Н. Г. ЧЕТАЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

Н. Г. ЧЕТАЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

С примечаниями
В. В. РУМЯНЦЕВА

Рекомендовано Государственным комитетом СССР по народному образованию для использования в учебном процессе студентами университетов и высших технических учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

ББК 22.213
Ч-52
УДК 531.01 (075.8)

Четаев Н. Г. **Устойчивость движения:** Учеб. руководство.— 4-е изд., испр.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.. 1990.— 176 с.— ISBN 5-02-014018-X.

Содержит строгое изложение основ теории устойчивости движения, именно тех исследований Ляпунова и автора, которые наиболее важны для прикладных задач устойчивости. Рассматриваются общие теоремы метода функций Ляпунова, в развитии которого автору принадлежит выдающаяся роль, устойчивость равновесий при потенциальных силах, устойчивость линейных систем, действие возмущающих сил на равновесие, устойчивость по первому приближению и в критических случаях одного нулевого и пары чисто мнимых корней, устойчивость неустановившихся и периодических движений.

Для студентов и аспирантов университетов и физико-технических институтов, а также инженеров, конструкторов и научных работников в области механики.

Рецензенты:
кафедра теоретической механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова;
доктор физико-математических наук *Д. Р. Меркин*

Учебное издание

ЧЕТАЕВ Николай Гурьевич

Устойчивость движения

Заведующий редакцией *Л. А. Русаков*
Редактор *В. И. Левантовский*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *А. П. Колесникова*
Корректоры *Т. Г. Егорова, И. Я. Кришталь*

ИБ № 32715

Сдано в набор 27.10.89. Подписано к печати 26.12.90. Формат $60\times90^{1}/_{16}$.
Бумага книжно-журнальная. Гарнитура обыкновенная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 11. Усл. кр.-отт. 11,25. Уч.-изд. л. 10,67. Тираж 4800 экз. Заказ № 4232.
Цена 2 руб.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

Ч $\dfrac{1603030000-142}{053(02)-90}$ 81-90

ISBN 5-02-014018-X

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Автор этой монографии Николай Гурьевич Четаев (1902—1959) — выдающийся русский ученый, крупнейший специалист в области аналитической механики, теории устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. Он внес огромный вклад в развитие теории устойчивости движения, созданной гениальным А. М. Ляпуновым (1857—1918) в конце прошлого столетия.

Исследования Ляпунова по теории устойчивости опередили свое время. При жизни у него не было учеников и последователей в этой области науки, и теория устойчивости Ляпунова длительное время после ее создания не только не развивалась, но и не применялась сколько-нибудь серьезно. И только в конце 20-х годов возник в нашей стране интерес к ляпуновской теории устойчивости. По-видимому, Н. Г. Четаев одним из первых понял физическую сущность теории Ляпунова, увидел ее огромное принципиальное значение и возможности технических приложений. В начале 30-х годов он установил свою общую теорему о неустойчивости движения и получил первые после Ляпунова результаты по обращению знаменитой теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия, организовал широкие исследования по развитию теории устойчивости и приложениям ее к решениям важных технических задач, став, по существу, научным преемником и продолжателем Ляпунова. Большую роль в разработке методов исследования устойчивости, в особенности метода функций Ляпунова, и решении многих важных проблем устойчивости сыграла созданная и возглавлявшаяся Н. Г. Четаевым казанская школа механиков.

В 1946 г. была опубликована монография Н. Г. Четаева «Устойчивость движения», явившаяся первой в мировой литературе после Ляпунова книгой по теории устойчивости движения. Небольшая по объему, лаконично написанная, эта книга содержит систематическое и строгое изложение теории устойчивости и ее методов, в особенности метода функций Ляпунова. Основное ее содержание составляют исследования по устойчивости движения, начатые Ляпуновым и продолженные автором применением и развитием метода функций Ляпунова, причем автор ограничился лишь теми исследованиями, которые имеют наибольшее значение для приложений. Важную роль играют в книге многочисленные примеры, ряд из которых не только иллюстрирует теорию, но и содержит ее развитие.

Монография Четаева явилась ценным научным руководством, получившим широкое признание. После ее опубликования значительно возрос интерес к проблемам устойчивости и появилось большое число работ многих авторов по теории устойчивости движения и ее приложениям к технике. Вслед за советскими учеными проблемами теории устойчивости интенсивно занялись многие зарубежные ученые.

Мировая научная литература по устойчивости движения содержит в настоящее время тысячи публикаций, в том числе сотни монографий и учебников многих авторов. Она весьма богата результатами как по развитию теории, так и по разнообразным приложениям.

Разработка теории устойчивости движения ведется по многим направлениям. Здесь надо назвать развитие и применение первого и особенно второго методов Ляпунова, в том числе метода вектор-функций Ляпунова, установление новых теорем, расширяющих и углубляющих эти методы; анализ существования функций Ляпунова и их эффективного построения; исследования устойчивости по первому приближению и в критических случаях, а также при постоянно действующих возмущениях; исследования устойчивости периодических и неустановившихся движений и устойчивости на конечном интервале времени; развитие теории приводимых и правильных систем, а также качественной теории дифференциальных уравнений; исследования устойчивости движения по отношению к части переменных, устойчивости гамильтоновых систем и устойчивости в случае внутренних резонансов; разработка методов исследования устойчивости на ЭВМ; распространение методов Ляпунова на системы, описываемые аппаратом, отличным от обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнения с последействием), на системы с распределенными параметрами, на сплошные среды и многие другие. Метод функций Ляпунова с успехом применяется также во многих областях анализа, например, в получении оценок приближенных интегрирований, в теории оптимального управления и оптимальной стабилизации, в теории дифференциальных игр, в теории нелинейных колебаний и во многих других областях науки.

Несмотря на существенное развитие теории устойчивости за последние сорок с лишним лет, прошедшие со времени первого издания, книга Н. Г. Четаева не утратила своего важного значения ценного научного руководства, содержащего компактное и ясное изложение основ теории устойчивости движения. Наряду с «Общей задачей об устойчивости движения» А. М. Ляпунова она навсегда вошла в сокровищницу науки и служит и будет служить богатым источником идей для новых поколений ученых. Книга может быть использована в качестве пособия по основам теории устойчивости движения для аспирантов и студентов старших курсов университетов.

Третье издание книги, вышедшее в 1965 г., воспроизводило без изменений второе, исправленное издание 1955 г.

В настоящем, четвертом, издании исправлены замеченные немногочисленные опечатки. Курсивом выделены формулировки основных результатов и определяемые термины.

Существенную помощь издательству при подготовке нового издания оказал член-корреспондент АН СССР В. В. Румянцев. Им подготовлены помещенные в конце книги примечания, содержащие некоторые пояснения и сведения об обращении основных теорем метода функций Ляпунова, а также дополнения некоторых изложенных результатов, опубликованные автором после выхода первого издания книги (1946 г.). Ссылки на эти примечания в тексте даны звездочками.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ 1955 г.

Вопросы устойчивости имеют принципиальное и прикладное значение. Перед техникой и физикой все чаще встают задачи об устойчивости, при решении которых приходится применять точные методы Ляпунова, так как более грубые подходы к ним не являются удовлетворительными. Изучение методов Ляпунова и применение этих методов становятся все более и более необходимыми для повседневной технической практики.

Указанные соображения обусловили одну из основных целей, преследуемых содержанием книги. В ней излагаются те исследования Ляпунова, которые мне представляются наиболее важными для прикладных задач об устойчивости движений. Однако я не стремился при этом к полному изложению всех полученных результатов.

Я стремился изложить результаты Ляпунова просто, без ложной модернизации; привел нужные сведения из теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; изложил некоторые свои результаты. Некоторые из примеров (о продольной устойчивости самолетов и т. п.) исходят из известного моделирования систем с бесконечным числом степеней свободы и приведены без дискуссии о справедливости или несправедливости моделирования.

Чтобы упростить цитирование использованных мест из сочинения Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения», после номера параграфа поставлен в квадратные скобки номер соответствующего параграфа указанного труда.

Второе издание книги повторяет первое; исправлены замеченные опечатки и некоторые задачи заменены другими.

Успехи, достигнутые в теории устойчивости движения после первого издания книги, не нашли отражения в настоящем издании. Для их полного описания требуется много книг и они не исчерпываются прекрасными книгами В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [1], И. Г. Малкина [2], А. И. Лурье [3], Г. Н. Дубошина [4], М. А. Айзермана [5], Ф. Р. Гантмахера [6], А. М. Летова [7]. Исследования Н. Н. Боголюбова, К. П. Персидского, Н. П. Еругина, М. Г. Крейна, Е. А. Барбашина, Н. Н. Красовского и др. заслуживают отдельных книг, написанных в свойственном авторам стиле изложения.

---

[1] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1949.

[2] Малкин И. Г. Методы Пуанкаре и Ляпунова в теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1949; Малкин И. Г. Теория устойчивости движения.— М.: Гостехиздат, 1952.

[3] Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования.— М.: Гостехиздат, 1951.

[4] Дубошин Г. Н. Основы теории устойчивости движения.— М.: Изд-во МГУ, 1952.

[5] Айзерман М. А. Теория автоматического регулирования двигателей.— М.: Гостехиздат, 1952.

[6] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1988.

[7] Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем.— М.: Гостехиздат, 1955.

ГЛАВА 1

ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ

Два замечания

1. Динамика является наукой о действительных равновесиях и движениях материальных систем. Галилей и Ньютон открыли ее начала и показали их достоверность опытами над падением тяжелых тел и объяснением движений планет. Но не каждое состояние механической системы, отвечающее математически строгому решению как уравнений равновесия, так и дифференциальных уравнений движения, наблюдается в действительности. Никто, например, не видел, чтобы тяжелый карандаш стоял вертикально на гладком, горизонтальном столе, опираясь на свой остро отточенный конец. Ненаблюдаемость состояний, отвечающих подобным строгим решениям, объясняется неучитываемыми малыми силами и незначительными отклонениями в начальном состоянии материальной системы, какие в действительности неизбежно существуют и возмущают равновесия и движения в одних случаях слабо, а в других сильно. Равновесия и движения, слабо изменяющиеся при возмущениях, были названы устойчивыми, а прочие неустойчивыми.

Общего принципа для выбора решений, отвечающих устойчивым состояниям, в механике не было дано; она приняла характер науки об идеализированных системах и для своего строгого применения к нашей природе принципиально каждый раз требует решения задач устойчивости. Лишь Торричелли в статике рассматриваемых в его время тяжелых тел предлагал принцип, корни которого теряются в глубокой древности и который давал лишь устойчивые положения равновесия.

Принципу Торричелли обязан своим происхождением другой принцип, которым воспользовались для решения с большой легкостью различных вопросов статики. Этот принцип заключается в следующем: в системе тяжелых тел, находящихся в равновесии, центр тяжести занимает относительно наиболее низкое положение, какое только возможно [1]).

---

[1]) Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. 1: Пер. с фр.— 2-е изд.— М.: Гостехиздат, 1950.— (См. ч. I, отдел 1, п. 16).

В динамике подобного принципа для отбора строгих решений, отвечающих устойчивым движениям, дано не было, хотя задачей устойчивости занимались многие выдающиеся механики — Лагранж, лорд Кельвин, Раус, Жуковский, Пуанкаре. Лагранж обобщил принцип Торичелли, доказав теорему об устойчивости изолированного равновесия механической системы, когда силовая функция действующих на систему сил имеет максимум в этом положении равновесия. Раус, развивая метод игнорирования циклических координат, путем простого переноса указанной теоремы Лагранжа нашел критерий устойчивости для некоторых циклических движений.

Общую задачу об устойчивости движения в ее классической постановке разрешил Ляпунов в своем знаменитом сочинении «Общая задача об устойчивости движения» (Харьков, 1892) [1]).

2. Содержание инженерного искусства также ставит вопросы о действительности намеченного к реализации проекта, который опирается по существу на некоторое решение либо уравнений равновесия, либо дифференциальных уравнений движения задуманной механической системы. Необходимость решения этих вопросов неизбежно приводит и технику к задачам устойчивости, поскольку реализация проекта сопровождается некоторыми допусками в изготовлении, а само инженерное сооружение вынуждено работать под воздействием сил, не учитываемых полностью в проекте.

Например, если конструируется пассажирский самолет, то его проектным движениям нужно обеспечить известного рода устойчивость, чтобы тем самым получить машину, спокойную в полете и безаварийную на взлете и посадке. Коленчатый вал нужно рассчитать так, чтобы он не поломался от вибраций, какие могут возникнуть в реальных условиях работы двигателя. Чтобы обеспечить артиллерийскому орудию наибольшую меткость и кучность боя, надо строить орудия, снаряды и мины так, чтобы была известного рода устойчивость траекторий и правильность полета снарядов.

Можно привести много примеров, но они ничего не прибавят к тому, что при решении вопроса о действительных движениях необходимо из возможных решений уравнений механики останавливаться на решениях, отвечающих устойчивым состояниям, и что в тех случаях, когда желательно избежать в действительности какого-либо решения, разумно путем некоторого изменения в конструкции механической системы делать отвечающее этому решению состояние движения неустойчивым.

---

[1]) Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.: Гостехиздат, 1950.

Постановка вопроса

3 [1] [1]). Рассмотрим какую-либо голономную механическую систему. Пусть $q_1, \ldots, q_k$ обозначают ее независимые лагранжевы координаты, а $q'_1, \ldots, q'_k$ — обобщенные скорости. В динамической задаче, когда силы определенным образом заданы, переменные q_j удовлетворяют некоторым k обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка. Частному решению этих уравнений

$$q_j = f_j(t) \quad (j = 1, \ldots, k)$$

соответствует некоторое определенное движение нашей системы. Сравнивая его в известном отношении с другими движениями, возможными для нее при тех же силах, движение это будем называть *невозмущенным*, а все остальные, с которыми оно сравнивается, *возмущенными*.

Пусть t_0 есть момент времени, условно принимаемый за начальный, а q_{j0} и q'_{j0} обозначают начальные значения переменной q_j и ее производной по времени q'_j. Пусть для невозмущенного движения

$$q_{j0} = f_j(t_0), \quad q'_{j0} = f'_j(t_0),$$

а для возмущенного

$$q_{j0} = f_j(t_0) + \varepsilon_j, \quad q'_{j0} = f'_j(t_0) + \varepsilon'_j,$$

где ε_j, ε'_j суть некоторые вещественные постоянные, которые условимся называть *возмущениями*. Заданием этих постоянных возмущенное движение полностью определяется, так как действующие на систему силы предполагаются неизменными.

Говоря о возмущенных движениях, близких к невозмущенному, будем разуметь движения, для которых возмущения численно достаточно малы.

При этом для возмущенного движения, близкого к невозмущенному, разность между значениями координат q_j и скоростей q'_j в этих двух движениях, будучи малой по определению в начальный момент и по непрерывности для значений t, мало отличных от t_0, может не быть малой для моментов времени, достаточно удаленных от начального.

Отклонения возмущенных движений от невозмущенного могут быть замечаемы в действительности через разности в значениях некоторых измеряемых в наблюдении или опыте величин, зависящих от движений. Имея в виду не опустить случаи, когда наблюдаются величины, отличные от координат q_j и скоростей q'_j, рассмотрим некоторые данные непрерывные вещественные функции $Q_1, \ldots, Q_n$ величин q_j, q'_j и времени t.

---

[1]) Как уже указывалось в предисловии, цифры в квадратных скобках означают ссылки на соответствующие параграфы сочинения А. М. Ляпунова.

Для невозмущенного движения функции Q_s после замены $q_j = f_j(t)$ и $q_j' = f_j'(t)$ обратятся в некоторые известные функции t, которые обозначим соответственно через $F_1, \ldots, F_n$, а для возмущенного движения (сохраним за ними прежнее обозначение Q_s) они будут некоторыми функциями времени t и возмущений ε_j, ε_j'.

Когда все возмущения ε_j, ε_j' равны нулю, разности

$$x_s = Q_s - F_s$$

будут также равны нулю для всякого t. Но если возмущения ε_j, ε_j', не будучи нулями, предполагаются все произвольно малыми, то возникает вопрос, можно ли назначать такие произвольно малые постоянные, которых абсолютные величины разностей x_s никогда не превосходили бы.

Мы будем заниматься исключительно теми случаями, когда решение рассматриваемого вопроса не зависит от выбора момента t_0, в который сообщаются возмущения.

Примем следующее определение Ляпунова.

Пусть $L_1, \ldots, L_n$ суть произвольно задаваемые положительные числа. Если при всяких L_s, как бы малы они ни были, могут быть выбираемы положительные числа $E_1, \ldots, E_k$, $E_1', \ldots, E_k'$ так, чтобы при всяких возмущениях ε_j, ε_j', удовлетворяющих условиям

$$|\varepsilon_j| \leqslant E_j, \quad |\varepsilon_j'| \leqslant E_j',$$

и при всяком t, превосходящем t_0, выполнялись неравенства

$$|Q_s - F_s| < L_s,$$

о невозмущенное движение по отношению к величинам $Q_1, \ldots Q_n$ *устойчиво*, в противном случае — *неустойчиво* *.

Может случиться, что удовлетворяющих этому определению пределов E_j, E_j' нельзя найти, если рассматривать всякие возмущения, и что такие пределы возможно найти для возмущений, подчиненных некоторым условиям вида

$$f = 0 \text{ или } f > 0,$$

где f есть некоторая функция возмущений ε_j, ε_j', обращающаяся в нуль, когда все возмущения полагаются равными нулю. В таких случаях будем говорить, что невозмущенное движение *устойчиво для возмущений*, подчиненных таким-то условиям.

В определении устойчивости Ляпунов использовал понятие числа, а не бесконечно малой величины. Поэтому существо понятия устойчивости по Ляпунову лежит не столько в характере изменения величин $|Q_s - F_s|$ при стремлении возмущений ε_j, ε_j' к нулю, сколько в *оценках численных величин* возмущений при заданных численных оценках разностей $|Q_s - F_s|$ для устойчивого по отношению к функциям Q_s невозмущенного движения. Следовательно, нельзя утверждать, что устойчивость в смысле Ляпунова имеет предельный смысл инфинитезимальной устойчивости при бесконечно малых возмущениях, когда числа ε_j, ε'_j стремятся к нулю *.

Уравнения возмущенных движений

4. Решение вопроса об устойчивости зависит от исследования дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют разности $x_s = Q_s - F_s$. Уравнения эти условимся называть *уравнениями возмущенного движения*, а их очевидное решение $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ — *невозмущенным движением*.

Если вопрос об устойчивости изучается по отношению к независимым переменным механической системы, то дифференциальные уравнения возмущенного движения дают закон изменения отклонений, или вариаций, этих переменных.

Представим для примера некоторую голономную механическую систему, находящуюся под действием сил, допускающих силовую функцию. Пусть $q_1, \ldots, q_k$ — ее координаты, $p_1, \ldots, p_k$ — импульсы, а $H(t, q_1, \ldots, q_k, p_1, \ldots, p_k)$ — функция Гамильтона. Уравнения движения можно взять в известной канонической форме:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Предположим, что мы намерены изучить по отношению к переменным q_j, p_j устойчивость движения, отвечающего некоторому частному решению канонических уравнений

$$q_j = q_j(t), \quad p_j = p_j(t).$$

Значения координат q_j и импульсов p_j для возмущенного движения пусть будут

$$q_j = q_j(t) + \xi_j, \quad p_j = p_j(t) + \eta_j,$$

где ξ_j, η_j суть отклонения, или вариации, соответственно q_j, p_j. Обозначая для простоты функции $q_j(t)$, $p_j(t)$ через q_j, p_j и замечая, что возмущенное движение представляет одно из движений нашей системы при тех же силах, имеем следующие уравнения:

$$\frac{d(q_j + \xi_j)}{dt} = \frac{\partial H(t, q_i + \xi_i, p_i + \eta_i)}{\partial p_j},$$

$$\frac{d(p_j + \eta_j)}{dt} = -\frac{\partial H(t, q_i + \xi_i, p_i + \eta_i)}{\partial q_j},$$

где для сокращения положено

$$H(t, q_i + \xi_i, p_i + \eta_i) = \\ = H(t, q_1 + \xi_1, \ldots, q_k + \xi_k, p_1 + \eta_1, \ldots, p_k + \eta_k).$$

Разлагая правые части этих уравнений в ряды Тейлора по малым отклонениям ξ_j, η_j и используя уравнения для невозмущенного движения, имеем

$$\frac{d\xi_j}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\partial q_i}\xi_i+\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\partial p_i}\eta_i\right)+X_j,$$

$$\frac{d\eta_j}{dt}=-\sum_i\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\partial q_i}\xi_i+\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\partial p_i}\eta_i\right)+Y_j,$$

где X_j, Y_j обозначают члены, зависящие от отклонений ξ, η в сте пени выше первой. Это — уравнения возмущенного движения.

Если в последних уравнениях отбросить члены X_j, Y_j, то остающееся при этом первое приближение носит также название *уравнений в вариациях Пуанкаре.*

Когда стоит вопрос об устойчивости отмеченного невозмущенного движения механической системы по отношению к некоторым функциям $Q_1, \ldots, Q_n$, зависящим от t, q, p и голоморфным относительно q, p, то из явного выражения разностей

$$x_s=Q_s(t, q_i+\xi_i, p_i+\eta_i)-Q_s(t, q_i, p_i)=\sum_i\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_i}\xi_i+\frac{\partial Q_s}{\partial p_i}\eta_i\right)+\ldots$$

следует

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial Q_s'}{\partial q_i}\xi_i+\frac{\partial Q_s'}{\partial p_i}\eta_i\right)+\ldots,$$

где Q_s' обозначает полную производную по времени от функции Q_s, взятую согласно уравнениям движения:

$$Q_s'=\frac{\partial Q_s}{\partial t}+\sum_j\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial Q_s}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right).$$

Если функции Q_s независимы между собою и их число равняется $n=2k$, то, выражая ξ_i, η_i согласно предыдущим соотношениям через x_s, можем дифференциальные уравнения возмущенного движения привести к нормальному виду

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s,$$

где функции X_s, уничтожающиеся, когда переменные x_s суть все нули, будут голоморфными функциями величин $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами, являющимися известными функциями времени.

Может случиться, что к нормальному виду возможно привести уравнения возмущенного движения, если число n исследуемых функций Q_s меньше удвоенного числа степеней свободы механической системы. Мы будем предполагать число n и функции Q_s такими, чтобы уравнения возмущенного движения приводились к указанному нормальному виду.

5. [2]. В дальнейшем мы будем заниматься дифференциальными уравнениями возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

отвлекаясь от исходных уравнений движения механической системы и от вида функций Q_s, в предположении, что всякой системе вещественных значений возмущений ε_j, ε_j', численно достаточно малых, будет соответствовать некоторая система вещественных начальных значений переменных x_{s0} и, как бы ни было мало данное положительное число A, эти последние всегда можно будет сделать удовлетворяющими неравенству

$$\sum_s x_{s0}^2 < A,$$

подчиняя возмущения ε_j, ε_j' условию, чтобы они по абсолютной величине не превосходили достаточно малых, но отличных от нуля E_j, E_j'.

Мы предположим также, что, как бы малы ни были данные положительные числа E_j, E_j', всегда возможно найти такое положительное A, чтобы величине $x_{10}^2 + \ldots + x_n^2$, не превышающей A, отвечали одна или несколько систем вещественных значений ε_j, ε_j', абсолютные величины которых $|\varepsilon_j|$, $|\varepsilon_j'|$ были бы соответственно меньше E_j, E_j'. При этом условии начальные значения переменных x_s могут играть такую же роль при решении вопроса об устойчивости, как и величины ε_j, ε_j', если только заданием x_{s0} переменные x_s, удовлетворяющие уравнениям (1), определяются вполне. Это последнее условие мы будем предполагать всегда выполненным; поэтому далее вместо величин ε_j, ε_j' будем всегда рассматривать x_{s0}, перенося на последние и название возмущений.

Мы предположим, что правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения (1) для всякого t, превосходящего t_0, разлагаются в сходящиеся степенные ряды по целым степеням переменных $x_1, \ldots, x_n$, когда последние удовлетворяют условию

$$\sum_s x_s^2 < A,$$

с коэффициентами p_{sr}, $P_s^{(m_1 \ldots m_n)}$, являющимися определенными вещественными непрерывными функциями t:

$$X_s = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \sum P_s^{(m_1 \ldots m_n)} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

где суммирование распространено на все целые неотрицательные числа $m_1, \ldots, m_n$, удовлетворяющие условию

$$m_1 + \ldots + m_n > 1.$$

Определение устойчивости Ляпунова перефразируется в переменных x следующим образом.

Если при всяком произвольно задаваемом числе A, как бы мало оно ни было, может быть выбираемо положительное число λ так, чтобы при всяких возмущениях $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_s x_{s0}^2 \leqslant \lambda,$$

и при всяком t, превосходящем t_0, выполнялось неравенство

$$\sum_s x_s^2 < A,$$

то невозмущенное движение — устойчиво, в противном случае — неустойчиво.

В определении устойчивости предполагается, что возмущающих сил нет в том смысле, что возмущенные движения происходят под действием тех же внешних сил, которые учитывались при определении невозмущенного движения, а число A произвольно и может быть сколь угодно малым.

Если невозмущенное движение устойчиво, то условия, которые имеются в определении устойчивости, будут выполняться, начиная, быть может, с малых, но все же конечных A и λ.

Ляпунов не интересовался вопросом, сколь велико может быть значение λ, хотя в доказательстве своей теоремы об устойчивости он дал практически полезный способ построения λ для определенного, ограниченного сверху числа A^*.

Задача об устойчивости при возмущающих силах не имеет смысла, если последние ничем не стеснены. Если возмущающие силы меняются от случая к случаю так мало, что их изменение не влияет на линейные члены в функциях X_s, то возникает практически важная задача об устойчивости по первому приближению независимо от членов выше первого порядка в функциях X_s. Задачу эту разрешил Ляпунов, причем в ее решении он видел свое главное достижение.

ГЛАВА 2

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

Некоторые определения

6. Развитый Ляпуновым прямой метод изучения устойчивости состоит не в интегрировании дифференциальных уравнений возмущенного движения, а в отыскании некоторых функций переменных $t, x_1, \ldots, x_n$, полные производные которых по времени в силу уравнений (1) обладают некоторыми свойствами.

По признанию Ляпунова на это метод его натолкнуло изучение важного мемуара Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» [1]).

7 [15]. Мы будем рассматривать вещественные функции вещественных переменных $t, x_1, \ldots, x_n$, подчиненных условиям

$$t \geqslant t_0 \text{ и } \sum_s x_s^2 \leqslant H, \tag{2}$$

где t_0 и H суть постоянные, причем H всегда будет предполагаться отличной от нуля. При этом мы всегда будем предполагать, что функции эти непрерывны, однозначны и уничтожаются, когда переменные x_s суть все нули.

Когда при условиях (2), если в них t_0 сделать достаточно большим, а H достаточно малым, рассматриваемая функция V принимает, кроме нулевых, значения только одного знака, то такую функцию будем называть *знакопостоянной*. Когда же пожелаем отметить ее знак, то будем говорить, что она положительная или отрицательная.

Если знакопостоянная функция V не зависит от t, а постоянная H может быть выбрана достаточно малой для того, чтобы при условиях (2) функция V уничтожалась лишь тогда, когда все переменные x_s суть нули, то такую функцию V будем называть знакоопределенной, а желая обратить внимание на ее знак,— *определенно-положительной* или *определенно-отрицательной*.

Функцию V, зависящую явно от t, будем называть знакоопределенной только при условии, если для нее возможно найти такую

---

[1]) Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями: Пер. с фр. – М.: Гостехиздат, 1947.

не зависящую от t определенно-положительную функцию W, чтобы одно из двух выражений

$$V - W \quad \text{или} \quad -V - W$$

представляло функцию положительную. Так, каждая из функций

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos t, \quad t\,(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 \cos t$$

положительна. Но первая есть только знакопостоянная, а вторая будет к тому же знакоопределенной, если в задаче нет других, кроме x_1 и x_2, переменных; за функцию W можем принять $x_1^2 + x_2^2$, так как при $t_0 > 2$ и произвольном положительном H разность $V - W$ при условиях (2) никогда не будет отрицательной*.

В пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ в области, ограниченной вторым из неравенств (2), уравнения $V = c = \mathrm{const}$ представляют некоторые непрерывные поверхности, подвижные, если V зависит явно от t; притом через начало, в котором все переменные x_s предполагаются равными нулю, проходит поверхность $V = 0$.

Если функция V — знакоопределенная и не зависящая от t, то поверхности $V = c$ обладают тем свойством, что не существует никакого непрерывного пути из начала в произвольную точку сферы (A)

$$\sum_s x_s^2 = A \quad (A \leqslant H),$$

не пересекающего поверхности $V = c$, если числовое значение c не превосходит наименьшего значения модуля $|V|$ на этой сфере. Геометрическое место первых точек поверхности $V = c$ на всех возможных непрерывных путях из начала $(x_1 = 0, \ldots, x_n = 0)$ к точкам сферы (A) представляет при этом некоторую замкнутую поверхность, которую условимся называть $(n-1)$-*мерным циклом* $V = c$. При непрерывном изменении c к нулю циклы $V = c$ представят замкнутые поверхности, вложенные друг в друга и стягивающиеся к началу в области численно достаточно малых значений переменных x_s.

Если функция V определенно-положительна и зависит явно от t, то по определению существует не зависящая от t определенно-положительная функция W такая, что $V - W$ представляет положительную функцию. Если c не превосходит при этом наименьшего значения функции W на сфере (A), то любой непрерывный путь, проведенный из начала до произвольной точки цикла $W = c$, обязательно либо по меньшей мере один раз пересечет поверхность $V = c$, либо он на ней окончится. Называя *циклом* $V = c$ геометрическое место первых точек поверхности $V = c$ для некоторого $t > t_0$ на непрерывных путях из начала до точек цикла $W = c$, замечаем, что при этом цикл $V = c$ содержится внутри или охватывается циклом $W = c$.

Если при условиях (2) значения $|V|$ не превосходят некоторого конечного числа, то функцию V будем называть *ограниченной*. При достаточно малом значении A такой будет в силу непрерывности всякая не зависящая от t функция V.

Если ограниченная функция V такова, что для всякого положительного l, как бы мало оно ни было выбрано, найдется такое отличное от нуля число λ, что при

$$t \geqslant t_0 \text{ и } \sum_s x_s^2 \leqslant \lambda$$

будет выполняться неравенство

$$|V| < l,$$

то будем говорить, что V *допускает бесконечно малый высший предел*. Этому требованию удовлетворяет в силу непрерывности всякая не зависящая от t функция V. Но функции, зависящие от t, хотя бы и ограниченные, могут ему не удовлетворять. Например, из функций

$$\sin^2[(x_1^2 + \ldots + x_n^2)\, t], \qquad (x_1^2 + \ldots + x_n^2) \sin^2 t$$

лишь вторая допускает бесконечно малый высший предел; кстати, ни одна из этих положительных функций не является знакоопределенной.

Если функция V допускает бесконечно малый высший предел, то в пространстве переменных x ни одна точка поверхности $|V| = l$, сколь бы мало l ни было, никогда для $t \geqslant t_0$ не войдет в область

$$\sum_s x_s^2 \leqslant \lambda,$$

где λ есть некоторая зависящая от l положительная постоянная.

Условие знакоопределенности функции V содержит известное ограничение для изменения с течением времени цикла $V = c$ наружу в том смысле, что цикл $W = c$ представляет наружную границу области $W \leqslant c$ пространства $(x_1, \ldots, x_n)$, внутри которой лежит цикл $V = c$ в любой момент времени $t \geqslant t_0$.

Условие существования бесконечно малого высшего предела у функции V содержит ограничение для изменений поверхности $|V| = l$ вовнутрь в том смысле, что для всякого положительного l, сколь бы мало оно ни было, существует отличное от нуля положительное число λ, определяющее область

$$\sum_s x_s^2 \leqslant \lambda,$$

внутри которой ни для какого $t \geqslant t_0$ нет точек, принадлежащих поверхности $|V| = l$.

Одновременно с функцией V будем рассматривать ее полную производную по t, взятую в предположении, что переменные x_s удовлетворяют дифференциальным уравнениям возмущенного движения

$$V' = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n.$$

Теорема Ляпунова об устойчивости

8 [16]. Теорема. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию V, производная которой V' в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Доказательство. Пусть V — определенно-положительная функция, а V' — отрицательная или нуль. По определению знакоопределенной функции, найдется не зависящая от t определенно-положительная функция W такая, что при достаточно большом t_0 и достаточно малом H в области, определенной условиями (2), будут иметь место неравенства

$$V' \leqslant 0, \quad V \geqslant W. \tag{3}$$

Надо показать, что для произвольного положительного числа A найдется такое положительное число λ, что при начальных возмущениях x_{s0}, удовлетворяющих неравенству $\sum\limits_s x_{s0}^2 \leqslant \lambda$, значения переменных x_s, начавшие свое изменение согласно уравнениям возмущенного движения в момент $t = t_0$ с начальных значений x_{s0}, для любого момента $t \geqslant t_0$ будут удовлетворять неравенству

$$\sum_s x_s^2 < A.$$

Пусть A есть некоторое отличное от нуля, произвольно малое положительное число (которое во всяком случае будем предполагать меньшим H); пусть l есть точная низшая граница функции W на сфере (A):

$$\sum_s x_s^2 = A.$$

Число l необходимо отлично от нуля и положительно, так как W представляет определенно-положительную функцию. Рассмотрим функцию $V(t_0, x_1, \ldots, x_n)$; она, как не зависящая явно от t, допускает бесконечно малый высший предел; и следовательно, для l найдется такое λ, что для значений переменных x_s, удовлетворяющих условию $\sum_s x_s^2 \leqslant \lambda$, значения функции $V(t_0, x_1, \ldots, x_n)$ будут удовлетворять неравенству

$$V(t_0, x_1, \ldots, x_n) < l.$$

Если начальные значения x_{s0} переменных x_s выбрать согласно неравенству

$$\sum_s x_{s0}^2 \leqslant \lambda,$$

то из соотношения

$$V - V_0 = \int_{t_0}^{t} V'\,dt,$$

где

$$V_0 = V(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) < l,$$

согласно (3) выводим, что переменные x_s при своих изменениях в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения будут удовлетворять условиям

$$W \leqslant V \leqslant V_0 < l,$$

а тем самым и условию

$$\sum_s x_s^2 < A,$$

так как l есть точная низшая граница функции W на сфере (A). Теорема доказана.

Функцию V, удовлетворяющую условиям этой теоремы, условимся называть *функцией Ляпунова* [1].

В доказательстве теоремы, выполненном в духе ε-доказательств, следует отметить предложенный Ляпуновым практически полезный способ нахождения для заданного положительного числа A, меньшего H, с помощью функций V и W положительного числа λ, обладающего свойством: если начальные значения x_{s0} стеснены неравенством

$$\sum_s x_{s0}^2 \leqslant \lambda,$$

то во все последующее время значения переменных x_s будут удовлетворять неравенству

$$\sum_s x_s^2 < A.$$

[1] Вопрос о существовании функции Ляпунова для всякого устойчивого невозмущенного движения разрешил профессор К. П. Персидский (Персидский К. П. Об одной теореме Ляпунова // ДАН СССР.— 1937.— Т. 14, № 9.— С. 541—544).

Ляпунов использует лишь нужное ему обстоятельство, что для произвольного положительного A, сколь бы мало оно ни было, соответствующее λ существует, и не останавливается на вопросе о наибольшем значении λ для заданного A*.

Пример. Рассмотрим уравнения возмущенного движения в виде

$$\frac{dx}{dt} = -(x - \beta y)(1 - ax^2 - by^2),$$
$$\frac{dy}{dt} = -(y + \alpha x)(1 - ax^2 - by^2)$$

с положительными постоянными α, β, a, b; пусть для определенности $a < b$, $\alpha < \beta$.

Определенно-положительная функция

$$V = \alpha x^2 + \beta y^2$$

удовлетворяет условиям теоремы; ее полная производная по времени, согласно заданным уравнениям, является отрицательной в области достаточно малых значений x, y:

$$V' = -2(\alpha x^2 + \beta y^2)(1 - ax^2 - by^2).$$

Значит, невозмущенное движение $x = 0$, $y = 0$ устойчиво.

Иллюстрируем доказательство. Область $x^2 + y^2 \leqslant H$, где функция V определенно-положительна, а производная V' имеет отрицательные и нулевые значения, определяется соотношением

$$H = \frac{1}{b}.$$

Рассмотрим некоторую окружность $x^2 + y^2 = A$; ее касается изнутри эллипс

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = A\alpha.$$

Квадрат радиуса наибольшей окружности, вписанной в этот эллипс, есть $\lambda = A\alpha/\beta$. Если $A < H$, то движение, начавшееся из произвольной точки x_0, y_0, лежащей внутри последней окружности

$$x_0^2 + y_0^2 < \lambda,$$

не выведет движущуюся точку x, y за окружность $x^2 + y^2 = A$, так как в рассматриваемой области значения производной V' отрицательны и, следовательно, при движении согласно заданным уравнениям точка $P(x, y)$ в поле подобных и подобно расположенных эллипсов $V = \text{const}$ должна переходить на внутренние эллипсы. А это и доказывает, что, исходя из указанного начального положения (x_0, y_0), движущаяся точка никогда не попадет на эллипс $\alpha x^2 + \beta y^2 = A\alpha$, лежащий внутри круга $x^2 + y^2 \leqslant A$. Так как приведенное определение λ возможно для всякого A, сколь бы мало последнее ни было, заключаем об устойчивости невозмущенного движения.

9 [16]. Следствие. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения существуют интегралы* $U_1, \ldots, U_m$, *уничтожающиеся, когда все переменные* x_s *суть одновременно нули, и если найдена функция* V, *удовлетворяющая условиям* (3) *при прежнем значении* W *только для переменных, для которых* $U_1 = 0, \ldots, U_m = 0$, *то мы заключили бы, что невозмущенное движение устойчиво при возмущениях, стесненных уравнениями* $U_1 = 0, \ldots, U_m = 0$.

Частным случаем этого следствия является одна теорема Рауса [1]). В самом деле, пусть $q_1, \ldots, q_k$ — независимые лагранжевы координаты некоторой голономной механической системы, для которой T — живая сила, а U — силовая функция. Предположим, что переменные $q_{s+1}, \ldots, q_k$ $(s < k)$ являются циклическими в том смысле, что для них

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = s+1, \ldots, k),$$

где $L = T + U$ обозначает так называемую *функцию Лагранжа*. Уравнения движения такой системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, k)$$

имеют $k - s$ первых интегралов

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha'} = \beta_\alpha,$$

где β_α суть постоянные.

Если ввести функцию R, определенную равенством

$$R = L - \sum_\alpha q_\alpha' \beta_\alpha,$$

и в ней заменить q_α' через их выражения, полученные из выписанных первых интегралов, то для R получим выражение в виде функции от $t, q_1, \ldots, q_s, q_1', \ldots, q_s', \beta_{s+1}, \ldots, \beta_k$. Вариация последней есть, если $j = 1, \ldots, s$; $\alpha = s+1, \ldots, k$,

$$\delta R = \sum_j \frac{\partial R}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_j \frac{\partial R}{\partial q_j'}\delta q_j' + \sum_\alpha \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha}\delta\beta_\alpha;$$

вариация той же функции R согласно формуле, ее определяющей, есть

$$\delta R = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j'}\,\delta q_j' - \sum_\alpha q_\alpha' \delta\beta_\alpha.$$

---

[1]) Routh E. P. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies; 4th ed.— 1884.

Сравнение коэффициентов при одинаковых вариациях в этих двух выражениях приводит к соотношениям

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_j'} = \frac{\partial R}{\partial q_j'}, \quad -q_\alpha' = \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha},$$

согласно которым уравнения Лагранжа для нециклических координат принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial q_j'}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, s).$$

Функция R не зависит от циклических координат q_α и их скоростей q_α'. Последние уравнения как бы игнорируют циклические координаты и сводят динамическую задачу к задаче о движении механической системы с новой функцией Лагранжа R и с меньшим числом степеней свободы. Значения циклических координат q_α после того, как проинтегрированы последние уравнения, определяются квадратурами

$$q_\alpha = -\int \frac{\partial R}{\partial \beta_\alpha}\, dt.$$

Представим себе, что при некоторых значениях β_α уравнения движения допускают частное решение $q_j = 0$ $(j = 1, \ldots, s)$. Этому решению отвечает стационарное движение, в котором будут изменяться одни циклические координаты q_α. Уравнениями возмущенного движения (при фиксированных значениях постоянных β_α) будут уравнения для нециклических координат q_j с функцией Лагранжа R.

Если R не зависит явно от t, то эти уравнения имеют первый интеграл, соответствующий интегралу живых сил:

$$H \equiv \sum_j \frac{\partial R}{\partial q_j'} q_j' - R = h.$$

Теорема Рауса состоит в том, что если функция $V = H - H_0$ будет знакоопределенной от переменных q_j, q_j', то (согласно теореме Ляпунова, так как $V' \equiv 0$) стационарное движение будет устойчивым при условии, если значения постоянных β_α не возмущаются; H_0 обозначает функцию H, когда в последней все нециклические координаты q_j и их скорости q_j' положены равными нулю. Интересно заметить, что стационарное движение может быть устойчивым, когда функция $H - H_0$ не является знакоопределенной.

10. П р и м е р. Рассмотрим тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой O. Пусть подвижные оси координат $Oxyz$ совпадают с главными осями эллипсоида инерции тела, построенного для неподвижной точки. Моменты инерции тела относительно осей x, y, z обозначим соответственно через A, B, C.

Случай Лагранжа представится, когда $A = B$, а координаты центра тяжести тела суть $x = 0$, $y = 0$, $z > 0$.

Пусть p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости на главные оси x, y, z эллипсоида инерции; γ, γ', γ'' — направляющие косинусы вертикали z_1 с подвижными осями x, y, z.

Практический интерес имеет задача об устойчивости вертикального вращения:

$$p = 0,\ q = 0,\ r = r_0,\ \gamma = 0,\ \gamma' = 0,\ \gamma'' = 1.$$

Этой задаче посвящено много исследований. Мы изучим вопрос об устойчивости по отношению к переменным p, q, r, γ, γ', γ''.

Обозначим вариации переменных для возмущенного движения так:

$$p = \xi,\ q = \eta,\ r = r_0 + \zeta,\ \gamma = \alpha,\ \gamma' = \beta,\ \gamma'' = 1 + \delta.$$

Чтобы решить поставленный вопрос об устойчивости, будем искать функцию Ляпунова среди интегралов уравнений возмущенных движений.

В случае Лагранжа известны следующие интегралы:

$$\begin{aligned} A(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2mgz\gamma'' &= h, \\ A(p\gamma + q\gamma') + Cr\gamma'' &= k, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1, \\ r &= r_0. \end{aligned}$$

Отсюда уравнения возмущенных движений имеют такие интегралы:

$$\begin{aligned} V_1 &= A(\xi^2 + \eta^2) + C(\zeta^2 + 2r_0\zeta) + 2mgz\delta, \\ V_2 &= A(\xi\alpha + \eta\beta) + C(\delta\zeta + r_0\delta + \zeta), \\ V_3 &= \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 + 2\delta, \\ V_4 &= \zeta. \end{aligned}$$

Функцию Ляпунова будем искать в квадратичной связке интегралов

$$\begin{aligned} V = V_1 + 2\lambda V_2 - (mgz + Cr_0\lambda) V_3 + \mu V_4^2 - 2(Cr_0 + C\lambda) V_4 = \\ = A\xi^2 + 2\lambda A\xi\alpha - (mgz + Cr_0\lambda)\alpha^2 + \\ + A\eta^2 + 2\lambda A\eta\beta - (mgz + Cr_0\lambda)\beta^2 + (C + \mu)\zeta^2 + \\ + 2\lambda C\zeta - (mgz + Cr_0\lambda)\delta^2. \end{aligned}$$

Чтобы первые две однотипные формы были положительными, λ необходимо и достаточно выбрать так, чтобы их дискриминант был положительным:

$$\begin{vmatrix} A & A\lambda \\ A\lambda & -(mgz + Cr_0\lambda) \end{vmatrix} > 0,$$

или

$$A\lambda^2 + Cr_0\lambda + mgz < 0.$$

Последнее неравенство возможно, если полином имеет два различных вещественных корня

$$\begin{vmatrix} A & \frac{Cr_0}{2} \\ \frac{Cr_0}{2} & mgz \end{vmatrix} < 0,$$

или

$$C^2r_0^2 - 4Amgz > 0.$$

Последняя форма будет положительной, если положителен ее дискриминант

$$\begin{vmatrix} C+\mu & C\lambda \\ C\lambda & -(mgz + Cr_0\lambda) \end{vmatrix} > 0,$$

или

$$\left(\frac{C^2}{C+\mu}\right)\lambda^2 + Cr_0\lambda + mgz < 0.$$

Чтобы этот вопрос свести к уже рассмотренному, выберем μ так, чтобы

$$\frac{C^2}{C+\mu} = A,$$

или

$$\mu = \frac{C(C-A)}{A}.$$

При этом

$$C + \mu = \frac{C^2}{A} > 0.$$

Итак, если

$$C^2r_0^2 - 4Amgz > 0,$$

то λ можно выбрать так, чтобы квадратичный интеграл V был определенно-положительным относительно всех переменных p, q, r, α, β, δ. А это согласно теореме Ляпунова об устойчивости заставляет заключить об устойчивости вертикального вращения волчка Лагранжа *.

11 [16]. Дополнение об асимптотической устойчивости. *Если знакоопределенная функция V допускает бесконечно малый высший предел, а ее производная V' представляет знакоопределенную функцию противоположного знака, то всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет приближаться к нему асимптотически.*

Доказательство. Если функции V и V' суть знакоопределенные, то по определению существует такое t_0 и такое положительное число H, что для $t \geqslant t_0$ и для значений переменных x_s, удовлетворяющих условию

$$\sum_s x_s^2 \leqslant H,$$

существуют не зависящие от времени определенно-положительные функции W, W' такие, что, если V положительна,

$$V - W \geqslant 0 \text{ и } -V' - W' \geqslant 0. \tag{4}$$

Определим область начальных возмущений $\sum x_{s0}^2 \leqslant \lambda$, для которых значения переменных x_s не покидают области $\sum x_s^2 < A$, как указано в доказательстве основной теоремы Ляпунова об устойчивости (п. 8). Пусть l есть точная низшая граница функции W на сфере (A). Тогда за λ мы выбираем число, определяющее область $\sum x_s^2 \leqslant \lambda$, в которую не проникает ни одна точка поверхности

$$V(t_0, x_1, \ldots, x_n) = l.$$

Легко убедиться, что для любых возмущений x_{s0}, лежащих в области (λ),

$$\sum_s x_{s0}^2 \leqslant \lambda,$$

при указанных свойствах функций V и V' нельзя найти такого положительного числа e, которое было бы меньше всех значений, получаемых функцией V в соответствующем возмущенном движении при $t \geqslant t_0$. В самом деле, если бы для некоторых начальных значений x_{s0} существовало такое число e, то по свойству функции V как функции, допускающей бесконечно малый высший предел, существовало бы такое число ε, определяющее область (ε)

$$\sum_s x_s^2 \leqslant \varepsilon,$$

для любых точек которой значения V были бы меньше e. Следовательно, если бы такое e существовало, то значения переменных x_s лежали бы где-либо в области

$$\varepsilon \leqslant \sum_s x_0^2 \leqslant A.$$

Обозначим через l' точную низшую границу функции W' в этой замкнутой области. Граница эта неизбежно будет некоторым положительным числом, ибо W' представляет функцию определенно-положительную. Отсюда, согласно второму из условий (4), для любого $t \geqslant t_0$ значения функции V' в этой области будут удовлетворять условию

$$-V' \geqslant W' \geqslant l' > 0;$$

из уравнения

$$V - V_0 = \int V'\,dt$$

выводим

$$V \leqslant V_0 - l'(t - t_0).$$

А это невозможно, ибо левая часть неравенства есть определенно-положительная функция t, а правая при достаточно большом t делается отрицательной.

