

М. М. ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

**ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ
И ЗНАЧИТЕЛЬНО ДОПОЛНЕННОЕ**

Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебника для высших технических учебных заведений.

**ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1947 ЛЕНИНГРАД**

Редактор *И. К. Снитко*. Техн. редактор *К. Ф. Брудно*. Подп. к печ. 1³/III 1947 г.
18³/₄ печ. л., 20,05 авт. л. 20,65 уч.-изд. л. 45 000 тип. зн. в печ. л. Тираж 25 000 экз.
A04482. Цена книги 7 р. 50 к. Переплёт 1 р. Заказ № 676.

16-я типография треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР.
Москва, Трёхпрудный, 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Предисловие к третьему изданию	6
Введение	9

Глава I. Теория напряжений.

§ 1. Напряженное состояние тела	10
§ 2. Дифференциальные уравнения равновесия	13
§ 3. Напряжения по площадкам, наклонным к координатным плоскостям. Условия на поверхности	19
§ 4. Исследование напряжённого состояния в данной точке тела. Главные напряжения	21
§ 5. Наибольшие касательные напряжения	30

Глава II. Геометрическая теория деформаций.

§ 6. Компоненты перемещения и компоненты деформации. Зависимость между ними	36
§ 7. Уравнения неразрывности деформаций	43
§ 8. Объёмная деформация. Замечание о случае больших деформаций	48

Глава III. Обобщённый закон Гука.

§ 9. Общие соображения	51
§ 10. Выражение деформаций через напряжения	52
§ 11. Выражение напряжений через деформации. Более общий вывод уравнений закона Гука	55
*§ 12. Работа упругих сил в твёрдом теле	58
*§ 13. Потенциал упругих сил	59
*§ 14. Форма зависимостей между напряжениями и деформациями; гипотеза о естественном состоянии тела	60
*§ 15. Упругие постоянные; сокращение числа их при существовании потенциала упругих сил	63
*§ 16. Изотропное тело	64

Глава IV. Решение задачи теории упругости в перемещениях.

§ 17. Сводка основных уравнений теории упругости	70
§ 18. Уравнения Ламе	73
§ 19. Продольные и поперечные колебания в неограниченной упругой среде	76
§ 20. Общее решение уравнения колебаний	80
§ 21. Продольные колебания стержня. Метод Фурье	83

ОГЛАВЛЕНИЕ

Г л а в а V. Решение задачи теории упругости в напряжениях.

§	22. Простейшие задачи	88
§	23. Кручение круглого стержня	89
§	24. Принцип Сен-Венана	91
§	25. Окончание задачи о кручении круглого стержня	93
§	26. Чистый изгиб призматического стержня	96
§	27. Расяжение цилиндра под действием собственного веса	102
§	28. Однозначность решения уравнений теории упругости	105
§	29. Уравнения Бельтрами-Мичелла	108
*§	30. Три рода задач теории упругости. Теорема единственности	111

Г л а в а VI. Плоская задача в декартовых координатах.

§	31. Плоская деформация	116
§	32. Обобщённое плоское напряжённое состояние. Уравнение М. Леви. Функция напряжений	129
§	33. Решение плоской задачи в полиномах	128
§	34. Изгиб консоли	130
§	35. Балка на двух опорах	137
§	36. Треугольная и прямоугольная подпорные стенки. (Решения М. Леви)	143
§	37. Изгиб прямоугольной полосы; решения Файлона и Рибьера	146

Г л а в а VII. Плоская задача в полярных координатах.

§	38. Общие уравнения плоской задачи в полярных координатах	155
§	39. Задачи, в которых напряжения не зависят от полярного угла	161
§	40. Действие сосредоточенной силы. (Задача Фламан-Буссинеска)	166
§	41. Клин, нагруженный в вершине	172
*§	42. Общее решение плоской задачи в полярных координатах	177

Г л а в а VIII. Кручение призматических стержней и изгиб.

§	43. Кручение призматических стержней	186
§	44. Метод Сен-Венана. Частные случаи	193
§	45. Решение задачи о кручении в напряжениях. Аналогия Прандтля	205
§	46. Случай поперечного изгиба	211

* Г л а в а IX. Более общие методы решения задач теории упругости.

§	47. О функциях гармонических и бигармонических	217
§	48. Бигармоническое уравнение	221
§	49. Приведение уравнений Ламе и Бельтрами к бигармоническим уравнениям	225
§	50. Метод Буссинеска; приложение гармонических функций к разысканию частных решений уравнений Ламе	227
§	51. Действие нагрузки на среду, ограниченную плоскостью. (Задача Буссинеска)	233
§	52. Действие нормальной к границе сосредоточенной силы, приложенной в начале координат	237
§	53. Решение плоской задачи теории упругости в функциях комплексной переменной	243
§	54. Метод Л. Файлона	245
§	55. Переход к методам А. Лява и Н. И. Мусхелишвили	250
§	56. О волновых уравнениях	251
§	57. Некоторые частные решения волнового уравнения	255

Глава X. Изгиб плоской пластинки.

§ 58. Общие замечания	259
§ 59. Цилиндрический и чистый изгиб пластинки	261
§ 60. Кручение пластинки	267
§ 61. Общий случай изгиба пластинки	272
§ 62. Эллиптическая пластинка, закреплённая по контуру	278
§ 63. Прямоугольная пластинка. Решение Навье	279
§ 64. Прямоугольная пластинка. Решение М. Леви	285
§ 65. Круглая пластинка	290
§ 66. Аналогия с мембраной. Метод Маркуса	293
Использованная литература	296
Предметный указатель	297

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ.

Книга эта в своём первоначальном виде вышла в 1932 году под названием «Основы теории упругости»; в 1933 году она была переиздана без существенных изменений.

Необходимость выпуска краткого учебника по теории упругости для студентов втузов и инженеров диктовалась тем, что курс теории упругости, введённый в ряде втузов, не был обеспечен соответствующей литературой: единственный на русском языке курс теории упругости С. П. Тимошенко, изданный в 1914—1916 годах к тому времени сделался библиографической редкостью и зачастую отсутствовал даже в библиотеках втузов.

При составлении учебника автор стремился достигнуть возможной простоты и понятности изложения многих трудных основных вопросов, которые вместе с громоздкостью выкладок часто отпугивают читателя, интересующегося скорее приложениями, чем самим обоснованием и построением теории. Конечно, такая простота могла быть достигнута лишь за счёт полноты, строгости и обоснованности в трактовке более сложных мест теории, а также за счёт того, что в книгу не были включены задачи, хотя и важные для техники, но требующие для своего решения более или менее сложного математического аппарата.

К настоящему—третьему—изданию книги автор счёл полезным немного изменить самое заглавие её с тем, чтобы оно более соответствовало назначению и содержанию книги.

Несмотря на выполненную значительную переработку содержания, книга попрежнему предназначена служить первым концентром изучения теории упругости для лиц, имеющих подготовку по математике в объёме нормальной программы втузов. При переработке автор учёл два факта.

Во-первых, со времени предыдущего издания у нас появился ряд прекрасных курсов теории упругости, освещающих как самое построение её, так и многочисленные приложения, важные для техники; достаточно перечислить курсы А. Лява, С. П. Тимошенко, П. Ф. Пашковича, Л. С. Лейбензона, А. и Л. Фёппля, С. В. Серенсена, а также выдающуюся и теперь широко известную работу Н. И. Мухелишвили «Некоторые задачи теории упругости»; имеются такие солидные, хотя и консервативно изложенные моно-

графии, как «Математическая теория упругости» Треффца и «Статика упругого тела» Геккелера.

С другой стороны, запросы инженеров в области теории упругости за последние 10—12 лет значительно возросли как в смысле количества задач, необходимых для техники, так и в смысле глубины трактовки тех вопросов, в которых следует инженеру обратиться для получения возможности читать более солидные курсы и специальные работы.

В этих условиях перед автором стала задача: точнее определить место переиздаваемой книги среди указанной выше достаточно богатой литературы и, вместе с тем, позаботиться, чтобы книга эта была в состоянии снова оказывать помощь читателям той категории, для которой она оказалась полезной даже в её прежнем виде.

Автор счёл рациональным не становиться на путь включения в книгу большого числа новых частных задач, важных для инженерного расчёта, так как подобные задачи в изобилии имеются в перечисленной выше литературе и во многих специальных работах. Дополнения, сделанные к настоящему изданию, ориентированы в другом направлении, отмеченном выше: помочь читателю лучше разобраться в основных, хотя бы элементарных, вопросах теории упругости путём возможно более систематического и связного изложения их и облегчить ему переход к другим, более полным курсам и специальным работам.

С этой целью значительно расширены первые две главы (теории напряжений и деформаций)*), почти заново написана глава VIII о кручении и изгибе прямого стержня; дополнены главы VI и VII, трактующие плоскую задачу; добавлена глава IX, в основном посвящённая методу Буссинеска и, в частности, — его классической задаче о действии нагрузки на границу полупространства; задача эта теперь играет большую роль в расчётах прочности грунтов под сооружениями. В этой же главе даны начальные сведения о применении функций комплексной переменной в плоской задаче, а также несколько дополнен вопрос об упругих волнах, кратко и элементарно затронутый в главе IV.

Многое из вновь добавленного материала может показаться чрезмерно сложным для читателей, впервые знакомящихся с предметом; учитывая это, автор счёл полезным отметить звёздочкой те разделы, которые могут быть пропущены при первом чтении книги.

В ряде задач применён классический метод разделения переменных, данный Эйлером и Пуассоном для интегрирования линейных уравнений в частных производных; это кое-где привело к некоторому осложнению и удлинению выкладок, но, по мнению

*) Ссылки здесь отнесены к новой нумерации глав и параграфов.

автора, позволило дать общее обоснование ряду решений частных задач (методы Файлона и Рибьера в плоской задаче о прямоугольнике, построение общего решения плоской задачи в полярных координатах, кручение стержня прямоугольного сечения, решение волновых уравнений методом стоячих волн). Между прочим, при решении плоской задачи в полярных координатах, путём внимательного проведения этого метода, автору удалось найти четыре новых частных решения с особенностями в полюсе, не фигурирующих в решении, данном Мичеллом [формулы (7.75) и (7.76) § 42 и далее].

В настоящем издании, как и ранее, опущены весьма эффективные приближённые энергетические методы; включение их теперь, после выхода в свет глубокого и всестороннего труда Л. С. Лейбензона «Вариационные методы решения задач теории упругости» было бы излишним.

В остальном автор предоставляет читателям судить о правильности направления, принятого им при переработке книги; он весьма благодарен читателям, сделавшим существенные замечания о многих неисправностях предыдущего издания и тем содействовавшим улучшению настоящего.

Глубоко благодарен автор Л. И. Мальгинову и М. И. Найману, оказавшим большую и любезную помощь в чтении корректур и устранении ряда редакционных дефектов.

Москва 25/VII 1946 г.

М. Филоненко-Бородич

ВВЕДЕНИЕ.

Теория упругости представляет собой весьма важный раздел *математической физики*. Она рассматривает действие сил на упругие тела с точки зрения возникающих в них напряжений и деформаций как в состоянии равновесия, так и в движении. Такими же вопросами, как известно, занимается и *сопротивление материалов*.

Однако, в курсе сопротивления материалов мы путём некоторых упрощений в постановке задач и в методе их решения стараемся получить возможно более простые результаты, удобно применяемые к расчётной практике. Теория упругости стремится подойти к решению задач более общим и более точным методом. Целью этого метода являются, прежде всего, проверка полученных упрощённых решений и определение величин получающихся неточностей; вместе с тем, имеется ряд задач, самый подход к которым методами, привычными для сопротивления материалов, невозможен; это главным образом задачи, в которых упругое тело не имеет типичной для сопротивления материалов формы стержня и бруса; сюда же следует отнести задачи о местных напряжениях, возникающих в местах приложения к упругому телу нагрузок. Решения подобных задач, даваемые теорией упругости, имеют непосредственный практический интерес.

К теории упругости относят также много задач, решаемых с той же степенью приближения, как и в сопротивлении материалов, но требующих более сложных методов математического анализа (стержни двойной кривизны, пластинки, оболочки, теория колебаний упругих тел, устойчивость упругих форм равновесия). Вообще же теория упругости в отличие от сопротивления материалов рассматривает те задачи, где математическая сторона является сложной. Точной границы между обеими этими дисциплинами провести нельзя, и многие задачи фигурируют и тут и там.

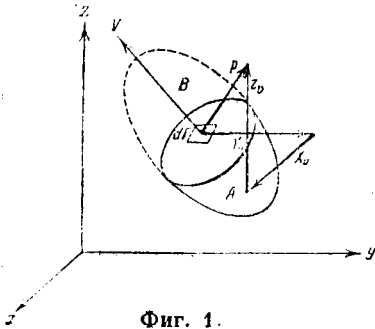
Однако, решение задач методами теории упругости настолько усложняется, что до настоящего времени многие задачи, играющие большую роль в практике, не имеют решения, хотя к настоящему времени теория упругости развилась уже в мощную дисциплину, широко использующую аппарат математического анализа и имеющую собственную богатую литературу.

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ.

§ 1. Напряжённое состояние тела.

Понятие о напряжениях и способы обращения с ними в более простых случаях известны из сопротивления материалов. Здесь нам прежде всего придётся ввести такие обозначения напряжений, которые были бы удобны в пространственной задаче и позволяли бы легко различать напряжения по различным площадкам, проведённым через данную точку тела.



Фиг. 1.

Существует несколько систем обозначений; здесь мы пользуемся системой, принятой во многих курсах теории упругости.

Представим себе (фиг. 1) твёрдое тело, рассечённое плоскостью на две части *A* и *B*. Часть *B* после рассечения отбросим; в плоскости сечения выделим элементарную площадку dF ; направление этой площадки будем характеризовать внешней нормалью к ней (внешней по отношению к оставшейся части *A*).

При помощи внешней нормали мы кратко и ясно указываем не только направление площадки, но и ту часть тела (*B* или *A*), которая отбрасывается после рассечения и действие которой мы далее заменим силами.

Пусть p —полное напряжение на данной площадке; $p = \frac{dP}{dF}$, где dP —равнодействующая сил, приходящихся на площадку dF .

Наметим где-либо в пространстве произвольную систему прямоугольных координат $Oxyz$, при помощи которой будем определять положение точек рассматриваемого тела. Напряжения будем определять их проекциями на оси этой системы; ею же далее воспользуемся при исследовании деформаций.

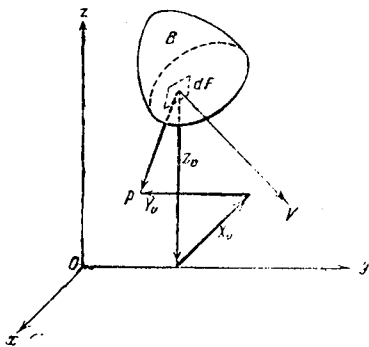
Проекции на оси координат полного напряжения p на площадке dF обозначим через X_x, Y_x, Z_x . В этих обозначениях основ-

ная буква X , или Y , или Z , указывает, на какую ось берётся проекция; значок v при ней указывает на направление внешней нормали к той площадке, напряжение на которой рассматривается; поэтому, например, обозначение X_v должно быть высказано так: «проекция на ось Ox полного напряжения на площадке с внешней нормалью V ».

Если мы после рассечения отбросим часть A , то внешняя нормаль к той же площадке dF будет иметь обратное направление. Проекция полного напряжения на ней (фиг. 2) придётся обозначить так: X_{-v} , Y_{-v} , Z_{-v} ; при этом очевидно, что

$$X_{-v} = -X_v; \quad Y_{-v} = -Y_v; \quad Z_{-v} = -Z_v,$$

так как напряжения X_v , Y_v , Z_v выражают действие части B на часть A , а напряжения X_{-v} , Y_{-v} , Z_{-v} выражают действие части A на часть B ; действия эти равны по величине, но противоположны по направлению.



Фиг. 2.

В сопротивлении материалов полное напряжение обычно разлагают на нормальную и касательную составляющие; введённые нами теперь проекции напряжения

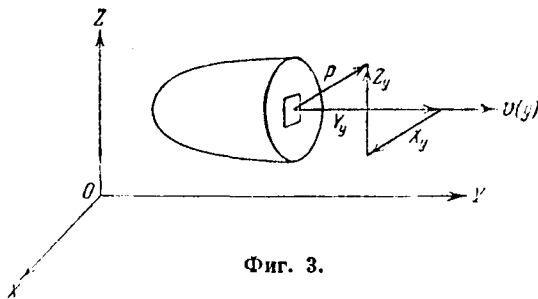
$$X_v, Y_v, Z_v$$

на случайно выбранные оси координат Ox , Oy , Oz , вообще говоря, не будут ни нормальными, ни касательными.

В последующем мы чаще всего будем делать сечение, перпендикулярное к какой-либо оси координат. Сделаем, например, сечение перпендикулярно к оси Oy ; тогда получим следующие проекции полного напряжения (фиг. 3):

$$X_y; Y_y; Z_y.$$

В этом случае Y_y будет нормальное напряжение, X_y , Z_y — касательные напряжения.

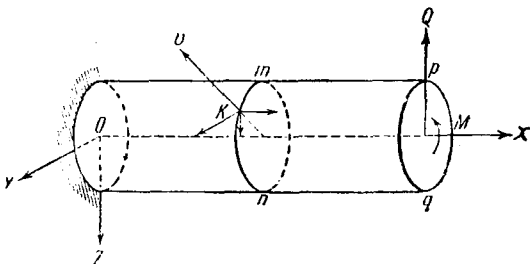


Фиг. 3.

На фиг. 4а и 4б показаны обозначения напряжений на площадках, нормальных к остальным двум осям. Собирая эти результаты, получаем такую систему напряжений на площадках,

значить напряжения в сечениях aa и bb при отбрасывании той или иной части (левой или правой; верхней или нижней) стенки после рассечения.

2. Цилиндрическое тело (фиг. 6) скручивается силами, приложенными по концевым поперечным сечениям. Обозначить напряжения в любой точке k поперечного сечения ln и записать условие, что нормальное напряжение отсутствует. Обозначить напряжение в любой точке m боковой поверхности и записать условия, что эта поверхность ничем не нагружена.



Фиг. 7.

3. Цилиндрический брусок (фиг. 7) изгибается силами, приложенными в концевом поперечном сечении pq .

Записать условия того, что боковая поверхность свободна от нагрузки (см. предыдущее упражнение), обозначить те напряжения в сечении mn (нормальные и касательные), которые определяются в сопротивлении материалов.

В настоящее время некоторыми авторами применяются следующие обозначения, принятые также в технической литературе: нормальные напряжения на площадках, нормальных к осям OX , OY и OZ , обозначаются соответственно через

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z;$$

касательные напряжения по тем же площадкам обозначаются через

$$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz};$$

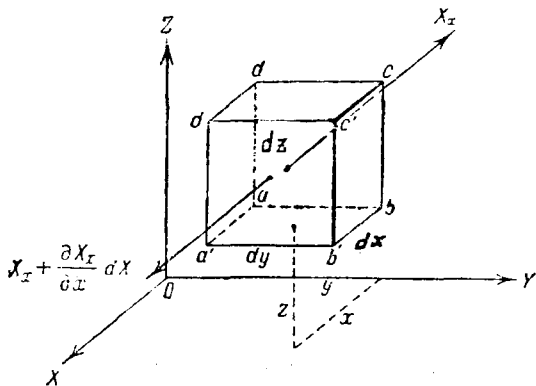
так что

$$X_y = \tau_{xy}; \quad Y_z = \tau_{yz}; \quad X_z = \tau_{xz}.$$

§ 2. Дифференциальные уравнения равновесия.

Из твёрдого тела выделим бесконечно малый элемент в форме параллелепипеда с тремя плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Рёбра этого параллелепипеда пусть будут dx , dy , dz (фиг. 8). Объём его равен $d\tau = dx dy dz$. После разреза действие отброшенных частей заменим силами. Напряжение на каждой грани разложим на три составляющие. Итого на всех гранях будет действовать $6 \times 3 = 18$ составляющих напряжений. Это будут внешние силы, действующие на наш па-

параллелепипед. Кроме того, будем предполагать, что в данном теле существуют так называемые объёмные силы. Будем считать,



Фиг. 8.

что эти силы приложены к массе тела; такова, например, сила тяжести, с которой мы далее будем иметь дело.

Пусть к единице массы тела приложены некоторые объёмные силы, которые мы также разлагаем на три составляющие: X, Y, Z . Тогда объёмные силы, приходящиеся на массу параллелепипеда $\rho d\tau$ (ρ — плотность тела в данной точке T , представляющая собой массу, заключённую в единице объёма и имеющая

размерность $\frac{\kappa\text{г} \cdot \text{сек}^2}{\text{см}^3}$), будут

$$X\rho d\tau = X\rho dx dy dz;$$

$$Y\rho d\tau = Y\rho dx dy dz;$$

$$Z\rho d\tau = Z\rho dx dy dz.$$

Напряжения, вызываемые внешними силами в твёрдом теле, различны в разных точках его, и потому они, вообще говоря, должны выражаться функциями от координат точек:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= F_1(x, y, z); \\ Y_y &= F_2(x, y, z); \\ Z_z &= F_3(x, y, z); \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Если на площадку $abcd$ элемента (фиг. 8) действует напряжение $X_x = -X_x$, то на площадку $a'b'c'd'$ действует напряжение $X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx$, так как, переходя к площадке $a'b'c'd'$, мы в первом уравнении (1.1) изменяем лишь одну из координат, а именно x . Таким образом, мы легко обозначим напряжения на всех площадках, ограничивающих параллелепипед.

Предполагаем, что данное твёрдое тело находится в равновесии; тогда для каждого отдельного элемента должны удовлет-

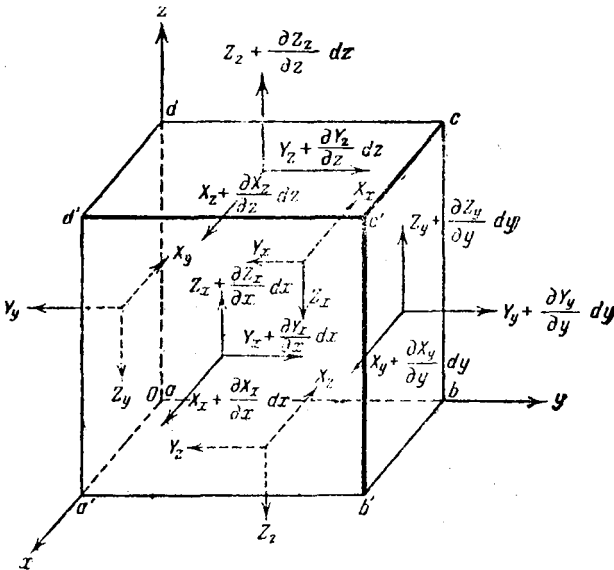
воряться шесть условий равновесия статики:

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0, \quad \sum M_x = 0, \\ \sum Y &= 0, \quad \sum M_y = 0, \\ \sum Z &= 0, \quad \sum M_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Займёмся сначала первой группой этих условий и, в частности, остановимся на первом уравнении:

$$\sum X = 0. \quad (1.3)$$

Здесь придётся принять во внимание только те силы, которые дают проекции на ось Ox ; это будут нормальные напряжения



Фиг. 9.

по боковым граням $abcd$ и $a'b'c'd'$ (фиг. 9) и касательные напряжения, параллельные оси Ox по остальным граням.

Раскрывая условие равновесия (1.3), имеем:

$$\begin{aligned} & \left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \right) dy dz - X_x dy dz + \\ & \quad + \left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy \right) dx dz - X_y dx dz + \\ & \quad + \left(X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz \right) dy dx - X_z dx dy + X_p dx dy dz = 0 \quad (1.4) \\ & \quad \left(= \rho dx dy dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Если мы рассматриваем случай движения частиц упругого тела (упругие колебания), то $\sum X$ не обращается в нуль, но, согласно второму закону Ньютона, будет равна произведению массы элемента на проекцию его ускорения на ось Ox ; если проекция пути (перемещения), проходимого данной точкой на ось координат, обозначим через u , v и w , то ускорение вдоль оси Ox будет $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; поэтому в правой части уравнения (1.4) будет стоять выражение

$$\rho d\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho dx dy dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

как это показано в скобках.

После приведения подобных членов в уравнении (1.4) и разделения на $dx dy dz = d\tau$ получим его в окончательном виде:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X\rho = 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right).$$

Таким же путём раскрываем остальные два условия:

$$\sum Y = 0, \quad \sum Z = 0.$$

В правой части, в случае движения, вместо нуля в обоих случаях будут произведения массы элемента на ускорения вдоль соответственных осей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y\rho &= 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z\rho &= 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Переходим теперь к раскрытию последних трёх условий равновесия (1.2). Возьмём, например, условие $\sum M_x = 0$. На чертеже поэтому сохраним только силы, могущие дать моменты вокруг оси Ox , т. е. нормальные к ней. Начало координат для упрощения выкладок поместим в одной из вершин параллелепипеда (фиг. 10). Обратим внимание на то, что моменты некоторых сил из числа показанных на чертеже будут бесконечно малыми величинами третьего порядка, другие же—четвёртого порядка. Например, для нормальных сил по левой и правой граням мы имеем момент

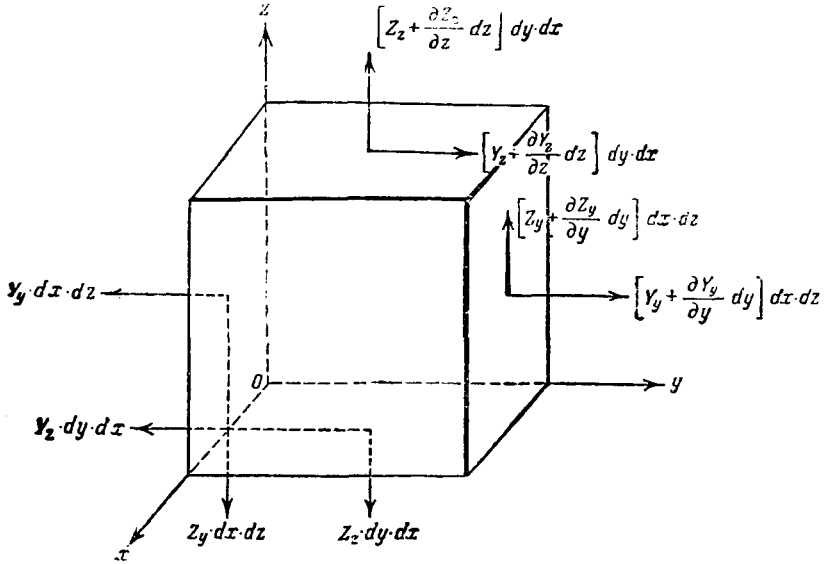
$$\left(Y_y + \frac{\partial Y_y}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dz}{2} - Y_y dx dz \frac{dz}{2}.$$

Этот момент в итоге оказывается величиной четвёртого порядка;

такой же порядок будут иметь моменты объёмных сил:

$$+ Y_z dx dy dz \frac{dz}{2}; \quad - Z_y dx dy dz \frac{dy}{2}.$$

Рассматривая фиг. 10, найдём только две силы, дающие момент



Фиг. 10.

третьего порядка; на чертеже они показаны жирнее. Приравнявая нулю сумму моментов этих сил вокруг оси Ox , получим

$$\left(Y_z + \frac{\partial Y_z}{\partial z} dz \right) dx dy dz - \left(Z_y + \frac{\partial Z_y}{\partial y} dy \right) dx dy dz = 0;$$

отбрасывая здесь бесконечно малые величины четвёртого порядка, получим:

$$Y_z dx dy dz - Z_y dy dz dx = 0,$$

или, сокращая, имеем:

$$Y_z = Z_y.$$

Это есть закон парности, или сопряжённости, касательных напряжений, уже известный из сопротивления материалов. Соответственно этому два других уравнения дают:

$$Y_x = X_y; \quad Z_x = X_z.$$

Таким образом, условия равновесия статики привели нас к

тремя дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

содержащим девять функций от координат рассматриваемой точки: $X_x, X_y, X_z; Y_x, Y_y, Y_z; Z_x, Z_y$ и Z_z ; однако, закон сопряжённости касательных напряжений

$$\left. \begin{aligned} Y_z &= Z_y, \\ Z_x &= X_z, \\ X_y &= Y_x \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

пока зывает, что три из этих девяти функций попарно равны трём другим. Следовательно, мы получим три дифференциальных уравнения (1.5), содержащих шесть неизвестных функций:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= F_1(x, y, z), \\ Y_y &= F_2(x, y, z), \\ Z_z &= F_3(x, y, z), \\ Y_z &= F_4(x, y, z), \\ Z_x &= F_5(x, y, z), \\ X_y &= F_6(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

В случае упругих колебаний правые части этих уравнений зависят также и от времени t .

Так как число неизвестных (1.7) превышает число уравнений (1.5), то заключаем, что задача теории упругости оказывается статически неопределимой. Недостающие уравнения можно получить, лишь изучая условия деформации и учитывая физические свойства данного упругого тела.

Метод, при помощи которого мы вывели уравнения (1.5), часто применяется в сопротивлении материалов, например, для получения зависимостей между изгибающим моментом, поперечной силой и нагрузкой:

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad \frac{dM}{dx} = Q$$

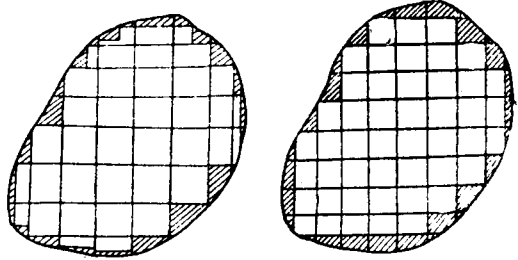
или для вывода касательных напряжений при изгибе.

Для этих целей мы там выделяем из бруса и уравниваем бесконечно тонкий слой между двумя поперечными сечениями, т. е. элемент, бесконечно малый в одном направлении; здесь же получаем условия равновесия элемента, бесконечно малого по всем трём измерениям.

§ 3. Напряжения по площадкам, наклонным к координатным плоскостям. Условия на поверхности.

Уравнения равновесия (1.5) связывают между собой напряжения по площадкам, параллельным координатным плоскостям.

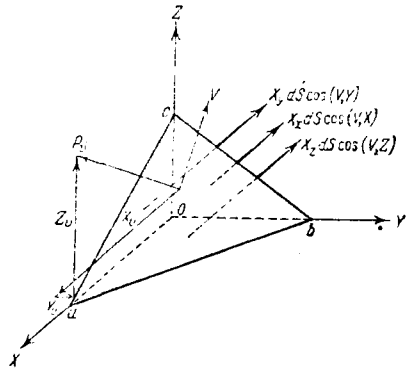
Однако, нам иногда требуется знать напряжения по площадкам, иначе ориентированным; с другой стороны, если мы всё упругое тело будем разбивать на элементы плоскостями, параллельными координатным, то у поверхности тела, вообще говоря, не будем в со-



Фиг. 11.

стоянии выделить элементы в форме параллелепипеда (Фиг. 11). По полученным у поверхности наклонным граням, очевидно, будут действовать внешние силы (нагрузки), приложенные к данному телу. Приведенные соображения заставляют нас вывести ещё соотношения между напряжениями по трём площадкам, параллельным координатным плоскостям, и напряжениями по площадке, как угодно наклонённой к этим плоскостям.

Для получения таких соотношений рассмотрим (Фиг. 12) бесконечно малый элемент, выделенный из данного твёрдого тела тремя плоскостями, параллельными координатным, и четвёртой плоскостью, пересекающей все три оси, т. е. рассмотрим элемент $Oabc$ в форме тетраэдра или треугольной пирамиды. Назовём площадь его грани abc через dS , и пусть внешняя нормаль к ней будет V ; тогда площади остальных граней найдём, как проекции площади грани abc на координатные плоскости:



Фиг. 12.

$$\text{пл. } abc = dS; \quad \text{пл. } oab = dS \cos(VZ);$$

$$\text{пл. } obc = dS \cos(VX); \quad \text{пл. } oac = dS \cos(VY^*).$$

* Здесь в скобках X , Y , Z обозначают направления, соответственно параллельные осям координат Ox , Oy , Oz .

Пусть X_v, Y_v, Z_v — проекции на оси координат полного напряжения P , действующего на площадке abc . Тогда первое условие равновесия выделенного тетраэдра $\sum X = 0$ даёт

$$\sum X = X_v dS - X_x dS \cos(VX) - X_y dS \cos(VY) - X_z dS \cos(VZ) = 0. \quad (1.8)$$

Сокращая на dS , имеем

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(VX) + X_y \cos(VY) + X_z \cos(VZ). \\ Y_v &= Y_x \cos(VX) + Y_y \cos(VY) + Y_z \cos(VZ); \\ Z_v &= Z_x \cos(VX) + Z_y \cos(VY) + Z_z \cos(VZ). \end{aligned} \right\} (1.8)$$

В эти уравнения не вошли объёмные силы, так как они будут малыми третьего порядка, например: $\rho X d\tau = \rho X \frac{dx dy dz}{6}$, между тем как все члены уравнения (1.8) в его первоначальном виде — второго порядка.

Предполагаем, что в пределе площадь грани abc стремится к нулю; тогда уравнения (1.8) дают связь между напряжениями в точке O по косой площадке с внешней нормалью V и по трём площадкам, параллельным координатным плоскостям. Если мы вырезаем тетраэдр $Oabc$ у поверхности и грань abc принадлежит поверхности, то X_v, Y_v, Z_v являются составляющими напряжения от внешних сил (нагрузок данного тела), приложенных на поверхности. Тогда уравнения (1.8) дают связь между внешней нагрузкой и внутренними силами. В этом случае они называются условиями на поверхности тела и оказываются весьма тесно связанными с дифференциальными уравнениями равновесия (1.5); действительно, если функции (1.7) таковы, что уравнения (1.5) и условия на поверхности (1.8) удовлетворены во всех точках тела и на его поверхности, то этим обеспечено равновесие всех элементов (параллелепипедов и тетраэдров), на которые было разбито данное тело; значит, будет обеспечено равновесие всего тела в целом. Математический смысл этого заключения состоит в том, что уравнения (1.5) и граничные условия (1.8) необходимо рассматривать совместно, ибо уравнения (1.5) не могут иметь определённого решения, пока не даны условия (1.8), заключающие в себе внешнюю нагрузку тела.

Итак, тело в целом будет в равновесии, если удовлетворены уравнения равновесия (1.5) и заданы поверхностные нагрузки; другими словами, мы доказали достаточность уравнений (1.5) и граничных условий (1.8) для равновесия тела под действием заданных внешних сил. Можно доказать необходимость уравне-

ний (1.5). Действительно, если тело в равновесии, то для любой части, выделенной из него замкнутой поверхностью S , удовлетворены шесть условий равновесия (1.2). Первое из них раскроем так:

$$\int_{(S)} X_v dS + \int_{(\tau)} X_p d\tau = 0.$$

Здесь первый интеграл распространён по поверхности тела, а второй—по объёму его. Однако, первый интеграл можно преобразовать также в объёмный, пользуясь формулой Грина*):

$$\begin{aligned} \int_{(S)} X_v dS &= \int_{(\tau)} [X_x \cos(VX) + X_y \cos(VY) + X_z \cos(VZ)] dS = \\ &= \int_{(\tau)} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) d\tau. \end{aligned}$$

На этом основании предыдущее уравнение равновесия может быть написано так:

$$\int_{(\tau)} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X \right) d\tau = 0.$$

Интеграл левой части должен обращаться в нуль для любого объёма τ , выделенного из тела, а это возможно только тогда, когда подинтегральное выражение тождественно равно нулю во всех точках объёма τ :

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0.$$

Этим доказана необходимость первого из уравнений (1.5). Таким же путём доказывается необходимость других двух уравнений (1.5) и уравнений (1.6).

§ 4. Исследование напряжённого состояния в данной точке тела. Главные напряжения.

Предположим, что элемент $Oabc$ вырезан внутри упругого тела и X_v , Y_v , Z_v являются проекциями полного напряжения P_v по косо́й площадке abc на оси случайной системы координат

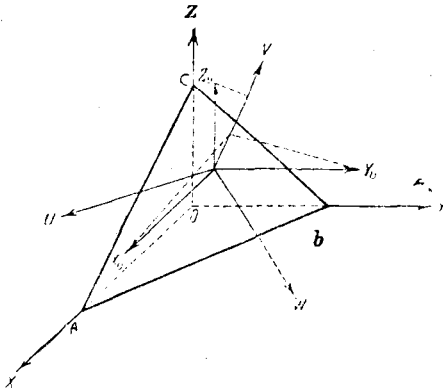
*) Формула Грина имеет вид

$$\int_{(\tau)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau = \int_{(S)} [P \cos(VX) + Q \cos(VY) + R \cos(VZ)] dS,$$

где P , Q , R —функции от x , y , z , непрерывные на замкнутой поверхности S ; частные производные от них должны существовать и быть непрерывными во всем объёме τ , ограниченном поверхностью S ; V —внешняя нормаль к поверхности S в некоторой точке её (x , y , z)

Oxyz (фиг. 12). Зная проекции полного напряжения (X_v, Y_v, Z_v), без труда найдём нормальные и касательные напряжения по той же площадке *abc*.

Для этой цели примем нормаль V к площадке за одну из новых осей координат. Другие две оси U, W выберем в плоскости *abc* (фиг. 13). Обозначим косинусы углов между старыми и новыми осями по схеме:



Фиг. 13.

	X	Y	Z
U	l_1	m_1	n_1
V	l_2	m_2	n_2
W	l_3	m_3	n_3

Теперь уравнения (1.8) перепишем короче:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x l_2 + X_y m_2 + X_z n_2 \\ Y_v &= Y_x l_2 + Y_y m_2 + Y_z n_2 \\ Z_v &= Z_x l_2 + Z_y m_2 + Z_z n_2 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{matrix} \quad (1.9)$$

Очевидно (фиг. 13), нормальное напряжение по площадке *abc* получим как сумму проекций напряжений X_v, Y_v, Z_v на нормаль V .

Обозначая нормальное напряжение по принятой нами системе через V_v , получим

$$V_v = X_v l_2 + Y_v m_2 + Z_v n_2 = X_x l_2^2 + Y_y m_2^2 + Z_z n_2^2 + 2Y_x m_2 n_2 + 2Z_x n_2 l_2 + 2X_y l_2 m_2; \quad (1.10)$$

Аналогично получим касательные напряжения, проектируя X_v, Y_v, Z_v на оси U и W соответственно:

$$\left. \begin{aligned} U_v &= X_v l_1 + Y_v m_1 + Z_v n_1 = X_x l_1 l_2 + Y_y m_1 m_2 + Z_z n_1 n_2 + \\ &+ Y_x (m_1 n_2 + m_2 n_1) + Z_x (n_2 l_1 + n_1 l_2) + X_y (l_1 m_2 + l_2 m_1); \\ W_v &= X_v l_3 + Y_v m_3 + Z_v n_3 = X_x l_2 l_3 + Y_y m_2 m_3 + \\ &+ Z_z n_2 n_3 + Y_x (m_2 n_3 + m_3 n_2) + \\ &+ Z_x (n_3 l_2 + n_2 l_3) + X_y (m_3 l_2 + m_2 l_3). \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Легко видеть, что формулы (1.10) и (1.11) являются обобщением на пространственный случай известных из сопротивления материалов формул для напряжений по косым площадкам.

Действительно, если все силы расположены в плоскости OXY , то вместо тетраэдра $Oabc$ можно выделить треугольную призму Oab (фиг. 14). В формулах (1.10) и (1.11) исчезают X_z, Y_z, Z_z ; тогда эти формулы получают вид:

$$\left. \begin{aligned} V_v &= X_x l_1 + Y_y m_1 + 2X_y l_2 m_2, \\ U_v &= X_x l_1 l_1 + Y_y m_1 m_1 + X_y (l_1 m_2 + l_2 m_1). \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

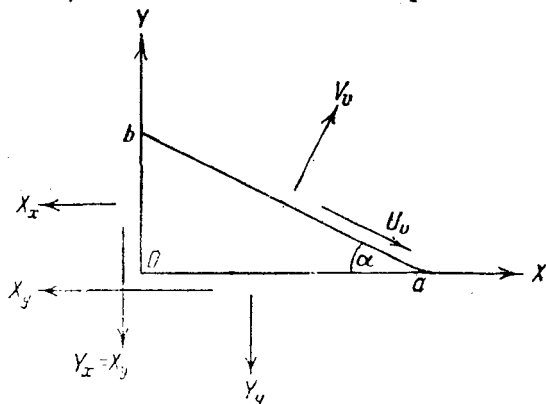
Углы $(UX), (UY), (VX), (VY)$ указаны в схеме (а), а соответственные косинусы в схеме б:

	X	Y		X	Y
U	α	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	(а)	U	$l_1 = \cos \alpha$
V	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	α		V	$m_1 = -\sin \alpha$
					(б)
					$l_2 = \sin \alpha$
					$m_2 = \cos \alpha$

На основании схемы (б) уравнения (1.12) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} V_v &= X_x \sin^2 \alpha + Y_y \cos^2 \alpha + 2X_y \sin \alpha \cos \alpha, \\ U_v &= (X_x - Y_y) \sin \alpha \cos \alpha + X_y (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

В этом виде они известны из сопротивления материалов; уравнения (1.13) можно, конечно, вывести и непосредственно на фиг. 14.



Фиг. 14.

Формулы (1.10) и (1.11) утверждают важное положение о том, что, зная напряжения по трём взаимно перпендикулярным элементарным площадкам в точке O :

$$\left. \begin{aligned} X_x, & X_y, & X_z, \\ Y_x, & Y_y, & Y_z, \\ Z_x, & Z_y, & Z_z, \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

мы можем вычислить все три составляющих напряжения

$$V_v, U_v, W_v$$

по любой четвертой площадке (в точке O), определяемой её внешней нормалью V ; ввиду этого величины (1.14) иногда называют элементами напряжённого состояния тела. Можно пойти далее и построить в точке O ещё две площадки с внешними нормальями U и W ; напряжения по этим площадкам выразятся формулами такого же вида, как (1.10) и (1.11), например:

$$U_u = X_x l_1^2 + Y_y m_1^2 + Z_z n_1^2 + 2Y_z m_1 n_1 + 2Z_x n_1 l_1 + 2X_y l_1 m_1.$$

Выполнив это, получим девять формул [три типа (1.10) и шесть типа (1.11)], выражающих составляющие напряжения по площадкам трёхгранника $OUVW$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} U_u, & V_v, & W_w \\ U_v, & V_v, & W_v \\ U_w, & V_w, & W_w \end{array} \right\} \quad (1.15)$$

через напряжения (1.14) по площадкам прежнего трёхгранника $OXYZ$.

Девять составляющих (1.14) или (1.15) определяют тензор напряжений и с этой точки зрения называются компонентами тензора напряжений. Формулы типа (1.10) и (1.11) (общее их число, как мы сказали, равно девяти) определяют преобразование тензора от одной системы координат к другой. Тензор напряжений (1.14) симметричен, так как компоненты, симметричные относительно главной диагонали (X_x, Y_y, Z_z), равны между собой на основании (1.6); это свойство сохраняется, очевидно, и при других координатах*).

Обратимся теперь к весьма важному вопросу о том, как распределяются напряжения по всевозможным площадкам, проведенным через данную точку тела; применим для этой цели весьма изящный и наглядный способ, найденный основателем теории упругости Коши. В выбранной точке тела M поместим начало координат, проведём элементарную площадку с внешней нормалью V и вдоль этой нормали построим вектор длиной p , которую временно оставим неопределённой. Координаты конца этого вектора будут

$$\xi = pl; \quad \eta = pm; \quad \zeta = pn, \quad (1.16)$$

* Более подробно о тензоре см. Н. И. Мусхелишвили «Некоторые задачи теории упругости», изд. АН СССР, 1933.

где l, m, n — косинусы углов нормали с осями координат. Нормальное напряжение по взятой площадке согласно (1.10) будет

$$V_v = X_x l^2 + Y_y m^2 + Z_z n^2 + 2Y_z mn + 2Z_x nl + 2X_y lm.$$

Определим l, m, n из предыдущих равенств и подставим сюда; тогда, по умножении уравнения на p^2 , приведём его к виду

$$X_x \xi^2 + Y_y \eta^2 + Z_z \zeta^2 + 2Y_z \eta \zeta + 2Z_x \zeta \xi + 2X_y \xi \eta = p^2 V_v. \quad (1.17)$$

Распорядимся теперь длиной вектора p так, чтобы правая часть этого уравнения всегда оставалась постоянной:

$$p^2 V_v = \pm c^2;$$

справа придётся брать знак $+$, если $V_v > 0$, т. е. нормальное напряжение по площадке растягивающее, и знак $-$, если оно сжимающее. Тогда

$$p = \sqrt{\frac{\pm c^2}{V_v}} \quad \text{или} \quad V_v = \pm \frac{c^2}{p^2}. \quad (1.18)$$

Введя обозначение

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = X_x \xi^2 + Y_y \eta^2 + Z_z \zeta^2 + 2Y_z \eta \zeta + 2Z_x \zeta \xi + 2X_y \xi \eta, \quad (1.19)$$

уравнение (1.17) запишем так:

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \pm c^2. \quad (1.20)$$

Оно изображает поверхность второго порядка, которая называется «поверхностью напряжений» или «квадрикой Коши»; поверхность эта имеет центр в начале координат*) и потому может быть либо а) эллипсоидом, либо б) однополостным гиперboloидом, либо в) двуполостным гиперboloидом; концы векторов p будут лежать на этой поверхности.

