **Hansen G. E.** Status of Computational and Experimental Correlations for Los Alamos Fast-Neutron Critical Assemblies. — In: Physics of Fast and Intermediate Reactors (Proceedings of a Seminar, Vienna, 3—11 August 1961). Vienna, IAEA, 1962, v. 1, p. 445.
 145. **Анализ интегральных импульсных методов измерения реактивности.** Препринт ФЭИ-384, Обнинск, 1973. Авт.: Э. А. Стумбур, А. Г. Шокодыко, В. И. Журавлев, И. П. Матвеевко, З. Н. Мамотина.
 146. **Szatmary Z., Turi L.** Determination of β_{eff} by the Method of Statistical Weights and by Measuring the Absolute Power of the Reactor. — «Nukleonik», 1969, Bd 12, N 6, S. 241.
 147. **Tuttle R. J.** Neutron-Importance Measurements in the Advanced Epithermal Thorium Reactor (AETR) Critical Experiments. — «Nucl. Sci. Engng», 1965, v. 21, N 4, p. 451.
 148. **Redman W. C., Bretscher M. M.** Experimental Determination of the Perturbation Denomination in Fast Critical Assemblies. — «Nucl. Sci. Engng», 1971, v. 44, N 3, p. 451.
 149. **А «Benchmark» Series of Plutonium-Fueled Fast Critical Assemblies.** — «Trans. Amer. Nucl. Soc.», 1968, v. 11, N 2, p. 239. Auth.: W. G. Davey, A. M. Broomfield, P. I. Amundson e. a.
 150. **Комплекс БФС-1 — микротрон для изучения спектров нейтронов быстрых реакторов.** — «Атомная энергия», 1974, т. 36, вып. 1, с. 3. Авт.: А. И. Лейпунский, В. В. Орлов, Ю. А. Казанский и др.
 151. **Экспериментально-расчетные исследования физики органов регулирования реактора БН-350 на сборке БФС-22.** Препринт ФЭИ-306. Обнинск, 1972. Авт.: В. В. Орлов, М. Ф. Троянов, В. Ф. Мамонтов и др.
 152. **Perez-Belles R., Kington J. D., de Saussure G.** A Measurement of the Effective Delayed Neutron Fraction for the Bulk Shielding Reactor-1. — «Nucl. Sci. Engng», 1962, v. 12, N 4, p. 505.
 153. **Шихов С. Б.** Учет влияния изменения размеров на критическую массу быстрого реактора с помощью теории возмущений. — «Атомная энергия», 1959, т. 6, вып. 2, с. 162.
 154. **A Method of Reactor Physics Measurement with the Use of an Expanded System.** — «J. Nucl. Sci. Techn.», 1968, v. 5, N 4, p. 193. Auth.: R. Takeda, S. Matsuura, Y. Fujita, E. Takeuchi.
 155. **Gozani T., Stevens C. A.** Density Scaling of the Boltzmann Equation and Its Application. — «J. Nucl. Energy», 1968, v. 22, N 12, p. 751.
 156. **Seki Y.** Evaluation of the Second-Order Perturbation Terms by the Generalized Perturbation Method. — «Nucl. Sci. Engng», 1973, v. 51, N 2, p. 243.
 157. **Хетрик Д.** Динамика ядерных реакторов. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1975.
 158. **Хамелл Г., Окрент Д.** Коэффициенты реактивности в больших энергетических реакторах на быстрых нейтронах (США, 1970). Пер. с англ. М., Атомиздат, 1975.