Итак, как бы мало ни было число e, всегда наступит момент, когда функция V сделается меньше e. А будучи убывающей функцией t, она затем всегда будет оставаться меньше e. Следовательно, если за e мы примем точную низшую границу функции W в области

$$\mu \leqslant \sum_s x_s^2 \leqslant A,$$

то всегда наступит момент, когда функция V сделается и будет затем оставаться меньше e; начиная по крайней мере с этого момента, значения переменных x_s будут всегда оставаться в области

$$\sum_s x_s^2 < \mu.$$

Отсюда замечаем, что при всяких начальных возмущениях x_{s0}, лежащих в области (λ), значения переменных x_s с беспредельным возрастанием t стремятся к нулю *.

12. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ такая, что функция $V - \theta(t)\, W$ $(\theta(t_0) = 1)$ является постоянно-положительной при определенно-положительной и не зависящей от времени функции W и при монотонно возрастающей до бесконечности вместе с ростом t функции $\theta(t)$, а ее полная производная по времени V' является постоянно-отрицательной или нулем, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а область возможных значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ определяется неравенством*

$$W \leqslant \frac{V_0}{\theta(t)},$$

в котором V_0 обозначает значение функции V в начальный момент t_0 при начальных значениях переменных $x_{10}, \ldots, x_{n0}$.

Наиболее простые определения области возможных значений $x_1, \ldots, x_n$ получаются, если за функцию W принята функция $\mu(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$, где μ — положительная постоянная.

Теорема о неустойчивости

13. Чтобы обнаружить неустойчивость невозмущенного движения, достаточно заметить всего одну траекторию, выходящую за заданную область (2), при сколь угодно малых числовых значениях возмущений x_{s0}.

Совокупность значений переменных x_s, удовлетворяющих при предположении (2) неравенству $V > 0$, условимся называть *областью* $V > 0$, а поверхность $V = 0$ — *границей* последней. Если функция V зависит явно от t, то при изменении t область $V > 0$ будет также изменяться.

Если ограниченная в области $V > 0$ функция W такова, что для всякого положительного l, как бы мало оно ни было выбрано, найдется такое отличное от нуля число λ, что при

$$t \geqslant t_0, \sum_s x_s^2 \leqslant \lambda, \quad V \geqslant 0$$

будет выполняться неравенство

$$|W| < l,$$

то будем говорить, что W допускает *бесконечно малый высший предел в области* $V > 0$. Этому требованию удовлетворяет всякая допускающая бесконечно малый высший предел функция W.

Функцию $W(t, x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *знакоопределенной* в области $V > 0$, если она может обращаться в нуль в этой области лишь на границе $V = 0$ и если для произвольного положительного ε, как бы мало оно ни было выбрано, найдется такое отличное от нуля число l, что при x_s, удовлетворяющих условию $|V| \geqslant \varepsilon$, и для всякого $t > t_0$ имеет место неравенство

$$|W| \geqslant l.$$

Очевидно, что знакоопределенной в области $V > 0$ будет функция

$$\lambda V + W,$$

если W представляет функцию положительную или тождественно равную нулю, а λ есть отличная от нуля положительная постоянная. Если V не зависит от t, то знакоопределенной в области $V > 0$ будет всякая не зависящая от t функция W, если последняя нигде не уничтожается в области $V > 0$, а на границе области, т. е. при $V = 0$, может уничтожаться. Всякая функция V определенно-положительна в своей области $V > 0$.

Всякая знакоопределенная функция U будет знакоопределенной в области $V > 0$, если функция V допускает бесконечно малый высший предел в области $V > 0$. Действительно, если V допускает бесконечно малый высший предел в области $V > 0$, то согласно определению для заданного ε, сколь бы мало оно ни было, найдется такое число λ, что область $V > \varepsilon$ будет лежать вне сферы $\sum x_s^2 = \lambda$. Если U есть знакоопределенная, пусть положительная, функция, то по определению будет существовать не зависящая от t определенно-положительная функция W, такая, что функция

$$U - W$$

будет неотрицательной. Поэтому точная низшая граница (неизбежно положительная) функции W в области

$$\lambda \leqslant \sum x_s^2 \leqslant H$$

будет низшей границей для значений функции U в области $V > \varepsilon$.

Теорема. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию V, ограниченную в области $V > 0$, существующей при всяком $t \geqslant t_0$ и для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных x_s, производная которой V' в силу этих уравнений была бы определенно-положительной в области $V > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство. Для ограниченной функции V найдутся такие постоянные t_0 и H, что при всех значениях переменных x_s в области $V > 0$, удовлетворяющих кроме того условиям (2), будет выполняться неравенство

$$V < L. \tag{5}$$

Надо показать, что для такого H не найдется столь малого положительного λ, чтобы при любых начальных возмущениях x_{s0}, стесненных равенством

$$\sum x_{s0}^2 = \lambda,$$

ни для какого $t > t_0$ второе из неравенств (2) не было нарушено.

Доказательство будем вести от противного, предполагая, что такое λ существует. Выберем начальные возмущения x_{s0} на сфере (λ) так, чтобы начальное значение функции V_0 было отлично от нуля и положительно. Как бы мало V_0 ни было, для V', определенно-положительной в области $V > 0$, найдется такое отличное от нуля число l', что для переменных x_s, удовлетворяющих условиям

$$V \geqslant V_0,$$

значения функции V' будут удовлетворять неравенству $V' \geqslant l'$.

Поэтому, пока не было нарушено неравенство $V \geqslant V_0$ для всех значений t, больших t_0, согласно уравнению

$$V - V_0 = \int\limits_{t_0}^{t} V'\,dt$$

выводим

$$V \geqslant V_0 + l' (t - t_0).$$

Неравенство это может существовать совместно с неравенством (5) только при значениях t, меньших величины

$$t_0 + \frac{L - V_0}{l'}.$$

Нарушение же неравенства (5) говорит в этом случае о нарушении второго из условий (2). А этим обнаруживается неустойчивость невозмущенного движения *.

14 [16]. Ляпунов предложил две теоремы о неустойчивости, которые весьма просто получаются из предыдущей.

Первая теорема: *если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию V, которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопределенной производной V', притом допускала бы бесконечно малый высший предел и была бы такова, чтобы при всяком t, большем некоторой постоянной, надлежащим выбором величин x_s, абсолютно сколь угодно малых, ее можно было сделать величиной одинакового знака с ее производной, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Для доказательства достаточно заметить, что функция V этого предложения удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме п. 13, ибо знакоопределенная, пусть положительная, производная V' будет определенно-положительной в области $V > 0$, так как V допускает бесконечно малый высший предел.

Вторая теорема: *если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти ограниченную функцию V, производная которой в силу этих уравнений приводилась бы к виду*

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W,$$

где λ — положительная постоянная, а W или тождественно равна нулю, или представляет некоторую знакопостоянную функцию, и если в последнем случае найденная функция V такова, что при всяком t, большем некоторого числа, надлежащим выбором величин x_s, сколь угодно численно малых, ее можно сделать величиною одинакового знака с W, то невозмущенное движение неустойчиво.

В самом деле, производная V' есть знакоопределенная функция в области, где V имеет значения знака, совпадающего со знаком W, если W не есть тождественно нуль. Если W равна тождественно нулю, то V' будет знакоопределенной как в области $V > 0$, так и в области $V < 0$*.

Во всех случаях, когда это будет возможно, для доказательства неустойчивости мы будем пользоваться теоремами Ляпунова [1]).

15 [16]. Пример. Пусть уравнения возмущенного движения суть

$$\frac{dx_s}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x_s}\quad (s=1,\ldots,n),$$

где V есть не зависящая от t голоморфная функция переменных x_s, разложение которой начинается членами не ниже второго порядка.

Имеем

$$V'=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2.$$

Поэтому всякий раз, когда V есть функция определенно-отрицательная, невозмущенное движение будет устойчивым. Напротив, оно будет неустойчивым, если V может принимать положительные значения в сколь угодно малой окрестности точки $x_1=0,\ldots$ $\ldots, x_n=0$ и если только мы не имеем дело со случаем, когда системе уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial x_s}=0$$

возможно удовлетворить не равными одновременно нулю вещественными значениями переменных x_s, сколь угодно малыми по абсолютной величине. Случай этот, наверное, не представится, если определитель $\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial x_s \partial x_r}\right\|$ не обращается в нуль, когда все переменные x_s суть нули.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n,$$

где непрерывные ограниченные функции $p_{sr}(t)$ при r, не равном s, обладают свойством $p_{sr}=-p_{rs}$.

Если при этом коэффициенты p_{ss} либо суть нули, либо могут обратиться в нуль для некоторых значений $t\geqslant t_0$, оставаясь для других значений отрицательными, либо для $t\geqslant t_0$ все они суть отрицательные, то устойчивость невозмущенного движения следует из того, что определенно-положительная функция $V=\frac{1}{2}\sum x_s^2$ имеет, согласно заданным уравнениям, отрицательную или

1) Можно отметить еще одну теорему о неустойчивости, где вводятся две функции (Четаев Н. Г. О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум // Учен. зап. Казан. ун-та.— 1938.— Т. 98, № 9)*.

тождественно равную нулю полную производную по t

$$V' = \sum_{s,\,k} p_{sk} x_s x_k = \sum_s p_{ss} x_s^2.$$

Если для любого $t \geqslant t_0$ имеют место неравенства $p_{ss} < -h < 0$, где h — положительная постоянная, то производная V' будет при этом определенно-отрицательной; в этом случае невозмущенное движение устойчиво, а близкое возмущенное движение будет стремиться к нему асимптотически.

Если p_{ss} удовлетворяют условиям $p_{ss} > k > 0$, где k — некоторое положительное число, то в этом случае невозмущенное движение неустойчиво.

Пример. *Устойчивость постоянных вращений.* Случай Эйлера в движении твердого тела с одной неподвижной точкой представится, когда центр тяжести тела совпадает с закрепленной точкой. Изучим устойчивость частного решения

$$p_0 = 0,\ q_0 = 0,\ r = r_0 > 0.$$

Вариации переменных обозначим для возмущенного движения:

$$p = \xi,\ q = \eta,\ r = r_0 + \zeta.$$

Уравнения возмущенных движений будут

$$A\frac{d\xi}{dt} = (B - C)\,\eta\,(r_0 + \zeta),$$

$$B\frac{d\eta}{dt} = (C - A)\,(r_0 + \zeta)\,\xi,$$

$$C\frac{d\zeta}{dt} = (A - B)\,\xi\eta.$$

Вопрос об устойчивости постоянного вращения вокруг наибольшей ($A \geqslant B > C$) и наименьшей ($A \leqslant B < C$) полуосей эллипсоида инерции разрешается из существования знакоопределенного интеграла уравнений возмущенного движения

$$\frac{A - C}{B}\xi^2 + \frac{B - C}{A}\eta^2 \pm [A\xi^2 + B\eta^2 + 2Cr_0\zeta + C\zeta^2]^2.$$

Неустойчивость вращения вокруг средней оси эллипсоида инерции ($A < C < B$) доказывается рассмотрением функции

$$V = \xi\eta.$$

Ее производная

$$V' = (r_0 + \zeta)\left[\frac{B - C}{A}\eta^2 + \frac{C - A}{B}\xi^2\right].$$

Если $\zeta + r_0$ уничтожается, то неустойчивость очевидна. Если

$\zeta + r_0 > 0$, то V' будет определенно-положительной в области $V > 0$. V, как не зависящая явно от t, допускает бесконечно малый высший предел; на основании теоремы о неустойчивости (п. 13) выводим, что вращение вокруг средней полуоси неустойчиво.

Пример. Область $V > 0$ может распадаться на отдельные полости. Для применения теоремы п. 13 нас может интересовать всего какая-либо одна связная полость C области $V > 0$. Для определения C одним неравенством $W > 0$ достаточно рассмотреть непрерывную функцию W, равную V в полости C и равную $-|V|$ вне C.

ГЛАВА 3

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЙ ПРИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛАХ

Теорема Лагранжа

Торричелли в формулировках своей эпохи установил теорему об устойчивости положений равновесия тяжелых тел, которую Лагранж обобщил для произвольных потенциальных сил. Для наиболее элементарных случаев Ляпунов дал обращение теоремы Лагранжа. Рассматривая случай, когда потенциальная функция зависит от некоторого параметра, Пуанкаре положил начало теории разветвления равновесий.

16. Вообразим механическую систему, стесненную некоторыми голономными и не зависящими от времени связями и находящуюся в положении равновесия под действием потенциальных сил.

Обозначим через $q_1, \ldots, q_k$ ее независимые лагранжевы координаты. Не уменьшая общности, всегда можно предположить, что для рассматриваемого положения равновесия материальной системы значения всех переменных q_s равны нулю. Пусть T обозначает живую силу, а U — силовую функцию действующих на систему сил. При не зависящих от времени связях живая сила T представляет определенно-положительную квадратичную форму от скоростей $q_1', \ldots, q_k'$. Силовая функция U предполагается зависящей только от координат $q_1, \ldots, q_k$, причем ее мы условимся считать равной нулю для положения равновесия.

При этих предположениях дифференциальными уравнениями возмущенного движения будут уравнения движения рассматриваемой механической системы, если вопросы об устойчивости исследуются по отношению к координатам $q_1, \ldots, q_k$ и к скоростям $q_1', \ldots, q_k'$.

Теорема Лагранжа. *Если в положении равновесия силовая функция U имеет изолированный максимум, то такое положение равновесия устойчиво.*

Доказательство. Если силовая функция U имеет в положении равновесия изолированный максимум и равняется нулю, то по крайней мере в достаточно малой области для малых по абсолютной величине значений переменных q_s значения функции U будут отрицательны. Это значит, что в области малых значений переменных q_s функция U представляет определенно-отрицательную функцию лагранжевых координат $q_1, \ldots, q_k$. Поэтому полная энергия механической системы $H = T - U$ будет представлять определенно-положительную функцию по отношению к координатам $q_1, \ldots, q_k$ и скоростям $q_1', \ldots, q_k'$. Ее полная производная по времени равна нулю, $H' \equiv 0$, так как для уравнений движения при не зависящих от времени связях существует интеграл живых сил. Следовательно, H удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова об устойчивости, что и доказывает теорему.

17. Рассмотрим теперь случай, когда в области малых по абсолютной величине значений переменных q_j существует область, где силовая функция U (обращаясь в нуль, когда все q_s — нули) имеет положительные значения. Силовая функция U должна определять действующие на материальную систему силы, поэтому она должна иметь всюду в рассматриваемой области (пусть непрерывные) частные производные.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения возьмем для простоты в форме канонических уравнений Гамильтона

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j},$$

где импульсы p_j определяются формулами

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial q_j'}.$$

Уравнения эти имеют интеграл живых сил $H = T - U = h$.

Ограничимся случаем, когда силовая функция U представляет некоторую однородную функцию степени m относительно переменных q_s

$$U = U_m$$

и когда при этом для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных q_s она может принимать положительные значения.

Положение равновесия является при этом неустойчивым[1]).

Действительно, рассмотрим функцию

$$W = -H \sum_j p_j q_j.$$

В области малых по абсолютной величине значений координат $q_1, \ldots, q_k$ и импульсов $p_1, \ldots, p_k$ выделим существующую при наших предположениях для сколь угодно малых по абсолют-

---

[1]) Четаев Н. Г. Sur la réciproque du théorèm de Lagrange // Comptes Rendus.— 1930.— V. 190.

Четаев Н. Г. О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум // Учен. зап. Казан. ун-та.— 1938.— Т. 98, № 9.

ной величине значений переменных q_j, p_j область C, определенную такими совместными неравенствами:

$$H < 0 \quad \text{и} \quad \sum_j p_j q_j > 0.$$

Полная производная по t от функции W имеет в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения вид

$$W' = -H\left[\sum_j p_j \frac{dq_j}{dt} + \sum_j q_j \frac{dp_j}{dt}\right].$$

Подставляя сюда явные выражения

$$H = T - U_m \quad \text{и} \quad p_j = \frac{\partial T}{\partial q_j'},$$

согласно уравнениям движения и теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$W' = -H\left[2T + mU_m - \sum_j \frac{\partial T}{\partial q_j} q_j\right].$$

В рассматриваемой области C значения полной энергии H должны быть отрицательны по определению области C; а так как $H = T - U_m$, то в этой области C должно быть $U_m > 0$. Вследствие того что связи, наложенные на материальную систему, предполагаются не зависящими от времени t, живая сила системы T представляет определенно-положительную функцию относительно импульсов p_j

$$T = \sum_{s, r} g_{sr} p_s p_r$$

с коэффициентами g_{sr}, являющимися некоторыми функциями координат $q_1, \ldots, q_k$. Для всех возможных значений координат q_j все главные диагональные миноры дискриминанта живой силы $\| g_{rs} \|$ должны быть положительными; в положении равновесия, где все координаты q_s равны нулю, эти главные миноры равны некоторым положительным величинам, ограниченным снизу. Поэтому главные диагональные миноры дискриминанта квадратичной относительно p_j формы

$$\sum_{s, r}\left(2g_{sr} - \sum_j \frac{\partial g_{sr}}{\partial q_j} q_j\right) p_s p_r$$

для достаточно малых по абсолютной величине значений координат q_s также будут все положительными, а сама форма $2T - \sum \frac{\partial T}{\partial q_j} q_j$ будет определенно-положительной относительно p_s. Итак, стоящее в W' в квадратных скобках выражение в области C будет положительно; иными словами, в области C

для численно достаточно малых значений координат q значения производной W' будут положительны, т. е. одного знака с W.

В области C функция W удовлетворяет всем условиям теоремы о неустойчивости п. 13, что и доказывает неустойчивость рассматриваемого положения материальной системы. Так же просто, исходя из прежнего определения функции W и области C, можно доказать *неустойчивость положения равновесия, когда потенциальная функция имеет вид*

$$U = U_m + U_{m+1} + \ldots,$$

причем для сколь угодно малых q_s *функция* U *может принимать положительные значения, и в области* C *знак выражений* $U_m + U_{m+1} + \ldots$ и $mU_m + (m + 1) U_{m+1} + \ldots$ *определяется формой* U_m.

Случай, когда $m = 2$ и когда знак силовой функции U определяется членами второго порядка, без необходимости рассматривать члены высших порядков, был исследован впервые Ляпуновым [1]*.

Коэффициенты устойчивости Пуанкаре

18. Для конкретных приложений теоремы Лагранжа полезно знать критерии минимума потенциальной функции $V = -U$.

В области, близкой к положению равновесия материальной системы, где переменные q_s все имеют нулевые значения, разложение функции V в ряд Маклорена начинается в общем случае с квадратичных членов

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} q_i q_j + \ldots,$$

так как свободный член $V(0, \ldots, 0)$ обращается в нуль согласно условию п. 16, а линейные члены разложения уничтожаются в силу уравнений равновесия

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_s}\right)_0 = 0.$$

Суммирование распространяется по всем возможным значениям индексов $i, j = 1, \ldots, k$; через a_{ij} здесь для сокращения письма обозначены вторые частные производные от V в положении равновесия

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 = a_{ji}.$$

[1]) Ляпунов А. М. О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум // Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.: Гостехиздат, 1950.

Линейным преобразованием переменных q_s квадратичная форма

$$2f = \sum_{i,\, j} a_{ij} q_i q_j$$

может быть приведена к сумме квадратов. Действительно, в k-мерном вспомогательном евклидовом пространстве проведем взаимно ортогональные оси $q_1, \ldots, q_k$ и рассмотрим уравнение квадрики

$$2f = \sum a_{ij} q_i q_j = 1.$$

Его левая часть будет в виде суммы квадратов, если оси координат будут совпадать с собственными осями квадрики. Осью квадрики, по определению, является прямая, проходящая через центр и вершину, или иначе через ту точку квадрики, где радиус-вектор совпадает с нормалью.

Условие коллинеарности нормали к квадрике и радиуса-вектора имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \varkappa q_i \quad (i = 1, \ldots, k),$$

где $\varkappa$ — некоторый пока неопределенный множитель; или в явном виде:

$$\sum_j a_{ij} q_j = \varkappa q_i \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{6}$$

Эта система будет иметь отличное от нулевого решение, если определитель, составленный из коэффициентов, равен нулю:

$$\Delta(\varkappa) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varkappa & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} - \varkappa \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение это носит название *векового*; оно определяет k вещественных корней $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k$, теснейшим образом связанных с величинами полуосей рассматриваемой квадрики.

Т е о р е м а С и л ь в е с т р а. *Корни векового уравнения все вещественны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\varkappa$ является корнем векового уравнения, то система (6) имеет для q_s решение, отличное от нулевого. Если этот корень $\varkappa$ комплексный, то комплексными будут и q_s. Пусть $\bar{q}_s$ обозначает величину, сопряженную с q_s.

Умножим уравнения системы (6) соответственно на $\bar{q}_i$ и сложим:

$$\sum_{ij} a_{ij} \bar{q}_i q_j = \varkappa \sum_i q_i \bar{q}_i;$$

сопряженное выражение будет иметь вид

$$\sum_{ij} a_{ij} q_i \bar{q}_j = \bar{\varkappa} \sum_i \bar{q}_i q_i.$$

Отсюда, если учесть симметричность коэффициентов $a_{ij} = a_{ji}$ рассматриваемой квадратичной формы f, непосредственно получается соотношение

$$\varkappa = \frac{\sum a_{ij}\bar{q}_i q_j}{\sum \bar{q}_i q_i} = \frac{\sum a_{ji}\bar{q}_i q_j}{\sum \bar{q}_i q_i} = \bar{\varkappa},$$

которое доказывает вещественность корня $\varkappa$, ибо только вещественные количества равняются своим сопряженным.

Чтобы определить геометрический смысл корня векового уравнения $\varkappa$, умножим уравнения (6) соответственно на q_i и сложим

$$2f = \varkappa \sum_i q_i^2.$$

Если корень $\varkappa$ положителен, то (из-за того, что решения q_s системы (6), удовлетворяющие уравнению квадрики $2f = 1$, представляют координаты вершины) выражение $\sum q_i^2$ представляет квадрат соответствующей полуоси квадрики. Если корень $\varkappa$ отрицателен, координаты вершины, отвечающей полуоси, в силу последнего соотношения, будут чисто мнимыми, а $\sum q_i^2$ будет представлять собой квадрат мнимой полуоси квадрики $2f = 1$.

В обоих случаях согласно последнему соотношению числовое значение $\varkappa$ равняется обратной величине квадрата соответствующей полуоси квадрики.

Пусть $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k$ — корни векового уравнения, а $a_1, \ldots$ $\ldots, a_k$ — отвечающие им полуоси квадрики, вещественные для положительных корней и мнимые для отрицательных. Из известного канонического вида уравнения квадрики в ее осях

$$\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$$

вытекает, что заданную форму f путем линейного преобразования к новым переменным x_i возможно привести к виду

$$2f = \sum_i \varkappa_i x_i^2.$$

Корни векового уравнения $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k$ определяют характер формы f. Если они все положительны, то форма f, а вместе с ней и потенциальная энергия $V = f + \ldots$ будут определенно-положительными и будут иметь минимум в положении равновесия. Если среди корней $\varkappa$ найдется хотя бы один отрицательный, то потенциальная энергия $V = f + \ldots$ при соответствующем выборе численно сколь угодно малых значений переменных q_s может быть сделана отрицательной. Пуанкаре предложил называть корни $\varkappa$ *коэффициентами устойчивости*, а число отрицательных $\varkappa_s$ — *степенью неустойчивости*.

В этих терминах теоремы Лагранжа и Ляпунова можно высказать словами: если в положении равновесия все коэффициенты устойчивости положительны, то равновесие устойчиво; если имеется хотя бы один отрицательный коэффициент устойчивости, то равновесие неустойчиво.

19. Пример. Однородный тяжелый трехосный эллипсоид лежит на горизонтальной плоскости. Определить коэффициенты устойчивости Пуанкаре для его положений равновесия.

Пусть уравнение эллипсоида относительно его осей будет следующее:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0.$$

Положениями равновесия трехосного эллипсоида будут те положения, в которых нормаль к эллипсоиду в точке касания будет коллинеарна с радиусом из центра в точку касания; другими словами, положениями равновесия будут положения, в которых точка касания с неподвижной плоскостью совпадает с вершиной какой-либо из полуосей.

Касательная плоскость

$$AxX + ByY + CzZ - 1 = 0$$

в точке касания (x, y, z) отстоит от центра (тяжести) на расстоянии

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}}.$$

Отсюда, если эта касательная плоскость есть та горизонтальная плоскость, на которой лежит эллипсоид, то потенциальная функция в области положения равновесия ($x = 0$, $y = 0$) имеет вид

$$V = -U = mg\delta = \frac{mg}{\sqrt{A(A-C)x^2 + B(B-C)y^2 + C}} =$$
$$= \frac{mg}{\sqrt{C}}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{A(A-C)}{C}x^2 + \frac{B(B-C)}{C}y^2\right) + \dots\right],$$

и следовательно, коэффициенты устойчивости положения равновесия $x = 0$, $y = 0$ суть

$$\varkappa_1 = -\frac{mg}{2\sqrt{C}}\frac{A(A-C)}{C}, \quad \varkappa_2 = -\frac{mg}{2\sqrt{C}}\frac{B(B-C)}{C}.$$

Отсюда, если эллипсоид лежит на вершине малой полуоси ($A < B < C$), то это положение равновесия устойчиво ($\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$); если эллипсоид лежит на вершине средней полуоси ($A < C < B$), то такое равновесие неустойчиво с одной степенью неустойчивости; если эллипсоид лежит на вершине большой полуоси ($A > B > C$), то равновесие неустойчиво с двумя степенями неустойчивости.

Критерий знакоопределенности квадратичных форм

20. Для задач устойчивости имеют значение не столько величины коэффициентов устойчивости Пуанкаре, сколько их знаки. Для определения же знака корней нет необходимости разрешать вековое уравнение; достаточно знать необходимые и достаточные условия, при выполнении которых потенциальная функция будет определенно-положительной.

Для решения последней задачи можно использовать известный критерий Гурвица отрицательности вещественных частей корней алгебраического полинома, в данном случае полинома $\Delta(-\lambda)$. Наиболее простым и удобным для вычислений является метод Лагранжа, заключающийся в постепенном выделении полных квадратов из квадратичной формы. Интересен метод Кронекера приведения квадратичной формы к сумме квадратов, так как он приводит к неравенствам, которые весьма просто связаны с *критерием Сильвестра*.

Вещественная квадратичная форма

$$\varphi = \sum_{ij} c_{ij} x_i x_j \quad (c_{ij} = c_{ji})$$

тогда и только тогда будет определенно-положительной, когда все главные диагональные миноры ее дискриминанта положительны:

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Доказательство. Для сокращения письма обозначим главные диагональные миноры дискриминанта через

$$C_r = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{r1} & \ldots & c_{rr} \end{vmatrix},$$

а через C_{rs} обозначим минор (со знаком) дискриминанта C_n, отвечающий элементу c_{rs}.

Преобразованием переменных

$$x_i = u_i + \frac{C_{in}}{C_{nn}} u_n \quad (i < n), \qquad x_n = u_n$$

форму φ приводим к виду

$$\varphi = \sum_{i, j=1}^{n-1} c_{ij} u_i u_j + \frac{C_n}{C_{n-1}} u_n^2,$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Отсюда отношение $\frac{C_n}{C_{n-1}}$ равняется одному из коэффициентов устойчивости формы φ в переменных $u_1, \ldots, u_n$.

Продолжая этот процесс дальше над формой

$$\sum_{1}^{n-1} c_{ij} u_i u_j,$$

убеждаемся в достаточности условий теоремы.

Необходимость условий теоремы доказывается просто. Если форма

$$2\varphi = \sum_{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_i$$

является определенно-положительной, то уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_{i} c_{ij} x_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

необходимо должны совместно удовлетворяться лишь при нулевых значениях всех переменных $x_s = 0$ $(s = 1, \ldots, n)$; отсюда необходимо, чтобы определитель из коэффициентов c_{ij} последней системы был бы отличен от нуля: $C_n \neq 0$. Если $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ является определенно-положительной, то определенно-положительной по отношению к $x_1, \ldots, x_{n-1}$ будет также и форма $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, а отсюда следует $C_{n-1} \neq 0$. Продолжая эти рассуждения, выводим, что если φ определенно-положительная форма, то все главные диагональные миноры ее дискриминанта необходимо отличны от нуля: $C_r \neq 0$ $(r = 1, \ldots, n)$, и тем самым указанное преобразование формы φ к сумме квадратов возможно на каждом шаге; а из приведенной к сумме квадратов определенно-положительной формы φ следует необходимость условий теоремы.

З а м е ч а н и е. В дальнейшем мы будем рассматривать иногда более общие квадратичные формы от комплексных переменных x_j с комплексными коэффициентами

$$\varphi = \sum_{ij} c_{ij} \bar{x}_i x_j,$$

для которых $c_{ij} = \bar{c}_{ji}$. Такие формы носят название эрмитовых. Условия знакоопределенности и именно положительности формы φ имеют тот же вид, что и в критерии Сильвестра [1]).

---

[1]) Доказательство этого предложения читатель может найти в книге П. А. Ш и р о к о в а «Тензорное исчисление», ч. I, § 25 (М.: ГТТИ, 1934), где в § 20 можно также найти и более развернутое доказательство критерия Сильвестра.

21. Пример. Материальная система с тремя степенями свободы находится под действием сил, потенциальная функция которых имеет вид

$$V = \frac{1}{2}[a^2(q_1^2 + q_2^2) + 2\alpha q_3(q_1 + q_2) + b^2 q_3^2],$$

где q_s суть независимые координаты материальной системы, a, b, α — некоторые вещественные постоянные.

Пусть положение, для которого все q_s суть нули, является изолированным положением равновесия. Требуется определить условия устойчивости этого положения равновесия.

Согласно теореме Лагранжа это положение равновесия будет устойчивым, если в нем потенциальная функция V имеет минимум.

Для того чтобы V была определенно-положительной, ее дискриминант

$$\begin{vmatrix} a^2 & 0 & \alpha \\ 0 & a^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & b^2 \end{vmatrix}$$

должен иметь все главные диагональные миноры положительными.

Отсюда вытекают условия

$$a^2 > 0, \quad a^2 b^2 - 2\alpha^2 > 0.$$

Пример. Свободная материальная точка массы m движется в пространстве под действием сил, потенциальная функция которых в цилиндрических координатах r, θ, z имеет вид $V = \varphi(r, z)$.

Живая сила

$$T = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2)$$

и потенциальная функция не зависят явно от 0; поэтому 0 является циклической координатой (п. 9), которой отвечает интеграл $mr^2\theta' = \beta$. Отсюда функция Рауса имеет вид

$$R = \frac{m}{2}(r'^2 + z'^2) - \varphi - \frac{\beta^2}{2mr^2}.$$

Для стационарного движения должны выполняться условия

$$\frac{\partial R}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0;$$

пусть этим условиям удовлетворяют $r = r_0$, $z = z_0$. Это стационарное движение будет устойчивым согласно теореме Рауса, если измененная потенциальная функция

$$W = \varphi + \frac{\beta^2}{2mr^2}$$

имеет для него минимум. Пусть $r = r_0 + \xi$, $z = z_0 + \eta$; тогда

$$W(r, z) - W(r_0, z_0) = \frac{1}{2}\left[\varphi_{rr}\xi^2 + 2\varphi_{rz}\xi\eta + \varphi_{zz}\eta^2 + \frac{3}{r_0}\varphi_r\xi^2\right] + \ldots,$$

где φ_r, φ_{rr} — значения частных производных от φ по указанным переменным для рассматриваемого стационарного движения. Поэтому в случае его устойчивости все главные диагональные миноры дискриминанта

$$\begin{vmatrix} \varphi_{rr} + \frac{3}{r_0}\varphi_r & \varphi_{rz} \\ \varphi_{rz} & \varphi_{zz} \end{vmatrix}$$

должны быть положительными. Это дает два неравенства

$$\varphi_{rr} + \frac{3}{r_0}\varphi_r > 0, \quad \left(\varphi_{rr} + \frac{3}{r_0}\varphi_r\right)\varphi_{zz} - \varphi_{rz}^2 > 0.$$

Пример. Пусть потенциальная функция V некоторой материальной системы зависит от координат x, y, определяющих положение системы, и имеет минимум в положении равновесия x_0, y_0.

Введем обозначения $X = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_y$, $Y = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_x$, где индексами обозначены величины, при постоянстве которых берутся частные производные. Из условия устойчивости рассматриваемого положения равновесия в силу критерия Сильвестра имеем в этом положении:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y > 0, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_x^2 > 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_x > 0.$$

Вообразим, что условие равновесия $X = 0$ нарушается за счет некоторого изменения величины x; если при этом величина y остается постоянной, то изменение X определяется производной $\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y$. Если же величина y изменяется, восстанавливая другое уравнение равновесия $Y = 0$, то изменение X при этом определяется производной $\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{Y=0}$:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{Y=0} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, Y)} = \frac{\dfrac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}}{\dfrac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y - \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_x^2}{\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_x}.$$

Следовательно, если $\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_x$ не равна нулю, то

$$0 < \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{Y=0} < \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y.$$

Неравенства эти выражают некоторый частный случай принципа Ле-Шателье — Брауна.

Бифуркация равновесий

22. Во многих задачах механики потенциальная энергия материальной системы зависит не только от переменных, определяющих положение системы, но еще и от некоторых параметров. Например, в задаче о сжатом стержне потенциальная функция V зависит не только от переменных, определяющих форму стержня в возмущенном состоянии, но и от продольной нагрузки P.

Общую теорию положений равновесия таких материальных систем при различных значениях параметров предложил Пуанкаре.

Пусть потенциальная энергия V некоторой материальной системы зависит от координат $x_1, \ldots, x_n$, определяющих положение системы, и от одного переменного параметра α.

Для фиксированного значения параметра α положения равновесия определяются уравнениями

$$\frac{\partial V}{\partial x_s} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Пусть

$$x_1^{(i)} = \varphi_1^{(i)}(\alpha), \ldots, x_n^{(i)} = \varphi_n^{(i)}(\alpha)$$

представляют линейные последовательности вещественных корней уравнений равновесия; мы предполагаем, что функции $\varphi_s^{(i)}(\alpha)$ являются непрерывными функциями параметра α.

В $(n+1)$-мерном пространстве переменных $(\alpha, x_1, \ldots, x_n)$ последние уравнения определяют линии C_i, составляющие в совокупности некоторую вещественную кривую B, различные точки которой отвечают возможным различным состояниям равновесия.

Отдельные ветви C_i пересекаются между собой в точках, где имеется совпадение по меньшей мере двух вещественных корней уравнений равновесия. В окрестности такой точки уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial x_s} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$$

не имеют однозначного решения; в таких точках должен уничтожаться функциональный определитель [1])

$$\Delta = \frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right\|.$$

Другими словами, если в некоторой точке M кривой B гессиан потенциальной энергии Δ обращается в нуль, то такая точка может

---

[1]) Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 1, ч. 1: Пер. с фр.— М.: ГТТИ, 1933.— (См. § 38).

быть точкой пересечения ветвей C_i; точки M называются *критическими*, или *точками бифуркации* (*ветвления*).

Некоторые точки кривой B отвечают устойчивым состояниям равновесия, а некоторые — неустойчивым. *Смена устойчивости на ветвях C_i может происходить лишь в точках бифуркации.* В самом деле, для определенной ветви C_i координаты x_s являются некоторыми функциями параметра α, $x_s = \varphi_s^{(i)}(\alpha)$ и, следовательно, для ветви C_i определитель также является функцией α, если в Δ заменить $x_s = \varphi_s^{(i)}(\alpha)$. При переходе по ветви C_i от точки к точке будут изменяться значения Δ.

Для определенного состояния равновесия, отвечающего некоторой точке ветви C_i, устойчивость определяется коэффициентами Пуанкаре, или, иначе, корнями отвечающего векового уравнения

$$\Delta(\varkappa) = \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij}\varkappa \right\| = 0.$$

Здесь и во всем дальнейшем δ_{ij} есть символ Кронекера; δ_{ij} равняется нулю, если i и j различны, и равняется 1, если i и j равны. Разложение полинома $\Delta(\varkappa)$ на линейные множители: $\Delta(\varkappa) = (\varkappa_1 - \varkappa) \ldots (\varkappa_n - \varkappa)$ непосредственно дает

$$\Delta = \Delta(0) = \varkappa_1 \ldots \varkappa_n.$$

Так как в точке бифуркации $\Delta = 0$, то в ней по крайней мере один из коэффициентов устойчивости Пуанкаре $\varkappa_i$ обращается в нуль и наоборот. Но корни векового уравнения $\Delta(\varkappa) = 0$ всегда вещественны. Поэтому на ветви C_i устойчивость линейной последовательности равновесий может пропадать (или появляться) лишь в точках бифуркации, так как при потере (или приобретении) устойчивости по меньшей мере один из коэффициентов устойчивости, меняя свой знак, будет проходить через нуль.

Пусть M есть некоторая точка бифуркации; отвечающее ей значение параметра α примем равным нулю.

В различных задачах механики интересуются преимущественно реальными ветвями кривой равновесия. Отметим без доказательства два предложения, относящиеся сюда [1].

Представим себе, что как-либо выяснены реальные ветви $C_1, \ldots, C_k$ кривой B, проходящие через рассматриваемую точку бифуркации M. Проведем две плоскости $\alpha - \varepsilon = 0$ и $\alpha + \varepsilon = 0$, причем ε предполагается столь малой положительной постоянной, чтобы каждая из ветвей $C_1, \ldots, C_k$ пересекала плоскости $\alpha^2 - \varepsilon^2 = 0$.

---

[1] Poincaré A. Sur l'equilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta mathematica.— 1885.— V. 7.
Четаев Н. Г. Ueber die von den Ellipsoiden abgeleiteten Gleichgewichtsfiguren // Изв. Казан. физ.-мат. о-ва.— 1929—1930.— Т. 4.— С. 1—36.

Пусть известные ветви $C_1, \ldots, C_k$ пересекают плоскость $\alpha - \varepsilon = 0$ в точках P_i, а плоскость $\alpha + \varepsilon = 0$ в точках Q_i. Для точек P_i и Q_i можно определить знаки гессиана Δ.

Оказывается, что *через точку M дополнительно к выясненным ветвям $C_1, \ldots, C_k$ пройдут по меньшей мере еще r реальных ветвей кривой равновесия B*

$$r = \frac{1}{2}\left|\sum [\Delta_{P_i}] - \sum [\Delta_{Q_i}]\right|,$$

где суммирование распространяется по всем указанным точкам, а $[f]$ обозначает $+1$, если $f > 0$, и -1, если $f < 0$.

Распределение устойчивых и неустойчивых положений равновесия для фиксированного значения α подчиняется закону смены устойчивости, состоящему в следующем. Уравнения равновесия для фиксированного значения параметра $\alpha = \delta$ определяют в плоскости $\alpha - \delta = 0$ пространства $(\alpha, x_1, \ldots, x_n)$ отвечающие состояниям равновесия точки P. Уравнения

$$\alpha = \delta, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0$$

определяют некоторую линию L_1, лежащую в плоскости $\alpha - \delta = 0$ и проходящую через все точки равновесий. Выбирая какие-либо направления обхода связных и без двойных точек частей линии L_1, мы можем занумеровать точки P_i в порядке их встречи. Пусть P_i и P_{i+1} принадлежат некоторой связной, без двойных точек, части линии L_1. Оказывается, что

$$[\Delta_{P_i}] + [\Delta_{P_{i+1}}] = 0,$$

а так как $\Delta = \varkappa_1 \ldots \varkappa_n$, видим, что *при переходе от равновесия P_i к равновесию P_{i+1} степень неустойчивости меняется на нечетное число.*

23. Эти общие теоремы о числе реальных ветвей, проходящих через точку бифуркации, и о смене устойчивости имеют весьма тривиальный смысл для того практически интересного случая, когда в области точки бифуркации отличен от нуля определитель

$$\Delta_1 = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{\partial (x_2, \ldots, x_n)}.$$

В этом случае вблизи точки бифуркации возможно разрешить однозначно относительно переменных $x_2, \ldots, x_n$ систему уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0,$$

получить

$$x_i = x_i(x_1, \alpha) \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

и, пользуясь этим решением, исключить переменные $x_2, \ldots, x_n$. После такой замены мы будем иметь всего одно уравнение равновесия

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = f(x_1, \alpha) = 0.$$

Изображающее вспомогательное пространство будет при этом плоскостью (α, x_1). На кривой равновесий B, определяемой в этой плоскости уравнением $f = 0$, бифуркации определятся точками, где уничтожается

$$\delta \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$$

Пусть прямая $\alpha = \text{const}$ сечет линию равновесий $f = 0$ в точках P_j, какие мы занумеруем последовательно при обходе прямой $\alpha = \text{const}$ слева направо. Выражение δ, очевидно, меняет свой знак при переходе от точки P_i к точке P_{i+1}, если ни одна из этих точек не есть точка бифуркации. Смысл δ нетрудно определить. Когда механическая система имеет всего одну степень свободы, то δ непосредственно является единственным коэффициентом устойчивости Пуанкаре. В общем случае имеем

$$\delta = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \sum_{s=2}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_1}.$$

Если решения $x_i = x_i(x_1, \alpha)$ вставить обратно в исходные уравнения, то получим тождества, которые возможно дифференцировать по переменной x_1:

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_i} + \sum_{s=2}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_1} \quad (i = 2, \ldots, n).$$

Предшествующее соотношение и эта система уравнений будут иметь нетривиальное решение для

$$1, \frac{\partial x_2}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial x_1},$$

когда определитель, составленный из их коэффициентов, равен нулю

$$\begin{vmatrix} -\delta + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\delta = \frac{\Delta}{\Delta_1}.$$

Согласно приведению квадратичных форм к каноническому виду по методу Кронекера замечаем, что δ в соответствующих переменных равняется одному из коэффициентов устойчивости. Из предположенного соотношения $\Delta_1 \neq 0$ следует, что каждой точке бифуркации $\Delta = 0$ в полной системе переменных $(\alpha, x_1, \ldots, x_n)$ отвечает точка бифуркации $\delta = 0$ приведенной системы и наоборот. При этом в точке бифуркации будет уничтожаться один и только один коэффициент устойчивости δ. В самом деле, если уничтожаются два коэффициента устойчивости, то канонический вид квадратичной формы в разложении V должен сводиться к сумме $n - 2$ квадратов, и поэтому все миноры первого порядка определителя Δ должны были бы обращаться в нуль, что противоречит предположению $\Delta_1 \neq 0$.

Рассмотрим интересный для приложений случай, когда при приведении квадратичной формы V к ее каноническому виду по методу Кронекера все коэффициенты приведенной формы, кроме δ, всегда положительны. Тогда устойчивость или неустойчивость равновесия будет зависеть лишь от знака δ; при δ положительном равновесие устойчиво, при отрицательном δ—неустойчиво. В плоскости (x_1, α), где ось x_1 идет горизонтально слева направо, а ось α снизу вверх, устойчивыми будут те ветви равновесий $f = 0$, справа от которых значения f положительны $(\delta > 0)$.

ГЛАВА 4

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Частные решения

Если в уравнениях возмущенных движений правые части зависят явно от времени, то соответствующее невозмущенное движение Раус предложил называть *неустановившимся*; когда же они не зависят явно от t, невозмущенное движение называется *установившимся*. В последнем случае уравнения в вариациях будут получаться с постоянными коэффициентами.

24. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами p_{ij}

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + \ldots + p_{in}x_n \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Будем искать частное решение вида

$$x_i = \left(A_{1i}\,\frac{t^m}{m!} + A_{2i}\,\frac{t^{m-1}}{m-1!} + \ldots + A_{m+1,\,i}\right)e^{\lambda t},$$

где A_{kj} и λ суть некоторые постоянные; среди постоянных A_{1i} некоторые должны быть отличными от нуля; положительную целую степень m требуется определить для каждого λ возможно наибольшей.

Если это выражение подставить в заданную систему дифференциальных уравнений, то после сокращения на общий множитель $e^{\lambda t}$ получим

$$\left(A_{1i}\,\frac{t^{m-1}}{m-1!} + \ldots + A_{mi}\right) + \lambda\left(A_{1i}\,\frac{t^m}{m!} + A_{2i}\,\frac{t^{m-1}}{m-1!} + \ldots + A_{m+1,\,i}\right) =$$

$$= \sum_j p_{ij}\left(A_{1j}\frac{t^m}{m!} + A_{2j}\frac{t^{m-1}}{m-1!} + \ldots + A_{m+1,\,j}\right).$$

Соотношения эти должны иметь место при произвольных значениях t; поэтому коэффициенты при одинаковых степенях t

должны быть равны между собой:

$$\begin{gathered}\sum_j (p_{ij} - \delta_{ij}\lambda) A_{1j} = 0,\\ \sum_j (p_{ij} - \delta_{ij}\lambda) A_{2j} = A_{1i},\\ \dots\dots\dots\dots\\ \sum_j (p_{ij} - \delta_{ij}\lambda) A_{m+1,\,j} = A_{mi}\\ (i = 1, \dots, n).\end{gathered} \tag{7}$$

Первая из этих систем уравнений (7) будет тогда иметь нетривиальное решение для A_{1j}, когда равен нулю определитель из ее коэффициентов

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого характеристического уравнения определяют значения показателя λ.

Пусть $\lambda = \lambda_0$ есть некоторый корень характеристического уравнения. Первая из систем (7) определяет одно нетривиальное решение для постоянных A_{1j}, если отличен от нуля по крайней мере один из миноров первого порядка определителя $\Delta(\lambda_0)$. Она определяет k линейно независимых решений для A_{1j}, если корень λ_0 обращает в нуль все миноры определителя $\Delta(\lambda_0)$ до порядка $k - 1$ включительно, не обращая в нуль по крайней мере одного из миноров k-го порядка.

25. Сначала остановимся на случае, когда корень $\lambda = \lambda_0$ не обращает в нуль по крайней мере один из миноров первого порядка. Не уменьшая общности, допустим, что последний есть Δ_{11}. Тогда решение первой из систем (7) может быть записано (если учесть, что нас интересует частное решение с точностью до общего всем A_{1j} множителя) известными формулами

$$A_{1j} = \Delta_{1j} \quad (j = 1, \dots, n), \tag{8}$$

где Δ_{ij} обозначает минор (со знаком) определителя $\Delta(\lambda)$, отвечающий элементу i-й строки и j-й колонки; при этом полагается $\lambda = \lambda_0$. Среди постоянных A_{1j} найдется при сделанных предположениях хотя бы одна отличная от нуля, а именно A_{11}.