Допустим для определённости, что квадрика есть однополостный гиперboloид и что она построена; на фиг. 15 для простоты чертежа показано её сечение одной из главных плоскостей и предположено, что внешняя нормаль MV к площадке лежит в этой плоскости. Взяв площадку и проводя к ней внешнюю нормаль MV , найдём длину MM_1 вектора p ; зная её, по второй из формул (1.18) найдём нормальное напряжение $V_v = \overline{MN}$.

Покажем теперь, что можно легко найти и полное напряжение P_v по данной площадке. Действительно, возьмём частные производные функции (1.19) и воспользуемся (1.16) и (1.9);

*) Так как в уравнении (1.20) отсутствуют члены первой степени относительно ξ, η, ζ .

при этом последние формулы в наших обозначениях будут

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x l + X_y m + X_z n; \\ Y_v &= Y_x l + Y_y m + Y_z n; \\ Z_v &= Z_x l + Z_y m + Z_z n. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Получаем

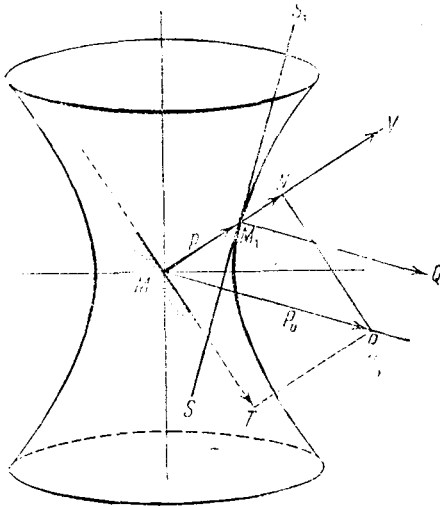
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 2(X_x \xi + X_y \eta + X_z \zeta) = 2p(X_x l + X_y m + X_z n) = 2pX_v;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 2(Y_x \xi + Y_y \eta + Y_z \zeta) = 2p(Y_x l + Y_y m + Y_z n) = 2pY_v;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 2(Z_x \xi + Z_y \eta + Z_z \zeta) = 2p(Z_x l + Z_y m + Z_z n) = 2pZ_v.$$

Известно, что эти частные производные пропорциональны косинусам углов, которые образует с осями координат нормаль

$M_1 Q$ к поверхности; на этом основании последние равенства показывают, что косинусы направляющих углов нормали к поверхности пропорциональны проекциям X_v , Y_v , Z_v полного напряжения по взятой площадке на оси координат. Отсюда вывод: полное напряжение MP по площадке перпендикулярно к касательной плоскости SS_1 к поверхности; зная его направление, получим и величину $P_v = \overline{MP}$, проведя $NP \perp MN$. Теперь, конечно, легко найдём и касательное напряжение MT . Таким образом, квадрика Коши позволяет полностью исследовать распределение напряжений в данной точке M тела.



Фиг. 15.

напряжений в данной точке M тела.

Не останавливаясь на частных случаях, встречающихся в процессе этого исследования, перейдём к основному, принципиальному выводу. Из аналитической геометрии известно, что путём поворота координатных осей уравнение поверхности второго порядка (1.20) можно преобразовать так, чтобы в новой координатной системе (U, V, W) исчезли члены, содержащие произведения координат. Тогда, очевидно, будем иметь:

$$\Gamma_u = 0; \quad \Gamma_v = 0; \quad W_u = 0.$$

Значит, по трём взаимно перпендикулярным площадкам, нормальным к новым осям (U, V, W), касательные напряжения обратятся в нуль. Эти три площадки называют главными; нормальные напряжения на них U_u, V_v, W_w (они же будут и полными напряжениями) называются главными напряжениями в данной точке тела M . Обозначим их короче:

$$U_u = N_1, \quad V_v = N_2, \quad W_w = N_3.$$

Тогда уравнение квадрики Коши в новых осях будет

$$N_1^2 \xi^2 + N_2^2 \eta^2 + N_3^2 \zeta^2 = \pm c^2.$$

Окончательный вид этой поверхности зависит от знаков главных напряжений N_1, N_2, N_3 и от обусловленного ими знака правой части уравнения. Не останавливаясь на деталях*), займёмся нахождением главных площадок и главных напряжений.

Если данная площадка abc (фиг. 13) — главная, то полное напряжение P_v , действующее на ней, направлено вдоль нормали V и является главным напряжением; обозначим его через N ; проекции его на оси координат будут

$$X_v = Nl, \quad Y_v = Nm, \quad Z_v = Nn.$$

Подставим эти значения в уравнения (1.21), найдем их так:

$$\left. \begin{aligned} (X_x - N)l + X_y m + X_z n &= 0, \\ Y_x l + (Y_y - N)m + Z_y n &= 0, \\ Z_x l + Z_y m + (Z_z - N)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Добавив сюда основное соотношение между направляющими косинусами нормали V :

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (1.23)$$

будем иметь четыре уравнения для нахождения главного напряжения N и соответствующей ему главной площадки, т. е. направляющих косинусов её нормали l, m, n . Ход решения будет следующим: однородная система уравнений (1.22) не допускает тривиального решения:

$$l = m = n = 0,$$

ибо оно противоречит (1.23); однако, для существования других решений этой системы (при которых хотя бы один из ко-

*) Об этом см. цитированную книгу Н. И. Мухелишвили.

синусов l , m , n был отличен от нуля) необходимо, чтобы определитель её был равен нулю. Таким образом, приходим к условию

$$\begin{vmatrix} (X_x - N) & X_y & X_z \\ Y_x & (Y_y - N) & Y_z \\ Z_x & Z_y & (Z_z - N) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.24)$$

Раскрывая определитель левой части, получим кубичное уравнение

$$N^3 - \Theta N^2 + HN - \Delta = 0, \quad (1.25)$$

в котором коэффициенты имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= X_x + Y_y + Z_z; \\ H &= \begin{vmatrix} X_x X_y \\ X_x Y_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_x X_z \\ X_x Z_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y_y Y_z \\ Y_y Z_z \end{vmatrix}; \\ \Delta &= \begin{vmatrix} X_x X_y X_z \\ Y_x Y_y Y_z \\ Z_x Z_y Z_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Все три корня уравнения (1.25) действительны*); они и дают значения трёх главных напряжений N_1, N_2, N_3 . Внося какое-либо из этих значений N в уравнения (1.22) и пользуясь двумя из них**), найдём величины l'_i, m'_i, n'_i , пропорциональные направляющим косинусам нормали к искомой главной площадке:

$$l'_i = \lambda l_i; \quad m'_i = \lambda m_i; \quad n'_i = \lambda n_i.$$

Подставляя это в (1.23), найдём множитель λ , а значит, и самые косинусы. Таким образом, направления главных площадок будут определены.

Сделаем ещё одно замечание; корни уравнения (1.25) не должны зависеть от системы координат x, y, z ; значит, коэффициенты этого уравнения тоже не зависят от выбора координатной системы. Отсюда заключаем, что формулы (1.26) дают три функции от компонентов тензора напряжений (1.14), являющихся инвариантами преобразования координат. Особое значение имеет первый из них — линейный инвариант:

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z, \quad (1.27)$$

как это мы увидим в главе III.

*) Это доказывается в аналитической геометрии при исследовании главных осей центральной поверхности второго порядка.

**) Третье будет следствием остальных двух вследствие условия (1.24).

Если главные площадки в данной точке найдены, то наряду с квадратикой Коши можно указать другую геометрическую картину распределения напряжений, предложенную Ламе.

Предположим, что плоскости координат Oxy , Oyz и Ozx совпадают с главными площадками в данной точке и, значит, по этим площадкам: $Y_z = Z_y = 0$; $Z_x = X_z = 0$; $X_y = Y_x = 0$; $X_x = N_1$; $Y_y = N_2$; $Z_z = N_3$.

Тогда уравнения (1.9) упрощаются и принимают вид

$$\left. \begin{aligned} X_v &= N_1 l_v, \\ Y_v &= N_2 m_v, \\ Z_v &= N_3 n_v. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Соотношения (1.28) можно изобразить геометрически. Для этого

из данной точки O (фиг. 16) будем откладывать вектор OP , равный полному напряжению на выбранной площадке с внешней нормалью V ; координаты конца этого вектора будут:

$$\left. \begin{aligned} x &= X_v; \\ y &= Y_v; \\ z &= Z_v. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

При изменении наклона площадки точка P будет описывать некоторую поверхность, которая оказывается эллипсоидом; действительно, на основании (1.29) и (1.28) получается

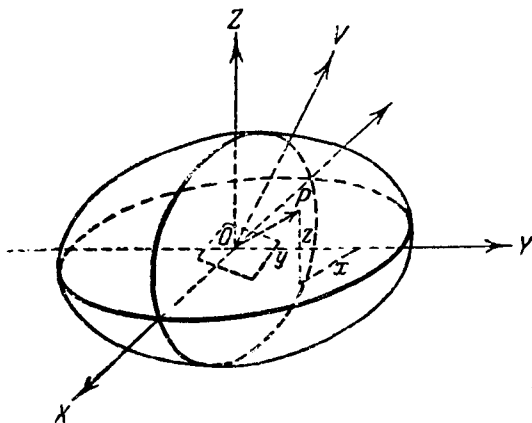
$$x = N_1 l_v; \quad y = N_2 m_v; \quad z = N_3 n_v;$$

отсюда

$$\frac{x^2}{N_1^2} + \frac{y^2}{N_2^2} + \frac{z^2}{N_3^2} = l_v^2 + m_v^2 + n_v^2 = 1, \quad (1.30)$$

а это есть уравнение эллипсоида, отнесенного к главным осям. Эллипсоид этот называется эллипсоидом напряжений или эллипсоидом Ламе. Из трёх его полусей одна будет наибольшей, другая—наименьшей, третья будет средней между ними; следовательно, из трёх главных напряжений одно будет наибольшее, другое—наименьшее, а третье—среднее между ними.

Отсюда следует, что в пространственной задаче главные напряжения не могут определяться как наибольшее и наименьшее из всех нормальных напряжений в данной точке.



Фиг. 16.

Если два главных напряжения равны между собой, например, $N_1 = N_2$, то эллипсоид Ламе будет эллипсоидом вращения, и напряжённое состояние в данной точке будет симметричным относительно третьей главной оси Oz . Если все главные напряжения равны между собою: $N_1 = N_2 = N_3$, то эллипсоид Ламе обратится в шар, и все площадки в данной точке будут главными, а напряжения по ним одинаковы; это будет, например, при всестороннем сжатии или растяжении.

§ 5. Наибольшие касательные напряжения.

Займёмся определением наибольших касательных напряжений. Для простоты исследования снова направим оси координат $Oxyz$ по нормальям главных площадок (т. е. вдоль главных напряжений).

Выберем произвольную площадку с внешней нормалью V , определяемой косинусами l, m, n ; полное напряжение по ней P_v согласно (1.28) будет иметь проекции

$$X_v = N_1 l; \quad Y_v = N_2 m; \quad Z_v = N_3 n.$$

Нормальное напряжение по этой площадке V_v будет [ср. выражение для V_v после формул (1.16)]

$$V_v = N_1 l^2 + N_2 m^2 + N_3 n^2.$$

Обозначая полное касательное напряжение по взятой площадке через T_v , будем иметь

$$P_v^2 = V_v^2 + T_v^2,$$

откуда найдём

$$\begin{aligned} T_v^2 &= P_v^2 - V_v^2 = (X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2) - V_v^2 = \\ &= (N_1^2 l^2 + N_2^2 m^2 + N_3^2 n^2) - (N_1 l^2 + N_2 m^2 + N_3 n^2)^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

При вращении площадки T_v будет изменяться, являясь функцией двух переменных, например, l и m , ибо согласно (1.23)

$$n^2 = 1 - l^2 - m^2;$$

учитывая это, предыдущее выражение напомним так:

$$\begin{aligned} T_v^2 &= (N_1^2 - N_3^2) l^2 + (N_2^2 - N_3^2) m^2 + N_3^2 - \\ &- [(N_1 - N_3) l^2 + (N_2 - N_3) m^2 + N_3]^2. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Для получения $\max_{\min} T_v$ приравняем нулю частные производные T_v по l и m ; однако, удобнее составить другие условия:

$$\frac{\partial T_v^2}{\partial l} = 2T_v \frac{\partial T_v}{\partial l} = 0;$$

$$\frac{\partial T_v^2}{\partial m} = 2T_v \frac{\partial T_v}{\partial m} = 0.$$

Заметим только, что при этом, кроме нужных нам решений, получим лишнее решение $T_y = 0$, которое, очевидно, даст главную площадку; это решение мы далее легко обнаружим и отбросим. Раскрывая предыдущие условия, на основании (1.32) получим два уравнения для определения l и m :

$$\begin{aligned} (N_1^2 - N_2^2) l - 2[(N_1 - N_3) l^2 + (N_2 - N_3) m^2 + N_3] (N_1 - N_3) l &= 0; \\ (N_2^2 - N_3^2) m - 2[(N_2 - N_3) l^2 + (N_2 - N_3) m^2 + N_3] (N_2 - N_3) m &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим наиболее общий случай, когда N_1 , N_2 и N_3 различны между собою; тогда предыдущие уравнения можно сократить на входящие в них разности главных напряжений и после небольшого преобразования представить так:

$$\left. \begin{aligned} \{N_1 - N_3 - 2[(N_1 - N_3) l^2 + (N_2 - N_3) m^2]\} l &= 0; \\ \{N_2 - N_3 - 2[(N_1 - N_3) l^2 + (N_2 - N_3) m^2]\} m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Имеем два уравнения третьей степени относительно l и m ; соответственно этому получим три решения, легко обнаруживаемые. Первое и наиболее простое из них, при котором

$$l = m = 0, \quad n = 1,$$

придётся отбросить, так как оно даёт главную площадку, лежащую в плоскости Oxy . Поэтому надо будет рассмотреть три случая:

$$1) \quad l \neq 0; \quad m = 0; \quad 2) \quad l = 0; \quad m \neq 0; \quad 3) \quad l \neq 0; \quad m \neq 0.$$

Однако, третий случай невозможен, ибо тогда, сокращая уравнения (1.33) соответственно на l и m и вычитая одно из другого, сразу получим

$$N_1 = N_2,$$

что противоречит начальному предположению. В первом случае ($l \neq 0; m = 0$) второе из уравнений (1.33) будет удовлетворено, а первое по сокращении на l приведётся к виду

$$(N_1 - N_3) (1 - 2l^2) = 0, \quad (1.34)$$

откуда

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad m = 0; \quad n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Во втором случае из второго уравнения (1.33) аналогично получим

$$l = 0; \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Если бы мы в самом начале исключили из (1.31) не n , а, например, m , и повторили исследование, то получили бы дополнительно ещё одно решение:

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad n = 0.$$

Каждое из найденных трёх решений определяет две площадки, проходящие через одну из осей координат и наклоненные к двум другим осям под углами 45° и 135° .

Подставляя первое решение в (1.31), получим искомое максимальное (или минимальное) значение касательного напряжения:

$$T_v^2 = \frac{N_1^2 + N_3^2}{2} - \left(\frac{N_1 + N_3}{2} \right)^2 = \left(\frac{N_1 - N_3}{2} \right)^2;$$

заменяя обозначение T_v на T_2 , найдём

$$T_2 = \pm \frac{N_1 - N_3}{2};$$

остальные два решения дадут аналогично

$$T_1 = \pm \frac{N_2 - N_3}{2};$$

$$T_3 = \pm \frac{N_1 - N_2}{2}.$$

(1.35)

Делаем окончательный вывод из выполненного исследования. Три взаимно перпендикулярные главные площадки в точке M образуют трёхгранник. Если (фиг. 17) оси MX , MY , MZ представляют линии их пересечения, то три пары площадок, по которым действуют наибольшие касательные напряжения, проходят через эти оси и делят пополам двугранные углы между главными площадками.

Максимальные касательные напряжения согласно (1.35) равны полуразностям главных напряжений по двум площадкам, пересекающимся вдоль той из осей X , Y , Z , через которую проходит данная площадка T .

Если

$$N_1 > N_2 > N_3,$$

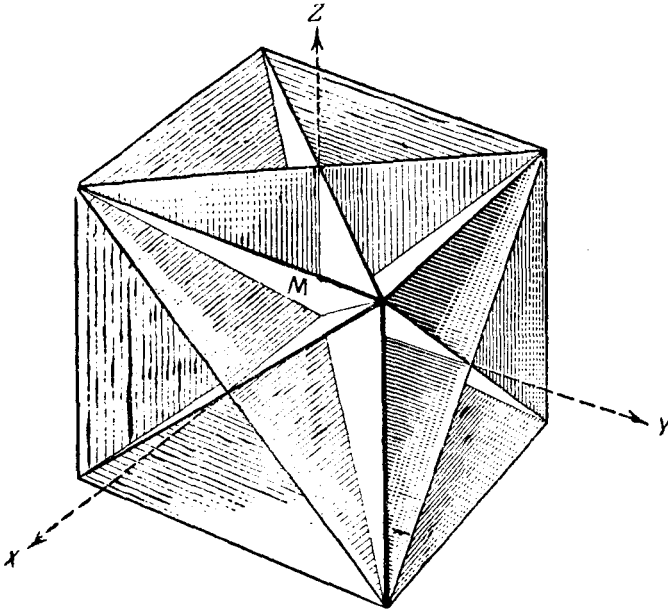
то из напряжений (1.35) наибольшим будет

$$T_2 = \pm \frac{N_1 - N_3}{2}.$$

Если, например,

$$N_1 = N_2 > N_3,$$

то квадрिका Коши и эллипсоид Ламе будут поверхностями вращения вокруг оси MZ ; все площадки, проходящие через ось MZ (их имеется бесконечное множество), будут главными. Площадок, на которых $T = T_2$, имеется также бесконечное



Фиг. 17.

множество; они касаются круглого конуса с осью MZ и углом раствора 90° .

В заключение этой главы обобщим закон взаимности касательных напряжений (1.6).

Рассмотрим (фиг. 18) две площадки с нормальными X и V , проходящие через точку M , и пусть полные напряжения по ним будут соответственно: P_x и P_v . Согласно принятым нами обозначениям

$$P_v \cos(P_v X) = X_v.$$

Далее,

$$X_x = P_x \cos(P_x X); \quad Y_x = P_x \cos(P_x Y); \quad Z_x = P_x \cos(P_x Z).$$

Внося это в первое из уравнений (1.8) и учитывая (1.6), получим

$$P_v \cos(P_v X) = X_v = P_x [\cos(VX) \cos(P_x X) + \\ + \cos(VY) \cos(P_x Y) + \cos(VZ) \cos(P_x Z)] = P_x \cos(P_x V),$$

но опять согласно нашим обозначениям

$$P_x \cos(P_x V) = V_x;$$

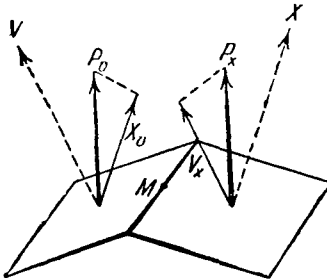
таким образом,

$$X_v = V_x; \quad (1.36)$$

значит, проекции полных напряжений P_v и P_x по взятым площадкам соответственно на нормали X и V к этим площадкам (см. фиг. 18) равны между собою. Закон взаимности (1.6) получается отсюда как частный случай, если площадки взаимно перпендикулярны между собой.

Упражнения к §§ 2—4.

1. В стенке плотины, изображённой на фиг. 5, найдены следующие напряжения:



Фиг. 18.

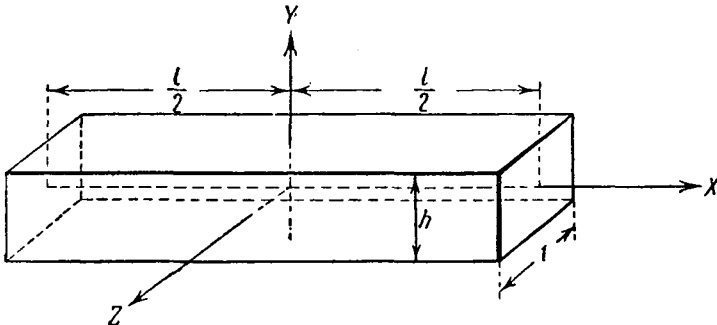
$$X_x = -\gamma y;$$

$$Y_v = \left(\frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} \right) x + \left(\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} - p \right) y;$$

$$Y_x = X_v = -\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} x;$$

$$Y_x = Z_y = X_z = Z_x = Z_z = 0.$$

Подставить эти выражения в уравнения (1.5) и проверить, при каких условиях они будут удовлетворены. Найти нагрузку, действующую по грани Oy (т. е. при $x=0$); пользуясь условиями (1.8), найти также нагрузку по грани OA (при $x=y \operatorname{tg} \beta$).



Фиг. 19.

2. В круглом стержне диаметра $2r$ (фиг. 6) возникают следующие напряжения:

$$X_x = Y_v = Z_z = X_y = Y_x = 0; \quad X_z = Z_x = -G\gamma y; \quad Y_z = Z_y = G\gamma x.$$

Проверить, удовлетворяют ли они уравнениям (1.5) и при каких условиях. Доказать при помощи уравнений (1.8), что боковая поверхность свободна от нагрузки (т. е. что $X_y = Y_x = Z_z = 0$).

У к а в а н и е: для точки на боковой поверхности

$$\cos(VX) = \frac{x}{r}; \quad \cos(VY) = \frac{y}{r}.$$

3. При чистом изгибе прямого стержня (при системе координатных осей по фиг. 7) возникают напряжения:

$$X_x = -\frac{Ez}{\rho}; \quad Y_y = Z_z = X_y = Y_z = Z_x = 0.$$

Выполнить то же, что в предыдущем упражнении.

4. В брусе прямоугольного сечения имеются напряжения (фиг. 19):

$$X_x = \frac{12}{h^3} \left(M_0 + \frac{ql^2}{8} - \frac{qh^2}{20} \right) y - \frac{6q}{h^3} x^2 y + \frac{4q}{h^3} y^3;$$

$$Y_y = -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{h^2}{4} y + \frac{h^3}{12} \right);$$

$$X_y = -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) x;$$

$$Y_z = Z_x = Z_z = 0.$$

Проверить, удовлетворяют ли эти напряжения уравнениям (1.5); найти нагрузки, действующие по граням бруса; какой случай деформации бруса здесь имеется с точки зрения сопротивления материалов?

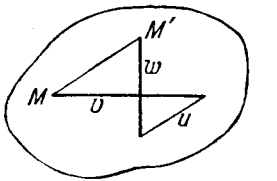
ГЛАВА II.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ.

§ 6. Компоненты перемещения и компоненты деформации. Зависимость между ними.

Возьмём какое-либо упругое тело и закрепим его так, чтобы оно не могло перемещаться как тело абсолютно твёрдое. Тогда перемещения всякой точки его будут вызываться только деформациями.

Рассмотрим какую-либо точку $M(x, y, z)$ закреплённого таким образом твёрдого тела (фиг. 20). Благодаря происшедшей деформации точка M переместится в новое положение M' . Назовём проекции перемещения MM' на оси координат через



Фиг. 20.

$$u, v, w; \quad (2.1)$$

так как перемещения различных точек будут различны, то проекции перемещений (2.1) будут функциями от координат точки:

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y, z); \\ v &= f_2(x, y, z); \\ w &= f_3(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

От перемещений переходим к деформациям. Выделим в упругом теле бесконечно малый параллелепипед (фиг. 21) с рёбрами dx, dy, dz . При деформации тела он переместится, и сам деформируется, причём изменятся длины его рёбер и первоначально прямые углы между гранями искажутся.

Для оценки деформации упругого тела в данной точке M следует изучить удлинения (линейные деформации) рёбер dx, dy, dz выделенного параллелепипеда и изменения углов $\angle M$,

1 МЗ, 2 МЗ (сдвиги или угловые деформации). С этой целью рассмотрим проекции параллелепипеда на координатные плоскости; очевидно, что по деформации этих трёх проекций можно судить и о деформации самого параллелепипеда. В дальнейшем ограничимся только случаем весьма малых деформаций, позволяющим сильно упростить последующие выводы.

Возьмём, например, проекцию элемента $M123$ на плоскость Oxy . До деформации длины рёбер были (фиг. 22): $AB = dx$, $AC = dy$. После деформации они перешли в положение $A'B'$ и $A'C'$. Займёмся проекцией AB . Если перемещение точки A вдоль оси Ox равно u , то соответственное перемещение точки B будет

$$u + \delta u = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

где δu — приращение; так как точка B отличается от точки A только координатой x , то в последней формуле малое приращение δu с точностью до бесконечно малых второго порядка мы заменили частным дифференциалом функции u по переменной x . Аналогично: если перемещение точки A вдоль оси Oy будет v , то перемещение точки B вдоль той же оси выразим так:

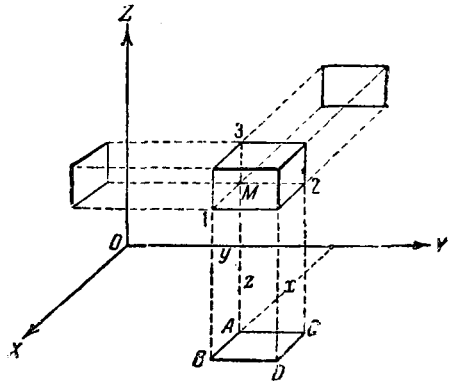
$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx.$$

Проекция абсолютного удлинения отрезка AB на ось Ox будет

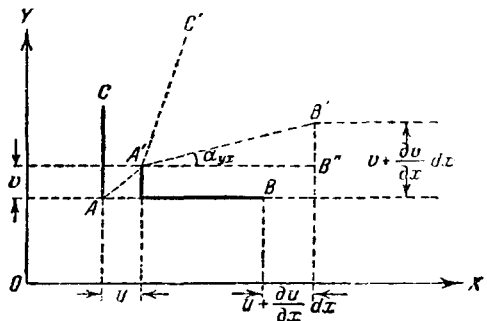
$$\delta(dx) = \frac{\partial u}{\partial x} dx;$$

относительное удлинение этого ребра

$$e_{xx} = \frac{\delta(dx)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$



Фиг. 21.



Фиг. 22.

Рассуждая аналогично, для относительного удлинения ребра AC , направленного вдоль оси Oy , получим

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y};$$

таким же путём для ребра, параллельного оси Oz (т. е. ребра MZ на фиг. 21), будем иметь

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Мы получили формулы линейных деформаций (удлинений) в данной точке M тела по направлениям трёх осей координат.

Обратимся к анализу угловых деформаций. Легко найдём угол α_{yx} поворота ребра $AB = dx$ в плоскости Oxy :

$$\alpha_{yx} \approx \operatorname{tg} \alpha_{yx} = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}.$$

Так как мы ограничились случаем весьма малых деформаций, то в знаменателе последнего выражения отбросим величину $\frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx}$, которая весьма мала по сравнению с единицей; получаем

$$\alpha_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Аналогично получим угол поворота ребра $AC = dy$ в плоскости Oxy :

$$\alpha_{xy} \approx \operatorname{tg} \alpha_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.4)$$

После этого легко найдём относительный сдвиг, т. е. искажение прямого угла BAC :

$$e_{xy} = \alpha_{yx} + \alpha_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.5)$$

Формула (2.5) даёт выражение угла сдвига, происходящего в плоскости Oxy .

Аналогично получим выражения сдвигов в двух других координатных плоскостях при помощи круговой подстановки букв по схеме фиг. 23.

Собирая достигнутые результаты, получаем шесть основных зависимостей, характеризующих деформацию:

а) относительные удлинения

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z};$$

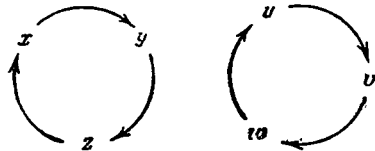
б) относительные сдвиги

$$\left. \begin{aligned} e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ e_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} (2.6)$$

Эти уравнения были выведены Коши.

Относительно знаков деформаций e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , e_{yz} , e_{zx} : e_{xy} заметим следующее. Если функция u возрастает с возрастанием x_y ,

т. е. $e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} > 0$, то мы, очевидно, имеем дело с увеличением длины dx (перемещение вправо точки B по фиг. 22 более перемещения точки A). Значит, если $e_{xx} > 0$, то получается удлинение, если $e_{xx} < 0$, то получается укорочение; то же правило справедливо для e_{yy} и e_{zz} . Далее, если функция v возрастает с возрастанием x , то [формула (2.3)]



Фиг. 23.

$\alpha_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} > 0$; при этом (фиг. 22)

отрезок AB поворачивается от оси $+x$ к оси $+y$; точно так же при $\alpha_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} > 0$ отрезок AC поворачивается от оси $+y$ к оси $+x$. Отсюда, согласно уравнению (2.5), следует, что сдвиг $e_{xy} > 0$, если прямой угол между осями $+x$ и $+y$ уменьшается. Такое же правило получается и для сдвигов в двух других плоскостях. Резюмируя сказанное, получаем следующее правило знаков деформаций:

а) положительным линейным деформациям e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} соответствуют удлинения вдоль осей координат; отрицательным — укорочения;

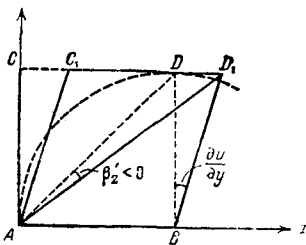
б) положительным угловым деформациям (сдвигам) e_{yz} , e_{zx} , e_{xy} соответствует уменьшение углов между положительными направлениями осей; отрицательным — увеличение тех же углов.

Формулы (2.6) показывают, что шесть функций e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , e_{yz} , e_{zx} , e_{xy} называемых компонентами деформации, линейно

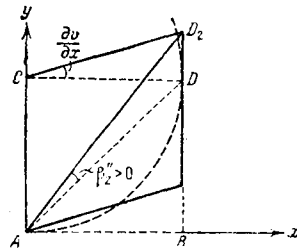
выражаются через девять частных производных от компонентов перемещений u, v, w :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Компоненты главной диагонали этой матрицы являются удлинениями [см. первые три зависимости (2.6)]. Остальные компоненты представляют собою углы поворота рёбер элементарного



Фиг. 24а.



Фиг. 24б.

параллелепипеда $M123$, показанного на фиг. 21, вокруг осей x, y, z ; это видно, например, из формул (2.3) и (2.4); в принятых там обозначениях матрицу (2.7) напомним так:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} \quad \alpha_{yx} \quad \alpha_{zx} \\ \alpha_{xy} \quad e_{yy} \quad \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} \quad \alpha_{yz} \quad e_{zz} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Эти обозначения удобны; второй индекс при букве α указывает на тот элементарный отрезок (dx, dy, dz), поворот которого рассматривается; первый индекс указывает ось, в направлении которой происходит поворот. Например, $\alpha_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y}$ обозначает угол поворота элемента dy в направлении от оси y к оси z .

Отметим тот важный факт, что невозможно составить систему уравнений, обратных уравнениям (2.6), т. е. выразить девять компонентов матрицы (2.7) через шесть компонентов деформаций (2.6); уравнений (2.6) для этого недостаточно. Причина такого обстоятельства лежит в том, что наша геометрическая картина деформаций в данной точке ещё не полная; для довершения её и достижения симметрии в выкладках введём ещё три компонента; пусть элемент $M 1 2 3$ на фиг. 21 имеет форму куба ($dx = dy = dz$) и рассмотрим углы поворота его диагоналей вокруг осей x, y, z в том случае, когда удлинения $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = 0$;

на фиг. 24а показана проекция $ABCD$ взятого куба на плоскость Axy .

Очевидно, угол поворота диагонали куба вокруг оси z равен углу поворота проекции AD этой диагонали вокруг точки A . Возьмём пока частный случай «простого сдвига» параллельно оси x (фиг. 24а); тогда для угла поворота β'_z диагонали AD получим

$$\beta'_z = \angle DAD_1 \approx \frac{1}{2} \angle DBD_1.$$

В этом убедимся, если построим окружность ADD_1 , с центром в B , и примем с точностью до малых второго порядка, что точка D_1 также лежит на этой окружности; тогда углы DAD_1 и DBD_1 опираются на общую дугу DD_1 ; отсюда и вытекает вышенаписанное приближённое равенство; из него следует, что

$$\beta'_z = - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Знак минус взят потому, что в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial u}{\partial y} > 0, \text{ а } \beta'_z < 0^*).$$

В случае простого сдвига вдоль оси y (фиг. 24б) найдём аналогично

$$\beta''_z = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

В общем случае сдвига будем иметь

$$\beta_z = \beta'_z + \beta''_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (\alpha_{xv} - \alpha_{yx}).$$

Проведя такие же рассуждения для плоскостей yz и zx , получим аналогичные формулы для углов поворота диагонали элементарного кубика относительно осей x и y . Обычно вводятся удвоенные углы поворота; обозначаются они буквой ω с соответствующими индексами. Таким образом, получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Величины $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ называются компонентами вращения; для полноты картины деформаций в данной точке следует к уравнениям (2.6) добавить уравнения (2.9). Просмотрим эту

*) Принимаем, как обычно в кинематике, что вращение вокруг оси против часовой стрелки положительно.

картину в простом, но очень важном случае, когда перемещения u, v, w являются линейными функциями координат точки, а именно:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z; \\ v &= v_0 + c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z; \\ w &= w_0 + c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Компоненты деформации (2.6) и компоненты вращения (2.9) будут при этом постоянными числами; такая деформация называется однородной. При деформации данное тело преобразуется в некоторое другое тело; каждая точка (x, y, z) переходит в другую точку:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + u; \\ y_1 &= y + v; \\ z_1 &= z + w. \end{aligned}$$

Очевидно, что в случае однородной деформации (2.10), каждая плоскость (или прямая) переходит в плоскость (или прямую); при этом две параллельные плоскости (или прямые) переходят также в две параллельные плоскости (или прямые); прямой параллелепипед преобразуется, вообще говоря, в косоугольный параллелепипед. Так как при выводе уравнений (2.6) мы отбрасывали малые величины высшего порядка, то деформация, определяемая этими уравнениями, в общем случае будет однородной только в весьма малой области, выделенной в теле, значит, элементарный параллелепипед $M I 2 3$ (фиг. 21) и в общем случае обратится в косоугольный параллелепипед; противоположные грани его останутся плоскими и взаимно параллельными.

Рассмотрим ещё уравнения (2.10) в том случае, когда все компоненты деформации (2.6) равны нулю и тело не деформируется; легко найдём, что тогда

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22} = c_{33} = 0; \\ c_{21} &= -c_{12}; c_{32} = -c_{23}; c_{31} = -c_{13}. \end{aligned}$$

Вводя более краткие обозначения:

$$c_{22} = p; c_{12} = q; c_{21} = r,$$

напишем (2.10) так:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + qz - ry; \\ v &= v_0 + rx - pz; \\ w &= w_0 + py - qx. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Эти формулы совпадают с формулами кинематики для бесконечно малых перемещений абсолютно твёрдого тела; u_0, v_0, w_0 — поступательные перемещения тела; p, q, r — углы

поворота вокруг осей координат. Далее имеем

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = c_{31} - c_{13} = 2c_{31} = 2p;$$

аналогично

$$\omega_y = 2q; \quad \omega_z = 2r;$$

значит, введенные компоненты $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ в этом случае представляют собою удвоенные углы поворота данного элемента вокруг осей.

В теории упругости принято говорить, что формулы (2.11) выражают «жёсткое смещение тела».

Рассмотрим теперь обратный случай, когда компоненты деформации (2.6) отличны от нуля, но равны нулю компоненты вращения (2.9); тогда

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

а это есть условие того, что выражение

$$u dx + v dy + w dz$$

является полным дифференциалом некоторой функции

$$\Phi(x, y, z),$$

т. е. что

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

В этом случае говорят, что имеется «чистая деформация» и что перемещения имеют потенциал $\Phi(x, y, z)$.

§ 7. Уравнения неразрывности деформаций.

Резюмируя предыдущие выводы, мы видим, что перемещение данной точки упругого тела определяется тремя функциями:

$$u, v, w; \tag{2.2}$$

деформация в данной точке определяется шестью функциями:

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}. \tag{2.12}$$

Однако, уравнения (2.6) показывают, что если заданы три функции (2.2), то этим самым будут определены все шесть составляющих деформации (2.12), выражающихся через первые производные функций (2.2); отсюда уже наперёд можно предвидеть, что шесть составляющих деформации (2.12) нельзя задать произвольно; между ними должны существовать какие-то зависимости, к выводу которых мы и переходим. Число этих зависимостей равно шести и делятся они на две группы.

Первая группа. Продифференцируем первые два из уравнений (2.6) следующим образом:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x^2};$$

складывая эти уравнения почленно, получаем

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Это одно из нужных нам соотношений между деформациями. Делая в нём круговую подстановку букв, получим два других равенства. Это приводит нас к первой группе зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Вторая группа. Последние три из уравнений (2.6) дифференцируем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} & | & + \\ \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & | & + \\ \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} & | & - \end{aligned} \right.$$

Изменим знаки последнего из полученных уравнений и затем их все почленно сложим:

$$\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Это уравнение ещё раз дифференцируем по z и, замечая, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}. \quad (2.14)$$

Это одна из искомых зависимостей второй группы. Делая в уравнении (2.14) круговую подстановку букв, получим ещё два уравнения такого же вида. Присоединяя эти зависимости

к зависимостям (2.13), получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Необходимость существования этих зависимостей мы обосновали аналитическим путём, сопоставляя число функций (2.2) с числом функций (2.12) и принимая во внимание зависимости между ними (2.6); той же цели можно достичь геометрическим путём. Для этого представим себе упругое тело разрезанным на малые параллелепипеды и дадим каждому из них деформацию, определяемую шестью величинами (2.12); легко сообразим, что если составляющие деформации (2.12) не связаны между собой определёнными зависимостями, то из отдельных деформированных параллелепипедов не удастся вновь сложить непрерывное (деформированное) твёрдое тело. Уравнения (2.15) и доставляют нам эти зависимости; если мы при задании деформаций (2.12) не примем их во внимание, то после деформации тела во всех точках его окажутся бесконечно малые разрывы. Эти соображения придают новый смысл уравнениям (2.15), и с этой новой точки зрения уравнения (2.15) называются уравнениями неразрывности или совместности деформаций. Введены они Сен-Венаном и часто называются уравнениями Сен-Венана. Сделаем ещё следующее важное замечание.

Если нам удастся по заданным нагрузкам тела найти непосредственно перемещения его точек u, v, w , то после этого деформации (2.12) можно вычислить по уравнениям (2.6); при этом условия неразрывности будут сами по себе удовлетворены, так как они выведены из уравнений (2.6) и являются их следствием*).

Если же мы по заданным нагрузкам найдём напряжения и ватем деформации (2.12), то при этом необходимо будет одновременно удовлетворить и уравнениям неразрывности (2.15); в противном случае деформации будут несовместимы, и мы не

* С этой точки зрения уравнения (2.15) иногда называют тождествами Сен-Венана.

будем в состоянии найти перемещения (2.2) из уравнений (2.6), так как в них будут взаимные противоречия.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Введя компоненты вращения, мы получаем возможность написать систему уравнений, обратных (2.6), т. е. решать совместно уравнения (2.6) и (2.9) относительно производных (2.7) и выразить их через компоненты деформации и вращения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e_{xx}; & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2}(e_{xy} - \omega_z); & \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2}(e_{xz} + \omega_y); \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2}(e_{xy} + \omega_z); & \frac{\partial v}{\partial y} &= e_{yy}; & \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{2}(e_{yz} - \omega_x); \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{2}(e_{xz} - \omega_y); & \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{2}(e_{yz} + \omega_x); & \frac{\partial w}{\partial z} &= e_{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Теперь можно матрицу компонентов (2.7) условно представить как сумму двух матриц так, что каждый компонент матрицы (2.7) равен сумме соответственных компонентов слагаемых матриц:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}e_{xy} & \frac{1}{2}e_{xz} \\ \frac{1}{2}e_{xy} & e_{yy} & \frac{1}{2}e_{yz} \\ \frac{1}{2}e_{xz} & \frac{1}{2}e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\omega_z & \frac{1}{2}\omega_y \\ \frac{1}{2}\omega_z & 0 & -\frac{1}{2}\omega_x \\ -\frac{1}{2}\omega_y & \frac{1}{2}\omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Первая матрица правой части симметрична: она определяет чистую деформацию (без вращений). Вторая матрица антисимметрична; видим, что она определяет жёсткий поворот тела (без деформации). Наши рассуждения можно связать с теорией тензоров *) и тогда формулировать последний результат так: тензор малой деформации (2.7) может быть разложен на симметричный тензор чистой деформации и антисимметричный тензор жёсткого вращения.

Равенства (2.16) можно рассматривать как дифференциальные уравнения относительно u , v , w . Если заданы компоненты деформации и вращения во всех точках тела, то интегрированием уравнений (2.16) можно найти самые смещения точек тела u , v , w . Выполняя это интегрирование, мы действительно убедимся в необходимости удовлетворить условиям неразрывности деформации (2.6).

Обратимся к уравнениям первой строки (2.16), из которых будем разыскивать функцию $u(x, y, z)$; замечаем, что по смыслу

*) См. цитированную выше книгу Н. И. Мусхелишвили.

этих уравнений правые части их должны быть частными производными одной и той же функции; для этого должны быть удовлетворены три условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{xx}}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (e_{xy} - \omega_z); & \frac{\partial e_{xx}}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (e_{xz} + \omega_y); \\ \frac{\partial}{\partial z} (e_{xy} - \omega_z) &= \frac{\partial}{\partial y} (e_{xz} + \omega_y), \end{aligned} \quad (2.18)$$

которые являются результатом исключения функции u из уравнений (2.16). Из (2.18) найдём

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} &= \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} - 2 \frac{\partial e_{xx}}{\partial y}; \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} &= -\frac{\partial e_{xz}}{\partial x} + 2 \frac{\partial e_{xx}}{\partial z}; \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} &= \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{xz}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение упрощается на основании следующего тождества, которое получается путём дифференцирования равенств (2.9):

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0, \quad (2.19)$$

и тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} &= \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} - 2 \frac{\partial e_{xx}}{\partial y}; \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} &= -\frac{\partial e_{xz}}{\partial x} + 2 \frac{\partial e_{xx}}{\partial z}; \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial x} &= \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Продельвая такие же выкладки со второй и третьей строками уравнений (2.16), исключим из них v и w и в дополнение к (2.20) получим ещё шесть уравнений; таким путём все девять частных производных от компонентов вращения будут выражены через частные производные от компонентов деформации; другими словами, для ω_x , ω_y , ω_z мы получим систему уравнений, аналогичных уравнениям (2.16) для u , v , w . Значит, к полученным таким путём уравнениям можно применить весь описанный сейчас процесс и в результате исключить из них ω_x , ω_y , ω_z ; получим опять девять равенств, но они будут содержать только вторые производные от компонентов деформации. Среди этих равенств лишь шесть различны, и они совпадут с уравнениями (2.15). Таким образом, уравнения неразрывности Сен-Венана (2.15) действительно являются необходимыми условиями для возмож-

ности определить из (2.6) перемещения по заданным компонентам деформаций.

Условия Сен-Венана одновременно и достаточны для этой цели, если мы рассматриваем тело односвязное, не имеющее сквозных полостей. В случае многосвязного тела условия Сен-Венана также позволяют определить перемещения u , v , w , интегрируя уравнения Коши (2.6); однако, теперь эти перемещения могут представиться многозначными функциями от x , y , z ; кроме условий Сен-Венана необходимо ввести некоторые дополнительные условия для того, чтобы перемещения были однозначны, как этого требует физический характер задачи.

Случай деформации многосвязного тела подробно разобран в главе I и добавлении II цитированной выше книги Н. И. Мусхелишвили.

§ 8. Объёмная деформация. Замечание о случае больших деформаций.

В дополнение к компонентам деформации (2.12) найдём ещё объёмную деформацию. Рассмотрим бесконечно малый элемент тела объёма $d\tau = dx dy dz$. Легко сообразить, что если в данном элементе произошли только сдвиги без удлинений его рёбер, то относительное изменение объёма элемента будет малой величиной высшего порядка по сравнению с деформацией сдвига. Следовательно, с точностью до малых высшего порядка можем считать, что изменение объёма $d\tau$ будет зависеть только от удлинений рёбер dx , dy , dz .