Если λ остается переменным параметром и не приняло значения отмеченного корня $\lambda = \lambda_0$ или какого-либо другого фиксированного значения, то соотношения (8) определяют A_{1j} в виде некоторых полиномов от λ. Если эти полиномы A_{1j} подставить в уравнения ($i = 2, \dots, n$) первой из систем (7), то получим соотношения

$$\sum_j (p_{ij} - \delta_{ij}\lambda) A_{1j} = 0,$$

которые будут удовлетворены тождественно относительно λ, так как левые части представляют определители n-го порядка с двумя одинаковыми строчками. Тождества эти возможно дифференцировать по λ сколько угодно раз.

Дифференцируя их последовательно k раз ($k = 1, 2, \ldots$), заключаем, что полиномы

$$A_{k+1,\,j} = \frac{1}{k!}\, A_{1j}^{(k)}, \tag{9}$$

где $A_{1j}^{(k)}$ обозначает k-ю производную от A_{1j} по λ, удовлетворяют уравнениям ($i = 2, \ldots, n$) любой системы (7) независимо от значений λ.

Подстановка же полиномов A_{1j}, определенных формулами (8) при произвольном λ, в первое уравнение первой из систем (7) дает соотношение

$$\sum_j (p_{1j} - \delta_{1j}\lambda)\, A_{1j} = \Delta(\lambda).$$

Согласно этому соотношению первой системе (7) будут удовлетворять значения полиномов A_{1j} при λ, равном корню характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$.

Пусть $\lambda = \lambda_0$ является простым корнем характеристического уравнения. Тогда полиномы A_{kj}, определенные формулами (8) и (9), при значении λ, совпадающем с корнем λ_0, не могут удовлетворять второй системе (7), и, следовательно, наивысшая степень m рассматриваемых нами решений равна нулю. Действительно, если $\lambda = \lambda_0$ является простым корнем определителя $\Delta(\lambda)$, то значение первой производной по λ от $\Delta(\lambda)$ должно быть при $\lambda = \lambda_0$ отлично от нуля. Поэтому, если один раз продифференцировать последнее соотношение и использовать определение A_{2j} по формулам (9), получим при $\lambda = \lambda_0$

$$\Delta'(\lambda_0) = \sum_j (p_{1j} - \delta_{1j}\lambda_0)\, A_{2j} - A_{11} \neq 0;$$

таким образом, первое уравнение второй системы (7) не удовлетворяется. Пусть теперь $\lambda = \lambda_0$ является корнем кратности μ. При таком предположении значения всех производных определителя $\Delta(\lambda)$ до порядка $\mu - 1$ включительно будут нулями при $\lambda = \lambda_0$, а производная μ-го порядка при $\lambda = \lambda_0$ будет отлична от нуля. Дифференцируя предпоследнее соотношение последовательно k раз ($k = 1, 2, \ldots$) и используя определения (9)

$$\frac{1}{k!}\Delta^{(k)}(\lambda) = \sum_j (p_{1j} - \delta_{1j}\lambda)\, A_{k+1,\,j} - A_{k1},$$

заключаем, что значения полиномов A_{rj} ($r = 1, \ldots, \mu$) при $\lambda = \lambda_0$ будут удовлетворять μ первым системам (7) и не удовлетворять $(\mu + 1)$-й. Следовательно, наибольшая степень m будет в этом случае на единицу меньше кратности корня $m = \mu - 1$.

Найденные значения постоянных A_{kj} удовлетворяют не только полной системе (7), но и любой ее части, получающейся исключением некоторого числа систем снизу. Обстоятельство это доказывает существование частных решений исследуемого вида, в которых степень вековых членов начинается с произвольного числа, меньшего чем m. Другими словами, одновременно с искомым частным решением наивысшей степени m для отмеченного корня λ

$$x_i = f_i(t)e^{\lambda t},$$

где

$$f_i(t) = A_{1i}\frac{t^m}{m!} + \ldots + A_{m+1,\, i},$$

существуют производные от него, частные решения вида

$$x_i = f_i^{(k)}(t)e^{\lambda t},$$

где $f_i^{(k)}(t)$ обозначает k-ю производную по t от полинома $f_i(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$. Таким образом, для рассматриваемого характеристического корня $\lambda = \lambda_0$ кратности $\mu = m + 1$ мы определим полную группу из μ частных решений, очевидно, линейно независимых между собой, потому что наивысшие степени t в вековых членах этих решений все различны.

26. Остановимся теперь на общем случае, когда корень $\lambda = \lambda_0$ обращает в нуль все миноры определителя $\Delta(\lambda)$ до порядка $k - 1$ включительно, не обращая в нуль по крайней мере одного из миноров k-го порядка.

В этом случае первая из систем (7) определяет k линейно независимых решений для A_{1j}. Эти k линейно независимых решений мы определим следующим образом. Пусть $(\lambda - \lambda_0)^{\mu_r}$ является множителем наивысшей степени μ_r для общего наибольшего делителя D_{n-r} миноров r-го порядка определителя $\Delta(\lambda)$ $(r = 1, \ldots, k)$. Рассматривая производные от этих миноров по λ и замечая, что они выражаются линейно через миноры на единицу высшего порядка, убеждаемся в существовании неравенств

$$\mu > \mu_1 > \ldots > \mu_{k-1} > \mu_k = 0,$$

где μ обозначает кратность корня $\lambda = \lambda_0$ для характеристического определителя $\Delta(\lambda)$.

Среди миноров r-го порядка выделим минор (со знаком) [1])

$$\Delta_{i_1 \ldots i_r,\, j_1 \ldots j_r},$$

получающийся после вычеркиваний из определителя Δ строчек $i_1, \ldots, i_r$ и колонок $j_1, \ldots, j_r$, который бы имел $\lambda = \lambda_0$ корнем

[1]) Минору $\Delta_{i_1 \ldots i_r,\, j_1 \ldots j_r}$, полученному вычеркиванием из определителя строк с указателями $i_1, \ldots, i_r$ и колонок с указателями $j_1, \ldots, j_r$, условимся приписывать знак $(-1)^{i_1 + \ldots + i_r + j_1 + \ldots + j_r + \sigma}$, где σ обозначает сумму нарушений порядка в рядах $i_1, \ldots, i_r$ и $j_1, \ldots, j_r$.

точно кратности μ_r, а минор $\Delta_{i_1\ldots i_{r-1},\, j_1\ldots j_{r-1}}$ имел бы $\lambda = \lambda_0$ корнем кратности μ_{r-1}. Предполагая λ отличным от λ_0, составим выражения

$$A_{1,\, j_s} = \frac{\Delta_{i_1\ldots i_r,\, j_1\ldots j_{r-1} j_s}}{(\lambda - \lambda_0)^{\mu_r}} \qquad (s = r, r+1, \ldots, n). \tag{10}$$

Они определяют $A_{1 j_s}$ $(s = r, \ldots, n)$ в виде полиномов от λ, из которых по крайней мере один и именно $A_{1 j_r}$ не уничтожается при $\lambda = \lambda_0$. Не вошедшие в это определение $A_{1 i_1}, \ldots, A_{1 j_{r-1}}$ положим равными нулю. Выражения A_{kj} $(k = 2, 3, \ldots)$ определим при этом согласно формуле (9).

Так определенные полиномы A_{1j} подставим в первую систему из систем (7)

$$\sum_j (p_{ij} - \delta_{ij}\lambda) A_{1j} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{\mu_r}} \sum_{j_s} (p_{i j_s} - \delta_{i j_s}\lambda)\, \Delta_{i_1\ldots i_r,\, j_1\ldots j_{r-1} j_s}.$$

Стоящая здесь в правой части сумма будет тождественно нулем, коль скоро $i = i_k$, а $k > r$, потому что тогда она будет пропорциональна определителю, у которого будут две одинаковые строчки. Если $i = i_k$, а $k \leqslant r$, то, оставляя без выяснения знак, имеем

$$\sum_j (p_{i_k j} - \delta_{i_k j}\lambda) A_{1j} = \frac{\pm \Delta_{i_1\ldots i_{k-1} i_{k+1}\ldots i_r,\, j_1\ldots j_{r-1}}}{(\lambda - \lambda_0)^{\mu_r}}.$$

Согласно выбору $\Delta_{i_1\ldots i_r,\, j_1\ldots j_r}$ в правой части этого соотношения стоит полином от λ, имеющий $\lambda = \lambda_0$ корнем кратности, по крайней мере, не меньшей $\mu_{r-1} - \mu_r$, если $k < r$, и точно равной $\mu_{r-1} - \mu_r$, если $k = r$.

Итак, принятыми выражениями A_{1j} в первой из систем (7) будут тождественно удовлетворены все уравнения $i = i_k$ независимо от значений λ, если $k > r$, а уравнения при $k = 1, \ldots, r$ будут удовлетворены согласно последнему соотношению, если положим $\lambda = \lambda_0$.

Дифференцируя по λ тождественно удовлетворенные уравнения $(i = i_k,\ k > r)$ первой из систем (7), замечаем, что при наших определениях величин A_{kj} будут удовлетворены все подобные уравнения $(i = i_k,\ k > r)$ всякой из систем (7) независимо от значения λ. А так как правые части последних соотношений $(i = i_k,\ k \leqslant r)$ имеют $\lambda = \lambda_0$ корнем во всяком случае кратности не ниже $\mu_{r-1} - \mu_r$, то значения всех производных от этих выражений до порядка $\mu_{r-1} - \mu_r - 1$ включительно будут равны нулю при $\lambda = \lambda_0$, а это согласно (9) обозначает, что оставшиеся уравнения $(i = i_k,\ k \leqslant r)$ первой, второй, ..., $(\mu_{r-1} - \mu_r)$-й системы (7) будут удовлетворяться значениями полиномов A_{kj} при $\lambda = \lambda_0$.

В системе же $(\mu_{r-1} - \mu_r + 1)$-й не будет удовлетворяться по крайней мере ее $i = i_r$-е уравнение, так как $(\mu_{r-1} - \mu_r)$-я производная от

$$\frac{\Delta_{i_1 \ldots i_{r-1},\, j_1 \ldots j_{r-1}}}{(\lambda - \lambda_0)^{\mu_r}}$$

отлична от нуля при $\lambda = \lambda_0$.

Итак, при взятых определениях (10) и (9) значения полиномов A_{kj} при $\lambda = \lambda_0$ удовлетворяют $\mu_{r-1} - \mu_r$ системам (7), и, следовательно, наивысшая степень m при таких определениях будет $m = \mu_{r-1} - \mu_r - 1$.

Применяя этот прием к минорам порядка $r = 1, \ldots, k$, мы получим k частных решений с наивысшими степенями $m = \mu_{r-1} - \mu_r - 1$. Каждое из этих решений, как было замечено ранее, дает группу из $\mu_{r-1} - \mu_r$ решений путем дифференцирования по t полиномов, стоящих в производящем решении множителями при $e^{\lambda t}$.

Итак, для рассматриваемого характеристического корня $\lambda = \lambda_0$ кратности μ найдено k групп решений $(r = 1, \ldots, k)$, каждая из которых состоит из $\mu_{r-1} - \mu_r$ решений. Общее число найденных решений равно, очевидно, кратности корня

$$\sum_{r=1}^{k} (\mu_{r-1} - \mu_r) = \mu.$$

Полученные решения линейно независимы между собой. В самом деле, мы видели, что решения какой-либо отдельной группы между собою линейно независимы, так как имеют различные наивысшие степени t в своих вековых членах. Пусть цепочка исходных миноров

$$\Delta_{i_1 \ldots i_r,\, j_1 \ldots j_r}$$

определяется какими-либо одинаковыми индексами при $r = 1, \ldots, k$. Переменное x_{i_1}, входя во все решения группы, отвечающей минору $r = 1$, будет нулем по определению для всех других групп частных решений. Поэтому если существует какая-либо линейная зависимость между найденными решениями, то среди последних не может находиться по крайней мере ни одного решения из группы $r = 1$, так как без этого условия не будет существовать линейной зависимости частных решений для переменной x_{i_1}. Подобными соображениями можно показать, что в линейную зависимость частных решений не может входить также ни одного решения группы $r = 2$, так как x_{i_2}, входя в эту группу решений, не входит по определению ни в одну из групп $r > 2$. Продолжая это рассмотрение дальше и исключая шаг за шагом из предположенной линейной зависимости группы решений $r = 1, 2, \ldots, k$, тем самым доказываем линейную независимость между собою всей системы из μ найденных для корня $\lambda = \lambda_0$ частных решений.

Рассматривая теперь все различные и неодинаковые корни характеристического уравнения, мы получим указанным приемом систему из n частных решений, линейная независимость которых очевидна, если после доказанного обратить внимание на различие множителей $e^{\lambda t}$ в решениях, соответствующих неодинаковым корням λ.

Замечание. Можно привести много других способов определения частных решений. Не нарушая приведенных рассуждений, мы можем определить полиномы A_{1j_s} вместо (10) следующими формулами:

$$A_{1j_s}=\frac{\Delta_{i_1\ldots i_r,\, j_1\ldots j_{r-1}\, j_s}}{D_{n-r}},$$

где D_{n-r} есть общий наибольший делитель миноров r-го порядка.

Элементарные делители.

27 [1]). Для определения общих наибольших делителей миноров характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ выработаны элементарные приемы, на одном из которых мы остановимся.

Элементарными преобразованиями λ-матрицы [2]) называются следующие операции:

1°. Перестановка двух строчек или двух колонок.

2°. Умножение всех элементов какой-либо строчки (колонки) на один и тот же отличный от нуля постоянный множитель.

3°. Сложение элементов некоторой строчки (колонки), умноженных на один и тот же полином от λ, с соответствующими элементами другой строчки (колонки).

Эти элементарные преобразования обладают следующим, важным для нашей задачи свойством: если все определители i-го порядка λ-матрицы, в частности миноры определителя $\Delta(\lambda)$, имеют множителем полином $\varphi(\lambda)$, то этим множителем будут обладать все определители i-го порядка каждой из λ-матриц, получаемой из начальной путем элементарных преобразований. Действительно, для преобразований 1° и 2° это обстоятельство очевидно. Чтобы показать, что оно справедливо и для преобразований 3°, присоединим к элементам p-й колонки λ-матрицы соответствующие элементы q-й колонки, умноженные на полином $\psi(\lambda)$. Всякий определитель i-го порядка λ-матрицы, в который не входит p-я колонка, равно как и всякий определитель i-го порядка, заключающий кроме p-й колонки также и q-ю колонку, остается без изменения. Определитель i-го порядка, заключаю-

---

[1]) Бохер М. Введение в высшую алгебру.— М.: ГТТИ, 1934.— (См. гл. 12).

[2]) То есть матрицы, элементами которой являются полиномы от λ.

щий p-ю колонку, но в который не входит q-я колонка, после преобразований принимает вид

$$A \pm \psi B,$$

где A и B являются определителями i-го порядка начальной λ-матрицы. Отсюда непосредственно следует справедливость высказанного предложения.

Элементарные преобразования не могут изменить общего наибольшего делителя D_i определителей i-го порядка начальной λ-матрицы. Согласно предыдущему, они могли бы лишь увеличить на некоторый множитель общий наибольший делитель определителей i-го порядка в преобразованной λ-матрице; но увеличить этот общий делитель они не могут, так как элементарные операции обратимы, а обратное преобразование преобразованной λ-матрицы к начальной тогда дало бы иное выражение для D_i.

Элементарные преобразования ценны тем, что, сохраняя общие наибольшие делители определителей i-го порядка λ-матрицы, они могут привести последнюю к так называемому *каноническому виду*, для которого не представляет никаких затруднений определить общие наибольшие делители определителей любого порядка.

Если первый элемент λ-матрицы $f(\lambda)$ не обращается тождественно в нуль и не является множителем всех остальных элементов, то можно получить элементарными преобразованиями такую матрицу, первый элемент которой не равен тождественно нулю и будет меньшей степени, нежели $f(\lambda)$. Действительно, предположим, что в первой же строке находится на j-й колонке элемент $f_1(\lambda)$, не делящийся на $f(\lambda)$. Если $f_1(\lambda)$ имеет степень меньшую, нежели $f(\lambda)$, то желаемого можно достичь простой перестановкой первой и j-й колонок. Во всех других случаях

$$f_1(\lambda) = q(\lambda) f(\lambda) + r(\lambda),$$

где $r(\lambda)$ представляет полином степени низшей, нежели $f(\lambda)$. Тогда, присоединяя к элементам j-й колонки элементы первой колонки, умноженные на $-q(\lambda)$, получаем в преобразованной λ-матрице элемент $r(\lambda)$ в первой строке и j-й колонке; если этот элемент переместить на место первого, то получим требуемый результат.

Рассуждения эти переносятся и на тот случай, когда не делящийся на $f(\lambda)$ элемент находится в первой колонке.

Пусть теперь не делящийся на $f(\lambda)$ элемент стоит в i-й строке и j-й колонке. Пусть элемент первой строки и j-й колонки есть $\psi(\lambda) f(\lambda)$. Присоединяя тогда элементы 1-й колонки, умноженные на $-\psi(\lambda)$, к элементам j-й колонки, в 1-й строке и j-й колонке получим 0. Присоединяя j-ю колонку к первой, получим $f(\lambda)$ в качестве первого элемента, а в первой колонке и i-й строке будет стоять элемент, не делящийся на $f(\lambda)$, пользуясь которым, мы уже умеем уменьшать степень первого элемента.

Таким путем мы всегда можем сделать первым элементом λ-матрицы элемент с наинизшей степенью λ и притом не обращающийся тождественно в нуль, если исходная λ-матрица не состояла сплошь из нулей. Если этот элемент не является общим множителем остальных, то повторяем снова указанный процесс, каждый раз понижая степень первого элемента, так что после конечного числа операций возможность применения указанного приема должна прекратиться (а именно, когда первый элемент станет общим множителем всех остальных).

Преобразованиями 3° все элементы первой строки и первой колонки могут быть тогда приведены к нулю, за исключением первого элемента E_1, и интересующая нас квадратная матрица $\Delta(\lambda)$ ранга n примет вид

$$\begin{Vmatrix} E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix},$$

при этом $E_1(\lambda) \not\equiv 0$ является делителем всех b_{rs}.

Продолжая этот процесс дальше по отношению к матрице $\| b_{ij} \|$ и к дальнейшим, мы приведем исходную $\Delta(\lambda)$-матрицу к виду

$$\begin{Vmatrix} E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & E_n \end{Vmatrix},$$

ибо ранг исходной матрицы в интересующем нас случае характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ равен n. В каждом полиноме $E_i(\lambda)$ коэффициент при высшей степени λ сделаем равным единице. Полином $E_i(\lambda)$ согласно процессу своего образования является делителем $E_j(\lambda)$, если $j > i$.

28. Общий наибольший делитель определителей i-го порядка последней матрицы равен

$$D_i(\lambda) = E_1(\lambda) \dots E_i(\lambda).$$

Если окончательная матрица получилась от элементарных преобразований $\Delta(\lambda)$-матрицы, то корнями полиномов $E_i(\lambda)$ являются корни характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, ибо значение определителя $\Delta(\lambda)$, очевидно, пропорционально произведению

$$E_1(\lambda) \dots E_n(\lambda).$$

Обозначим через

$$\lambda_1, \dots, \lambda_s$$

различные и неодинаковые корни характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, а разложение полинома $E_i(\lambda)$ на элементарные множители запишем формулой

$$E_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_i^1} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{e_i^s} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Входящие в функции $E_i(\lambda)$ множители

$$(\lambda - \lambda_j)^{e_i^j}$$

с отличными от нуля показателями e_i^j называются *элементарными делителями*. Для каждого корня λ_j отвечающие показатели e_i^j удовлетворяют неравенству

$$e_i^j \geqslant e_{i-1}^j \quad (i = 2, \ldots, n),$$

так как при приведении $\Delta(\lambda)$ к каноническому виду полином E_i получался делителем всякого E_j, если $j > i$.

Элементарные делители $\Delta(\lambda)$ определяют структуру частных решений для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Действительно, пусть нас интересуют решения, отвечающие корню $\lambda = \lambda_0$, для которого элементарные делители имеют вид

$$(\lambda - \lambda_0)^{e_i}.$$

Минор порядка r является определителем порядка $i = n - r$. Отсюда кратность μ_r корня $\lambda = \lambda_0$ для общего наибольшего делителя D_{n-r} миноров порядка r будет

$$\mu_r = e_1 + \ldots + e_{n-r},$$

и, следовательно, разность $\mu_{r-1} - \mu_r$, определившая в п. 26 число частных решений в соответствующей группе корня $\lambda = \lambda_0$, есть $\mu_{r-1} - \mu_r = e_{n-r+1}$.

Этим устанавливается, что *показатели e_i^j элементарных делителей равняются числам решений в соответствующей группе, принадлежащей корню λ_j.*

29. Пример. Зададимся системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} = -x - 2x',$$
$$\frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dy'}{dt} = -y - 2y' + \mu(x + x').$$

Если угодно, пример этот возможно моделировать двумя механическими системами с указанными силами, из которых первая через посредство некоторых следящих систем создает силы $\mu(x + x')$, действующие на вторую систему.

Будем следовать правилу п. 25, 26.

1°. Сначала нужно выяснить элементарные делители характеристической матрицы $\Delta(\lambda)$.

2°. Для некоторого корня $\lambda = \lambda_0$, начиная с отличного от нуля при $\lambda = \lambda_0$ минора точно наивысшего порядка k, определить цепочку миноров (со знаком)

$$\Delta_{i_1\ldots, i_r, j_1\ldots j_r}$$

с какими-либо одинаковыми индексами при $r = 1, \ldots, k$ так, чтобы при переходе от r к $r-1$ кратность корня $\lambda = \lambda_0$ повышалась для этих миноров точно на величину

$$e_{n-r+1},$$

и далее для каждого из значений $r = 1, \ldots, k$ определить ne_{n-r+1} полиномов

$$A_{1j_s} = \frac{\Delta_{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_{r-1} j_s}}{(\lambda-\lambda_0)^{\mu_r}}, \quad A_{p+1, j} = \frac{A_{1j}^{(p)}}{p!}$$

$(p = 1, \ldots, e_{n-r+1} - 1;\ s = r, \ldots, n)$; все A_{1j_s} при $s < r$ положить равными нулю. По этим полиномам, положив в них $\lambda = \lambda_0$, определить числа A и составить порождающее решение с наивысшей степенью вековых членов $m = e_{n-r+1} - 1$ группы (r)

$$x_i = \left(A_{1i}\frac{t^m}{m!} + \ldots + A_{m+1, i}\right)e^{\lambda t} \quad (\lambda = \lambda_0).$$

Для определения элементарных делителей матрицы

$$\Delta(\lambda) = \begin{Vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ \mu & \mu & -1 & -2-\lambda \end{Vmatrix}$$

прибавим к первой колонке вторую, умноженную на λ, и переместим вторую колонку на место первой

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2-\lambda & -(\lambda+1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ \mu & \mu(\lambda+1) & -1 & -2-\lambda \end{Vmatrix}.$$

Все элементы первой колонки, кроме первого, элементарными операциями со строчками можно сделать равными нулю. Предполагая это выполненным, умноженную на $\lambda + 2$ третью строчку прибавим к четвертой строчке, после чего переменим местами вторую и третью строчки, а четвертую колонку передвинем на место второй, оттеснив третью колонку на место четвертой, а вторую на место третьей:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu(\lambda+1) & -(\lambda+1)^2 \end{Vmatrix}.$$

Все элементы второй строчки, кроме второго, делаем нулями. В неканонизированной части матрицы $\lambda + 1$ является общим множителем всех ее элементов. Предполагая μ отличным от нуля, четвертую строчку, умноженную на $\lambda + 1/\mu$, прибавим к третьей и поменяем их местами:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^3 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, элементарными делителями $\Delta(\lambda)$ будут

$$(\lambda + 1), \ (\lambda + 1)^3.$$

Характеристическое уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет один корень $\lambda = -1$ четвертой кратности, которому, согласно структуре элементарных делителей, в силу ранее изложенного, будут отвечать две группы частных решений: одна с одним, а другая с тремя частными решениями.

Разумеется, в практических вычислениях, как только выяснен множитель E_α, матрицу надо сразу сокращать до ее неканонизированной части.

Определим теперь частные решения. В соответствии с выясненной канонической формой матрицы $\Delta(\lambda)$ заключаем, что все ее миноры первого порядка будут уничтожаться при $\lambda = -1$, а среди миноров второго порядка найдется отличный от нуля при $\lambda = -1$. Среди миноров $\Delta(\lambda)$ выделим цепочку общих наибольших делителей (правило 2°), например

$$\Delta_{14,32} = 1, \quad \Delta_{1,3} = -\mu(\lambda + 1).$$

Группу частных решений $r = 2$, отвечающую элементарному делителю $\lambda + 1$, вычисляем согласно 2°. Числа A_{1j} суть

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = 1, \ A_{13} = 0, \quad A_{14} = 0;$$

отсюда группа $r = 2$ состоит из частного решения

$$x = -e^{-t}, \quad x' = e^{-t}, \quad y = 0, \ y' = 0.$$

Чтобы определить группу частных решений $r = 1$, отвечающую элементарному делителю $(\lambda + 1)^3$, следуем правилу 2°; полиномы $A_{i,j}$ для этой группы имеют вид

$$\begin{aligned} A_{11} &= -(\lambda + 2)(\lambda + 1), & A_{12} &= \lambda + 1, \\ A_{13} &= -\mu, & A_{14} &= -\mu\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда дифференцированием получаем

$$\begin{aligned} A_{21} &= -2\lambda - 3, & A_{22} &= 1, \ A_{23} = 0, & A_{24} &= -\mu, \\ A_{31} &= -1, & A_{32} &= 0, \ A_{33} = 0, & A_{34} &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя в эти полиномы $\lambda = -1$, находим постоянные A_{kj}

и составляем производящее решение группы:

$$x = (-t - 1)\,e^{-t},\quad x' = te^{-t},$$
$$y = -\mu\frac{t^2}{2}e^{-t},\quad y' = \left(\mu\frac{t^2}{2} - \mu t\right)e^{-t}.$$

Остальные два производных частных решения группы $r = 1$ получим путем дифференцирования полиномиальных множителей в производящем решении

$$x = -e^{-t},\quad x' = e^{-t},\quad y = -\mu te^{-t},\quad y' = (\mu t - \mu)\,e^{-t},$$
$$x = 0,\qquad x' = 0,\qquad y = -\mu e^{-t},\qquad y' = \mu e^{-t}\text{[1]}).$$

Канонический вид первого приближения

30 [18]. Для изучаемой системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n$$

будем искать n независимых интегралов вида

$$U = y_1x_1 + \ldots + y_nx_n,$$

где y_i суть некоторые функции t. Уравнения, каким удовлетворяют функции y_i, получаются дифференцированием

$$\frac{dU}{dt} = \sum_i x_i\frac{dy_i}{dt} + \sum_i y_i\,(p_{i1}x_1 + \ldots + p_{in}x_n) =$$
$$= \sum_i x_i\left(\frac{dy_i}{dt} + p_{1i}y_1 + \ldots + p_{ni}y_n\right) \equiv 0.$$

Так как это тождество должно иметь место при произвольных начальных значениях переменных x_i, а за начальный момент мы вольны принять всякий, в том числе и рассматриваемый, то

$$\frac{dy_i}{dt} + p_{1i}y_1 + \ldots + p_{ni}y_n = 0.$$

Эта система дифференциальных уравнений называется *присоединенной* к исходной системе. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$D\,(\mu) = \|\,p_{ji} + \delta_{ji}\mu\,\| = 0.$$

---

[1]) Необходимо заметить, что если предложенный пример разрешать нередко применяемым методом огульного исключения переменных, приводя систему к уравнению $\Delta\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0$, в котором степени оператора $\frac{d}{dt}$ обозначают порядок производных, то неизбежно придем к ошибочному результату о существовании частного решения с вековым членом t^3, которого в задаче на самом деле нет.

Словом, характеристический определитель присоединенной системы получается из исходного $\Delta(\lambda)$ заменой λ на $-\mu$ и заменой строчек на колонки, а колонок на строчки. Поэтому характеристические корни присоединенной системы μ_s отличаются лишь знаком от характеристических корней λ_s исходной системы.

Пусть

$$(\mu+\lambda_s)^{n_s} \quad (s=1, \ldots, k)$$

представляют все элементарные делители характеристической матрицы $D(\mu)$ для присоединенной системы в предположении, что каждый корень повторяется столько раз, сколько соответствует ему групп решений. Степень n_s соответствующего элементарного делителя обозначает, как мы знаем, число решений в группе, отвечающей корню $\mu=-\lambda_s$; числа n_s перебирают все показатели элементарных делителей матрицы $\Delta(\lambda)$. Пусть группа частных решений присоединенной системы для делителя (s) есть

$$y_i^{(s)}=\left(A_{1i}^{(s)}\frac{t^m}{m!}+\ldots+A_{m+1i}^{(s)}\right)e^{-\lambda_s t} \quad (m=0,1,\ldots,n_s-1),$$

где $A_{ki}^{(s)}$ суть постоянные, определение которых выяснено. Подставляя эти частные решения y_i в выражение искомого интеграла U, найдем n_s следующих интегралов системы уравнений в вариациях:

$$U^{(s)}=\left(z_1^{(s)}\frac{t^m}{m!}+\ldots+z_{m+1}^{(s)}\right)e^{-\lambda_s t} \quad (m=0,1,\ldots,n_s-1),$$

где $z_r^{(s)}$ суть линейные формы относительно переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ с постоянными коэффициентами:

$$z_r^{(s)}=\sum_i A_{ri}^{(s)}x_i \quad (r=1,\ldots,n_s). \tag{11}$$

Все $n=n_1+\ldots+n_k$ интегралов, которые получим, давая s все значения от 1 до k включительно, будут линейно независимыми по построению. Отсюда независимыми будут n линейных форм $z_r^{(s)}$ $(r=1,\ldots,n_s;\ s=1,\ldots,k)$, которые, следовательно, можно принять за новые переменные вместо $x_1,\ldots,x_n$. Дифференцируя интеграл $U^{(s)}$ с наивысшей степенью $m=n_s-1$, имеем

$$e^{-\lambda_s t}\left[\left(\frac{dz_1^{(s)}}{dt}-\lambda_s z_1^{(s)}\right)\frac{t^{n_s-1}}{n_s-1!}+\left(\frac{dz_2^{(s)}}{dt}-\lambda_s z_2^{(s)}+z_1^{(s)}\right)\frac{t^{n_s-2}}{n_s-2!}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\left(\frac{dz_{n_s}^{(s)}}{dt}-\lambda_s z_{n_s}^{(s)}+z_{n_s-1}^{(s)}\right)\right]=0,$$

откуда

$$\begin{aligned}\frac{dz_1^{(s)}}{dt}&=\lambda_s z_1^{(s)},\\ \frac{dz_j^{(s)}}{dt}&=\lambda_s z_j^{(s)}-z_{j-1}^{(s)} \quad (s=1,\ldots,k;\ j=2,\ldots,n_s).\end{aligned} \tag{12}$$

Итак, при помощи неособого[1]) линейного преобразования с постоянными коэффициентами (11) система дифференциальных уравнений в вариациях преобразуется к *каноническому виду* (12).

Канонические переменные $z_j^{(s)}$ разбивают пространство $(x_1, \ldots, x_n)$ на k подпространстве $(z_1^{(s)}, \ldots, z_{n_s}^{(s)})$, где $s = 1, \ldots, k$ в том смысле, что начальное возмущение какой-либо одной переменной $z_j^{(s)}$ не затрагивает переменных $z_\alpha^{(\beta)}$ при β, отличном от s, и при $\beta = s$, $\alpha < j$.

В случае существования комплексных характеристических корней λ_s отвечающие им канонические переменные $z_j^{(s)}$ будут также комплексными. Если желаем иметь дело с вещественными переменными, то следует произвести дополнительную замену переменных.

Допустим, что сопряженным корням

$$\lambda_1 = \lambda + \mu\sqrt{-1}, \quad \lambda_2 = \lambda - \mu\sqrt{-1}$$

соответствуют следующие величины z:

$$z_j^{(1)} = u_j + v_j\sqrt{-1},$$
$$z_j^{(2)} = u_j - v_j\sqrt{-1} \quad (j = 1, \ldots, n_1 = n_2).$$

За новые переменные вместо $z_j^{(1)}$, $z_j^{(2)}$ можно принять величины u_j, v_j, которые будут линейными формами величин x_s с постоянными вещественными коэффициентами. Дифференциальные уравнения, каким удовлетворяют u_j, v_j, получаются из (12) путем отделения вещественных и мнимых частей:

$$\frac{du_1}{dt} = \lambda u_1 - \mu v_1,$$
$$\frac{dv_1}{dt} = \lambda v_1 + \mu u_1,$$
$$\frac{du_j}{dt} = \lambda u_j - \mu v_j - u_{j-1},$$
$$\frac{dv_j}{dt} = \lambda v_j + \mu u_j - v_{j-1} \quad (j = 2, \ldots, n_1).$$

Такие группы уравнений получим для каждой пары комплексных сопряженных корней. Для вещественных корней будем иметь группы вида (12).

31. Пример. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_4 - x_6, \qquad \frac{dx_4}{dt} = x_1 + x_4 - x_5,$$

---

[1]) Под неособым линейным преобразованием понимается такое, определитель из коэффициентов которого отличен от нуля.

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3, \qquad \frac{dx_5}{dt} = x_1 + x_5 + x_6,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = -x_2 + x_3, \qquad \frac{dx_6}{dt} = x_1 + x_4 - x_5 + 2x_6.$$

Чтобы определить канонические переменные $z_j^{(s)}$, выпишем матрицу присоединенной системы

$$D(\mu) = \begin{Vmatrix} \mu & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\mu & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\mu & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1+\mu & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1+\mu & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2+\mu \end{Vmatrix}.$$

Элементарные делители этой матрицы суть

$$\mu^2 + 2\mu + 2, \quad (\mu^2 + 2\mu + 2)^2.$$

Следовательно, характеристическое уравнение присоединенной системы $D(\mu) = 0$ имеет два комплексных сопряженных корня $\mu = -1 + i$ и $\mu = -1 - i$, каждое третьей кратности; характеристическое же уравнение заданной системы $\Delta(\lambda) = 0$ будет поэтому иметь корни $\lambda = 1 - i$ и $\lambda = 1 + i$ той же кратности.

Для определения постоянных $A_{kj}^{(s)}$, входящих в выражения канонических переменных $z_k^{(s)}$ и в выражения решений присоединенной системы, рассмотрим такую цепочку миноров

$$D_{42,\,53} = -\mu(2+\mu), \quad D_{4,\,5} = \mu(2+\mu)(\mu^2 + 2\mu + 2),$$

удовлетворяющих правилу п. 29 для любого корня характеристического уравнения присоединенной системы $D(\mu) = 0$.

Сначала определим постоянные A_{kj}, связанные в известном смысле с простым элементарным делителем $(\mu + 1 + i)$. Согласно формуле

$$A_{1j} = D_{42,\,5j}$$

определим полиномы

$$A_{11} = 0, \; A_{12} = \mu(1+\mu)(2+\mu), \; A_{13} = -\mu(2+\mu),$$
$$A_{14} = 0, \; A_{15} = 0, \qquad A_{16} = 0,$$

откуда для выбранного корня $\mu = -1 - i$ имеем

$$A_{12} = 2i, \; A_{13} = 2,$$

и следовательно, согласно формуле (11)

$$z_1^{(1)} = 2(x_3 + ix_2).$$

Определим теперь канонические переменные другой группы того же корня. Поскольку все миноры первого порядка определителя $D(\mu)$ имеют общий множитель $\mu^2 + 2\mu + 2$, мы можем определить полиномы A_{1j}, следуя замечанию в п. 26, по формулам

$$A_{1j} = \frac{D_{4j}}{\mu^2 + 2\mu + 2}.$$

Имеем

$$A_{11} = -(2+\mu)^2, \qquad A_{12} = 0, \qquad A_{13} = 0,$$
$$A_{14} = (1+\mu)\cdot(\mu^2 + 2\mu + 2), \quad A_{15} = \mu(2+\mu), \quad A_{16} = -2(1+\mu).$$

Отсюда по формуле (9)

$$A_{21} = -2(2+\mu), \qquad A_{22} = 0, \qquad A_{23} = 0,$$
$$A_{24} = (\mu^2 + 2\mu + 2) + 2(1+\mu)^2, \quad A_{25} = 2(1+\mu), \quad A_{26} = -2.$$

Подставляя в эти полиномы значение корня $\mu = -1 - i$, имеем

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 2i, & A_{12} = 0, & A_{13} = 0, \\ A_{14} = 0, & A_{15} = -2, & A_{16} = 2i, \\ A_{21} = -2 + 2i, & A_{22} = 0, & A_{23} = 0, \\ A_{24} = -2, & A_{25} = -2i, & A_{26} = -2, \end{array}$$

откуда канонические переменные этой группы определяются по формулам (11)

$$z_1^{(2)} = 2i(x_1 + x_6 + ix_5), \quad z_2^{(2)} = -2(x_1 + x_6 + ix_5) + 2i(x_1 + ix_4).$$

Канонические переменные для сопряженного корня получаются переходом к сопряженным формам $\bar{z}_1^{(1)}, \bar{z}_1^{(2)}, \bar{z}_2^{(2)}$.

32 [17]. Частные решения уравнений п. 24 или легко получающиеся после их подстановки в уравнения (11) решения канонических уравнений (12)

$$z_i^{(s)} = \varphi_j^{(s)} e^{\lambda_s t} \qquad (\varphi_j^{(s)}(t) \text{ — полиномы})$$

приводят к непосредственным выводам об устойчивости в первом приближении.

Если среди корней $\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение ($x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$) неустойчиво в первом приближении. Если все эти корни имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение устойчиво в первом приближении. Если часть корней имеет вещественные части равными нулю при прочих корнях с отрицательными вещественными частями, то невозмущенное движение будет устойчивым или неустойчивым в первом приближении, смотря по тому, будут ли все элементарные делители, отвечающие нулевым и чисто мнимым корням определителя $\Delta(\lambda)$, простыми (с показателями e_i^s, не превосходящими 1) или среди них найдется хотя бы один не простой (с показателем e_i^s, большим, нежели 1).

Для упражнения все это можно доказать также прямым методом, рассматривая функцию

$$V = \sum_s (\alpha_s - \varepsilon)\left[z_1^{(s)}\bar{z}_1^{(s)} + (\alpha_s - \varepsilon)^2 z_2^{(s)}\bar{z}_2^{(s)} + \ldots + (\alpha_s - \varepsilon)^{2(n_s-1)} z_{n_s}^{(s)}\bar{z}_{n_s}^{(s)}\right],$$

где ε — некоторая отличная от α_s вещественная постоянная. Полная производная по t от этой функции V в силу канонических уравнений (12) есть

$$V' = 2\varepsilon V + \sum_s (\alpha_s - \varepsilon)^2 \left[2 z_1^{(s)}\bar{z}_1^{(s)} + 2(\alpha_s - \varepsilon)^2 z_2^{(s)}\bar{z}_2^{(s)} + \ldots + \right.$$
$$+ 2(\alpha_s - \varepsilon)^{2(n_s-1)} z_{n_s}^{(s)}\bar{z}_{n_s}^{(s)} - (\alpha_s - \varepsilon)\left(z_1^{(s)}\bar{z}_2^{(s)} + \bar{z}_1^{(s)} z_2^{(s)}\right) - \ldots -$$
$$\left. - (\alpha_s - \varepsilon)^{2n_s-3}\left(z_{n_s-1}^{(s)}\bar{z}_{n_s}^{(s)} + \bar{z}_{n_s-1}^{(s)} z_{n_s}^{(s)}\right)\right].$$

Дискриминант квадратичной формы Эрмита, стоящей в квадратных скобках под знаком последней суммы, есть

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 2 \end{vmatrix},$$

если за переменные для простоты принять $(\alpha_s - \varepsilon)^k z_{k+1}^{(s)}$.

Главные диагональные миноры Δ_r этого дискриминанта все положительны [1]), поэтому стоящие в квадратных скобках формы будут определенно-положительными каждая относительно своих переменных $z_1^{(s)}, \ldots, z_{ns}^{(s)}$, а вся сумма будет тем самым определенно-положительной относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Если среди корней $\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ имеется хотя бы один, положим корень λ_1, с положительной вещественной частью ($\alpha_1 > 0$), то, выбирая ε равным некоторому положительному числу, не превышающему наименьшей положительной вещественной части корней, замечаем, что функция V при таком выборе ε удовлетворяет всем условиям второй теоремы Ляпунова о неустойчивости, так как при выборе переменных $x_1, \ldots, x_n$ согласно условиям $z_j^{(s)} = 0$ $(s > 1)$ значения функции V будут положительными. Невозмущенное движение будет поэтому неустойчивым.

Если все корни $\lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ имеют отрицательные вещественные части $\alpha_s < 0$, то, выбирая ε согласно неравенству $\alpha_s \leqslant \varepsilon \leqslant 0$, замечаем, что функция V будет определенно-отрицательной, а ее производная определенно-положительной. Согласно теореме Ляпунова невозмущенное движение будет устойчивым, а близкие возмущенные движения будут стремиться к нему асимптотически.

[1]) Разложение Δ_r, если $r \geqslant 3$, по элементам последней колонки приводит к соотношению $\Delta_r - \Delta_{r-1} = \Delta_{r-1} - \Delta_{r-2}$, откуда после вычисления $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$ получается $\Delta_r = r + 1$.

Известный произвол в выборе ε указывает, что при построении функции V, разрешающей вопросы об устойчивости или неустойчивости в первом приближении, точное знание корней λ_s и канонических переменных $z_j^{(s)}$ не является необходимым. Практическое использование этого обстоятельства будет показано ниже.

Теорема Гурвица

33. Во многих задачах, когда требуется найти лишь условия, которым должны удовлетворять коэффициенты p_{rs}, чтобы обеспечить устойчивость или неустойчивость невозмущенного движения в первом приближении, нет смысла вычислять корни характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$; достаточно знать лишь знаки их вещественных частей.

Необходимые и достаточные условия отрицательности вещественных частей всех корней полинома с вещественными коэффициентами были найдены впервые Раусом. Более известны условия, предложенные Гурвицем.

Полином

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

с вещественными коэффициентами a назовем *гурвицевым*, если все его корни имеют отрицательные вещественные части. В плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ все корни гурвицева полинома лежат внутри области Φ, ограниченной мнимой осью y и левой полуокружностью достаточно большого радиуса R с центром в начале координат.

Пусть

$$f^*(z) = z^n - a_1 z^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n = (-1)^n f(-z).$$

Рассмотрим полином степени $n + 1$

$$F_0 = (z + c) f(z),$$

где c есть некоторая положительная постоянная; если полином $f(z)$ является гурвицевым, то таким же будет, очевидно, и полином F_0.

Полином $(n + 1)$-й степени

$$F_\mu = (z + c) f(z) + \mu z f^*(z)$$

при непрерывном изменении параметра μ от 0 до 1 изменяется от F_0 до полинома $F_1 = (z + c) f(z) + z f^*(z)$.

Если полином $f(z)$ есть гурвицев, то полином F_μ при непрерывном изменении параметра μ от 0 до 1 может перестать быть гурвицевым, если для какого-либо значения параметра μ на интервале $(0, 1)$ по крайней мере один из корней полинома F_μ перейдет через границу области Φ изнутри наружу. Но при указанных значениях параметра μ полином F_μ не имеет корней на левой полуокружности достаточно большого радиуса R, так как, полагая на ней $z = Re^{i\theta}$, имеем:

$$F_\mu = (1 + \mu) R^{n+1} e^{i(n+1)\theta} + \ldots$$

Поэтому, если некоторые корни F_μ покидают область Φ, то это может произойти лишь при переходе корня через мнимую ось. Но и этого не может быть при $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Действительно, разлагая полином $f(z)$ на линейные множители, отвечающие его корням α_k, а полином $f^*(z)$ — на линейные множители, отвечающие корням $\alpha_k^* = -\bar{\alpha}_k$, непосредственно убеждаемся, что на оси y (если полином $f(z)$ есть гурвицев)

$$\left|\frac{f(z)}{f^*(z)}\right| = \frac{\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n}{\rho_1^*\rho_2^* \ldots \rho_n^*} = 1,$$

где

$$\rho_k = |z - \alpha_k|, \quad \rho_k^* = |z - \alpha_k^*| = |z + \bar{\alpha}_k|,$$

ибо на оси y $(z = iy)$ имеем $\rho_k = \rho_k^*$.

При наших условиях $c > 0$ и $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ полином F_μ не может быть нулем на оси y $(z = iy)$, так как в таком случае было бы

$$1 = \left|\frac{(z+c) f(z)}{\mu z f^*(z)}\right| = \left|\frac{z+c}{\mu z}\right|$$

или

$$c^2 + (1 - \mu^2) y^2 = 0,$$

что невозможно.

Итак, если $f(z)$ представляет гурвицев полином, то гурвицевым будет и полином

$$F_1 = (z + c) f(z) + z f^*(z) \qquad (c > 0).$$

Обратный процесс показывает, как для гурвицева полинома F_1 степени $n + 1$ строится гурвицев полином $f(z)$ степени n. В самом деле, рассмотрим полином

$$\Phi_\mu = (z - 2a_1) f(z) - \mu z f^*(z) \qquad (a_1 > 0).$$

где параметр μ изменяется от нуля до 1. Если $f(z)$ представляет гурвицев полином, то полином $\Phi_0 = (z - 2a_1) f(z)$ будет иметь n корней в левой полуплоскости переменного z и один корень $z = 2a_1 > 0$ в правой. При оговоренном интервале изменения μ ни один из полиномов Φ_μ не может иметь чисто мнимых корней (доказывается точно так же, как это доказывалось для полинома F_μ). При $\mu \to 1$ полином

$$\Phi_\mu = (1 - \mu) z^{n+1} - (1 - \mu) a_1 z^n + [a_2(1 - \mu) - 2a_1^2] z^{n-1} + \ldots$$

будет иметь два вещественных и удаляющихся в бесконечность корня вида $\pm a_1 \sqrt{\frac{2}{1-\mu}}(1 + \ldots)$, где невыписанные члены при

μ, стремящемся к единице, стремятся к нулю. Эти корни разных знаков; поэтому полином $(n-1)$-й степени

$$\Phi_1 = (z - 2a_1) f(z) - zf^*(z)$$

все свои корни имеет в левой полуплоскости; и стало быть, если $f(z)$ представляет гурвицев полином, то гурвицевым будет и полином Φ_1.

Теперь возможно перейти к изложению теоремы Гурвица. Из коэффициентов полинома $f(z)$ составим табличку

$$\begin{Vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix},$$

в которой все $a_m = 0$, если $m > n$. На ее главной диагонали стоят последовательно $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Главные диагональные миноры этой таблички обозначим через

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Т е о р е м а Г у р в и ц а. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы полином $f(z)$ имел все корни с отрицательными вещественными частями, являются неравенства*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ \ldots, \ \Delta_n > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c = 2a > 0$. Тогда

$$F_1 = 2 \sum A_r z^{n+1-r},$$

где

$$2A_r = [1 + (-1)^r]\, a_r + 2a a_{r-1}.$$

Обозначим через Δ_ν определители Гурвица для полинома $f(z)$, а через D_ν определители Гурвица для полинома $\frac{1}{2} F_1$. Имеем

$$D_\nu = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ aa_2 & aa_1 + a_2 & a & 1 & \ldots \\ aa_4 & aa_3 + a_4 & aa_2 & aa_1 + a_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Вынесем из нечетных колонок множитель a, после чего каждую эту колонку вычтем из четной на единицу большего номера; вынося множитель a и из четных колонок, будем иметь

$$D_\nu = a^\nu \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_2 & a_1 & 1 & \ldots \\ a_4 & a_3 & a_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = a^\nu \Delta_{\nu-1}.$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы полином F_1 был бы гурвицевым, является условие, что полином $f(z)$ является гурвицевым. Допустим теперь, что критерий Гурвица справедлив для полиномов степени $\leqslant n$. Если $\Delta_\nu > 0$ ($\nu = 1, \ldots, n$), то полином $f(z)$ — гурвицев и, следовательно, полином F_1 будет гурвицевым, и для него *необходимо* будут существовать условия

$$D_r > 0 \qquad (r = 1, \ldots, n+1).$$

Если $D_r > 0$ ($r = 1, \ldots, n+1$), то отсюда $\Delta_s > 0$ ($s = 1, \ldots$ $\ldots, n$) и, значит, полином $f(z)$ будет гурвицевым согласно гипотезе о справедливости критерия Гурвица для полиномов степени n. Но условие, что $f(z)$ — гурвицев полином, является *достаточным* для того, чтобы гурвицевым был и полином $F_1(z)$. Стало быть, если критерий Гурвица справедлив для полиномов степени n, то он будет справедлив ($D_1 = a > 0$) и полиномов степени $n+1$, ибо каждый гурвицев полином степени $n+1$ можно построить из некоторого гурвицева полинома степени n, как полином F_1 строился из $f(z)$. Для полиномов первой, второй степени критерий Гурвица, очевидно, справедлив; метод математической индукции дает, что он будет справедлив всегда.

Пример[1]). Вопрос об устойчивости вертикального вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа по отношению к углу нутации θ приводится к изучению дифференциального уравнения для $u = \cos\theta$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - br_0u)^2 = f(u),$$

в котором α, β, a, b суть некоторые постоянные, причем a и b положительны; r_0 — проекция на ось z начальной угловой скорости вращения твердого тела. Для механической задачи все корни полинома $f(u)$ вещественны, а значения переменной u лежат на замкнутом интервале между наименьшими корнями полинома $f(u)$.

Найдем условия, при которых корни полинома $f(u)$ будут больше $1 - \delta$, где δ — произвольно заданная малая положительная величина.

Рассмотрим полином

$$F(z) = -f(1 - \delta - z) = az^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3.$$

Его корни будут все отрицательными, если корни полинома $f(u)$ больше $1 - \delta$; и наоборот, если все корни полинома $F(z)$ отрицательны, то все корни полинома $f(u)$ будут больше $1 - \delta$.

Условия отрицательности всех корней полинома $F(z)$ получаются согласно теореме Гурвица в виде неравенств

$$a_1 > 0, \quad a_1a_2 - aa_3 > 0, \quad a_3 > 0.$$

Для практически наиболее интересного случая $\theta_0 = 0$, $\theta_0' > 0$; $\psi_0' = 0$, или $\beta - br_0 = 0$, $\theta_0'^2 = \alpha - a$ неравенства эти будут

[1]) Четаев Н. Г. О достаточных условиях устойчивости вращательного движения снаряда // Прикл. мат. и механ.— 1943.— Т. 7.— С. 81—96.

иметь следующий явный вид, если воспользоваться невыписанными выражениями для коэффициентов a_1, a_2, a_3:

$$b^2r_0^2 - 2a + \theta_0'^2 + 3a\delta > 0,$$

$$-2(b^2r_0^2 - 2a + \theta_0'^2)\,\theta_0'^2 + \delta\,[2(b^2r_0^2 - 2a + \theta_0'^2)^2 - 4a\theta_0'^2] + \\ + \delta^2 8a\,(b^2r_0^2 - 2a + \theta_0'^2) + 8a^2\delta^3 > 0,$$

$$-2\theta_0'^2 + \delta\,(b^2r_0^2 - 2a + \theta_0'^2) + a\delta^2 > 0.$$

Нас интересует наименьшее значение δ, для которого имеют место эти три неравенства; такое δ будет наинизшей верхней границей для функции $1 - u$. Если запас устойчивости $s = b^2r_0^2 - 2a > 0$ принять удовлетворяющим неравенству

$$(s + \theta_0'^2)^2 - 4a\theta_0'^2 \geqslant 0,$$

то при

$$\delta = \frac{2\theta_0'^2}{s + \theta_0'^2}$$

все три неравенства будут удовлетворены. А следовательно, при таком запасе устойчивости они по непрерывности останутся удовлетворенными и для несколько меньших значений δ. Поэтому при указанном значении запаса устойчивости s

$$1 - u < \frac{2\theta_0'^2}{s + \theta_0'^2}.$$

П р и м е р. Рассмотрим случай, когда в уравнениях возмущённого движения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, \ldots, n)$$

коэффициенты p_{sr} являются непрерывными, ограниченными функциями вещественного параметра α. Различным значениям α могут отвечать различные невозмущенные движения. Последовательности изучаемых невозмущенных движений $(x_1 = 0, \ldots, x_n = 0)$ отвечает в пространстве переменных $(\alpha, x_1, \ldots, x_n)$ ось α. Те точки последней, где характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) = \| p_{sr} - \delta_{sr}\lambda \| = (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n) = 0$$

имеет все корни с отрицательными вещественными частями, отвечают асимптотически устойчивым невозмущенным движениям; при этом все определители Гурвица должны быть положительными:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \ldots, \Delta_n = a_n\Delta_{n-1} > 0.$$

Определители Δ_s будут некоторыми функциями α. Если невозмущенное движение, отвечающее $\alpha = \alpha_0$, асимптотически устойчиво, то при дальнейшем изменении параметра α в каком-либо направлении, начиная со значения α_0, устойчивость может теряться либо когда, по меньшей мере, один из корней характеристического уравнения становится равным нулю, либо когда два корня становятся чисто мнимыми; в первом случае уничтожается коэффициент a_n, во втором уничтожается Δ_{n-1}. Первое утверждение не требует доказательств. Для доказательства второго разобьем характеристический полином на сумму членов с четными и нечетными степенями

$$(-1)^n \Delta(\lambda) = (\lambda^n + a_2\lambda^{n-2} + \ldots) + (a_1\lambda^{n-1} + a_3\lambda^{n-3} + \ldots).$$

Сумма числа членов первого из взятых в круглые скобки выражений (пусть $\mu + 1$) и числа слагаемых во второй скобке (пусть $\nu + 1$) равняется числу $n + 1$ всех членов полинома $(-1)^n \Delta(\lambda)$. Отсюда

$$\mu + \nu = n - 1.$$

Рассмотрим полиномы

$$\varphi(z) = z^\mu + a_2 z^{\mu-1} + \ldots, \quad \psi(z) = a_1 z^\nu + a_3 z^{\nu-1} + \ldots$$

Если полином $\Delta(\lambda)$ имеет чисто мнимый корень $\lambda = i\beta$, то полиномы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будут иметь по построению, по меньшей мере, один совместный корень и именно $z = -\beta^2$. Но полиномы φ и ψ имеют общие корни тогда и только тогда, когда уничтожается их результант

$$R = \pm\Delta_{n-1}.$$

Пусть на оси α точке P, где $\alpha = \alpha_0$, отвечает асимптотически устойчивое невозмущенное движение и, следовательно, все Δ_s положительны. При дальнейшем увеличении α определители Δ_s будут как-то изменяться; при этом первыми неизбежно будут уничтожаться a_n или Δ_{n-1}. Если при первом нарушении неравенств Гурвица уничтожается a_n, то для отвечающей точки M уравнения возмущенного движения будут иметь в силу канонического вида уравнений (12), по меньшей мере, один линейный интеграл или новую последовательность «равновесий», проходящую через M, так как $\Delta(\lambda)$ имеет при этом, по меньшей мере, один равный нулю корень. Если же при первом нарушении условий Гурвица уничтожается Δ_{n-1}, то в области отвечающей точки C будем иметь однопараметрическую (по меньшей мере) последовательность периодических движений, отвечающую квадратичному интегралу уравнений возмущенного движения, неизбежному в силу канонического вида уравнений (12) при паре мнимых корней $\Delta(\lambda)$ [1]).

[1]) Когда уравнения возмущенного движения не ограничиваются линейными членами, вопросом о существовании периодических движений занимался П. А. Кузьмин (К у з ь м и н П. А. Замечание о смене устойчивости установившихся движений // Сб. тр. Казан. авиац. ин-та.— 1939.—

Из сказанного мы должны также заключить, что если при изменении α от α_0 до некоторого значения α_1 не уничтожаются ни a_n, ни Δ_{n-1}, то невозмущенное движение, отвечающее $\alpha = \alpha_1$. будет при этом асимптотически устойчивым.

34 [19, 20]. Согласно предложению п. 32, неравенства Гурвица ($\Delta_s > 0$, $s = 1, \ldots, n$), выписанные для характеристического полинома $f(z) \equiv \Delta(z)$, дают необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости.

Существуют многочисленные алгебраические видоизменения теоремы Гурвица. Ими мы заниматься не будем; заметим, как аналогичные предложения можно получить путем непосредственного рассмотрения задач устойчивости. Для этого рассмотрим одну задачу, весьма полезную в дальнейшем.

Пусть корни характеристического уравнения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ имеют простые элементарные делители. Каждому корню λ_s отвечает тогда всего одно решение и одно каноническое переменное z_s ($s = 1, \ldots, n$). При этом полная производная по t от выражения

$$U^{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ суть целые неотрицательные числа, имеет в силу канонических уравнений первого приближения (12) следующий вид:

$$\frac{dU^{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}}{dt} = (\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n)\, U^{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}.$$

Изучим уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{dV}{dt} = W, \tag{13}$$

в котором непрерывная, ограниченная, уничтожающаяся, когда все x_s суть нули, функция W в рассматриваемой области изменений переменных $x_1, \ldots, x_n$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по полиномам $U^{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}$:

$$W = \sum A_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}\, U^{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}.$$

Будем искать решение в виде

$$V = \sum C_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}\, U^{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (13) и сравнивая коэффициенты при $U^{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}$, получаем

$$(\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n)\, C_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} = A_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}.$$

№ 10), а вопросы о поведении траекторий как в области точек бифуркации M, так и в точках ответвления периодических орбит C рассматривал Н. Н. Баутин (Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости.— М.: Гостехиздат, 1950).

Значения $C_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}$ определяются однозначно, если

$$\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n \gtrless 0.$$

Следовательно, если корни характеристического уравнения $\Delta(\lambda)$ допускают n групп решений и выражение $\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n$ никогда не нуль при целых неотрицательных α_s, то уравнение (13) всегда имеет однозначное формальное решение.

Если корни λ_s в плоскости комплексного переменного отметить изображающими их точками и нагрузить последние неотрицательными массами α_s, то выражение $\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n$ будет равняться $M(\xi + i\eta)$, где $M = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ — общая масса, а ξ, η — координаты центра масс нагруженных точек. Центр масс никогда не выходит за пределы выпуклой области, содержащей нагруженные точки; поэтому, если все корни λ_s лежат по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало, то ни при каких неотрицательных α_s выражение $\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n$ не может быть нулем.

Например, если вещественные части всех корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ отрицательны, то равенство $\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n = 0$ не может существовать при неотрицательных α_s; уравнение (13) имеет в этом случае однозначное решение.

Если же существуют целые неотрицательные числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$, для которых

$$\beta_1\lambda_1 + \ldots + \beta_n\lambda_n = 0,$$

то уравнение (13) имеет решение с точностью до члена $C_{(\beta_1 \ldots \beta_n)}U^{(\beta_1 \ldots \beta_n)}$ с произвольным коэффициентом $C_{(\beta_1 \ldots \beta_n)}$, если $A_{(\beta_1 \ldots \beta_n)} = 0$. Если же $A_{(\beta_1 \ldots \beta_n)} \gtrless 0$, то ограниченного решения искомого вида для V не существует, в функции V члену $A_{(\beta_1 \ldots \beta_n)}U^{(\beta_1 \ldots \beta_n)}$ будет отвечать

$$[A_{(\beta_1 \ldots \beta_n)}t + C_{(\beta_1 \ldots \beta_n)}]\, U^{(\beta_1 \ldots \beta_n)}$$

с произвольной постоянной $C_{(\beta_1 \ldots \beta_n)}$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$$

суть корни характеристического уравнения в предположении, что каждый корень повторяется столько раз, сколько соответствует ему групп решений. Канонические переменные $z_j^{(s)}$ удовлетворяют уравнениям (12).

Рассмотрим формы m-й степени

$$U_r = \Pi \left(z_j^{(s)}\right)^{\alpha_j^{(s)}} \quad \left(\sum_{js} \alpha_j^{(s)} = m\right).$$

Таких форм будет конечное число. Формы эти занумеруем лексикографически так, чтобы произведение степеней переменных всякой группы (s) $(s = 1, \ldots, k)$ с показателями

$$\alpha_1^{(s)}, \ldots, \alpha_{j-1}^{(s)}, \alpha_j^{(s)}, \ldots, \alpha_{n_s}^{(s)}$$

относилось к номеру r большему, нежели номер, отвечающий показателям

$$\alpha_1^{(s)}, \ldots, \alpha_{j-1}^{(s)} + 1, \alpha_j^{(s)} - 1, \ldots, \alpha_{n_s}^{(s)}.$$

Это можно достигнуть различными способами. Предполагая такую нумерацию U_r выполненной, рассмотрим уравнение

$$\frac{dV}{dt} = \sum_r A_r U_r,$$

где A_r суть некоторые постоянные. Разыскивая решение этого уравнения под видом

$$V = \sum_r C_r U_r$$

и подставляя это выражение V в интересующее нас уравнение, получим, согласно произведенной нумерации U_r,

$$\sum_r C_r \left[(\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k) U_r + \sum_\mu \beta_\mu^{(r)} U_\mu\right] = \sum_r A_r U_r,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ суть некоторые неотрицательные числа; $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = m$; $\beta_\mu^{(r)}$ суть некоторые неположительные числа, когда $\mu < r$, и нули, когда $\mu \geqslant r$. Сравнение коэффициентов при одинаковых U_r дает следующие алгебраические уравнения для определения коэффициентов

$$C_r (\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k) + \sum_p \beta_r^{(p)} C_p = A_r.$$

Эта система уравнений будет иметь отличное от нулевого решение для C_r, если определитель D, составленный из ее коэффициентов, будет отличен от нуля. Но определитель D имеет вид треугольника, так как в его i-й строке все элементы до i-го будут нулями; по диагонали определителя D будут стоять величины

$$\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k.$$

Поэтому определитель D будет отличным от нуля, если не уничтожается ни одно выражение $\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k$ при целых неотрицательных α_s, дающих в сумме m. В этом случае интересующее нас уравнение будет иметь для V единственное решение.

Перефразируя этот результат в начальных переменных x_s, имеем теорему Ляпунова: *когда корни* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *характеристического уравнения* $\Delta(\lambda)$ *таковы, что при данном целом* *положительном* m *для них невозможны никакие соотношения вида*

$$\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n = 0,$$

в которых все α_s *были бы целыми неотрицательными числами, дающими в сумме* m, *то всегда можно найти и притом только одну целую однородную функцию* V *степени* m *величин* x_s, *удовлетворяющую уравнению*

$$\sum_s (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s} = U$$

при произвольно заданной целой однородной функции U *величин* x_s *той же степени* m.

35. Можно заметить, что *необходимым и достаточным условием для того, чтобы характеристический полином* $\Delta(\lambda)$ *имел все корни с отрицательными вещественными частями, является определенная положительность квадратичной формы* V, *разрешающей уравнение*

$$\sum_s (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s} = U,$$

где U *представляет какую угодно определенно-отрицательную квадратичную форму переменных* x_s.

Действительно, достаточность этого условия следует непосредственно из теоремы Ляпунова об устойчивости и дополнения к ней об асимптотической устойчивости.

Необходимость усматривается не более сложно. Если все корни λ_s имеют отрицательные вещественные части, то ни для каких целых неотрицательных чисел α, дающих в сумме 2, не существует соотношения вида

$$\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_n\lambda_n = 0;$$

а это по предыдущей теореме п. 34 означает, что интересующее нас уравнение будет иметь единственное решение в виде некоторой квадратичной формы V переменных x_s. При этом форма V будет такова, что выбором значений переменных x_s ее нельзя сделать отрицательной, так как иначе она удовлетворяла бы всем условиям теоремы Ляпунова о неустойчивости; но движение не может быть неустойчивым, если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. Итак, V необходимо будет по крайней мере положительной. Если предположить ее приведенной к сумме квадратов $V = v_1^2 + \ldots + v_m^2$, где v_j обозначают независимые между собой линейные формы переменных x_s, замечаем, что m не может быть меньше n, так как тогда производная V', обращаясь в нуль при $v_1 = 0, \ldots, v_m = 0$, не могла бы совпадать со знакоопределенной функцией U.

Доказанное предложение позволяет установить, в зависимости от вида определенно-отрицательной формы U, ряд критериев, равносильных критерию Гурвица. Критерии эти состоят из неравенств, какие выражают положительность всех главных диагональных миноров дискриминанта квадратичной формы V. Хотя они ничуть не проще неравенств Гурвица, однако имеют то удобство, что позволяют после проделанных вычислений при определении неравенств непосредственно писать нужную функцию V прямого метода.

36. Пример. Рассмотрим твердое тело массы m с моментами инерции A, A, C относительно осей x, y, z центрального эллипсоида инерции. Если u, v, w и p, q, r суть проекции на эти оси соответственно скорости центра инерции и угловой скорости вращения тела, то живая сила будет:

$$2T = m(u^2 + v^2 + w^2) + (Ap^2 + Aq^2 + Cr^2).$$

Вообразим, что на тело действуют: сила $(-\sigma u, -\sigma v, -\sigma w)$, приложенная в постоянной точке тела $(0, 0, l)$, сила $(0, 0, Z)$, приложенная в центре тяжести, и пара сил с моментом $(0, 0, N)$. Пусть для простоты положительные функции σ и Z зависят от u, v, w, p, q, а функция N зависит от u, v, w, p, q, r; пусть $A > C$.

Дифференциальные уравнения движения такого тела возьмем для удобства в известной форме Кирхгофа

$$m\frac{du}{dt} = (rv - qw) - \sigma u, \qquad A\frac{dq}{dt} = (A - C)qr + \sigma lv,$$

$$m\frac{dv}{dt} = m(pw - ru) - \sigma v, \qquad A\frac{dq}{dt} = (C - A)rp - \sigma lu,$$

$$m\frac{dw}{dt} = m(qu - pv) - \sigma w + Z, \qquad C\frac{dr}{dt} = N.$$

Допустим, что уравнения эти имеют частное решение

$$u = 0,\ v = 0,\ w = w_0 > 0,\ p = 0,\ q = 0,\ r = r_0 > 0;$$

оно существует, если

$$Z_0 - \sigma_0 w_0 = 0 \text{ и } N_0 = 0.$$

Зададимся вопросом об условиях, при которых это частное решение будет асимптотически устойчивым в первом приближении по отношению к переменным u, v, w, p, q, r.

Дифференциальные уравнения первого приближения для возмущенного движения по отношению к интересующим нас величинам u, v, w, p, q, r имеют следующий вид, если вариации этих переменных соответственно обозначить через α, β, γ; ξ, η, ζ:

$$m\frac{d\alpha}{dt} = m(r_0\beta - w_0\eta) - \sigma_0\alpha, \quad m\frac{d\beta}{dt} = m(w_0\xi - r_0\alpha) - \sigma_0\beta,$$

$$m\,\frac{d\gamma}{dt}=\frac{\partial(Z-\sigma w)}{\partial u}\alpha+\frac{\partial(Z-\sigma w)}{\partial v}\beta+$$
$$+\frac{\partial(Z-\sigma w)}{\partial w}\gamma+\frac{\partial(Z-\sigma w)}{\partial p}\xi+\frac{\partial(Z-\sigma w)}{\partial q}\eta,$$
$$A\,\frac{d\xi}{dt}=(A-C)\,r_0\eta+\sigma_0 l\beta,$$
$$A\,\frac{d\eta}{dt}=(C-A)\,r_0\xi-\sigma_0 l\alpha,$$
$$C\,\frac{d\zeta}{dt}=\frac{\partial N}{\partial u}\alpha+\frac{\partial N}{\partial v}\beta+\frac{\partial N}{\partial w}\gamma+\frac{\partial N}{\partial p}\xi+\frac{\partial N}{\partial q}\eta+\frac{\partial N}{\partial r}\zeta,$$

где все частные производные взяты при значениях

$$u=v=p=q=0,\ w=w_0,\ r=r_0.$$

Для этих уравнений в вариациях характеристическое уравнение имеет вид

$$\Delta(\lambda)=\left(C\lambda-\frac{\partial N}{\partial r}\right)\left(m\lambda-\frac{\partial(Z-\sigma v)}{\partial w}\right)\times$$
$$\times\begin{vmatrix}-\sigma_0-m\lambda & mr_0 & 0 & -mw_0\\ -mr_0 & -\sigma_0-m\lambda & mw_0 & 0\\ 0 & \sigma_0 l & -A\lambda & (A-C)\,r_0\\ -\sigma_0 l & 0 & (C-A)\,r_0 & -A\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Отсюда непосредственно вытекают два условия

$$\frac{\partial N}{\partial r}<0 \quad\text{и}\quad \frac{\partial(Z-\sigma w)}{\partial w}<0$$

для отрицательности двух очевидных корней уравнения $\Delta(\lambda)=0$. Условия отрицательности вещественных частей других четырех корней уравнения могут быть получены по теореме Гурвица путем развертывания в полином выписанного определителя четвертого порядка и вычисления диагональных миноров Δ_j отвечающей матрицы Гурвица. После некоторых вычислений при этом можно установить, что Δ_1 и Δ_4 всегда положительны, условие $\Delta_3>0$ эквивалентно неравенству $l<0$, при котором Δ_2 положительно. Другими словами, все вещественные части оставшихся четырёх корней будут отрицательными, если $l<0$.

Результат этот можно получить много проще. Определитель четвёртого порядка, корни которого нас интересуют, является характеристическим для первых четырех уравнений в вариациях. Если $l<0$, то в рассматриваемом случае ($w_0>0$, $\sigma_0>0$) функция

$$2V=m(\alpha^2+\beta^2)-\frac{mw_0}{\sigma_0 l}A(\xi^2+\eta^2)$$

будет определенно-положительной относительно α,β,ξ,η. Ее производная по t является отрицательной:

$$V'=-\sigma_0(\alpha^2+\beta^2).$$

Следовательно, если α или β отличны от нуля, то значения функции V при изменении переменных согласно уравнениям в вариациях будут уменьшаться; если в некоторый момент $\alpha = 0$, $\beta = 0$, то в силу первых уравнений по крайней мере в следующий достаточно малый промежуток времени α и β будут отличны от нуля, если нулями не были ξ, η; словом, V будет уменьшаться при $l < 0$, сколь бы малые значения она ни имела. А это и доказывает интересующий нас результат.

П р и м е р. Вопрос о выборе параметров устойчивой механической системы имеет прикладное значение.

Чтобы иметь сравнимые между собой данные, ограничимся рассмотрением различных состояний одной и той же механической системы, описываемой определенными переменными.

Пусть в уравнениях возмущенных движений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

коэффициенты p_{sr} постоянны и зависят от некоторых параметров. Будем предполагать, что при рассматриваемых значениях параметров невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Определенно-положительную функцию Ляпунова V определим при этом уравнением

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = -(x_1^2 + \ldots + x_n^2). \tag{15}$$

Пусть

$$2V = \sum a_{sr}x_s x_r \quad (a_{rs} = a_{sr}).$$

Экстремум функции V на сфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = c$ (c — положительная постоянная) определяется по методу Лагранжа рассмотрением

$$V - \lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2 - c).$$

Отсюда

$$\sum (a_{sr} - 2\lambda\delta_{sr}) \quad x_r = 0 \quad (s = 1, \ldots, n); \tag{16}$$

следовательно, множитель Лагранжа λ должен быть корнем векового уравнения

$$\| a_{sr} - 2\lambda\delta_{sr} \| = 0.$$

Так как V представляет определенно-положительную квадратичную форму, то все корни λ_s этого уравнения будут положительными; пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$.

Умножая равенства (16) соответственно на x_s и складывая, будем иметь, что экстремальные значения V^* на сфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = c$ удовлетворяют равенствам

$$V^* = \lambda c$$

и, следовательно,

$$\lambda_1 (x_1^2 + \ldots + x_n^2) \leqslant V \leqslant \lambda_n (x_1^2 + \ldots + x_n^2). \qquad (17)$$

Отсюда в силу уравнений (15) и уравнений возмущенных движений (14) имеем

$$-\lambda_1 \frac{dV}{dt} \leqslant V \leqslant -\lambda_n \frac{dV}{dt}$$

или

$$V_0 e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \leqslant V \leqslant V_0 e^{-\frac{t}{\lambda_n}}. \qquad (18)$$

Мы должны отсюда заключить, что *верхняя граница возможных значений V будет меньше для той системы, для которой λ_n есть минимум, если начальные значения одинаковы.* Если же начальные значения x_s лежат на сфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = A$, то из неравенства (17) найдем

$$\lambda_1 A \leqslant V_0 \leqslant \lambda_n A.$$

Вследствие неравенства (18) отсюда вытекает:

$$A\lambda_1 e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \leqslant V \leqslant A\lambda_n e^{-\frac{t}{\lambda_n}}.$$

Точки $(x_1, \ldots, x_n)$, в которых функция Ляпунова имеет значение V, согласно (17) находятся внутри или на сфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \varepsilon$, где

$$\varepsilon = \frac{V}{\lambda_1} \leqslant V_0 \frac{1}{\lambda_1} e^{-\frac{t}{\lambda_n}},$$

и, следовательно, одно значение V_0 в фиксированной точке пространства $(x_1, \ldots, x_n)$ не характеризует времени переходного процесса.

При начальных возмущениях, лежащих на сфере

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = A,$$

будет

$$\varepsilon \leqslant A \frac{\lambda_n}{\lambda_1} e^{-\frac{t}{\lambda_n}}.$$

Отсюда время вхождения точки $(x_1, \ldots, x_n)$ со сферы A в сферу ε не больше

$$\lambda_n \ln \frac{A\lambda_n}{\varepsilon\lambda_1}.$$

Этот предел будет минимальным при заданных A и ε, если параметры системы выбраны согласно условию, что

$$\lambda_n \ln \frac{A\lambda_n}{\varepsilon\lambda_1}$$

есть минимум *.

ГЛАВА 5

ДЕЙСТВИЕ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ НА РАВНОВЕСИЕ

Нормальные координаты

37. Рассмотрим голономную материальную систему в положении равновесия, для которого значения всех ее лагранжевых координат $q_1, \ldots, q_n$ предполагаются равными нулю.

Уравнения в вариациях для возмущенного движения могут быть получены, если в выражениях живой силы T и потенциальной функции V мы ограничимся членами наинизшего измерения и примем вблизи рассматриваемого положения равновесия эти выражения в виде вещественных (симметричных) квадратичных форм с постоянными коэффициентами

$$2T = \sum_{ij} a_{ij} q_i' q_j' \quad \text{и} \quad 2V = \sum_{ij} b_{ij} q_i q_j.$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ и $b_{ij} = b_{ji}$.

Если материальную систему вывести из положения равновесия и предоставить самой себе, то дифференциальные уравнения возмущенного движения в первом приближении будут иметь вид уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_i},$$

или

$$\sum_j a_{ij} q_j'' + \sum_j b_{ij} q_j = 0.$$

Уравнения эти возможно упростить. Пусть мы переходим от координат $q_1, \ldots, q_n$ к новым независимым переменным $x_1, q_1^*, \ldots, q_{n-1}^*$ путем линейных преобразований с постоянными коэффициентами

$$q_i = m_i x + \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Лагранжиан по переменной x в новых переменных есть

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right) + \frac{\partial V}{\partial x} = \sum m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_i}\right].$$

Отсюда, чтобы получить уравнение Лагранжа для переменной x, умножим уравнения движения на постоянные множители m_i и сложим:

$$\left(\sum_{ij} m_i a_{ij} q_j\right)'' + \sum_{ij} m_i b_{ij} q_j = 0;$$

зададимся далее целью определить множители m_i так, чтобы имело место соотношение

$$x \equiv \sum_{ij} m_i a_{ij} q_j = \frac{1}{\lambda} \sum_{ij} m_i b_{ij} q_j,$$

справедливое при всяких значениях переменных q_j; отсюда

$$\sum_i (\lambda a_{ij} - b_{ij}) m_i = 0. \tag{19}$$

При этом уравнение Лагранжа для x будет весьма простым:

$$x'' + \lambda x = 0. \tag{20}$$

Уравнения (19) будут иметь нетривиальное решение для множителей m_i только тогда, когда λ будет корнем уравнения

$$\Delta(\lambda) = \| \lambda a_{ij} - b_{ij} \| = 0.$$

По теореме Сильвестра, доказываемой и в этом случае подобно п. 18, все корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ будут вещественны.

Матрица $\Delta(\lambda)$ *имеет простые элементарные делители.*

Доказательство этого предложения, впервые подмеченного Вейерштрассом, возможно изложить так [1]). Пусть λ — некоторый корень уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Независимо от простоты связанных с λ элементарных делителей система уравнений (19) будет иметь по крайней мере одно решение, если последнее считать с точностью до произвольного и общего всем m_i множителя. И значит, во всяком случае, будет существовать по крайней мере одна переменная x, линейно связанная с переменными Лагранжа $q_1, \ldots, q_n$ и удовлетворяющая уравнению (20). Заменим переменные q_s новыми переменными $x, q_1^*, \ldots, q_{n-1}^*$ — и для простоты письма новые переменные q_s^* запишем без звездочек: q_s. После такой замены выражения живой силы T и потенциальной функции V неизбежно должны принять вид

$$2T = x'^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^* q_i' q_j', \quad 2V = \lambda x^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}^* q_i q_j,$$

так как уравнение Лагранжа, взятое по переменной x, должно совпадать с уравнением (20). Живая сила T по своему определению представляет всегда определенно-положительную функцию

---

1) J o r d a n C. // Comptes Rendus.— 1872.— V. 74.— P. 1395.

относительно скоростей; поэтому квадратичная форма

$$\sum_{i, j=1}^{n-1} a_{ij}^{*} q_i' q_j'$$

является определенно-положительной относительно

$$q_1', \ldots, q_{n-1}'.$$

Следовательно, уравнения Лагранжа, взятые по переменным $q_1, \ldots, q_{n-1}$, будут зависеть только от стоящих в последних выражениях T и V сумм и будут допускать по крайней мере одно преобразование переменных, подобно рассмотренному. Продолжая этот процесс дальше и замечая, что в преобразованных выражениях живой силы всегда из-за их знакоопределенности будут оставаться суммы, содержащие незамененные q_s', приведем тем самым T и V в итоге к виду

$$2T = x_1'^2 + \ldots + x_n'^2, \quad 2V = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

А это и доказывает, что уравнения (19) имеют n нетривиальных решений для $m_1, \ldots, m_n$, т. е. все элементарные делители матрицы $\Delta(\lambda)$ имеют степени, равные 1. Определение множителей m_i подобно изложенному в п. 24 определению A_{1j}.

Переменные x_ν называются *нормальными координатами*. Уравнения Лагранжа в нормальных координатах имеют вид

$$x_\nu'' + \lambda_\nu x_\nu = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Уравнения эти легко интегрируются:

$$x_\nu = A_\nu \cos(\sqrt{\lambda_\nu} t + B_\nu) \qquad \text{при } \lambda_\nu > 0,$$

$$x_\nu = A_\nu t + B_\nu \qquad \text{при } \lambda_\nu = 0,$$

$$x_\nu = A_\nu e^{\sqrt{-\lambda_\nu} t} + B_\nu e^{-\sqrt{-\lambda_\nu} t} \qquad \text{при } \lambda_\nu < 0,$$

где A_ν, B_ν обозначают постоянные интегрирования. Отсюда заключаем, что если все корни λ_ν для уравнения $\Delta(\lambda) = \| \lambda a_{ij} - b_{ij} \| = 0$ положительны, то в первом приближении равновесие устойчиво и возмущенными движениями являются гармонические колебания нормальных координат x_ν соответственно с частотами $\sqrt{\lambda_\nu}$. Для прочих случаев равновесие в первом приближении будет неустойчивым, и нормальная координата x_s, отвечающая неположительному корню λ_s, будет изменяться с течением времени либо по линейному, либо по экспоненциальному закону.

Следует подчеркнуть, что при приведении к нормальным координатам существенную роль играла знакоопределенность живой силы T. Это означает, что при существовании в механической системе некоторых циклических координат, когда уравнения движения хотя и приводятся игнорированием циклических координат к виду уравнений Лагранжа (п. 9), однако для этих последних уравнений функция R не всегда будет определенно-положительной относительно скоростей нециклических координат и, следовательно, в задачах устойчивости стационарных движений может случиться, что нормальные координаты не существуют.

Влияние новой связи

38. Допустим, что на материальную систему наложена новая связь, совместимая с рассматриваемым положением равновесия.

В первом приближении при малых абсолютных значениях нормальных координат x_ν новую связь можно записать уравнением

$$\sum_\nu A_\nu x_\nu = 0 \quad \text{или} \quad \sum_\nu A_\nu \delta x_\nu = 0,$$

где постоянные A_ν не все нули, а δx_ν обозначают возможные вариации нормальных координат. Уравнения движения могут быть получены при этом из принципа Даламбера, выражающегося в нормальных координатах уравнением

$$\sum_\nu (x_\nu'' + \lambda_\nu x_\nu)\, \delta x_\nu = 0.$$

Умножая уравнение связи на неопределенный множитель μ и складывая его с предыдущим выражением, имеем

$$\sum_\nu (x_\nu'' + \lambda_\nu x_\nu + \mu A_\nu)\, \delta x_\nu = 0,$$

откуда

$$x_\nu'' + \lambda_\nu x_\nu + \mu A_\nu = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Для тех из нормальных координат, которым отвечают равные нулю постоянные A_ν, дифференциальные уравнения движения будут сохранять свой прежний вид и, следовательно, новая связь не оказывает влияния на законы изменения таких переменных. Затронутыми наложением новой связи оказываются лишь переменные, которые отвечают отличным от нуля постоянным A_ν.

Чтобы найти характеристические показатели для переменных x_ν, стесненных связью, положим

$$x_\nu = B_\nu e^{\sqrt{-\lambda}\, t}, \quad \mu = M e^{\sqrt{-\lambda}\, t}$$

и подставим эти значения как в последние уравнения

$$B_\nu (\lambda_\nu - \lambda) + A_\nu M = 0,$$

так и в уравнение связи

$$\sum_\nu A_\nu B_\nu = 0.$$

Исключая B_ν из последнего соотношения, имеем

$$f(\lambda) \equiv \sum_\nu \frac{A_\nu^2}{\lambda - \lambda_\nu} = 0.$$

В это выражение войдут лишь те $\lambda_{\nu_1}, \ldots, \lambda_{\nu_s}$ из λ_ν, которым отвечают отличные от нуля постоянные A_ν. Рассматривая знаки функции $f(\lambda)$ на интервале $(\lambda_{\nu_i}, \lambda_{\nu_{i+1}})$ при значениях λ, близких к концам интервала (корни λ_{ν_i} занумерованы в порядке возрастающих значений), замечаем, что $f(\lambda)$ при изменении λ на интервале $(\lambda_{\nu_i}, \lambda_{\nu_{i+1}})$ будет переходить от положительных значений к отрицательным и, следовательно, она будет иметь на этом интервале по крайней мере один корень. Отсюда выводим, что *характеристические показатели λ для системы, стесненной новой связью, будут перемежаться с корнями $\lambda_{\nu_1}, \ldots, \lambda_{\nu_s}$. Для переменных x_ν, не стесненных связью, числа λ будут совпадать с отвечающими значениями λ_ν.*

Если $s = 1$, что случится, когда в уравнении связи отлична от нуля всего одна постоянная A_{ν_1}, то для λ будут возможны все значения λ_ν, кроме λ_{ν_1}. Значение λ_{ν_1} будет как бы выпадать при этом.

Следовательно, если начальное положение равновесия было устойчивым (все $\lambda_\nu > 0$), то перемежающиеся с λ_ν значения λ будут также все положительны, тем самым при наложении новой связи будет сохраняться устойчивость положения равновесия.

Если равновесие имело степень неустойчивости больше 1 (число неположительных λ_ν), то неустойчивость равновесия сохранится и при наложении одной новой связи. Если же число неположительных λ_ν было равно 1, то наложением одной подходящей новой связи равновесие системы возможно упрочнить.

Влияние диссипативных сил

39. Пусть f представляет определенно-положительную вещественную (симметричную) квадратичную форму от скоростей x'_ν с постоянными коэффициентами $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$:

$$2f = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta.$$

Обобщенные силы X_ν, составляющие которых определяются соотношениями

$$X_\nu = -\frac{\partial f}{\partial x'_\nu},$$

лорд Кельвин предложил называть *диссипативными*. К таким силам принадлежат обычные силы трения, действующие на точки материальной системы в направлении, противоположном их скорости, и пропорциональные величине последней. Функцию f называют *функцией рассеяния* или *диссипативной функцией Релея*. Если эта функция Релея f содержит производные всех нормальных координат, то диссипацию называют *полной*; в противном случае — *частичной*.

Допустим, что на материальную систему, кроме рассматриваемых потенциальных сил, действуют диссипативные силы с функцией Релея f. Уравнения малых движений такой материальной системы вблизи ее положения равновесия будут

$$\frac{dx_\nu}{dt} = x'_\nu, \quad \frac{dx'_\nu}{dt} = -\lambda_\nu x_\nu - \frac{\partial f}{\partial x'_\nu}. \tag{21}$$

Влияние диссипативных сил на устойчивость равновесия изучил лорд Кельвин; он доказал следующие теоремы.

Диссипативные силы не нарушают устойчивости.

В самом деле, если положение равновесия устойчиво под действием одних потенциальных сил, то все λ_ν положительны. Полная энергия системы

$$H = \frac{1}{2}\sum_\nu x'^2_\nu + \frac{1}{2}\sum_\nu \lambda_\nu x^2_\nu$$

будет определенно-положительной квадратичной формой скоростей x'_ν и координат x_ν. Ее полная производная по времени в силу уравнений (21)

$$H' = -2f.$$

представляет постоянно-отрицательную функцию. Согласно теореме Ляпунова об устойчивости, отсюда выводим, что при дополнительном присоединении диссипативных сил положение равновесия остается устойчивым.

Если равновесие устойчиво при потенциальных силах, то оно становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией.

Действительно, рассмотрим функцию

$$W = H + \beta\sum_\nu x_\nu x'_\nu.$$

Постоянную β всегда возможно выбрать так, чтобы функция W была определенно-положительной. Дискриминант W имеет вид

$$\left\| \begin{array}{c|c} \|\delta_{ij}\| & \|\beta\delta_{ij}\| \\ \hline \|\beta\delta_{ij}\| & \|\lambda_j\delta_{ij}\| \end{array} \right\|.$$

Если все λ_j суть положительные числа, то всегда возможно выбрать β столь малым, чтобы все главные диагональные миноры этого дискриминанта были положительны.

Полная производная по времени от функции W в силу уравнений (21) есть

$$W' = -\left[\sum_{ij}(c_{ij} - \delta_{ij}\beta)\, x_i' x_j' + \beta \sum_i \lambda_i x_i^2 + \beta \sum_{ij} c_{ij} x_i' x_j\right].$$

Дискриминант стоящей в квадратных скобках формы

$$\left\|\begin{array}{c|c} \| c_{ij} - \delta_{ij}\beta \| & \left\| \frac{\beta}{2} c_{ij} \right\| \\ \hline \left\| \frac{\beta}{2} c_{ij} \right\| & \| \beta\lambda_j \delta_{ij} \| \end{array}\right\|$$

при достаточно малом положительном β, когда при определении знака главных диагональных миноров возможно пренебрегать членами с высшими степенями β по сравнению с членами с низшей степенью β, будет иметь положительными все свои главные диагональные миноры, ибо диссипативная функция Релея f является определенно-положительной.

Итак, при достаточно малом положительном β функция W будет определенно-положительна; как не зависящая явно от t, она допускает бесконечно малый высший предел; ее производная W' при указанном выборе β будет функцией определенно-отрицательной. Выполнение этих условий согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости доказывает наше утверждение.

Разумеется, если диссипация неполная, то устойчивость равновесия, существующая при одних потенциальных силах, не будет упрочняться от добавления таких диссипативных сил до асимптотической устойчивости.

Изолированное и неустойчивое при потенциальных силах равновесие не может быть стабилизировано диссипативными силами с полной диссипацией.

Доказательство. Пусть среди λ_ν существует по меньшей мере один отрицательный коэффициент и нет ни одного, равного нулю. Рассмотрим функцию

$$W = H + \beta \sum_\nu \lambda_\nu x_\nu x_\nu'.$$

Ее полная производная по времени в силу уравнений (21) есть

$$W' = -\left[\sum_{\mu\nu}(c_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}\beta\lambda_\nu)\, x_\mu' x_\nu' + \beta \sum_\nu \lambda_\nu^2 x_\nu^2 + \beta \sum_{\mu\nu} \lambda_\nu c_{\mu\nu} x_\mu' x_\nu\right].$$

Дискриминант квадратичной формы, стоящей в квадратных скобках, есть

$$\left\|\begin{array}{c|c} \| c_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}\beta\lambda_\nu \| & \left\| \frac{\beta}{2} c_{\mu\nu}\lambda_\nu \right\| \\ \hline \left\| \frac{\beta}{2} c_{\mu\nu}\lambda_\nu \right\| & \| \beta\lambda_\nu^2 \delta_{\mu\nu} \| \end{array}\right\|.$$

При достаточно малом положительном β, когда при определении знака главных диагональных миноров этого дискриминанта возможно пренебрегать членами с высшими степенями β по сравнению с членами с низшими степенями β, все главные миноры будут положительны, если диссипация полная и ни одно из λ_ν не есть нуль. При таком выборе β производная W' будет определенно-отрицательной функцией переменных x'_ν, x_ν. Функция W допускает бесконечно малый высший предел, как функция, не зависящая явно от t; при этом функцию W надлежащим выбором значений x'_ν, x_ν в сколь угодно малой окрестности точки $x'_\nu = 0$, $x_\nu = 0$ можно сделать отрицательной. Этим функция W, удовлетворяя всем условиям теоремы Ляпунова о неустойчивости, доказывает утверждение.

Случаи неизолированного положения равновесия возможны, когда некоторые из λ_ν суть нули. Если ненулевые корни все положительны, то неустойчивость при потенциальных силах существует за счет вековых членов, появляющихся в выражениях для переменных x_ν, отвечающих нулевым корням; такую неустойчивость диссипативные силы могут стабилизировать; например, сила $X_1 = -kx'_1$ $(k > 0)$ стабилизирует равновесие в случае, когда $\lambda_1 = 0$, а остальные λ_ν положительны.

Доказательство неустойчивости при добавлении диссипативных сил в случае, когда среди λ_ν имеется по крайней мере один отрицательный корень и несколько равных нулю, приводится к рассмотренному переходом к новым переменным

$$x_\nu = y_\nu e^{\varepsilon t},$$

где ε есть подходящим образом выбранная постоянная.

Влияние гироскопических сил

40. Силы

$$X_\nu = \sum_\mu g_{\nu\mu} x'_\mu \quad (g_{\nu\mu} = -g_{\mu\nu}),$$

работа которых на действительном перемещении всегда равна нулю, лорд Кельвин предложил называть *гироскопическими*.

Равновесие, устойчивое при одних потенциальных силах, сохраняет устойчивость при добавлении гироскопических и диссипативных сил.

В самом деле, при добавлении таких сил дифференциальные уравнения возмущенного движения вблизи положения равновесия имеют вид

$$\frac{dx_\nu}{dt} = x'_\nu, \qquad \frac{dx'_\nu}{dt} = -\lambda_\nu x_\nu - \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} + X_\nu.$$

Если равновесие устойчиво при одних потенциальных силах, то все λ_ν положительны. При этом полная энергия системы

$$H = \frac{1}{2}\left(\sum_\nu x_\nu'^2 + \sum_\nu \lambda_\nu x_\nu^2\right)$$

представляет определенно-положительную функцию. Ее полная производная H' в силу уравнений возмущенного движения

$$H' = -2f$$

не будет положительной, независимо от того, будут ли диссипативные силы обладать полной или частичной диссипацией или их совершенно не будет ($f = 0$). Отсюда, согласно теореме Ляпунова об устойчивости, непосредственно вытекает утверждение Кельвина о сохранении устойчивости равновесия при добавлении гироскопических и диссипативных возмущающих сил.

Изолированное равновесие, неустойчивое под действием потенциальных сил, остается неустойчивым при добавлении гироскопических сил и сил диссипативных, если последние обладают полной диссипацией.

Доказательство легко проводится рассмотрением функции

$$W = H + \beta \sum_\nu \lambda_\nu x_\nu' x_\nu,$$

которая при отличных от нуля λ и при полной диссипации будет иметь определенно-отрицательную производную W', если положительная постоянная β будет выбрана достаточно малой. Функция W, как не зависящая явно от t, допускает бесконечно малый высший предел; и сколь бы малы по абсолютной величине x_ν', x_ν ни были, их можно подобрать так, чтобы W была отрицательной, ибо среди λ_ν будет существовать по меньшей мере одно отрицательное. Неустойчивость следует по теореме Ляпунова п. 14.

Если неустойчивость изолированного положения равновесия под действием одних потенциальных сил имеет нечетную степень, то гироскопическая стабилизация равновесия невозможна.

Действительно, при отсутствии диссипативных сил (что несущественно и принято лишь для упрощения формул) уравнения движения суть

$$x_\nu'' = -\lambda_\nu x_\nu + \sum_\mu g_{\nu\mu} x_\mu' \quad (g_{\mu\nu} = -g_{\nu\mu}).$$

Пусть число отрицательных λ_ν нечетно. Для изолированного положения равновесия все λ_ν отличны от нуля. Характеристическое уравнение для этой системы уравнений возмущенного движения есть

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda^2 & \ldots & -g_{1n}\lambda \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ -g_{n1}\lambda & \ldots & \lambda_n + \lambda^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Имеем

$$\Delta(0) = \lambda_1 \ldots \lambda_n \text{ и } \Delta(\lambda)_{\lambda\to\infty} > 0.$$

При нечетном числе отрицательных λ_ν выражения $\Delta(0)$ и $\Delta(\infty)$ будут разных знаков. Следовательно, уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет при этом по меньшей мере один положительный корень для λ. Этим неустойчивость доказана.