Новый объём элемента после деформации будет

$$d\tau + \delta(d\tau) = dx(1 + e_{xx}) dy(1 + e_{yy}) dz(1 + e_{zz}).$$

Раскрывая скобки правой части, получим

$$d\tau + \delta(d\tau) = dx dy dz (1 + e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} + e_{xx}e_{yy} + e_{xx}e_{zz} + e_{yy}e_{zz} + e_{xx}e_{yy}e_{zz}).$$

Последние четыре члена в скобках, являющиеся малыми второго и третьего порядков, отбрасываем; тогда, принимая во внимание, что $dx dy dz = d\tau$, имеем

$$\delta(d\tau) = d\tau(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}).$$

В результате получаем относительную объёмную деформацию:

$$\frac{\delta(d\tau)}{d\tau} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}.$$

Величину эту обозначим через θ ; тогда в дополнение к уравнениям (2.6) запишем выражение объёмной деформации:

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}. \quad (2.21)$$

или

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.22)$$

В главе I мы вывели две основные группы уравнений теории упругости (1.5) и (1.8); это были уравнения статического характера. В настоящей главе получены новые основные группы уравнений геометрического характера (2.6), (2.15) и (2.22). Необходимо заметить, что эти уравнения являются приближёнными, так как при выводе основных соотношений

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \alpha = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \beta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

мы отбросили малые, но конечные величины. С этим надо считаться при оценке всех последующих выводов; они будут достаточно точны в случае малых деформаций (когда все деформации $e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xx}, e_{xy}$ весьма малы по сравнению с единицей); деформации в общем случае выражаются через перемещения в виде следующих более сложных нелинейных зависимостей:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right],$$

и т. д.,

$$e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right],$$

и т. д.; эти выражения — также приближённые.

Пользование подобного рода уравнениями для построения общей теории весьма затруднительно, и потому членами второго порядка малости в случае малых деформаций пренебрегают, как это и было сделано выше.

Упражнения к §§ 6 и 7.

1. Дан брус, изгибаемый в плоскости Oxz . Требуется:

а) Написать уравнение его оси (т. е. оси Ox) до изгиба и выразить прогиб любой точки, пользуясь уравнениями (2.2) § 6.

б) Полагая, что брус заделан в начале координат и пользуясь уравнениями (2.3) и (2.4), записать условия, что элемент dx оси бруса в начале координат закреплён (не поворачивается в плоскости Oxz); то же для элемента dz — в плоскости поперечного сечения.

2. При чистом изгибе бруса, указанного в предыдущем упражнении, перемещения (2.2) § 6 выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{xz}{\rho}, \\ v &= \frac{\sigma yz}{\rho}, \\ w &= \frac{x^2 + \sigma(z^2 - y^2)}{2\rho} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Требуется:

а) Найти общие выражения деформаций по уравнениям (2.6) и (2.22) и проверить, удовлетворяют ли они уравнениям непрерывности (2.15).

б) Написать уравнение изогнутой оси бруса; для этого в выражения (2.23) подставить координаты точки оси до изгиба (п. «а» предыдущего упражнения).

в) Проверить, удовлетворяются ли условия ваделки левого конца (п. «б» предыдущего упражнения).

3. При исследовании кручения круглого стержня (фиг. 6) получаются перемещения

$$u = -\tau yz + ay + bz + c; \quad v = \tau xz - ax + ez + f; \quad w = -bx - ey + k.$$

Требуется:

а) Подобрать коэффициенты a, b, c, e, f, k при условии, чтобы концевое сечение $z = 0$ было закреплено следующим образом: точка O не должна иметь перемещений; элемент оси dz не поворачивается в плоскости xOz и в плоскости yOz ; элемент сечения dy не поворачивается в плоскости xOy .

б) Найти величины деформаций (2.6) и (2.22).

в) Проверить, удовлетворены ли уравнения (2.15).

тело, строение и состав которого одинаковы во всех его точках. Теория упругости занимается почти исключительно однородными телами; однако, даже среди однородных тел приходится различать тела *изотропные*, свойства которых одинаковы во всех направлениях, и *неизотропные* (анизотропные). Неизотропными оказываются многие кристаллы; при однородности строения таких кристаллов их упругие и оптические свойства различны в разных направлениях. Подробное исследование зависимостей типа (3.2) для неизотропных тел показывает, что численные значения коэффициентов a_{mn} тесно связаны с упругими свойствами данного тела в различных направлениях.

В результате этого исследования оказывается, что для изотропного упругого тела, т. е. для тела, физические свойства которого одинаковы во всех направлениях, зависимости (3.2) получают ту форму, которую мы уже знаем из сопротивления материалов, и, значит, связь между напряжениями и деформациями определяется тремя коэффициентами упругости: E , G , σ^* , между которыми, как это известно из теории сдвига, существует зависимость:

$$G = \frac{E}{2(1 + \sigma)}. \quad (3.3)$$

Поэтому в дальнейшем мы примем нужные нам зависимости в том виде, как они получены в сопротивлении материалов для наиболее общего случая нормальных и касательных напряжений по трём взаимно перпендикулярным направлениям**). Примем без доказательства положение, что в однородном упругом теле нормальные напряжения не вызывают сдвигов и, наоборот, — касательные напряжения не вызывают удлинений по направлению их действия. На этом основании можем рассматривать отдельно случай нормальных напряжений и случай касательных напряжений.

§ 10. Выражение деформации через напряжения.

Начнём с нормальных напряжений и рассмотрим (фиг. 25) параллелепипед с рёбрами, равными 1, подверженный действию нормальных сил. Если бы действовало только напряжение X_x , то относительное удлинение e_{xx} по закону Гука было бы $e'_{xx} = \frac{X_x}{E}$. При действии только напряжения Y_y удлинение вдоль

*) Через σ обозначено пуассоново отношение, т. е. отношение поперечного укорочения к продольному удлинению при растяжении.

**) Более строгий вывод см. в §§ 12—16.

оси Ox составит $e''_{xx} = -\sigma \frac{Y_y}{E}$, где σ — коэффициент Пуассона.

Аналогично под действием напряжения Z_z имеем $e'''_{xx} = -\sigma \frac{Z_z}{E}$.

Принимая без доказательства закон независимости действия сил, получим полное удлинение вдоль оси Ox :

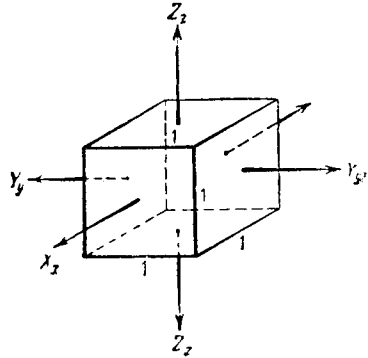
$$\begin{aligned} e_{xx} &= e'_{xx} + e''_{xx} + e'''_{xx} = \\ &= \frac{X_x}{E} - \sigma \frac{Y_y}{E} - \sigma \frac{Z_z}{E}, \end{aligned}$$

или

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [X_x - \sigma(Y_y + Z_z)].$$

Аналогично для удлинений по двум другим осям

$$\begin{aligned} e_{yy} &= \frac{1}{E} [Y_y - \sigma(Z_z + X_x)]; \quad e_{zz} = \\ &= \frac{1}{E} [Z_z - \sigma(X_x + Y_y)]. \quad (3.4) \end{aligned}$$



Фиг. 25.

Формулы (3.4) выражают обобщённый закон Гука для нормальных напряжений; их можно представить в другом виде, прибавляя в правых частях соответственно:

$$\sigma X_x - \sigma X_x; \quad \sigma Y_y - \sigma Y_y; \quad \sigma Z_z - \sigma Z_z;$$

тогда получим

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [(1 + \sigma) X_x - \sigma \Theta]; \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [(1 + \sigma) Y_y - \sigma \Theta]; \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [(1 + \sigma) Z_z - \sigma \Theta], \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

где

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z. \quad (3.6)$$

В этой форме закон Гука более удобен для некоторых выкладок.

Соотношения между сдвигами и касательными напряжениями принимаем так же в известной из сопротивления материалов форме:

$$\left. \begin{aligned} e_{yz} &= \frac{1}{G} Y_z; \\ e_{zx} &= \frac{1}{G} Z_x; \\ e_{xy} &= \frac{1}{G} X_y. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Формулы (3.4) или (3.5) совместно с формулами (3.7) и дают нам *обобщенный закон Гука* для однородного и изотропного упругого твёрдого тела, т. е. тела, упругие свойства которого совершенно одинаковы по всем направлениям.

Это приводит нас к новой основной группе уравнений теории упругости:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [X_x - \sigma (Y_y + Z_z)]; \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} [Y_y - \sigma (Z_z + X_x)]; \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} [Z_z - \sigma (X_x + Y_y)]; \\ e_{yz} &= \frac{1}{G} Y_z = \frac{2(1+\sigma)}{E} Y_z; \\ e_{zx} &= \frac{1}{G} Z_x = \frac{2(1+\sigma)}{E} Z_x; \\ e_{xy} &= \frac{1}{G} X_y = \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Обратимся опять к равенствам (3.5) и сложим их почленно:

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{1}{E} [(1+\sigma)(X_x + Y_y + Z_z) - 3\sigma\Theta].$$

Так как на основании уравнений (3.6) и (2.21)

$$X_x + Y_y + Z_z = \Theta; \quad e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \theta,$$

последнее уравнение можем окончательно написать так:

$$\theta = \frac{1-2\sigma}{E} \Theta, \quad (3.9)$$

т. е. единичная объёмная деформация θ пропорциональна сумме трёх нормальных напряжений Θ . Это есть закон Гука в объёмной форме.

Из равенства (3.9) мы можем сделать следующий вывод: объёмная деформация θ по существу своему не должна зависеть от направления координатных осей. Следовательно, при повороте системы координат она не будет меняться, а значит, согласно (3.9) *сумма нормальных напряжений по трём взаимно перпендикулярным площадкам в данной точке есть величина постоянная и не зависит от наклона этих площадок*. Иначе можно сказать, что величина

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z$$

есть инвариант преобразования координат, как это и было уже отмечено в главе I.

§ 11. Выражение напряжений через деформации. Более общий вывод уравнений закона Гука.

Равенства (3.8) и (3.9) дают закон Гука в форме, решённой относительно деформаций. Часто бывает необходимо иметь те же зависимости в обратной форме — решённые относительно напряжений. Для этой цели возьмём первое из уравнений (3.5) и внесём в него значение $\theta = \frac{E}{1-2\sigma} \theta$ из уравнения (3.9); получим

$$e_{xx} = \frac{1}{E} \left[(1 + \sigma) X_x - \frac{E\sigma}{1-2\sigma} \theta \right].$$

отсюда находим

$$X_x = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \theta + \frac{E}{1+\sigma} e_{xx},$$

или же

$$X_x = \lambda \theta + 2\mu e_{xx}, \quad (3.10)$$

где

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}. \quad (3.11)$$

λ и μ называются коэффициентами Ламе. Они так же, как и модули упругости E и G , характеризуют упругие свойства твёрдого тела и связаны с модулями упругости формулами (3.11).

Легко заметить, что коэффициент μ совпадает с модулем сдвига $\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} = G$.

Из уравнения (3.10) круговой подстановкой имеем два других уравнения; присоединяя к ним последние три уравнения из группы (3.8), получим закон Гука в нужной нам форме, решённой относительно напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda \theta + 2\mu e_{xx}; \\ Y_y &= \lambda \theta + 2\mu e_{yy}; \\ Z_z &= \lambda \theta + 2\mu e_{zz}; \\ Y_z &= \mu e_{yz}; \\ Z_x &= \mu e_{zx}; \\ X_y &= \mu e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Складывая почленно первые три уравнения (3.12), снова получим объёмный закон Гука, но выраженный через коэффициенты Ламе:

$$X_x + Y_y + Z_z = 3\lambda \theta + 2\mu (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}).$$

или

$$\Theta = (3\lambda + 2\mu) \theta. \quad (3.13)$$

Формулы (3.11) выражают коэффициенты Ламе через модуль E и пуассоново отношение σ ; легко получить обратные соотношения; для этого исключаем из (3.11) модуль E почленным делением; получим

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\sigma}{1-2\sigma};$$

отсюда

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

и далее

$$1 + \sigma = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}.$$

Подставляя это во вторую из формул (3.11), найдём

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}.$$

Значит, имеем формулы для выражения E и σ через коэффициенты Ламе:

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}; \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (3.14)$$

Мы рассмотрели два способа выражения обобщённого закона Гука: через модули E и σ и через коэффициенты Ламе λ и μ .

Можно вводить и другими способами две другие постоянные для изотропного тела; иногда, например, удобно ввести две такие постоянные:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= G, \\ k &= \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\sigma}{1-2\sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

тогда уравнения (3.12) напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \mu(2e_{xx} + k\theta), \\ Y_y &= \mu(2e_{yy} + k\theta), \\ Z_z &= \mu(2e_{zz} + k\theta), \\ Y_z &= \mu e_{yz}, \\ Z_x &= \mu e_{zx}, \\ X_y &= \mu e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Если рассматриваемый элемент испытывает растяжение в направлениях трёх осей x , y , z , т. е. если

$$X_x > 0; Y_y > 0; Z_z > 0; \Theta > 0;$$

то объём его не должен уменьшиться, и мы должны иметь

$$\theta \geq 0.$$

На этом основании из (3.9) получим, что

$$\sigma \leq \frac{1}{2},$$

а тогда из (3.11) и (3.15) имеем

$$\lambda > 0; \mu > 0; k > 0.$$

Полученные в этой главе зависимости (3.8) и (3.12) являются последней группой основных уравнений теории упругости, завершающей все необходимые предпосылки, на которых строится общее решение задачи теории упругости.

Уравнения обобщённого закона Гука мы приняли без доказательства в том виде, как они даются в сопротивлении материалов. Ниже, в §§ 14—16, приводятся соображения, доказывающие, что эти уравнения дают самую общую зависимость между напряжениями и деформациями в изотропном упругом теле.

Упражнения.

Предлагаем читателю проделать следующие выводы, полезные для последующего.

1. Тонкая прямоугольная резиновая пластинка плотно, но без нажатия лежит между двумя стальными пластинками, которые можно принять абсолютно твёрдыми по сравнению с резиновой. Трение между пластинками устранено. Если координатную систему выберем так, чтобы ось Oz была нормальна к плоскостям соприкосновения пластинок, то, согласно условию задачи, можно принять, что вдоль оси Oz удлинений нет, т. е. $e_{zz} = 0$. Резиновая пластинка сжимается силами, приложенными по граням, нормальным к осям Ox и Oy .

Требуется найти зависимость между нормальными напряжениями и удлинениями, а также зависимость между напряжениями X_x , Y_y , Z_z . Задачу решить в двух вариантах, исходя из уравнений (3.8) и (3.12).

2. Резиновый кубик плотно вложен в стальной ящик такой же формы: сверху кубик плотно накрыт стальной крышкой, на которую производится давление p кг/см². Принимая сталь абсолютно твёрдой и полагая, что трения между сталью и резиной нет, найти:

а) давление резины на стенки ящика;

б) наибольшие касательные напряжения в резине [исходя из уравнений (1.35) § 5].

Задачу решить в двух вариантах, исходя из уравнений (3.8) и (3.12); сделать подсчёт для случаев $\sigma = 0$ и $\sigma = \frac{1}{2}$, найти θ и проанализировать оба эти случая.

* § 12. Работа упругих сил в твёрдом теле.

Выделим из тела бесконечно малый параллелепипед размерами dx , dy , dz и подсчитаем работу, совершаемую упругими силами, приложенными к нему, если точкам данного тела дадим какие-либо возможные перемещения.

Рассмотрим сначала случай растяжения — сжатия элемента по направлению оси Ox . Пусть напряжения по граням, нормальным к Ox , будут

$$X_x \text{ и } X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx, \quad (3.17)$$

и при этом получилось относительное удлинение e_{xx} и, следовательно, абсолютное $e_{xx} dx$. После сообщения телу каких-либо возможных перемещений удлинение это изменится на некоторую величину $\delta e_{xx} dx$.

Отбрасывая в (3.17) бесконечно малую $\frac{\partial X_x}{\partial x} dx$ по сравнению с конечной величиной X_x , найдём, что две равные и противоположные нормальные силы $X_x dy dz$, приложенные к граням параллелепипеда, произведут работу $X_x \delta e_{xx} dx dy dz$. Таким же путём получим работу, совершаемую остальными нормальными силами по граням параллелепипеда:

$$Y_y \delta e_{yy} dy dx dz; \quad Z_z \delta e_{zz} dz dx dy.$$

Переходим к касательным составляющим. К верхней и нижней граням параллелепипеда (фиг. 9) приложены касательные силы $X_z dx dy$ (бесконечно малую разницу между ними снова отбрасываем), образующие пару с моментом

$$X_z dx dy dz;$$

для получения работы этой пары следует её момент умножить на угол поворота; таким углом поворота явится, очевидно, приращение

$$\delta e_{xz},$$

полученное углом сдвига e_{xz} на сообщённом телу возможном перемещении. На этом основании получим работу трёх пар касательных сил, приложенных к параллелепипеду:

$$X_z \delta e_{xz} dx dy dz; \quad Y_z \delta e_{yz} dz dx dy; \quad X_y \delta e_{xy} dy dx dz.$$

Собирая полученные результаты, напишем работу всех сил, приложенных к параллелепипеду на возможном перемещении:

$$\delta(dT) = (X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + \\ + Y_z \delta e_{yz} + Z_x \delta e_{zx} + X_y \delta e_{xy}) dx dy dz.$$

Работа, отнесенная к единице объёма тела в той точке, где выделен параллелепипед, будет

$$\delta A = \frac{\partial(dT)}{\partial \tau} = X_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + \\ + Y_z \delta e_{yz} + Z_x \delta e_{zx} + X_y \delta e_{xy}. \quad (3.18)$$

§ 13. Потенциал упругих сил.

Введём теперь чрезвычайно важную в теории упругости гипотезу о том, что внутренние упругие силы имеют потенциал, т. е. что работа упругих сил полностью переходит в потенциальную энергию, накапливаемую телом при получении им упругих деформаций и возвращаемую им обратно в виде работы сил при исчезновении деформации*). Потенциальная энергия есть следствие деформаций и вызывается ими одними; поэтому, если мы через W назовём энергию, отнесенную к единице объёма тела в данной точке, то она должна быть функцией компонентов деформаций:

$$W = F(e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}). \quad (3.19)$$

Если мы даём телу упругие возможные перемещения, то, согласно введённой гипотезе, работа (3.18), совершаемая внутренними силами на этих перемещениях, должна полностью перейти в упругую энергию и дать приращение её δW :

$$\delta A = \delta W. \quad (3.20)$$

Приращение δW функции (3.19) с точностью до малых второго порядка заменяем первым полным её дифференциалом:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \delta e_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} \delta e_{yy} + \dots + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \delta e_{xy}. \quad (3.21)$$

Выражения (3.18) и (3.21) согласно уравнению (3.20) должны совпадать при любых значениях возможных деформаций

$$\delta e_{xx}, \delta e_{yy}, \delta e_{zz}, \dots, \delta e_{xy}. \quad (3.22)$$

Благодаря этому, коэффициенты при величинах (3.22) в уравнениях (3.18) и (3.21) должны быть тождественно равны:

$$\left. \begin{aligned} X_x = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}; \quad Y_y = \frac{\partial W}{\partial e_{yy}}; \quad Z_z = \frac{\partial W}{\partial e_{zz}}; \\ Y_z = \frac{\partial W}{\partial e_{yz}}; \quad \dots; \quad X_y = \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

*) Гипотеза эта верна лишь приближительно, так как часть работы упругих сил переходит в другие виды энергии (тепловую и электромагнитную), теряемые телом и не возвращаемые в виде работы упругих сил; однако, эти дополнительные качества энергии невелики, и практически ими можно в большинстве случаев пренебречь.

Значит, если внутренние упругие силы имеют потенциал, то компоненты напряжений

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$$

выражаются в виде частных производных потенциальной энергии (3.19) по соответствующим деформациям. Равенства (3.23) совместно с (3.19) являются аналитическим выражением предположения о существовании потенциала упругих сил.

*** § 14. Форма зависимостей между напряжениями и деформациями; гипотеза о естественном состоянии тела.**

Так как мы ищем зависимость физического характера, то внешняя математическая форма функций f_1, f_2, \dots, f_6 в уравнениях (3.4) (§ 9), выражающих эту зависимость, наперёд ничем не обусловлена, и мы вправе выбрать её как угодно, лишь бы она соответствовала физическим условиям задачи, т. е. могла бы правильно отражать исследуемое физическое явление. Пользуясь этим, мы выбираем наиболее простую форму зависимостей (3.1) — линейную:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11} e_{xx} + a_{12} e_{yy} + a_{13} e_{zz} + a_{14} e_{yz} + a_{15} e_{zx} + a_{16} e_{xy}; \\ Y_y &= a_{21} e_{xx} + a_{22} e_{yy} + a_{23} e_{zz} + a_{24} e_{yz} + a_{25} e_{zx} + a_{26} e_{xy}; \\ Z_z &= a_{31} e_{xx} + a_{32} e_{yy} + a_{33} e_{zz} + a_{34} e_{yz} + a_{35} e_{zx} + a_{36} e_{xy}; \\ Y_z &= a_{41} e_{xx} + a_{42} e_{yy} + a_{43} e_{zz} + a_{44} e_{yz} + a_{45} e_{zx} + a_{46} e_{xy}; \\ Z_x &= a_{51} e_{xx} + a_{52} e_{yy} + a_{53} e_{zz} + a_{54} e_{yz} + a_{55} e_{zx} + a_{56} e_{xy}; \\ X_y &= a_{61} e_{xx} + a_{62} e_{yy} + a_{63} e_{zz} + a_{64} e_{yz} + a_{65} e_{zx} + a_{66} e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Соображения, подтверждающие правильность нашего выбора, следующие.

1. Линейная форма зависимостей хорошо согласуется с опытом для многих материалов при простом растяжении или сжатии, где она проявляется в виде прямой пропорциональности между напряжением и относительным удлинением (закон Гука).

2. Заданным деформациям

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy} \quad (3.25)$$

в данной точке должна соответствовать одна единственная система напряжений

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y, \quad (3.26)$$

и обратно: при заданных напряжениях (3.26) должна получиться одна единственная система деформаций (3.25).

Этим условиям линейная форма зависимостей удовлетворяет*).

3. Ограничиваясь, как и ранее, случаем весьма малых деформаций, можно показать, что при любой аналитической форме зависимостей (3.24) они приближённо могут быть заменены линейными функциями; действительно, разлагая правые части уравнений (3.1) в ряд Маклорена, получим с точностью до малых второго порядка:

$$X_x = (f_1)_0 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{xx}}\right)_0 e_{xx} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{yy}}\right)_0 e_{yy} + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial e_{xy}}\right)_0 e_{xy}, \quad (3.27)$$

где значок 0 при функции f_1 и её производных показывает, что следует положить

$$e_{xx} = e_{yy} = \dots = e_{xy} = 0.$$

Коэффициенты при деформациях в (3.27) — постоянные числа, и потому функция (3.27) является линейной относительно деформаций (3.25)**).

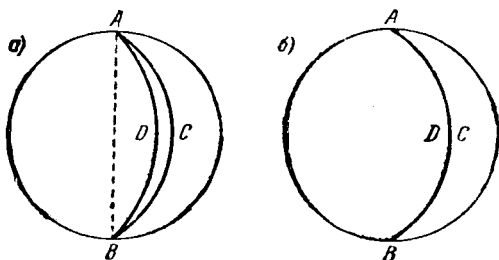
Заметим ещё, что в правых частях уравнений (3.24) нами опущены свободные члены, не зависящие от деформаций. Если бы мы их сохранили, то, положив все деформации (3.25) равными нулю, нашли бы, что напряжения (3.26) отличны от нуля (напряжения не вызывают деформаций); наоборот, положив все напряжения (3.26) равными нулю, мы уравнения (3.24) обратим в систему шести линейных уравнений с шестью неизвестными (3.25), для которых отсюда найдём значения, отличные от нуля (деформации не сопровождаются напряжениями).

Оба эти обстоятельства могут иметь место, так как, изучая деформации тела от внешних сил, иногда можем ожидать, что тело уже получило деформацию до приложения к нему сил. Возьмём кусок железа в форме, например, шара (фиг. 26, а) и, сделав в нём узкий секториальный вырез $ACBD$, снова сведём вместе плоскости разрезов ACB и ADB и сварим их. Получим сплошное тело (фиг. 26, б); после произведенной операции, в нём, несомненно, будут напряжения, хотя бы внешние силы на него и не действовали; такие напряжения называются начальными; они существуют, например, в чугуновых и

* Если мы уравнения (3.24) решим относительно деформаций то получим для них также линейные выражения через напряжения.

** Это рассуждение справедливо, если не обратятся в нуль все коэффициенты при деформациях в уравнении (3.27), в противном случае придётся принять во внимание члены второго порядка малости в ряде Маклорена; однако, этого нельзя ожидать, так как в случае простого растяжения существование членов первого порядка ясно обнаруживается (закон Гука).

стальных отливках вследствие неравномерной усадки при остывании. Будем принимать состояние тела *б* за начальное при измерении деформаций под действием каких-либо сил; тогда мы скажем, что в этом состоянии *деформации отсутствуют, но напряжения не равны нулю*. Если теперь снова разрежем тело по плоскости *ACB*, то оно вернётся в прежнее состояние *а*;



Фиг. 26.

при этом *произойдут деформации, но напряжения обратятся в нуль*.

Характер и величина начальных напряжений обычно нам неизвестны, так как они зависят от истории возникновения тела *); в дальнейшем мы исключаем их из рассмотрения, *вводя гипотезу о естественном состоянии*

тела, т. е. принимая, что *при отсутствии деформаций в теле напряжения в нём равны нулю*. Из сказанного ясно, что в этом случае свободных членов в уравнениях (3.24) не должно быть, т. е. они должны быть однородными, как это и принято сначала.

Установив вид зависимостей (3.24), можно построить выражение потенциальной упругой энергии *W*. Сопоставляя зависимости (3.23) и (3.24), заключаем, что частные производные функции *W* представляют собой линейные, однородные функции от компонентов деформации

$$e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy},$$

значит, сама функция *W* будет однородной функцией второй степени от этих аргументов. Её можно получить путём интегрирования уравнений (3.23), но гораздо проще воспользоваться известной теоремой Эйлера об однородных функциях, которая утверждает, что если $F(x, y, z, \dots)$ есть однородная функция *n*-й степени, то

$$nF(x, y, z, \dots) = \frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y + \frac{\partial F}{\partial z}z + \dots$$

Применяя её к функции *W*, найдём, что

$$2W = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} e_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} e_{yy} + \dots + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} e_{xy}$$

*) Например, в разобранным случае величина напряжений зависит от размера сделанного секториального выреза *ACBD*.

или, пользуясь (3.23), получим

$$2W = X_x e_{xx} + \dots \quad (3.28)$$

Далее с этим выражением можно поступить двояко:

1. Заменить компоненты напряжений их выражениями через компоненты деформации согласно (3.24); тогда получим нужное нам выражение W в виде однородной функции второй степени от компонентов деформации.

2. Решить систему (3.24) относительно

$$e_{xx}, e_{yy}, \dots, e_{xy}$$

и подставить эти выражения в предыдущее равенство; тогда W выразится в виде однородной функции второй степени от компонентов напряженного состояния

$$X_x, Y_y, \dots, X_y.$$

В случае изотропного тела пользуемся вместо (3.24) зависимостями (3.12) и обратными им зависимостями (3.8); тогда получаем следующие выражения упругой потенциальной энергии:

1. В функции компонентов деформации

$$2W = \lambda \nu^2 + 2\mu (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \mu (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2), \quad (3.29)$$

или

$$2W = (\lambda + 2\mu) (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + 2\lambda (e_{xx} e_{yy} + e_{yy} e_{zz} + e_{zz} e_{xx}) + \mu (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2).$$

2. В функции компонентов напряженного состояния

$$2W = \frac{1}{E} [X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 - 2\sigma (X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x) + 2(1 + \sigma) (Y_z^2 + Z_x^2 + X_y^2)]. \quad (3.30)$$

Из (3.29) делаем весьма важное заключение о том что всегда

$$W > 0,$$

так как в конце § 11 было показано, что $\lambda > 0$; $\mu > 0$.

* § 15. Упругие постоянные; сокращение числа их при существовании потенциала упругих сил.

Уравнения (3.24) содержат 36 постоянных коэффициентов a_{mn} , называемых упругими постоянными. Они характеризуют упругие свойства тела и по своему измерению вполне аналогичны модулям упругости E и G . Число упругих постоянных тела в общем случае, как видим, весьма велико; однако, оно

значительно сокращается, если существует потенциал упругих сил.

Действительно, возьмём частную производную потенциальной энергии по какой угодно деформации, например, по e_{yy} ; на основании уравнений (3.23) и (3.24) имеем

$$\frac{\partial V}{\partial e_{yy}} = Y_y = a_{21}e_{xx} + a_{22}e_{yy} + a_{23}e_{zz} + a_{24}e_{yz} + a_{25}e_{zx} + a_{26}e_{xy};$$

взяв от обеих частей ещё раз частную производную, например, по e_{zx} , получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial e_{yy} \partial e_{zx}} = a_{25}. \quad (3.31)$$

Найдём теперь ту же вторую производную, но, дифференцируя в обратном порядке:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial e_{zx}} &= Z_x, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial e_{zx} \partial e_{yy}} &= \frac{\partial Z_x}{\partial e_{yy}} = a_{51}. \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Так как величина производной не зависит от порядка дифференцирования, то, сопоставляя уравнения (3.31) и (3.32), находим $a_{25} = a_{51}$; то же, конечно, можно доказать для любых двух коэффициентов a_{mn} и a_{nm} :

$$a_{mn} = a_{nm}. \quad (3.33)$$

Зависимость (3.33), являющаяся следствием существования потенциала упругих сил, показывает, что в уравнениях (3.24) коэффициенты, симметричные относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, попарно равны между собой. Следовательно, из 36 упругих постоянных в самом общем случае будут различными: 6 постоянных

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, a_{66},$$

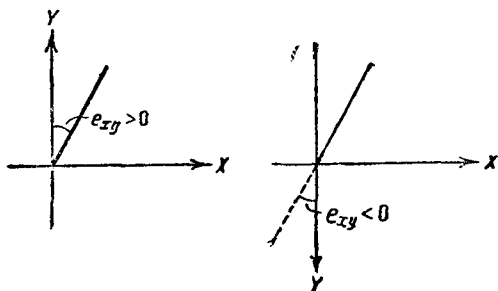
расположенных по диагонали, и $\frac{36-6}{2} = 15$ из остальных постоянных, а всего $6 + 15 = 21$ постоянная.

Таким значительным количеством упругих постоянных может обладать лишь «наиболее анизотропное» тело, обладающее совершенно различными упругими свойствами в разных направлениях.

• § 16. Изотропное тело.

В физических неизотропных телах (кристаллы) наблюдается обычно большая или меньшая симметрия строения, благодаря которой число упругих постоянных значительно сокращается; мы здесь рассмотрим только случай изотропного тела, упругие

свойства которого одинаковы во всех направлениях. Для такого тела уравнения (3.24) не должны меняться при каких бы то ни было преобразованиях координат. Исходя из этого, легко сократим число упругих постоянных до 9, если примем во внимание правило о знаке сдвига (§ 6); из этого правила следует, что сдвиг (например, e_{xy}) сохраняет свою величину, но меняет знак, если мы направление одной из осей, в плоскости которых происходит сдвиг, изменим на обратное (фиг. 27).



Фиг. 27.

Возьмём, например, первое из уравнений (3.24) и заменим направление оси Oy на обратное. На левой части уравнения это, очевидно, никак не отразится; в правой части первые три члена (содержащие удлинения) останутся без изменения; равным образом не изменится пятый член; четвёртый и шестой члены, сохраняя величину, изменят знак; благодаря этому равенство между левой и правой частью нарушится; этого не будет лишь в случае $a_{14} = 0$; $a_{16} = 0$, т. е. эти два коэффициента должны отсутствовать. Если бы мы изменили направление оси Oz на обратное, то таким же путём нашли бы, что $a_{14} = a_{16} = 0$; значит, делаем общее заключение, что $a_{14} = a_{15} = a_{16} = 0$, т. е. нормальное напряжение X_x не связано со сдвигами. Благодаря полной равноправности осей координат в изотропном теле это заключение относится и к двум другим нормальным напряжениям: Y_y и Z_z , т. е. $a_{24} = a_{25} = a_{26} = 0$; $a_{34} = a_{35} = a_{36} = 0$. После этого на основании уравнения (3.33) замечаем, что симметричные коэффициенты последних трёх из уравнений (3.24) обращаются в нуль:

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0,$$

$$a_{51} = a_{52} = a_{53} = 0,$$

$$a_{61} = a_{62} = a_{63} = 0,$$

т. е. касательные напряжения не связаны с удлинениями.

Число упругих постоянных сократилось до 12, и уравнения (3.24) разбились на две независимые группы:

$$\begin{aligned} X_x &= a_{11}e_{xx} + a_{12}e_{yy} + a_{13}e_{zz}; & Y_z &= a_{44}e_{yz} + a_{46}e_{zx} + a_{46}e_{xy}; \\ Y_y &= a_{21}e_{xx} + a_{22}e_{yy} + a_{23}e_{zz}; & Z_x &= a_{54}e_{yz} + a_{55}e_{zx} + a_{54}e_{xy}; \\ Z_z &= a_{31}e_{xx} + a_{32}e_{yy} + a_{33}e_{zz}; & X_y &= a_{64}e_{yz} + a_{65}e_{zx} + a_{66}e_{xy}. \end{aligned}$$

Обратимся к последним трём уравнениям. Если направление оси Ox изменим на обратное, то в четвёртом уравнении изменится знак у двух последних членов; левая часть уравнения при этом не изменится, а потому, как и ранее, заключаем, что

$$a_{45} = a_{46} = 0$$

и далее

$$a_{54} = a_{56} = 0; \quad a_{64} = a_{65} = 0.$$

Число упругих постоянных сократилось до $12 - 3 = 9$, как и было указано выше:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11}e_{xx} + a_{12}e_{yy} + a_{13}e_{zz}; \\ Y_y &= a_{21}e_{xx} + a_{22}e_{yy} + a_{23}e_{zz}; \\ Z_z &= a_{31}e_{xx} + a_{32}e_{yy} + a_{33}e_{zz}; \\ Y_z &= a_{44}e_{yz}; \\ Z_x &= a_{55}e_{zx}; \\ X_y &= a_{66}e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Преобразования координат, которые мы до сих пор применяли, сводились к повороту отдельных осей на 180° ; теперь применим поворот осей на 90° , в форме замены Oy на Oz , Oz на Ox , Ox на Oy и т. д. Возьмём первое из уравнений (3.34) и оси Oy и Oz взаимно переместим. На левой части уравнения, ввиду изотропности тела, это не отразится; в правой же части удлинения e_{yy} и e_{zz} поменяются местами; следовательно, равенство не нарушится лишь при условии: $a_{12} = a_{13}$; аналогично во втором и третьем уравнениях должно быть $a_{21} = a_{23}$, $a_{31} = a_{32}$, а на основании уравнения (3.30) окончательно: $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{32} = a_{31} = a_{21} = a_{11}$. Заменяя теперь последовательно одну ось другой и имея в виду, что при этом вид уравнений (3.34) не должен меняться, придём к выводу, что и

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}; \quad a_{44} = a_{55} = a_{66};$$

после этого уравнения (3.34) получают вид

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11}e_{xx} + a_{12}(e_{yy} + e_{zz}); \\ Y_y &= a_{11}e_{yy} + a_{12}(e_{zz} + e_{xx}); \\ Z_z &= a_{11}e_{zz} + a_{12}(e_{xx} + e_{yy}); \\ Y_z &= a_{44}e_{yz}; \\ Z_x &= a_{44}e_{zx}; \\ X_y &= a_{44}e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Таким образом, число упругих постоянных сократилось до трёх:

$$a_{11}, a_{12}, a_{44}.$$

Этого результата мы достигли, выполнив требование, чтобы вид соотношений не менялся при повороте осей координат на 90° и 180° ; однако такого условия недостаточно для обеспечения изотропности тела, т. е. полной однородности его во всех направлениях. Поэтому применим ещё одно преобразование координат, связанное с поворотом осей на произвольный угол.

Для простоты берём случай плоской деформации, когда

$$e_{zz} = e_{yz} = e_{zx} = 0.$$

Тогда из уравнений (3.35) имеем

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11}e_{xx} + a_{12}e_{yy}; \\ Y_y &= a_{11}e_{yy} + a_{12}e_{xx}; \\ X_y &= a_{44}e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Рассмотрим случай простого растяжения в направлении оси x , когда

$$\begin{aligned} Y_y &= a_{11}e_{yy} + a_{12}e_{xx} = 0; \\ X_y &= a_{44}e_{xy} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$e_{xy} = 0; \quad e_{yy} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}e_{xx}, \quad (3.37)$$

и первое из уравнений (3.36) даёт

$$X_x = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}} e_{xx}.$$

Далее вычислим касательное напряжение U_v по произвольной площадке, наклонённой к плоскости Oxz под углом α ; это можно выполнить двояко: с одной стороны, по второй из формул (1.13), которая даёт

$$U_v = X_x \sin \alpha \cos \alpha = \frac{X_x}{2} \sin 2\alpha = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{2a_{11}} e_{xx} \sin 2\alpha.$$

С другой стороны, можем воспользоваться последним из уравнений (3.36), так как тело предполагается изотропным и, значит, уравнение это справедливо при любом направлении осей координат:

$$U_v = a_{44}e_{uv}.$$

Сравнивая оба выражения U_v , получим

$$(a_{11}^2 - a_{12}^2) e_{xx} \sin 2\alpha = 2a_{11}a_{44}e_{uv}. \quad (3.38)$$

Теперь установим зависимость между вошедшими сюда компонентами деформации e_{xx} и e_{uv} . Для этого (фиг. 28) в пло-

скости Oxy возьмём квадрат $ABCD$ со стороной, равной единице. Из опыта известно, что в случае простого растяжения в направлении оси Ox горизонтальные отрезки удлиняются, а вертикальные укорачиваются и квадрат примет форму $A_1B_1C_1D_1$. Подсчитаем углы поворота сторон квадрата и затем

угол сдвига e_{uv} как искажение прямого угла ABC . Имеем $OA = 1 \cdot \sin \alpha$; $OB = 1 \cdot \cos \alpha$, далее

$$\begin{aligned} AA_1 &= 1 \cdot \sin \alpha (-e_{yy}); \\ BB_1 &= 1 \cdot \cos \alpha \cdot e_{xx}. \end{aligned}$$

Предполагая деформацию малой, получим с точностью до малых величин второго порядка

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= AA_1 \cos \alpha = \\ &= 1 \cdot \sin \alpha \cos \alpha (-e_{yy}); \\ BB_2 &= BB_1 \sin \alpha = \\ &= 1 \cdot \sin \alpha \cos \alpha \cdot e_{xx}. \end{aligned}$$

С той же точностью подсчитаем угол поворота β стороны AB :

$$\beta = \frac{A_1A_2 + BB_2}{AB} = 1 (e_{xx} - e_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha,$$

или

$$\beta = 1 \frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \sin 2\alpha.$$

Угол поворота β_1 другой грани BC получим из этой же формулы, заменив α на $\alpha - \frac{\pi}{2}$:

$$\beta_1 = -1 \frac{e_{xx} - e_{yy}}{2} \sin 2\alpha.$$

Искомый угол сдвига будет

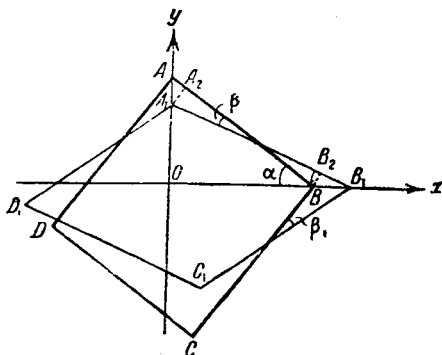
$$e_{uv} = \beta - \beta_1 = (e_{xx} - e_{yy}) \sin 2\alpha,$$

или на основании (3.37)

$$e_{uv} = \frac{a_{11} + a_{12}}{a_{11}} e_{xx} \sin 2\alpha.$$

Это и есть нужная нам зависимость между e_{xx} и e_{uv} ; внося полученное значение e_{uv} в (3.38), найдём после упрощения

$$a_{11} - a_{12} = 2a_{44}. \quad (3.39)$$



Фиг. 28.

Таким образом, между тремя упругими постоянными существует линейная зависимость (3.39), показывающая, что среди них лишь две независимы; третья выразится через них по уравнению (3.39). Принимая за независимые a_{11} и a_{44} , найдём

$$a_{11} = a_{11} \oplus 2a_{44}.$$

Следовательно, изотропное упругое тело характеризуется всего двумя упругими постоянными a_{11} и a_{44} . Это и есть те коэффициенты Ламе, которые мы в § 11 обозначили через λ и μ . Возвращаясь к этим обозначениям: $a_{11} = \lambda$; $a_{44} = \mu$; $a_{11} = \lambda + 2\mu$ и подставляя это в уравнения (3.35), мы сейчас же приведём их к виду (3.12) § 11. В результате приходим к выводу, что уравнения (3.12) непосредственно получаются из самых общих уравнений (3.24), если принять гипотезу о существовании потенциала упругих сил и предположить, что данное тело изотропно.

ГЛАВА IV.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ.

§ 17. Сводка основных уравнений теории упругости.

Обобщённым законом Гука мы закончили вывод всех основных групп уравнений теории упругости; дадим их ещё раз в общей сводке и для удобства ссылок в дальнейшем снабдим их особой нумерацией (римскими цифрами).

А. Статические уравнения.

1. Дифференциальные условия равновесия (уравнения Навье) (1.5):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

2. Условия на поверхности (1.8):

$$\left. \begin{aligned} X_y &= X_x \cos(VX) + X_y \cos(VY) + X_z \cos(VZ); \\ Y_y &= Y_x \cos(VX) + Y_y \cos(VY) + Y_z \cos(VZ); \\ Z_y &= Z_x \cos(VX) + Z_y \cos(VY) + Z_z \cos(VZ). \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

В. Геометрические уравнения.

3. Связь между перемещениями и деформациями (уравнения Коши) (2.6):

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & e_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; & e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

4. Уравнения неразрывности деформаций (уравнения Сен-Венана) (2.15):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}; & \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y}; \right. \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}; & \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z}; \right. \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}; & \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x}. \right. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

С. Физические уравнения.

5. Обобщённый закон Гука (3.8), (3.12):

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} = \frac{1}{E} [X_x - \sigma (Y_y + Z_z)]; & \quad e_{yz} = \frac{1}{G} Y_z; \\ e_{yy} = \frac{1}{E} [Y_y - \sigma (Z_z + X_x)]; & \quad e_{zx} = \frac{1}{G} Z_x; \\ e_{zz} = \frac{1}{E} [Z_z - \sigma (X_x + Y_y)]; & \quad e_{xy} = \frac{1}{G} X_y. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V})$$

$$\theta = \frac{1 - 2\sigma}{E} \Theta. \quad (\text{Va})$$

$$\left. \begin{aligned} X_x = \lambda \theta + 2\mu e_{xx}; & \quad Y_z = \mu e_{yz}; \\ Y_y = \lambda \theta + 2\mu e_{yy}; & \quad Z_x = \mu e_{zx}; \\ Z_z = \lambda \theta + 2\mu e_{zz}; & \quad X_y = \mu e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V}')$$

$$\Theta = (3\lambda + 2\mu) \theta. \quad (\text{V}'a)$$

На основе этих групп уравнений можно уже приступить непосредственно к решению общей задачи теории упругости о напряжениях и деформациях, возникающих в изотропном упругом теле под действием сил.

Следует ещё раз отметить, что все полученные нами уравнения выведены в предположении весьма малых деформаций; это было уже оговорено в § 8 относительно уравнений (III), а следовательно, и (IV); уравнения (I) выведены для недеформированного состояния тела и также могут считаться справедливыми лишь в случае весьма малых деформаций.

Уравнения (I)–(V) содержат весьма много неизвестных функций, выражающих напряжения, перемещения и деформации. Поэтому следует предварительно выбрать те величины, которые

мы примем за основные неизвестные, подлежащие разысканию в первую очередь и по которым далее можно уже находить все остальные факторы, характеризующие напряжённое состояние и деформацию тела.

История развития теории упругости показывает, что здесь можно идти двумя различными путями.