При известных условиях равновесие, неустойчивое под действием одних потенциальных сил, можно упрочнить или стабилизировать добавлением подходящих гироскопических сил, если степень неустойчивости не была нечетной и при этом не добавляются диссипативные силы, обладающие полной диссипацией.

Чтобы доказать возможность гироскопической стабилизации в таких случаях, выделим пары нормальных координат, отвечающие отрицательным λ_ν. Пусть одна такая пара переменных имеет следующие уравнения с добавлением гироскопических сил:

$$x'' = -\alpha x + gy', \quad y'' = -\beta y - gx',$$

где α и β отрицательны. Характеристическое уравнение такой системы

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2(g^2 + \alpha + \beta) + \alpha\beta = 0$$

будет иметь чисто мнимые корни, если для λ^2 оно имеет отрицательные корни. Последнее произойдет, если

$$g^2 + \alpha + \beta > 0, \quad (g^2 + \alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta > 0.$$

Если постоянная g удовлетворяет последним неравенствам, равновесие будет стабилизировано. Предложение доказано.

Но если на материальную систему действуют силы с рассеиванием энергии при любых действительных перемещениях, то гироскопическая стабилизация по доказанному выше невозможна. А так как в действительности малые диссипативные силы с полной диссипацией всегда существуют, то гироскопическая стабилизация имеет для нашей действительности временное значение и нарушается, коль скоро на систему подействуют диссипативные силы с полной диссипацией. Поэтому лорд Кельвин предложил называть *временной* устойчивость равновесия, получающуюся от гироскопической стабилизации, а устойчивость равновесия, существующую при действии одних потенциальных сил, он предложил называть *вековой*.

Пример. Центр тяжести артилерийского снаряда движется в вертикальной плоскости стрельбы $\xi\zeta$ вдоль оси ξ, которую примем для простоты горизонтальной. Пусть x — ось снаряда; v — постоянная скорость его центра тяжести; I — проекция оси снаряда на плоскость стрельбы; α — угол между I и x; β — угол между ξ и I; ξ — горизонтальная ось, ζ — вертикальная, а η — третья ось левой системы $(\xi\eta\zeta)$. Задача эта является известным приближением для движения снаряда по весьма настильной траектории.

Подвижную систему осей (xyz), имеющую начало в центре тяжести снаряда, определим кинематически, чтобы тем самым показать голономность переменных, которые будут определять положение снаряда относительно его центра тяжести. Сначала повернем систему $(\xi\eta\zeta)$ вокруг оси η на угол β так, чтобы ось ξ перешла в ось I, новое положение оси ζ назовем через z, получим систему $(I\eta z)$; последнюю повернем вокруг оси z на угол α так, чтобы ось I перешла в ось x, полученную систему назовем (xyz). Пусть ω обозначает угол поворота снаряда вокруг его оси x в системе (xyz). Из кинематического определения непосредственно следует голономность переменных ω, α, β.

Мгновенная скорость вращения снаряда является результирующей угловых скоростей ω', α', β', соответственно направленных по положительным осям x, z, η; отсюда ее проекции p, q, r на оси x, y, z будут равны

$$p = \omega' + \beta' \sin\alpha, \quad q = \beta' \cos\alpha, \quad r = \alpha'.$$

Живая сила вращательного движения снаряда имеет известный вид

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

где A, B, C обозначают моменты инерции снаряда относительно осей x, y, z. Для обычных продолговатых снарядов, представляющих тело вращения вокруг своей оси, все эти моменты инерции представляют постоянные величины $C = B > A$.

Момент действующей на снаряд опрокидывающей пары направлен ортогонально плоскости, проходящей через скорость центра тяжести v и ось снаряда x в сторону, откуда вращение от v к x кажется положительным. Другие пары сил, действующих на снаряд, не принимаются во внимание. Величина опрокидывающей пары $K = a \sin\gamma$ зависит от положительной величины $a = a(v)$ и от угла γ между скоростью полета v и осью x; $\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta$. Величины обобщенных лагранжевых сил Q получаются непосредственно из выражения возможной работы опрокидывающей пары

$$a \sin\gamma\delta\gamma = -a\delta\cos\gamma = a \sin\alpha \cos\beta\, \delta\alpha + a \cos\alpha \sin\beta\, \delta\beta.$$

Дифференциальными уравнениями вращательного движения снаряда являются уравнения Лагранжа для переменных ω, α, β. Одно из уравнений непосредственно приводит к первому интегралу $Ap = \text{const}$, отвечающему циклической координате ω; два других имеют вид, установленный А. Н. Крыловым:

$$B\alpha'' + B\beta'^2 \sin\alpha \cos\alpha - Ap\beta' \cos\alpha = a \sin\alpha \cos\beta,$$

$$B\beta'' \cos\alpha - 2B\alpha'\beta' \sin\alpha + Ap\alpha' = a \sin\beta.$$

Умножая эти уравнения один раз соответственно на α', $\beta' \cos\alpha$, а другой — на $\sin\beta$, $-\sin\alpha\cos\beta$ и складывая по отдельности каждый раз, после некоторых простых преобразований и интегрирования получаем два первых интеграла:

$$\frac{B}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2\cos^2\alpha) + a\cos\alpha\cos\beta = h,$$

$$B(\alpha'\sin\beta - \beta'\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta) + Ap\cos\alpha\cos\beta = k.$$

За невозмущенное движение снаряда мы примем частное решение $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$ дифференциальных уравнений движения. Для такого невозмущенного движения уравнениями возмущенного движения будут дифференциальные уравнения А. Н. Крылова. Первый из интегралов является интегралом $H = h$, получающимся по методу (п. 9) игнорирования циклической координаты ω; при этом функция $V = H - H_0$ не является знакоопределенной.

Для решения задачи устойчивости по отношению к переменным α, β, α', β' умножим первый из интегралов на Ap, второй на $-2a$ и сложим:

$$W = \frac{BAp}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2\cos^2\alpha) - \\ - 2Ba(\alpha'\sin\beta - \beta'\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta) - Apa\cos\alpha\cos\beta.$$

Первое приближение интеграла $W + Apa = W_2 + \ldots$ есть

$$W_2 = \frac{BAp}{2}\alpha'^2 - 2Ba\alpha'\beta + \frac{Apa}{2}\beta^2 + \frac{BAp}{2}\beta'^2 + 2Ba\beta'\alpha + \frac{Apa}{2}\alpha^2.$$

Квадратичная форма W_2 состоит из двух однотипных квадратичных форм; достаточно рассмотреть одну из них

$$f = \frac{BAp}{2}\alpha'^2 - 2Ba\alpha'\beta + \frac{Apa}{2}\beta^2.$$

Форма f будет тогда знакоопределенной относительно входящих в нее переменных, когда положительным будет ее дискриминант

$$\begin{vmatrix} \frac{BAp}{2} & -Ba \\ -Ba & \frac{Apa}{2} \end{vmatrix},$$

т. е.

$$A^2p^2 - 4Ba > 0.$$

Это — искомое условие. Если оно удовлетворено, то форма f будет знакоопределенной относительно α', β; вместе с формой f будет при этом знакоопределенной относительно α, β, α', β' форма W_2, а тем самым и интеграл $W + Apa$. Таким образом, $W + Apa$ удовлетворяет всем условиям следствия из теоремы Ляпунова об устойчивости; отсюда заключаем, что если соблюдено последнее неравенство, то рассматриваемое невозмущенное движение снаряда ($\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 0$) будет устойчивым.

Рассмотренная стабилизация снаряда имеет гироскопическую природу и в согласии с предложением Кельвина должна пропадать при существовании полной диссипации. Действительно, добавим к первым приближениям дифференциальных уравнений движения малые диссипативные силы, производные от некоторой функции Релея

$$2f = b\alpha'^2 + 2e\alpha'\beta' + c\beta'^2,$$

где малые постоянные коэффициенты b, e, c удовлетворяют условию определенной положительности $b > 0$, $bc - e^2 > 0$. Будем иметь

$$B\alpha'' = a\alpha + Ap\beta' - b\alpha' - e\beta',$$

$$B\beta'' = a\beta - Ap\alpha' - e\alpha' - c\beta'.$$

Чтобы доказать вполне строго, что диссипативные силы разрушают гироскопическую стабилизацию, рассмотрим квадратичную форму

$$W = \frac{1}{2} B(\alpha'^2 + \beta'^2) - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) - 2\varepsilon B(\alpha\alpha' + \beta\beta').$$

Положительную постоянную ε определим после. Производная от W в силу уравнений первого приближения будет

$$W' = -[(b + 2\varepsilon B)\alpha'^2 + 2e\alpha'\beta' - 2\varepsilon b\alpha'\alpha + \\ + 2(Ap - e)\varepsilon\alpha'\beta + (c + 2\varepsilon B)\beta'^2 - 2(Ap + e)\varepsilon\beta'\alpha - \\ - 2c\varepsilon\beta'\beta + 2\varepsilon a\alpha^2 + 2\varepsilon a\beta^2].$$

Дискриминант квадратичной формы $-W'$ есть

$$\begin{vmatrix} b + 2\varepsilon B & e & -b\varepsilon & (Ap - e)\varepsilon \\ e & c + 2\varepsilon B & -(Ap + e)\varepsilon & -c\varepsilon \\ -b\varepsilon & -(Ap + e)\varepsilon & 2a\varepsilon & 0 \\ (Ap - e)\varepsilon & -c\varepsilon & 0 & 2a\varepsilon \end{vmatrix}.$$

Вынося из третьей и четвертой колонок этого определителя общий положительный множитель ε, заключаем, что при достаточно малом ε, когда при определении знака всех главных диагональных миноров дискриминанта возможно пренебречь членами с высшими степенями ε по сравнению с членами с низшими степенями ε, эти миноры будут положительными; следовательно, при таком ε рассматриваемая форма W' будет определенно-отрицательной.

Форма W допускает бесконечно малый высший предел как функция, не зависящая от времени; выбором численно сколь угодно малых α, β, α', β' форму W всегда возможно сделать отрицательной, т. е. одного знака с W'. Отсюда в силу теоремы Ляпунова о неустойчивости заключаем, что диссипативные силы разрушают гироскопическую стабилизацию снаряда и что гироскопическая стабилизация снаряда является временной.

Некоторые вынужденные движения

41. Большинство вынужденных движений какой-либо механической системы берет свое начало в конечном счете в движении некоторой другой системы, которая воздействует на первую и в свою очередь сама находится под ее воздействием. Нередко движение второй системы рассматривается при этом приближенно, как заданное с игнорированием воздействия со стороны первой [1]).

Остановимся на случае, когда обе системы находятся в возмущенном движении вблизи их положения равновесия, и вычисление будем вести в нормальных координатах для возможно более простого случая. Пусть движения двух систем (x) и (y) задаются уравнениями

$$\begin{aligned} x'' &= -\alpha x - \varkappa x' + \mu y', \\ y'' &= -\beta y. \end{aligned} \tag{22}$$

Случай этот может представиться, если в системе (y) пренебрегается составляющей гироскопической силы $-\mu x'$; диссипация является частичной. Постоянные $\varkappa$ и μ пусть положительны.

Рассмотрим случай, когда α и β одновременно положительны,— иными словами, случай, когда без пренебрежения гироскопической силой $-\mu x'$ имела бы место вековая устойчивость в смысле Кельвина. Пусть для простоты $\alpha = n^2$, $\beta = p^2$, тогда

$$y = \frac{A}{\mu p} \sin pt.$$

Уравнение для системы (x) при этом принимает вид

$$x'' + \varkappa x' + n^2 x = A \cos pt.$$

Примем

$$x = a \cos (pt - \varepsilon)$$

и подставим в уравнение

$$a (n^2 - p^2) \cos (pt - \varepsilon) - \varkappa p a \sin (pt - \varepsilon) =$$
$$= A \cos \varepsilon \cos (pt - \varepsilon) - A \sin \varepsilon \sin (pt - \varepsilon),$$

откуда, приравнивая коэффициенты при $\cos (pt - \varepsilon)$ и $\sin (pt - \varepsilon)$, имеем

$$a (n^2 - p^2) = A \cos \varepsilon, \quad ap\varkappa = A \sin \varepsilon,$$

---

[1]) Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1: Пер. с англ.— 2-е изд.— М.: Гостехиздат, 1955.— (См. п. 51).

так что (частное) решение может быть записано следующим образом:

$$x = \frac{A \sin \varepsilon}{p\varkappa} \cos (pt - \varepsilon),$$

где

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{p\varkappa}{n^2 - p^2}.$$

Такое колебание называется *вынужденным*; оно является ответом на воздействие силы $\mu y'$, оказанное на систему (x) извне. Амплитуда вынужденного колебания пропорциональна амплитуде силы A, а период тот же, что и период силы.

Работа возмущающей силы на вынужденном движении системы (x) за период силы всегда положительна

$$\mu \int y' x' \, dt = \frac{A^2 \sin^2 \varepsilon}{p\varkappa} \int_0^{2\pi} \cos^2 pt \, d\, pt - \\ - \frac{A^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon}{p\varkappa} \int_0^{2\pi} \sin pt \cos pt \, d\, pt = \frac{\pi A^2 \sin^2 \varepsilon}{p\varkappa},$$

ибо

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 u \, du = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin u \cos u \, du = 0.$$

Работа эта имеет наибольшую величину при $\sin^2 \varepsilon = 1$, т. е. когда фаза вынужденного колебания отстает на четверть периода от фазы силы, что имеет место, если период возмущающей силы совпадает с собственным периодом колебаний системы (x), иначе $n = p$.

В случае равных периодов трение должно быть принято во внимание, как бы мало оно ни было и как бы ни был незначителен его результат при n и p, не равных друг другу.

Это соображение высказано Релеем.

Если трение отсутствует и периоды равны $n = p$, то отвечающая характеристическая λ-матрица

$$\begin{Vmatrix} \lambda^2 + n^2 & -\mu\lambda \\ 0 & \lambda^2 + n^2 \end{Vmatrix}$$

имеет непростой элементарный делитель

$$(\lambda^2 + n^2)^2,$$

и, значит, сколь бы мала ни была амплитуда колебаний y, необходимо появятся вековые члены. Равновесие системы (x) будет неустойчивым. Уравнения в вариациях для вынужденного движения

$$y = \frac{A}{\mu p} \cos pt, \quad x = \frac{A}{2p} t \sin pt$$

будут того же типа, лишь вместо x, y будут стоять их вариации; элементарные делители будут теми же, и, значит, вынужденное движение будет неустойчивым.

Когда же периоды равны $n = p$ и существует трение $\varkappa > 0$, элементарные делители для характеристической λ-матрицы системы (22)

$$\begin{Vmatrix} \lambda^2 + \varkappa\lambda + n^2 & -\mu\lambda \\ 0 & \lambda^2 + n^2 \end{Vmatrix}$$

будут простыми

$$(\lambda^2 + n^2), \ \lambda^2 + \varkappa\lambda + n^2.$$

Стало быть, как бы мало трение ни было, в решении системы (22) уже не будет вековых членов: равновесие системы будет устойчивым в том смысле, что всегда возможно найти столь малое A, чтобы абсолютные значения x не превосходили заказанную наперед грань.

42. В настоящей главе установлены предложения лорда Кельвина, имеющие большое значение. Возмущенные движения механической системы вблизи устойчивого положения равновесия, где потенциальная функция действующих сил имеет минимум, имеют колебательный характер, и наоборот. Добавление диссипативных сил не нарушает устойчивости и неустойчивости равновесия материальной системы, существующего при потенциальных силах. Добавление же гироскопических сил, не нарушая устойчивости таких положений равновесия, в некоторых случаях, когда равновесие имеет неустойчивость четной степени, а диссипативные силы не имеют полной диссипации, может стабилизировать неустойчивое равновесие.

Первое из этих предложений имеет свое строгое выражение в теореме Лагранжа об устойчивости изолированного положения равновесия при максимуме силовой функции. Что же касается других предложений, то в связи с ними возникает вопрос, будут или не будут сохраняться в действительности явления, подмеченные лордом Кельвином из рассмотрения первого приближения уравнений возмущенного движения.

К последнему вопросу приводят многие важные инженерные задачи.

ГЛАВА 6

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Основные теоремы

До работ Ляпунова в исследованиях устойчивости ограничивались рассмотрением одного первого приближения. В подобных исследованиях можно прийти к ошибочным выводам. Ляпунов поставил и разрешил вопрос, когда уравнения первого приближения полностью разрешают задачу об устойчивости и неустойчивости.

43 [24]. Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \dots + p_{sn}x_n + X_s \quad (s = 1, \dots, n), \tag{23}$$

где X_s суть голоморфные функции $x_1, \dots, x_n$, начинающиеся в своих разложениях с членов не ниже второго порядка, а p_{sr} суть постоянные.

Теорема Ляпунова. *Если вещественные части всех корней λ_s характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, независимо от членов выше первого порядка малости X_s.*

Доказательство. Если вещественные части всех корней λ_s отрицательны, то ни для каких неотрицательных $m_1, \dots, m_n$, имеющих в сумме 2, не может уничтожиться выражение

$$m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n.$$

Следовательно, существует определенно-отрицательная квадратичная форма с постоянными коэффициентами W, удовлетворяющая уравнению

$$\sum \frac{\partial W}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \dots + p_{sn}x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Тогда

$$\frac{dW}{dt} = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \sum \frac{\partial W}{\partial x_s} X_s$$

будет определенно-положительной независимо от X_s, что и доказывает теорему.

44 [24]. Теорема. *Если среди корней λ_s характеристического уравнения найдется по меньшей мере один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво, независимо от членов выше первого порядка малости.*

Доказательство. Пусть корень λ_1 имеет наибольшую положительную вещественную часть и пусть $\varkappa$ — положительное число, меньшее $\alpha_1 = \operatorname{Re}\lambda_1$. Уравнение

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = 2\varkappa V + x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

может быть согласно теореме Эйлера об однородных функциях

$$2V = \sum \frac{\partial V}{\partial x_s} x_s$$

записано следующим образом:

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_s}[p_{s1}x_1 + \ldots + (p_{ss} - \varkappa)x_s + \ldots + p_{sn}x_n] = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Уравнение это — изученного типа; характеристическое уравнение, связанное с ним,

$$\Delta(\mu) = \| p_{sr} - \delta_{sr}(\varkappa + \mu)\| = 0$$

будет иметь корнями величины

$$\mu_s = \lambda_s - \varkappa,$$

из которых по меньшей мере μ_1 будет иметь положительную вещественную часть. Какими бы корни λ_s ни были, всегда можно найти такое $\varkappa < \operatorname{Re}\lambda_1$, что ни для каких неотрицательных $m_1, \ldots, m_n$, имеющих в сумме 2, не будет уничтожаться выражение

$$m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n - 2\varkappa.$$

А это значит, что функция V существует и ее соответствующим выбором переменных $x_1, \ldots, x_n$ можно сделать положительной.

Отсюда

$$\frac{dV}{dt} = 2\varkappa V + \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \sum \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s\right).$$

В скобках стоит определенно-положительная функция независимо от X_s. По теореме Ляпунова непосредственно следует неустойчивость.

Замечание. Предыдущие теоремы Ляпунова приложимы, конечно, не к одному только случаю, когда X_s не зависят явно от t, ибо последнее обстоятельство не играло особой роли в доказательстве. Коэффициенты $P_s^{(m_1 \ldots m_n)}$ в функциях X_s могли быть непрерывными, ограниченными, вещественными функциями t, удовлетворяющими неравенствам

$$|P_s^{(m_1 \ldots m_n)}| < \frac{M}{A^{m_1 + \ldots + m_n}},$$

где A — некоторая положительная постоянная.

45. Пример. В первом приближении дифференциальные уравнения возмущенного движения регулятора с сервомотором имеют вид

$$\begin{aligned} T_a \xi' - \eta - \zeta &= 0, \\ T_r^2 \eta'' + T_k \eta' + \delta\eta + \xi &= 0, \\ T_s \zeta' - \eta &= 0, \end{aligned}$$

где все коэффициенты при вариациях переменных машины ξ, регулятора η и сервомотора ζ являются положительными постоянными, известным образом зависящими от конструктивных элементов системы.

Спрашивается, каким условиям должны удовлетворять эти коэффициенты, чтобы была устойчивость при возмущении начальных значений переменных ξ, η, η', ζ независимо от дальнейших членов второго и высших порядков в точных уравнениях возмущенного движения. Аналогичные вопросы возникают всякий раз, когда принятая наперед точность не позволяет строго доверять членам выше первого порядка.

Согласно доказанным теоремам, чтобы существовала устойчивость по первому приближению, характеристическое уравнение

$$T_s T_a T_r^2 \lambda^4 + T_a T_k T_s \lambda^3 + \delta T_a T_s \lambda^2 + T_s \lambda + 1 = 0$$

должно иметь все корни с отрицательными вещественными частями, для чего теорема Гурвица дает неравенства [1])

$$\delta T_k T_a > T_r^2 \quad \text{и} \quad T_s (\delta T_k T_a - T_r^2) > T_a T_k^2.$$

Пример. Гироскопическая стабилизация неустойчивого при одних консервативных силах положения равновесия имеет временный характер, а разрушение гироскопического упрочнения от действия диссипативных сил с полной диссипацией не может быть изменено членами более чем первого порядка в уравнениях возмущенного движения, так как первое приближение допускает функцию Ляпунова со знакоопределенной и имеющей вид квадратичной формы производной (п. 40). Поэтому гироскопическая стабилизация вращательных движений снаряда является временной, пока на систему не действуют диссипативные силы с полной диссипацией.

---

[1]) Вознесенский И. Н. О принципах и схемах автоматического регулирования // Прикл. мат. и механ.— 1942.— Т. 6.— (См. с. 109).

Критические случаи

46 [1]). Доказанные теоремы оставляют невыясненными случаи, когда некоторые из корней характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, в то время как другие корни имеют такие части равными нулю. Случаи эти являются критическими в том смысле, что для них устойчивость и неустойчивость не может быть выяснена рассмотрением одного первого приближения.

В таких критических случаях дальнейшие приближения X_s могут давать как устойчивость, так и неустойчивость. Другими словами, функции X_s всегда возможно бывает при этом подобрать так, чтобы имела место устойчивость либо неустойчивость, по желанию.

Не уменьшая общности, можно ограничиться рассмотрением одной группы уравнений, отвечающей непростому элементарному делителю корня, вещественная часть которого равняется нулю.

Пусть для начала рассматривается нулевой корень:

$$\frac{dz_1}{dt} = Z_1,$$

$$\frac{dz_i}{dt} = -z_{i-1} + Z_i \quad (i = 2, \ldots, m).$$

Рассмотрим функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, определяемые последовательно из уравнений

$$\varphi_s = z_s^2 + \varphi_{s+1}^2 \qquad (s = m, m-1, \ldots, 1)$$

при условии $\varphi_{m+1} = 0$. Если принять

$$Z_s = 2z_{s+1}\varphi_{s+1} - z_s f_s,$$

то определенно-положительная по построению функция φ_1 будет иметь своей полной производной по времени функцию

$$\varphi_1' = -2z_1^2 f_1 - 2^2\varphi_2 z_2^2 f_2 - 2^3\varphi_2\varphi_3 z_3^2 f_3 - \ldots - 2^m\varphi_2 \ldots \varphi_m z_m^2 f_m,$$

определенно-отрицательную или определенно-положительную в зависимости от того, выбраны ли все f_s определенно-положительными или они выбраны все определенно-отрицательными. В первом случае невозмущенное движение будет асимптотически устойчивым, а во втором — неустойчивым.

Для пары чисто мнимых корней $\lambda = \pm i\beta$ рассмотрим группу

$$\frac{dz_1}{dt} = i\beta z_1 + Z_1,$$

$$\frac{dz_j}{dt} = i\beta z_j - z_{j-1} + Z_j \quad (j = 2, \ldots, m).$$

---

[1]) Ляпунов А. М. К вопросу об устойчивости движения // Сообщ. Харьк. мат. о-ва.— 1893.— Т. 3 // Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.: Гостехиздат, 1950.

Пусть функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ определяются последовательно из уравнений

$$\varphi_s = z_s\bar{z}_s + \varphi_{s+1}^2$$

при условии

$$\varphi_{m+1} = 0.$$

Если принять $Z_s = 2z_{s+1}\varphi_{s+1} - z_s f_s$, где f_s имеют знакоопределенные вещественные части, то определенно-положительная функция φ_1 будет иметь полную производную по времени

$$\varphi_1' = -z_1\bar{z}_1 (f_1 + \bar{f}_1) - 2\varphi_2 z_2\bar{z}_2 (f_2 + \bar{f}_2) - \ldots - 2^{m-1}\varphi_2 \ldots$$
$$\ldots \varphi_m z_m\bar{z}_m (f_m + \bar{f}_m)$$

определенно-положительной или определенно-отрицательной в зависимости от того, будут ли функции $\mathrm{Re}\, f_s$ все определенно-отрицательными или они будут определенно-положительными. Невозмущенное движение будет в первом случае неустойчивым, а во втором случае асимптотически устойчивым. Таким образом, члены более высоких порядков могут упрочнять неустойчивость первого приближения, существующую за счет вековых членов в решении уравнений в вариациях.

Если функции X_s стеснены некоторыми структурными ограничениями, то вопрос об устойчивости в некоторых случаях разрешается первым приближением, несмотря на наличие критического случая. Например, если уравнения возмущенного движения имеют форму канонических уравнений Гамильтона, то устойчивость равновесия будет иметь место, если в функции Гамильтона наинизшие квадратичные члены представляют знакоопределенную функцию.

47. Доказанные теоремы об устойчивости по первому приближению позволяют непосредственно разрешать также вопросы об устойчивости при возмущающих силах, если последние дают в дифференциальных уравнениях возмущенного движения (23) члены не ниже второго порядка малости. Обстоятельство это практически весьма важно, так как наиболее часто встречающиеся в технике задачи об устойчивости предполагают существование не только отклонений от начальных значений переменных, но и существование некоторых возмущающих сил, неопределенных в малых членах.

Зададимся целью оговорить в доказательстве, предложенном для теоремы об устойчивости по первому приближению (п. 43), те свойства функций X_s, какие только и были в нем использованы.

Введем ту же функцию. Если все корни характеристического полинома $\Delta(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части, то уравнение

$$\sum (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s} = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

имеет решение в виде определенно-отрицательной квадратичной формы V (п. 34, 35). Имеем:

$$V' = x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \sum_s \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s.$$

Обратимся теперь к доказательству теоремы п. 8 об устойчивости и собственно к способу Ляпунова, предложенному для построения числа λ по заданному числу A. Определим также те стеснения, которые достаточно наложить на функции X_s, чтобы это построение числа λ по заданному достаточно малому числу A было не зависящим от численных значений X_s.

Наша функция V не зависит от t и является определенно-отрицательной. Пусть l есть точная низшая граница ее абсолютных значений на сфере (A)

$$\sum x_s^2 = A.$$

Для положительного l найдется, по свойству допускающей бесконечно малый высший предел функции V (п. 7), такое отличное от нуля число λ, что при

$$\sum_s x_s^2 \leqslant \lambda$$

будет выполняться неравенство

$$|V| < l.$$

Выберем начальные возмущения x_{s0} согласно неравенству

$$\sum x_s^2 \leqslant \lambda.$$

Из соотношения

$$V - V_0 = \int_{t_0}^{t} V' dt \tag{24}$$

выводим, что если в области $\sum x_s^2 \leqslant A$ функции X_s будут стеснены неравенствами

$$|X_s| < \lambda, \tag{25}$$

то

$$|V| \leqslant |V_0| < l. \tag{26}$$

В самом деле, при A столь малом, чтобы при условии $\sum x_s^2 \leqslant A$ было удовлетворено неравенство

$$1 - \sum_s \left| \frac{\partial V}{\partial x_s} \right| > 0,$$

при сделанных предположениях (25) о функциях X_s, для значений переменных x_s, удовлетворяющих условиям

$$\lambda \leqslant \sum x_s^2 \leqslant A,$$

будем иметь

$$V' = x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \sum \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s \geqslant \sum x_s^2 \left(1 - \frac{\sum \left|\frac{\partial V}{\partial x_s}\right| |X_s|}{\lambda}\right) > 0$$

независимо от числовых значений X_s. Из последнего же неравенства и соотношения (19) непосредственно следует неравенство (21), а тем самым и следующее:

$$\sum x_s^2 < A,$$

так как l есть точная низшая граница абсолютных значений V на сфере (A).

Если для произвольного положительного числа A, сколь бы мало оно ни было, функции X_s могут быть стеснены неравенствами (25), *где λ обозначает число, построенное по описанному способу Ляпунова, то невозмущенное движение будет устойчивым независимо от численных значений X_s.*

В приведенном анализе следует отметить способ находить для заданного положительного числа A, меньшего H и удовлетворяющего условию $1 - \sum \left| \frac{\partial V}{\partial x_s} \right| > 0$ при $\sum x_s^2 \leqslant A$, с помощью функции V положительного числа λ, обладающего свойством: если начальные значения x_{s_0} и функции X_s стеснены неравенствами

$$\sum x_{s0}^2 \leqslant \lambda, \quad |X_s| < \lambda \quad (s = 1, \ldots, n),$$

то во все последующее время значения переменных x_s будут удовлетворять неравенству

$$\sum_s x_s^2 < A.$$

Развитием приведенного анализа мы заниматься не будем [1]).

---

[1]) Вопросами об устойчивости при постоянно действующих возмущениях занимались Г. Н. Дубошин, Н. А. Артемьев и И. Г. Малкин. См.: Дубошин Г. Н. К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений // Труды ГАИШ.— 1940.— Т. 14, № 1; Артемьев Н. А. Осуществимые движения // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1939.— № 3; Малкин И. Г. Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикл. мат. и механ.— 1944.— Т. 8, № 3.

ГЛАВА 7

СЛУЧАЙ С ОДНИМ НУЛЕВЫМ КОРНЕМ

Вспомогательное преобразование

48 [28]. Пусть характеристическое уравнение имеет один корень, равный нулю, при прочих с отрицательными вещественными частями. В этом случае уравнения первого приближения имеют один линейный интеграл, очевидный из их канонического вида п. 30. Принимая этот интеграл x за переменную, мы приведем уравнения возмущенного движения к виду

$$\frac{dx}{dt} = X,$$

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s \quad (s = 1, \ldots, n),$$

где X, X_s суть голоморфные функции переменных $x, x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся с членов не ниже второго порядка; постоянные p_{sj} таковы, что уравнение

$$\Delta(\lambda) = \| p_{sj} - \delta_{sj}\lambda \| = 0$$

имеет все корни с отрицательными вещественными частями.

Обозначим через X^0, X_s^0 значения функций X, X_s, когда в последних все переменные $x_1, \ldots, x_n$ положены равными нулю. Путем простого преобразования всегда можно добиться, чтобы наинизшая степень x в функции X^0 была не выше таковых для функций X_s^0, если X^0, X_s^0 не равны тождественно нулю, и чтобы все постоянные p_s были нулями.

Действительно, рассмотрим следующую систему уравнений:

$$p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n).$$

Эта система уравнений удовлетворяется нулевыми значениями переменных $x, x_1, \ldots, x_n$. Ее функциональный определитель относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$ для нулевых значений $x, x_1, \ldots, x_n$ отличен от нуля и равен $\Delta(0)$. Поэтому существует решение

$$x_s = u_s(x) \quad (s = 1, \ldots, n),$$

где u_s суть некоторые голоморфные функции x, уничтожающиеся, когда переменная x равна нулю.

Если в исходной системе p_s и X_s^0 суть нули, то решения u_s будут также нулями. Но в этом случае система, удовлетворяя желаемым свойствам, не требует дополнительного преобразования. Если этого нет, то введем новые переменные $z_1, \ldots, z_n$ согласно равенствам

$$x_s = z_s + u_s.$$

Преобразованная система будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Z, \\ \frac{dz_s}{dt} &= p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n + Z_s \qquad (s = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{27}$$

где Z обозначает функцию X после подстановки $x_s = z_s + u_s$, а Z_s обозначает выражение

$$p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n + p_s x + X_s - \frac{du_s}{dx} X$$

после той же подстановки. Обозначая через Z^0, Z_s^0 значения функций Z, Z_s, когда переменные z_s все положены нулями, и принимая во внимание уравнения, определяющие u_s, выводим соотношения

$$Z_s^0 = -\frac{du_s}{dx} Z^0,$$

из которых следует, что в разложениях Z_s^0 по степеням x не будет членов, степень которых была бы ниже наинизшей степени в разложении Z^0 по степеням x. Если Z^0 тождественно равно нулю, то такими же будут и Z_s^0. При указанном преобразовании задача устойчивости по отношению к $x, x_1, \ldots, x_n$ равносильна задаче устойчивости по отношению к $x_1, z_1, \ldots, z_n$. Поэтому при анализе устойчивости возможно исходить из уравнений (27).

Анализ различных случаев

49 [29]. Вначале рассмотрим случай, когда наинизшая степень x в разложении Z^0 есть четное число. Пусть для начала это число есть 2:

$$Z = gx^2 + Px + Q + R,$$

где P — линейная, а Q — квадратичная формы переменных $z_1, \ldots, z_n$; R не имеет членов ниже третьего измерения; g — постоянная.

Рассмотрим функцию

$$V = x + Ux + W,$$

где U — линейная, а W — квадратичная формы переменных $z_1, \ldots, z_n$. В силу уравнений (27) имеем

$$\frac{dV}{dt} = gx^2 + Px + Q + R + UZ + \\ + x\sum_s \frac{\partial U}{\partial z_s}(p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n + Z_s) + \\ + \sum_s \frac{\partial W}{\partial z_s}(p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n + Z_s).$$

Неопределенные пока функции U, W определим так, чтобы

$$\sum_s \frac{\partial U}{\partial z_s}(p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n) + P = 0,$$

$$\sum_s \frac{\partial W}{\partial z_s}(p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n) + Q = g(z_1^2 + \ldots + z_n^2).$$

Из п. 34 заключаем, что такое определение U, W всегда возможно, так как все корни полинома $\Delta(\lambda) = \| p_{sr} - \delta_{sr}\lambda \|$ имеют отрицательные вещественные части. При таких U и W имеем:

$$\frac{dV}{dt} = g(x^2 + z_1^2 + \ldots + z_n^2) + S,$$

где S имеет порядок наинизших членов, по меньшей мере 3. Производная $\frac{dV}{dt}$ представляет знакоопределенную функцию знака, совпадающего со знаком постоянной g; V не зависит явно от t, а потому допускает бесконечно малый высший предел. Функцию V можно сделать одного знака с g, а это в силу теоремы Ляпунова о неустойчивости (п. 14) доказывает, что в этом случае невозмущенное движение является неустойчивым.

Рассмотрим теперь общий случай:

$$Z = gx^m + P^{(1)}x + \ldots + P^{(m-1)}x^{m-1} + Q + R,$$

$$Z_s = P_s^{(1)}x + \ldots + P_s^{(m-1)}x^{m-1} + Z_s',$$

где $P^{(i)}$, $P_s^{(i)}$ — линейные, а Q — квадратичная формы переменных $z_1, \ldots, z_n$:

$$R = vx^m + \sum_{ij} v_{ij}z_iz_j, \quad Z_s' = v^{(s)}x^m + \sum_{ij} v_{ij}^{(s)}z_iz_j,$$

где v, $v^{(s)}$, v_{ij}, $v_{ij}^{(s)}$ обозначают голоморфные функции переменных $x, z_1, \ldots, z_n$, причем v, v_{ij} уничтожаются, когда последние все делаются нулями. Если m представляет четное число, рассмотрим функцию

$$V = x + U^{(1)}x + \ldots + U^{(m-1)}x^{m-1} + W,$$

где $U^{(i)}$ — линейные, а W — квадратичная формы переменных z_s. Имеем согласно уравнениям (27):

$$\frac{dV}{dt} = gx^m + P^{(1)}x + \ldots + P^{(m-1)}x^{m-1} + Q + R + \sum_{r=1}^{m-1} rU^{(r)}x^{r-1}Z +$$

$$+ \sum_{r=1}^{m-1}\sum_{s} x^r \frac{\partial U^r}{\partial z_s}\left[p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n + \sum_{i=1}^{m-1} P_s^{(i)}x^i + Z_s'\right] +$$

$$+ \sum_{s} \frac{\partial W}{\partial z_s}\left[p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n + \sum_{i=1}^{m-1} P_s^{(i)}x^i + Z_s'\right].$$

Функции $U^{(r)}$, W определим последовательно ($r = 1, \ldots, m-1$) согласно уравнениям

$$\sum_{s} \frac{\partial U^{(r)}}{\partial z_s}(p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n) + \sum_{\alpha+\beta=r}\sum_{s} \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial z_s} P_s^{(\beta)} + P^{(r)} = 0,$$

$$\sum_{s} \frac{\partial W}{\partial z_s}(p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n) + Q = g(z_1^2 + \ldots + z_n^2).$$

При таком, в рассматриваемом случае всегда возможном, выборе функций $U^{(r)}$, W имеем

$$\frac{dV}{dt} = g(x^m + z_1^2 + \ldots + z_n^2) + S,$$

где

$$S = wx^m + \sum_{ij} w_{ij}z_iz_j,$$

w, w_{ij} обозначают голоморфные функции переменных $x, z_1, \ldots, z_n$, уничтожающиеся, когда последние все делаются нулями.

Функция V, как не зависящая от t, допускает бесконечно малый высший предел и при подходящем выборе сколь угодно малых по абсолютной величине $x, z_1, \ldots, z_n$ может принимать значения любого знака. Ее производная $\frac{dV}{dt}$ является при этом знакоопределенной знака, совпадающего со знаком постоянной g. Следовательно, по теореме Ляпунова (п. 13) невозмущенное движение является в этом случае (m — четное) неустойчивым.

Теперь допустим, что m есть нечетное число.

Функцию V будем искать вида

$$V = \frac{1}{2}x^2 + U^{(1)}x^2 + \ldots + U^{(m-1)}x^m + W,$$

где $U^{(i)}$ — линейные, а W — квадратичная формы переменных z_s.

Имеем

$$\frac{dV}{dt} = gx^{m+1} + P^{(1)}x^2 + \ldots + P^{(m-1)}x^m + xQ + xR +$$
$$+ \sum_{r=1}^{m-1} (r+1) U^{(r)} x^r Z + \sum_{r=1}^{m-1} \sum_s x^{r+1} \frac{\partial U^{(r)}}{\partial z_s} \Big(p_{s1} z_1 + \ldots + p_{sn} z_n +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1} P_s^{(i)} x^i + Z_s' \Big) + \sum_s \frac{\partial W}{\partial z_s} (p_{s1} z_1 + \ldots + p_{sn} z_n + Z_s).$$

Выберем квадратичную W и линейные $U^{(r)}$ формы последовательно $(r = 1, \ldots, m-1)$ согласно уравнениям

$$\sum_s \frac{\partial U^{(r)}}{\partial z_s} (p_{s1} z_1 + \ldots + p_{sn} z_n) + \sum_{\alpha+\beta=r} \sum_s \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial z_s} P_s^{(\beta)} + P^{(r)} = 0,$$
$$\sum_s \frac{\partial W}{\partial z_s} (p_{s1} z_1 + \ldots + p_{sn} z_n) = g (z_1^2 + \ldots + z_n^2).$$

Это всегда возможно, так как все корни полинома $\Delta(\lambda) = \| p_{sr} - \delta_{sr}\lambda \|$ имеют отрицательные вещественные части (п. 34). При таком выборе $U^{(r)}$, W

$$\frac{dV}{dt} = g (x^{m+1} + z_1^2 + \ldots + z_n^2) + S,$$

где

$$S = vx^{m+1} + \sum_{ij} v_{ij} z_i z_j,$$

v, v_{ij} обозначают некоторые голоморфные функции переменных $x, z_1, \ldots, z_n$, уничтожающиеся, когда последние делаются все нулями. Производная $\frac{dV}{dt}$ является знакоопределенной функцией; ее знак совпадает со знаком постоянной g.

Если при этом g положительно, то из-за того, что подходящим выбором значений переменных $x, z_1, \ldots, z_n$ функцию V можно сделать положительной или, другими словами, одного знака со знаком производной $\frac{dV}{dt}$, выводим, что невозмущенное движение неустойчиво.

Если g отрицательно, то из-за того, что квадратичная форма W будет (п. 35) при этом определенно-положительной относительно $z_1, \ldots, z_n$, выводим, что функция V будет определенно-положительной относительно всех переменных $x, z_1, \ldots, z_n$ и, как не зависящая явно от t, будет допускать бесконечно малый высший предел. На основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (п. 12) заключаем, что в этом случае невозмущенное движение является устойчивым, а всякое достаточно близкое возмущенное движение стремится к нему асимптотически.

Итак, *невозмущенное движение будет неустойчивым, если m есть четное число и если m нечетное, а g положительно; если m есть нечетное число, а постоянная g отрицательна, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

50. Пример. Рассмотрим задачу, которая в известном смысле может являться приближением для задачи об устойчивости прямолинейного полета нейтрального самолета по отношению к продольным движениям.

Самолет, летящий в воздухе, представляет совместно с воздухом механическую систему, состоящую из твердого тела и сплошной среды. В практических исследованиях такую систему обычно упрощают и рассматривают один самолет, находящийся под действием заданных ускоряющих сил. Мы будем предполагать, что эти ускоряющие силы явно не зависят от времени и от координат центра тяжести самолета, по крайней мере для всех возмущенных движений, достаточно близких к рассматриваемому прямолинейному полету самолета в однородной, спокойной атмосфере.

Пусть m — масса самолета; v — скорость его центра тяжести G; J — центральный момент инерции; φ — угол, образуемый скоростью v с горизонтальной плоскостью; θ — угол хорды крыла с горизонтальной плоскостью; $\alpha = \theta - \varphi$ — угол атаки. Пусть тяга винта $\Phi(v, \omega)$ проходит через центр тяжести G, имеет постоянное направление относительно самолета и составляет угол β со скоростью v. Подъемную силу, силу сопротивления и результирующий момент (относительно центра тяжести) обозначим через $c_a v^2$, $c_w v^2$ и $c_m v^2$. Будем считать, что c_m не зависит от v и от угла θ, когда переменными задачи выбраны v, α, θ, $\theta' = \omega$. Для простоты положим, что c_a, c_w зависят только от α.

Естественные уравнения продольных движений самолета в его плоскости симметрии суть

$$
\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt} &= \Phi\cos\beta - mg\sin\varphi - c_w v^2,\\
mv\frac{d\varphi}{dt} &= \Phi\sin\beta - mg\cos\varphi + c_a v^2,\\
J\frac{d^2\theta}{dt^2} &= c_m v^2.
\end{aligned}
$$

Будем рассматривать установившийся прямолинейный полет, в котором переменные v, α, θ имеют постоянные значения, удовлетворяющие уравнениям

$$
\begin{aligned}
\Phi\cos\beta - mg\sin\varphi - c_w v^2 &= 0,\\
\Phi\sin\beta - mg\cos\varphi + c_a v^2 &= 0,\\
c_m &= 0.
\end{aligned}
$$

Обозначая соответственно через ξ, η, ζ, ζ' вариации переменных v, α, θ, θ', имеем следующую систему дифференциальных уравнений в вариациях ($\eta = \delta\alpha = \delta\beta$):

$$m\frac{d\xi}{dt} = \xi\left(-2c_w v + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\cos\beta\right) - \eta\left(\frac{\partial c_w}{\partial \alpha} - c_a\right)v^2 - \\ - \zeta mg\cos\varphi + \zeta'\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}\cos\beta.$$

$$mv\frac{d\eta}{dt} = \xi\left(-2c_a v - \frac{\partial \Phi}{\partial v}\sin\beta\right) - \eta\left(\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} + c_w\right)v^2 - \\ - \zeta mg\sin\varphi + \zeta'\left(mv - \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}\sin\beta\right).$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \zeta',$$

$$J\frac{d\zeta'}{dt} = \eta\frac{\partial c_m}{\partial \alpha}v^2 + \zeta'\frac{\partial c_m}{\partial \omega}v^2.$$

Мы будем заниматься задачей устойчивости установившегося прямолинейного полета для нейтрального самолета, т. е. такого, который в рассматриваемом невозмущенном движении обладает свойством

$$\frac{\partial c_m}{\partial \alpha} = 0.$$

Характеристическое уравнение при этом будет

$$\Delta(\lambda) = -\lambda\left(\frac{\partial c_m}{\partial \omega}v^2 - I\lambda\right) \times \\ \times \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial v}\cos\beta - 2c_w v - m\lambda & -\left(\frac{\partial c_w}{\partial \alpha} - c_a\right)v^2 \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial v}\sin\beta - 2c_a v & -\left(\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} + c_w\right)v^2 - mv\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда мы должны заключить, что характеристическое уравнение задачи о продольной устойчивости нейтрального самолета на прямолинейном пути при сделанных допущениях всегда имеет один нулевой корень. Пусть другие корни имеют отрицательные вещественные части, а посему удовлетворяются неравенства Гурвица

$$\frac{\partial c_m}{\partial \omega} < 0,$$

$$v\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\cos\beta - 2c_w v\right) - \left(\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} + c_w\right)v^2 < 0,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\cos\beta - 2c_w v\right)\left(\frac{\partial c_a}{\partial v} + c_w\right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\sin\beta + 2c_a v\right)\left(\frac{\partial c_w}{\partial \alpha} - c_a\right) < 0.$$

Вопрос об устойчивости должен разрешаться по методу Ляпунова с учетом членов более высокого порядка малости. Предварительно следует заметить, что для практического вычисления постоянной g, введенной в п. 48, 49, нет необходимости непременно полностью вычислять функции u_s; достаточно в этих последних определить члены не выше $(m-1)$-й степени x.

В рассматриваемой задаче линейный интеграл x для уравнений в вариациях есть

$$x = J\zeta' - \frac{\partial c_m}{\partial \omega} v^2 \zeta.$$

Чтобы получить простые вычисления, исключим переменную ζ и будем рассматривать полную систему дифференциальных уравнений возмущенного движения в переменных x, $x_1 = \xi$, $x_2 = \eta$, $x_3 = \zeta'$. Имеем

$$\frac{dx}{dt} = X = c_m(\alpha + x_2, \omega + x_3)(v + x_1)^2 - \frac{\partial c_m}{\partial \omega} v^2 x_3.$$

Нас интересует выражение

$$Z^{(0)} = X(x, v + u_1, \alpha + u_2, \omega + u_3).$$

Приравнивая нулю правую часть дифференциального уравнения для x_3, имеем

$$c_m(\alpha + u_2, \omega + u_3) = 0.$$

Пусть для нейтрального самолета уничтожаются все производные $\frac{\partial^\mu c_m}{\partial \alpha^\mu}$ до порядка $p-1$ включительно, а производная $\frac{\partial^p c_m}{\partial \alpha^p}$ отлична от нуля.