1) Принять в качестве основных неизвестных перемещения точек упругого тела; тогда в каждой точке (x, y, z) тела мы имеем три неизвестных:

$$u(x, y, z), \quad v(x, y, z), \quad w(x, y, z), \quad (4.1)$$

и задача приведётся к разысканию трёх функций (4.1), причём надо будет удовлетворить трём условиям равновесия (I); одновременно на поверхности должны удовлетворяться условия (II), содержащие внешние силы (нагрузку):

$$X_v, \quad Y_v, \quad Z_v.$$

2) Принять в качестве основных неизвестных напряжения; тогда в каждой точке тела мы будем иметь шесть неизвестных:

$$\left. \begin{array}{lll} X_x(x, y, z), & Y_y(x, y, z), & Z_z(x, y, z), \\ Y_x(x, y, z), & Z_x(x, y, z), & X_y(x, y, z). \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

Задача сведётся к разысканию шести функций (4.2); они должны удовлетворять трём уравнениям равновесия (I); однако, этих уравнений недостаточно, и придётся привлечь ещё шесть условий неразрывности деформаций (IV). Одновременно на поверхности, как и при первом способе, должны удовлетворяться условия (II).

Из этих рассуждений видно, что первый способ («решение задачи в перемещениях») проще с математической стороны, так как при нём имеется меньшее число неизвестных и приходится иметь дело с меньшим числом уравнений. Разыскав перемещения (4.1), мы далее по уравнениям (III) без труда найдём деформации e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , e_{yz} , e_{zx} , e_{xy} и, наконец, подставляя их в уравнения закона Гука (V'), определим напряжения:

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad Y_x, \quad Z_x, \quad X_y.$$

В настоящей главе мы рассмотрим способ решения задачи теории упругости в перемещениях и применим его к нескольким частным случаям.

§ 18. Уравнения Ламе.

Выпишем дифференциальные уравнения равновесия (I):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X\rho &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y\rho &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z\rho &= 0 \left(= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

и условия на поверхности (II):

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(VX) + X_y \cos(VY) + X_z \cos(VZ); \\ Y_v &= Y_x \cos(VX) + Y_y \cos(VY) + Y_z \cos(VZ); \\ Z_v &= Z_x \cos(VX) + Z_y \cos(VY) + Z_z \cos(VZ). \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Все эти уравнения нам придётся преобразовать, выразив в них напряжения через перемещения (4.1), принимаемые нами за неизвестные. С этой целью мы выразим напряжения через деформации по закону Гука (V'), деформации же выразим через перемещения по (III). Выбирая в (V') напряжения, входящие в первое из уравнений (I), получим

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \\ X_y &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\ X_z &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Дифференцируя их, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial X_x}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Внося это в первое из уравнений (I), получаем

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\ + X\rho = 0 \left(+ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

и введем краткое обозначение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \nabla^2 u.$$

Это выражение называется оператором Лапласа или лапласовым оператором над функцией $u(x, y, z)$. После этого уравнение (4.4) получит вид

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X\rho = 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right). \quad (4.5)$$

Аналогично преобразуем остальные два из уравнений (I); мы их получим непосредственно из (4.5), делая в нём круговую подстановку букв (x, y, z) и (u, v, w) ; приходим к следующей системе основных уравнений теории упругости для разыскания перемещений:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho X &= 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right); \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho Y &= 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right); \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho Z &= 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

Если объёмные силы ρX , ρY , ρZ отсутствуют, то уравнения (VI) будут однородными. В случае равновесия, правые части их равны нулю; деля все уравнения на μ и вводя упругие постоянные μ и k (3.15), приведём их к такому виду:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + (k + 1) \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0; \\ \nabla^2 v + (k + 1) \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0; \\ \nabla^2 w + (k + 1) \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (VI')$$

Уравнения (VI) носят название уравнений Ламе (Lamé). Они дают синтез учений о напряжениях, деформациях и зависимости между ними — учений, освещённых в предыдущих трёх главах. Значит, уравнения Ламе заключают в себе все те предпосылки механического, геометрического и чисто физического характера, на которых основывается теория упругости. Действительно, они:

1) выражают условия равновесия каждого элемента тела (если правые их части равны нулю) или являются уравнениями движения этого элемента;

2) содержат геометрические характеристики деформаций u , v , w и θ ;

3) содержат физические факторы λ , μ и ρ , характеризующие упругие свойства и плотность тела.

Уже из этих соображений можно заранее оценить ту огромную роль, которую уравнения (VI) играют в теории упругости в смысле возможности при их помощи приступить к решению ряда весьма важных задач.

Таким же путём преобразуем условия на поверхности (II); подставляя в первое из них вместо напряжений их выражения (4.3), будем иметь

$$X_v = \lambda\theta \cos(VX) + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(VX) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(VY) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(VZ) \right] + \\ + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(VX) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(VY) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(VZ) \right]. \quad (4.6)$$

Правую часть этого уравнения можем написать проще, если примем во внимание, что выражение в первых квадратных скобках представляет собою производную функции $u(x, y, z)$ по нормали к поверхности тела:

$$\frac{\partial u}{\partial V} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial V} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial V} = \\ = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(VX) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(VY) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(VZ).$$

Применяя такие же рассуждения к двум остальным уравнениям (II), получим окончательный вид условий на поверхности:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \lambda\theta \cos(VX) + \mu \frac{\partial u}{\partial V} + \\ &+ \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(VX) + \frac{\partial v}{\partial x} \cos(VY) + \frac{\partial w}{\partial x} \cos(VZ) \right], \\ Y_v &= \lambda\theta \cos(VY) + \mu \frac{\partial v}{\partial V} + \\ &+ \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cos(VX) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(VY) + \frac{\partial w}{\partial y} \cos(VZ) \right], \\ Z_v &= \lambda\theta \cos(VZ) + \mu \frac{\partial w}{\partial V} + \\ &+ \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} \cos(VX) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(VY) + \frac{\partial w}{\partial z} \cos(VZ) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIa})$$

Уравнения Ламе (VI), совместно с условиями на поверхности (VIa), позволяют уже перейти непосредственно к решению задач теории упругости. Если нам удастся проинтегрировать уравнения (VI) и найти функции u , v и w , удовлетворяющие

условиям на поверхности в форме (II) или (VIa), то, внося их в уравнения (III), найдём деформации e_{xx}, \dots, e_{xy} ; внося же эти последние в уравнения закона Гука (V'), найдём напряжения

$$X_x, Y_y, \dots, X_y.$$

Интегрирование уравнений (VI) при соблюдении условий на поверхности (VIa) представляет большие трудности. Однако, при решении многих задач, имеющих практическое значение, оказывается удобным применять обратный метод, задавая перемещения как функции координат точки (x, y, z) и разыскивая на основании условий (VIa) внешние силы на поверхности тела (нагрузку), которым соответствуют заданные перемещения. Оказался весьма плодотворным также «полу-обратный» способ Сен-Венана, согласно которому задают часть внешних сил и часть перемещений и разыскивают остальные факторы из условия, чтобы были удовлетворены основные уравнения (VI) и (VIa). Оба эти способа мы рассмотрим на задачах, имеющих практическое приложение.

§ 19. Продольные и поперечные колебания в неограниченной упругой среде.

Применим к этой задаче обратный метод, т. е. зададимся перемещениями, и проверим, возможны ли они в однородной упругой среде, другими словами, удовлетворяют ли они уравнениям Ламе (VI). Так как мы рассматриваем случай движения, то перемещения (4.1) (§ 17) должны зависеть не только от координат точки, но и от времени t .

А. Выберем такие выражения перемещений:

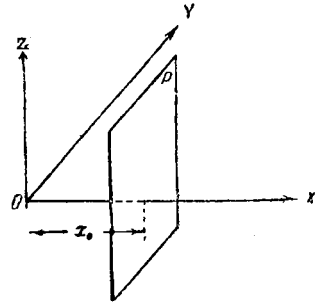
$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, t); \\ v &= 0; \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

и предположим, кроме того, что объёмные силы отсутствуют, т. е. что

$$X = Y = Z = 0.$$

Так как $v = w = 0$, то перемещения всех точек происходят параллельно оси Ox ; кроме того, перемещение u не зависит от y, z ; следовательно, если мы (фиг. 29) будем рассматривать точки, которые при отсутствии движения расположены в плоскости P , нормальной к оси Ox , то все эти точки будут перемещаться одинаково и одновременно; другими словами, плоскость P будет перемещаться в направлении оси Ox , не деформируясь.

Действительно, уравнение плоскости P в состоянии покоя будет $x = x_0$. В любой момент во время движения оно будет иметь вид $x = x_0 + u$, или $x = x_0 + u(x_0, t)$. Это поперечному плоскость, параллельная плоскости yOz , но расположенная от yOz на переменном расстоянии, зависящем от времени. Если мы выберем в нашей упругой среде ряд таких плоскостей: P, P_1, P_2, \dots , то все они будут перемещаться нормально к Ox , взаимно сближаясь или удаляясь*); дальше мы будем иметь в виду лишь периодические колебания. В этом случае движение, выраженное уравнениями (4.7), называется однородным продольным колебанием вдоль оси Ox .



Фиг. 29.

Условия на поверхности (VIa) нам удовлетворять не надо, так как среда предположена неограниченной.

Для проверки возможности колебаний, выражаемых уравнениями (4.7), подставим их в уравнения (VI). Предварительно вычисляем

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \\ & & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0; \\ \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; & \nabla^2 v &= 0; & \nabla^2 w &= 0; & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}$$

После этого замечаем, что второе и третье из уравнений (VI) удовлетворяются тождественно; первое же преобразуется так:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.8)$$

где

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}. \quad (4.9)$$

*) Так как расстояние d между двумя любыми плоскостями $x = x_0$ и $x = x_1$ во время движения зависит от времени t :

$$d = x_1 + u(x_1, t) - [x_0 + u(x_0, t)] = x_1 - x_0 + u(x_1, t) - u(x_0, t).$$

Отсюда делаем основной вывод: заданное нами продольное колебательное движение согласно уравнениям (4.7) возможно, если функция $u(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.8).

В. Выберем теперь такие выражения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= 0; \\ v &= 0; \\ w &= w(x, t). \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Пусть объёмные силы также отсутствуют:

$$X = Y = Z = 0.$$

В этом случае все перемещения происходят параллельно оси Oz . Рассуждая подобно предыдущему, легко убедимся, что все точки любой плоскости P (фиг. 29) перемещаются одинаково и одновременно, оставаясь на постоянном расстоянии от плоскости zOy . Если будем рассматривать несколько таких параллельных плоскостей, то они будут перемещаться вертикально. В случае периодического движения мы будем иметь дело с *однородным поперечным колебанием* вдоль оси Oz . Проверим возможность таких колебаний; на основании уравнений (4.10) имеем

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

значит, объёмных деформаций нет. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0; \quad \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0; \\ \nabla^2 w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}$$

При этих условиях первое и второе из уравнений (VI) удовлетворяются тождественно; третье получает вид

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4.11)$$

где

$$b^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (4.12)$$

Значит, колебание (4.10) возможно, если функция $w(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.11). Замечаем, что уравнения (4.8) и (4.11) имеют совершенно одинаковый вид и

равняться только величиной постоянного коэффициента [ср. формулы (4.9) и (4.12)].

С. Рассмотрим частный случай гармонических колебаний. Для продольного колебания зададим функцию $u(x, t)$ [ср. уравнения (4.7)] так:

$$u = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right). \quad (4.13)$$

Внося это выражение в уравнение (4.8) и производя сокращение, получаем

$$\frac{1}{T^2} = \frac{a^2}{l^2},$$

или

$$\frac{l}{T} = \pm a = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (4.14)$$

Следовательно, колебание (4.13) возможно в неограниченной упругой среде, если параметры l и T удовлетворяют соотношению (4.14).

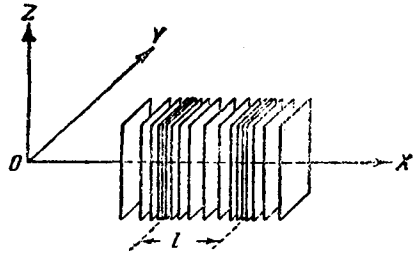
Параметр A (амплитуда колебания) остаётся произвольным. Параметр T есть период колебания; действительно, если мы оставим x постоянным (т. е. всё время будем рассматривать одну и ту же плоскость P на фиг. 29), а времени t дадим приращение T , то отклонение u согласно уравнению (4.13) не изменится.

Параметр l есть длина волны. Геометрический смысл его проще всего уяснить, рассматривая относительное удлинение

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = A \frac{2\pi}{l} \cos 2\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right). \quad (4.15)$$

Оставим время t постоянным, т. е. будем рассматривать всевозможные плоскости P (фиг. 29) в некоторый определённый момент. Так как e_{xx} выразилось в виде периодической функции от x , то формула (4.15) показывает, что если абсциссе x дадим приращение l , то получим новую плоскость P , в точках которой e_{xx} имеет ту же величину; будем, например, рассматривать $\min e_{xx}$; это будет в тех местах, где в данный момент t имеется наибольшее сгущение плоскостей P (фиг. 30); расстояние между этими точками, как сейчас указывалось, равно l ; поэтому l и называется длиной волны. Величина наибольшего сжатия (расширения) согласно уравнению (4.15) получится, если положим

$$\cos 2\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right) = \pm 1,$$



Фиг. 30.

или

$$\frac{x}{l} - \frac{t}{T} = \frac{m}{2}, \quad (4.16)$$

где m — целое число.

Из уравнения (4.13) видим, что абсцисса x этой точки равномерно перемещается с течением времени t ; скорость этого движения равна

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{l}{T}.$$

Это есть скорость распространения волны. На основании уравнения (4.14) имеем

$$V = \pm a = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (4.17)$$

Делаем вывод из предыдущего исследования: заданное гармоническое колебание (4.13) возможно в однородной упругой среде. Амплитуда A произвольна; длина волны l и период колебания T могут быть также различны, но скорость распространения продольной волны $V = \frac{l}{T}$, согласно уравнению (4.17), есть величина постоянная, зависящая от коэффициентов упругости λ и μ , а также плотности ρ среды.

Рассматриваемые нами продольные колебания есть так называемые звуковые колебания, так как при

$$\frac{1}{46} \text{ сек} > T > \frac{1}{50\,000} \text{ сек}$$

эти колебания воспринимаются ухом, как звук. Формула (4.17) важна тем, что она даёт скорость распространения звука в твёрдом теле неограниченных размеров. Так как, вместе с тем, формула (4.17) даёт скорость распространения продольной деформации e_{xx} [ср. формулу (4.15)], то продольные деформации распространяются в упругой среде с вполне определённой скоростью, равной скорости звука.

§ 20. Общее решение уравнения колебаний.

Мы рассмотрели лишь случай гармонического продольного колебания по закону (4.13); однако, в упругом теле возможны колебания самого разнообразного вида. Действительно, самое общее решение уравнения (4.8) будет

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \quad (4.18)$$

где φ и ψ — произвольные функции; подставляя это выражение в уравнение (4.8), убедимся, что оно тождественно удовлетво-

ряется. Легко видеть, что правая часть уравнения (4.18) выражает два колебания, распространяющихся в стороны положительной и отрицательной осей Ox со скоростью a .

Возьмём, например, частное решение

$$u = \varphi(x - at). \quad (4.19)$$

Если независимые переменные x и t свяжем условием

$$x - at = C \quad (4.20)$$

[ср. равенство (4.16)], то получим: $u = \varphi(C) = \text{постоянная}$. Уравнение (4.20) указывает, что точка с данной постоянной величиной отклонения u перемещается равномерно со скоростью

$$\frac{dx}{dt} = V = a.$$

Вообще можно заметить, что уравнение (4.13) есть частный случай уравнения (4.19); действительно, его можно переписать так:

$$u = A \sin \frac{2\pi}{l} (x - at), \text{ где } a = \frac{l}{T}.$$

Аналогично, частное решение $u = \psi(x + at)$ соответствует колебанию, распространяющемуся по направлению отрицательной оси Ox с той же скоростью.

Окончательное заключение: скорость распространения продольного колебания в однородном упругом теле постоянна и выражается формулой (4.17). Закон колебания может быть произвольным благодаря произвольности функций φ и ψ в общем решении (4.18) уравнения (4.8).

Соображения эти справедливы, конечно, и в отношении уравнения (4.11) поперечных колебаний.

Общее решение его такое: $w = \varphi(x - bt) + \psi(x + bt)$. Здесь b есть скорость распространения поперечных колебаний. Рассмотрим частный случай гармонического поперечного колебания:

$$w = B \sin 2\pi \left(\frac{x}{l_1} - \frac{t}{T_1} \right) = B \sin \frac{2\pi}{l_1} (x - bt),$$

где

$$b = \frac{l_1}{T_1}. \quad (4.21)$$

Здесь l_1 — длина волны поперечных колебаний (фиг. 31); T_1 — период колебания. Как и в случае продольных колебаний, найдём, что скорость распространения колебания [ср. формулы (4.21) и (4.12)]

$$V_1 = \frac{l_1}{T_1} = b = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (4.22)$$

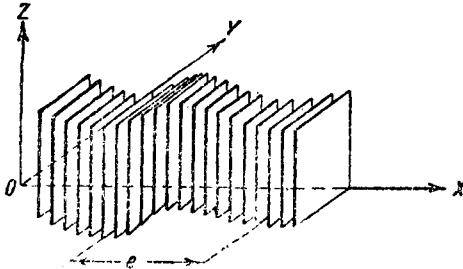
Сравнивая уравнения (4.17) и (4.22), видим, что

$$V_1 < |V|, \quad (4.23)$$

т. е. скорость распространения поперечных колебаний менее скорости распространения продольных. Отношение их будет

$$\left| \frac{V_1}{V} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2-2\sigma}} \quad (4.24)$$

и зависит только от упругих постоянных среды.



Фиг. 31.

На основании уравнений (III) § 17 и (4.10) заключаем, что поперечные колебания сопровождаются сдвигом

$$e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Сдвиг этот распространяется в упругой среде со скоростью, выражаемой формулой (4.22). Из формул (4.23) и (4.24) следует, что поперечные деформации (сдвиги) в изотропной упругой среде распространяются значительно медленнее, чем продольные деформации. Действительно, если в (4.24) положим, например, $\sigma = \frac{1}{3}$, то получим

$$\left| \frac{V_1}{V} \right| = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}.$$

Самые скорости V и V_1 , как известно, весьма велики; вычислим, например, скорость распространения продольных колебаний для стали; согласно (4.14), имеем

$$\begin{aligned} V = a &= \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} + 2} = \sqrt{\frac{2\sigma}{\mu} + 2} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}}. \end{aligned}$$

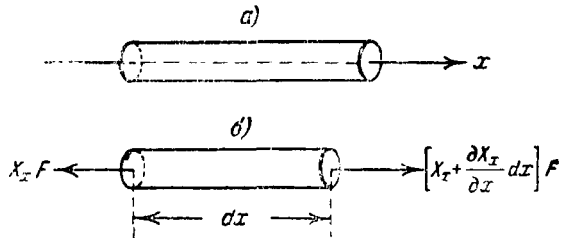
Для стали $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $\rho = \frac{7.85}{10^3 \cdot 981} \text{ кг/см}^3$; $\sigma = 0,3$; подставляя это в предыдущую формулу, получим

$$V = a = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 981 (1 - 0,3)}{7.85 (1 + 0,3) (1 - 0,6)}} = 10^4 \sqrt{3350} = \\ = 580\,000 \text{ см/сек} = 5800 \text{ м/сек}.$$

Необходимо заметить, однако, что при столь значительной скорости упругих волн, скорости самих частиц тела $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ остаются очень небольшими.

§ 21. Продольные колебания стержня. Метод Фурье.

Рассуждения предыдущих параграфов относились к неограниченной упругой среде, т. е. к среде, распространяющейся беспредельно в направлении всех трёх осей координат. Если мы будем рассматривать тонкий цилиндрический стержень (фиг. 32, а), то колебания его будут протекать несколько иначе, чем для неограниченной среды; например, при продольных колебаниях поперечные размеры его будут изменяться вследствие продольных удлинений e_{xx} ; следовательно, кроме



Фиг. 32.

основных перемещений u вдоль оси Ox появятся побочные поперечные перемещения v и w , и явление значительно усложняется. Однако, в случае тонкого стержня можно без особой ошибки пренебречь поперечными деформациями и тогда легко вывести дифференциальное уравнение продольных колебаний такого стержня.

Выделим (фиг. 32, б) из стержня элемент длиной dx и действие отброшенных частей заменим силами

$$-X_x F \text{ и } \left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \right) F,$$

где F — площадь сечения стержня. Масса выделенного элемента равна $\rho F dx$, и уравнение движения его будет

$$\rho F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} dx F, \quad (4.25)$$

или

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} *).$$

Так как мы предполагаем в стержне лишь простое растяжение или сжатие, то по закону Гука имеем

$$X_x = E e_{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x},$$

а следовательно,

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Внося это выражение в уравнение (4.25), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.26)$$

где

$$a_1^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (4.27)$$

Уравнение (4.26) отличается от уравнения (4.8) для неограниченной среды лишь постоянным коэффициентом [ср. формулы (4.9) и (4.27)]; различие обусловлено тем, что в случае неограниченной среды мы предполагали отсутствие поперечных перемещений v и w и соответственных деформаций, а это, в свою очередь, вызывает появление поперечных напряжений Y_y и Z_z ; в случае же стержня этих напряжений нет. Уравнение (4.27) даёт возможность вычислить модуль упругости стержня E , зная его плотность ρ и скорость распространения звука в нём a_1 .

Общий интеграл дифференциального уравнения (4.26) имеет прежнюю форму (4.18)**), однако, при решении частных задач чаще всего пользуются интегрированием уравнения (4.26) в рядах Фурье. Для этой цели напомним уравнение в общей форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.28)$$

где $\alpha = a, b, a_1$ в зависимости от характера решаемой задачи. Постараемся найти частный интеграл уравнения (4.28) в форме

$$u = XT, \quad (4.29)$$

*) Это равенство, очевидно, совпадает в рассматриваемой задаче с первым из уравнений Навье (1).

**) Он найден Даламбером для струны, уравнение поперечного колебания которой имеет тот же вид (4.8).

где X — функция одной переменной x , T — функция одной переменной t . Подставляя это в уравнение (4.28), найдём

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} = \alpha^2 T \frac{d^2 X}{dx^2},$$

или, разделяя переменные:

$$\frac{1}{\alpha^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (4.30)$$

Левая часть этого уравнения зависит только от t , а правая только от x ; но так как обе эти переменные независимы, то уравнение (4.30) может быть удовлетворено тождественно только в том случае, если левая и правая части его в отдельности равны одному и тому же постоянному числу; назовём его через $-\lambda^2$; тогда уравнение (4.30) разлагается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\lambda^2 \alpha^2 T; \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 X.$$

Общие интегралы их

$$\begin{aligned} T &= A \cos \lambda \alpha t + B \sin \lambda \alpha t; \\ X &= C \cos \lambda x + D \sin \lambda x. \end{aligned}$$

Подставляя это в уравнение (4.29), получим частное решение уравнения (4.28)

$$u = (A \cos \lambda \alpha t + B \sin \lambda \alpha t)(C \cos \lambda x + D \sin \lambda x). \quad (4.31)$$

Меняя здесь A , B , C , D , λ , получим сколько угодно частных решений. Так как уравнение (4.28) линейное, то сумма всех таких частных решений также будет удовлетворять ему, и мы получим решение его в виде ряда

$$u = \sum (A \cos \lambda \alpha t + B \sin \lambda \alpha t)(C \cos \lambda x + D \sin \lambda x); \quad (4.32)$$

в каждом члене этой суммы A , B , C , D , λ могут иметь свои особые значения; число членов ряда не ограничено.

Входящие сюда неопределённые постоянные следует искать из граничных и начальных условий стержня. Ход рассуждений поясним на простом примере. Пусть мы имеем стержень длиной l , заделанный нижним концом и совершающий продольные колебания. Заделка нижнего конца даёт условие: при любом t и при $x=0$ $u=0$. Для удовлетворения его в уравнении (4.32) следует, очевидно, положить

$$C = 0;$$

тогда

$$u = \sum (A \cos \lambda x t + B \sin \lambda x t) \sin \lambda x^* \quad (4.33)$$

Предположим, что верхний конец стержня свободен, и потому при $x=l$ удлинение равно $e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ в любой момент времени t . Имея это в виду, из уравнения (4.33) получим $\cos \lambda l = 0$. Отсюда

$$\lambda l = \frac{i\pi}{2}, \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{i\pi}{2l},$$

где i может быть равно любому нечётному числу $i=1, 3, 5, \dots, \infty$, и потому

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \left(A_i \cos \frac{i\pi}{2} \alpha t + B_i \sin \frac{i\pi}{2l} \alpha t \right) \sin \frac{i\pi}{2l} x. \quad (4.34)$$

Для определения произвольных постоянных A_i и B_i необходимо задать состояние стержня в начальный момент, например, при $t=0$, т. е. указать перемещения u и скорости $\frac{\partial u}{\partial t}$ всех точек стержня в этот момент; пусть

$$\left. \begin{aligned} u_{t=0} &= f(x), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} &= \varphi(x). \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\pi a}{2l} \sum_{i=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(-A_i i \sin \frac{i\pi}{2l} \alpha t + B_i i \cos \frac{i\pi}{2l} \alpha t \right) \sin \frac{i\pi}{2l} x. \quad (4.36)$$

На основании уравнений (4.34) и (4.36) условия (4.35) дают

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \frac{i\pi x}{2l}; \\ \varphi(x) &= \frac{\pi a}{2l} \sum_{i=1}^{\infty} B_i i \sin \frac{i\pi x}{2l}. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

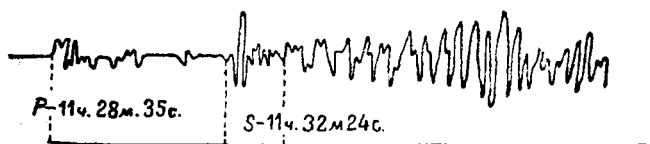
Задача свелась к разложению функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в ряды Фурье, стоящие в правых частях уравнений (4.37), т. е. к ра-

*) Постоянную D , очевидно, можем опустить без вреда для общности решения, так как, внося её в скобки, получим в них опять лишь две постоянные AD и BD .

ысканию коэффициентов A_i и B_i этих рядов. Коэффициенты эти, как известно, выражаются формулами Эйлера и в данном случае имеют такие значения:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin \frac{i\pi}{2l} x dx, \\ B_i &= \frac{2}{i\pi a} \int_{-l}^{+l} \varphi(x) \sin \frac{i\pi}{2l} x dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Изложенный здесь способ легко приводит к цели в случае свободных колебаний стержней. При исследовании вынужденных колебаний, а также поперечных колебаний стержней под



Фиг. 33.

периодически меняющейся или под движущейся нагрузкой задача значительно осложняется.

Общая теория колебаний упругого тела находит большие приложения в сейсмологии при изучении колебаний земной коры; не углубляясь в этот вопрос, отметим только, что обнаруженное нами постоянство скоростей продольных и поперечных колебаний позволяет по записи колебаний на сейсмической станции (сейсмограмма) определить расстояние центра землетрясения от станции; поперечные колебания, как мы видели, распространяются медленнее продольных и доходят до станции позднее; на фиг. 33 показана часть сейсмограммы землетрясения в Малой Азии 9 февраля 1909 г., записанная на Пулковской обсерватории*); здесь точки P и S показывают моменты прихода первых продольных и первых поперечных волн. Зная промежуток времени PS и скорости обоих видов волн, можно найти искомое расстояние. В §§ 56 и 57 главы IX даны дополнительные сведения о распространении упругих волн.

*) Чертеж заимствован из курса геологии проф. Иностранцева.

ГЛАВА V.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
В НАПРЯЖЕНИЯХ.

§ 22. Простейшие задачи:

В § 17 уже было отмечено, что если мы по заданным внешним силам хотим непосредственно найти в упругом теле напряжения

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y; \quad (5.1)$$

то условий равновесия (I):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

для этой цели будет недостаточно, так как число неизвестных (5.1) превышает число уравнений (I); поэтому придётся привлечь ещё условия неразрывности деформаций (IV). В дальнейшем для этой цели уравнения (IV) мы преобразуем, подставив в них вместо деформаций напряжения [по уравнениям (V) § 17].

Теперь же мы рассмотрим тот частный случай, когда напряжения (5.1) выражаются функциями первой степени (линейными) от координат точки или оказываются постоянными числами. На основании уравнений (V) легко видеть, что вторые производные от деформаций выражаются всегда линейными функциями от вторых производных напряжений (5.1), например:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} - \sigma \left(\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y^2} \right) \right];$$

$$\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 Y_z}{\partial x \partial z} \text{ и т. д.}$$

Так как в нашем случае напряжения являются линейными функциями от x, y, z , то все вторые производные от деформа-

ний обратятся в нуль; значит, все условия неразрывности (IV) будут удовлетворены. Остаётся лишь удовлетворить уравнениям (I) и условиям на поверхности тела (II):

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(VX) + X_y \cos(VY) + X_z \cos(VZ); \\ Y_v &= Y_x \cos(VX) + Y_y \cos(VY) + Y_z \cos(VZ); \\ Z_v &= Z_x \cos(VX) + Z_y \cos(VY) + Z_z \cos(VZ). \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

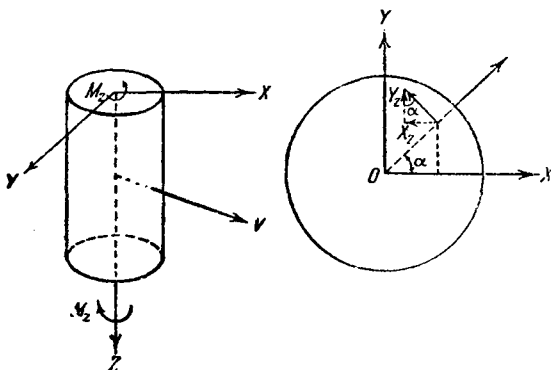
Задачи рассматриваемого рода называются простейшими задачами теории упругости. Мы сейчас рассмотрим три таких задачи.

§ 23. Кручение круглого стержня.

При решении этой задачи в сопротивлении материалов исходят из гипотезы, что плоские поперечные сечения стержня остаются плоскими, и отсюда находят, что во всех точках этих сечений возникают только касательные напряжения

$$t = \frac{M_z}{J_p} r, \quad (5.2)$$

направленные нормально к радиусу r данной точки. Разлагая напряжение (5.2) на составляющие, параллельные осям Ox и Oy , находим (фиг. 34)



Фиг. 34.

$$X_z = -t \sin \alpha; \quad Y_z = t \cos \alpha; \quad (5.3)$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}; \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

Далее, угол закручивания стержня на единицу длины выражается так:

$$\tau = \frac{M_z}{GJ_p} \quad (5.4)$$

Отсюда легко найдём, что $t = G\tau r$. Внося всё это в формулы (5.3) и предполагая, что остальные из составляющих напряжений (5.1) обращаются в нуль, приходим к такой системе напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= 0; & Y_y &= 0; & Z_z &= 0; \\ Y_x &= G\tau y; & X_z &= -G\tau y; & X_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Проверим, возможна ли эта система напряжений с точки зрения теории упругости. Так как напряжения (5.5) являются функциями не выше первой степени от координат точки, то данная задача относится к простейшим; поэтому придётся только удовлетворить уравнениям (I) и проверить по условиям на поверхности (II), соответствуют ли напряжения (5.5) условиям задачи о кручении. Подставляя данные из уравнений (5.5) в уравнения (I), найдём

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = 0;$$

следовательно, напряжения (5.5) возможны при условии отсутствия объёмных сил (например, собственного веса стержня).

Далее переходим к условиям на поверхности стержня. Легко видеть (фиг. 34), что на боковой поверхности всюду $\cos(VZ) = 0$;

$$\cos(VX) = \cos \alpha = x/r; \quad \cos(VY) = \sin \alpha = y/r.$$

Подставляя отсюда и из уравнений (5.5) данные в уравнения (II), найдём, что

$$X_v = 0; \quad Y_v = 0; \quad Z_v = 0,$$

т. е. боковая поверхность свободна от нагрузки.

На конечном поперечном сечении имеем

$$\begin{aligned} \cos(VX) = \cos(VY) &= 0; \\ \cos(VZ) &= 1. \end{aligned}$$

Внося отсюда и из (5.5) данные в (II), имеем

$$\left. \begin{aligned} X_v = X_z = -G\tau y; \quad Y_v = Y_z = G\tau x; \\ Z_v = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Следовательно, здесь приложены (как и во всяком другом поперечном сечении) только касательные силы. Равнодействующая их имеет следующие проекции на оси Ox и Oy :

$$\begin{aligned} \iint X_z dF &= - \iint G\tau y dF = -G\tau \iint y d\dot{F} = 0; \\ \iint Y_z dF &= G\tau \iint x dF = 0, \end{aligned}$$

так как начало координат помещено в центре тяжести сечения. Следовательно, силы, приложенные к конечному сечению, приводятся к паре; значит, мы действительно имеем задачу о кручении стержня.

Момент крутящей пары вокруг оси Oz равен

$$M_z = \iint (X_z y - Y_z x) dF = -G\tau \iint (x^2 + y^2) dF = -G\tau J_p.$$

§ 24. Принцип Сен-Венана.

Сделаем одно важное замечание. Мы показали, что система напряжений (5.5) соответствует кручению круглого стержня; *однако, мы не вправе сделать обратное заключение, что при кручении круглого стержня всегда получается система напряжений (5.5).*

Действительно, формулируя задачу о кручении, мы лишь указываем, что к концевому поперечному сечению приложена пара сил; однако, такого указания недостаточно, так как эта пара может быть осуществлена самыми разнообразными способами, т. е. напряжения, приводящиеся к паре, могут быть различно распределены по точкам сечения. Система напряжений (5.5) получается при вполне определённом способе осуществления крутящей пары, указанном формулами (5.6); при другом способе приложения крутящей пары получится и другая система напряжений в стержне.

Эти соображения будут справедливы и по отношению ко многим другим задачам; они показывают, что в сопротивлении материалов мы формулируем задачи очень схематично, задавая иногда не силы, приложенные к телу, а лишь равнодействующие этих сил (например, «сжатие стержня двумя силами» или «изгиб парой сил» и т. д.). Каждая такая формулировка при более точном методе решения приводит ко множеству довольно разнообразных задач.

Однако Сен-Венан высказал весьма важный общий принцип, показывающий, что во всей бесчисленной совокупности задач, обнимаемых такой общей схематической формулировкой, есть много общих черт; принцип этот указывает, что в *точках твёрдого тела, достаточно удалённых от мест приложения внешних нагрузок, напряжения весьма мало зависят от детального способа осуществления этих нагрузок*; например, для только что решённой задачи о кручении принцип Сен-Венана говорит, что в точках стержня, достаточно далёких от концевых поперечных сечений, напряжения при скручивании почти не зависят от способа приложения крутящих пар и мало меняются при изменении этого способа. Но, конечно, у концов стержня способ приложения крутящих пар существенно влияет на характер и величину напряжений.

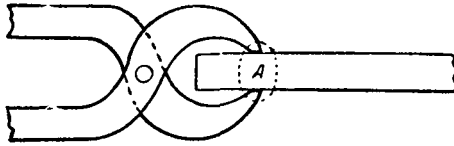
Принцип Сен-Венана вытекает из следующего предварительного положения, теперь уже достаточно доказанного рядом решений теории упругости.

Если к какой-либо части тела А (фиг. 35) приложена уравновешенная система сил, то она вызовет в этом теле напряжения, очень быстро убывающие по мере удаления от части А.

Фиг. 35 поясняет это положение на частном случае стержня, который сжимается клещами, осуществляющими уравновешенную

систему сил. Очевидно, как бы ни были велики эти силы (например, при перерезании клещами проволоки), они почти не вызовут напряжений вне небольшой области A , очерченной пунктиром.

Приняв это положение, мы путём простого статического преобразования перейдём от него к высказанному выше принципу Сен-Венана.

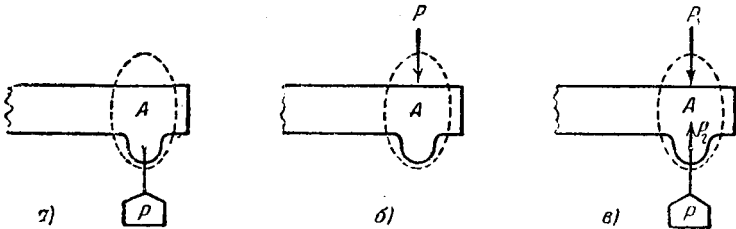


Фиг. 35.

Необходимые для этого рассуждения делаем снова на конкретном примере (фиг. 36, a , b) бруса, изгибаемого в одном случае силой P , подвешенной на конце бруса снизу, а в другом—такой же силой, но давящей сверху.

Очевидно, что напряжения в области A будут весьма различны для этих двух случаев, но легко понять, что вне области A различие будет невелико.

Действительно, присоединим сюда временно третий случай (фиг. 36, e), добавив к случаю a две равные противоположные



Фиг. 36.

силы P_1 и P_2 , причём по абсолютной величине все три силы одинаковы: $P_1 = P_2 = P$.

Замечаем, что случай e отличается:

от случая a уравновешенной системой сил P_1, P_2 ,
 » » b » » » P, P_2 .

Однако эти уравновешенные системы, согласно высказанному выше принципу, не вызовут почти никаких напряжений вне малой области A ; следовательно, вне этой области случай e даст для напряжений весьма малое отличие от случаев a и b ; значит, случаи a и b между собой также почти не будут различаться в смысле напряжений вне области A , а это и надо было доказать.

§ 25. Окончание задачи о кручении круглого стержня.

Закончим задачу о кручении круглого стержня и найдём перемещения его точек.

Внося напряжения (5.5) в закон Гука (V) (§ 17), получим деформации; затем заменяем деформации их выражениями через перемещения по уравнениям (III) (§ 17) и получаем такую систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= \tau x, \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= -\tau y. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Интегрируя уравнения (5.7), имеем

$$\left. \begin{aligned} u &= f(y, z); \quad v = \varphi(x, z); \\ w &= \psi(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

где f , φ , ψ — произвольные функции; вид их определим из уравнений (5.8), которые на основании (5.9) получают вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \tau x; \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\tau y. \quad (5.12)$$

Постараемся путём дифференцирования исключить из этих уравнений поочерёдно функции f , φ , ψ ; например, дифференцируя уравнения (5.10), (5.11), (5.12), имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Продифференцируем уравнения (5.11) и (5.12) ещё так:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = \tau; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\tau.$$

Складывая эти уравнения и принимая во внимание (5.10), имеем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (5.14)$$

Вычитая же эти уравнения, получаем

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2\tau, \quad (5.15)$$

и так как на основании (5.10)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y},$$

то из уравнения (5.15) имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = \tau; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\tau. \quad (5.16)$$

Собирая результаты (5.13), (5.14) и (5.16) попарного исключения функций f , φ и ψ , получаем следующую таблицу вторых производных этих функций:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\tau; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \tau; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \end{array} \right\} \quad (5.17)$$

Предыдущие выкладки имели целью получение именно этой, более простой системы уравнений взамен (5.10) — (5.12); на основании её легко установить теперь общий вид функций f , φ и ψ ; действительно, последние три уравнения показывают, что функция ψ будет первой степени от x и y ; первая и вторая строки показывают, что f и φ должны быть второй степени (соответственно от y , z и от x , z), но не должны содержать квадратов переменных; поэтому на основании уравнений (5.17) и (5.9) легко напишем

$$\left. \begin{array}{l} f = -\tau yz + ay + bz + c; \\ \varphi = \tau xz + dx + ez + f; \\ \psi = gx + hy + k. \end{array} \right\} \quad (5.18)$$

Функции (5.18) являются общим решением уравнений (5.17); эти последние получены как следствие уравнений (5.10) — (5.12) помощью дифференцирования. Поэтому порядок их выше порядка последних; значит, не всякое решение уравнений (5.17) будет удовлетворять уравнениям (5.10) — (5.12). Например, из дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

дифференцированием получим уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Общее решение последнего

$$y = C_1 x + C_2$$

удовлетворит первому лишь при условии $C_1 = 0$. Поэтому необходимо установить, какие из решений (5.18) удовлетворяют уравнениям (5.10) — (5.12).

Подставляя функции (5.18) в уравнения (5.10) — (5.12), устанавливаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \tau z + d - \tau z + a &= 0, \\ h + \tau x + e &= \tau x, \\ -\tau y + b + g &= -\tau y, \end{aligned}$$

или

$$d = -a; \quad h = -e; \quad g = -b,$$

и затем имеем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} u &= f = -\tau yz + ay + bz + c, \\ v &= \varphi = \tau xz - ax + ez + f, \\ w &= \psi = -bx - ey + k. \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

В полученные выражения перемещений (5.19) вошло шесть произвольных постоянных; наличие их здесь легко объяснить. Действительно, в § 6 мы условились закрепить исследуемое упругое тело, чтобы исключить его движение, изучаемое в механике абсолютно твёрдого тела и названное выше, в конце § 6, жёстким смещением; однако, в настоящей задаче мы ещё не осуществили такого закрепления; линейные трёхчлены в формулах (5.19) указывают, что пока ещё сохраняется возможность поворотов всего бруса вокруг осей координат на произвольные малые углы $-2e$, $-2b$, $-2a$ и поступательных смещений его c , f , k вдоль этих осей [ср. формулы (2.11)].

В сопротивлении материалов мы задаём условия закрепления лишь схематически, говоря, например, что «закреплено крайнее сечение»; здесь же зададим это условие точнее: закрепим центр сечения $z = 0$, поставив требование, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x = y = z = 0 \\ u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Однако, это условие недостаточно, так как, несмотря на него, стержень может вращаться вокруг начала координат (фиг. 37); чтобы устранить возможность этих вращений, потребуем ещё, чтобы два из трёх элементов dx , dy и dz у начала координат O оставались неподвижными. В § 6 [см. формулы (2.3) и (2.4)] мы уже получили выражения углов поворота элементарных отрезков; пользуясь ими, выражаем нужные нам условия.

а) Отрезок dz неподвижен

$$\text{при } x=y=z=0 \quad \frac{\partial u}{\partial z}=0; \quad \frac{\partial v}{\partial z}=0. \quad (5.21)$$

б) Отрезок dy неподвижен в плоскости Oxy

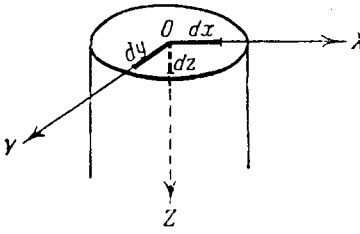
$$\text{при } x=y=z=0 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0. \quad (5.22)$$

Легко сообразить, что поставленных условий (5.20), (5.21) и (5.22) достаточно для закрепления стержня против жёсткого смещения его. Применяя эти условия к уравнениям (5.19), получим

$$a = b = c = e = f = k = 0,$$

и потому

$$\left. \begin{aligned} u &= -\tau yz; \\ v &= \tau xz; \\ w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$



Фиг. 37.

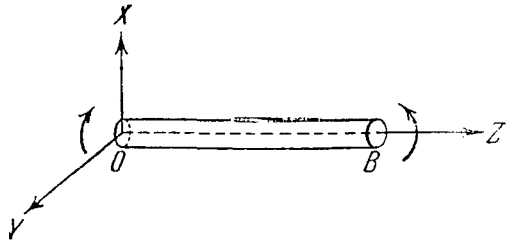
Последнее уравнение подтверждает гипотезу о том, что плоские поперечные сечения круглого стержня при кручении остаются плоскими.

§ 26. Чистый изгиб призматического стержня.

При решении этой задачи (фиг. 38) в сопротивлении материалов мы приходим к таким выражениям напряжений:

$$\left. \begin{aligned} Z_x &= -\frac{E x}{\rho}; \\ Y_y &= X_x = 0; \\ Y_z &= Z_x = X_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Проверим, возможна ли система напряжений (5.24) с точки зрения теории упругости и соответствуют ли эти напряжения чистому изгибу.



Фиг. 38.

Подстановкой функций (5.24) в уравнения равновесия (I) убедимся, что они удовлетворяются при отсутствии объёмных сил. Уравнения неразрывности (IV) (§ 17) будут удовлетворены. Для условий на боковой поверхности стержня имеем всюду

$$\cos(VZ) = 0.$$

Подставляя это и (5.24) в уравнения (II), найдём, что боковая поверхность свободна от напряжений.

Усилия на концевом сечении B приводятся в паре сил*) о моментом

$$M_B = \iint Z_x x dF = -\frac{E}{\rho} \iint x^2 dF = -\frac{EJ}{\rho}.$$

Значит, напряжения (5.24) возможны и соответствуют чистому изгибу. Переходим к определению перемещений. Подставляя напряжения (5.24) в закон Гука (V) и полученные отсюда деформации в уравнения (III), приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma x}{\rho}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sigma x}{\rho}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{x}{\rho}; \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (5.26)$$

Интегрирование их ведём тем же порядком, как в предыдущем параграфе. Из равенств (5.25) находим

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\sigma x^2}{2\rho} + f(y, z); \\ v &= \frac{\sigma xy}{\rho} + \varphi(x, z); \\ w &= -\frac{xz}{\rho} + \psi(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Вид функций f , φ и ψ находим при помощи уравнений (5.23):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0; \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{z}{\rho}; \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sigma y}{\rho}. \quad (5.30)$$

Дифференцируя эти уравнения, находим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\sigma}{\rho}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Далее дифференцируем равенства (5.29) и (5.30) так:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

Складывая эти уравнения, имеем

$$2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0,$$

*) Предлагаем читателю убедиться, что равнодействующая сил $Z_x dF$ равна нулю.

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

Вычитая те же уравнения, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0;$$

но из уравнения (5.28) имеем $\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, а потому

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0.$$

Собирая эти результаты, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{c}{\rho}; & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{1}{\rho}; & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 0; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= 0; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда легко устанавливаем вид функций f , φ и ψ :

$$\left. \begin{aligned} f &= -\frac{\sigma y^2}{2\rho} + \frac{z^2}{2\rho} + ay + bz + c; \\ \varphi &= dx + ez + f'; \\ \psi &= gx + hy + k; \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

подставляя эти значения в уравнения (5.23)–(5.30), имеем

$$\begin{aligned} h + e &= 0, & \text{т. е. } h &= -e; \\ \frac{z}{\rho} + b + g &= \frac{z}{\rho}, & \text{т. е. } g &= -b; \\ d - \frac{\sigma y}{\rho} + a &= -\frac{\sigma y}{\rho}, & \text{т. е. } d &= -a. \end{aligned}$$

Принимая это во внимание и внося из уравнений (5.31) в уравнения (5.27), получим

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{z^2}{2\rho} + \frac{\sigma(x^2 - y^2)}{2\rho} + ay + bz + c; \\ v &= \frac{\sigma xy}{\rho} - ax + ez + f'; \\ w &= -\frac{xz}{\rho} - bx - ey + k. \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Для определения оставшихся произвольных постоянных остаётся осуществить закрепление стержня в левом его конце

(фиг. 38). Закрепим прежде всего центр сечения, поставив условием, что при

$$x = y = z = 0; \quad u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0;$$

на этом основании из уравнений (5.32) находим

$$c = f' = k = 0.$$

Далее закрепляем элемент оси стержня dz , устранив его повороты в плоскостях Oxy и Oyz , т. е. поставив условия, что при

$$x = y = z = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Наконец, остаётся устранить вращение стержня вокруг его оси; для этого закрепим, например, элемент dx оси Ox против поворота в плоскости Oxy , т. е. потребуем, чтобы при

$$x = y = z = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Из всех этих условий находим, что $a = b = e = 0$ и получаем окончательные выражения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{z^2 + c(x^2 - y^2)}{2\rho}; \\ v &= \frac{cxy}{\rho}; \\ w &= -\frac{xz}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Всякая точка стержня (x_1, y_1, z_1) после деформации переходит в новое положение:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + u = x_1 + \frac{z_1^2 + c(x_1^2 - y_1^2)}{2\rho}; \\ y &= y_1 + v = y_1 + \frac{cx_1y_1}{\rho}; \\ z &= z_1 + w = z_1 - \frac{x_1z_1}{\rho}. \end{aligned}$$

Для точек оси стержня $(x = y = 0)$ получаем

$$\left. \begin{aligned} v &= w = 0; \\ u &= \frac{z^2}{2\rho}; \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

это есть уравнение изогнутой оси стержня.

Возьмём какое-либо плоское сечение стержня $z = z_0$. Новая координата z любой его точки после деформации будет

$$z = z_0 + w_0;$$

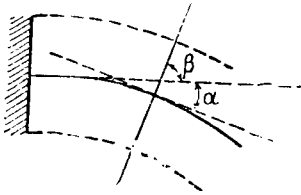
но по уравнениям (5.33) имеем:

$$w_0 = -\frac{xz_0}{\rho}.$$

Следовательно,

$$z = z_0 \left(1 - \frac{x}{\rho}\right). \quad (5.35)$$

Это уравнение плоскости, параллельной оси Oy (фиг.39); ему удовлетворяют все точки сечения $z = z_0$ после деформации. Следовательно, плоское поперечное сечение остаётся плоским после деформации.



Фиг. 39.

Уравнение (5.35) перепишем так:

$$x = -\frac{\rho}{z_0} z + \rho. \quad (5.36)$$

Угловой коэффициент здесь будет $\operatorname{tg} \beta = -\frac{\rho}{z_0}$. Тангенс угла наклона касательной к оси (5.34) в точке $z = z_0$ равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{du}{dz}\right)_{z=z_0} = \frac{z_0}{\rho}. \quad (5.37)$$

Таким образом, имеем (фиг. 39)

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -1.$$

Следовательно, плоское сечение (5.35) после изгиба остаётся нормальным к оси, и гипотеза плоских сечений в случае чистого изгиба оправдывается полностью.

Рассмотрим ещё частный случай стержня прямоугольного сечения (фиг. 40, а) и исследуем искажение контура его поперечного сечения. Вопрос этот представляет интерес для дальнейшего.

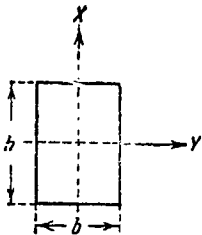
Боковая сторона его до изгиба определяется уравнениями

$$z = z_0; y = \pm \frac{b}{2};$$

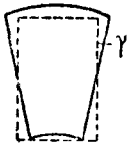
после деформации эти уравнения перейдут в такие:

$$y = \pm \frac{b}{2} + v = \pm \frac{b}{2} \pm \frac{\sigma x b}{2\rho} = \pm \frac{b}{2} \left(1 + \frac{\sigma x}{\rho}\right);$$

$$z = z_0 + w = z_0 - \frac{xz_0}{\rho} = z_0 \left(1 - \frac{x}{\rho}\right).$$



а)



б)

Фиг. 40.

Получились два уравнения первой степени относительно x, y, z ; следовательно, боковые стороны после изгиба остаются прямыми. Из уравнения

$$y = \pm \frac{\sigma b}{2\rho} x \pm \frac{b}{2}$$

видно, что (фиг. 40, б)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sigma b}{2\rho}, \quad (5.38)$$

где γ — угол между проекциями начального и деформированного положений боковой стороны на плоскость Oxy . Переходим к верхней и нижней сторонам, имеющим уравнения

$$z = z_0; x = \pm \frac{h}{2}.$$

После изгиба их уравнения будут

$$x = \pm \frac{h}{2} + u = \pm \frac{h}{2} + \frac{z_0^2 + \sigma \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{2\rho}; \quad z = z_0 \left(1 - \frac{x}{\rho} \right).$$

Первое из этих уравнений — второй степени, а второе — первой степени относительно x, y, z . Следовательно, верхняя и нижняя стороны обращаются в плоские кривые. Первое уравнение даёт нам проекцию этих кривых на плоскость Oxy

$$x = \pm \frac{h}{2} + \frac{z_0^2}{2\rho} + \frac{\sigma h^2}{8\rho} - \frac{\sigma}{2\rho} y^2; \quad (5.39)$$

Это есть уравнение двух парабол (верхняя и нижняя стороны). Радиус кривизны изогнутой оси (5.34) и радиус кривизны парабол (5.39) приблизительно равны соответственно

$$\rho \text{ и } \frac{\rho}{\sigma}.$$

Уравнения (5.34) и (5.39) приближены, так как в выражениях деформаций нами были отброшены конечные малые величины высших порядков [ср. § 6, формулы (2.3) и (2.4)]. При более точном решении кривые (5.34) и (5.39) будут окружностями с радиусами

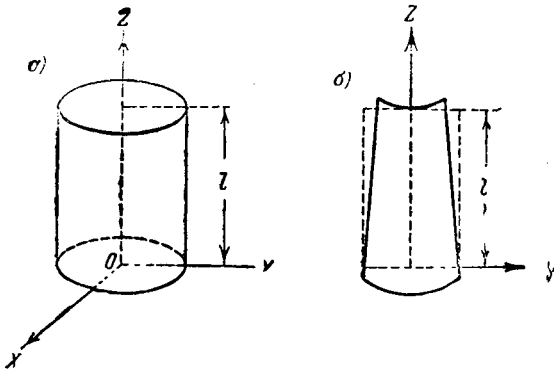
$$\rho \text{ и } \frac{\rho}{\sigma}.$$

Искажённая форма контура сечения показана на фиг. 40, б. Верхняя уширенная часть соответствует сжатым продольным волокнам, а нижняя — растянутым.

§ 27. Растяжение цилиндра под действием собственного веса.

Пусть мы имеем (фиг. 41, а) цилиндр произвольного поперечного сечения, подвешенный верхним основанием и растягиваемый собственным весом. Легко убедиться, что данной задаче соответствует такая система напряжений:

$$\begin{aligned} X_x = Y_y = 0; \quad Z_z = \rho g z; \\ Y_z = Z_x = X_y = 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$



Фиг. 41.

Подставив в уравнения (I) эти выражения, найдём, что $X = Y = 0$; $Z = -g$, т. е. мы действительно имеем задачу о действии собствен-

ного веса. Далее, при $z=0$ получаем

$$Z_z = 0,$$

т. е. нижнее основание свободно от нагрузки: внося значения (5.40) в уравнения (II), убедимся, что боковая поверхность цилиндра также свободна от нагрузки. Перемещения разыскиваем совершенно так же, как и в двух предыдущих задачах.

На основании (III) и (V) получаем систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\rho g}{E} z, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\rho g}{E} z; \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\rho g}{E} z; \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

Интегрируя уравнения (5.41), получаем

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\rho g}{E} zx + f(y, z); \\ v &= -\frac{\rho g}{E} zy + \varphi(x, z); \\ w &= \frac{\rho g}{E} \frac{z^2}{2} + \psi(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Внося это в уравнения (5.42), получаем уравнения для отыскания f , φ и ψ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \quad (5.44)$$

$$-\frac{\sigma \rho g}{E} y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\sigma \rho g}{E} x + \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (5.46)$$

Отсюда дифференцированием легко найдём следующие уравнения:

из уравнения (5.44)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0;$$

из уравнения (5.45)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\sigma \rho g}{E};$$

из уравнения (5.46)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\sigma \rho g}{E}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Далее, таким же путём найдём:

из уравнения (5.44)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0;$$

из уравнения (5.45)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0;$$

из уравнения (5.46)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

(5.48)

Вычитая эти уравнения попарно, получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

Сопоставляя эти уравнения с уравнениями (5.48), найдём

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (5.49)$$

Уравнения (5.47) и (5.49) определяют вид функций f , φ , ψ :

$$f = ay + bz + c; \quad \varphi = dx + ez + m;$$

$$\psi = \frac{\rho g}{2E} (x^2 + y^2) + nx + hy + k.$$

Эти выражения следует внести в уравнения (5.43), и значения перемещений u , v , w отсюда подставить в уравнения (5.41); это приведёт к таким зависимостям между произвольными постоянными:

$$d = -a; \quad h = -e; \quad n = -b.$$

Тогда выражения перемещений получают вид

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\rho g}{E} zx + ay + bz + c; \\ v &= -\frac{\rho g}{E} zy - ax + ez + m; \\ w &= \frac{\rho g}{2E} [z^2 + \sigma(x^2 + y^2)] - bx - ey + k. \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Условия закрепления цилиндра осуществляем, как и в двух предыдущих задачах, но по условиям этой задачи закрепляем не начало координат, а центр верхнего сечения; поэтому ставим следующие требования:

$$\text{при } x=0, y=0, z=l$$

должно быть

$$\begin{aligned} u &= 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0^* \end{aligned}$$

Отсюда легко найдём, что $a = b = c = e = m = 0$; $k = -\frac{\rho g}{2E} l^2$, и перемещения (5.50) окончательно получают вид

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\rho g}{E} xz; \quad v = -\frac{\rho g}{E} yz; \\ w &= \frac{\rho g}{2E} [z^2 - l^2 + \sigma(x^2 + y^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

Точки на оси стержня (уравнения её $x=0$; $y=0$) перемещаются вертикально ($u=0$; $v=0$); у всех прочих точек имеются также и горизонтальные перемещения. Если возьмём в стержне или на его поверхности прямую, параллельную оси OZ (на поверхности это есть образующая цилиндра):

$$x = x_0; \quad y = y_0, \quad (5.52)$$

*) Вместо этого можно потребовать, чтобы было $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

то уравнения её после деформации будут $x = x_0 + u$; $y = y_0 + v$, или

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \left(1 - \frac{\sigma \rho g}{E} z \right); \\ y &= y_0 \left(1 - \frac{\sigma \rho g}{E} z \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

Эти уравнения также определяют прямую. Если исключим отсюда z путём почленного деления уравнений, то получим уравнение проекции прямой (5.53) на плоскость xOy , а именно: $y_0 x = x_0 y$. Она проходит через начало координат; значит, прямая (5.53) и ось цилиндра OZ лежат в одной плоскости. Найдём точку их пересечения; для этого решим совместно уравнения прямой (5.53) и уравнения оси цилиндра OZ : $x = 0$; $y = 0$. Получим $1 - \frac{\sigma \rho g}{E} z = 0$, или

$$z = \frac{E}{\sigma \rho g} \quad (5.54)$$

Эта величина не зависит от координат x_0, y_0 , определявших положение взятой прямой (5.52). Отсюда делаем вывод: если внутри стержня выделим любой цилиндр с осью Oz , то после деформации он превратится в конус с вершиной на оси Oz в постоянной точке (5.54); это заключение относится, конечно, и к боковой цилиндрической поверхности стержня.

Интересно отметить, что в данной простейшей задаче плоские поперечные сечения стержня не остаются плоскими после деформации; действительно, плоское сечение $z = z_0$ после деформации будет иметь уравнение $z = z_0 + w$ или, согласно (5.51):

$$z = z_0 + \frac{\rho g}{2E} [z_0^2 - l^2 + \sigma(x^2 + y^2)]; \quad (5.55)$$

Это — параболоид вращения. На фиг. 41, б показано сечение цилиндра плоскостью xOz после деформации.

§ 28. Однозначность решения уравнений теории упругости.

При решении всех предыдущих задач мы шли обратным методом, задаваясь напряжениями или перемещениями и выясняя, при каких силах, действующих на поверхности, получается выбранная система напряжений; при этом каждый раз может возникнуть вопрос, нельзя ли при какой-либо другой системе напряжений получить такие же силы на поверхности. Если это окажется возможным, то решение уравнений теории упругости окажется многозначным: заданным силам на поверхности будут соответствовать несколько систем напряжений, и необходимо вы-

яснить, какие из этих систем имеют место в действительности. В этом случае при обратном или полуобратном способе решения мы не будем уверены, что выбрали именно ту систему напряжений, которая соответствует действительности. Благодаря этому вопрос об однозначности решения уравнений теории упругости приобретает большое значение.

Заметим, что если в теле возможны начальные напряжения, то при действии внешних сил на это тело полные напряжения в нём могут быть весьма разнообразными; действительно, возьмём, например, тот железный шар с начальными напряжениями, о котором мы говорили в § 14. Если мы его подвергнем действию сил, то окончательные суммарные напряжения в нём будут зависеть от размера секториального выреза, который был предварительно сделан. В подобных случаях уравнения теории упругости должны иметь многозначное решение.

Отбросим случай начальных напряжений, т. е. примем гипотезу о естественном состоянии тела, а также примем закон независимости действия сил. Тогда легко доказать, что решение будет однозначным и потому единственным.

Действительно, предположим обратное, именно, что под действием заданных поверхностных сил

$$X_v, Y_v, Z_v \quad (5.56)$$

и объёмных

$$X, Y, Z \quad (5.57)$$

возможны две различные системы напряжений:

$$X'_x, Y'_y, Z'_z, Y'_z, Z'_x, X'_y \quad (5.58')$$

и

$$X''_x, Y''_y, Z''_z, Y''_z, Z''_x, X''_y. \quad (5.58'')$$

Обе эти системы должны удовлетворять основным уравнениям (I) и (II):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial Y'_x}{\partial x} + \frac{\partial Y'_y}{\partial y} + \frac{\partial Y'_z}{\partial z} + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial Z'_x}{\partial x} + \frac{\partial Z'_y}{\partial y} + \frac{\partial Z'_z}{\partial z} + \rho Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.59')$$

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X'_x \cos(VX) + X'_y \cos(VY) + X'_z \cos(VZ); \\ Y_v &= Y'_x \cos(VX) + Y'_y \cos(VY) + Y'_z \cos(VZ); \\ Z_v &= Z'_x \cos(VX) + Z'_y \cos(VY) + Z'_z \cos(VZ). \end{aligned} \right\} \quad (5.60')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x''}{\partial x} + \frac{\partial X_y''}{\partial y} + \frac{\partial X_z''}{\partial z} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial Y_x''}{\partial x} + \frac{\partial Y_y''}{\partial y} + \dots + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial Z_x''}{\partial x} + \dots + \rho Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.59'')$$

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x'' \cos(VX) + X_y'' \cos(VY) + X_z'' \cos(VZ); \\ Y_v &= Y_x'' \cos(VX) + Y_y'' \cos(VY) + \dots; \\ Z_v &= Z_x'' \cos(VX) \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.60'')$$

Почленным вычитанием соответственных уравнений систем (5.59) и (5.60) получим такую новую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (X'_x - X''_x)}{\partial x} + \frac{\partial (X'_y - X''_y)}{\partial y} + \frac{\partial (X'_z - X''_z)}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial (Y'_x - Y''_x)}{\partial x} + \frac{\partial (Y'_y - Y''_y)}{\partial y} + \frac{\partial (Y'_z - Y''_z)}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial (Z'_x - Z''_x)}{\partial x} + \frac{\partial (Z'_y - Z''_y)}{\partial y} + \frac{\partial (Z'_z - Z''_z)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (X'_x - X''_x) \cos(VX) + (X'_y - X''_y) \cos(VY) + \\ &\quad + (X'_z - X''_z) \cos(VZ); \\ 0 &= (Y'_x - Y''_x) \cos(VX) + (Y'_y - Y''_y) \cos(VY) + \\ &\quad + (Y'_z - Y''_z) \cos(VZ); \\ 0 &= (Z'_x - Z''_x) \cos(VX) + (Z'_y - Z''_y) \cos(VY) + \\ &\quad + (Z'_z - Z''_z) \cos(VZ). \end{aligned} \right\}$$

На основании закона независимости действий сил, разности напряжений, входящие в уравнения (5.61), можем принять за некоторую новую систему напряжений. Однако, уравнения (5.61) показывают, что эти напряжения существуют при отсутствии поверхностных и объёмных сил, и потому все они на основании гипотезы о естественном состоянии тела должны быть равны нулю, т. е.

$$X'_x = X''_x; \quad X'_y = X''_y \text{ и т. д.}$$

Значит, обе системы напряжений (5.58') и (5.58'') совпадают, что и требовалось доказать.

Если в данной задаче закон независимости действий несправедлив, то мы снова встречаемся с многозначностью решения. Иллюстрацию этого можно видеть на Эйлеровой задаче о продольном изгибе стержня. Действительно, возьмём два груза, P_1 и P_2 , каждый из которых немногим меньше критического $P_{кр}$. При действии каждого из грузов P_1 и P_2 в отдельности

получается простое сжатие стержня. При действии же суммы грузов $P_1 + P_2$ к суммарному сжимающему напряжению добавятся колоссальные напряжения от изгиба; поэтому здесь закон независимости действий отсутствует, и действие суммы сил не равно сумме их действий порознь. Одновременно здесь имеется в наличии многозначность решения, так как возможно несколько форм равновесия, каждой из которых соответствует своя система напряжений.

В § 30 вопрос о единственности решения будет рассмотрен в более общей форме.

§ 29. Уравнения Бельтрами-Мичелла.

Обратимся теперь к общему случаю решения задачи теории упругости в напряжениях. Выше уже не раз указывалось (§ 17 и 22), что если в качестве основных неизвестных выбраны напряжения, то число этих неизвестных будет равно шести:

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y. \quad (5.62)$$

Значит, трёх уравнений равновесия (I)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

оказывается недостаточно, и для решения задачи придётся привлечь также условия неразрывности деформаций (IV). Кроме того, конечно, на поверхности должны удовлетворяться условия (II):

$$\begin{aligned} X_v &= X_x \cos(VX) + X_y \cos(VY) + X_z \cos(VZ); \\ Y_v &= Y_x \cos(VX) + Y_y \cos(VY) + Y_z \cos(VZ); \\ Z_v &= Z_x \cos(VX) + Z_y \cos(VY) + Z_z \cos(VZ). \end{aligned}$$

Таким образом, задача приведётся к интегрированию девяти уравнений (I) и (IV) с шестью неизвестными функциями. Входящие в общее решение этих уравнений произвольные функции надо будет определять из условий на поверхности (II).

Так как условия неразрывности (IV) связывают между собой деформации

$$e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy},$$

нам придётся эти условия преобразовать, выразив деформации через напряжения (5.62) при помощи закона Гука (V). Выполняя эту подстановку и пользуясь одновременно уравнениями равновесия (I), мы уравнения (IV) преобразуем к следующему виду при отсутствии объёмных сил или если эти силы постоянны*):

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sigma) \nabla^2 X_x + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Y_y + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Z_z + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Y_z + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 Z_x + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x} &= 0; \\ (1 + \sigma) \nabla^2 X_y + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII})$$

Таким образом, для решения задачи придётся проинтегрировать девять уравнений (I) и (VII) и удовлетворить условиям на поверхности (II).

Бельтрами нашёл уравнения (VII) несколько иным путём, исходя из уравнений Ламе (VI). При этом ход рассуждений получается следующий. Предполагаем, как и выше, что объёмных сил нет или они постоянны во всех точках тела, т. е. что

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \dots = \frac{\partial Z}{\partial z} = 0; \quad (5.63)$$

Прежде всего доказываем вспомогательное положение о том, что знаки лапласова оператора и частной производной можно переставлять между собою; например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 f) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \nabla^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, если через t обозначим любую из переменных x, y, z , то

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 f) = \nabla^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right). \quad (5.64)$$

Далее доказываем, что при условиях (5.63) объёмная деформация θ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \theta = 0. \quad (5.65)$$

*) Вывод этот здесь опущен; найти его можно в курсе «Теории упругости» С. П. Тимошенко, ч. I, 1914.

Для этого дифференцируем первое из уравнений (VI) по x , второе по y и третье по z ; складывая полученные результаты и пользуясь (5.63) и (5.64), получим

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\theta = 0,$$

откуда и приходим к уравнению (5.65).

Теперь из уравнений Ламе (VI) путём дифференцирования мы выведем шесть дифференциальных зависимостей между деформациями. Дифференцируя по x первое из уравнений (VI) и пользуясь уравнениями (5.63) и (5.64), получаем

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \mu\nabla^2 e_{xx} = 0. \quad (5.66)$$

Отсюда круговой подстановкой получим ещё две аналогичные зависимости:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \mu\nabla^2 e_{yy} &= 0; \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \mu\nabla^2 e_{zz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

Дифференцируем теперь второе из уравнений (VI) по z , а третье по y и, складывая результаты, получим

$$2(\lambda + \mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} + \mu\nabla^2\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0,$$

или

$$2(\lambda + \mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} + \mu\nabla^2 e_{yz} = 0. \quad (5.68)$$

Круговая подстановка даёт ещё две зависимости:

$$\left. \begin{aligned} 2(\lambda + \mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial x} + \mu\nabla^2 e_{zx} &= 0; \\ 2(\lambda + \mu)\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} + \mu\nabla^2 e_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

Шесть уравнений (5.66) — (5.69), связывающие вторые производные деформаций изотропного упругого тела, в нашем случае (когда объёмных сил нет или они постоянны) эквивалентны шести уравнениям Сен-Венана (IV) и могут их заменить. Теперь остаётся уравнения (5.63) — (5.69) преобразовать к напряжениям на основании закона Гука (V') и (V'_a). Из (V'_a) имеем

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\Theta.$$

Из (V') получаем

$$e_{xx} = \frac{X_x - \lambda\theta}{2\mu}$$

и далее, пользуясь (5.65), определим

$$\nabla^2 e_{xx} = \frac{1}{2\mu} \nabla^2 X_x.$$

Подставляя это в (5.66), найдём, что

$$\frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \nabla^2 X_x = 0. \quad (5.70)$$

Но (см. § 11)

$$1 + \sigma = 1 + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}. \quad (5.71)$$

Имея это в виду, заметим, что (5.70) совпадает с первым из уравнений (VII). Второе и третье из уравнений (VII) получим отсюда круговой подстановкой.

Обращаемся к уравнениям (5.68) — (5.69); так как согласно (V') известно, что

$$e_{yz} = \frac{1}{\mu} Y_z,$$

то, подставляя отсюда и из (V'a) в (5.68), получим:

$$\frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} + \nabla^2 Y_z = 0,$$

что, согласно (5.71), совпадает с четвёртым из уравнений (VII); остальные два получим отсюда путём круговой подстановки.

Мичелл вывел уравнения (VII) для общего случая, когда объёмные силы не постоянны. Тогда зависимости получаются сложнее, и, например, первое из уравнений (VII) изменяется таким:

$$\nabla^2 X_x + \frac{1}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -\frac{c}{1 - c} \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2\rho \frac{\partial X}{\partial x}.$$

Предлагаем читателю вывести эти уравнения самостоятельно; для этого следует повторить весь изложенный в этом параграфе вывод, но сохраняя в уравнениях Ламе объёмные силы ρX , ρY , ρZ .

* § 30. Три рода задач теории упругости. Теорема единственности.

Уравнения Бельтрами-Мичелла завершают полную систему уравнений теории упругости, позволяющую решать необходимые задачи в перемещениях или в напряжениях.

До сих пор мы предполагали, что на поверхности упругого тела заданы нагрузки и даны также объёмные силы. Сформулированную таким образом задачу назовём *первой основной задачей теории упругости*. В приложениях теории упругости встречается *другой*

случай, когда на поверхности упругого тела заданы перемещения u , v , w всех её точек; назовём этот случай *второй основной задачей теории упругости*; одновременно с заданными перемещениями точек поверхности возникают и напряжения на ней, но они наперёд нам неизвестны. Возможна также *смешанная задача теории упругости*, когда на одной части поверхности заданы перемещения, а на другой—нагрузки (напряжения); во всех этих задачах могут, конечно, существовать также наперёд заданные объёмные силы.

Указанные три основные задачи представляют собой некоторую схематизацию реальных физических задач; ближе к действительным условиям стоят так называемые контактные задачи, рассматривающие взаимное нажатие двух тел: упругого на упругое или абсолютно твёрдого на упругое; с контактной задачей приходится иметь дело, например, при расчёте подшипников (простых и шариковых), катков и плит подвижных опор ферм и балок, а также в задачах о нажатии штампа на плоскую поверхность упругого тела.

В § 28 было дано доказательство единственности решения первой основной задачи теории упругости; сейчас мы распространим его на вторую и смешанную задачи; доказательство, приводимое ниже, дано Кирхгоффом; оно основано на свойствах работы сил, вызывающих деформацию упругого тела.

Пусть X_v , Y_v , Z_v —проекции внешней нагрузки, приложенной на поверхности тела, связанные с напряжениями вблизи поверхности уравнениями (I); u , v , w —перемещения соответственной точки поверхности. Составим следующий двойной интеграл, распространённый по поверхности тела

$$J = \int_{(S)} (X_v u + Y_v v + Z_v w) dS.$$

Для последующего вывода необязательно дать физический смысл этого интеграла, но легко сообразить, что он выражает удвоенную работу внешних нагрузок в процессе деформации тела, если эти нагрузки возрастают весьма медленно от начального естественного состояния тела. [Это следует из теоремы Клапейрона, приводимой в курсах сопротивления материалов*].

Заменяем X_v , Y_v , Z_v их выражениями по формулам (II) и соберём коэффициенты при косинусах углов между внешней нормалью V и осями координат. Тогда наш интеграл получит вид

$$J = \int_{(S)} [P \cos(VX) + Q \cos(VY) + R \cos(VZ)] dS,$$

*) Теорема эта далее выражена в общем виде уравнением (5.72).

где

$$\begin{aligned} P &= X_x u + Y_x v + Z_x w; \\ Q &= X_y u + Y_y v + Z_y w; \\ R &= X_z u + Y_z v + Z_z w. \end{aligned}$$

На основании формулы Грина, приведенной в § 3 (сноска на стр. 21), этот интеграл может быть преобразован в интеграл, распространённый по объёму тела τ :

$$J = \int_{(\tau)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau.$$

Вычислим входящие сюда производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial X_x}{\partial x} u + \frac{\partial Y_x}{\partial x} v + \frac{\partial Z_x}{\partial x} w + X_x \frac{\partial u}{\partial x} + Y_x \frac{\partial v}{\partial x} + Z_x \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial X_y}{\partial y} u + \frac{\partial Y_y}{\partial y} v + \frac{\partial Z_y}{\partial y} w + X_y \frac{\partial u}{\partial y} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + Z_y \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= \frac{\partial X_z}{\partial z} u + \frac{\partial Y_z}{\partial z} v + \frac{\partial Z_z}{\partial z} w + X_z \frac{\partial u}{\partial z} + Y_z \frac{\partial v}{\partial z} + Z_z \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Сложим эти равенства почленно, но при сложении первых трёх столбцов справа заметим, что на основании уравнений (I)

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = -\rho X \text{ и т. д.}$$

При сложении последних трёх столбцов учтём закон взаимности касательных напряжений (1.5) и формулы (III); в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} &= -\rho Xu - \rho Yv - \rho Zw + \\ &+ X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + Z_z e_{zz} + Y_z e_{yz} + Z_y e_{zy} + X_y e_{xy}, \end{aligned}$$

или на основании (3.28):

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -\rho Xu - \rho Yv - \rho Zw + 2W.$$

Пользуясь этой зависимостью при преобразовании рассматриваемого интеграла J , придём к следующему равенству:

$$\int_{(S)} (X_y u + Y_y v + Z_y w) dS + \int_{(\tau)} (\rho Xu + \rho Yv + \rho Zw) d\tau = 2 \int_{(\tau)} W d\tau. \quad (5.72)$$

Первый интеграл левой части, как уже было сказано, выражает удвоенную работу поверхностных сил, совершённую в процессе деформации; второй интеграл выражает удвоенную работу

объёмных сил; в правой части стоит удвоенная потенциальная упругая энергия, накопленная телом. Очевидно, что соотношение (5.72) формулирует предположение, сделанное вначале § 13 гл. III о существовании потенциала упругих сил; согласно этой гипотезе работа поверхностных и объёмных сил должна быть полностью накоплена в форме упругой потенциальной энергии.

Равенство (5.72) позволяет легко доказать теорему единственности решения для всех трёх классов задач теории упругости; для этой цели продолжим рассуждения § 28 и предположим, что при одних и тех же условиях на поверхности и при одних и тех же объёмных силах мы получили две различные системы напряжений, перемещений и деформаций, как это обозначено в (5.58).

Если примем закон независимости действия сил, то «разность этих решений»

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X'_v - X''_v; Y_v = Y'_v - Y''_v; Z_v = Z'_v - Z''_v, \\ X_x &= X'_x - X''_x; Y_y = Y'_y - Y''_y; \dots X_y = X'_y - X''_y, \\ u &= u' - u''; v = v' - v''; w = w' - w'', \\ e_{xx} &= e'_{xx} - e''_{xx}; e_{yy} = e'_{yy} - e''_{yy}; \dots e_{xy} = e'_{xy} - e''_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (5.73)$$

также может быть принята в качестве решения некоторой задачи теории упругости; значит, к этому решению возможно применить равенство (5.72) с тем упрощением, что второй интеграл левой части обратится в нуль, так как в обоих решениях объёмные силы одинаковы, и потому

$$\rho X = \rho X' - \rho X'' = 0$$

и т. д.

Таким образом, получим

$$\iint_{(S)} (X_v u + Y_v v + Z_v w) dS = 2 \int \int \int_{(\tau)} W d\tau, \quad (5.74)$$

где X_v, Y_v, Z_v, u, v, w взяты из первой и третьей строк (5.73); если функция W выражена в форме (3.29), то аргументы её следует взять из четвёртой строки (5.73); если же она дана в форме (3.30), то аргументы следует взять из второй строки (5.73). Обращаясь теперь к интегралу левой части (5.74), заметим, что:

1) В случае первой основной задачи будем иметь всюду на поверхности

$$X_v = 0, \quad Y_v = 0, \quad Z_v = 0; \quad (5.75)$$

2) в случае второй основной задачи всюду на поверхности

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0; \quad (5.76)$$

3) в случае смешанной задачи на одних частях поверхности, где заданы напряжения, соблюдены условия (5.75), а на других, где заданы перемещения, выполнены условия (5.76).

Очевидно, что во всех трёх случаях интеграл левой части (5.74) обратится в нуль и получится равенство

$$\int_{(\bar{\tau})} W d\tau = 0.$$

Однако, в конце § 14 было показано, что

$$W > 0$$

во всех точках тела; значит, последнее равенство возможно лишь тогда, если все аргументы функции W равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} e_{xx} = e'_{xx} - e''_{xx} = 0 & \text{ и т. д.,} \\ X'_x - X''_x = 0 & \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что обе допущенные вначале системы напряжений должны совпадать во всех точках тела; то же относится и к деформациям.

Этим доказана теорема единственности. Из приведенного доказательства ещё не следует, что и перемещения в обоих допущенных решениях будут одинаковы; в случае первой основной задачи, где на поверхности заданы напряжения, это не будет иметь места; действительно, из условий

$$e_{xx} = e'_{xx} - e''_{xx} = 0 \text{ и т. д.}$$

согласно сказанному в § 6 относительно формул (2.11) следует, что упругому телу, имеющему определённые напряжения и деформации под действием заданных сил, можно дать любое малое дополнительное жёсткое смещение. Очевидно, что во второй и смешанной задачах перемещения в обоих решениях также будут одинаковы, так как они определённо заданы на всей поверхности тела или на части её.

ГЛАВА VI.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ.

§ 31. Плоская деформация.

Мы переходим к большой категории задач теории упругости, важных в смысле практических приложений и, вместе с тем, допускающих значительное упрощение математической стороны решения.

Упрощение заключается в том, что в этих задачах одну из координатных осей, например, Oz , можно отбросить, и всё явление рассматривать как бы происходящим в одной плоскости Oxy . На практике такой случай в чистом виде осуществить весьма трудно, но с некоторым приближением мы его встречаем во многих задачах. Задачи эти можно разделить на две группы, в некотором отношении взаимно противоположные, но объединяемые одной общей математической формой решения.

Первая из этих групп соответствует случаю, когда одно из перемещений, например w , всюду равно нулю, другие же два u и v не зависят от координаты z , соответствующей перемещению w ; значит, случай этот характеризуется следующими условиями, справедливыми во всех точках тела:

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y); & v &= f_2(x, y); \\ \omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

При этих условиях уравнения (III) дают

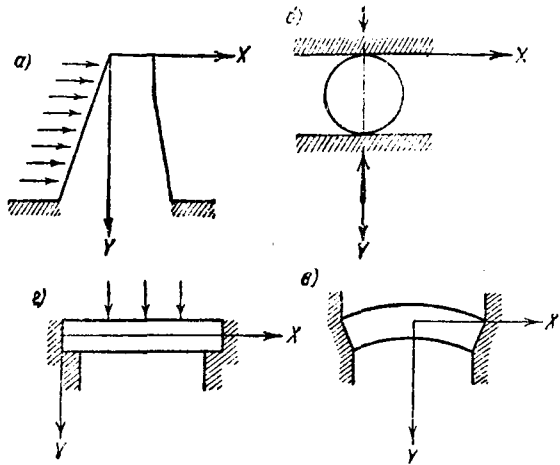
$$\left. \begin{aligned} e_{zz} &= 0; & e_{yz} &= 0; & e_{zx} &= 0; \\ e_{xx} &= \varphi_1(x, y); & e_{yy} &= \varphi_2(x, y); \\ e_{xy} &= \varphi_3(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Уравнения (6.1) и (6.2) показывают, что все перемещения и деформации происходят исключительно в направлениях, параллельных плоскости Oxy и притом во всех сечениях тела, параллельных плоскости Oxy ($z=z_0$, где z_0 —любое число), картина перемещений и деформаций одинакова. Деформация этого рода называется плоской деформацией.

С близким к этому случаю мы встречаемся в задачах, где рассматривается длинное призматическое или цилиндрическое

тело с осью, параллельной оси Oz , нагруженное по боковой поверхности нагрузкой, нормальной к оси Oz и постоянной вдоль оси (хотя бы и меняющейся в направлениях, нормальных к оси). Таковы, например, задачи о длинной плотине (фиг. 42, а), длинном катке (фиг. 42, б), длинном своде (фиг. 42, в), длинной пластинке (фиг. 42, г) с осью, параллельной оси Oz ; предполагаем во всех этих случаях, что нагрузка не меняется вдоль оси Oz .

Если из такого длинного призматического тела двумя близкими сечениями, параллельными плоскости Oxy , выделим вдали от его концов тонкий элемент с приходящейся на него нагрузкой и представим себе, что он работает как отдельное



Фиг. 42.

упругое тело, то заметим, что в нём должны появиться удлинения вдоль оси Oz ; удлинения эти являются результатом поперечного действия нагрузки, параллельной плоскости Oxy (начало § 10). На самом же деле этот элемент находится в соседстве с другими двумя элементами, имеющими такие же удлинения, но в обратном направлении; в результате взаимодействия этих элементов удлинений и перемещений вдоль оси Oz не будет, но между соседними элементами появятся силы взаимодействия, выражающиеся в нормальных напряжениях Z_z , появляющихся вследствие уничтожения деформации e_{zz} .

Действительно, возьмём третье из уравнений закона Гука (V); уничтожение деформации e_{zz} приведёт нас к уравнению

$$Z_z - \sigma(X_x + Y_y) = 0,$$

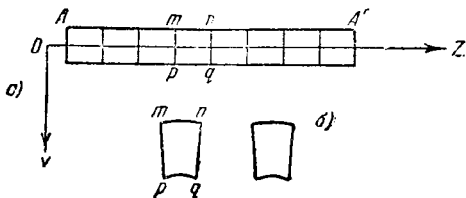
или

$$Z_z = \sigma(X_x + Y_y). \quad (6.3)$$

Следовательно, $Z'_z \neq 0$, но оно есть функция основных напряжений X_x и Y_y , вызванных нагрузкой.

Поясним эти рассуждения на примере. Пусть мы имеем сплошной изгибаемый настил из ряда прямоугольных балок

(фиг. 43, а); направим ось Ox вдоль пролёта их. При изгибе поперечные сечения балок искажутся (фиг. 43, б), как это было показано (§ 26), и при этом появятся удлинения и укорочения e_{zz} . Если же вместо настила из балок мы имеем сплошную широкую плиту шириной AA' ,



Фиг. 43.

то при прогибе её искажение отдельных элементов $mnrq$, выделенных вдали от концов A и A' , не может произойти; зато появятся напряжения Z_z , так как в верхних точках n (фиг. 43, б) элементы нажмут друг на друга, а в нижних точках q между ними появится растяжение. Эти напряжения Z_z и выражаются формулой (6.3). Далее, предполагая, что соседние элементы рассматриваемого призматического тела (фиг. 42 и 43) несут одинаковую нагрузку и работают в совершенно одинаковых условиях, то нет основания ожидать каких-либо сдвигов между ними; отсюда легко сообразим, что всюду $e_{yz} = 0$; $e_{zx} = 0$. Таким образом, для элементов рассматриваемого длинного призматического тела, удалённых от его концов, приблизительно соблюдаются условия (6.1), (6.2), (6.3) плоской деформации. Легко видеть, что при этих условиях все наши основные группы уравнений значительно упрощаются. Начнём с закона Гука в форме (V); первое из этих уравнений на основании (6.3) получает вид

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} [X_x - \sigma Y_y - \sigma^2 (X_x + Y_y)] = \\ &= \frac{1+\sigma}{E} [(1-\sigma) X_x - \sigma Y_y], \end{aligned}$$

второе получает вид

$$e_{yy} = \frac{1+\sigma}{E} [(1-\sigma) Y_y - \sigma X_x].$$

Эти уравнения удобно написать в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E_1} (X_x - \sigma_1 Y_y); \\ e_{yy} &= \frac{1}{E_1} (Y_y - \sigma_1 X_x), \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

где

$$E_1 = \frac{E}{1-\sigma^2}; \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{1-\sigma}. \quad (6.5)$$

Уравнения четвёртое и пятое на основании (6.2) дают

$$Y_z = 0; \quad Z_x = 0. \quad (6.6)$$

Шестое уравнение получит вид

$$e_{xy} = \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y.$$

Но, пользуясь (6.5), найдём, что

$$\frac{2(1+\sigma_1)}{E_1} = \frac{2(1+\sigma)}{E},$$

и потому

$$e_{xy} = \frac{2(1+\sigma_1)}{E_1} X_y. \quad (6.4'')$$

Далее на основании (6.2) уравнения (6.4) показывают, что

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \psi_1(x, y); & Y_y &= \psi_2(x, y); \\ X_y &= Y_x = \psi_3(x, y); \\ X_z &= Y_z = 0; \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

на этом основании по уравнению (6.3)

$$Z_z = \psi_4(x, y),$$

т. е. все не равные нулю напряжения не зависят от координаты z , что, конечно, ясно и наперёд.

Отсюда вытекают нижеследующие выводы. Из группы уравнений равновесия (I) остаются лишь первые два и они переходят в такие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \rho Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I_{II})$$

Условия на поверхности (II) упрощаются так:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(VX) + X_y \cos(VY); \\ Y_v &= Y_x \cos(VX) + Y_y \cos(VY). \end{aligned} \right\} \quad (II_{II})$$

Зависимости (III) сводятся к следующим трём:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\ e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (III_{II})$$

Из шести условий неразрывности деформаций (IV), как легко видеть, остаётся одно первое:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (IV_{II})$$

Закон Гука (V) получает вид

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E_1} (X_x - \sigma_1 Y_y); \\ e_{yy} &= \frac{1}{E_1} (Y_y - \sigma_1 X_x); \\ e_{xy} &= \frac{2(1 + \sigma_1)}{E_1} X_y. \end{aligned} \right\} \quad (V_n)$$

Уравнения (I_n)—(V_n) позволяют уже приступить к решению задачи о плоской деформации.

§ 32. Обобщённое плоское напряжённое состояние. Уравнение М. Леви. Функция напряжений.

Обратимся теперь к другому случаю, аналогичному предыдущему, но противоположному в смысле протяжения вдоль оси Oz , т. е. опять рассмотрим задачи, показанные на фиг. 42. Предположим, однако, что длина призматического тела вдоль оси Oz весьма мала; значит, мы будем иметь тонкую пластинку, нагруженную по боковой поверхности (ребру) силами, параллельными её основаниям. Пока нагрузка не превосходит некоторого предела, пластинка не будет прогибаться в направлении оси Oz .

Основания пластинки (параллельные плоскости Oxy) по предположению свободны от нагрузки, т. е. на них всюду

$$Z_x = 0; \quad X_z = 0; \quad Y_z = 0.$$

Но так как расстояние между этими основаниями (толщина пластинки) весьма мало, то внутри пластинки эти напряжения, очевидно, будут весьма малы. Остальные составляющие напряжения X_x , Y_y , X_y по той же причине (малость толщины вдоль оси Oz) весьма мало будут меняться вдоль оси Oz , вследствие чего мы их примем не зависящими от координаты z . Таким образом, в рассматриваемой задаче для напряжений приблизительно соблюдаются такие условия:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \psi_1(x, y); & Y_y &= \psi_2(x, y); \\ X_y &= \psi_3(x, y); & Y_z &= Z_y = 0; \\ Z_x &= X_z = 0; & Z_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

От соответственных условий (3.6) и (6.7) для плоской деформации они отличаются только условием $Z_z = 0$.

В отношении деформаций от задачи о плоской деформации данная задача отличается тем, что здесь e_{zz} не равно нулю [ср. формулы (6.2)]. Она будет представлять собою поперечную

деформацию (ср. начало § 10) вдоль оси Oz , вызываемую основными напряжениями X_x, Y_y , лежащими в плоскостях, параллельных Oxy .

Деформация e_{xz} повлечёт за собой некоторое искривление плоских оснований пластинки. Однако, вследствие малой толщины пластинки искривление это будет весьма малым. Например, возьмём случай чистого изгиба прямоугольной балки, рассмотренный в § 26. Свободные от нагрузки боковые рёбра поперечного сечения наклоняются на угол γ (фиг. 40, б); однако, из формулы (5.38) § 27 видно, что угол этот пропорционален ширине балки b ; значит, если b мало, т. е. если балка имеет форму тонкой пластинки, то углы γ будут также весьма малы и искривление боковых поверхностей её будет ничтожно.