Из последнего уравнения имеем

$$u_3 = -\frac{1}{p!}\frac{\frac{\partial^p c_m}{\partial \alpha^p}}{\frac{\partial c_m}{\partial \omega}} u_2^p + \ldots$$

Следовательно,

$$Z^{(0)} = c_m(\alpha + u_2, \omega + u_3)(v + u_1)^2 - \frac{\partial c_m}{\partial \omega} v^2 u_3 = \frac{v^2}{p!}\frac{\partial^p c_m}{\partial \alpha^p} u_2^p + \ldots$$

Если $u_2 = Ax^q + \ldots$, то степень m наинизшего члена gx^m в разложении функции $Z^{(0)}$ в ряд по возрастающим степеням x есть $m = pq$, а коэффициент

$$g = \frac{v^2}{p!}\frac{\partial^p c_m}{\partial \alpha^p} A^p.$$

Для устойчивости невозмущенного движения степень m должна быть нечетной, а постоянная g — отрицательной; поэтому числа p и q должны быть одновременно нечетными и должно иметь место неравенство $g < 0$.

Наинизшие члены функции u_2 определятся из системы уравнений

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\cos\beta - 2c_w v\right)u_1 - \left(\frac{\partial c_w}{\partial\alpha} - c_a\right)v^2 u_2 + \frac{mg\cos\varphi}{\dfrac{\partial c_m}{\partial\omega}v^2}x = 0,$$

$$-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\sin\beta + 2c_a v\right)u_1 - \left(\frac{\partial c_a}{\partial\alpha} + c_w\right)v^2 u_2 + \frac{mg\sin\varphi}{\dfrac{\partial c_m}{\partial\omega}v^2}x = 0,$$

откуда

$$A = \frac{\left[\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\cos\beta - 2c_w v\right)\sin\varphi + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\sin\beta + 2c_a v\right)\cos\varphi\right]\dfrac{mg}{\dfrac{\partial c_m}{\partial\omega}v^4}}{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\cos\beta - 2c_m v\right)\left(\dfrac{\partial c_a}{\partial\alpha} + c_w\right) + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\sin\beta + 2c_a v\right)\left(\dfrac{\partial c_w}{\partial\alpha} - c_a\right)}.$$

Когда A положительно, что имеет место для самолетов [1]), если удовлетворены предыдущие неравенства, то последнее условие устойчивости принимает вид $\dfrac{\partial^p c_m}{\partial\alpha^p} < 0$, p — нечетно.

51 [30, 31]. Нам осталось рассмотреть случай, когда $Z^{(0)}$, $Z_s^{(0)}$ уничтожаются тождественно. Тогда уравнения (27) допускают очевидное решение

$$x = c,\ z_1 = 0,\ \ldots,\ z_n = 0,$$

зависящее от произвольной постоянной c.

Сделаем подстановку

$$x = c + z,$$

разумея под c произвольную вещественную постоянную, абсолютная величина которой не должна только превосходить некоторого достаточно малого числа. Получим

$$Z_s = c_{s1}z_1 + \ldots + c_{sn}z_n + Z_s' \qquad (s = 1, \ldots, n),$$

где c_{sr} будут голоморфными функциями постоянной c, уничтожающимися при $c = 0$, а Z_s' будут голоморфными функциями переменных z, $z_1, \ldots, z_n$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка и обладают голоморфными относительно c коэффициентами. Такой же получится и функция

$$Z = c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n + Z'.$$

---

[1]) Это дополнение к изложенному из моих лекций по устойчивости самолетов, сделавшее беспредметным рассмотрение случая $A < 0$, выполнил Е. П. Гроссман (Гроссман Е. П. Продольная динамическая устойчивость нейтральных самолетов // Тр. ЦАГИ.— 1935.— № 217).

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\sum_s ((p_{s1} + c_{s1}) z_1 + \ldots + (p_{sn} + c_{sn}) z_n + Z_s') \frac{\partial z}{\partial z_s} =$$
$$= c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n + Z'$$

и будем искать для него голоморфное решение вида

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} V_i,$$

где V_i обозначет форму степени i относительно переменных. Для определения форм V_i сравнение однородных членов даст следующую систему уравнений:

$$\sum [(p_{s1} + c_{s1}) z_1 + \ldots + (p_{sn} + c_{sn}) z_n] \frac{\partial V_i}{\partial z_s} = U_i,$$

где U_i будут представлять известные однородные формы переменных $z_1, \ldots, z_n$ степени i, зависящие от форм V_j с указателем j, не превышающим $i - 1$. Вследствие нашего допущения, что все корни уравнения $\Delta(\lambda) = \| p_{ij} - \delta_{ij}\lambda \| = 0$ обладают отрицательными вещественными частями, при c, по абсолютной величине достаточно малом, все корни уравнения $D(\lambda) = \| p_{ij} + c_{ij} - \delta_{ij}\lambda \| = 0$ также будут иметь отрицательные вещественные части. При таком c условия теоремы п. 34 будут удовлетворены, и, следовательно, последние уравнения однозначно определят все V_i в порядке возрастания индекса i. Все коэффициенты в формах V_i будут голоморфными функциями постоянной c при достаточно малых абсолютных значениях последней.

Отсюда заключаем, что

$$x = c + z(z_1, \ldots, z_n, c)$$

представляет некоторый неразрешенный относительно постоянной c интеграл системы (27), и, следовательно, им можно заменить первое из дифференциальных уравнений этой системы. Тогда прочие уравнения системы приведутся к виду

$$\frac{dz_s}{dt} = (p_{s1} + c_{s1}) z_1 + \ldots + (p_{sn} + c_{sn}) z_n + Z_s', \tag{28}$$

где Z_s' будут голоморфными функциями $z_1, \ldots, z_n$ с коэффициентами, являющимися голоморфными функциями постоянной c; причем разложения Z_s' будут начинаться с членов не ниже второго порядка относительно $z_1, \ldots, z_n$.

Наша задача об устойчивости по отношению к величинам z, $z_1, \ldots, z_n$ равносильна задаче об устойчивости по отношению к величинам $c, z_1, \ldots, z_n$. Действительно, всяким численно достаточно малым значениям одних величин отвечают сколь угодно численно малые значения других.

При всяком c, достаточно малом по абсолютной величине, вопрос об устойчивости по отношению к величинам $z_1, \ldots, z_n$ приводится к исследованию уравнений (28), характеристическое уравнение которых

$$D(\lambda) = \| p_{ij} + c_{ij} - \delta_{ij}\lambda \| = 0$$

имеет при таком c все корни с отрицательными вещественными частями. Вследствие этого при всяком c, достаточно малом по абсолютной величине, для всякого данного положительного a найдется такое положительное число ε, чтобы при выполнении в начальный момент времени условия

$$\sum_i z_{i0}^2 < \varepsilon$$

во все последующее время движения выполнялось следующее:

$$\sum_i z_i^2 < a$$

и чтобы при тех же условиях функции z_s с беспредельным возрастанием t стремились к нулю.

Однако отсюда мы еще не имеем права заключать, что невозмущенное движение устойчиво. Для того чтобы такое заключение было законно, необходимо, чтобы при $|c|$, не превосходящем некоторого числа, можно было выбирать ε не зависящим от c.

Рассмотрим определенно-отрицательную квадратичную форму V, определенную уравнением

$$\sum_s (p_{s1}z_1 + \ldots + p_{sn}z_n)\frac{\partial V}{\partial z_s} = z_1^2 + \ldots + z_n^2.$$

Полная производная по t от такой функции V, взятая в силу уравнений (28), есть

$$\frac{dV}{dt} = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + \sum_s (c_{s1}z_1 + \ldots + c_{sn}z_n + Z_s')\frac{\partial V}{\partial z_s}.$$

Постоянные c_{ij} являются голоморфными функциями c, уничтожающимися при c, равном нулю, значит, для значений c, достаточно малых по абсолютной величине, правая часть последнего равенства будет представлять определенно-положительную функцию в области достаточно малых абсолютных значений переменных $z_1, \ldots, z_n$, независимо от значения c, меньшего некоторого достаточно малого числа. Это обстоятельство и доказывает возможность выбрать число ε не зависящим от c (п. 8).

Таким образом, приходим к заключению, что *в случае, когда Z^0, Z_s обращаются в нуль, невозмущенное движение устойчиво, а возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет асимптотически приближаться к некоторому установившемуся* *движению*

$$x = c, \; z_1 = 0, \; \ldots, \; z_n = 0.$$

52 [32]. Пример. Дана система

$$\frac{dx}{dt} = ax^2 + bxy + cy^2, \quad \frac{dy}{dt} = -y + kx + lx^2 + mxy + ny^2$$

с постоянными a, b, c, k, l, m, n. Из уравнения

$$-y + kx + lx^2 + mxy + ny^2 = 0$$

находим

$$y = u(x) = kx + B_2x^2 + B_3x^3 + \ldots,$$

где

$$B_2 = l + mk + nk^2,$$
$$B_3 = (m + 2nk)B_2, \ldots$$

Отсюда

$$Z^0 = ax^2 + bxu + cu^2 = A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots,$$

где

$$A_2 = a + bk + ck^2,$$
$$A_3 = (b + 2ck)B_2,$$
$$A_4 = (b + 2ck)B_3 + cB_2^2, \ldots$$

Если A_2 отлично от нуля, то невозмущенное движение неустойчиво.

Пусть $A_2 = a + bk + ck^2 = 0$. Если при этом $B_2 = 0$ (что влечет за собой равенство нулю и всех остальных коэффициентов B и A), то невозмущенное движение будет устойчивым.

Допустим, что B_2 не нуль. Устойчивость будет определяться знаком A_3, когда $b + 2ck$ отлично от нуля. А если $b + 2ck = 0$, то при c, отличном от нуля, коэффициент A_4 будет отличен от нуля и, следовательно, будет иметь место неустойчивость; при $c = 0$ из уравнений $b + 2ck = 0$, $A_2 = 0$ следует $a = 0$, $b = 0$, а тем самым $Z^{(0)} \equiv 0$: невозмущенное движение будет устойчиво.

ГЛАВА 8

ПАРА ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Преобразование уравнений

53 [33]. Путем определения вещественных канонических переменных (п. 30), отвечающих паре чисто мнимых корней $\pm i\lambda$, систему дифференциальных уравнений возмущенного движения можем преобразовать в таком случае к следующему виду:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y,$$
$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \alpha_s x + \beta_s y + X_s \tag{29}$$
$$(s = 1, \ldots, n).$$

Здесь X, Y, X_s суть голоморфные функции вещественных переменных x, y, x_1, ..., x_n, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка и обладают постоянными вещественными коэффициентами; p_{sr}, α_s, β_s суть некоторые вещественные постоянные, причем все корни уравнения

$$\| p_{sr} - \delta_{sr}\varkappa \| = 0$$

имеют отрицательные вещественные части; для определенности будем считать λ положительной постоянной.

Можно предположить, что функции X и Y обращаются в нуль, когда x и y делаются нулями. Действительно, допустим, что этого нет. Определим x и y как голоморфные функции переменных x_1, ..., x_n, удовлетворяющие уравнениям

$$\sum_s (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \alpha_s x + \beta_s y + X_s)\frac{\partial x}{\partial x_s} = -\lambda y + X,$$
$$\sum_s (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + \alpha_s x + \beta_s y + X_s)\frac{\partial y}{\partial x_s} = \lambda x + Y$$

и содержащие в своих разложениях члены не ниже второго порядка

$$x = u_2 + u_3 + \ldots, y = v_2 + v_3 + \ldots,$$

где u_m, v_m суть однородные функции степени m от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Для последовательного определения u_m, v_m получим уравнения

$$\sum_s (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial u_m}{\partial x_s} = -\lambda v_m + P_m,$$

$$\sum_s (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial v_m}{\partial x_s} = \lambda u_m + Q_m,$$

где P_m, Q_m — однородные функции $x_1, \ldots, x_n$ степени m, зависящие от u_k, v_k $(k < m)$.

Допустим, что все функции u_k, v_k $(k < m)$ определены. Тогда, сохраняя обозначения п. 34, будем искать u_m, v_m в виде

$$u_m = \sum A_r U_r, \quad v_m = \sum B_r U_r,$$

функции P_m, Q_m при этом будут известными функциями $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$:

$$P_m = \sum p_r U_r, \quad Q_m = \sum q_r U_r.$$

Подставляя эти значения в предыдущие уравнения, получим для определения постоянных A_r, B_r систему алгебраических линейных неоднородных уравнений

$$A_r(m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n) + \sum_s \beta_r^{(s)} A_s = -\lambda B_r + p_r,$$

$$B_r(m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n) + \sum_s \beta_r^{(s)} B_s = \lambda A_r + q_r,$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — какие-то неотрицательные целые числа, дающие в сумме m; $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ суть корни уравнения $\| p_{ij} - \delta_{ij}\varkappa \| = 0$; $\beta_r^{(s)}$ суть некоторые неположительные постоянные, когда $r < s$, и нули, когда $r \geqslant s$. Определитель этой системы уравнений есть

$$D = \prod [(m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n)^2 + \lambda^2].$$

Так как согласно предположению все корни $\varkappa_s$ имеют отрицательные вещественные части, то ни для каких неотрицательных чисел $m_1, \ldots, m_n$, дающих в сумме m, выражение $m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n$ не может равняться $\pm\lambda i$; следовательно, определитель D не обращается в нуль и из последних уравнений постоянные A_r, B_r будут определяться однозначно.

Пусть

$$x = u = u_2 + u_3 + \ldots, \quad y = v = v_2 + v_3 + \ldots$$

суть найденные указанным путем решения. Вводя вместо переменных x, y переменные $\bar{x}$, $\bar{y}$

$$x = u + \bar{x}, \quad y = v + \bar{y},$$

преобразуем заданные уравнения к виду, в котором члены $\overline{X}$, $\overline{Y}$ будут уничтожаться, когда $\bar{x}$, $\bar{y}$ делаются нулями.

Поэтому мы предположим, что при составлении уравнений (29) выполнено указанное преобразование (если в нем была надобность) и что, следовательно, функции X и Y уничтожаются, когда x, y делаются нулями.

54 [33]. Вместо переменных x, y введем полярные координаты r, θ:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta.$$

Будем иметь

$$\frac{dr}{dt} = X\cos\theta + Y\sin\theta, \quad r\frac{d\theta}{dt} = \lambda r + Y\cos\theta - X\sin\theta.$$

Из допущения, что X, Y уничтожаются, когда x, y делаются нулями, выводим, что правые части последних уравнений уничтожаются, когда уничтожается r. Поэтому после сокращения на r второе уравнение дает

$$\frac{d\theta}{dt} = \lambda + \Theta,$$

где Θ обозначает голоморфную функцию переменных r, $x_1, \ldots x_n$, уничтожающуюся при одновременном равенстве последних нулю и имеющую в своем разложении коэффициентами целые рациональные функции от $\sin\theta$ и $\cos\theta$. Из этого уравнения видно, что пока величины $|r|$, $|x_s|$ не превосходят некоторых постоянных, θ будет непрерывной возрастающей функцией t. Отсюда ясно, что при решении задач об устойчивости переменная θ может играть такую же роль, что и t. Примем ее за независимую переменную вместо t. Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{dr}{d\theta} = rR, \\ &\frac{dx_s}{d\theta} = q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n + (a_s\cos\theta + b_s\sin\theta)r + Q_s, \end{aligned} \tag{30}$$

где R, Q_s обозначают функции такого же характера, как и Θ; при этом функции Q_s в своих разложениях не будут содержать членов ниже второго измерения относительно величин r, x_s;

$$q_{sr} = \frac{p_{sr}}{\lambda}, \quad a_s = \frac{\alpha_s}{\lambda}, \quad b_s = \frac{\beta_s}{\lambda}.$$

Первое из уравнений (30) показывает, что если начальное значение r есть нуль, то r будет равным нулю для всякого θ. Следовательно, r будет сохранять знак своего начального значения по крайней мере до тех пор, пока величины r, x_s остаются все достаточно малыми по абсолютной величине. Мы будем предполагать, что r не получает отрицательных значений.

55 [34, 35]. Для решения задачи уравнения (30) придется подвергнуть некоторому преобразованию, какое находится в связи с вопросом о возможности для них периодического решения

$$
\begin{aligned}
r &= c + u^{(2)}c^2 + u^{(3)}c^3 + \ldots, \\
x_s &= u_s^{(1)}c + u_s^{(2)}c^2 + u_s^{(3)}c^3 + \ldots,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

где c — произвольная постоянная, а $u^{(k)}$, $u_s^{(k)}$ — не зависящие от нее периодические функции θ с общим периодом 2π. Такое периодическое решение не всегда будет возможно.

Для определения функций $u^{(k)}$, $u_s^{(k)}$ сделаем подстановку (31) в систему дифференциальных уравнений (30) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях c. Получим

$$
\frac{du^{(k)}}{d\theta} = U^{(k)},
$$

$$
\frac{du_s^{(k)}}{d\theta} = q_{s1}u_1^{(k)} + \ldots + q_{sn}u_n^{(k)} + (a_s \cos\theta + b_s \sin\theta)\, u^{(k)} + U_s^{(k)},
$$

где $U^{(k)}$, $U_s^{(k)}$ суть известные целые рациональные функции от тех $u^{(\mu)}$, $u_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < k$, с коэффициентами, представляющими целые рациональные функции от $\sin\theta$ и $\cos\theta$; при $k = 1$ все функции U суть нули; $k = 1, 2, \ldots$

Функции $u_s^{(1)}$ всегда будут периодическими вида

$$
u_s^{(1)} = A_s \cos\theta + B_s \sin\theta,
$$

где A_s, B_s — некоторые постоянные. Наиболее просто это можно доказать через приведение уравнений для $u_s^{(k)}$ к каноническому виду (п. 30)

$$
\frac{dv_s^{(k)}}{d\theta} = \varkappa_s v_s^{(k)} - \sigma_s v_{s-1}^{(k)} + (a_s' \cos\theta + b_s' \sin\theta)\, u^{k} + V_s^{(k)},
$$

где $v_1^{(k)}, \ldots, v_n^{(k)}$ — канонические переменные, а постоянные a_s', b_s' суть линейные комбинации коэффициентов a_s, b_s; новые $V_s^{(k)}$ будут также известными целыми рациональными функциями от тех $u^{(\mu)}$, $v_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < k$, с коэффициентами, представляющими целые рациональные функции от $\sin\theta$ и $\cos\theta$; при этом все $V_s^{(1)}$ равны нулю; $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ являются корнями уравнения

$$
\| q_{ij} - \delta_{ij}\varkappa \| = 0,
$$

постоянные σ_s суть либо нули, либо 1; $\sigma_1 = 0$, $s = 1, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots$

Из этих уравнений имеем

$$
v_s^{(k)} = e^{\varkappa_s\theta} \int_{-\infty}^{\theta} e^{-\varkappa_s\theta} \left[(a_s' \cos\theta + b_s' \sin\theta)\, u^{(k)} - \sigma_s v_{s-1}^{(k)} + V_s^{(k)}\right] d\theta,
$$

и, следовательно, всякий раз, когда стоящие здесь в квадратных скобках выражения представляют целые рациональные функции $\sin\theta$ и $\cos\theta$, такими же будут получаться и функции $v_s^{(k)}$, а тем самым и $u_s^{(k)}$, линейно зависящие от последних [1]).

Для $k = 1$ функции $u_s^{(1)}$ получаются указанного вида, ибо $u^{(1)} = 1$, а все $V_s^{(1)}$ суть нули.

Возможность или невозможность k-го шага в процессе последовательного определения функций $u^{(k)}$, $v_s^{(k)}$ зависит от возможности или невозможности периодического решения для $u^{(k)}$

$$u^{(k)} = \int\limits_0^\theta U^{(k)} d\theta.$$

Допустим, что все функции $u^{(\mu)}$, $v_s^{(\mu)}$, для которых μ меньше некоторого числа m, найдены и представляют периодические функции θ. Тогда функцию $U^{(m)}$ можно будет представить под видом конечного ряда синусов и косинусов целых кратных дуг θ, и если в этом ряду не окажется постоянного члена, то функция $u^{(m)}$, а следовательно, и все $u_s^{(m)}$ будут периодическими. В противном случае функция $u^{(m)}$ будет вида $u^{(m)} = g\theta + v$, где g есть некоторая отличная от нуля постоянная, а v — конечный ряд синусов и косинусов кратных дуг θ. При этом в функции $v_s^{(m)}$ войдут вековые члены.

Допустим, что имеет место этот последний случай.

Предполагая, что вычисление было выполнено таким образом, чтобы все функции $u^{(p)}$, $u_s^{(p)}$, v $(p < m)$ были вещественными для вещественного θ, преобразуем уравнения (30) посредством подстановки

$$\begin{aligned} r &= z + u^{(2)}z^2 + \ldots + u^{(m-1)}z^{m-1} + vz^m, \\ x_s &= u^{(1)}z + u_s^{(2)}z^2 + \ldots + u_s^{(m-1)}z^{m-1} + z_s, \end{aligned}$$

где $z, z_1, \ldots, z_n$ суть новые переменные вместо прежних $r, x_1, \ldots, x_n$. Преобразованные уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= zZ, \\ \frac{dz_s}{d\theta} &= q_{s1}z_1 + \ldots + q_{sn}z_n + Z_s, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$zZ = \frac{rR - U^{(2)}z^2 - \ldots - U^{(m-1)}z^{m-1} - (U^{(m)} - g)\,z^m}{1 + 2u^{(2)}z + \ldots + (m-1)\,u^{(m-1)}z^{m-2} + mvz^{m-1}},$$

[1]) Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 1, ч. 1: Пер. с фр.— М.: ГТТИ, 1933.— (См. § 103).

$$Z_s = Q_s - U_s^{(1)}z - \ldots - U_s^{(m-1)}z^{m-1} + (a_s\cos\theta + b_s\sin\theta)\,vz^m -$$
$$- [u_s^{(1)} + 2u_s^{(2)}z + \ldots + (m-1)\,u_s^{(m-1)}z^{m-2}]\,zZ.$$

Функции Z, Z_s являются голоморфными функциями переменных z, z_1, ..., z_n с коэффициентами, зависящими от вещественных значений θ под видом конечных рядов синусов и косинусов целых кратностей θ. Функции эти уничтожаются при равенстве нулю всех z_s и z; причем Z_s не содержат в своих разложениях членов первого порядка.

Если через $Z^{(0)}$, $Z_s^{(0)}$ обозначить функции Z, Z_s, когда в последних положено

$$z_1 = 0, \ldots, z_n = 0,$$

то разложение $Z^{(0)}$ по восходящим целым степеням z будет начинаться $(m-1)$-й степенью с постоянным коэффициентом g, а разложения функций $Z_s^{(0)}$ будут содержать z в степенях не ниже m-й.

Таким образом, уравнения (32) обладают всеми свойствами, к каким мы стремились при исследовании устойчивости в случае одного корня, равного нулю.

Критерий устойчивости и неустойчивости

56 [37]. Пусть

$$zZ = gz^m + P^{(1)}z + \ldots + P^{(m-1)}z^{m-1} + R,$$
$$Z_s = P_s^{(1)}z + \ldots + P_s^{(m-1)}z^{m-1} + R_s,$$

где $P^{(j)}$, $P_s^{(j)}$ суть линейные формы переменных $z_1, \ldots, z_n$ с периодическими относительно θ коэффициентами; R — голоморфная функция переменных z, z_s, разложение которой имеет такие же коэффициенты, причем $R^{(0)}$ содержит z в степенях не ниже $(m+1)$-й, а линейные относительно $z_1, \ldots, z_n$ члены содержат z в степени не ниже m-й; R_s — голоморфные функции z, z_s, разложения которых в членах, линейных относительно $z_1, \ldots, z_n$, могут содержать z только в степенях выше $(m-1)$-й; при $z_1 = \ldots = z_n = 0$ функции R_s содержат z в степенях не ниже m-й.

Для решения задачи об устойчивости рассмотрим функцию

$$V = z + W + W^{(1)}z + \ldots + W^{(m-1)}z^{m-1},$$

где $W^{(j)}$ суть линейные формы, а W — квадратичная форма от переменных $z_1, \ldots, z_n$. Коэффициенты в W будем предполагать постоянными, а в $W^{(j)}$ — некоторыми периодическими функциями θ.

Постараемся коэффициентами в формах $W^{(j)}$, W распорядиться так, чтобы полная производная от функции V по θ была знакоопределенной при $z \geqslant 0$

$$\frac{dV}{d\theta} = g(z^m + z_1^2 + \ldots + z_n^2) + S,$$

причем

$$S = vz^m + \sum_{s,\,r} v_{sr} z_s z_r,$$

где v, v_{sr} — какие-то голоморфные функции z, z_1, ..., z_n, уничтожающиеся, когда все переменные z, z_s делаются нулями.

Согласно уравнениям (32) имеем

$$\frac{dV}{d\theta} = zZ + (W^{(1)} + 2W^{(2)}z + \ldots + (m-1)W^{(m-1)}z^{m-2})zZ +$$
$$+ \sum_s \frac{\partial W}{\partial z_s}(q_{s1}z_1 + \ldots + q_{sn}z_n + Z_s) +$$
$$+ \sum_s \sum_{r=1}^{m-1} z^r \frac{\partial W^{(r)}}{\partial z_s}(q_{s1}z_1 + \ldots + q_{sn}z_n + Z_s) + \sum_{r=1}^{m-1} \frac{\partial W^{(r)}}{\partial \theta} z^r.$$

Если сюда подставить значения функций Z, Z_s, то получим

$$\frac{dV}{d\theta} = [1 + W^{(1)} + 2W^{(2)}z + \ldots + (m-1)W^{(m-1)}z^{m-2}] \times$$
$$\times (gz^m + P^{(1)}z + \ldots + P^{(m-1)}z^{m-1} + R) +$$
$$+ \sum_s \frac{\partial W}{\partial z_s}(q_{s1}z_1 + \ldots + q_{sn}z_n + Z_s) +$$
$$+ \sum_s \sum_{r=1}^{m-1} z^r \frac{\partial W^{(r)}}{\partial z_s}(q_{s1}z_1 + \ldots + q_{sn}z_n +$$
$$+ P_s^{(1)}z + \ldots + P_s^{(m-1)}z^{m-1} + R_s) + \sum_{r=1}^{m-1} z^r \frac{\partial W^{(r)}}{\partial \theta}.$$

Сравнивая это выражение с желаемым видом этой полной производной, получим для определения функций W, $W^{(j)}$ такие уравнения

$$\sum_s \frac{\partial W}{\partial z_s}(q_{s1}z_1 + \ldots + q_{sn}z_n) = g(z_1^2 + \ldots + z_n^2),$$

$$\frac{\partial W^{(r)}}{\partial \theta} + \sum_s \frac{\partial W^{(r)}}{\partial z_s}(q_{s1}z_1 + \ldots + q_{sn}z_n) + P^{(r)} +$$
$$+ \sum_s \left(P_s^{(1)} \frac{\partial W^{(r-1)}}{\partial z_s} + \ldots + P_s^{(r-1)} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial z_s}\right) = 0$$
$$(r = 1, \ldots, m-1).$$

Функция W определяется однозначно, так как все корни уравнения

$$\| q_{ij} - \delta_{ij}\varkappa \| = 0$$

имеют отрицательные вещественные части (п. 34). Функции

$$W^{(1)}, \ldots, W^{(m-1)}$$

определяются последовательно в порядке возрастания указателя r. Предполагая, что все предшествующие функции $W^{(\mu)}$ для некоторой $W^{(r)}$ определены, имеем для определения $W^{(r)}$ уравнение

$$\frac{\partial W^{(r)}}{\partial \theta} + \sum_s \frac{\partial W^{(r)}}{\partial z_s}(q_{s1}z_1 + \ldots + q_{sn}z_n) = A_1 z_1 + \ldots + A_n z_n,$$

в котором A будут известными конечными рядами синусов и косинусов целых кратностей θ. Отсюда для определения коэффициентов a формы

$$W^{(r)} = a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n$$

получим следующую систему уравнений:

$$\frac{da_s}{d\theta} + q_{1s}a_1 + \ldots + q_{ns}a_n = A_s \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Так как характеристическое уравнение этой системы не имеет чисто мнимых корней, то существует и притом только одно такое решение, в котором все a будут конечными рядами синусов и косинусов целых кратностей θ.

При таком определении W, $W^{(r)}$ величина найденной производной $\frac{dV}{d\theta}$ при условии $z \geqslant 0$ представит функцию, знакоопределенную по отношению к $z, z_1, \ldots, z_n$ при достаточно малых числовых значениях $z, z_1, \ldots, z_n$ и имеющую знак постоянной g. Если g отрицательно, то при $z \geqslant 0$ функция V будет определенно-положительной по отношению к $z, z_1, \ldots, z_n$, так как согласно п. 35 функция W будет определенно-положительной относительно переменных $z_1, \ldots, z_n$. Напротив, если $g > 0$, то W будет определенно-отрицательной относительно переменных $z_1, \ldots, z_n$; функцию же V выбором $z > 0, z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$ можно сделать положительной, т. е. одного знака с g; функция V допускает бесконечно малый высший предел.

Отсюда в силу теорем Ляпунова об устойчивости и неустойчивости мы должны заключить, что в *случае отрицательного g невозмущенное движение устойчиво по отношению к $z, z_1, \ldots, z_n$, а тем самым и к $r, x_1, \ldots, x_n$, и всякое достаточно близкое возмущенное движение стремится к нему асимптотически, а в случае положительного g невозмущенное движение неустойчиво.*

57 [36]. Для действительного вычисления постоянной g нет необходимости непременно идти указанным путем. Для этой цели предпочтительнее рассматривать непосредственно уравнения (29).

Введем новую независимую переменную τ вместо t:

$$t - t_0 = \frac{\tau}{\lambda}(1 + h_2c^2 + h_3c^3 + \ldots);$$

коэффициенты h остаются пока неопределенными; c есть некоторая постоянная. Значениями постоянных h распорядимся так, чтобы преобразованным уравнениям (29)

$$\frac{dx}{d\tau} = \left(-y + \frac{X}{\lambda}\right)(1 + h_2c^2 + \ldots),$$
$$\frac{dy}{d\tau} = \left(x + \frac{Y}{\lambda}\right)(1 + h_2c^2 + \ldots),$$
$$\frac{dx_s}{d\tau} = \left(q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n + a_sx + b_sy + \frac{X_s}{\lambda}\right)(1 + h_2c^2 + \ldots),$$

где q_{sr}, a_s, b_s имеют прежние значения п. 54, удовлетворяли ряды

$$x = x^{(1)}c + x^{(2)}c^2 + \ldots,$$
$$y = y^{(1)}c + y^{(2)}c^2 + \ldots,$$
$$x_s = x_s^{(1)}c + x_s^{(2)}c^2 + \ldots,$$

в которых все функции $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$, $x_s^{(\mu)}$ были бы периодическими функциями τ с общим периодом 2π и не зависели от постоянной c.

Для последовательного определения функций $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$, $x_s^{(\mu)}$ при этом получаются уравнения

$$\begin{gathered}\frac{dx^{(r)}}{d\tau} = -y^{(r)} - h_{r-1}y^{(1)} + X^{(r)},\\ \frac{dy^{(r)}}{d\tau} = x^{(r)} + h_{r-1}x^{(1)} + Y^{(r)},\\ \frac{dx_s^{(r)}}{d\tau} = q_{s1}x_1^{(r)} + \ldots + q_{sn}x_n^{(r)} + X_s^{(r)}\\ (s = 1, \ldots, n;\, r = 1, 2, \ldots),\end{gathered} \tag{33}$$

где $X^{(r)}$, $Y^{(r)}$ будут некоторыми известными целыми рациональными функциями от всех $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$, $x_s^{(\mu)}$, имеющих верхний значок μ меньше r, и будут зависеть от всех постоянных h_j, для которых $j < r - 1$. Функции $X_s^{(r)}$ дополнительно будут зависеть от $x^{(r)}$, $y^{(r)}$ и h_{r-1}. При этом следует положить: $h_0 = 0$, $h_1 = 0$, $X^{(1)} = 0$, $Y^{(1)} = 0$.

Если допустить, что из уравнений для $r = 1, \ldots, m - 1$ вычислены последовательно все функции $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$, $x_s^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$, и все постоянные h_j, для которых $j < m - 1$, то для определения функций $x^{(m)}$, $y^{(m)}$, $x_s^{(m)}$ и постоянной h_{m-1}

будем иметь из уравнений (33) систему, отвечающую $r = m$. Из последней видно, что если можно будет найти периодические $x^{(m)}$, $y^{(m)}$, то функции $x_s^{(m)}$ всегда возможно будет найти периодическими, так как все корни уравнения $\| q_{ij} - \delta_{ij}\varkappa \| = 0$ имеют отрицательные вещественные части и, следовательно, уравнения ($s = 1, \ldots, n$; $r = m$) при таких предположениях не будут принадлежать к случаю резонанса.

Уравнениям, которые получаются для определения $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, всегда можно удовлетворить предположением

$$x^{(1)} = \cos\tau, \quad y^{(1)} = \sin\tau.$$

Дальнейшие вычисления $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$ можно будет вести так, чтобы они делались нулями при $\tau = 0$. Останавливаясь на таком предположении, заметим, что $X^{(m)}$, $Y^{(m)}$ представятся тогда в виде конечных рядов синусов и косинусов целых кратностей τ:

$$X^{(m)} = A_1 \cos\tau + A_2 \sin\tau + \ldots,$$
$$Y^{(m)} = B_1 \cos\tau + B_2 \sin\tau + \ldots,$$

где $A_1, A_2, B_1, B_2, \ldots$ суть некоторые известные постоянные.

Предполагая

$$x^{(m)} = a_1 \cos\tau + a_2 \sin\tau + \ldots,$$
$$y^{(m)} = b_1 \cos\tau + b_2 \sin\tau + \ldots,$$

из уравнений (33), отвечающих $r = m$, для определения постоянных a_1, a_2, b_1, b_2, h_{m-1} получим соотношения

$$a_2 + b_1 = A_1, \quad -a_1 + b_2 + h_{m-1} = A_2,$$
$$-a_2 - b_1 = B_2, \quad -a_1 + b_2 - h_{m-1} = B_1.$$

Соотношения эти будут совместны только при условии

$$A_1 + B_2 = 0.$$

Когда последнее выполнено, функции $x^{(m)}$, $y^{(m)}$ можно будет определить, так как при определении коэффициентов a, b в рядах $x^{(m)}$, $y^{(m)}$ мы встретим особенность (в виде возможности появления вековых членов) только для членов, содержащих синус или косинус первой кратности τ. Для полного определения всех коэффициентов разложения $x^{(m)}$, $y^{(m)}$ нужно будет использовать условия $x^{(m)}(0) = 0$, $y^{(m)}(0) = 0$.

Если для некоторого значка m условие $A_1 + B_2 = 0$ не выполняется, то искомые решения невозможны. Можно показать, что в таком случае число m и постоянная

$$g = \frac{A_1 + B_2}{2}$$

были бы те самые, с которыми мы имели дело в предыдущем параграфе.

На других возможных способах определения знака постоянной g останавливаться не будем.

58. Пример. Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения приводятся к одному уравнению следующего вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

где F есть голоморфная функция указанных аргументов, не содержащая в своем разложении членов ниже второго порядка относительно величин x и $x' = \frac{dx}{dt}$, по отношению к которым ставится вопрос об устойчивости невозмущенного движения ($x = 0$, $x' = 0$).

В функции F выделим члены с нечетными и четными степенями скорости x'

$$F = ax'f(x, x'^2) + g(x, x'^2),$$

где f, g — голоморфные функции своих аргументов; f не содержит членов ниже первого порядка, а g — ниже второго порядка относительно x. Будем предполагать, что функции f и g не зависят от постоянной a, а наинизшая форма $f_k(x, x'^2)$ в разложении $f = f_k + f_{k+1} + \ldots$ является положительной. Задача эта представляет известный интерес; к ней приводятся некоторые практические вопросы и, в частности, вопрос об устойчивости положения равновесия ($x = 0$) механической системы, находящейся под действием понятной из уравнения обобщенной силы.

Делая

$$x = r\sin\theta, \quad x' = r\cos\theta,$$

выводим из нашего уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = R_2r^2 + R_3r^3 + \ldots,$$

где все R означают функции одного θ. При этом все функции

$$R_2, R_3, \ldots, R_k, R_{k+1} - a\cos^2\theta f_k(\sin\theta, \cos^2\theta)$$

не будут зависеть от постоянной a. Поэтому при отыскании решения последнего уравнения под видом ряда

$$r = c + u_2c^2 + u_3c^3 + \ldots,$$

расположенного по восходящим степеням произвольной постоянной c, все функции

$$u_2, u_3, \ldots, u_k, u_{k+1} - a\int_0^\theta \cos^2\theta f_k(\sin\theta, \cos^2\theta)\,d\theta$$

получатся не зависящими от a.

Но если бы a было нулем, то предложенное уравнение допускало бы не зависящий от t голоморфный интеграл, в котором совокупность членов наинизшего измерения будет $x^2 + x'^2$. Действительно, из получающегося при этом после исключения t уравнения

$$\frac{d(x^2 + x'^2)}{dx} = 2g(x, x'^2),$$

в котором правая часть $2g(x, x'^2) = \varphi(x, x^2 + x'^2)$ представляет голоморфную функцию величин x и $x'^2 + x^2$, в силу известной теоремы найдем $x^2 + x'^2 = c + \psi(x, c)$, где ψ будет голоморфной функцией x и c, уничтожающейся при $x = 0$; c представляет значение x'^2, когда x есть нуль. Последнее же уравнение непосредственно обнаруживает существование интеграла указанного характера.

Достаточно малые по абсолютной величине значения этого знакоопределенного интеграла будут отвечать некоторым замкнутым орбитам в плоскости x, x', или некоторым периодическим решениям заданного уравнения при $a = 0$. В существовании этих периодических решений возможно убедиться также непосредственно, так как уравнения для x и x' не изменяются при замене t на $-t$ и x' на $-x'$.

Поэтому интересующие нас не зависящие от a функции

$$u_2, u_3, \ldots, u_k, u_{k+1} - a\int_0^\theta \cos^2\theta f_k(\sin\theta, \cos^2\theta)\,d\theta$$

все будут периодическими, и, следовательно, если a не нуль, постоянная g найдется по формуле

$$g = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta f_k(\sin\theta, \cos^2\theta)\,d\theta.$$

Если f_k положительно (k — четно), то при $a > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $a < 0$ — устойчиво.

Можно заметить, что устойчивость невозмущенного движения при $a = 0$ очевидна, так как указанный выше знакоопределенный интеграл удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -y - \frac{a}{2}(x^2 + y^2)x,$$
$$\frac{dy}{dt} = x - \frac{a}{2}(x^2 + y^2)y,$$
$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + (x^2 + y^2).$$

Исследование будем вести согласно п. 57. Делая

$$t - t_0 = (1 + h_2c^2 + h_3c^3 + \ldots)\,\tau,$$

будем искать периодическое решение в виде рядов, расположенных по восходящим степеням произвольной постоянной c,

$$x = x^{(1)}c + x^{(2)}c^2 + \ldots,$$
$$y = y^{(1)}c + y^{(2)}c^2 + \ldots,$$
$$x_1 = x_1^{(1)}c + x_1^{(2)}c^2 + \ldots$$

Описанным в п. 57 последовательным процессом определим

$$x^{(1)} = \cos\tau, \quad y^{(1)} = \sin\tau, \quad x_1^{(1)} = 0,$$
$$x^{(2)} = 0, \qquad y^{(2)} = 0, \qquad x_1^{(2)} = 1,$$

а для $x^{(3)}$, $y^{(3)}$ получим следующие уравнения:

$$\frac{dx^{(3)}}{d\tau} = -y^{(3)} - h_2\sin\tau - \frac{a}{2}\cos\tau,$$
$$\frac{dy^{(3)}}{d\tau} = x^{(3)} + h_2\cos\tau - \frac{a}{2}\sin\tau,$$

из которых, кроме невозможности искомого периодического решения при отличном от нуля a, для постоянной g получается равенство $g = \frac{-a}{2}$. Следовательно, невозмущенное движение будет устойчивым при положительном a и неустойчивым при отрицательном a.

Следует привести одно замечание Ляпунова. Вопрос об устойчивости по отношению к переменным x, y разрешается непосредственно теоремами Ляпунова п. 8, 13 и рассмотрением функции $V = x^2 + y^2$. Однако было бы ошибочно полагать, что этим задача устойчивости будет уже потому разрешена, что всегда можно найти единственные ряды $x_s = f_s(x, y)$, расположенные по целым положительным степеням x, y и не содержащие постоянных членов так, чтобы формально удовлетворялись уравнения для x_s системы (29). В нашем случае уравнение

$$\left[-y - \frac{a}{2}x(x^2 + y^2)\right]\frac{\partial x_1}{\partial x} + \left[x - \frac{a}{2}y(x^2 + y^2)\right]\frac{\partial x_1}{\partial y} = -x_1 + x^2 + y^2$$

определяет формально удовлетворяющий ему ряд

$$(x^2 + y^2) + a(x^2 + y^2)^2 + 1\cdot 2\cdot a^2(x^2 + y^2)^3 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot a^3(x^2 + y^2)^4 + \ldots,$$

расходящийся при всяких отличных от нуля x и y.

59 [38]. В занимающем нас случае пары чисто мнимых корней, как мы видели, решение вопроса об устойчивости связано с воп-

росом о возможности некоторого периодического решения для системы (30). Но, к сожалению, все способы, какие можно предложить для решения последнего вопроса приводят к цели только в случае, если на него должен получиться отрицательный ответ. Если это периодическое решение существует, то невозмущенное движение устойчиво.

Допустим, что как-либо нам удалось установить существование интересующего периодического решения и тем самым существование и сходимость рядов (31). Тогда преобразование

$$r = z + u^{(2)}z^{(2)} + u^{(3)}z^{(3)} + \ldots,$$
$$x_s = z_s + u_s^{(1)}z + u_s^{(2)}z^2 + \ldots$$

приведет к уравнениям вида (32), в которых будут уничтожаться функции $Z^{(0)}$, $Z_s^{(0)}$. Мы приходим к случаю, подобному рассмотренному в п. 51.

В этом случае система (32) имеет полное интегральное соотношение с одной произвольной постоянной c:

$$z = c + \sum_m \sum_k P_m^{(k)} c^k \quad (m, k = 1, 2, \ldots), \tag{34}$$

где $P_m^{(k)}$ суть однородные формы m-й степени переменных $z_1, \ldots, z_n$, а коэффициенты форм $P_m^{(k)}$ суть конечные ряды синусов и косинусов целых кратностей θ.

Действительно, в уравнении, определяющем z,

$$\sum_s (q_{s1}z_1 + \ldots + q_{sn}z_n)\frac{\partial z}{\partial z_s} + \frac{\partial z}{\partial \theta} = zZ - \sum_s Z_s \frac{\partial z}{\partial z_s},$$

в правой части не будет членов, не зависящих от z_s, так как $Z^{(0)}$, $Z_s^{(0)}$ суть нули. Пусть результат подстановки z в правую часть представится в виде

$$-\sum_m \sum_k Q_m^{(k)} c^k;$$

$Q_m^{(k)}$ обозначает форму m-й степени переменных z_s, зависящую от тех $P_j^{(i)}$, для которых $i + j < m + k$.

Для определения форм $P_m^{(k)}$ получим уравнения

$$\sum_s (q_{s1}z_1 + \ldots + q_{sn}z_n) \frac{\partial P_m^{(k)}}{\partial z_s} + \frac{\partial P_m^{(k)}}{\partial \theta} = -Q_m^{(k)}.$$

Предполагая, что найдены все формы $P_j^{(i)}$, для которых $i + j < m + k$, и что они обладают описанными выше периодическими относительно θ коэффициентами, замечаем, что $Q_m^{(k)}$ представляет форму с такими же коэффициентами. Отсюда для определения коэффициентов формы $P_m^{(k)}$ мы получим неоднородную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, у которой согласно изложенному в п. 34 характеристическое уравнение будет иметь корнями выражения вида $-(m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n)$, где m_s — некоторые неотрицательные целые числа, имеющие суммой m, а $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ суть корни уравнения $\| q_{ij} - \delta_{ij}\varkappa \| = 0$; известные члены будут периодическими относительно θ. Такая система (из-за того, что все корни $\varkappa_s$ имеют отрицательные вещественные части) всегда допускает (и только одно) периодическое решение.

Указанным последовательным процессом определятся все коэффициенты $P_m^{(k)}$ и ряд для z. Докажем сходимость последнего для достаточно малых по абсолютной величине $c, z_1, \ldots, z_n$.

Систему дифференциальных уравнений для коэффициентов формы $P_m^{(k)}$ приведем к каноническому виду (п. 30). Коэффициенты формы $P_m^{(k)}$ будут связаны с новыми каноническими величинами A некоторыми формулами линейного преобразования, вообще с комплексными и ограниченными по модулю коэффициентами. В процессе последовательного определения коэффициентов A будем иметь дело с уравнением

$$\frac{dA}{d\theta} + (m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n)\, A = -B,$$

где B по формулам указанного линейного преобразования зависит от коэффициентов формы $Q_m^{(k)}$ и еще, быть может, от предыдущего A в виде дополнительного слагаемого. B будет периодической функцией θ с ограниченным модулем.

Отсюда

$$A = e^{-(m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n)\theta} \int\limits_{\theta}^{\infty} e^{(m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n)\theta} B\, d\theta.$$

Из этого выражения для A следует, что мы получим некоторые высшие границы для модулей коэффициентов форм $P_m^{(k)}$, годные в равной степени для всех вещественных значений θ. Следовательно, z будет голоморфной функцией величин $z_1, \ldots, z_n, c$ при достаточно малых значениях последних и для всех вещественных значений θ.

Обратимся к нашей задаче. Заменим первое из уравнений (32) полным интегральным соотношением (34). Остальные уравнения (32) после замены z согласно (34) примут вид

$$\frac{dz_s}{d\theta} = (q_{s1} + c_{s1})\, z_1 + \ldots + (q_{sn} + c_{sn})\, z_n + Z_s',$$

где c_{sr} суть голоморфные функции постоянной c, уничтожающиеся, когда c равно нулю, коэффициенты которых представляют вещественные периодические функции θ; Z_s' суть голоморфные функции величин $z_1, \ldots, z_n, c$, разложения которых начинаются с членов не ниже второго измерения относительно переменных z_s и имеют периодические относительно θ вещественные коэффициенты. Все названные функции голоморфны для всех вещественных значений θ.

Подобно п. 51 рассмотрим определенно-отрицательную квадратичную форму W, определенную уравнением

$$\sum_s (q_{s1}z_1 + \ldots + q_{sn}z_n)\frac{\partial W}{\partial z_s} = z_1^2 + \ldots + z_n^2.$$

Взятая в силу последних уравнений полная производная по θ от этой формы W будет

$$\frac{dW}{d\theta} = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + \\ + \sum_s (c_{s1}z_1 + \ldots + c_{sn}z_n)\frac{\partial W}{\partial z_s} + \sum_s Z_s' \frac{\partial W}{\partial z_s}.$$

Так как c_{sr} суть голоморфные функции c для всех вещественных значений θ, уничтожающиеся при $c = 0$, то можно назначить некоторую положительную постоянную h, чтобы при c, численно не превосходящем h, квадратичная форма

$$z_1^2 + \ldots + z_n^2 + \sum_s (c_{s1}z_1 + \ldots + c_{sn}z_n)\frac{\partial W}{\partial z_s}$$

была определенно-положительной относительно z_s для всех вещественных значений θ. При этом для достаточно малых по абсолютной величине значений z_s (пусть $\sum z_s^2 \leqslant R$) производная $\frac{dW}{d\theta}$ будет определенно-положительной. А это в силу теоремы Ляпунова (п. 11) доказывает, что невозмущенное движение будет устойчивым по отношению к переменным $z_1, \ldots, z_n$, независимо от значений c, лишь бы абсолютные значения последней были меньше h, причем достаточно близкое возмущенное движение будет асимптотически стремиться к движению $z = c$, $z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$.