На основании уравнений (6.8) делаем следующие заключения: основные группы уравнений (I) и (II) в рассматриваемом случае имеют тот же вид (I_n) и (II_n), как и для случая плоской деформации. Из группы (III) также достаточно сохранить лишь уравнения (III_n). Равным образом в группе (IV) можно ограничиться одним уравнением (IV_n). В законе же Гука (V), на основании последнего из условий (6.8), будет отличие от уравнений (V_n) задачи о плоской деформации; действительно, в нашем случае имеем

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} (X_x - \sigma Y_y); \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} (Y_y - \sigma X_x); \\ e_{xy} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} X_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (V_n)$$

Рассматриваемую нами задачу назовём *задачей на обобщённое плоское напряжённое состояние*.

Резюмируя предыдущие рассуждения, скажем, что при решении задач как на плоскую деформацию, так и на обобщённое плоское напряжённое состояние, можно пользоваться основными группами уравнений: (I_n), (II_n), (III_n) и (IV_n). Закон же Гука выражается для этих задач различно: для плоской деформации — уравнениями (V_n), а для плоского напряжённого состояния — уравнениями (V'_n). Однако, важно отметить, что вид этих уравнений в обоих случаях одинаков; различие заключается лишь в значении упругих постоянных, которые в случае плоской деформации выражаются через E и σ формулами (6.5).

В дальнейшем за неизвестные мы выбираем напряжения $X_x, Y_y, X_{xy} = Y_x$; поэтому уравнение неразрывности деформаций (IV_n) необходимо преобразовать, внося в него вместо деформаций их выражения из уравнений (V_n) или (V'_n), в зависимости от того,

имеем ли мы плоскую деформацию или плоское напряжённое состояние.

Выполняем над уравнениями (V_п) дифференцирование, как того требует уравнение (IV_п):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} - \sigma_1 \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} - \sigma_1 \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{2(1 + \sigma_1)}{E_1} \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y}. \quad (6.10)$$

Правую часть уравнения (6.10) преобразуем, выразив касательное напряжение X_y через нормальные X_x и Y_y из уравнений (I_п): дифференцируя их и перенося некоторые члены в правые части, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_y}{\partial y \partial x} &= -\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial X}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 Y_x}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial Y}{\partial y}. \end{aligned}$$

Складывая почленно, получаем

$$2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} - \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right). \quad (6.11)$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда объёмные силы постоянны по всему объёму тела; тогда

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

В частности, мы будем иметь дело с силой тяжести и ось Oy будем направлять вниз; это даст

$$\left. \begin{aligned} X &= 0; & Y &= g; \\ \rho Y &= \rho g = p, \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

где p — вес единицы объёма тела; теперь уравнение (6.11) получит вид

$$2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right),$$

и уравнения (6.9) и (6.10) переписутся так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} - \sigma_1 \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} - \sigma_1 \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} \right); \\ -\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1 + \sigma_1}{E_1} \left(\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Складывая их почленно, получим левую часть (IV_п) в форме, преобразованной к напряжениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{E_1} \left[\frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} \right] = \\ &= \frac{1}{E_1} \left[\frac{\partial^2 (X_x + Y_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X_x + Y_y)}{\partial y^2} \right]. \end{aligned}$$

Здесь выражение в квадратных скобках представляет собой лапласов оператор второго порядка над функцией $(X_x + Y_y)$:

$$\nabla^2 (X_x + Y_y) = \frac{\partial^2 (X_x + Y_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X_x + Y_y)}{\partial y^2}.$$

Внося это в уравнение неразрывности деформаций (IV_п), получим его в окончательной, преобразованной к напряжениям, форме:

$$\nabla^2 (X_x + Y_y) = 0.$$

Это есть так называемое условие Мориса Леви (M. Lévy). Его можно получить другим путём, исходя из того, что при отсутствии объёмных сил объёмное расширение θ есть функция гармоническая [ср. формулу (5.65)]:

$$\nabla^2 \theta = 0,$$

а следовательно, согласно (3.9) будем иметь

$$\nabla^2 \Theta = 0,$$

где

$$\Theta = X_x + Y_y + Z_z.$$

Но в случае плоской деформации

$$Z_z = \sigma (X_x + Y_y),$$

а в случае обобщённого плоского напряжённого состояния

$$Z_z = 0.$$

Отсюда получим, что

$$\nabla^2 (X_x + Y_y) = 0.$$

Таким образом, решение плоской задачи приводится к интегрированию трёх дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + p = 0; \quad (\text{I}_\mu)$$

$$\nabla^2 (X_x + Y_y) = 0 \quad (\text{IV}'_\mu)$$

и удовлетворению условий на поверхности:

$$\left. \begin{aligned} X_\bullet &= X_x \cos(VX) + X_y \cos(VY), \\ Y_\bullet &= Y_x \cos(VX) + Y_y \cos(VY). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II}_\mu)$$

Если нам удастся таким путём найти напряжения

$$X_x, Y_y, X_y, \quad (6.13)$$

то, внося их для плоской деформации в (V_n) или для плоского напряжённого состояния в (V'_n) , найдём деформации e_{xx} , e_{yy} , e_{xy} как функции от x и y ; внося их далее в уравнения (III_n) , получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e_{xx}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e_{yy}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = e_{xy}, \quad (III_n)$$

а интегрируя последние, получим перемещения u , v . Этим решение задачи будет закончено.

Очень важно заметить следующее. Если в данной задаче нгде найти только напряжения, то можно ограничиться уравнениями (I_n) , (IV'_n) и (II_n) , в которые не входят упругие постоянные. Значит, следует ожидать, что напряжённое состояние не зависит от материала; это заключение справедливо для тела, ограниченного односвязной поверхностью (которая в плоскости действия сил изображается односвязным контуром). В случае многосвязного контура напряжённое состояние не зависит от материала, если внешние нагрузки уравновешены на каждом из контуров в отдельности*). Эти заключения лежат в основе практических приложений оптического метода исследования напряжений в поляризованном свете; при этом данный материал заменяется другим — прозрачным и оптически активным, из которого готовится пластинка, подвергаемая испытанию в качестве модели.

Эри (Airy) указал на возможность дальнейшего упрощения в решении задачи. Это упрощение основано на том, что мы можем легко найти общее решение системы уравнений (I_n) и в дальнейшем не иметь с ними дела. Система (I_n) неоднородна, и потому общее решение её представит собою сумму общего решения однородной системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

и какого-либо частного решения системы (I_n) ; это частное решение легко найти, полагая, например,

$$X_x = Y_y = 0; \quad X_y = -px, \quad (6.15)$$

* Точнее говоря, если равнодействующая нагрузок на каждом контуре в отдельности равна нулю.

или

$$X_x = X_y = 0; \quad Y_y = -px. \quad (6.15')$$

Обратимся теперь к системе (6.14). Очевидно, что первому уравнению её удовлетворим, полагая

$$X_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad X_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6.16)$$

где $\psi(x, y)$ — произвольная функция. Второе уравнение будет удовлетворено, если

$$X_y = \frac{\partial \chi}{\partial y}; \quad Y_y = -\frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (6.17)$$

где $\chi(x, y)$ также произвольная функция. Однако, оба уравнения (6.14) будут удовлетворены одновременно только тогда, если выражения X_y в (6.16) и (6.17) будут совпадать, значит, должно быть

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0,$$

а этому уравнению удовлетворим, полагая:

$$\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \chi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

внеся эти значения ψ и χ в (6.16) и (6.17) и добавляя сюда, например, частное решение (6.15), найдём следующее общее решение системы (I_п):

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad X_y = Y_x = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px. \quad (\text{VIII})$$

Подставляя эти выражения в уравнения (I_п), легко убедиться, что последние будут тождественно удовлетворены, и далее с ними не придётся иметь дела. Остаётся одно уравнение (IV'_п), которое легко выражается через функцию φ ; действительно, на основании (VIII)

$$X_x + Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \nabla^2 \varphi,$$

и уравнение (IV'_п) символически изобразится так:

$$\nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (\text{IX}')$$

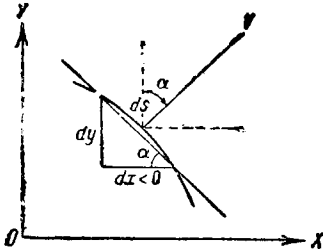
Раскрывая символ лапласова оператора, получим

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (\text{IX})$$

Условия на поверхности (II_п) при помощи функции φ выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cos(VX) - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + px \right) \cos(VY); \\ Y_n &= - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + px \right) \cos(VX) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos(VY). \end{aligned} \right\} \quad (\text{X})$$

Функция φ называется функцией Эри или функцией напряжений; при помощи её решение плоской задачи представляется так: следует найти функцию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую во всех точках поперечного сечения исследуемого тела (фиг. 42) уравнению (IX), а на контуре этого сечения — уравнениям (X), где X_v и Y_v — проекции внешней нагрузки на оси координат. Найдя функцию φ , по уравнениям (VIII) определим напряжения; дальнейшее разыскание деформаций и перемещений выполняется по уравнениям (V_{II}) или (V'_{II}) и (III_{II}), как указано выше.



Фиг. 44.

Замечание. Если объёмных сил нет (т. е. если $p=0$), то условия на поверхности (IX) можно

написать короче, вводя понятие о производной функции по дуге контура поперечного сечения. Действительно, имеем (фиг. 44)

$$\cos(VX) = \sin \alpha = \frac{dy}{ds};$$

$$\cos(VY) = \cos \alpha = -\frac{dx}{ds}.$$

Внося это в уравнения (X), имеем

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right); \\ Y_v &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

Эти равенства позволяют выразить условия на контуре в другой форме, представляющей интерес в смысле общей постановки вопроса об интегрировании уравнения плоской задачи (IX) при заданных на контуре нагрузках. Умножим (6.18) на ds и интегрируем по s вдоль контура, начиная от произвольной точки S_0 , принятой за начало дуг:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -A - \int_0^s Y_v ds = -Y^{(s)}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= B + \int_0^s X_v ds = X^{(s)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Здесь A и B — произвольные постоянные; они выражают значения производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

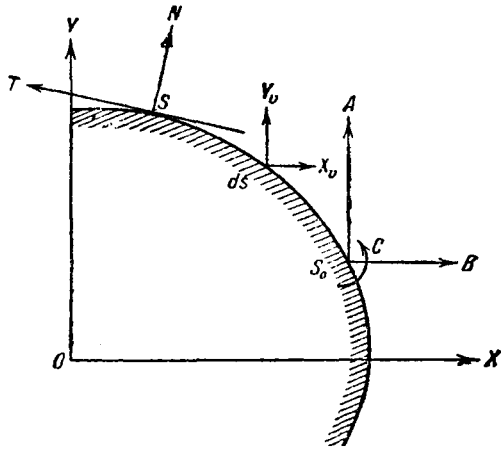
в точке S_0 контура. Для придания большей наглядности дальнейшим выкладкам введём следующую аналогию: заменим контур исследуемого тела стержнем той же формы, разрезанным в точке S_0 (фиг. 45), где приложим силы:

- A параллельно оси Y,
- B » » X.

Имея в виду, что поверхностные нагрузки X_v и Y_v рассчитываются на единицу длины дуги контура, заметим, что величины $X^{(s)}$ и $Y^{(s)}$ в правых частях равенств (6.19) представляют собою суммы проекций на оси OX и OY сил, приложенных к части S_0S стержня. Если вместо осей OX и OY возьмём новые оси ON и OT (фиг. 45), направленные по нормали и по касательной к контуру в точке S , то формулы (6.19) в новых координатах n и t напишутся так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -T^{(s)}; \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = N^{(s)}, \quad (6.21)$$



Фиг. 45.

где $T^{(s)}$ — продольная сила в точке S стержня, $N^{(s)}$ — поперечная сила в точке S стержня.

В формуле (6.20) величина

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

представляет собою производную от функции напряжения φ по нормали к контуру; аналогично

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

есть производная по касательной к контуру или по дуге контура

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}.$$

Сопоставляя равенство (6.21) с известной теоремой о производной изгибающего момента в стержне

$$\frac{\partial M}{\partial t} = Q,$$

можно считать, что

$$\varphi = M^{(s)}, \quad (6.22)$$

где $M^{(s)}$ — момент сил, приложенных к части S_0S стержня относительно точки S ; при вычислении $M^{(s)}$ путём интегрирования уравнения (6.21) добавится произвольная постоянная, которую можно задать, приложив в начальной точке S_0 пару сил с произвольным моментом C (фиг. 45).

Все приведённые рассуждения позволяют представить условия на контуре (в случае заданных на нём нагрузок) в нужной нам новой форме; для этого следует по заданным на контуре нагрузкам подсчитать в каждой его точке значение функции напряжений $\varphi(x, y)$ и её нормальной производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

по формулам (6.20) и (6.22), как продольную силу и изгибающий момент от заданных на контуре нагрузок. В состав φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ войдут три произвольные постоянные A , B и C (начальные параметры); они, очевидно, не влияют на заданные контурные нагрузки X_0 и Y_0 и на напряжения, вызываемые ими.

Функции, удовлетворяющие уравнению (IX), называются бигармоническими; плоскую задачу теории упругости при заданных на контуре нагрузках можем теперь трактовать в следующей математической форме: требуется найти бигармоническую функцию

$$\varphi(x, y)$$

во всех точках области, ограниченной заданным контуром, если на контуре заданы значения самой функции φ и её нормальной производной.

§ 33. Решение плоской задачи в полиномах.

Во многих задачах оказывается удобным идти полуобратным методом, задавая наперёд аналитическую форму функции напряжений $\varphi(x, y)$ и подбирая её параметры (например, коэффициенты) так, чтобы были удовлетворены условия на поверхности (X) и основное уравнение (IX). Рассмотрим несколько задач, в которых $\varphi(x, y)$ можно задать в виде целой функции (полинома). Если функция φ представляет собой полином второй степени

$$\varphi(x, y) = \frac{a}{2} x^2 + bxy + \frac{c}{2} y^2, \quad (6.23)$$

то уравнение (IX), очевидно, будет всюду удовлетворено при любых значениях a , b и c . Напряжения согласно уравнениям (VIII) выразятся так*):

$$X_x = c; \quad Y_y = a; \quad X_y = -b - px. \quad (6.24)$$

Если $p = 0$, то напряжения постоянны; получаем случай *однородного напряжённого состояния*.

Если φ есть полином третьей степени:

$$\varphi(x, y) = \frac{d}{6} x^3 + \frac{e}{2} x^2 y + \frac{f}{2} x y^2 + \frac{k}{6} y^3 + \frac{a}{2} x^2 + bxy + \frac{c}{2} y^2, \quad (6.25)$$

то уравнение (IX) попрежнему будет удовлетворено при произвольных значениях коэффициентов; напряжения по уравнениям (VII) выразятся так:

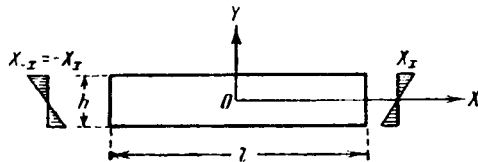
$$\left. \begin{aligned} X_x &= fx + ky + c; \\ Y_y &= dx + ey + a; \\ X_y &= -ex - fy - b - px, \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

т. е. они будут линейными функциями от координат.

Если φ зададим как функцию четвёртой степени или выше, то производные её, входящие в уравнение (IX), вообще говоря, будут отличны от нуля; поэтому коэффициенты придётся подобрать так, чтобы условие неразрывности (IX) было удовлетворено при произвольных значениях x и y . Напряжения при этом будут функциями второй степени или выше.

Чистый изгиб. Рассмотрим частный случай функций напряжений (6.25):

$$\varphi = \frac{k}{6} y^3.$$



Фиг. 46.

Пренебрегая влиянием собственного веса из уравнений (6.26), получим напряжения

$$X_x = ky; \quad Y_y = 0; \quad X_y = Y_x = 0. \quad (6.27)$$

Если возьмём пластинку шириной h (фиг. 46) и предположим, что в ней осуществляются напряжения (6.27), то на поверхности её будут действовать следующие напряжения. На верхней и нижней гранях (при $y = \pm \frac{h}{2}$)

$$Y_y = Y_{-y} = X_y = X_{-y} = 0;$$

* Из уравнений (6.24) видно, что членов первой степени в функции (6.23) задавать не надо, так как они не отразятся на величине напряжений.

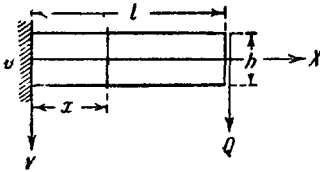
на боковых гранях (при $x = \pm \frac{l}{2}$)

$$X_x = ky; \quad X_{-x} = -X_x = -ky; \quad Y_x = Y_{-x} = 0.$$

Эпюры напряжений X_x показаны на чертеже; очевидно, мы имеем дело со случаем чистого изгиба, обследованным в общем виде в § 26.

§ 34. Изгиб консоли.

Рассмотрим пластинку, заделанную левым концом и нагруженную грузом Q , отнесённым на единицу длины вдоль оси Oz и распределённым по правому концевому сечению. В сопротивлении материалов, пользуясь гипотезой плоских сечений, получаем для этого случая такие напряжения*):



Фиг. 47.

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{M}{J} y = -\frac{Q(l-x)}{J} y; \\ Y_y &= 0; \\ X_y &= Y_x = \frac{QS}{Jb} = \frac{Q\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{2J}. \end{aligned} \right\} (6.28)$$

Проверим, возможны ли напряжения (6.28) с точки зрения плоской задачи и соответствуют ли они случаю изгиба, показанному на фиг. 47. Для ответа на первый вопрос достаточно рассмотреть, могут ли напряжения (6.28) быть получены из какой-либо функции напряжений $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (IX).

Общий вид функций (6.28), выражающих напряжения, такой:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay + Bxy = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ Y_y &= 0 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ X_y &= C + Dy^2 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} (6.29)$$

Интегрируя дважды первое из этих уравнений, имеем

$$\varphi(x, y) = \frac{Ay^3}{6} + \frac{Bxy^3}{6} + \psi(x)y + \omega(x). \quad (6.30)$$

*) Для расчёта выделяем вдоль оси Oz полоску шириной, равной единице.

Дифференцируя эту функцию по x и подставляя в последние два из уравнений (6.29), получаем

$$\psi''(x)y + \omega''(x) = 0. \quad (6.31)$$

$$-\frac{By^2}{2} - \psi'(x) = C + Dy^2. \quad (6.32)$$

Оба эти условия должны удовлетворяться при любых значениях x и y ; поэтому делаем выводы:

$$\psi''(x) = 0; \quad \omega''(x) = 0;$$

$$\psi'(x) = Ex + F;$$

$$\omega(x) = Hx + K;$$

подставляя это значение в уравнение (6.32), имеем

$$-\frac{By^2}{2} - E = C + Dy^2.$$

Отсюда

$$E = -C; \quad D = -\frac{B}{2}.$$

Функция напряжений (6.30) получает вид:

$$\varphi(x, y) = \frac{Ay^3}{6} + \frac{Bxy^3}{6} + Exy + Fy + Hx + K. \quad (6.30a)$$

Члены первой степени $Hx + Fy + K$ можно отбросить, так как на напряжения они, очевидно, не влияют. Легко убедиться, что функция (6.30) удовлетворяет уравнению (IX) (§ 32) при любых значениях коэффициентов.

Напряжения выразятся так:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = Ay + Bxy; \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \\ X_y &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{B}{2} y^2 - E. \end{aligned} \right\} \quad (6.28a)$$

Это показывает, что напряжения вида (6.28) или в более общей форме (6.29) удовлетворяют уравнениям теории упругости. Теперь следует попытаться подобрать неопределённые коэффициенты A , B , E так, чтобы удовлетворились условия на поверхности (фиг. 47):

1. На верхней и нижней гранях

$$\text{при } y = \frac{h}{2} \quad Y_y = 0, \quad X_y = 0;$$

$$\text{при } y = -\frac{h}{2} \quad Y_{-y} = -Y_y = 0; \quad X_{-y} = -X_y = 0.$$

2. На правом концевом сечении

$$\text{при } x=l \quad X_x = 0.$$

И так как закон распределения касательных напряжений по сечению $x=l$ в условии задачи ничем не обусловлен, то остаётся лишь условие: при $x=l$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x dy = Q,$$

требуемое, чтобы усилия на концевом поперечном сечении приводились к заданному грузу Q .

Предлагаем читателю в качестве упражнения проделать нужные выкладки и убедиться, что при этом для напряжений получатся выражения (6.28).

Значит, в данной задаче выражения напряжений (6.28), получаемые на основании гипотезы плоских сечений, подтверждаются и с точки зрения теории упругости при условии, если груз Q по концевому сечению распределён по закону, указываемому последней из формул (6.28). При другом способе приложения груза Q выражения напряжений также будут иными, но значительная численная разница на основании принципа Сен-Венана (§ 24, фиг. 36) будет лишь вблизи нагруженного правого конца пластинки.

В этой задаче представляется интересным исследовать деформации и перемещения и сравнить результат с тем, что даёт гипотеза плоских сечений в сопротивлении материалов. Так как теперь нам придётся воспользоваться законом Гука, то выберем сначала, на каком из двух случаев (плоской деформации или плоского напряжённого состояния) мы остановимся; для получения полного соответствия с аналогичной задачей сопротивления материалов остановимся на плоском напряжённом состоянии и потому воспользуемся законом Гука в форме (V'_n) (§ 32). Тогда из (III_п), (V'_n) и (6.28) получаем такую систему уравнений для определения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{Q}{EJ} (ly - xy); \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\sigma Q}{EJ} (ly - xy); \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(1+\sigma)Q}{EJ} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (6.34)$$

Интегрируя уравнения (6.33), получим

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{Q}{EJ} \left(ly - \frac{x^2 y}{2} \right) + \frac{Q}{EJ} f_1(y); \\ v &= \frac{\sigma Q}{EJ} \left(\frac{ly^2}{2} - \frac{xy^2}{2} \right) + \frac{Q}{EJ} f_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции; для удобства дальнейших выкладок мы им дали коэффициент $\frac{Q}{EJ}$. Для определения вида этих функций вносим выражения (6.35) в уравнение (6.34); предварительно находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\sigma Q}{EJ} \frac{y^2}{2} + \frac{Q}{EJ} f_2'(x); \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{Q}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{Q}{EJ} f_1'(y). \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

Подставляя это в уравнение (6.34) и сокращая на $\frac{Q}{EJ}$, получаем

$$-\frac{\sigma y^2}{2} + f_2'(x) - \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + f_1'(y) = (1 + \sigma) \frac{h^2}{4} - (1 + \sigma) y^2,$$

или после перестановки членов

$$\left[f_2'(x) - \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \right] + \left[f_1'(y) - \frac{\sigma y^2}{2} + (1 + \sigma) y^2 \right] = (1 + \sigma) \frac{h^2}{4} \quad (6.37)$$

В квадратных скобках стоят функции, зависящие: первая только от x , вторая только от y ; но так как x и y произвольны и между собой независимы, то равенство (6.37) может существовать только при условии, если выражения в квадратных скобках равны постоянным числам m и n , причём

$$m + n = (1 + \sigma) \frac{h^2}{4}. \quad (6.38)$$

На этом основании из уравнения (6.37) получаем

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= lx - \frac{x^2}{2} + m; \\ f_1'(y) &= \frac{\sigma y^2}{2} - (1 + \sigma) y^2 + n = -\left(1 + \frac{\sigma}{2}\right) y^2 + n. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, имеем

$$\left. \begin{aligned} f_2(x) &= \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + mx + \alpha, \\ f_1(y) &= -\frac{2 + \sigma}{6} y^3 + ny + \beta. \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

Вносим это в уравнения (6.35):

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{Q}{EJ} \left[-lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{2+\sigma}{6}y^3 + ny + \beta \right]; \\ v &= \frac{Q}{EJ} \left[\frac{\sigma ly^2}{2} - \frac{\sigma xy^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + mx + \alpha \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

Для определения произвольных постоянных m , n , α и β осуществим закрепление левого конца; в сопротивлении материалов все рассуждения относим к оси бруса; поэтому и здесь прежде всего закрепим начальную точку оси, т. е. поставим условия:

$$\text{при } x=y=0 \quad u=0; \quad v=0.$$

Тогда из уравнений (6.40) сразу имеем $\alpha=\beta=0$.

Следует закрепить теперь (фиг. 47) опорное сечение (против вращения вокруг точки O); чаще всего с этой целью ставится условие горизонтальности начальной касательной:

$$\text{при } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 *);$$

при этом условии из уравнений (6.40) находим

$$m=0$$

и из уравнения (6.38)

$$n = \frac{(1+\sigma)h^2}{4}.$$

Уравнения (6.40) дают

$$u = \frac{Q}{EJ} \left[-\left(l - \frac{x}{2}\right)xy - \frac{(2+\sigma)y^3}{6} + \frac{(1+\sigma)h^2y}{4} \right], \quad (6.41)$$

$$v = \frac{Q}{EJ} \left[\frac{\sigma(l-x)y^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]. \quad (6.42)$$

Из уравнения (6.42), положив $y=0$, найдём уравнение изогнутой оси бруса:

$$v = \frac{Q}{EJ} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad (6.43)$$

что совпадает с решением, получаемым в сопротивлении материалов. Исследуем теперь деформацию плоских поперечных сечений; пусть уравнение такого сечения до деформации будет

$$x = x_0,$$

после деформации его уравнение будет

$$x = x_0 + u_0,$$

*) Ср. это с формулой (2.3) § 6.

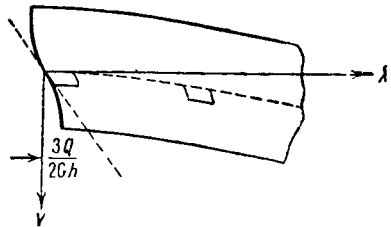
или

$$x = x_0 + \frac{Q}{EJ} \left[- \left(l - \frac{x_0}{2} \right) x_0 y - \frac{(2+\sigma)}{6} y^3 + \frac{(1+\sigma) h^2}{4} y \right]. \quad (6.44)$$

Значит, сечение не остаётся плоским, но искривляется по параболе третьего порядка (6.44).

При осуществлённом нами способе закрепления левого конца (фиг. 48) левое крайнее сечение ($x_0 = 0$) также искривляется по кривой

$$x = \frac{Q}{EJ} \left[\frac{(1+\sigma) h^2}{4} y - \frac{(2+\sigma)}{6} y^3 \right].$$



Фиг. 48.

Если возьмём линейный элемент dy на оси бруса в точке закрепления (при $x = 0, y = 0$), то угол поворота его [формула (2.4) § 6] будет

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{(1+\sigma) Q h^2}{4EJ} = \frac{3Q}{2Gh} > 0.$$

Следовательно, элемент поворачивается (§ 6) по направлению от положительной оси OY к положительной оси OX ; значит, плоские поперечные сечения после деформации искривляются и не остаются нормальными к оси*). Это показывает, что в нашей задаче формула нормального напряжения

$$X_x = \frac{M}{J} y,$$

выведенная из гипотезы плоских сечений, остаётся верной и при искривлении сечений.

В § 24 мы отмечали схематичность формулировки задач в сопротивлении материалов относительно нагрузки; здесь полезно отметить такую же схематичность формулировки в смысле «закрепления на опоре». Действительно, закрепление это можно осуществить бесчисленным множеством способов.

В предыдущих рассуждениях мы осуществили закрепление левого конца, поставив условие, чтобы элемент оси dx у опорного конца оставался горизонтальным ($\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ при $x = y = 0$).

*) Легко найти общую формулу наклона сечения относительно оси во всех точках её; наклон этот, очевидно, равен (фиг. 48) сдвигу

$$(e_{xy})_{y=0} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Проще всего вычислить его по (6.34).

Осуществим теперь то же закрепление другим способом, (фиг. 49), поставив условие

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=y=0} = 0,$$

требующее [формула (2.4) § 6], чтобы элемент dy опорного сечения оставался вертикальным.

При этом первое из уравнений (6.40) даёт $n=0$, а из уравнения (6.38)

$$m = \frac{(1+\sigma)h^2}{4};$$

из уравнений (6.40) получим вместо (6.41) и (6.42) такие уравнения:

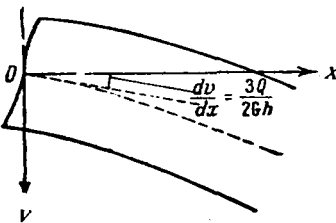
$$\begin{aligned} u &= \frac{Q}{EJ} \left[-\left(l - \frac{x}{2}\right)xy - \frac{(2+\sigma)y^3}{6} \right]; \\ v &= \frac{Q}{EJ} \left[\frac{\sigma(l-x)y^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(1+\sigma)h^2x}{4} \right]. \end{aligned}$$

Значит, все перемещения изменились. Уравнение изогнутой оси будет [ср. с формулой (6.43)]

$$v = \frac{Q}{EJ} \left[\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(1+\sigma)h^2x}{4} \right]. \quad (6.45)$$

Прогиб правого конца в первом случае [по формуле (6.43)]

$$f = \frac{Ql^3}{3EJ};$$



Фиг. 49.

при втором же способе закрепления (фиг. 49) он равен

$$\begin{aligned} f &= \frac{Ql^3}{3EJ} + \frac{(1+\sigma)Qh^2l}{4EJ} = \\ &= \frac{Ql^3}{3EJ} + \frac{3Ql}{2Gh}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Последний член $\frac{3}{2} \frac{Ql}{Gh}$ учитывает влияние сдвигов (другими словами, влияние поперечной силы) на прогиб.

Из предыдущих рассуждений видно, что прогиб правого конца в данной задаче есть понятие само по себе неопределённое; он может быть различным в зависимости от способа «заделки» левого конца.

Кроме двух рассмотренных способов заделки можно представить себе бесчисленное количество других способов; каждому

из них будут соответствовать свои перемещения и свой прогиб. Принцип Сен-Венана говорит, что при этом напряжения будут существенно меняться только вблизи закреплённого сечения; перемещения же будут различными на всём протяжении бруса.

§ 35. Балка на двух опорах.

Рассмотрим изгиб балки на двух опорах под сплошной равномерной нагрузкой q . Опорные реакции предположим в форме касательных сил, распределённых по конечным сечениям.

При расположении осей координат по фиг. 50 элементарное решение задачи приводит к таким напряжениям:

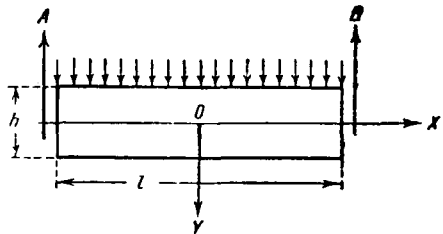
$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{q}{2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right) \frac{y}{J}, \\ X_y = Y_x &= -\frac{qx}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \frac{1}{J}. \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

Запишем эти формулы в более общем виде:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay + Bx^2y, \\ X_y = Y_x &= Cx + Dxy^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

и проверим, удовлетворяют ли они всем уравнениям плоской задачи. Напряжениями Y_y обычно пренебрегают; это обстоятельство позволяет наперёд утверждать, что система напряжений (6.47) совместно с допущением $Y_y = 0$ наверное не удовлетворит уравнениям теории упругости, так как на верхней поверхности при $y = -\frac{h}{2}$ имеем равенство

$$Y_{-y} = -Y_y = q \neq 0.$$



Фиг. 50.

Поэтому постараемся удовлетворить уравнениям теории упругости, задавшись напряжениями (6.47), но отбросив условие $Y_y = 0$.

Подберём пока общий вид функции напряжений при напряжениях (6.47); по уравнениям (VIII) (§ 32) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= Ay + Bx^2y, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= -Cx - Dxy^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

Интегрируя первое из этих уравнений, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{A}{2} y^2 + \frac{B}{2} x^2 y^2 + f_1(x), \quad (6.49)$$

$$\varphi = \frac{A y^3}{6} + \frac{B}{6} x^2 y^3 + f_1(x) y + f_2(x), \quad (6.50)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции от x . Дифференцируя уравнение (6.49) по x и подставляя полученное значение во второе уравнение (6.48), имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = B x y^2 + f_1'(x) = -C x - D x y^2;$$

отсюда получаем

$$D = -B; \quad f_1(x) = -\frac{C}{2} x^2 + E.$$

Внося это значение в уравнение (6.50), имеем

$$\varphi = \frac{A}{6} y^3 + \frac{B}{6} x^2 y^3 - \frac{C}{2} x^2 y + E y + f_2(x).$$

Подставляя это выражение в уравнение (IX) (§ 32), видим, что оно не удовлетворяется*); значит, φ не может быть принята за функцию напряжений; поэтому добавим к ней произвольную пока функцию $\psi(x, y)$ ** и получим

$$\varphi = \frac{A}{6} y^3 + \frac{B}{6} x^2 y^3 - \frac{C}{2} x^2 y + f_2(x) + \psi(x, y). \quad (6.51)$$

Функцию $\psi(x, y)$ подберём так, чтобы условие неразрывности деформаций (IX) было удовлетворено. Из уравнения (6.51) имеем

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}; \quad 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 4 B y + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4},$$

и уравнение (IX) получает вид

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = -4 B y. \quad (6.52)$$

Рассматривая это уравнение, легко сообразим, что наиболее простое решение его выразится целой функцией пятой степени:

$$\psi(x, y) = \frac{F}{24} x^4 y + \frac{H}{120} y^5 + \frac{K}{12} x^2 y^3.$$

Внося это в уравнение (6.52), имеем

$$F y + 2 K y + H y = -4 B y,$$

*) Оно получит вид $4 B y = 0$.

**) Член $E y$, не влияющий на напряжения, отбрасываем.

т. е.

$$F + 2K + H = -4B. \quad (6.53)$$

В функции ϕ член $\frac{K}{12} x^2 y^3$ можем отбросить, так как в уравнении (6.51) член подобного вида $\frac{B}{6} x^2 y^3$ уже имеется: тогда из уравнения (6.53) имеем

$$H = -4B - F.$$

После этого функция напряжений (6.51) получает окончательный вид

$$\varphi = \frac{Ay^3}{6} + \frac{Bx^2y^3}{6} - \frac{C}{2}x^2y + f_2(x) + \frac{F}{24}x^4y - \frac{(4B+F)}{120}y^5, \quad (6.54)$$

удовлетворяющий условию (IX). Отсюда получаем напряжения

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay + Bx^2y - \frac{4B+F}{6}y^3; \\ Y_y &= \frac{B}{3}y^3 - Cy + f_2''(x) + \frac{F}{2}x^2y; \\ X_y &= Y_x = -Bxy^2 + Cx - \frac{F}{6}x^3. \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

Для окончания решения остаётся удовлетворить условиям на поверхности; сначала займёмся условиями на верхней и нижней гранях.

1. На верхней грани при $y = -\frac{h}{2}$

$$Y_{-y} = -Y_y = q; \quad X_y = -X_{-y} = 0. \quad (6.56)$$

2. На нижней грани при $y = +\frac{h}{2}$

$$Y_y = 0; \quad X_y = 0. \quad (6.57)$$

Первое из условий (6.57) даёт

$$\frac{Bh^3}{24} - \frac{Ch}{2} + f_2''(x) + \frac{Fh}{4}x^2 = 0.$$

Отсюда получаем

$$F = 0; \quad f_2''(x) = L,$$

и напряжения (6.55) будут

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay + Bx^2y - \frac{2}{3}By^3; \\ Y_y &= \frac{B}{3}y^3 - Cy + L; \\ X_y &= Y_x = -Bxy^2 + Cx. \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

Из условий (6.53) и (6.57) для нормальных напряжений получаем

$$-\frac{Bh^3}{24} + \frac{Ch}{2} + L = -q; \quad \frac{Bh^3}{24} - \frac{Ch}{2} + L = 0.$$

Складывая эти уравнения, найдём

$$L = -\frac{q}{2}; \quad (6.59)$$

вычитая, получим

$$\frac{Bh^3}{12} - Ch = q. \quad (6.60)$$

Условия (6.53) и (6.57) для касательных напряжений дают

$$-\frac{Bh^2}{4} + C = 0; \quad (6.61)$$

решая совместно уравнения (6.60) и (6.61), найдём

$$B = -\frac{6q}{h^3}; \quad C = -\frac{3}{2} \frac{q}{h}. \quad (6.62)$$

Подставляя значение L , B и C из уравнений (6.59) и (6.62) в уравнения (6.58), получим

$$\left. \begin{aligned} X_x &= Ay - \frac{6q}{h^3} x^2 y + 4 \frac{q}{h^3} y^3; \\ Y_y &= -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{h^2}{4} y + \frac{h^3}{12} \right); \\ X_y &= -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) x. \end{aligned} \right\} \quad (6.63)$$

Переходим к условиям на концевых сечениях бруса:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x = \pm \frac{l}{2} \quad X_x &= 0; \\ + \frac{h}{2} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Y_x dy &= -\frac{ql}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

Последнее условие требует, чтобы касательные напряжения на концевом сечении приводились к опорной реакции $\left(-\frac{ql}{2}\right)$; легко убедиться, что оно уже удовлетворено, так как последнее из уравнений (6.63) в точности совпадает с заданным нами выражением касательного напряжения [формулы (6.47)]. Вместе с тем замечаем, что первое из условий (6.64) не может

быть удовлетворено; действительно, при $x = \pm \frac{l}{2}$

$$X_x = \left[\left(A - \frac{6ql^2}{4h^3} \right) y + 4 \frac{q}{h^3} y^3 \right], \quad (6.65)$$

и следовательно, X_x не обращается в нуль; но так как правая часть уравнения (6.65) есть нечётная функция от y , то отсюда следует, что

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x dy = 0, \quad (6.66)$$

т. е. нормальные напряжения по концевому сечению приводятся к паре с моментом

$$M_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x y dy = A \frac{h^3}{12} - \frac{ql^2}{8} + \frac{qh^2}{20}. \quad (6.67)$$

Таким образом, решение (6.63) соответствует изгибу пластинки под действием сплошной равномерной нагрузки q и моментов $\pm M_0$ на опорах (фиг. 51).

Распоряжаясь коэффициентом A , мы можем опорным моментам (6.67) дать любую величину. Выражая коэффициент A

через опорный момент M_0 по уравнению (6.67), имеем

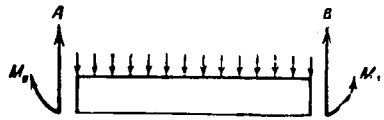
$$A = \frac{12}{h^3} \left(M_0 + \frac{ql^2}{8} - \frac{qh^2}{20} \right),$$

и выражения напряжений (6.63) перепишем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{12}{h^3} \left(M_0 + \frac{ql^2}{8} - \frac{qh^2}{20} \right) y - \\ &\quad - \frac{6q}{h^3} x^2 y + \frac{4q}{h^3} y^3; \\ Y_y &= -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{h^2}{4} y + \frac{h^3}{12} \right); \\ X_y &= -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) x. \end{aligned} \right\} \quad (6.68)$$

Если здесь положим

$$M_0 = 0, \quad (6.69)$$



Фиг. 51.

то уничтожим опорные моменты и вернёмся к изгибу пластинки под действием одной сплошной нагрузки, но с наличием нормальных напряжений (6.65) на опорных сечениях; однако, на основании уравнений (6.66) и (6.69) эти напряжения приводятся к уравновешенной системе сил, и потому влияние их на основании принципа Сен-Венана (§ 24) будет заметно только вблизи концов балки. При $M_0 = 0$ первое из уравнений (6.68) можно написать так:

$$X_x = \frac{12q}{h^3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right) y - \frac{h^2}{20} y + \frac{y^3}{3} \right]. \quad (6.70)$$

Сравнивая это с первым из уравнений (6.47), замечаем, что разница в выражениях напряжения

$$\frac{12q}{h^3} \left(\frac{h^2}{20} y - \frac{y^3}{3} \right) = \frac{q}{J} \left(\frac{h^2}{20} y - \frac{y^3}{3} \right)$$

при малой высоте сечения h по сравнению с пролётом l окажет лишь небольшое влияние на величину напряжений в средней части балки (при малом x).

Резюмируя все предыдущие выводы, можем сказать, что:

1. Выражение касательных напряжений, даваемое элементарным решением, подтверждается настоящим более точным решением (6.68).

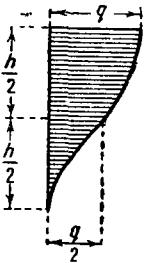
2. Для нормального напряжения X_x элементарное решение даёт значения, близкие к действительности вдали от концов плиты или пластинки (в случае, если высота h мала по сравнению с пролётом), где эти напряжения играют главную роль.

3. Второе из уравнений (6.68) даёт выражение нормального напряжения Y_y , которым в элементарном решении пренебрегают. Эпюра распределения этих напряжений по высоте сечения (кубическая парабола) показана на фиг. 52.

Пользуясь уравнениями (6.68), можно, очевидно, решить задачу о балке, заделанной концами в стенки; для этого величину опорных моментов M_0 следует подобрать так, чтобы на концах оси балки удовлетворялись условия вида $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ или

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (\text{ср. § 34}).$$

Предварительно, конечно, надо найти перемещения балки, как это сделано в § 34.



Фиг. 52.

§ 36. Треугольная и прямоугольная подпорные стенки. (Решения М. Леви).

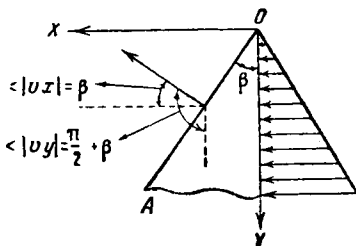
Рассмотрим задачу о стенке плотины или подпорной стенке, подверженной давлению воды или сыпучего тела по гидростатическому закону, пропорционально глубине данной площадки (фиг. 53). Условия на поверхности выразятся, очевидно, так:

1. На грани OY при $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} Y_{-x} = -Y_x = 0, \\ X_{-x} = -X_x = \gamma y. \end{aligned} \right\} \quad (6.71)$$

2. На грани OA при $x = y \operatorname{tg} \beta$

$$X_y = 0; \quad Y_y = 0. \quad (6.72)$$



Фиг. 53.

Так как число условий на поверхности равно четырём, то для решения задачи достаточно взять функцию напряжений с четырьмя неопределёнными коэффициентами. Воспользуемся функцией третьей степени (6.25), сохранив в ней первые четыре члена, т. е. положив

$$a = b = c = 0.$$

Согласно уравнениям (6.26) (§ 33) напряжения будут линейными функциями и выразятся так:

$$\left. \begin{aligned} X_x = fx + ky; \quad Y_y = dx + ey; \\ Y_x = X_y = -ex - fy - \rho gx. \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

Здесь ρg — вес объёмной единицы стенки; для краткости назовём его через p , т. е.

$$\rho g = p.$$

Применяя условия (6.70), имеем: $fy = 0$; $ky = -\gamma y$. Отсюда $f = 0$; $k = -\gamma$, и напряжения (6.73) напишутся так:

$$X_x = -\gamma y; \quad Y_y = dx + ey; \quad Y_x = X_y = -(e + p)x. \quad (6.73')$$

Условия (6.72) раскрываем по уравнениям (II₁) (§ 32) и вносим в них значения косинусов углов внешней нормали V с осями (фиг. 53)

$$X_x \cos \beta - X_y \sin \beta = 0; \quad Y_x \cos \beta - Y_y \sin \beta = 0.$$

Сюда вносим значения напряжений (6.73'), положив в них согласно условиям (6.72) $x = y \operatorname{tg} \beta$:

$$\begin{aligned} -\gamma y \cos \beta + (e + p)y \operatorname{tg} \beta \sin \beta &= 0; \\ -(e + p)y \operatorname{tg} \beta \cos \beta - (dy \operatorname{tg} \beta + ey) \sin \beta &= 0. \end{aligned}$$

Сокращая оба уравнения на y и деля на $\cos \beta$, получаем
 $(e + p) \operatorname{tg}^2 \beta = \gamma$; $(d \operatorname{tg} \beta + e) \operatorname{tg} \beta = -(e + p) \operatorname{tg} \beta$.

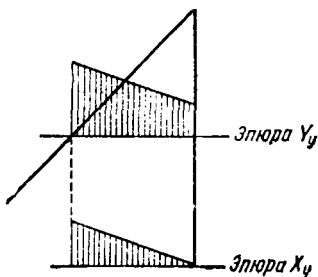
Отсюда легко найдём

$$e = \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} - p; \quad d = \frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta},$$

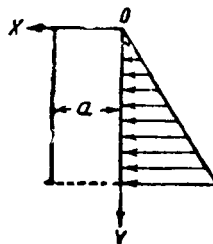
и напряжения (6.73) получают окончательный вид

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\gamma y; \\ Y_y &= \left(\frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} \right) x + \left(\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} - p \right) y; \\ Y_x = X_y &= -\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} x. \end{aligned} \right\} \quad (6.74)$$

Эпюры напряжений Y_y и X_y по горизонтальному сечению



Фиг. 54.



Фиг. 55.