Определенно-положительная функция $V = -W$ имеет не зависящие от c постоянные коэффициенты. Пусть l есть точный верхний предел функции V на сфере $z_1^2 + \ldots + z_n^2 = A$. Функция V, как не зависящая явно от θ, допускает бесконечно малый высший предел и, стало быть, для l найдется число ε такое, что при

$$\sum_s z_s^2 < \varepsilon$$

будет иметь место неравенство $V < l$. Так определенное число ε не зависит от c. Отсюда при всяком значении $|c|$, лишь бы оно было меньше h, для всякого положительного числа $A \leqslant R$ определенное выше не зависящее от c число ε обладает тем свойством, что при начальных возмущениях, подчиненных условию

$$\sum_s z_{s0}^2 < \varepsilon,$$

для любого вещественного θ будет выполняться неравенство

$$\sum_s z_s^2 < A.$$

Этим доказывается устойчивость невозмущенного движения по отношению к величинам $z_1, \ldots, z_n$, c, что равнозначно его устойчивости по отношению к $z, z_1, \ldots, z_n$, а тем самым и к начальным переменным $x, y, x_1, \ldots, x_n$.

60 [39, 41]. Пример. Рассмотрим дифференциальные уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y,$$

где X, Y суть голоморфные функции x, y, начинающиеся в своих разложениях с членов по меньшей мере второго порядка и удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

Согласно последнему соотношению существует некоторая голоморфная функция $\psi(x, y)$, начинающаяся в разложении с членов третьего порядка, такая, что

$$X = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Предложенные уравнения являются каноническими и будут иметь следующий интеграл:

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{\lambda}\psi(x, y) = c,$$

где c — некоторая постоянная, неизбежно положительная для достаточно малых по абсолютной величине значений x, y. Делая подстановку $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ и разрешая полученный интеграл относительно r, получим выражение r в виде периодической функции θ.

Следовательно, невозмущенное движение будет устойчивым (п. 59), что можно заметить также в силу общей теоремы Ляпунова об устойчивости, если за функцию V принять левую часть указанного определенно-положительного интеграла.

Пример. Даны уравнения

$$\frac{dx}{dt} + y = \alpha yz, \quad \frac{dy}{dt} - x = \beta xz, \quad \frac{dz}{dt} + kz = \gamma xy,$$

в которых k обозначает положительную, а α, β, γ — какие угодно вещественные постоянные.

Периодическое решение будем искать по способу, изложенному в п. 57. Замечая, что предложенные уравнения не меняются при замене x на $-x$ и y на $-y$, получаем

$$x = c\cos\tau + x^{(3)}c^3 + x^{(5)}c^5 + \ldots,$$

$$y = c\sin\tau + y^{(3)}c^3 + y^{(5)}c^5 + \ldots,$$

$$z = z^{(2)}c^2 + z^{(4)}c^4 + \ldots$$

Для определения функции $z^{(2)}$ получаем уравнение

$$\frac{dz^{(2)}}{d\tau} + kz^{(2)} = \frac{\gamma}{2}\sin 2\tau,$$

которое имеет периодическое решение

$$z^{(2)} = \frac{\gamma}{2(k^2+4)}(k\sin 2\tau - 2\cos 2\tau).$$

Для определения $x^{(3)}$, $y^{(3)}$ имеем уравнения

$$\frac{dx^{(3)}}{d\tau} + y^{(3)} = -h_2\sin\tau + \alpha z^{(2)}\sin\tau,$$

$$\frac{dy^{(3)}}{d\tau} - x^{(3)} = h_2\cos\tau + \beta z^{(2)}\cos\tau.$$

Подставляя в правые части этих уравнений найденное выражение для $z^{(2)}$, имеем при разложении по синусам и косинусам кратных дуг выражений $X^{(3)} = \alpha z^{(2)}\sin\tau$ и $Y^{(3)} = \beta z^{(2)}\cos\tau$ следующие интересующие нас члены:

$$X^{(3)} = \frac{\alpha\gamma k}{4(k^2+4)}\cos\tau + \ldots, \quad Y^{(3)} = \frac{\beta\gamma k}{4(k^2+4)}\sin\tau + \ldots,$$

откуда

$$g = \frac{(\alpha+\beta)\gamma k}{8(k^2+4)}.$$

Поэтому (п. 56) если $(\alpha+\beta)\gamma < 0$, то невозмущенное движение устойчиво, а если $(\alpha+\beta)\gamma > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво. Если $(\alpha+\beta)\gamma = 0$, то предложенная система уравнений допускает интеграл

$$x^2 + y^2 = \text{const},$$

и, следовательно, если делается подстановка $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, то r будет периодической функцией θ $(r = c)$. В п. 55 мы установили, что если $u^{(\nu)}$ будут получаться периодическими (в рассматриваемом случае все $u^{(\nu)} = 0$ при $\nu = 2, 3, \ldots$), то искомое периодическое решение (31) будет формально всегда существовать (можно доказать, что при этом ряды (31) будут сходящимися). Мы должны заключить (п. 39), что невозмущенное движение будет при $(\alpha+\beta)\gamma = 0$ устойчивым.

З а м е ч а н и е. Критический случай, когда уравнения первого приближения имеют постоянные коэффициенты, а характеристическое уравнение имеет нулевой корень второй кратности с непростым элементарным делителем, был рассмотрен Ляпуновым [1]) для $n = 2$. Другие критические случаи исследовали И. Г. Малкин [2]) и Г. В. Каменков [3]). Случаи эти, как представляющие специальный интерес, мы рассматривать не будем.

---

[1]) Л я п у н о в А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Мат. сб.— 1883.— Т. 1, № 2 // Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.: Гостехиздат, 1950.

[2]) М а л к и н И. Г. Некоторые вопросы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова // Сб. тр. Казан. авиац. ин-та.— 1937.— № 7.

М а л к и н И. Г. Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях // Прикл. мат. и механ.— 1942.— Т. 6, № 6.

[3]) К а м е н к о в Г. В. Об устойчивости движения // Сб. тр. Казан. авиац. ин-та.— 1939.— № 9.

ГЛАВА 9

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ

Характеристичные числа функций

Методы исследования устойчивости неустановившихся движений разработаны с меньшей полнотой, чем методы, предложенные для установившихся движений. Имеющиеся здесь теоремы существования, не решая вопроса эффективно, дают в известном смысле ясное представление о том, что может или должно иметь место, а этого в отдельных задачах достаточно для их полного решения.

61 [6]. Будем рассматривать функции x вещественного переменного t, определенные для всякого t, большего или равного t_0. Причем будем рассматривать только такие функции, для модулей которых при изменении t от t_0 до какого угодно данного числа T, большего t_0, существовали бы высшие границы.

Функцию называют *ограниченной*, если ее модуль при $t > t_0$ остается всегда меньше некоторой постоянной. Функцию, модуль которой может делаться бо́льшим всякой данной положительной величины, как бы она велика ни была, называют *неограниченной*. Ограниченную функцию, которая с беспредельным возрастанием t стремится к нулю, называют *исчезающей*.

Непосредственно из этих определений вытекают предложения:

Если x есть ограниченная функция t, то $xe^{-\lambda t}$ при всяком положительном λ есть функция исчезающая.

Если x не есть исчезающая функция t, то $xe^{\lambda t}$ при всяком положительном λ есть функция неограниченная.

Лемма. *Если*

$$z = xe^{\lambda t}$$

представляет функцию, исчезающую при $\lambda = \lambda_1$ *и неограниченную при* $\lambda = \lambda'$, *причем* λ_1 *и* λ' *суть некоторые вещественные постоянные, то всегда возможно найти такое вещественное число* λ_0, *что функция* z *при* $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ *будет неограниченной для всякого положительного постоянного* ε *и исчезающей для всякого отрицательного постоянного* ε.

Доказательство. Между числами λ_1 и λ' всегда можно вставить два бесконечных ряда чисел:

$$\text{неубывающий: } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$
$$\text{и невозрастающий: } \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots,$$

таких, чтобы каждое число первого ряда было меньше каждого числа второго; чтобы функция

$$xe^{\lambda_n t}$$

для всякого n была исчезающей, а функция

$$xe^{\lambda^{(n)} t}$$

для всякого n была неограниченной и, наконец, чтобы разность

$$\lambda^{(n)} - \lambda_n$$

для достаточно большого n была сколь угодно малой. Этого можно достичь последовательными вставками пары чисел на интервалах $(\lambda_s, \lambda^{(s)})$.

Эти два ряда определяют сечение λ_0, не меньшее ни одного из чисел первого ряда и не большее ни одного из чисел второго. Число λ_0 и будет искомым. Это число Ляпунов предложил называть *характеристичным числом* функции x.

Если $xe^{\lambda t}$ есть исчезающая или неограниченная функция при всяком вещественном λ, то условимся в первом случае характеристичному числу приписывать значение $+\infty$, во втором $-\infty$.

Примеры.

Для всякой отличной от нуля постоянной характеристичное число есть нуль.

Для всякой ограниченной функции характеристичное число есть нуль.

Для полинома конечной степени характеристичное число есть нуль.

Для функции $e^{\pm t \sin t}$ характеристичное число равно -1.

Из определения характеристичного числа следует, что если надлежащим выбором t, больше произвольно заданного числа, величину $|\lambda - f(t)|$ можно сделать сколь угодно малой и если при этом для всякого положительного постоянного ε, как бы мало оно ни было, можно найти такое число T, что $\lambda - f(t) < \varepsilon$ для всех $t > T$, то λ есть характеристичное число функции $e^{-tf(t)}$.

62 [6]. В случае, когда характеристичные числа данных функций конечны, можно доказать следующие предложения:

Характеристичное число суммы двух функций равно наименьшему из характеристичных чисел этих функций, когда эти числа различны, и не меньше их, когда они равны.

В самом деле, пусть λ_1 и λ_2 суть характеристичные числа функций x_1 и x_2 и пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Тогда функция

$$(x_1 + x_2)\, e^{(\lambda_1+\varepsilon)t} = x_1 e^{(\lambda_1+\varepsilon)t} + x_2 e^{(\lambda_2+\eta)t},$$

где $\eta = \lambda_1 - \lambda_2 + \varepsilon$, будет исчезающей для всякого отрицательного постоянного ε. Поэтому характеристичное число суммы $x_1 + x_2$ во всяком случае не меньше λ_1. Если характеристичные числа λ_1 и λ_2 не равны между собой, то делая ε положительным и удовлетворяющим неравенству

$$0 < \varepsilon < \lambda_2 - \lambda_1,$$

имеем, что при этом η будет отрицательно и, следовательно, первое слагаемое в правой части последнего равенства будет неограниченным, а второе исчезающим; при таком условии характеристичное число суммы $x_1 + x_2$ равно λ_1.

Характеристичное число произведения двух функций не меньше суммы их характеристичных чисел.

В самом деле, пусть снова λ_1 и λ_2 являются характеристичными числами функций x_1 и x_2. Функция

$$x_1 x_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2+\varepsilon)t} = x_1 e^{\left(\lambda_1+\frac{\varepsilon}{2}\right)t} x_2 e^{\left(\lambda_2+\frac{\varepsilon}{2}\right)t}$$

есть исчезающая для всякого отрицательного ε. Это и доказывает предложение.

Что характеристичное число произведения может быть больше суммы характеристичных чисел множителей, доказывается примером

$$x_1 = e^{t\sin t}, \quad x_2 = e^{-t\sin t}.$$

Каждая из этих функций имеет характеристичное число -1, а характеристичное число их произведения равно нулю.

Следствие. *Сумма характеристичных чисел функций x и $\frac{1}{x}$ не больше нуля.*

Если

$$x = e^{-(f+i\varphi)t},$$

где $i = \sqrt{-1}$, а f и φ суть некоторые вещественные функции t, то для того, чтобы сумма характеристичных чисел функций x и $\frac{1}{x}$ была равной нулю, необходимо и достаточно, чтобы функция f с беспредельным возрастанием t приближалась к некоторому пределу.

Достаточность очевидна, ибо если функция f стремится с неограниченным возрастанием t к некоторому пределу λ, то последний служит характеристичным числом функции x.

Необходимость следует из того, что если λ и $-\lambda$ суть характеристичные числа функций x и $1/x$, то при всяком данном положительном ε, как бы мало оно ни было, функции

$$e^{-t(\varepsilon-\lambda+f)} \text{ и } e^{-t(\varepsilon+\lambda-f)}$$

будут исчезающими, и последнее возможно только при условии

$$|\lambda - f| < \varepsilon$$

для всех значений t, больших некоторого числа.

Если сумма характеристичных чисел функций x и $1/x$ равна нулю, то характеристичное число произведения функции x на какую-либо функцию y равняется сумме характеристичных чисел этих последних.

Пусть λ, μ, S суть характеристичные числа функций x, y, $z = xy$. Тогда, прилагая предложение о характеристичном числе произведения к функциям

$$z = xy, \ y = z\frac{1}{x},$$

найдем

$$S \geqslant \lambda + \mu, \quad \mu \geqslant S - \lambda,$$

откуда

$$S = \lambda + \mu.$$

Пусть x есть интегрируемая функция t. Условимся рассматривать интеграл

$$u = \int_{t_0}^{t} x\,dt,$$

если характеристичное число функции x отрицательно или нуль, и интеграл

$$u = \int_{t}^{\infty} x\,dt,$$

если это число положительно.

Характеристичное число интеграла не меньше характеристичного числа подынтегральной функции.

Пусть λ есть характеристичное число подынтегральной функции x. Если $\lambda > 0$, рассмотрим интеграл

$$u = \int_{t}^{\infty} [xe^{(\lambda-\eta)t}]\, e^{-(\lambda-\eta)t} dt,$$

где $0 < \eta < \lambda$. Функция $xe^{(\lambda-\eta)t}$ при всякой положительной постоянной η будет исчезающей и, следовательно, ограниченной. Обозначая через M высший предел ее модуля при $t > t_0$, имеем

$$|u| < M\int_{t}^{\infty} e^{-(\lambda-\eta)t} dt = \frac{M}{\lambda-\eta} e^{-(\lambda-\eta)t}.$$

Следовательно, функция

$$ue^{(\lambda-\varepsilon)t}$$

будет исчезающей при всяком ε, большем η. Но η можно выбрать сколь угодно малым. Поэтому последняя функция есть исчезающая при всяком положительном ε. А это и доказывает утверждение для положительного λ.

Если $\lambda \leqslant 0$, то для произвольного положительного η

$$|u| < M \int_{t_0}^{t} e^{-(\lambda-\eta)t} dt = \frac{M}{\eta-\lambda} e^{-(\lambda-\eta)t} + \text{const},$$

откуда

$$ue^{(\lambda-\varepsilon)t}$$

есть исчезающая функция при всяком ε, большем η, а следовательно, и при всяком положительном ε.

Характеристичные числа решений

63 [7]. Мы будем рассматривать частные решения линейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{35}$$

с коэффициентами p_{sr} — вещественными, ограниченными, непрерывными функциями t.

Рассмотрим какое-либо решение

$$x_1, \ldots, x_n$$

линейных дифференциальных уравнений (35). Под характеристичным числом этого решения условимся понимать наименьшее из характеристичных чисел функций, входящих в это решение.

Всегда найдется система n линейно независимых решений.

Теорема. *Всякое нетривиальное решение системы дифференциальных уравнений* (35) *имеет конечное характеристичное число.*

Доказательство. Сначала рассмотрим вещественное решение, в котором все x_s суть вещественные функции t.

Введем новые переменные

$$z_s = x_s e^{\lambda t},$$

где λ обозначает некоторую вещественную постоянную. Тогда заданные уравнения (35) преобразуются в следующие:

$$\frac{dz_s}{dt} = p_{s1}z_1 + \ldots + (p_{ss} + \lambda) z_s + \ldots + p_{sn}z_n,$$

из которых выведем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_s z_s^2 = \sum_{s,\, r} (p_{sr} + \delta_{sr}\lambda) z_s z_r.$$

Вторая часть этого равенства представляет некоторую вещественную квадратичную форму величин z с коэффициентами, зависящими от λ и t. В силу предположенной ограниченности функций p_{sr}, всегда можно найти такие значения $\lambda = \lambda'$, при которых все главные диагональные миноры дискриминанта

$$\left\| \frac{p_{sr} + p_{rs}}{2} + \delta_{sr}\lambda \right\|$$

будут положительными для всех рассматриваемых значений t. Для такого значения λ' эта квадратичная форма будет определенно-положительной.

Найдутся также такие значения $\lambda = \lambda_1$, при которых главные диагональные миноры будут знакопеременны, начиная с отрицательного $p_{11} + \lambda_1$; для такого λ_1 стоящая в правой части последнего равенства квадратичная форма будет определенно-отрицательной.

Отсюда, при всяком $\lambda = \lambda' + \frac{\varepsilon}{2}$, где ε — произвольная положительная постоянная, имеем неравенство

$$\frac{d}{dt} \sum_s z_s^2 > \varepsilon \sum_s z_s^2,$$

из которого интегрированием выводим

$$\sum_s z_s^2 > Ce^{\varepsilon t}$$

для всякого рассматриваемого значения t; C обозначает некоторую положительную постоянную, не превосходящую $\sum z_{s0}^2 e^{-\varepsilon t_0}$, где z_{s0} — начальные значения переменных z_s, отвечающие начальному моменту t_0.

При $\lambda = \lambda_1 - \frac{\varepsilon}{2}$ имеем

$$\frac{d}{dt} \sum_s z_s^2 < -\varepsilon \sum_s z_s^2,$$

откуда

$$\sum_s z_s^2 < C' e^{-\varepsilon t}$$

для всякого рассматриваемого значения t; C' обозначает положительную постоянную, не меньшую $e^{\varepsilon t_0} \sum z_{s0}^2$.

Следовательно, для $\lambda = \lambda' + \frac{\varepsilon}{2}$, при произвольном положительном ε, среди функций z_s найдется по меньшей мере одна неограниченная, а для $\lambda = \lambda_1 - \frac{\varepsilon}{2}$ все функции z_s будут исчезающими. Таким образом, наименьшее из характеристичных чисел функций x_s рассматриваемого вещественного нетривиального решения системы (35) не меньше λ_1 и не больше λ'.

Чтобы обнаружить справедливость теоремы вообще, достаточно заметить, что всякое комплексное частное решение

$$x_s = u_s + \sqrt{-1}\, v_s \quad (s = 1, \ldots, n)$$

составляется из двух вещественных частных решений u_s и v_s.

Примечание. Теорема легко распространяется на случай комплексных p_{sr}, лишь бы они были непрерывными и ограниченными по модулю функциями t.

Следствие. *Если коэффициенты* p_{sr} *дифференциальных уравнений* (35) *таковы, что главные диагональные миноры определителя*

$$\| p_{sr} + p_{rs} \|$$

знакопеременны, причем p_{11} *отрицательно для всех значений* t, *превышающих некоторую постоянную* t_0, *то характеристичные числа частных решений такой системы все положительны* *.

64 [8]. Пусть для уравнений (35) найдена какая-либо система линейно независимых решений

$$x_{1k}, \ldots, x_{nk} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Составляя из этих решений надлежащие линейные комбинации, мы можем вывести всякую другую полную систему независимых решений.

Каждая система независимых решений имеет n характеристичных чисел, отвечающих входящим в нее n независимым частным решениям. Если все эти характеристичные числа различны, то характеристичное число любого другого частного решения, выражающегося линейно через эти независимые решения, согласно предложению о характеристичном числе суммы (п. 62), будет равняться какому-либо из характеристичных чисел такой системы независимых решений. Поэтому система уравнений (35) не может иметь больше n нетривиальных решений, характеристичные числа которых были бы все различны.

Если система независимых решений имеет одинаковые характеристичные числа, то может случиться, что можно найти новую систему независимых частных решений, сумма характеристичных чисел которой будет больше аналогичной суммы для начальной. Так как число характеристичных чисел ограничено (не может быть больше n), то существует полная система частных независимых решений, для которой сумма характеристичных чисел всех составляющих решений достигает своего наибольшего значения; такую систему независимых решений назовем *нормальной*.

Система независимых решений, характеристичные числа которой все различны, есть, очевидно, нормальная.

65 [8]. Рассмотрим определитель, составленный из функций x_{sr} системы независимых частных решений,

$$\Delta = \| x_{sr} \|.$$

Полная производная по t от него в силу уравнений (35) есть

$$\Delta' = \Delta \sum_{s=1}^{n} p_{ss}.$$

Интегрирование дает формулу Лиувилля

$$\Delta = Ce^{\int \Sigma p_{ss} dt},$$

где C — некоторая постоянная.

Обозначим через

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$$

характеристичные числа системы независимых решений $x_{1k}, \ldots, x_{nk}$ ($k = 1, \ldots, n$). Предложения о характеристичном числе суммы и произведения (п. 62), примененные к формуле $\Delta = \| x_{sr} \|$, приводят к заключению, что характеристичное число Δ не меньше суммы

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

Другими словами, *сумма характеристичных чисел системы независимых решений уравнений* (35) *не превосходит характеристичного числа функции*

$$e^{\int \Sigma p_{ss} dt}.$$

Следствие. *Если характеристичное число последней функции отрицательно, то среди характеристичных чисел λ_s будет существовать по меньшей мере одно отрицательное.*

Следствие. *Всякая система n независимых решений, для которой сумма характеристичных чисел всех решений равна характеристичному числу функции*

$$e^{\int \Sigma p_{ss} dt},$$

есть нормальная.

Следует иметь в виду, что не всегда нормальная система обладает таким свойством. Например, для системы уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = (\sin \ln t + \cos \ln t)\, x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (\sin \ln t + \cos \ln t)\, x_1$$

функция

$$e^{\int \Sigma p_{ss} dt},$$

будучи постоянной, имеет характеристичное число, равное нулю, а система независимых решений

$$x_{11} = e^{t \sin \ln t}, \quad x_{21} = e^{t \sin \ln t},$$

$$x_{12} = e^{-t \sin \ln t}, \quad x_{22} = -e^{-t \sin \ln t},$$

являясь, очевидно, нормальной (так как всякая их линейная комбинация не может увеличить общего им всем характеристичного числа), имеет сумму характеристичных чисел (именно -2) меньше нуля. Характеристичные числа решений определяются здесь подобно последнему из примеров п. 61; достижимые при t, большем любого заданного наперед числа, высшие пределы функций $\pm \sin \ln t$ равны $+1$.

Характеристичные числа системы независимых решений, определяя в известном смысле рост функций x_{sr} при неограниченно возрастающем t, непосредственно дают условия устойчивости или неустойчивости тривиального решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы (35).

Если все характеристичные числа системы независимых решений положительны, то все функции x_{sr} будут исчезающими, а невозмущенное движение $(x_1 = \ldots = x_n = 0)$ устойчивым.

Если среди характеристичных чисел системы независимых решений найдется хотя бы одно отрицательное, то среди функций x_{sr} найдется по меньшей мере одна неограниченная, и, следовательно, невозмущенное движение будет неустойчиво.

Таким образом, задача об устойчивости или неустойчивости для линейных уравнений с переменными коэффициентами сводится к вопросу о вычислении по меньшей мере знака наименьшего характеристичного числа какой-либо из полных систем ее независимых частных решений. Задача эта не является разрешенной.

Теорема. *Если в системе линейных уравнений* (35) *коэффициенты стремятся к определенным пределам c_{sr} при неограниченном увеличении t, то ее наинизшее характеристичное число совпадает с наинизшим характеристичным числом предельной системы уравнений*

$$\frac{dx_s}{dt} = c_{s1}x_1 + \ldots + c_{sn}x_n \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Доказательство. Сделаем подстановку

$$z_s = x_s e^{\eta t},$$

где η обозначает некоторое постоянное число. Заданные уравнения (35) преобразуются при этом в систему

$$\frac{dz_s}{dt} = p_{s1}z_1 + \ldots + (p_{ss} + \eta)\, z_s + \ldots + p_{sn}z_n, \tag{36}$$

а предельная система теоремы при той же подстановке преобразуется в предельную систему для (36):

$$\frac{dz_s}{dt} = c_{s1}z_1 + \ldots + (c_{ss} + \eta)\, z_s + \ldots + c_{sn}z_n. \tag{37}$$

Обозначим корни характеристического уравнения системы (37)

$$\| c_{sr} - \delta_{sr} (\varkappa - \eta) \| = 0$$

через

$$\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n.$$

Если не существует никаких целых неотрицательных чисел $m_1, \ldots$ $\ldots, m_n$, имеющих в сумме 2, для которых уничтожалось бы выражение

$$m_1\varkappa_1 + \ldots + m_n\varkappa_n,$$

то согласно п. 34 будет существовать квадратичная форма W с постоянными коэффициентами, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_s \frac{\partial W}{\partial z_s}[c_{s1}z_1 + \ldots + (c_{ss} + \eta) z_s + \ldots + c_{sn}z_n] = z_1^2 + \ldots + z_n^2.$$

Форма W будет определенно-отрицательной, если вещественные части всех корней $\varkappa_s$ отрицательны (п. 35); она будет для некоторых значений переменных $z_1, \ldots, z_n$ принимать положительные значения, если среди корней $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ будет иметься хотя бы один корень с положительной вещественной частью.

Полная производная по t от такой функции W в силу уравнений (36) будет

$$\frac{dW}{dt} = z_1^2 + \ldots + z_n^2 + \sum_{sr} (p_{sr} - c_{sr}) z_r \frac{\partial W}{\partial z_s}.$$

Так как W представляет квадратичную форму с постоянными коэффициентами, то найдется такое отличное от нуля положительное число ε, что при выполнении неравенств

$$| p_{sr} - c_{sr} | < \varepsilon$$

правая часть последнего соотношения будет представлять определенно-положительную квадратичную форму переменных $z_1, \ldots, z_n$.

По условию теоремы коэффициенты p_{sr} стремятся с неограниченным ростом t к числам c_{sr}. Поэтому для положительного числа ε, сколь бы мало оно ни было, найдется такое t_0, что при значениях $t > t_0$ абсолютные значения всех величин $p_{sr} - c_{sr}$ будут меньше ε и, следовательно, для всех таких значений t производная $\frac{dW}{dt}$ будет представлять определенно-положительную функцию.

А это в силу общих теорем Ляпунова об устойчивости и неустойчивости заставляет заключить, что *если при сделанном предположении о корнях* $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ *наибольшая из их вещественных частей отрицательна, то невозмущенные движения как в системе* (37), *так и в системе* (36) *устойчивы*; *если же наибольшая вещественная часть корней* $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ *положительна, то невозмущенные движения как в системе* (37), *так и в системе* (36) *неустойчивы.*

Сделанное предположение о корнях $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ не будет выполняться лишь для конечного числа значений η. Из вида примененной нами подстановки мы должны заключить, что наименьшие характеристичные числа функций $z_1, \ldots, z_n$, когда $x_1, \ldots, x_n$ принимаются за частные решения как заданных уравнений, так и предельной системы, могут равняться нулю одновременно при одном определенном значении постоянной η. А это доказывает теорему *.

66. Если коэффициенты p_{sr} имеют вид

$$p_{sr} = c_{sr} + \varepsilon f_{sr},$$

где ε есть некоторый параметр, постоянные c_{sr} не зависят от ε, а f_{sr} — ограничены, то к уравнениям (35) можно отнести уравнения с постоянными коэффициентами c_{sr}. Делая о корнях λ_s уравнения

$$\| c_{sr} - \delta_{sr}\lambda \| = 0$$

прежнее допущение, что они удовлетворяют условию

$$m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n \neq 0$$

при любых целых неотрицательных числах $m_1, \ldots, m_n$, имеющих в сумме 2, и строя квадратичную форму

$$V = \frac{1}{2}\sum \alpha_{rs}x_r x_s \qquad (\alpha_{rs} = \alpha_{sr}),$$

удовлетворяющую уравнению

$$\sum_s (c_{s1}x_1 + \ldots + c_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s} = x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$

замечаем, что при достаточно малом $|\varepsilon|$ и положительном μ, меньшем 1, форма $V' - \mu(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$ может быть сделана положительной для произвольных значений переменных. При этом *асимптотическая устойчивость или неустойчивость невозмущенного движения* ($x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$) *уравнений с постоянными коффициентами* c_{sr} *отвечают таковым системы* (35); *величина* ε, *для которой такое соответствие безусловно существует, определяется* n *неравенствами* *

$$D_r = \begin{vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1r} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ h_{r1} & \ldots & h_{rr} \end{vmatrix} > 0 \qquad (r = 1, \ldots, n),$$

где

$$h_{rs} = \delta_{rs} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_i (\alpha_{ri}f_{is} + \alpha_{si}f_{ir}).$$

Дополнительно можно заметить, что ограниченные функции f_{sr} могут быть функциями не только t, но и переменных

$x_1, \ldots, x_n$, стесненных всегда предполагающимися условиями:

$$\text{при } t \geqslant t_0 \quad \sum x_s^2 \leqslant A.$$

В этом случае уравнения (35) будут представлять «линеаризацию» некоторых нелинейных уравнений, а неравенства $D_r > 0$ $(r = 1, \ldots, n)$ будут определять ε и A, для которых указанное соответствие безусловно существует. Во многих задачах бывает достаточно за постоянные c_{sr} принять значения коэффициентов p_{sr} для некоторого фиксированного момента времени и для нулевых значений переменных x_i *.

Можно указать еще один прием для решения задачи устойчивости для линейного уравнения (35) с переменными коэффициентами $p_{sr}(t)$. Для каждого значения независимой переменной t уравнение

$$\Delta(t) = \| p_{sr} - \delta_{sr}\lambda \| = 0$$

определяет n корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, изменяющихся с изменением времени t.

Если ни для какого $t \geqslant t_0$ не существует целых неотрицательных чисел $m_1, \ldots, m_n$, равных в сумме 2, для которых уничтожается выражение $m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n$, то для таких значений t будет существовать квадратичная форма

$$V = \sum a_{sr} x_s x_r \quad (a_{sr} = a_{rs})$$

с ограниченными коэффициентами a_{rs}, зависящими от t, удовлетворяющая уравнению в частных производных первого порядка

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$

в котором t играет роль параметра.

Форма V будет отрицательна, если вещественные части всех корней λ_s отрицательны; для некоторых значений переменных x_s она будет принимать положительные значения, если среди корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ существует хотя бы один корень с положительной вещественной частью. Ее полная производная по времени в силу уравнений (35) есть

$$\frac{dV}{dt} = x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Главные диагональные миноры дискриминанта этой квадратичной формы суть

$$D_r = \begin{vmatrix} a'_{11} + 1 & \ldots & a'_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{r1} & \ldots & a'_{rr} + 1 \end{vmatrix} \quad (r = 1, \ldots, n),$$

где

$$a'_{rs} = \frac{da_{rs}}{dt}.$$

Пусть для всех рассматриваемых $t \geqslant t_0$ производные a'_{rs} ограничены, а все D_r не меньше некоторого положительного числа; производная V_r по известному критерию Сильвестра будет тогда определенно-положительной квадратичной формой переменных $x_1, \ldots, x_n$. При этих условиях *если V представляет определенно-отрицательную квадратичную форму, то невозмущенное движение устойчиво: если V еще и допускает бесконечно малый высший предел, то устойчивость невозмущенного движения будет асимптотической. Если же форма V допускает бесконечно малый высший предел и может принимать положительное значение, то невозмущенное движение неустойчиво* *.

Не лишне заметить, что условия устойчивости могут быть в отдельных случаях улучшены путем варьирования функции V.

Правильные системы

67. Согласно предложению о характеристичном числе произведения (п. 62) сумма характеристичных чисел функций

$$e^{\int \Sigma p_{ss} dt} \quad \text{и} \quad e^{-\int \Sigma p_{ss} dt}$$

не больше нуля. Поэтому если μ обозначает характеристичное число второй из этих функций, то сумма S характеристичных чисел решений нормальной системы не может превосходить числа $-\mu$. Притом равенство $S = -\mu$ возможно только при условии, что сумма характеристичных чисел рассматриваемых двух функций равна нулю.

Систему дифференциальных уравнений (35) условимся называть *правильной*, если для нее существует равенство

$$S + \mu = 0;$$

в противном случае — *неправильной*.

Уравнения с постоянными коэффициентами являются, очевидно, правильными. В дальнейшем будет доказано предложение Ляпунова, что всякая система уравнений (35), в которой все коэффициенты суть периодические функции t с одним и тем же вещественным периодом, есть правильная.

Пусть предложена правильная система (35). Через λ_k обозначим характеристичное число решения

$$x_{1k}, \ldots, x_{nk}$$

нормальной системы ее независимых решений ($k = 1, \ldots, n$). Согласно определению правильной системы сумма $S = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ равняется взятому с обратным знаком характеристичному числу функции

$$e^{-\int \Sigma p_{ss} dt}.$$

Обозначим через Δ определитель, составленный из функций x_{sr} нормальной системы решений уравнений (35)

$$\Delta = \| x_{sr} \|;$$

его минор (со знаком), соответствующий элементу x_{ij}, обозначим через Δ_{ij}.

Рассмотрим функции

$$y_{sr} = \frac{\Delta_{sr}}{\Delta} \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что при всяком фиксированном r функции $y_s = y_{sr}$ удовлетворяют присоединенной системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_s}{dt} + p_{1s}y_1 + \ldots + p_{ns}y_n = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n).$$

Решения y_{sr} присоединенной и x_{sr} заданной системы удовлетворяют очевидным соотношениям

$$\sum_s x_{sk} y_{sr} = \delta_{kr}.$$

Обозначим через μ_r характеристичное число решения $y_{1r}, \ldots$ $\ldots, y_{nr}$ присоединенной системы уравнений. Из предыдущих соотношений при $k = r$ имеем

$$\mu_r + \lambda_r \leqslant 0.$$

Если заданная система уравнений есть правильная, то из формулы

$$y_{sr} = \frac{\Delta_{sr}}{\Delta} = Ce^{-\int \Sigma p_{ss} dt} \Delta_{sr} \quad (s = 1, \ldots, n)$$

согласно теоремам о характеристичных числах произведений и сумм имеем:

$$\text{хар. число } y_{sr} \geqslant -\lambda_r \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Неравенство это справедливо при любом индексе s, а следовательно, и при его значении, отвечающем среди $y_{1r}, \ldots, y_{nr}$ функции с наименьшим характеристичным числом μ_r, которое по определению принимается за характеристичное число решения $y_{1r}, \ldots$ $\ldots, y_{nr}$:

$$\mu_r \geqslant -\lambda_r.$$

Это неравенство совместно с установленным ранее приводит к соотношению

$$\mu_r + \lambda_r = 0 \quad (r = 1, \ldots, n).$$

Отсюда сумма характеристичных чисел $\mu_1 + \ldots + \mu_n$ присоединенной системы равняется взятому с обратным знаком характеристичному числу функции $e^{\int \Sigma p_{ss} dt}$. А это доказывает, что система, присоединенная к правильной системе уравнений, есть также правильная, а y_{sr} представляют нормальную систему решений присоединенной системы.

Замечание. Если система (35) есть правильная, то сумма характеристичных чисел функций

$$e^{\int \Sigma p_{ss} dt} \text{ и } e^{-\int \Sigma p_{ss} dt}$$

равняется нулю. Но это условие является только необходимым для правильных систем, в чем убеждает пример неправильной системы п. 65.

68. Пример. Рассмотрим свойства уравнений в вариациях для канонических уравнений Гамильтона (п. 4)

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_j}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_i} \xi_i + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} \eta_i \right), \\ \frac{d\eta_j}{dt} &= -\sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i} \xi_i + \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} \eta_i \right), \end{aligned} \tag{38}$$

где коэффициенты суть непрерывные ограниченные вещественные функции t. Уравнения эти имеют существенное значение в исследованиях устойчивости движений консервативных механических систем.

Пуанкаре установил, что если ξ_s, η_s и ξ_s', η_s' суть какие-либо два частных решения уравнений в вариациях (38), то

$$\sum_s (\xi_s \eta_s' - \eta_s \xi_s') = C,$$

где C — некоторая постоянная. Доказательство элементарно и осуществляется дифференцированием по t.

Для каждого ξ_s, η_s всегда найдется по меньшей мере одно-другое решение ξ_s', η_s', для которого постоянная C в инварианте Пуанкаре будет отлична от нуля. В самом деле, для нетривиального решения ξ_s, η_s какая-либо из величин ξ_{s0}, η_{s0} начальных значений в момент t_0 будет отлична от нуля; тогда второе частное решение всегда можно определить начальными значениями ξ_{s0}', η_{s0}' так, чтобы интересующая нас постоянная была отлична от нуля.

Пусть для двух решений уравнений в вариациях ξ_s, η_s и ξ_s', η_s' значение постоянной C отлично от нуля, а λ и λ' суть отвечающие этим решениям характеристичные числа. Пользуясь инвариантом Пуанкаре, выводим неравенство

$$\lambda + \lambda' \leqslant 0.$$

Следовательно, если уравнения в вариациях (38) имеют хотя бы одно частное решение с отличным от нуля характеристичным числом, то для них будет существовать тогда по меньшей мере одно решение с отрицательным характеристичным числом — невозмущенное движение будет при этом неустойчивым (в первом приближении).

Невозмущенное движение может быть устойчивым лишь в случае, когда характеристичные числа всех решений системы (38) *суть нули.*

След, то есть $\sum p_{ss}$, для уравнений (38) всегда равен нулю; поэтому, если невозмущенное движений устойчиво, то сумма характеристичных чисел любой системы независимых решений уравнений (38) равняется взятому с обратным знаком характеристичному числу выражения

$$e^{-\int \Sigma p_{ss}\,dt}.$$

Следовательно, *для устойчивого невозмущенного движения система уравнений в вариациях* (38) *всегда будет правильной* (п. 67), а всякая полная система независимых решений уравнений (38) — нормальной (п. 67 и 65).

Обозначим через

$$\xi_{sr},\ \eta_{sr} \quad (r = 1, \ldots, 2n)$$

систему независимых решений уравнений (38), определенных для $t = t_0$ значениями

$$\xi_{sr}^0 = \delta_{sr}, \qquad \eta_{sr}^0 = \delta_{s,\,r-n}.$$

Если невозмущенное движение устойчиво, то решения ξ_{sr}, η_{sr} имеют не только равные нулю характеристичные числа, но являются также и ограниченными. Поэтому новая система переменных

$$z_r = \sum_s (\xi_s\eta_{sr} - \eta_s\xi_{sr}) \qquad (r = 1, \ldots, 2n),$$

определенная линейным преобразованием с ограниченными коэффициентами, с равным $+1$ определителем преобразования и с ограниченными минорами последнего, имеет такое же обратное преобразование. Переменные z_s удовлетворяют уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\frac{dz_r}{dt} = 0 \qquad (r = 1, \ldots, 2n).$$

Следовательно, *если невозмущенное движение устойчиво, то отвечающие уравнения в вариациях Пуанкаре* (38) *являются приводимыми* (*при помощи линейных преобразований с ограниченными коэффициентами, допускающих такое же обратное преобразование*) *к системе уравнений с постоянными коэффициентами.*

Зададимся вопросом о группе преобразований, описывающей возмущенные движения консервативных систем.

Решения ξ_s, η_s уравнений в вариациях Пуанкаре (38), определенные начальными данными ξ_s^0, η_s^0, суть

$$\xi_s = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j^0 \xi_{sj} + \eta_j^0 \xi_{s,\, n+j}),$$

$$\eta_s = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j^0 \eta_{sj} + \eta_j^0 \eta_{s,\, n+j}) \qquad (s = 1, \ldots, n).$$

Определитель этих линейных преобразований есть $\Delta = 1$. Значит, соотношения между ξ_s, η_s и ξ_s^0, η_s^0 представляют группу унимодулярных линейных преобразований.

Но *если невозмущенное движение устойчиво, то уравнения в вариациях* (38), *будучи приводимыми, должны иметь знакоопределенную квадратичную форму, полная производная по времени от которой в силу уравнений в вариациях есть нуль* *.

Об устойчивости по первому приближению

69 [12, 13]. Характеристичные числа уравнений первого приближения позволяют во многих случаях судить об устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения в силу полной системы дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s \qquad (s = 1, \ldots, n),$$

где коэффициенты первого приближения p_{sr} и коэффициенты голоморфных относительно $x_1, \ldots, x_n$ функций X_s представляют вещественные непрерывные ограниченные функции t.

Теорема Ляпунова. *Если система дифференциальных уравнений первого приближения есть правильная и если все ее характеристичные числа положительны, то невозмущенное движение устойчиво.*

Ляпунов осуществил доказательство этой важной теоремы при помощи некоторых рядов, удовлетворяющих уравнениям возмущенного движения. Но ее можно доказать также и прямым методом.

Рассмотрим нормальную систему независимых решений $x_{1r}, \ldots, x_{nr}$ $(r = 1, \ldots, n)$ для уравнений первого приближения. Составим далее нормальную систему независимых решений присоединенной системы по формулам

$$y_{sr} = \frac{\Delta_{sr}}{\Delta},$$

где $\Delta = \| x_{sr} \|$, а Δ_{sr} обозначает минор определителя Δ, отвечающий элементу x_{sr} (п. 67). Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ суть характеристичные числа решений заданных уравнений в вариациях; так как заданная система предполагается правильной, характеристичными числами решений присоединенной системы будут $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$.

Введем новые переменные

$$z_r = \sum_s x_s y_{sr} e^{-(\lambda_r - \varepsilon)t} \qquad (r = 1, \ldots, n),$$

где ε обозначает некоторое положительное число, меньшее любого из характеристичных чисел λ_r. Пользуясь выписанным преобразованием, в силу предположенной правильности уравнений в вариациях, находим [1]):

$$\text{хар. число } \{z_r\} \geqslant \text{хар. число } \{x_s\} - \varepsilon;$$

обратное преобразование

$$\sum_r z_r e^{(\lambda_r - \varepsilon)t} x_{\sigma r} = \sum_s x_s \Big(\sum_r y_{sr} x_{\sigma r}\Big) = x_\sigma$$

приводит к неравенству

$$\text{хар. число } \{x_s\} \geqslant \text{хар. число } \{z_r\} + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\text{хар. число } \{z_r\} = \text{хар. число } \{x_s\} - \varepsilon.$$

Рассмотрим знакоопределенную относительно $z_1, \ldots, z_n$ квадратичную форму

$$2V = \sum_r z_r^2.$$

Ее полная производная по t есть

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_r (\lambda_r - \varepsilon) z_r^2 + R,$$

где

$$R = \sum_{r,\, s} z_r X_s y_{sr} e^{-(\lambda_r - \varepsilon)t};$$

как функция новых переменных $R(t, z_1, \ldots, z_n)$ имеет коэффициентами в своем разложении по целым положительным степеням переменных $z_1, \ldots, z_n$ исчезающие функции t при всяком положительном ε; разложение R начинается с членов по меньшей мере третьей степени.

Для численно малых значений переменных z_r производная $\frac{dV}{dt}$ будет определенно-отрицательной функцией величин $z_1, \ldots, z_n$. В силу теоремы Ляпунова об устойчивости заключаем отсюда, что невозмущенное движение устойчиво по отношению к пере-

---

[1]) Символом $\{z_r\}$ обозначается система функций $z_1, \ldots, z_n$.

менным $z_1, \ldots, z_n$; причем всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, стремится к последнему по значениям z_r асимптотически.

Для всякого положительного η, сколь бы мало оно ни было, и для всякого t, большего некоторой постоянной T, в силу свойств функции $R(t, z_1, \ldots, z_n)$, как функции с исчезающими коэффициентами и начинающейся в своем разложении с членов по крайней мере третьего измерения относительно z_s, можно найти область достаточно малых численных значений $z_1, \ldots, z_n$, внутри которой

$$|R(t, z_1, \ldots, z_n)| < \eta \sum_r z_r^2.$$

При этих условиях во все время $t > T$, пока значения переменных $z_1, \ldots, z_n$ не покинули указанную область (если λ_1 есть наименьшее из характеристичных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$), имеем

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{2} \sum_r z_r^2 \leqslant -(\lambda_1 - \varepsilon - \eta) \sum_r z_r^2,$$

и следовательно, если начальные значения z_{s0} выбраны так, чтобы при изменении t от t_0 до T значения переменных находились в указанной области, а постоянная η удовлетворяла неравенству $\lambda_1 > \varepsilon + \eta$, при дальнейшем изменении t будем иметь

$$\sum_r z_r^2 \leqslant Ce^{-2(\lambda_1 - \varepsilon - \eta)t}.$$

Отсюда

$$\text{хар. число } \{z_r\} \geqslant \lambda_1 - \varepsilon - \eta$$

и, следовательно,

$$\text{хар. число } \{x_s\} \geqslant \lambda_1 - \eta > 0.$$

Этим доказывается устойчивость невозмущенного движения по отношению к переменным $x_1, \ldots, x_n$ и то, что всякое достаточно близкое возмущенное движение стремится к нему асимптотически.

70. Теорема. *Если система дифференциальных уравнений первого приближения есть правильная и среди ее характеристичных чисел имеется хотя бы одно отрицательное, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство. Введем новые переменные

$$z_r = \sum_s x_s y_{sr} e^{-\lambda_r t}.$$

Отсюда характеристичное число функции z_r не меньше наименьшего из характеристичных чисел функций $x_s y_{sr} e^{-\lambda_r t}$, а последнее не меньше характеристичного числа системы функций $x_1, \ldots, x_n$, ибо характеристичное число $y_{sr} e^{-\lambda_r t}$ не меньше нуля, если уравнения первого приближения правильны. Это соотношение имеет место при всяком r, поэтому

$$\text{хар. число } \{z_r\} \geqslant \text{хар. число } \{x_s\}.$$

Для переменных z_r имеем следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{dz_r}{dt} = -\lambda_r z_r + \sum_s X_s y_{sr} e^{-\lambda_r t} \qquad (r = 1, \ldots, n).$$

Допустим, что среди характеристичных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ по меньшей мере одно, пусть λ_1, отрицательно. Неустойчивость невозмущенного движения (по отношению к переменным $x_1, \ldots, x_n$) будем доказывать от противного.