$y = y_0$ показаны на фиг. 54. Сравнивая это с результатом элементарного расчёта по формулам

$$Y_y = \frac{N}{F} + \frac{M}{J_x} \left(x - \frac{a}{2} \right); \quad X_y = \frac{QS}{J_b},$$

найдем, что значения нормальных напряжений Y_y в обоих решениях совпадают; распределение же касательных напряжений X_y получается существенно различным.

До сих пор мы выбирали функцию напряжений $\varphi(x, y)$ в виде полинома не выше пятой степени [ср. формулу (6.54) § 35].

Повышая степень полинома, можно достичь решения более сложных задач. Например, задавая φ как полином шестой степени, можно получить решение, данное Морисом Леви (M. Lévy) для случая прямоугольной плотины или подпорной стенки. Решение это имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\gamma y \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{x}{a} \right); \\ Y_y &= -py - \frac{\gamma y^3}{a^2} \left(2 \frac{x}{a} - 1 \right) + \gamma y \left(4 \frac{x^3}{a^3} - 6 \frac{x^2}{a^2} + \frac{12}{5} \frac{x}{a} - \frac{1}{5} \right); \\ Y_x = X_y &= -\frac{\gamma x}{a} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \left[3 \frac{y^2}{a} - \frac{a}{5} + x \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

Читатель легко убедится, что эти напряжения удовлетворяют следующим условиям на поверхности (фиг. 55):

1. При $x=0$

$$X_{-x} = \gamma y; \quad Y_{-x} = 0.$$

2. При $x=a$

$$X_x = 0; \quad Y_x = 0.$$

3. При $y=0$

$$Y_{-y} = 0.$$

Последнее необходимое условие

при $y=0$

$$X_{-y} = 0$$

не удовлетворяется полностью, и на верхней грани стенки остаются касательные напряжения

$$X_{-y} = -X_y = \frac{\gamma x}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left[x \left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{a}{5}\right].$$

Однако, эти напряжения приводятся к уравновешенной системе сил, так как равнодействующая их равна нулю:

$$\int_0^a X_y dx = 0;$$

поэтому они имеют лишь местное значение, и область влияния их, согласно принципу Сен-Венана, невелика, тем более, что они действуют в верхней, мало напряжённой части стенки, которая обычно не нуждается в проверке на напряжения.

Решая данную задачу элементарным путём, мы для напряжений Y_y получили бы такое выражение:

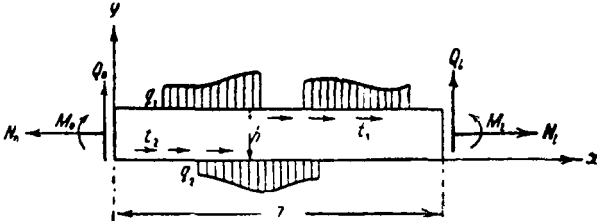
$$\begin{aligned} Y_y &= \frac{N}{F} + \frac{M}{J} \left(x - \frac{a}{2}\right) = \\ &= -py - \frac{\frac{\gamma y^2}{2} \frac{y}{3}}{\left(\frac{a^3}{12}\right)} \frac{a}{2} \left(2 \frac{x}{a} - 1\right) = \\ &= -py - \frac{\gamma y^3}{a^2} \left(2 \frac{x}{a} - 1\right), \end{aligned}$$

что соответствует первым двум членам второго из уравнений (6.75).

Предлагаем читателю таким же путём сравнить выражения напряжения $X_x = Y_x$ в элементарном решении и по уравнениям (6.75).

§ 37. Изгиб прямоугольной полосы; решения Файлона и Рибьера.

Рассмотренный в предыдущих параграфах способ решения плоской задачи при помощи алгебраических полиномов представляет ограниченные возможности в смысле практического использования, так как этим путём очень трудно подобрать полином, дающий решение, соответствующее наперёд заданной, более или менее сложной нагрузке. Гораздо более эффективным оказался способ тригонометрических полиномов, предложенный Рибьером и Файлоном для случаев изгиба прямоугольной полосы, длина



Фиг. 56.

которой значительно более высоты h (фиг. 56). В таких случаях наиболее важно бывает возможно точнее удовлетворить условиям на длинных сторонах полосы, где задаётся нагрузка, вызывающая изгиб полосы; условиям на коротких сторонах (торцах) можно удовлетворить лишь в форме задания равнодействующих факторов $N_0, Q_0, M_0, N_1, Q_1, M_1$, характеризующих реакции опор или нагрузки на концах полосы (не заботясь о законе распределения напряжений по высоте h начального и конечного сечений); при малой величине отношения $\frac{h}{l}$ это допустимо с точки зрения принципа Сен-Венана (§ 24).

Как указано в § 32, решение плоской задачи при помощи функции напряжений $\varphi(x, y)$ сводится к интегрированию уравнения (IX):

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (6.76)$$

при заданных граничных условиях; этими условиями мы займёмся далее, сейчас же постараемся получить возможно более общее решение уравнений (6.76). Такое решение легко найти методом разделения переменных, использованным выше в § 21 по отношению к уравнению колебаний (4.28); методы Рибьера и Файлона получатся отсюда как частные случаи.

Будем искать частное решение уравнения (6.76) в форме

$$\varphi(x, y) = XY, \quad (6.77)$$

где X есть функция только от x , а Y — только от y .

Подставив (6.77) в (6.76), пишем его так:

$$X^{(IV)}Y + 2X''Y'' + XY^{(IV)} = 0, \quad (6.78)$$

или по разделении обеих частей на XY

$$\frac{X^{(IV)}}{X} + 2\frac{X''}{X}\frac{Y''}{Y} + \frac{Y^{(IV)}}{Y} = 0. \quad (6.79)$$

К этому уравнению уже легко применить метод разделения переменных; для этого достаточно взять производную от обеих частей его по x или по y . Изберём второй из этих путей; получим

$$2\frac{X''}{X}\left(\frac{Y''}{Y}\right)' + \left(\frac{Y^{(IV)}}{Y}\right)' = 0,$$

и переменные разделяются; действительно, отсюда получаем

$$2\frac{X''}{X} = -\left[\left(\frac{Y^{(IV)}}{Y}\right)' : \left(\frac{Y''}{Y}\right)'\right]; \quad (6.80)$$

левая часть этого уравнения зависит только от x , а правая — только от y ; но x и y — независимые друг от друга переменные; поэтому уравнение может быть удовлетворено только тогда, если левая и правая части его в отдельности равны одной и той же постоянной величине; обозначив её через $-2\lambda^2$, где число λ пока произвольно, получим из (6.80) два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$2\frac{X''}{X} = -2\lambda^2, \\ \left(\frac{Y^{(IV)}}{Y}\right)' : \left(\frac{Y''}{Y}\right)' = 2\lambda^2,$$

или

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (6.81)$$

$$\left(\frac{Y^{(IV)}}{Y}\right)' - 2\lambda^2 \left(\frac{Y''}{Y}\right)' = 0. \quad (6.82)$$

Уравнение (6.81) сейчас же проинтегрируем:

$$X = K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x; \quad (6.83)$$

здесь K_1 и K_2 — произвольные постоянные.

Интегрированием уравнения (6.82) не будем заниматься, так как порядок его искусственно повышен благодаря применённому выше дифференцированию уравнения (6.79) по y , а это введёт

постороннее решение, не удовлетворяющее исходному уравнению (6.78); пойдём следующим, более коротким путём: из (6.81) имеем

$$X'' = -\lambda^2 X$$

и

$$X^{IV} = -\lambda^2 X'' = \lambda^4 X.$$

Подставив это в (6.78), приведём его к виду

$$X(Y^{IV} - 2\lambda^2 Y'' + \lambda^4 Y) = 0.$$

Можем считать, что, вообще говоря, $X \neq 0$ (благодаря независимости переменной x), и потому получим

$$Y^{IV} - 2\lambda^2 Y'' + \lambda^4 Y = 0; \quad (6.84)$$

этим уравнением мы и воспользуемся вместо (6.82). Разыскивая его частные решения в форме

$$Y = e^{sy},$$

получим характеристическое уравнение

$$(s^2 - \lambda^2)^2 = 0,$$

имеющее два двукратных корня

$$s = \pm \lambda.$$

Поэтому обычным способом получим общее решение уравнения (6.84) в виде

$$Y = A \operatorname{ch} \lambda y + B \operatorname{sh} \lambda y + C y \operatorname{ch} \lambda y + D y \operatorname{sh} \lambda y, \quad (6.85)$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

Подставляя значения (6.83) и (6.85) в (6.77), найдём такое частное решение уравнения плоской задачи (6.76)

$$\varphi(x, y) = (K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x) (A \operatorname{ch} \lambda y + B \operatorname{sh} \lambda y + C y \operatorname{ch} \lambda y + D y \operatorname{sh} \lambda y). \quad (6.86)$$

Эта функция является решением уравнения (6.76) при произвольных значениях постоянных

$$K_1, K_2, A, B, C, D \text{ и } \lambda.$$

Значит, можно построить сколько угодно решений типа (6.86); сумма таких решений также будет решением уравнения (6.76) (так как это уравнение линейное). Взяв достаточно большое число членов такой суммы, мы будем иметь в своём распоряжении много произвольных постоянных; в дальнейшем следует по-

стараться их так подобрать, чтобы условия, заданные на границах полосы, были возможно полнее удовлетворены.

Займёмся сначала условиями на торцах полосы, имеющей длину l (фиг. 56). Потребуем, чтобы в этих сечениях, т. е. при

$$x = 0 \text{ и } x = l,$$

не было нормальных напряжений; иначе говоря, поставим условия, чтобы

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0 \\ \text{и } x = l \end{array} \right\} X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (6.87)$$

При этом, очевидно, получим $N_0 = M_0 = N_l = M_l = 0$, и нагрузки на длинных сторонах полосы будут уравновешены силами Q_0 и Q_l , приложенными на торцах балки; эти силы можно считать реакциями опор простой балки длиной l .

Условия (6.87) будут удовлетворены, если в частном решении (6.86) положим

$$K_1 = 0; K_2 = 1; \lambda = \frac{m\pi}{l},$$

где m есть нуль или целое положительное число: $m = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$.

Составим таким путём сумму частных решений, взяв

$$m = 1, 2, 3, \dots, n,$$

$$\varphi = \sum_{m=1}^{m=n} \sin \frac{m\pi x}{l} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} + B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} + C_m y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} + D_m y \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} \right). \quad (6.88)$$

Сюда вошли $4n$ произвольных постоянных

$$A_m, B_m, C_m, D_m,$$

которые при достаточно большом числе n позволят удовлетворить условиям на длинных сторонах полосы, если там заданы нагрузки. Решение в форме (6.88) было впервые предложено Файлоном.

Переходим к условиям на длинных сторонах. Пусть на верхней стороне ($y = h$) задана произвольная нормальная нагрузка $q_1 = f_1(x)$ и тангенциальная нагрузка

$$t_1 = \psi_1(x);$$

на нижней стороне ($y = 0$) имеется нормальная нагрузка $q_2 = f_2(x)$ и тангенциальная $t_2 = \psi_2(x)$. Относительно тангенциальных на-

грузок предположим, что сумма каждой из них в отдельности равна нулю, т. е.

$$\int_0^l \psi_1(x) dx = 0. \quad \int_0^l \psi_2(x) dx = 0. \quad (6.89)$$

Тогда получим такие граничные условия для функции напряжений.

$$\begin{aligned} \text{При } y = h, \quad Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f_1(x); \quad X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = t_1(x); \\ \text{при } y = 0 \quad -Y_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f_2(x); \quad -X_y = +\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = t_2(x), \end{aligned}$$

или, внося сюда выражение $\varphi(x, y)$ из (6.88), получим

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^2}{l^2} \sum_{m+1}^n m^2 \sin \frac{m\pi x}{l} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi h}{l} + B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi h}{l} + \right. \\ \left. + C_m h \operatorname{ch} \frac{m\pi h}{l} + D_m h \operatorname{sh} \frac{m\pi h}{l} \right) = f_1(x); \\ \frac{\pi}{l} \sum m \cos \frac{m\pi x}{l} \left[\left(A_m \frac{m\pi}{l} + D_m \right) \operatorname{sh} \frac{m\pi h}{l} + \left(B_m \frac{m\pi}{l} + C_m \right) \operatorname{ch} \frac{m\pi h}{l} + \right. \\ \left. + C_m h \operatorname{sh} \frac{m\pi h}{l} + D_m h \operatorname{ch} \frac{m\pi h}{l} \right] = t_1(x); \\ \frac{\pi^2}{l^2} \sum m^2 \sin \frac{m\pi x}{l} A_m = f_2(x); \\ \frac{\pi}{l} \sum m \cos \frac{m\pi x}{l} \left(B_m \frac{m\pi h}{l} + C_m \right) = t_2(x). \end{aligned}$$

Рассматривая второе и четвертое из этих уравнений, убедимся в необходимости ограничения, наложенного на нагрузки t_1 и t_2 условиями (6.89); действительно, соответствующие интегралы от левых частей этих равенств, взятые в пределах $(0, l)$, обращаются в нуль. Во всяком случае предыдущие равенства показывают, что функции, стоящие в правых частях, должны быть приближённо представлены на промежутке $(0, l)$ рядами Фурье соответственно по $\sin \frac{m\pi x}{l}$ и $\cos \frac{m\pi x}{l}$. Чем больше взятое число членов n в функции напряжений (6.88), тем более точным будет это представление. Для определения коэффициентов рядов поступаем по общему правилу: множим обе части равенства соответственно на $\sin \frac{k\pi x}{l}$ или $\cos \frac{k\pi x}{l}$ и интегрируем в пределах от 0 до l ; таким путём получим следующие четыре уравнения для определения коэффициентов A_k, B_k, C_k, D_k , вхо-

данных в k -й член функции напряжений (6.88):

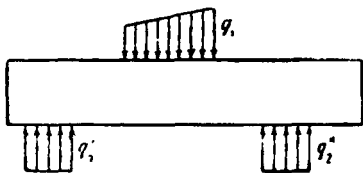
$$\left. \begin{aligned}
 A_k \operatorname{ch} \frac{k\pi h}{l} + B_k \operatorname{sh} \frac{k\pi h}{l} + C_k h \operatorname{ch} \frac{k\pi h}{l} + D_k h \operatorname{sh} \frac{k\pi h}{l} &= \\
 &= -\frac{2l}{\pi^2 k^2} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx; \\
 A_k \frac{k\pi}{l} \operatorname{sh} \frac{k\pi h}{l} + B_k \frac{k\pi}{l} \operatorname{ch} \frac{k\pi h}{l} + C_k \left(\operatorname{ch} \frac{k\pi h}{l} + h \operatorname{sh} \frac{k\pi h}{l} \right) + \\
 + D_k \left(\operatorname{sh} \frac{k\pi h}{l} + h \operatorname{ch} \frac{k\pi h}{l} \right) &= \frac{2}{\pi k} \int_0^l t_2(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx; \\
 A_k &= \frac{2l}{\pi^2 k^2} \int_0^l f_2(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx; \\
 B_k \frac{k\pi h}{l} + C_k &= \frac{2}{\pi k} \int_0^l t_2(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx.
 \end{aligned} \right\} (6.90)$$

Полагая здесь $k = 1, 2, 3, \dots, n$, получим уравнения для определения всех коэффициентов функции напряжений (6.88). Имея функцию напряжений, можем находить напряжения в любой точке полосы по формулам

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

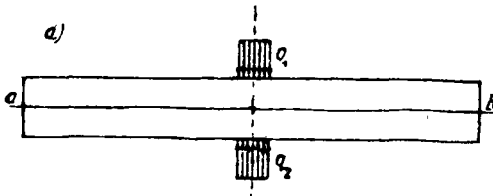
Изложенный здесь способ исследования изгиба полосы оказался очень удобным, так как, пользуясь им, мы можем вводить достаточно произвольные нагрузки на длинных сторонах. В курсах теории упругости С. П. Тимошенко и П. Ф. Папковича можно найти много примеров применения этого способа к задачам, важным в практическом отношении.

Если тангенциальные нагрузки t_1 и t_2 отсутствуют, то получится задача о поперечном изгибе полосы обычными поперечными нагрузками q_1 и q_2 . Отметим частный случай, когда нагрузка $q_1 = f_1(x)$ задана произвольно, а нагрузка $q_2 = f_2(x)$ распределена на двух участках (фиг. 57); интенсивности её q'_2 и q''_2 подберём так, чтобы все эти нагрузки были взаимно уравновешены. Хотя при этом на торцах балки останутся касательные усилия, однако равнодействующие их Q_0 и Q_1 (фиг. 56) обратятся в нуль; влияние таких уравновешенных касательных сил Y_x , согласно прин-

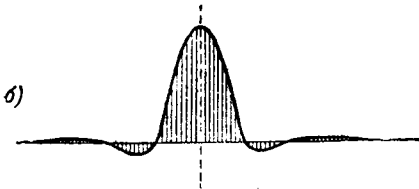


Фиг. 57.

дину Сен-Венана, будет заметно лишь вблизи торцов балки. Таким путём мы получим решение задачи о балке на двух опорах при условии, что реакции опор q_1^* и q_2^* распределены по заранее заданному закону. Ряд задач этого рода решён Г. Н. Масловым для простых и неразрезных балок.



Фиг. 58, а.



Фиг. 58, б.

Другой интересный частный случай получим, взяв нагрузки q_1 и q_2 (фиг. 53) одинаковые, но противоположные по направлению (t_1 и t_2 попережнему отсутствуют). Силы Q_0 и Q_l будут равны нулю, и мы получим сжатие полосы в поперечном направлении. Если нагрузки q_1 и q_2 распределены на малом участке (фиг. 58, а), то, уменьшая его, в пределе получим схему, близкую к фиг. 35, на которой был пояснён принцип Сен-Венана.

В данной задаче принцип этот подтверждается видом эпюры напряжений Y_y по среднему сечению ab , показанной на фиг. 58, б для предельного случая сжатия полосы сосредоточенными грузами. Решение этой задачи дано Файлоном *).

Рибьер применял к некоторым задачам решение, аналогичное (6.88) и получаемое тем же путём из (6.86), если в нём положим $K_2 = 0$; $\lambda = \frac{m\pi}{l}$; таким образом, будем иметь

$$\varphi = \sum_{m=1}^{m=n} \cos \frac{m\pi x}{l} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} + B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} + C_m y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} + D_m y \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} \right). \quad (6.91)$$

Ряд приложений этого решения дан в курсе теории упругости П. Ф. Папковича.

Для того чтобы в решении Файлона освободиться от ограничения, налагаемого на тангенциальные нагрузки условиями (6.89), и вообще расширить область его применения, следует к найден-

*) См. Э. Кокер и Л. Файлон, Оптический метод исследования напряжений, ОНТИ, 1936 г.; С. П. Тимошенко, Курс теории упругости, ГТТИ, 1934 г.

ному выше решению (6.88) добавить ещё одно частное решение, вытекающее из принятого метода разделения переменных, но опущенное пока нами; действительно, в дополнение к значениям $m = 1, 2, 3, \dots$, принятым в (6.88) для построения функции φ , положим ещё $m = 0$, т. е. $\lambda = \frac{m\pi}{l} = 0$; тогда уравнения (6.81) и (6.84) перейдут в такие:

$$\begin{aligned} X'' &= 0, \\ Y^{(IV)} &= 0; \end{aligned}$$

общие их решения будут

$$\begin{aligned} X &= \alpha x + \beta; \\ Y &= \frac{A}{6} y^3 + \frac{B}{2} y^2 + Cy + D, \end{aligned}$$

и согласно (6.77) получим *) соответственную функцию напряжений

$$\varphi_0 = (\alpha x + \beta) \left(\frac{A}{6} y^3 + \frac{B}{2} y^2 + Cy \right). \quad (6.92)$$

Таким образом, к решению (6.88) вполне планомерно добавляется решение в форме полинома четвёртой степени (6.92); компоненты напряжённого состояния при этом будут такие:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = (\alpha x + \beta)(Ay + B); \\ Y_y &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} = 0; \\ X_y &= -\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} = -\alpha \left(\frac{A}{2} y^2 + By + C \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.93)$$

На длинных сторонах полосы получим напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y = 0, Y_y &= 0 \\ \text{при } y = h, Y_y &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} X_y &= -\alpha C; \\ X_y &= -\alpha \left(\frac{Ah^2}{2} + Bh + C \right). \end{aligned} \quad (6.94)$$

Значит, распоряжаясь произвольными постоянными α, β, A, B, C , мы можем:

1. На длинных сторонах ($y = 0$; $y = b$) получить постоянные тангенциальные нагрузки X_y произвольной интенсивности согласно (6.94) и этим избавиться от ограничения (6.89).

*) Далее полагаем $D = 0$.

2. На торцах полосы получить нормальные напряжения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=0 \\ \text{при } x=l \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_x = \beta (Ay + B); \\ X_x = (\alpha l + \beta) (Ay + B), \end{array} \quad (6.95)$$

распределённые по линейному закону; это позволит добавить к решению (6.88) ещё два фактора произвольной интенсивности: сжатие — растяжение полосы вдоль её оси и изгибающие моменты на торцах.

ГЛАВА VII.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.

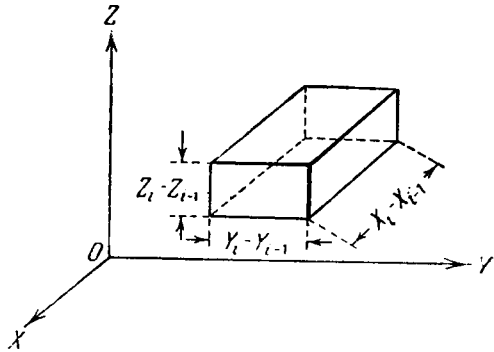
§ 38. Общие уравнения плоской задачи в полярных координатах.

До сих пор при решении задач теории упругости мы пользовались декартовыми координатами, в которых точка $M(x_0, y_0, z_0)$ определялась пересечением трёх плоскостей: $x = x_0$; $y = y_0$; $z = z_0$. Применяя эти координаты, мы разделяли исследуемое тело на бесконечно малые элементы тремя системами плоскостей:

$$\begin{aligned} x &= x_1; & x &= x_2; & \dots; & x &= x_i; \\ y &= y_1; & y &= y_2; & \dots; & y &= y_i; \\ z &= z_1; & z &= z_2; & \dots; & z &= z_i. \end{aligned}$$

Поверхность, на которой одна из координат сохраняет постоянное значение, называется координатной поверхностью; в данном случае эти поверхности оказываются плоскостями, параллельными координатным плоскостям, и при этом получаются элементы в форме параллелепипеда (фиг. 59).

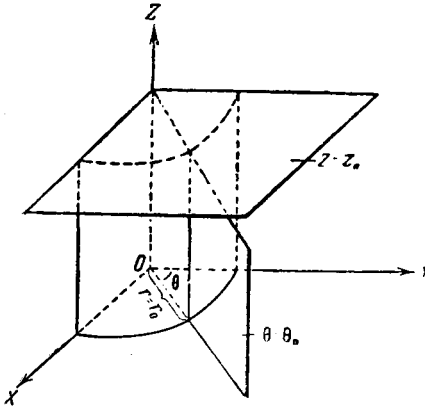
Однако во многих задачах оказывается более удобным выбирать другие системы координат. В частности, рассмотрим цилиндрические координаты, в которых точка (фиг. 60) определяется тремя числами: r , θ , z . Иначе можем сказать, что точка определяется пересечением следующих координатных поверхностей: круглого цилиндра $r = r_0$, плоскости $\theta = \theta_0$, проходящей через ось Oz , и плоскости $z = z_0$, параллельной Oxy . Соответственно этому в данном случае деление исследуемого тела на беско-



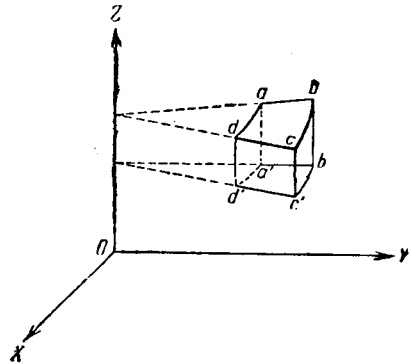
Фиг. 59.

лечно малые элементы мы будем осуществлять тремя следующими системами поверхностей: системой концентрических цилиндров $r=r_1, r=r_2, \dots, r=r_i$; затем пучком плоскостей $\theta=\theta_1, \theta=\theta_2, \dots, \theta=\theta_i$, проходящих через ось Oz , и системой плоскостей $z=z_1, z=z_2, \dots, z=z_i$, параллельных Oxy . Форма получающегося при этом бесконечно малого элемента показана на фиг. 61.

Применим цилиндрические координаты к плоской задаче, причём ось исследуемого призматического тела направим парал-



Фиг. 60.



Фиг. 61.

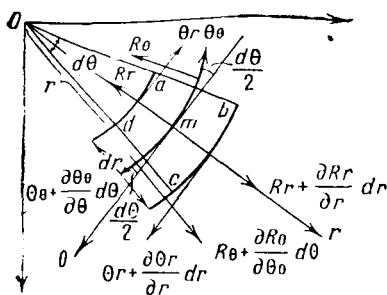
лельно оси Oz . Внешняя нагрузка, согласно нашим предположениям, будет параллельной плоскости Oxy . В этом случае, как мы видели, и для плоской деформации и для плоского напряжённого состояния можно отбросить формально ось Oz , и следовательно, вся задача будет решаться как бы на плоскости, в полярных координатах r, θ .

Выведем теперь основные уравнения теории упругости для плоской задачи в полярных координатах. Займёмся сначала дифференциальными уравнениями равновесия (I). Выделим из тела элемент $abcd$ с центральным углом $d\theta$ и наименьшим радиусом r . Стороны его будут (фиг. 62)

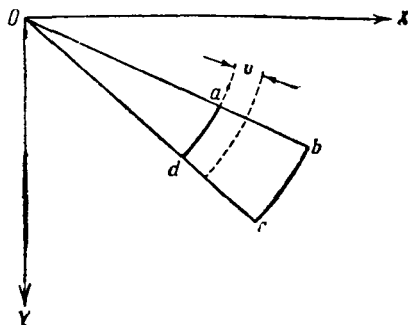
$$\left. \begin{aligned} ab = cd = dr; \\ ad = r d\theta; \\ bc = (r + dr) d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Наметим две оси mr и $m\theta$ и, пользуясь ими, будем обозначать напряжения, действующие по граням элемента согласно правилу, принятому вначале; обозначения эти показаны на чертеже. Состав-

Вид условия равновесия элемента $abcd$, проектируя приложенные к нему силы на оси r и θ . Объемными силами при этом пренебрежем. Толщину элемента вдоль оси Oz примем равной 1.



Фиг. 62.



Фиг. 63.

При проектировании сил ввиду бесконечной малости угла $d\theta$ будем принимать

$$\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}, \quad \cos \frac{d\theta}{2} = 1.$$

Перемножая напряжения, показанные на чертеже, на соответствующие площадки (7.1) и проектируя полученные силы на оси r и θ , найдём

$$\begin{aligned} & \left(R_r + \frac{\partial R_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - R_r r d\theta + \left(R_\theta + \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \\ & \quad - R_\theta dr - \left(\Theta_r + \frac{\partial \Theta_r}{\partial r} dr \right) dr \frac{d\theta}{2} - \Theta_r dr \frac{d\theta}{2} = 0; \\ & \left(\Theta_\theta + \frac{\partial \Theta_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \Theta_\theta dr + \left(R_\theta + \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} + \\ & \quad + R_\theta dr \frac{d\theta}{2} + \left(\Theta_r + \frac{\partial \Theta_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \Theta_r r d\theta = 0. \end{aligned}$$

Сокращая полученные уравнения и отбрасывая бесконечно малые величины третьего порядка, получим

$$\begin{aligned} R_r dr d\theta + \frac{\partial R_r}{\partial r} r dr d\theta + \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} d\theta dr - 2\Theta_r \frac{dr d\theta}{2} &= 0, \\ \frac{\partial \Theta_\theta}{\partial \theta} d\theta dr + 2R_\theta \frac{dr d\theta}{2} + \Theta_r dr d\theta + \frac{\partial \Theta_r}{\partial r} r dr d\theta &= 0. \end{aligned}$$

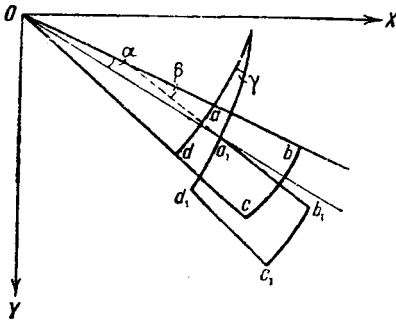
Далее, разделяя эти уравнения на $dr d\theta$, а также имея в виду

что $\Theta_r = R_\theta$, будем иметь окончательно дифференциальные уравнения равновесия в полярных координатах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} + \frac{R_r - \Theta_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial R_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_r}{\partial \theta} + \frac{2R_\theta}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I_{пп})$$

Займёмся теперь деформациями и перемещениями. Будем обозначать перемещения точек вдоль оси r через u , а вдоль оси θ через v ; удлинение вдоль оси r — через e_{rr} ; вдоль оси θ — $e_{\theta\theta}$ и сдвиг, т. е. искажение прямого угла bad , — через $e_{r\theta}$.

При помощи таких же рассуждений, как и ранее (§ 6), мы получим $e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}$. Переходим к удлинению $e_{\theta\theta}$. Это удлинение может получиться от двух причин: во-первых, если произошли только радиальные перемещения u , то относитель-



Фиг. 64.

ное удлинение линейного элемента $ad = r d\theta$ выразится так:

$$\frac{(r+u) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}.$$

Вследствие перемещений v вдоль оси θ также получится относительное удлинение $\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{r \partial \theta}$; полное удлинение будет

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}.$$

Теперь займёмся сдвигом. Из чертежа (фиг. 64) видно, что сдвиг выразится так:

$$e_{r\theta} = (\beta - \alpha) + \gamma; \quad (7.2)$$

далее замечаем, что

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial r}; \quad \alpha = \frac{v}{r}; \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{r \partial \theta}.$$

Подставляя эти значения в формулу (7.2), получаем

$$e_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Таким образом, вместо уравнений (III'_п) для плоской задачи мы теперь получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, & e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ e_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}_{\text{пн}})$$

Что касается группы уравнений (IV) неразрывности деформаций, то в плоской задаче она свелась к единственному уравнению

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Это уравнение мы преобразовали, пользуясь функцией $\varphi(x, y)$, к такому виду:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (\text{IX}')$$

Теперь преобразуем это уравнение в полярные координаты. Выразим в этих координатах как самую функцию напряжений $\varphi(x, y)$, так и её последовательные производные. Для этого следует воспользоваться уравнениями преобразования декартовых координат в полярные:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta,$$

или в обратной форме:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \\ \theta &= \text{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Дифференцируя эти уравнения по x и по y , получим

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x; \quad 2r \frac{\partial r}{\partial y} = 2y;$$

отсюда следует, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r};$$

но

$$\frac{x}{r} = \cos \theta; \quad \frac{y}{r} = \sin \theta; \quad (7.4)$$

поэтому получаем

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad (7.5)$$

и далее

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

На основании (7.3) и (7.4) находим

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \theta; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \theta. \quad (7.6)$$

Дифференцируя теперь функцию $\varphi(x, y)$, найдём

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y},$$

а на основании (7.5) и (7.6)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cos \theta.$$

Дифференцируя снова эти уравнения по x и y и принимая во внимание (7.5) и (7.6), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \\ &\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \\ &\quad - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Пользуясь этими уравнениями, мы легко найдём, что

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2},$$

поэтому уравнение (IX') можем символически записать так:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (IX_{II})$$

Теперь, пользуясь функцией напряжений, мы можем при помощи уравнений (7.7) получить значения напряжений

$$R_r, \quad \Theta_\theta \text{ и } R_\theta = \Theta_r.$$

Действительно (фиг. 65), направляя ось x вдоль оси r , а ось y вдоль оси θ , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} R_r &= (X_x)_{\theta=0}; & R_\theta &= (X_y)_{\theta=0}; \\ \Theta_\theta &= (Y_y)_{\theta=0}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Пользуясь функцией напряжений, мы ранее нашли

$$X_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad Y_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad X_y = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (7.9)$$

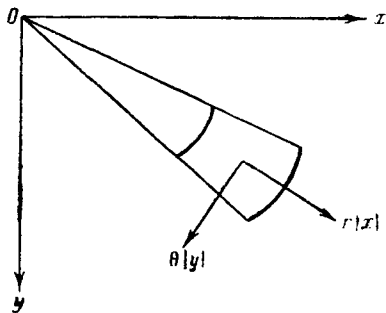
Поэтому на основании уравнений (7.8), (7.9) и (7.7) получаем

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; & \Theta_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ R_\theta &= \Theta_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII}_{\text{п}})$$

Предлагаем читателю для упражнения проверить, удовлетворяют ли эти напряжения условиям равновесия (I_{пп}).

Закон Гука (V) для случая обобщённого плоского напряжённого состояния имеет прежний вид, лишь меняются обозначения напряжений и деформаций:

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} &= \frac{1}{E} (R_r - \sigma \Theta_\theta); \\ e_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} (\Theta_\theta - \sigma R_r); \\ e_{r\theta} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} R_\theta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V}_{\text{пп}})$$



Фиг. 65.

В случае плоской деформации следует E и σ заменить на E_1 и σ_1 по формулам (6.5).

§ 39. Задачи, в которых напряжения не зависят от полярного угла.

Применим выведенные уравнения к решению некоторых задач. Наиболее просто задача решается в тех случаях, когда напряжения (VIII_п) не зависят от угла θ , т. е. когда во всех точках любой окружности с центром в полюсе O , R_r , Θ_θ и R_θ одинаковы.

Функцию напряжений φ , очевидно, можем взять в этом случае не зависящей от θ ; тогда уравнение (IX_н) упрощается:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 0.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \quad (\text{IX}'_{\text{н}})$$

выражения напряжений (VIII_н) переходят в такие:

$$R_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \Theta_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \quad R_\theta = \Theta_r = 0. \quad (\text{VIII}'_{\text{н}})$$

Уравнение (IX_н) можно привести к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами путём подстановки $r = e^t$ или $t = \ln r$; поэтому оно легко интегрируется *); общий его интеграл имеет вид

$$\varphi(r) = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D, \quad (7.10)$$

*) Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \left(\frac{dt}{dr}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{d^2 t}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

Таким же путём получим далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} &= \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} - 3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right); \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} &= \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} - 6 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} + 11 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 6 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

Подставляя всё это в уравнение (IX_н'), приведём его к виду

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} - 4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} + 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{a})$$

Характеристическое уравнение

$$k^4 - 4k^3 + 4k^2 = k^2(k-2)^2 = 0;$$

его двум (двукратным) корням $k=0$ и $k=2$ соответствуют четыре частных интеграла уравнения (а):

$$e^{0t} = 1; \quad te^{0t} = t; \quad e^{2t}; \quad te^{2t}.$$

Поэтому общий интеграл уравнения (а) будет

$$\varphi = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t};$$

сюда надо подставить

$$t = \ln r.$$

Отсюда по (VIII_н) находим напряжения

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{A}{r^2} + 2B \ln r + B + 2C; \\ \Theta_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2B \ln r + 3B + 2C; \\ R_\theta &= \Theta_r = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

В качестве примера воспользуемся уравнениями (7.11) для решения задачи Ламе о равномерном внешнем и внутреннем сжатии круглой трубы. Пусть внешнее давление равно p_2 , а внутреннее — p_1 .

Тогда мы, очевидно, получаем следующие условия на поверхности (фиг. 66):

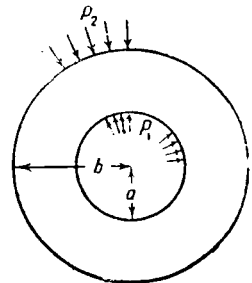
$$\left. \begin{aligned} \text{при } r = a \quad R_r &= +p_1 \quad \text{или} \quad R_r = -p_1, \\ \text{при } r = b \quad R_r &= -p_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Для получения решения Ламе при этих условиях произвольную постоянную B положим равной нулю; тогда уравнения (7.11) дают

$$R_r = \frac{A}{r^2} + 2C; \quad \Theta_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C.$$

Постоянные A и C легко найти из условий (7.12); выполнив это, получим

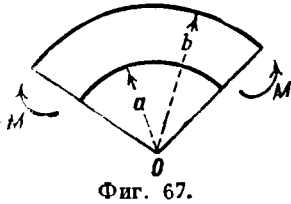
$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_2 - p_1}{r^2} + \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2}; \\ \Theta_\theta &= -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_2 - p_1}{r^2} + \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$



Фиг. 66.

При решении этой задачи мы сделали допущение, положив заранее $B = 0$; имея три произвольные постоянные A , B и C и два условия (7.12), мы могли бы решить задачу и при других допущениях; однако, можно доказать, что действительному распределению напряжений соответствует решение Ламе (7.13). Особенность этой задачи заключается в том, что мы здесь встречаемся с *двухсвязным контуром*, так как сечение трубы ограничено двумя замкнутыми кривыми, не пересекающимися между собой; при наличии двухсвязного или многосвязного контура решение задачи, вообще говоря, осложняется, и возможна многозначность решения; в данной задаче это затруднение можно обойти, выбрав в качестве неизвестных перемещения; такой метод решения задачи Ламе приводится в курсах сопротивления материалов.

Рассмотрим часть круглого кольца, изгибаемую силами, приложенными к концевым сечениям и приводящимися к парам (фиг. 67). Условия на поверхности выразятся так:



Фиг. 67.

$$\text{при } r = a \quad R_r = 0;$$

$$\text{при } r = b \quad R_r = 0;$$

$$\int_a^b \Theta_0 dr = 0; \quad \int_a^b \Theta_0 r dr = M.$$

Раскрывая эти условия, получим

$$\frac{A}{a^2} + 2B \ln a + B + 2C = 0; \quad \frac{A}{b^2} + 2B \ln b + B + 2C = 0;$$

$$b \left(\frac{A}{b^2} + 2B \ln b + B + 2C \right) - a \left(\frac{A}{a^2} + 2B \ln a + B + 2C \right) = 0;$$

$$-A \ln \frac{b}{a} + B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + (B + C)(b^2 - a^2) = M.$$

Мы получили четыре уравнения для определения трёх постоянных A , B и C ; однако, замечаем, что третье уравнение является следствием первых двух. Решая эти уравнения, найдём

$$A = \frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}; \quad B = \frac{2M}{N} (b^2 - a^2);$$

$$C = -\frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)],$$

где

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2.$$

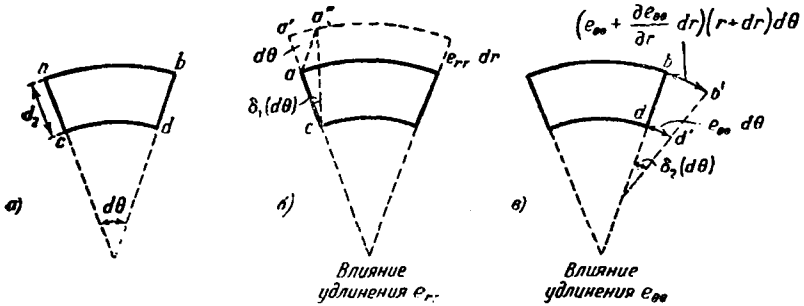
Внося эти значения в уравнения (7.11), получим такие напряжения:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= \frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - a^2 \ln \frac{r}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} \right); \\ \Theta_0 &= \frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - a^2 \ln \frac{r}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} - a^2 + b^2 \right); \\ \Theta_r &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Сравнивая результат вычисления напряжения Θ , по формулам (7.14) с тем, что даёт элементарная теория бруса большой кривизны (гипотеза плоских сечений), можно убедиться в том, что получаемая разница невелика; её следует отнести за счёт того, что элементарная теория не учитывает напряжений R_r ,

обусловливаемых нажатием отдельных криволинейных продольных волокон друг на друга; эти напряжения создают дополнительную деформацию бруса *).

Рассмотрим ещё в данной задаче изменение центрального угла $d\theta$ бесконечно малого элемента $abcd$ (фиг. 68). Так как в данном случае сдвиги отсутствуют ($\Theta_r = 0$), то изменение угла $\delta(d\theta)$ зависит от двух удлинений e_{rr} и $e_{\theta\theta}$. Фиг. 68, б и в ясно



Фиг. 68.

показывают влияние обоих этих факторов; из них получаем влияние радиального удлинения e_{rr} (фиг. 68, б)

$$\delta_1(d\theta) = -\frac{a'a''}{ca'} = -\frac{e_{rr} dr d\theta}{dr + e_{rr} dr} \approx -e_{rr} d\theta;$$

влияние осевого удлинения $e_{\theta\theta}$ (фиг. 68, в)

$$\delta_2(d\theta) = \frac{bb' - dd'}{bd},$$

но

$$\begin{aligned} bb' - dd' &= \left(e_{\theta\theta} + \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - e_{\theta\theta} r d\theta \approx \\ &\approx e_{\theta\theta} dr d\theta + r \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} dr d\theta; \quad bd = dr; \end{aligned}$$

поэтому

$$\delta_2(d\theta) \approx \left(e_{\theta\theta} + r \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} \right) d\theta.$$

*) Читатель заметит, что в аналогичном случае чистого изгиба прямого бруса напряжения Y_1 , соответствующие напряжениям R_r данного случая, отсутствовали [формула (6.27) § 33]; следовательно, в прямом брус при чистом изгибе нет взаимного нажима отдельных волокон.

Значит, полное изменение угла $d\theta$ будет

$$\delta(d\theta) = \delta_1(d\theta) + \delta_2(d\theta) = \left(e_{\theta\theta} + r \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} - e_{rr} \right) d\theta,$$

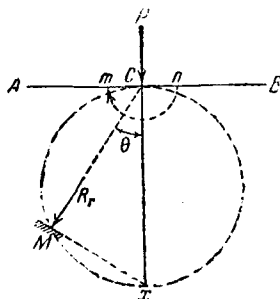
а относительное изменение

$$e_\theta = \frac{\delta(d\theta)}{d\theta} = e_{\theta\theta} + r \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r} - e_{rr}.$$

Если сюда вместо деформаций подставим их выражения через напряжения из ($V_{\text{пл}}$) § 38 и воспользуемся уравнениями (7.14), то легко убедимся, что e_θ не зависит от радиуса r . Это, очевидно, покажет, что плоские поперечные сечения в случае чистого изгиба остаются плоскими, и значит, подтверждается гипотеза плоских сечений, принимаемая обычно в элементарной теории кривого бруса.

§ 40. Действие сосредоточенной силы. (Задача Фламанга-Буссинеска.)

Рассмотрим (фиг. 69) однородную упругую среду, ограниченную плоскостью AB и распространяющуюся беспредельно вниз от этой плоскости. Пусть в точке C среды приложена сила P ; в отношении протяжения среды нормально к плоскости чертежа, как и всегда в плоской задаче, могут быть два случая: или это протяжение весьма мало (обобщённое плоское напряжённое состояние), или оно беспредельно (плоская деформация); в последнем случае силу P придётся предполагать не сосредоточенной, но равномерно распределённой по прямой, нормальной к плоскости чертежа и проходящей через точку C .



Фиг. 69.

Очевидно, что вблизи точки C напряжения будут весьма велики и превзойдут предел упругости; поэтому мы будем рассматривать лишь точки, расположенные вне небольшой области, ограниченной кругом mn радиуса r ; ввиду этого, пользуясь принципом Сен-Венана, груз P заменим нагрузкой, распределённой по полуокружности mn и эквивалентной грузу P ; это мало отразится на напряжениях в точках, удалённых от круга mn .

Попробуем удовлетворить условиям задачи такими простыми предположениями:

1) в любой точке M по площадке, нормальной к радиусу $CM = r$, нет касательных напряжений;

2) сжимающее нормальное напряжение R , по этой площадке обратно пропорционально радиусу r и прямо пропорционально $\cos \theta$;

3) нормальные напряжения Θ_s по площадкам радиального направления отсутствуют.

Сделанные предположения приводят к такой системе напряжений:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= -k \frac{\cos \theta}{r}; \\ \Theta_s &= 0; \\ R_\theta &= \Theta_r = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Эти напряжения удовлетворяют условиям задачи на поверхности AB ; действительно, ограничивающая плоскость AB ($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta = 0$) свободна от напряжений, кроме точки C , где R_r принимает неопределённый вид $\frac{0}{0}$; но точку C и даже малый полукруг mn мы исключили из нашего анализа. Далее, коэффициент k в уравнении (7.15) легко подобрать так, чтобы нормальные напряжения R_r по полуокружности mn были эквивалентны заданному грузу P , т. е. чтобы сумма проекций усилий

$$R_r \rho d\theta$$

по полуокружности $r = \rho$ на ось Ox была равна P :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} R_r \rho \cos \theta d\theta = P. \quad (7.16)$$

Подставляя сюда значение R_r из (7.15) и выполняя интегрирование, легко получим

$$k = \frac{2P}{\pi}. \quad (7.17)$$

Теперь нам остаётся установить, удовлетворяют ли напряжения (7.15) уравнениям теории упругости, т. е. возможны ли они в однородной упругой среде. Для этого, во-первых, постараемся для напряжений (7.15) подобрать функцию напряжений $\varphi(r, \theta)$, а во-вторых, убедимся, удовлетворит ли эта функция основному уравнению (IX_n)*).