Если невозмущенное движение устойчиво, то для заданного малого положительного числа A будет существовать такое положительное число R, что при произвольных начальных возмущениях $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_s x_{s0}^2 < R, \tag{39}$$

для всякого t, большего t_0, будет выполняться неравенство

$$\sum_s x_s^2 < A. \tag{40}$$

Из уравнения $r = 1$ последней системы уравнений следует

$$z_1 = ce^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_1 t} \int \sum_s X_s y_{s1}\, dt,$$

где c — некоторая постоянная. Разложения функций X_s по целым положительным степеням $x_1, \ldots, x_n$ начинаются с членов второго измерения; функции X_s предполагаются ограниченными для всякого t, большего t_0, и для всяких $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию (40); поэтому при выборе начальных значений $x_{10}, \ldots$ $\ldots, x_{n0}$ согласно неравенству (39) при достаточно малом R выводим, что если невозмущенное движение устойчиво, характеристичное число второго слагаемого правой части последнего равенства в силу предложения о характеристичном числе интеграла (п. 62) не меньше нуля. Следовательно, характеристичное число функции z_1 будет равно λ_1, ибо при сделанных предположениях постоянная c отлична от нуля.

Но хар. число $\{x_s\} \leqslant$ хар. число $\{z_r\}$, поэтому

$$\text{хар. число } \{x_s\} \leqslant \lambda_1 < 0.$$

Это неравенство несовместимо с условием (40). Мы должны поэтому заключить, что каково бы ни было значение R, стесняющее выбор начальных возмущений $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, среди последних найдутся такие, при которых неравенство (40) перестает выполняться для некоторых значений t, больших t_0.

Таким образом, теорему можно считать доказанной.

Примечание. Если система дифференциальных уравнений первого приближения не есть правильная, то, обозначая через S сумму всех характеристичных чисел нормальной системы ее решений, а через μ характеристичное число функции $1/\Delta$. будем иметь

$$S + \mu = -\sigma,$$

где σ — некоторое положительное число. В этом случае характеристичное число функции $\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ не меньше $-\lambda_j - \sigma$. А на основании этого нетрудно доказать (рассуждениями, подобными изложенным здесь и в п. 69) следующие предложения*.

Пусть система дифференциальных уравнений первого приближения не есть правильная; если она имеет все характеристичные числа больше σ, то невозмущенное движение устойчиво, а если среди ее характеристичных чисел найдется по крайней мере одно отрицательное, численно большее σ, то невозмущенное движение неустойчиво [1]).

---

[1]) Другие критерии устойчивости по первому приближению были предложены в работах:

Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschrift.— 1930.— Bd 32.

Персидский К. П. К теории устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений // Изв. физ.-мат. о-ва при Казан. ун-те.— 1939.— Т. 11.— С. 29—45.

Малкин Г. Д. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Сб. тр. Казан. авиац. ин-та.— 1934.— № 2.— С. 21—28.

Г Л А В А 10

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

Инвариантная подстановка и структура частных решений

71 [46]. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{41}$$

в предположении, что все коэффициенты p_{sr} являются вещественными, периодическими, ограниченными, непрерывными функциями вещественного переменного t с одним и тем же вещественным периодом ω ($\omega > 0$). Уравнения в вариациях для ведущего периодического движения во многих практически интересных случаях представляют дифференциальные уравнения такого вида.

Задачи устойчивости невозмущенного движения ($x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$) приводят к определению характеристичных чисел для рассматриваемых уравнений. К сожалению, этот последний вопрос не является вполне разрешенным, хотя решение его и облегчается существованием инвариантной подстановки

$$S = \begin{pmatrix} t, & x_1, & \ldots, & x_n \\ t + \omega, & x_1, & \ldots, & x_n \end{pmatrix},$$

не изменяющей вида рассматриваемых уравнений (41).

Инвариантная подстановка, будучи примененной неограниченное число раз к значениям t на отрезке $(0, \omega)$, воссоздает всю числовую прямую вещественного переменного t. Другими словами, по поведению общих решений x_s при изменении t на отрезке $(0, \omega)$ возможно определить поведение всякого частного решения x_s при неограниченно изменяющемся t.

Допустим, что для уравнений (41) найдено n независимых решений

$$x_{1r}, \ldots, x_{nr} \quad (r = 1, \ldots, n).$$

Функции

$$x_{1r}(t + \omega), \ldots, x_{nr}(t + \omega)$$

по свойству периодических уравнений, допускающих инвариантную подстановку S, представляют также их решение. Поэтому они будут линейно выражаться через независимые решения x_{sr}:

$$x_{sr}(t+\omega) = a_{1r}x_{s1}(t) + \ldots + a_{nr}x_{sn}(t) \qquad (s = 1, \ldots, n),$$

где a_{kr} являются некоторыми постоянными для всякого r, взятого из ряда $1, \ldots, n$.

От выбранных нами независимых решений мы можем перейти к другой подобной системе путем линейных преобразований с постоянными коэффициентами, и, в частности, мы можем перейти к некоторому решению

$$x_s = \beta_1 x_{s1} + \ldots + \beta_n x_{sn},$$

обладающему фундаментальным свойством

$$x_s(t+\omega) = \varkappa x_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n).$$

Для определения постоянных β_r отсюда получаются соотношения

$$\beta_1 [a_{11}x_{s1}(t) + \ldots + a_{n1}x_{sn}(t)] + \ldots + \beta_n [a_{1n}x_{s1}(t) + \ldots$$
$$\ldots + a_{nn}x_{sn}(t)] = \varkappa [\beta_1 x_{s1}(t) + \ldots + \beta_n x_{sn}(t)].$$

Такие соотношения $(s = 1, \ldots, n)$ должны удовлетворяться независимо от значений t; поэтому, в силу свойств линейно независимых систем решений, должны быть приравнены коэффициенты при одинаковых x_{sr}:

$$a_{11}\beta_1 + \ldots + a_{1n}\beta_n = \varkappa\beta_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}\beta_1 + \ldots + a_{nn}\beta_n = \varkappa\beta_n.$$

Полученная система линейных однородных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами будет допускать нетривиальное решение для постоянных β_r, если составленный из ее коэффициентов определитель

$$\chi(\varkappa) = \|a_{ij} - \delta_{ij}\varkappa\| = 0. \tag{42}$$

Корни $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ этого определителя $\chi(\varkappa)$ связаны с фундаментальными частными решениями наших уравнений.

72 [46]. Допустим, что корни $\varkappa_s$ все различны между собой. Они характеризуют выражения n фундаментальных независимых решений. В самом деле, пусть $\varkappa$ — какой-либо из этих корней. Ему отвечает решение, обладающее по определению свойством

$$x_s(t+\omega) = \varkappa x_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n).$$

Общий вид непрерывных однозначных ограниченных на $(0, \omega)$ функций $x_s(t)$, удовлетворяющих последнему соотношению, записывается формулой

$$x_s(t) = e^{\frac{t}{\omega}\ln\varkappa}\varphi_s(t),$$

где φ_s суть непрерывные ограниченные однозначные функции с периодом ω. Если корни $\varkappa_r$ все различны, то получающиеся n фундаментальных решений будут образовывать систему n независимых решений, обладающую, очевидно, свойствами нормальной системы.

Когда существуют кратные корни $\varkappa_r$, не всегда бывает возможно найти n независимых решений указанного фундаментального вида. В этом случае возможно найти фундаментальную систему независимых решений, определенную для каждого из различных корней $\chi(\varkappa)$ соотношениями

$$\begin{gathered}
x_s^{(1)}(t+\omega) = \varkappa x_s^{(1)}(t), \\
x_s^{(2)}(t+\omega) = \varkappa x_s^{(2)}(t) + x_s^{(1)}(t), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_s^{(m+1)}(t+\omega) = \varkappa x_s^{(m+1)}(t) + x_s^{(m)}(t) \\
(s = 1, \ldots, n),
\end{gathered} \tag{43}$$

где $x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ обозначают искомые фундаментальные решения, связанные с кратным корнем $\varkappa$.

Пусть

$$x_s^{(i)} = \beta_1^{(i)} x_{s1} + \ldots + \beta_n^{(i)} x_{sn}.$$

Для определения постоянных $\beta_r^{(i)}$ и наивысшего значения для m после подстановки этих выражений в предыдущие соотношения и после сравнения коэффициентов при одинаковых функциях $x_{sr}(t)$ получим следующие системы уравнений $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\begin{gathered}
\sum_j (a_{ij} - \delta_{ij}\varkappa)\beta_j^{(1)} = 0, \\
\sum_j (a_{ij} - \delta_{ij}\varkappa)\beta_j^{(2)} = \beta_i^{(1)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_j (a_{ij} - \delta_{ij}\varkappa)\beta_j^{(m+1)} = \beta_i^{(m)}.
\end{gathered}$$

Эти системы уравнений совпадают с системами (7), подробно изученными в п. 24—28. Приведем полученный результат.

Пусть все элементарные делители определителя $\chi(\varkappa)$ суть

$$(\varkappa - \varkappa_1)^{n_1}, \ldots, (\varkappa - \varkappa_k)^{n_k},$$

где $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k$ обозначают корни определителя $\chi(\varkappa)$; среди них могут быть и одинаковые. Для всякого такого корня $\varkappa = \varkappa_r$ $(r = 1, \ldots, k)$ число m отвечающей группы (43) фундаментальных решений $x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ будет

$$m = n_r - 1.$$

Сумма

$$n_1 + \ldots + n_k = n.$$

Формулы для определения постоянных $\beta_s^{(i)}$ нас не интересуют, так как постоянные a_{ij} и частные решения x_{sr} нам известны пока лишь из теоремы существования. Структура функций $x_s^{(j)}$, входящих в фундаментальную систему решений и отвечающих корню $\varkappa$, определяется соотношениями (43). В самом деле, система (43) допускает последовательные определения структуры функций $x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}$ и именно

$$x_s^{(1)}(t) = e^{\frac{t}{\omega}\ln\varkappa}\varphi_s^{(1)}(t),$$

$$x_s^{(2)}(t) = e^{\frac{t}{\omega}\ln\varkappa}\left[\varphi_s^{(1)}(t)\frac{t-\omega}{\varkappa\omega} + \varphi_s^{(2)}(t)\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_s^{(m+1)}(t) = e^{\frac{t}{\omega}\ln\varkappa}\left[\varphi_s^{(1)}(t)\frac{(t-\omega)\ldots(t-m\omega)}{\varkappa^m\omega^m m!} + \right.$$

$$\left. + \varphi_s^{(2)}(t)\frac{(t-\omega)\ldots(t-(m-1)\omega)}{\varkappa^{m-1}\omega^{m-1}(m-1)!} + \ldots + \varphi_s^{(m+1)}(t)\right],$$

где все функции $\varphi_s^{(j)}$ суть ограниченные и периодические с периодом ω. В этом возможно убедиться непосредственно подстановкой $t+\omega$ вместо t, а также последовательным интегрированием уравнений в конечных разностях (43).

Исходя из структуры фундаментальных решений, замечаем, что вещественные части величин $-\frac{1}{\omega}\ln\varkappa_r$ $(r=1, \ldots, k)$ составят совокупность $n_1 + \ldots + n_k = n$ характеристичных чисел системы уравнений (41). Полная система фундаментальных решений $x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}$ составит нормальную систему $n_1 + \ldots$ $\ldots + n_k = n$ независимых решений, потому что всякая линейная комбинация с постоянными коэффициентами из этих решений имеет характеристичным числом, очевидно, наименьшее из характеристичных чисел, входящих в комбинацию фундаментальных решений.

Что найденная система независимых решений есть нормальная, возможно доказать также следующим способом.

Определитель $\Delta = \| x_{sr} \|$, составленный из системы фундаментальных решений, в силу соотношений (43) удовлетворяет равенству

$$\Delta(t+\omega) = \varkappa_1^{n_1}\ldots\varkappa_k^{n_k}\Delta(t),$$

в чем убеждаемся непосредственно путем операций с колонками. Но согласно формуле Лиувилля (п. 65) имеем

$$\Delta(t+\omega) = \Delta(t)\,e^{\int\limits_0^\omega \Sigma p_{ss}\,dt}$$

Сравнение с предыдущей формулой дает равенство

$$\varkappa_1^{n_1} \ldots \varkappa_k^{n_k} = e^{\int\limits_0^\omega \Sigma p_{ss}\, dt}.$$

Логарифмируя это равенство, получим после деления на ω, что сумма характеристичных чисел фундаментальной системы независимых решений равняется

$$-\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \sum p_{ss}\, dt;$$

эта величина является, с другой стороны, характеристичным числом функции

$$e^{\int\limits_0^t \Sigma p_{ss}\, dt},$$

так как выражение

$$\int\limits_0^t \sum p_{ss}\, dt - \frac{t}{\omega}\int\limits_0^\omega \sum p_{ss}\, dt$$

представляет ограниченную периодическую (с периодом ω) функцию. Отсюда заключаем, что фундаментальная система независимых решений будет нормальной и что рассматриваемая система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами является правильной (п. 64, 65, 67).

73 [47]. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dy_s}{dt} + p_{1s}y_1 + \ldots + p_{ns}y_n = 0,$$

присоединенную к заданной. Она также имеет периодические коэффициенты с вещественным периодом ω; для нее возможно также определить фундаментальную систему независимых решений, разбивающихся на группы, отвечающие элементарным делителям

$$(\mu - \mu_r)^{n_r} \qquad (r = 1, \ldots, k)$$

определителя $\chi(\mu)$ присоединенной системы.

Пусть производящее решение группы отмеченного элементарного делителя есть

$$y_s = e^{\frac{t}{\omega}\ln \mu_r}\left[\psi_s^{(1)} \frac{(t-\omega)\ldots(t-(n_r-1)\omega)}{\mu_r^{(n_r-1)}\omega^{n_r-1}(n_r-1)!} + \ldots + \psi_s^{(n_s)}\right],$$

где $\psi_s^{(j)}$ суть функции ограниченные и периодические с периодом ω. Подставляя это решение в коэффициенты линейного интеграла заданных уравнений (41)

$$y_1x_1 + \ldots + y_nx_n = c,$$

получим после очевидного преобразования выражение

$$\left[z_1^{(r)} \frac{t^{n_r-1}}{(n_r-1)!} + \ldots + z_n^{(r)}\right] e^{\frac{t}{\omega}\ln\mu_r} = c,$$

где все $z_j^{(r)}$ обозначают некоторые линейные формы величин x_s с периодическими коэффициентами; c — постоянная. Изменяя r от 1 до k, получим n линейных, независимых форм $z_j^{(r)}$, какие можно принять за новые переменные вместо $x_1, \ldots, x_n$.

Дифференцируя последнее выражение по t и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях t, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dz_1^{(r)}}{dt} &= \lambda_r z_1^{(r)}, \\ \frac{dz_j^{(r)}}{dt} &= \lambda_r z_j^{(r)} - z_{j-1}^{(r)} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} j = 2, \ldots, n_r \\ r = 1, \ldots, k \end{pmatrix},$$

где

$$\lambda_r = -\frac{1}{\omega}\ln\mu_r.$$

Следовательно, система (41) преобразована в систему с постоянными коэффициентами; при этом преобразование выполнено посредством неособенной линейной подстановки с периодическими ограниченными коэффициентами, не меняющими характеристичных чисел нормальной системы независимых решений. Отсюда выводим, что

$$\ln \varkappa_r + \ln \mu_r = 0,$$

т. е. характеристичные числа уравнений присоединенной системы равны взятым с обратными знаками характеристичным числам данной, а степени элементарных делителей корней $\varkappa_r$ и μ_r равны между собой [1]).

Из замеченной зависимости характеристичных чисел от корней характеристичного уравнения $\chi(\varkappa) = 0$ (42) и теорем об устойчивости и неустойчивости для правильных систем (п. 69, 70) выводим теорему:

Когда характеристичное уравнение $\chi(\varkappa) = 0$ обладает только корнями, модули которых меньше 1, невозмущенное движение устойчиво, независимо от членов выше первого порядка X_s, и притом так, что всякое возмущенное движение, достаточно близкое

---

[1]) Общие исследования о приводимости линейных уравнений к уравнениям с постоянными коэффициентами, начатые А. М. Ляпуновым, развил Н. П. Еругин (Еругин Н. П. Приводимые системы // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова.— 1946.— № 13).

к нему, приближается к нему асимптотически. Когда же в числе корней названного уравнения находятся такие, модули которых больше 1, *движение это неустойчиво независимо от* X_s'.

Сомнительными по отношению к устойчивости, при существовании членов X_s в дифференциальных уравнениях возмущенного движения, остаются поэтому только случаи, когда характеристичный полином $\chi(\varkappa)$, не имея корней с модулями, большими 1, имеет корни с модулями, равными 1.

Приближенные методы определения характеристичного уравнения

74. Определение характеристичного уравнения для линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами составляет трудную задачу. Если для уравнений с постоянными коэффициентами составление характеристичного определителя $\Delta(\lambda)$ не требует знания частных решений, то в случае уравнения с периодическими коэффициентами при современном состоянии вопроса такое знание необходимо для того, чтобы можно было построить уравнение $\chi(\varkappa) = 0$. Лишь свободный член этого уравнения может быть найден непосредственно из формулы

$$\varkappa_1 \ldots \varkappa_n = e^{\int\limits_0^\omega \Sigma p_{ss} dt}.$$

Для определения характеристичного уравнения $\chi(\varkappa) = 0$ обычно применяется тот или иной приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений. При этом наиболее удобными являются те независимые частные решения уравнений (41), какие определены для $t = 0$ следующими начальными значениями:

$$x_{sr}(0) = \delta_{sr}.$$

Элементы a_{sr} характеристичного определителя $\chi(\varkappa)$ вычисляются тогда по таким равенствам (п. 71):

$$a_{sr} = x_{sr}(\omega),$$

и, значит,

$$\chi(\varkappa) = \| x_{sr}(\omega) - \delta_{sr}\varkappa \|.$$

Задачи устойчивости по существу проще задач интегрирования; они не требуют точного знания характеристичных чисел; надо знать только знаки последних. А для решения такой задачи могут хорошо служить способы, которые в задачах интегрирования приводят к расходящимся процессам. Эту идею впервые применил Ляпунов в исследовании устойчивости установившихся движений в критических случаях. Но, разумеется, каждый конкретный результат, добытый подобными приемами, должен быть дополнительно испытан строгими теоремами об устойчивости или неустойчивости.

75. Рассмотрим прием, который состоит в замене коэффициентов p_{sr} в заданных уравнениях их средними значениями за период

$$c_{sr}^{(1)} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega p_{sr}\,dt.$$

Устойчивость (неустойчивость) в силу усредненной системы

$$\frac{dx_s}{dt} = c_{s1}^{(1)}x_1 + \ldots + c_{sn}^{(1)}x_n \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

иногда сопровождает устойчивость (неустойчивость) невозмущенного движения согласно заданным уравнениям (41). Но это не всегда бывает так. Поэтому важно знать, когда такая подмена уравнений разрешает поставленную задачу об устойчивости.

Будем вычислять независимые решения x_{sr} системы (41), определенные начальными данными $x_{sr}^{(0)} = x_{sr}(0) = \delta_{sr}$, по известному методу последовательных приближений Пикара:

$$x_{sr}^{(k)} = \delta_{sr} + \int_0^t \sum_i p_{si}x_{ir}^{(k-1)}\,dt \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

При этом характеристичное уравнение системы (41)

$$\chi(\varkappa) = \| x_{sr}(\omega) - \delta_{sr}\varkappa \| = 0$$

определяется в k-м приближении как

$$\chi_k(\varkappa) = \| x_{sr}^{(k)}(\omega) - \delta_{sr}\varkappa \| = 0.$$

В k-м приближении мы можем отнести системе (41) уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_s}{dt} = c_{s1}^{(k)}x_1 + \ldots + c_{sn}^{(k)}x_n, \tag{44}$$

где

$$c_{sr}^{(k)} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \sum_i p_{si}x_{ir}^{(k-1)}\,dt.$$

Корни $\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)}$ характеристичного уравнения системы (44)

$$\Delta_k(\lambda) = \| c_{sr}^{(k)} - \delta_{sr}\lambda \| = 0$$

связаны с корнями $\varkappa_1^{(k)}, \ldots, \varkappa_n^{(k)}$ уравнения $\chi_k(\varkappa) = 0$ соотношениями

$$\varkappa_s^{(k)} - 1 = \omega\lambda_s^{(k)}.$$

Если ни для каких целых неотрицательных значений $m_1, \ldots$ $\ldots, m_n$, имеющих в сумме 2, не уничтожается выражение

$$m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n,$$

где λ_s суть корни $\Delta_k(\lambda)$, то согласно изложенному в п. 34 для системы (44) возможно найти вещественную квадратичную форму с симметричными коэффициентами $b_{rs} = b_{sr}$

$$2V_k = \sum_{rs} b_{sr}x_sx_r$$

такую, чтобы

$$\sum_s (c_{s1}^{(k)}x_1 + \ldots + c_{sn}^{(k)}x_n)\frac{\partial V_k}{\partial x_s} = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Полная производная от V_k по t, взятая в силу заданных уравнений (41), есть

$$V_k' = \sum_{r,\,s,\,i} b_{si}p_{ir}x_sx_r.$$

Эта производная V_k' будет определенно-положительной, если найдется положительное число μ такое, чтобы вещественная квадратичная форма с периодическими коэффициентами

$$V_k' - \mu(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = \sum_{irs} b_{si}(p_{ir} - \mu c_{ir}^{(k)})x_sx_r$$

имела дискриминант

$$\| h_{rs}^{(k)} \|,$$

главные диагональные миноры которого были бы все положительны, причем

$$h_{rs}^{(k)} = \frac{1}{2}\sum_i [b_{ri}(p_{is} - \mu c_{is}^{(k)}) + b_{si}(p_{ir} - \mu c_{ir}^{(k)})] = h_{sr}^{(k)}.$$

Но если V_k' определенно-положительна, то асимптотическая устойчивость (неустойчивость) невозмущенного движения в уравнениях (44) сопутствует таковой в заданных уравнениях (41).

В первом приближении ($k = 1$) система (44) совпадает с усредненной системой, а только что сделанный вывод дает достаточные условия (в виде определенно-положительности V_1') для того, чтобы асимптотическая устойчивость (неустойчивость) невозмущенного движения в усредненных уравнениях ($k=1$) сопутствовала асимптотической устойчивости (неустойчивости) невозмущенного движения в заданных уравнениях (41) *.

П р и м е ч а н и е. Если в каком-либо из рассмотренных случаев корни λ_s таковы, что существуют целые неотрицательные числа m_s, имеющие в сумме 2, для которых уничтожается выражение $m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n$, и существует по крайней мере одно отрицательное характеристичное число λ_s, то введением новых переменных

$$u_s = x_s e^{-\eta t}$$

при достаточно малом положительном η мы сведем вопрос к рассмотренному случаю, так как изменения переменных x_s с течением времени не будут все ограниченными, если некоторые из переменных u_j будут неограниченными. Определение независимых решений x_{sr} по методу Пикара при нулевом приближении

$$x_{sr}^{(0)} = \delta_{sr}$$

приводит вообще к недостаточно быстрой сходимости последовательных приближений, так как приходится произвести достаточное число приближений, чтобы в нарастающих степенях t накопить достаточное число членов экспонента $e^{\alpha t}$, который в этом процессе не может появиться, кроме как разложенным в ряд.

Пример. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon a \cos 2t\right) x + (1 - \varepsilon a \sin 2t)\, y,$$

$$\frac{dy}{dt} = (-1 - \varepsilon a \sin 2t)\, x + \left(-\frac{1}{2} - \varepsilon a \cos 2t\right) y,$$

где a — некоторое положительное число, а ε — параметр. Их осредненные уравнения суть:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} x + y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - \frac{1}{2} y.$$

Для последних функция V, о какой была речь, представляет определенно-отрицательную квадратичную форму

$$V = -(x^2 + y^2).$$

Другими словами, невозмущенное движение ($x = 0$, $y = 0$) асимптотически устойчиво в системе уравнений с осредненными коэффициентами. Полная производная по t от этой функции V в силу заданных уравнений есть:

$$V' = x^2 + y^2 - 2\varepsilon a\,[(x^2 - y^2) \cos 2t - 2xy \sin 2t];$$

дискриминант V' имеет все главные диагональные миноры положительными, если численная величина ε меньше $\frac{1}{2a}$. Стало быть, если $|\varepsilon| < \frac{1}{2a}$, то невозмущенное движение в силу заданных уравнений будет асимптотически устойчивым. Можно заметить, что при $\varepsilon = \frac{3}{2a}$ заданные уравнения делают невозмущенное движение неустойчивым.

Способ Ляпунова

76 [48]. Ляпунов развивал другой способ вычисления независимых решений x_{sr}, определенных начальными данными $x_{sr}^{(0)} = \delta_{sr}$.

Рассмотрим случай, когда в системе (41) коэффициенты p_{sr} зависят от некоторого вещественного параметра μ. Допустим, что коэффициенты p_{sr} могут быть представлены рядами по целым положительным степеням μ, сходящимися абсолютно и равномерно для всех вещественных значений t по крайней мере при μ, абсолютная величина которого $|\mu|$ не превосходит некоторое число M. Допустим также, что пока $|\mu|$ не превосходит M, коэффициенты p_{sr} являются непрерывными ограниченными функциями для всякого $t > 0$, и пусть период ω не зависит от μ.

Пусть p есть ряд, расположенный по целым положительным степеням μ, коэффициенты которого представляют периодические функции t; значения этих коэффициентов при любой степени μ и для всякого $t > 0$ равны наибольшему из модулей коэффициентов разложений p_{sr}, отвечающих той же степени μ и тому же значению t.

Если при

$$|\mu| = M$$

ряд p равномерно сходится для всех вещественных значений t, то ряды, которыми представляются значения

$$x_{sr}(\omega) \quad (s, r = 1, \ldots, n)$$

функций x_{sr} системы независимых решений, определенных начальными условиями $x_{sr}(0) = x_{sr}^{(0)} = \delta_{sr}$, будут при сделанных предположениях абсолютно сходящимися для $|\mu| = M$.

Доказательство. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = \varepsilon (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)$$

с новым вспомогательным параметром ε. Решения x_{sr} для последних уравнений будем искать в виде

$$x_{sr} = \delta_{sr} + \varepsilon x_{sr}^{(1)} + \varepsilon^2 x_{sr}^{(2)} + \ldots;$$

функции $x_{sr}^{(k)}$ определяются последовательно по формулам

$$x_{sr}^{(k)} = \int_0^t \sum_j p_{sj} x_{jr}^{(k-1)}\, dt \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

откуда

$$|x_{sk}^{(1)}| \leqslant n \int_0^t p\, dt,$$

$$|x_{sk}^{(2)}| \leqslant n^2 \int_0^t \left(p \int_0^t p\, dt\right) dt.$$

Интегрируя по частям выражение, стоящее в правой части последнего неравенства, можем преобразовать его и получить

$$|x_{sr}^{(2)}| \leqslant \frac{n^2}{2}\left(\int_0^t p\,dt\right)^2,$$

и аналогично

$$|x_{sr}^{(k)}| \leqslant \frac{n^k}{1\cdot 2\ldots k}\left(\int_0^t p\,dt\right)^k.$$

Следовательно, при $\varepsilon > 0$ и $t \geqslant 0$ имеем

$$|\varepsilon x_{sr}^{(1)}| + |\varepsilon^2 x_{sr}^{(2)}| + \ldots \leqslant e^{|\varepsilon| n \int_0^t p\,dt} - 1.$$

Для $\varepsilon = 1$ и $t = \omega$ из последнего неравенства при сделанных предположениях мы должны заключить, что $x_{sr}(\omega)$ разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды по степеням μ при $|\mu| = M$. Предложение доказано.

Допустим теперь, что мы умеем интегрировать систему (41) в предположении $\mu = 0$. Тогда если функции x_s при $\mu \neq 0$ будем искать в виде рядов, расположенных по степеням параметра μ, то для определения коэффициентов в этих рядах получим системы дифференциальных уравнений, которые будут интегрироваться в известной последовательности посредством квадратур.

77 [49]. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + px = 0, \tag{45}$$

где p есть ограниченная непрерывная периодическая функция t с вещественным (пусть положительным) периодом ω. В соответствии с изложенным методом малого параметра μ заменим это уравнение таким:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu p x,$$

и ищем независимые решения последнего уравнения в виде

$$x = f = 1 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \ldots,$$
$$x = \varphi = t + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + \ldots,$$

где f_n, φ_n суть функции t, уничтожающиеся вместе с первыми производными, когда t равно нулю. Функции f_n, φ_n вычисляются последовательно по формулам

$$f_n = \int_0^t dt \int_0^t p f_{n-1}\,dt, \quad \varphi_n = \int_0^t dt \int_0^t p\varphi_{n-1}\,dt$$

при условии $f_0 = 1$, $\varphi_0 = t$.

Если мы заменим уравнение системой линейных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} = \mu p x,$$

то получим (п. 71), что характеристичное уравнение будет

$$\chi(\varkappa) = \begin{vmatrix} f(\omega) - \varkappa & f'(\omega) \\ \varphi(\omega) & \varphi'(\omega) - \varkappa \end{vmatrix} = \varkappa^2 - 2A\varkappa + 1 = 0,$$

где $2A = f(\omega) + \varphi'(\omega)$.

Если $A^2 > 1$, то корни характеристичного уравнения будут вещественными и один из них численно больше, другой численно меньше 1; если $A^2 \leqslant 1$, то характеристичные корни будут мнимыми и будут иметь модули, равные 1.

Из формулы

$$A = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega)] \mu^n$$

и из того обстоятельства, что при $p \leqslant 0$ функции $f_n(\omega)$, $\varphi_n'(\omega)$ получаются положительными для четного n и отрицательными для нечетного n, заключаем: *если функция p может принимать только отрицательные или нулевые значения (не будучи нулем тождественно), то корни характеристичного уравнения, отвечающего заданному уравнению* ($\mu = -1$), *всегда будут вещественными и один из них, по модулю, будет больше, а другой меньше* 1.

Остановимся теперь на случае, когда функция p может иметь только неотрицательные значения, не обращаясь тождественно в нуль.

Интегрируя по частям и используя соотношения $f_0 = 1$, $\varphi_0 = t$, получаем равенство

$$f_1(\omega) + \varphi_1'(\omega) = \omega \int_0^{\omega} p\, dt.$$

Для положительного t и при $n > 1$ функции $f_n(t)$, $\varphi_n'(t)$ удовлетворяют неравенству

$$S_n = (f_{n-1} + \varphi_{n-1}')\, t \int_0^t p\, dt - 2n (f_n + \varphi_n') > 0.$$

Действительно, из формулы

$$S_n = \int_0^t \frac{dS_n}{dt} dt$$

непосредственно имеем

$$S_n = \int_0^t (F_n + p\Phi_n)\, dt,$$

где

$$F_n = tf'_{n-1}\int_0^t p\,dt + (f_{n-1} + \varphi'_{n-1})\int_0^t p\,dt - 2nf'_n,$$

$$\Phi_n = t\varphi_{n-2}\int_0^t p\,dt + (f_{n-1} + \varphi'_{n-1})\,t - 2n\varphi_{n-1}.$$

Совершая над F_n, Φ_n преобразование, подобное совершенному над функцией S_n, получим

$$F_n = \int_0^t \left(2f'_{n-1}\int_0^t p\,dt + pu_n\right)dt, \quad \Phi_n = \int_0^t (2pt\varphi_{n-2} + v_n)\,dt,$$

где

$$u_n = (\varphi_{n-2} + tf_{n-2})\int_0^t p\,dt + \varphi'_{n-1} + tf'_{n-1} - (2n-1)\,f_{n-1},$$

$$v_n = (\varphi_{n-2} + t\varphi'_{n-2})\int_0^t p\,dt + f_{n-1} + tf'_{n-1} - (2n-1)\,\varphi'_{n-1}.$$

При сделанных предположениях о неотрицательности p функции f_n, f'_n, φ_n, φ'_n для всякого n будут получаться положительными для $t > 0$. И, следовательно, функции F_n, Φ_n будут положительными, если положительными будут u_n, v_n. А если над функциями u_n, v_n произвести преобразование, примененное к S_n, Φ_n, F_n, то можно получить

$$u_n = \int_0^t (2p\,(\varphi_{n-2} + tf_{n-2}) + F_{n-1})\,dt,$$

$$v_n = \int_0^t \left(2f'_{n-1} + 2\varphi'_{n-2}\int_0^t p\,dt + p\Phi_{n-1}\right)dt.$$

Из этих формул заключаем, что, если для положительных значений t имеют место неравенства $F_{n-1} > 0$, $\Phi_{n-1} > 0$, то для таких же значений t будут иметь место неравенства $F_n > 0$, $\Phi_n > 0$, а тем самым и неравенство $S_n > 0$.

Для $n = 2$ и положительного t имеем

$$F_2 = 2\int_0^t \left\{\left(\int_0^t p\,dt\right)^2 + 2p\varphi'_1\right\}dt > 0, \quad \Phi_2 = 2\int_0^t (pt^2 + 2f_1)\,dt > 0.$$

Этим неравенство $S_n > 0$ можно считать доказанным. Полагая в нем $t = \omega$, будем иметь

$$f_n(\omega) + \varphi'_n(\omega) < [f_{n-1}(\omega) + \varphi'_{n-1}(\omega)]\,\frac{\omega}{2n}\int_0^\omega p\,dt.$$

Выражение A для уравнения (45) принимает вид

$$A = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,[f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega)].$$

В силу последнего неравенства находим

$$1 - \frac{\omega}{2}\int_0^{\omega} p\,dt + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\omega}{4n+2}\int_0^{\omega} p\,dt\right)[f_{2n}(\omega) + \varphi_{2n}'(\omega)] < A.$$

$$A < 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\omega}{4n}\int_0^{\omega} p\,dt\right)[f_{2n-1}(\omega) + \varphi_{2n-1}'(\omega)].$$

Следовательно, если

$$\omega\int_0^{\omega} p\,dt \leqslant 4,$$

то необходимо будет

$$-1 < A < 1;$$

этим доказывается следующая теорема Ляпунова.

Если функция p такова, что может получать только положительные или равные нулю значения (не будучи нулем тождественно), и если притом функция эта удовлетворяет условию

$$\omega\int_0^{\omega} p\,dt \leqslant 4,$$

то корни характеристичного уравнения, соответствующего уравнению (45), *всегда будут мнимыми, обладая модулями, равными* 1 [1]).

Теорема дает лишь достаточные условия. Если p есть положительная постоянная, то корни характеристичного уравнения $\chi(\varkappa) = 0$, отвечающего вещественному периоду ω, будут иметь модули. равные единице. Но если p есть положительная периодическая функция, можно привести примеры, в которых характеристичное уравнение обладает вещественными корнями, из которых один по модулю будет больше, другой меньше 1.

Исследование устойчивости в критических случаях, когда характеристичное уравнение $\chi(\varkappa) = 0$ имеет один равный единице корень или два мнимых корня с модулями, равными единице, подобно исследованию тех же вопросов для уравнений с постоянными коэффициентами. Случаи эти рассмотрены Ляпуновым в в п. 56—64 его труда «Общая задача об устойчивости движений».

---

[1]) Дальнейшие исследования А. М. Ляпунова, связанные с уравнением (45), опубликованы в Записках Академии Наук (8-я серия.— 1902.— Т. 13, № 2).

ПРИМЕЧАНИЯ *)

К с. 10. «Остроумие ляпуновского определения устойчивости состоит в том, что определение это не беспредельно широко, иначе оно было бы безынтересным, и сужено оно ровно настолько, чтобы охватить все коренное во всевозможных задачах устойчивости.» (Четаев Н. Г. О некоторых задачах об устойчивости движения в механике. // ПММ.—1956.— Т. 20, вып. 3.— С. 309—314.)

К с. 11. Это обстоятельство позволяет с успехом применять ляпуновскую теорию устойчивости для решения важных прикладных задач, возможность чего впервые была отмечена Н. Г. Четаевым еще в начале 30-х годов в его лекциях по устойчивости самолетов.

К с 14. «В большинстве инженерных задач требуется удовлетворить выписанным в определении устойчивости неравенствам при заданных значениях λ, A за ограниченный промежуток времени от начального момента t_0 до некоторого момента T. При фиксированных значениях величин λ, A, t_0, T в определении устойчивости возникает определение (λ, A, t_0, T)-устойчивости в конечном за ограниченный промежуток времени.

Изменяя, если требуется, правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения в задаче о (λ, A, t_0, T)-устойчивости соответственным образом в областях

$$\sum_s x_s^2 < \lambda, \quad A < \sum_s x^2 \leqslant H$$

для всякого $t \geqslant t_0$, а в области

$$\lambda \leqslant \sum_s x_s^2 \leqslant A$$

для значений t, превосходящих T, мы можем привести поставленную задачу о (λ, A, t_0, T)-устойчивости к некоторой накрывающей ее задаче Ляпунова об устойчивости с тем дополнительным ограничением, чтобы для преобразованных уравнений функции Ляпунова обладали оговоренными у Ляпунова свойствами, начиная с заданного t_0, и чтобы для заданного числа A получаемое по методу Ляпунова число λ превышало или равнялось заданной для λ величине.

Обстоятельство это делает прямой метод Ляпунова весьма ценным для тех из прикладных задач об устойчивости в конечном за ограниченный промежуток времени, для которых существует накрытие задачей Ляпунова.» (Четаев Н. Г. О некоторых вопросах, относящихся к задаче об устойчи-

*) Составлены В. В. Румянцевым

вости неустановившихся движений // ПММ.—1960.— Т. 24, вып. 1.— С. 6—19.)

К с. 16. «Введенное Ляпуновы мпонятие знакоопределенной функции, если она зависит явно от t, отличается от обычного понимания знакоопределенной функции. Например, при $n = 2$ функция

$$e^{-t}(x_1^2 + x_2^2)$$

для всех рассматриваемых значений t есть определенно-положительная квадратичная форма в обычном смысле слова и не является знакоопределенной в смысле Ляпунова» (примечание [6] Н. Г. Четаева к книге Ляпунова, указанной в примечании [1]) на с. 8).

К с. 20. Для прикладных задач имеет значение не только факт существования числа λ по заданному числу A, но и оценка этих чисел и проверка пригодности оценок в конкретных условиях задачи, для чего особенно эффективным оказывается метод функций Ляпунова.

К с. 24. На этом примере Н. Г. Четаев предложил метод построения функции Ляпунова в виде связки интегралов уравнений возмущенных движений, оказавшейся весьма эффективным и широко применяемым для решения задач устойчивости в работах многих исследователей. Вообще этот метод состоит, коротко, в следующем. Пусть известны некоторые голоморфные интегралы уравнений возмущенных движений

$$V_i(x_1, \ldots, x_n) = \text{const} \qquad (i = 1, \ldots, m), \qquad V_i' \equiv 0.$$

Функция Ляпунова строится в виде связки интегралов

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i V_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j V_j^2 \qquad (0 \leqslant k \leqslant m),$$

где λ_i — некоторые постоянные, подбираемые так, чтобы сумма линейных членов в разложении функции $V(x_1, \ldots, x_n)$ в степенной ряд по переменным x_s в окрестности невозмущенного движения $x_s = 0$ тождественно равнялась нулю, так что разложение этой функции начинается с квадратичной формы $V^{(2)}$:

$$V = \sum_{r=2}^{\infty} V^{(r)}.$$

Оставшиеся не определенными коэффициенты λ_i и μ_j выбираются такими, чтобы квадратичная форма $V^{(2)}$ была знакоопределенной, тогда в области достаточно малых по абсолютной величине значений переменных x_s будет знакоопределенной и функция V, причем $V' \equiv 0$.

Так полученные достаточные условия устойчивости в ряде случаев, как и в рассматриваемом примере, оказываются совпадающими (с точностью до знака равенства) с необходимыми условиями устойчивости. Интересно отметить, что для получения таких условий устойчивости иногда достаточно использовать лишь часть известных первых интегралов (см., например: Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской. // ПММ — 1954.— Т. 18, вып. 4.— С. 457—458).

К с. 26. Вопросы существования функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы об асимптотической устойчивости, исследовались рядом авторов. В результате доказана обратимость теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (см.: Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М.: Физматгиз, 1959, с. 211).

К с. 29*. Вопрос о существовании функции $V(t, x)$, удовлетворяющей условиям теоремы Н. Г. Четаева для всякого неустойчивого невозмущенного движения, разрешили И. Вркоч (Обращение теоремы Четаева // Чехослов. мат. журн. — 1955.— Т. 5 (80)) и Н. Н. Красовский (см. монографию, указанную в примечании к с. 26).

К с. 29.** Из двух теорем Ляпунова о неустойчивости вторая обратима, а первая обратима не всегда (Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М.: Физматгиз, 1959.)

К с. 30. Эта теорема сформулирована следующим образом:

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что: 1) для некоторой допускающей бесконечно высший предел функции $V(t, x)$ существует область, где $VV' > 0$, и 2) для некоторых значений величин x_s, численно сколь угодно малых, в области $VV' > 0$ возможно выделить область, в которой некоторая функция $W > 0$ и на границе которой $W = 0$ значения полной производной W' суть одного какого-либо определенного знака, то невозмущенное движение неустойчиво.

Следует отметить, что при решении вопросов о неустойчивости целесообразно рассматривать интервал изменения времени $[t_0, \infty]$ закрытым и существование области $V > 0$ понимать как ее непустоту ни для какого t на этом интервале.

Если рассматриваемая в теореме область $VV' > 0$ ограничена $V = 0$ и при этом $V' \geqslant 0$, то за функцию W теоремы возможно взять функцию V.

В качестве функции W можно также выбрать V', тогда получается первоначальная формулировка теоремы о неустойчивости, данная в работе: Четаев Н. Г. Sur la réciproque du théorème de Lagrange // C. R. Acad. Sci.— Paris, 1930.— V. 190.— P. 360—362.

К с. 36. Элементарные (т. е. путем явного построения функции V) доказательства для ряда других более сложных и тонких случаев обращения теоремы Лагранжа были даны в статье: Четаев Н. Г. О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум // ПММ.—1952.— Т. 16, вып. 1.— С. 89—93.

Из этих случаев приведем два наиболее общих:

1°. Пусть силовая функция имеет вид $U = U_m + U_{m+1} + \ldots + U_{k-1} + U_k + U_{k+1} + \ldots$, где все однородные формы $U_m, \ldots, U_{k-1}$ постоянно отрицательны, формы $U_{k+1}, \ldots, U_{k+2}, \ldots$ постоянно положительны, а форма U_k знакопеременна, причем функция $U_m + U_{m+1} + \ldots + U_{k-1} + U_k$ для численно достаточно малых значений переменных q_s может быть сделана положительной. Тогда положение равновесия $q_s = 0$ неустойчиво.

Доказательство проводится рассмотрением функции

$$V = -H\sum_s p_s q_s.$$

2°. Пусть 1) для численно сколь угодно малых q_s, таких что $\sum\limits_{s=1}^{n} q_s^2 \leqslant l$, существует некоторая область C, в которой функция сил $U > 0$; 2) существуют некоторые непрерывные в C вместе со своими частными производными первого порядка функции $f_s(q_1, \ldots, q_n)$, обладающие свойствами: $f_s(0) = 0$, все главные диагональные миноры определителя

$$\| b_{rs} \|, \quad b_{rs} = \frac{\partial f_s}{\partial q_r} + \frac{\partial f_r}{\partial q_s} \qquad (r, s = 1, \ldots, n)$$

ограничены снизу положительными числами в области C; функция $\sum\limits_{s=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_s} f_s$ определенно положительна в области C. Тогда положение равновесия неустойчиво.

Доказательство проводится рассмотрением функции $V = -H \sum\limits_{s} p_s f_s$.

Эти теоремы Четаева сыграли важную роль в обращениях теоремы Лагранжа, данных впоследствии в работах ряда авторов.

К с. 80. Этот пример содержится в статье: Четаев Н. Г. О выборе параметров устойчивой механической системы // ПММ.— 1951.— Т. 15, вып. 3.— С. 371—372. Целью ее был показ несостоятельности интегральных оценок для отдельных траекторий, соответствующих избранным начальным условиям, для полной характеристики оптимальных свойств линейных систем и получение настоящих оценок методом функций Ляпунова.

Значение этой работы выходит за рамки рассмотренной конкретной задачи: общие соображения, лежащие в основе предложенного Четаевым метода получения оценок качества переходного процесса в системе, применимы к значительно более общим случаям, когда может быть построена функция Ляпунова и подмечена связь между оценками свойств этой функции и ее полной производной и параметрами системы. Этот метод получил широкое распространение и рядом исследователей найдены полезные для практики эффективные оценки скорости затухания переходного процесса в нестационарных линейных и нелинейных системах.

К с. 87. Оно остается справедливым и при одновременном добавлении гироскопических сил.

К с. 141. Определенные Ляпуновым пределы характеристичных чисел возможно уточнить (см. статью Н. Г. Четаева, упоминаемую в примечании к с. 14), а именно:

$$\text{хар. число } \exp \int \alpha\, dt \geqslant \text{хар. число } \{x_s\} \geqslant \text{хар. число } \exp \int \beta\, dt,$$

где α и β обозначают, соответственно, наименьший и наибольший корни уравнения

$$\left\| \frac{p_{sr} + p_{rs}}{2} - \delta_{sr} \varkappa \right\| = 0.$$

Следствие. Наименьшее характеристичное число решений уравнений (35) будет положительно, если положительным будет характеристичное число функции $\exp \int \beta\, dt$.

К с. 145*. «Вопрос об устойчивости невозмущенного движения $x_s = 0$ для уравнений (35) разрешается знаком наименьшего характеристичного числа; это сохраняется, если заданные уравнения правильны и в них дополнительно существуют члены X_s, начинающиеся в своих разложениях по целым положительным степеням с членов не ниже второго измерения. Эти обстоятельства делают приведенную теорему практически полезной, так как задача об устойчивости сводится при помощи нее к алгебраическому уравнению

$$\| c_{sr} - \delta_{sr}\lambda \| = (-1)^n (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n) = 0.$$

Согласно теореме Гурвица «...необходимое и достаточное условие для положительности наименьшего характеристичного числа уравнений (35) с коэффициентами p_{sr}, стремящимися к определенным пределам c_{sr} при неограниченном росте t, состоит из неравенств $\Delta_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, где Δ_s суть главные диагональные миноры матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}»$$

(Четаев Н. Г. О наименьшем характеристичном числе // ПММ.— 1945.— Т. 9, вып. 3.— С. 193—196).

К с. 145*. Для случая устойчивости можно уточнить данную оценку (см. статью Четаева, цитируемую в примечании к с. 14).

К с. 146.** В статье Н. Г. Четаева «Об устойчивости грубых систем» (ПММ.— 1960.— Т. 24, вып. 1.— С. 20—22) для случая устойчивости выведены оценки наибольших и наименьших отклонений возмущенных переменных, получившие в дальнейшем большое приложение в практических расчетах.

К с. 147. См. примечание ** к с. 145.

К с. 151. В п. 68 Н. Г. Четаев дает доказательство своей фундаментальной теоремы, которая обобщает теорему Лагранжа для равновесий и теорему Пуанкаре — Ляпунова для периодических движений (Четаев Н. Г. Об одной задаче Коши // ПММ.— 1945.— Т. 9, вып. 2.— С. 139—142).

К с. 155. См.: Четаев Н. Г. О некоторых вопросах об устойчивости и неустойчивости для неправильных систем // ПММ.— 1948.— Т. 12, вып. 5.— С. 639—642.

К с. 164. Предложенный Н. Г. Четаевым метод приближенного определения характеристичного уравнения и оценок характеристичных чисел путем усреднения коэффициентов имеет большое значение для практических расчетов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

3 2
~~2~~ р.