Для подыскания функции напряжений воспользуемся уравнениями ($VIII_n$); подставляя в них напряжения (7.15),

* Если найдена функция напряжений, то, значит, удовлетворены условия равновесия (I_{nn}) (§ 38); уравнение же (IX_n) обеспечит неравренность деформаций.

получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -k \frac{\cos \theta}{r}. \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0; \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (7.20)$$

Уравнения (7.19) и (7.20) будут удовлетворены, если примем

$$\varphi = r f(\theta). \quad (7.21)$$

Подставляя это в (7.18), получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f + f'' = -k \cos \theta. \quad (7.18a)$$

Общее решение однородного уравнения

$$f + f'' = 0$$

будет

$$f = A \cos \theta + B \sin \theta. \quad (7.22)$$

Частное решение \bar{f} уравнения (7.18a) можно найти методом вариации постоянных A и B или методом Коши (см. наш курс «Сопротивление материалов», § 253):

$$\begin{aligned} \bar{f} &= -k \int_0^{\theta} \sin(\theta - t) \cos t \, dt = \\ &= -\frac{k}{2} \int_0^{\theta} [\sin(\theta - t + t) + \sin(\theta - t - t)] \, dt = \\ &= -\frac{k}{2} \int_0^{\theta} [\sin \theta + \sin(\theta - 2t)] \, dt = -\frac{k}{2} \theta \sin \theta. \end{aligned}$$

Значит, общее решение уравнения (7.18a) будет

$$f(\theta) = -\frac{k}{2} \theta \sin \theta + A \cos \theta + B \sin \theta.$$

Подставляя это в (7.21), получим

$$\varphi = -\frac{k}{2} r \theta \sin \theta + Ar \cos \theta + Br \sin \theta. \quad (7.23)$$

Ограничиваясь первым членом этого выражения, получим нужную нам функцию напряжений

$$\varphi = -\frac{k}{2} r^2 \sin \theta \quad (7.24)$$

Кстати следует заметить, что в (7.23) совокупность членов

$$Ar \cos \theta + Br \sin \theta = Ax + By,$$

представляющая собою линейную функцию от координат x и y , согласно (VIII) § 32, не даст никаких напряжений и эти члены вообще всегда можно отбросить.

Предлагаем самому читателю убедиться в том, что функция (7.24) удовлетворяет уравнениям (7.18) — (7.20), а также уравнению неразрывности (IX_{II}) § 38.

Мы доказали, что напряжения (7.15) удовлетворяют всем уравнениям теории упругости; на основании (7.17) они напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} R_r &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}; \\ \Theta_\theta &= 0; \quad R_\theta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

Исследуя их, придём к следующим выводам:

1) площадка в любой точке M (фиг. 69), нормальная к радиусу r , является главной, так как по ней нет касательных напряжений;

2) построим окружность $СМХ$ (фиг. 69), проходящую через данную точку M , и пусть диаметр её $СХ = d$; тогда

$$СМ = СХ \cos \theta;$$

но

$$СМ = r; \quad СХ = d;$$

поэтому

$$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{1}{d};$$

подставляя это в (7.25), найдём

$$R_r = \frac{2P}{\pi d} = \text{const.} \quad (7.26)$$

Значит, во всех точках построенной окружности напряжение R_r одинаково. Отсюда: всякая окружность с центром под грузом P и проходящая через точку его приложения O есть траектория равных напряжений R_r .*

Найдём теперь напряжения в пластинке по горизонтальной площадке на расстоянии x от поверхности. Из условий равновесия элементарной призмы abc (фиг. 70) получим **)

$$X_x = R_r \cos^2 \theta, \quad Y_x = R_r \sin \theta \cos \theta. \quad (7.27)$$

*) Напоминаем, что при этом исключаются точки внутри полуокружности mn .

**) Ср. формулы (1.13) § 4.

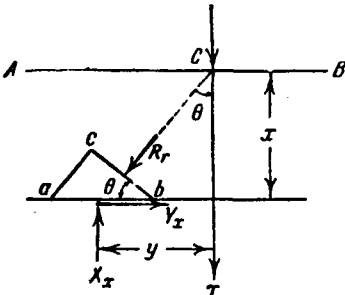
Внося сюда значение R_r из (7.25) и принимая во внимание, что

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (7.28)$$

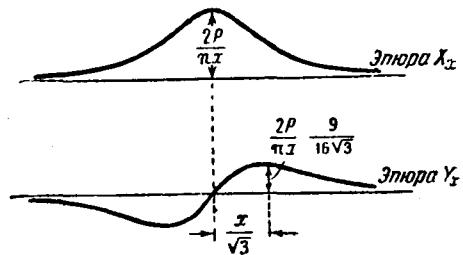
будем иметь

$$X_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad Y_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (7.29)$$

На фиг. 71 показан вид эпюр этих напряжений. В практических расчётах принято действие груза P на заданной глубине x



Фиг. 70.



Фиг. 71.

распределять под некоторым углом; в условиях данной задачи имеем

$$\max X_x = -\frac{P}{\pi x} = -\frac{P}{4,57x}.$$

Значит, для расчёта можно условно принять, что груз P равномерно распределяется на площадку длиной около $1,6x$, что соответствует углу $\theta \approx 38^\circ$ (фиг. 72).

Если имеется несколько грузов, приложенных в различных точках прямой AB (фиг. 70), то мы без труда найдём напряжения (7.27) в любой точке, суммируя действия отдельных грузов. Далее задачу легко распространить на случай любой сплошной нагрузки (фиг. 73). Если интенсивность нагрузки в данной точке равна p , то нагрузка, приходящаяся на бесконечно малый элемент dy прямой AB , будет pdy , но из чертежа видим, что

$$dy = \frac{r d\theta}{\cos \theta}$$

и элементарная нагрузка равна

$$\frac{pr d\theta}{\cos \theta}. \quad (7.30)$$

Эту величину вносим вместо груза в первое из уравнений (7.25) и получаем

$$R_r = -\frac{2p}{\pi} d\theta.$$

Подставляя это значение R_r в уравнения (7.27), получим напряжения, вызываемые одним элементом нагрузки (7.30):

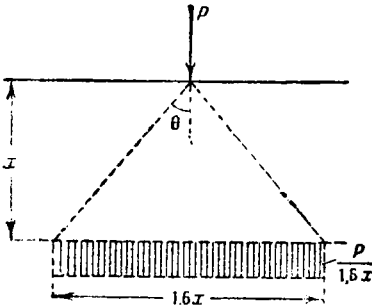
$$X_x = -\frac{2p}{\pi} \cos^3 \theta d\theta;$$

$$X_y = -\frac{2p}{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

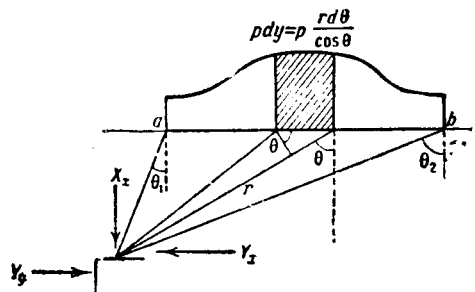
и аналогично

$$Y_y = -\frac{2p}{\pi} \sin^3 \theta d\theta.$$

Значение угла θ ясно из чертежа (фиг. 73). Если нагрузка распространяется от точки a ($\theta = \theta_1$) до b ($\theta = \theta_2$), то, суммируя напря-



Фиг. 72.



Фиг. 73.

жения от отдельных элементов её, получим окончательные выражения напряжений

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \cos^3 \theta d\theta; \\ X_y &= -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \sin \theta \cos \theta d\theta; \\ Y_y &= -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p \sin^3 \theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Здесь нагрузку p следует предварительно выразить в функции угла θ . Если нагрузка равномерная, то p постоянно; вынося его

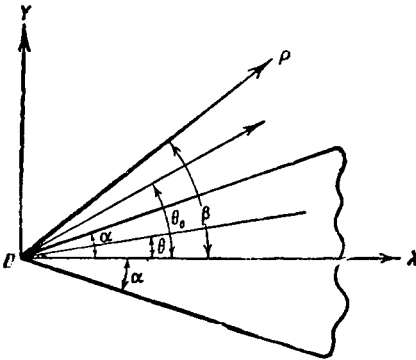
за знаки интегралов в уравнениях (7.31), можем последние легко взять и получим

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{2p}{\pi} [2\theta + \sin 2\theta]_{\theta_1}^{\theta_2}, \\ Y_y &= -\frac{2p}{\pi} [2\theta - \sin 2\theta]_{\theta_1}^{\theta_2}, \\ X_y = Y_x &= -\frac{2p}{\pi} \cos 2\theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Эти формулы можно преобразовать к декартовым координатам x и y , приняв во внимание уравнения (7.23) и прибавив к ним

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad \text{или} \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Задачи о напряжениях в среде, ограниченной плоскостью, в настоящее время приобретают значение в теории оснований и фундаментов для тех видов грунта, которые при не очень больших давлениях сохраняют свойства, близкие к свойствам однородного упругого тела.



Фиг. 74.

§ 41. Клин, нагруженный в вершине.

Решение (7.15) можно применить к более общей задаче, введя в него ещё один произвольный параметр путём замены θ через $(\theta - \theta_0)$, где θ_0 — пока произвольный угол. Тогда получим

$$R_r = -k \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{r} = -k \cos \theta_0 \frac{\cos \theta}{r} - k \sin \theta_0 \frac{\sin \theta}{r}. \quad (7.33)$$

Первый член правой части, как мы уже знаем, удовлетворяет всем основным уравнениям плоской задачи. Второй член также удовлетворит им, так как он получится из первого путём поворота полярной оси на 90° , т. е. заменой θ на $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

Рассмотрим (фиг. 74) клин, к вершине которого приложена сила P произвольного направления. Полярную ось OX направим по оси клина. Постоянные k и θ_0 (7.33) подберём, как и в § 40, из условия, чтобы нормальные усилия

$$R_r \neq d^0$$

по дуге mn любого радиуса ρ были эквивалентны данной силе P . Проектируя все силы на оси OX и OY , получим

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} R_{-r} \rho d\theta \cos \theta = P \cos \beta; \quad \int_{-\alpha}^{+\alpha} R_{-r} \rho d\theta \sin \theta = P \sin \beta.$$

Подставляя сюда значение $R_{-r} = -R_r$ из (7.33), получим такие уравнения для отыскания k и θ_0 :

$$k \cos \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2 \theta d\theta + k \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \theta \cos \theta d\theta = P \cos \beta;$$

$$k \cos \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta \sin \theta d\theta + k \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \theta d\theta = P \sin \beta.$$

Вычисляя входящие сюда интегралы, найдём

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \theta \cos \theta d\theta &= 0; \\ A &= \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2}(2\alpha + \sin 2\alpha); \\ B &= \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

Внося это в предыдущие уравнения, получаем

$$Ak \cos \theta_0 = P \cos \beta; \quad Bk \sin \theta_0 = P \sin \beta.$$

Отсюда без труда найдём, что

$$\left. \begin{aligned} k &= P \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{A^2} + \frac{\sin^2 \beta}{B^2}}, \\ \operatorname{tg} \theta_0 &= \frac{A}{B} \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

Рассматривая формулу (7.33), замечаем, что она имеет тот же вид, как и формула (7.15), но полярный угол в ней ($\theta_0 - \theta$) отсчитывается от некоторого направления θ_0 (фиг. 74), определяемого из второго уравнения (7.35); так как вообще

$$\frac{A}{B} \neq 1,$$

то $\theta_0 \neq \beta$, и это направление в общем случае не совпадает с направлением груза P . Если положим $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то вернёмся

к «полуплоскости», рассмотренной в § 40, но нагруженной наклонной силой (под углом β к нормали к плоскости); тогда из (7.34) и (7.35)

$$A = B = \frac{\pi}{2}; \quad k = \frac{2P}{\pi}; \quad \operatorname{tg} \theta_0 = \operatorname{tg} \beta; \quad \theta_0 = \beta.$$

Значит,

$$B_r = -\frac{2P \cos(\theta - \beta)}{\pi r}, \\ R_\theta = \Theta_\theta = 0.$$

Здесь $(\theta - \beta)$ есть (фиг. 74) полярный угол, отсчитываемый от направления груза P . Таким образом, решение (7.25) непосредственно пригодно для случая, когда груз P (фиг. 69) приложен не нормально к плоскости AB , а под любым углом; следует лишь помнить, что полярный угол θ всегда отсчитывается от направления груза P . Следовательно, это решение можно применить к случаю груза, приложенного по направлению AB ; аналогично предыдущему решению (§ 40) можно решить задачу о сплошной тангенциальной нагрузке по плоскости AB . Комбинируя случаи нормальной и тангенциальной нагрузок, можем решать задачу о любой наклонной сплошной нагрузке *).

В качестве примеров на расчёт клина возьмём два случая: сжатие клина (фиг. 75, а) и изгиб клина силой, приложенной на конце (фиг. 75, б).

В первом случае

$$\beta = 0$$

и из уравнений (7.34) и (7.35) имеем

$$\theta_0 = 0; \quad k = \frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha};$$

Эти значения k и θ_0 надо внести в уравнение (7.33).

Аналогично (7.27) можно найти напряжения по сечению клина mn (фиг. 75, а) на глубине x_0 ; нормальное напряжение

$$X_x = -\frac{kx_0^2}{(x_0^2 + y^2)^2}.$$

Если через ω (фиг. 75, а) обозначим угол наклона радиуса вектора точки (x_0, y) в сечении mn , то предыдущую формулу можно

*) Следует отметить несколько иной и весьма интересный способ решения подобных задач, найденный проф. Н. М. Герсевановым на основании общего интеграла уравнений плоской задачи, выраженного им в функциях комплексной переменной (см. «Труды МИИТ», Москва, 1932).

написать так:

$$X_x = -\frac{k}{x_0} \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 \omega)^2}, \quad (7.36)$$

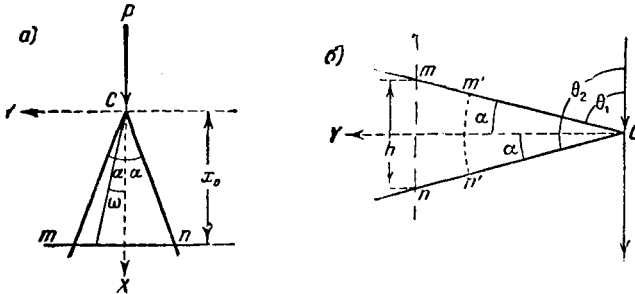
где

$$-\alpha \leq \omega \leq \alpha.$$

В случае острого клина (угол α мал) напряжение X_x мало отклоняется от величины

$$X_x = -\frac{k}{x_0} = -\frac{2P}{(2\alpha + \sin 2\alpha)x_0},$$

т. е. распределение напряжений по сечению mn почти равномерно. Если же клин тупой (угол α не мал), то напряжения



Фиг. 75.

распределены весьма неравномерно; например, при $\alpha = 45^\circ$, X_x меняется в пределах от

$$-\frac{k}{x_0} \quad \text{до} \quad -\frac{k}{4x_0}.$$

В случае изгиба (фиг. 75, б) имеем

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

и из уравнений (7.34) и (7.35)

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}; \quad k = \frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Из (7.33) имеем

$$R_r = -k \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{r} = -k \frac{\sin \theta}{r}.$$

Но $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ есть полярный угол, отсчитываемый от направления груза; значит, и в этом случае остаётся в силе решение (7.15), где k имеет найденное сейчас значение. Напряжения по

сечению mn , как и выше, найдём аналогично (7.27), пользуясь уравнениями (7.15), но помня, что угол θ_1 , согласно сказанному сейчас, следует отсчитывать от направления груза, как это показано на фиг. 75, б. Напряжения по поперечному сечению mn в этом случае выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} Y_v &= -\frac{2Mx \sin^4 \theta}{(2x - \sin 2\alpha) y^3}, \\ X_v &= -\frac{2Px^2 \sin^4 \theta}{(2x - \sin 2\alpha) y^3}, \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

где $M = Py$ — величина изгибающего момента в сечении.

Если угол клина 2α мал, то, разлагая $\sin 2\alpha$ в ряд, получим приближённо

$$2\alpha - \sin 2\alpha = \frac{(2\alpha)^3}{6}.$$

При этом после некоторых преобразований формулы напряжений могут быть представлены так:

$$\left. \begin{aligned} Y_v &= -\frac{Mx}{J} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}\right)^3 \sin^4 \theta, \\ X_v &= -\frac{12Px^2}{h^3} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}\right)^3 \sin^4 \theta, \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

где h — высота сечения mn ; J — его момент инерции. При малом α величина $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$ близка к единице; кроме того, так как

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

то при малом α угол θ близок всюду к $\frac{\pi}{2}$ и $\sin \theta \cong 1$. Поэтому легко усмотреть, что величина нормального напряжения Y_v в уравнении (7.38) близка к тому, что нам даёт элементарное решение. Распределение касательных напряжений существенно отличается от элементарного результата по формуле

$$X_v = \frac{QS}{Jb};$$

из уравнений (7.38) видно, что они обращаются в нуль на оси клина (при $x = 0$) и достигают наибольшей величины на краях сечения. Однако, если вместо плоского сечения mn сделаем сечение бруса цилиндрической поверхностью, показанной на чертеже дугой $m'n'$ с центром в C , то, очевидно, в этом сечении касательных напряжений вообще нет.

* § 42. Общее решение плоской задачи в полярных координатах.

Будем искать частные решения основного дифференциального уравнения (VIII_п) плоской задачи, пользуясь методом разделения переменных, применённым в § 37 к уравнению (IX):

$$\nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = 0, \quad (7.39)$$

где для полярных координат

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad (7.40)$$

будем искать решения его в форме

$$\varphi = rR\Theta, \quad (7.41)$$

где R — функция от одной переменной r , а Θ — функция от одной переменной θ . Множитель r в (7.41) введён для удобства дальнейших выкладок.

Для подстановки в (7.40) и (7.39) вычисляем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left(\frac{R}{r} + R' \right) \Theta;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = (2R' + rR'') \Theta;$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} R \Theta''.$$

Складывая эти равенства почленно, получим

$$\nabla^2 \varphi = \frac{R}{r} \Theta'' + \left(rR'' + 3R' + \frac{R}{r} \right) \Theta, \quad (7.42)$$

или

$$\nabla^2 \varphi = \psi_1 + \psi_2,$$

где

$$\psi_1 = r \frac{R}{r^2} \Theta''; \quad (7.43A)$$

$$\psi_2 = r \left(R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right) \Theta. \quad (7.43B)$$

Значит,

$$\nabla^2 (\nabla^2 \varphi) = \nabla^2 \psi_1 + \nabla^2 \psi_2. \quad (7.44)$$

Но выражения ψ_1 и ψ_2 имеют такую же структуру, как и φ в (7.41); поэтому мы вычислим

$$\nabla^2 \psi_1 \text{ и } \nabla^2 \psi_2$$

по прежней формуле (7.42), если в ней: при вычислении $\nabla^2 \psi_1$ заменим R на $\frac{R}{r^2}$ и Θ на Θ'' , а при вычислении $\nabla^2 \psi_2$ заменим R на $R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2}$ и Θ оставим без замены.

Таким путём получим

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_1 &= \frac{R}{r^3} \Theta^{IV} + \left[r \left(\frac{R}{r^3} \right)' + 3 \left(\frac{R}{r^3} \right)'' + \frac{R}{r^3} \right] \Theta''; \\ \nabla^2 \psi_2 &= \left(\frac{R''}{r} + 3 \frac{R'}{r^2} + \frac{R}{r^3} \right) \Theta'' + \left[r \left(R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right)' + \right. \\ &\quad \left. + 3 \left(R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right)'' + \frac{1}{r} \left(R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right) \right] \Theta. \end{aligned}$$

Остаётся выполнить дифференцирование выражений

$$\frac{R}{r^3} \text{ и } \left(R'' + 3 \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2} \right),$$

показанное штрихами в квадратных скобках, и результаты подставить в (7.44). Сделав эти выкладки, напомним уравнение (7.39) в следующем виде (умножив обе части его на r^3):

$$R\Theta^{IV} + 2A\Theta'' + B\Theta = 0, \quad (7.45)$$

где введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A &= R''r^3 + R'r + R, \\ B &= R^{IV}r^4 + 6R''r^3 + 5R'r^2 - R'r + R. \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

В уравнении (7.45) переменные легко разделяются; деля обе части его на R , найдём

$$\Theta^{IV} + 2 \frac{A}{R} \Theta'' + \frac{B}{R} \Theta = 0, \quad (7.47)$$

а дифференцируя частным образом по r , получим

$$2 \left(\frac{A}{R} \right)' \Theta'' + \left(\frac{B}{R} \right)' \Theta = 0. \quad (7.48)$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\left(\frac{A}{R} \right)' \neq 0. \quad (7.49)$$

В этом случае, деля обе части (7.48) на $2 \left(\frac{A}{R} \right)' \Theta$, получим

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = - \frac{\left(\frac{B}{R} \right)'}{2 \left(\frac{A}{R} \right)'} = -m^2;$$

здесь m — постоянное число. Переменные разделены:

$$\Theta'' + m^2 \Theta = 0; \quad (7.50)$$

$$\left(\frac{B}{R} \right)' - 2m^2 \left(\frac{A}{R} \right)' = 0. \quad (7.50A)$$

Общее решение (7.50) известно:

$$\Theta = D_{m_1} \cos m\theta + D_{m_2} \sin m\theta. \quad (7.51)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \Theta'' &= -m^2\Theta; \\ \Theta^{IV} &= -m^2\Theta'' = m^4\Theta. \end{aligned}$$

Подставляя это в (7.45), имеем

$$Rm^4 - 2Am^3 + B = 0,$$

или, раскрывая это при помощи (7.46), получим

$$\begin{aligned} R^{IV}r^4 + 6R''r^3 + (5 - 2m^2)R^2r^2 - \\ - (1 + 2m^2)R'r + (1 - m^2)^2R = 0. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Решения уравнения (7.52) ищем в форме

$$R = r^n. \quad (7.53)$$

Внося это в (7.52) и сокращая его на r^n , получим после упрощений следующее характеристическое уравнение:

$$n^4 - 2(m^2 + 1)n^2 + (m^2 - 1)^2 = 0.$$

Четыре корня его будут

$$\begin{aligned} n_1 = m + 1; \quad n_2 = m - 1; \quad n_3 = -m + 1; \\ n_4 = -m - 1. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Будем давать m целые положительные значения; если при этом $m \neq 0$ и $m \neq 1$, то среди корней (7.54) нет кратных, и мы получим из (7.53) четыре линейно независимых частных решения уравнения (7.52); тогда при $m = 2, 3, 4, \dots$ получим следующее общее решение этого уравнения

$$R = C_{m_1}r^{m+1} + C_{m_2}r^{m-1} + C_{m_3}r^{-m+1} + C_{m_4}r^{-m-1},$$

где C_{mk} — произвольные постоянные. Внося это и (7.51) в (7.41) и суммируя по m , получим

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_{m=2}^n (C_{m_1}r^{m+2} + C_{m_2}r^m + C_{m_3}r^{-m+2} + \\ + C_{m_4}r^{-m}) (D_{m_1} \cos m\theta + D_{m_2} \sin m\theta). \end{aligned} \quad (7.55)$$

Рассмотрим теперь случаи, когда 1) $m = 0$, 2) $m = 1$. В первом случае уравнение (7.50) заменяется таким: $\Theta'' = 0$, откуда

$$\Theta = D_{0_1}\theta + D_{0_2}.$$

Корни (7.54) будут кратными: $n_1 = n_3 = 1$; $n_2 = n_4 = -1$; они дадут четыре независимых решения уравнения (7.52):

$$r; \quad r \ln r; \quad \frac{1}{r}; \quad \frac{1}{r} \ln r.$$

Общим решением его будет

$$R = C_{01}r + C_{02}r \ln r + C_{03}\frac{1}{r} + C_{04}\frac{1}{r} \ln r.$$

Согласно (7.41) функция φ будет

$$\varphi_0 = (C_{01}r^2 + C_{02}r^2 \ln r + C_{03} + C_{04} \ln r)(D_{01}\theta + D_{02}). \quad (7.53)$$

Во втором случае ($m=1$) общее решение (7.51) уравнения (7.50) имеет вид

$$\Theta = D_{11} \cos \theta + D_{12} \sin \theta,$$

и корни (7.54) переходят в такие: $n_1 = 2$; $n_4 = -2$; $n_2 = n_3 = 0$. Им соответствуют четыре независимых решения уравнения (7.52):

$$r^2; \quad \frac{1}{r^2}; \quad 1; \quad \ln r.$$

Общее решение уравнения (7.52) тогда будет таким:

$$R = C_{11}r^2 + C_{12}\frac{1}{r^2} + C_{13} + C_{14} \ln r.$$

Функция φ_1 согласно (7.41) будет

$$\varphi_1 = \left(C_{11}r^2 + C_{12}\frac{1}{r^2} + C_{13}r + C_{14}r \ln r \right) (D_{11} \cos \theta + D_{12} \sin \theta). \quad (7.57)$$

Однако, здесь можно положить $C_{13} = 0$, ибо $r \cos \theta = x$, $r \sin \theta = y$; следовательно, получается функция первой степени в декартовых координатах.

Таким образом, если согласно (7.49)

$$\left(\frac{A}{R} \right)' \neq 0,$$

то это приводит к трём типам решения: (7.55), (7.56), (7.57).

Обратимся теперь к случаю

$$\left(\frac{A}{R} \right)' = 0 \quad \text{или} \quad A = c_1 R, \quad (7.58)$$

где c_1 — произвольная постоянная. При этом уравнение (7.48) принимает вид

$$\left(\frac{B}{R} \right)' \Theta = 0,$$

откуда или $\left(\frac{B}{R}\right)' = 0$, т. е.

$$B = c_2 R; \quad (7.59)$$

или $\Theta = 0$; но этот тривиальный случай интереса не представляет, и мы его отбросим, так как он согласно (7.41) приводит к решению

$$\varphi \equiv 0.$$

На основании (7.58) и (7.59) основное уравнение (7.45) приводится к виду

$$\Theta^{IV} + 2c_1 \Theta'' + c_2 \Theta = 0. \quad (7.60)$$

Сюда добавляем (7.58) и (7.59):

$$A - c_1 R = 0; \quad B - c_2 R = 0,$$

а раскрыв их с помощью (7.46), получаем

$$\left. \begin{aligned} R''r^2 + R'r + (1 - c_1)R &= 0; \\ R^{IV}r^4 + 6R'''r^3 + 5R''r^2 - R'r + (1 - c_2)R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

Здесь c_1 и c_2 должны быть подобраны так, чтобы уравнения (7.61) имели решения общие для них обоих, и в дальнейшем можно пользоваться, конечно, только этими общими решениями; будем искать их в форме

$$R = r^m. \quad (7.62)$$

Подставляя это в (7.61), получим два характеристических уравнения:

$$m^2 + 1 = c_1; \quad (m^2 - 1)^2 = c_2.$$

Внося эти значения c_1 и c_2 в (7.60) и (7.61), приведём их к виду

$$\Theta^{IV} + 2(m^2 + 1)\Theta'' + (m^2 - 1)^2\Theta = 0. \quad (7.63)$$

$$\left. \begin{aligned} R''r^2 + R'r - m^2R &= 0; \\ R^{IV}r^4 + 6R'''r^3 + 5R''r^2 - R'r + [1 - (m^2 - 1)^2]R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.64)$$

Решения

$$r^m \text{ и } r^{-m} \quad (7.65)$$

будут удовлетворять обоим уравнениям (7.64) (так как последние не меняются при замене m на $-m$). Решение уравнения (7.63) ищем в форме $\Theta = e^{kj}$. Характеристическое уравнение будет

$$k^4 + 2(m^2 + 1)k^2 + (m^2 - 1)^2 = 0,$$

откуда

$$k^2 = -(m^2 + 1) \pm 2m = -(m \pm 1)^2 = (m \pm 1)^2 i^2,$$

т. е.

$$k = \pm (m \pm 1) i. \quad (7.66)$$

Если

$$m \neq 0; \quad m \neq 1, \quad (7.67)$$

то (7.66) даёт четыре различных корня и (7.63) имеет четыре частных решения вида

$$\cos(m+1)\theta; \quad \sin(m+1)\theta; \quad \cos(m-1)\theta; \quad \sin(m-1)\theta. \quad (7.68)$$

Комбинируя их с (7.65), заметим, что при этом получим согласно (7.41) значения функции φ , совпадающие с теми, из которых составлено уже полученное ранее решение (7.55); значит, в случае (7.67) наше исследование не даст новых решений.

Остаётся исследовать случаи: 1) $m = 0$, 2) $m = 1$. При рассмотрении этих случаев будем для большей наглядности повторно искать решения уравнений (7.64) в форме

$$R = r^n.$$

Получим такие характеристические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} n^2 &= m^2; \\ (n^2 - 1)^2 &= (m^2 - 1)^2; \end{aligned} \right\} \quad (7.69)$$

они имеют совместное решение: $n_1 = m$; $n_2 = -m$. При $m = 0$, $n_1 = n_2 = 0$ имеем два частных решения:

$$r^0 = 1; \quad r^0 \ln r = \ln r.$$

Следовательно,

$$R = \bar{C}_{01} + \bar{C}_{02} \ln r. \quad (7.70)$$

Уравнение (7.63) напишется так:

$$\theta^{IV} + 2\theta'' + \theta = 0.$$

Характеристическое уравнение его $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ имеет два двукратных корня: $k_1 = i$; $k_2 = -i$, дающих четыре частных решения:

$$\cos \theta; \quad \sin \theta; \quad \theta \cos \theta; \quad \theta \sin \theta. \quad (7.71)$$

Пользуясь (7.70) и (7.71), строим функцию напряжений

$$\varphi = (\bar{D}_{01} \cos \theta + \bar{D}_{02} \sin \theta + \bar{D}_{03} \theta \cos \theta + \bar{D}_{04} \theta \sin \theta) (\bar{C}_{01} r + \bar{C}_{02} r \ln r).$$

По сравнению с (7.57) здесь обнаруживаются новые решения:

$$\bar{\varphi}_0 = (\bar{C}_{01} r + \bar{C}_{02} r \ln r) (\bar{D}_{03} \theta \cos \theta + \bar{D}_{04} \theta \sin \theta). \quad (7.72)$$

Перейдём ко второму случаю $m=1$. Уравнение (7.69) имеет корни $n_1=1$, $n_2=-1$, дающие два решения:

$$r, \frac{1}{r}. \quad (7.73)$$

Уравнение (7.63) напишется так:

$$\Theta^{IV} + 4\Theta'' = 0.$$

Общим его решением будет

$$\Theta = \bar{D}_{11} \cos 2\theta + \bar{D}_{13} \sin 2\theta + \bar{D}_{13} \theta + \bar{D}_{14}. \quad (7.74)$$

Выражения (7.73) и (7.74) дают такую функцию напряжений:

$$\varphi = (\bar{C}_{11} r^2 + \bar{C}_{13}) (\bar{D}_{11} \cos 2\theta + \bar{D}_{13} \sin 2\theta + \bar{D}_{13} \theta + \bar{D}_{14}).$$

Сравнивая это с (7.55) и (7.56), заметим, что новых решений мы здесь не получим.

Подводя итог проделанному интегрированию основного дифференциального уравнения плоской задачи (7.39), получаем окончательное значение функции напряжений как сумму решений (7.55), (7.56), (7.57), (7.72). Очевидно, что в формуле (7.55) и остальных перечисленных можно, не уменьшая общности, положить все коэффициенты D равными единице; каждый член суммы (7.55) можно заменить двумя, собирая коэффициенты при $\cos m\theta$ и $\sin m\theta$; при этом постоянные C_{mk} ($k=1, 2, 3, 4$) можно взять различными в обоих случаях; то же можно сказать и о формулах (7.56), (7.57) и (7.72).

Таким путём получим

$$\varphi = {}_1\varphi_0 + {}_2\varphi_0 + {}_1\varphi_1 + {}_2\varphi_1 + {}_1\bar{\varphi}_0 + {}_2\bar{\varphi}_0 + {}_1\varphi_m + {}_2\varphi_m, \quad (7.75)$$

где

$$\left. \begin{aligned} {}_1\varphi_0 &= C_{01} r^2 + C_{02} r^2 \ln r + C_{03} + C_{04} \ln r; \\ {}_2\varphi_0 &= (C'_{01} r^2 + C'_{02} r^2 \ln r + C'_{03} + C'_{04} \ln r) \theta; \\ {}_1\varphi_1 &= \left(C_{11} r^2 + C_{12} \frac{1}{r} + C_{13} r + C_{14} r \ln r \right) \cos \theta; \\ {}_2\varphi_1 &= \left(C'_{11} r^2 + C'_{12} \frac{1}{r} + C'_{13} r + C'_{14} r \ln r \right) \sin \theta; \\ {}_1\bar{\varphi}_0 &= (\bar{C}_{01} r + \bar{C}_{03} r \ln r) \theta \cos \theta; \\ {}_2\bar{\varphi}_0 &= (\bar{C}_{01} r + \bar{C}_{03} r \ln r) \theta \sin \theta; \\ {}_1\varphi_m &= \sum_{m=2}^n (C_{m1} r^{m+2} + C_{m2} r^m + C_{m3} r^{-m+2} + C_{m4} r^{-m}) \cos m\theta; \\ {}_2\varphi_m &= \sum_{m=2}^n (C'_{m1} r^{m+2} + C'_{m2} r^m + C'_{m3} r^{-m+2} + C'_{m4} r^{-m}) \sin m\theta. \end{aligned} \right\} (7.76)$$

Здесь можно положить $C_{03} = C_{13} = C'_{13} = 0$, так как выражения функции φ , соответствующие этим постоянным, не дают напряжений. Выражение функции (7.75) было найдено Мичеллом, за исключением членов

$$\left. \begin{aligned} C'_{02} r^2 \ln r \cdot \theta, \quad C'_{04} \ln r \cdot \theta, \quad \bar{C}_{02} r \ln r \cdot \theta \cos \theta, \\ C_{02} r \ln r \cdot \theta \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (7.77)$$

не вошедших в данное им выражение *).

Соответственные этим членам компоненты напряжённого состояния в полярных координатах будут:

$$\left. \begin{aligned} \text{Для } \varphi = C'_{04} \ln r \theta \\ R_r = C'_{04} \frac{A\theta}{r^2}, \\ \Theta_\theta = -C'_{04} \frac{\theta}{r^2}, \\ R_\theta = C'_{04} \frac{\ln r - 1}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \text{Для } \varphi = C'_{02} r^2 \ln r \theta \\ R_r = C'_{02} (2 \ln r + 1) \theta, \\ \Theta_\theta = C'_{02} (2 \ln r + 3) \theta, \\ R_\theta = -C'_{02} (\ln r + 1). \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Для } \varphi = C_{02} r \ln r \cdot \theta \sin \theta \\ R_r = C_{02} \left(\frac{2 \ln r}{r} \cos \theta + \frac{1}{r} \theta \sin \theta \right), \\ \Theta_\theta = C_{02} \frac{1}{r} \theta \sin \theta, \\ R_\theta = -C_{02} \left(\frac{1}{r} \sin \theta + \frac{1}{r} \theta \cos \theta \right). \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Для } \varphi = \bar{C}_{02} r \ln r \theta \cos \theta \\ R_r = C_{02} \left(\frac{1}{r} \theta \cos \theta - \frac{2 \ln r}{r} \sin \theta \right), \\ \Theta_\theta = \bar{C}_{02} \frac{1}{r} \theta \cos \theta, \\ R_\theta = -\bar{C}_{02} \left(\frac{1}{r} \cos \theta - \frac{1}{r} \theta \sin \theta \right). \end{aligned} \right\}$$

Если полюс полярной системы координат лежит внутри исследуемого тела, то все эти функции оказываются многозначными и ими пользоваться нельзя; однако, в односвязной области эти компоненты однозначны, если полюс координатной системы помещён вне упругого тела или на границе его.

* Наименее полный перечень частных решений уравнения (7.39), содержащий как эти решения, так и ещё два вида $\cos(m \ln r) \cos m\theta$; $r^2 \cos(m \ln r) \cos m\theta$ имеется в книге С. В. Biezeno und R. Grammel «Technische Dynamik», Berlin, 1939.

Из решения (7.75) в настоящей главе были использованы лишь некоторые начальные члены. Действительно, в обеих задачах § 39 решение основано на функции [ср. формулы (7.10)]

$${}_1\bar{\varphi}_0 = C_{01} r^2 + C_{02} r^2 \ln r + C_{04} \ln r.$$

В задачах §§ 40 и 41 использованы частично функции ${}_1\bar{\varphi}_0$ и ${}_2\bar{\varphi}_0$ [ср. формулы (7.24)]. Остальные члены функции (7.75) позволяют решать много важных задач, относящихся к расчёту клина и замкнутого кольца*). Соответственные решению (7.76) напряжения найдутся по формулам (VII_п).

*) См. С. П. Тимошенко, Теория упругости, 1934 г. и П. Ф. Панкович, Теория упругости, 1939 г.

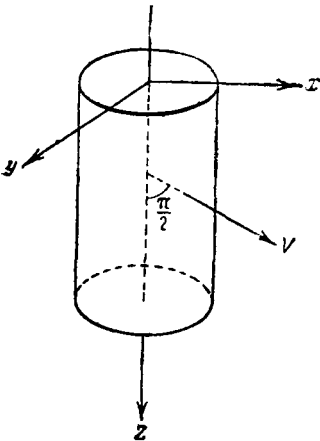
ГЛАВА VIII.

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ И ИЗГИБ.

§ 43. Кручение призматических стержней.

Рассмотрим задачу о кручении призматического или цилиндрического стержня (с поперечным сечением произвольной формы) парами сил, лежащими в плоскостях его крайних сечений. Влиянием собственного веса стержня пренебрегаем, т. е. принимаем в уравнениях (VI) (§ 18) $X = Y = Z = 0$.

Будем решать задачу в перемещениях (§ 18) и воспользуемся полуобратным методом Сен-Венана, т. е. зададим часть перемещений, а остальные найдём из уравнений Ламе (VI) и из условий на поверхности (II) или (VIa).



Фиг. 76.

Оси координат возьмём согласно фиг. 76 и, следуя Сен-Венану, предположим, что перемещения u и v имеют такие же значения, как и в случае стержня круглого поперечного сечения [формулы (5.23) § 25]:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\tau yz, \\ v &= \tau xz. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

От предположения $w = 0$, имевшего место для круглого сечения, придётся отказаться, так как этим мы введём гипотезу о том, что плоские поперечные сечения стержня остаются при кручении плоскими; между тем такая гипотеза в общем случае произвольного поперечного сечения не может иметь места*); в соответствии с этим положим, что

$$w = \tau\varphi(x, y), \quad (8.2)$$

где функция φ изображает форму искривлённой поверхности поперечного сечения; её называют *функцией кручения*. Она при-

*) Это будет доказано в конце настоящего параграфа.

нята не зависящей от z , т. е. предположено, что все поперечные сечения искривляются одинаково.

Необходимо прежде всего проверить, удовлетворяют ли предположения (8.1) и (8.2) уравнениям Ламе (VI), и определить функцию φ так, чтобы были удовлетворены условия на поверхности стержня, соответствующие поставленной задаче о кручении его. Для подстановки в уравнения (VI) вычисляем, пользуясь (8.1) и (8.2):

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (8.3)$$

$$\nabla^2 u = 0; \quad \nabla^2 v = 0; \quad \nabla^2 w = \tau \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right).$$

При этом первые два из уравнений (VI) удовлетворяются тождественно, а последнее получает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (8.4)$$

Это есть уравнение Лапласа на плоскости; следовательно, $\varphi(x, y)$ должна быть гармонической функцией. Для разыскания её необходимо к (8.4) присоединить условия на поверхности (II):

$$\left. \begin{aligned} X_v &= X_x \cos(VX) + X_y \cos(VY) + X_z \cos(VZ), \\ Y_v &= Y_x \cos(VX) + Y_y \cos(VY) + Y_z \cos(VZ), \\ Z_v &= Z_x \cos(VX) + Z_y \cos(VY) + Z_z \cos(VZ). \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Пользуясь (8.1), (8.2), (8.3), уравнениями Коши (III) и законом Гука (V'), вычисляем компоненты тензора напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ Y_y &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ Z_z &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{aligned} \right\} X_y = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (8.6)$$

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \mu\tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \\ Y_z &= \mu\tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Значит, при наших предположениях (8.1) и (8.2) в поперечных сечениях действуют только касательные напряжения и притом одинаково распределённые во всех сечениях.

Рассмотрим граничные условия (8.5), применяя их сначала к боковой цилиндрической поверхности стержня, которая по условиям задачи свободна от напряжений, т. е. $X_v = Y_v = Z_v = 0$. На этой поверхности (фиг. 76) $\cos(VZ) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Учтя ещё (8.), заметим, что первые два из условий (8.5) будут удовлетворены тождественно, а третье примет вид

$$X_z \cos(VX) + Y_z \cos(VY) = 0.$$

Смысл этого условия весьма прост: если через t обозначим полное касательное напряжение в данной точке, то

$$X_z = t \cos(tX); \quad Y_z = t \cos(tY),$$

и тогда из предыдущего равенства получим

$$t [\cos(tX) \cos(VX) + \cos(tY) \cos(VY)] = 0$$

или проще

$$t \cos(tV) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \cos(tV) = 0.$$

Значит, касательное напряжение в точке u контура сечения направлено параллельно касательной к контуру сечения в этой точке; такое условие непосредственно вытекает из закона взаимности касательных напряжений, имея в виду, что боковая поверхность стержня свободна от усилий.

Выразим теперь условие на контуре сечения через функцию кручения φ при помощи (8.7). По умножении его на дифференциал дуги контура ds^* получим

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \cos(VX) ds + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \cos(VY) ds = 0. \quad (8.8)$$

Но из фиг. 77 имеем

$$ds \cos(VX) = dy; \quad ds \cos(VY) = -dx,$$

и потому из (8.8)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) dy - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) dx = 0,$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = x dx + y dy. \quad (8.9)$$

*) Считаем, что дуга возрастает, т. е. $ds > 0$ при движении влево, помеченном стрелкой на фиг. 77.

Это и есть граничное условие (условие на контуре сечения), которое необходимо присоединить к (8.4) для нахождения гармонической функции $\varphi(x, y)$.

Условие на контуре поперечного сечения (8.8) можно представить в другой форме; напишем его так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(VX) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(VY) = y \cos(VX) - x \cos(VY).$$

Левая часть представляет собою производную функции φ по нормали к контуру [ср. вывод условия (VIa) в § 18]. Для преобразования правой части заметим, что из фиг. 77

$$\cos(VX) = \cos(TY); \quad \cos(VY) = -\cos(TX),$$

где T — касательная к контуру сечения; далее,

$$\begin{aligned} x &= r \cos(rX), \\ y &= r \cos(rY), \end{aligned}$$

где r — радиус-вектор точки M контура.

Поэтому

$$\begin{aligned} y \cos(VX) - x \cos(VY) &= \\ &= r [\cos(rX) \cos(TX) + \cos(rY) \cos(TY)] = r \cos(rT) = \overline{MN}, \end{aligned}$$

где \overline{MN} (фиг. 77) — проекция радиуса-вектора r на касательную T . На этом основании условие на контуре сечения (8.8) получает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial V} = r \cos(rT). \quad (8.10)$$

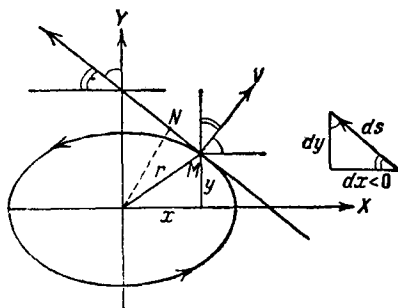
Этим условием определяется значение производной по нормали

$$\frac{\partial \varphi}{\partial V}$$

в каждой точке контура; таким образом, задача о разыскании функции кручения $\varphi(x, y)$ сводится к классической задаче Неймана об определении гармонической функции по заданным на контуре значениям нормальной её производной.

Решение задачи о кручении примет изящную форму и откроет новые возможности, если в дополнение к гармонической функции $\varphi(x, y)$ введём другую, сопряжённую с ней гармоническую функцию $\psi(x, y)$, так что эти две функции удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$



Фиг. 77.

Внося это в условие на контуре сечения (8.9), получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = x dx + y dy,$$

или

$$d\psi = d \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Интегрируя, получим

$$\psi(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C, \quad (8.12)$$

где C — произвольная постоянная.

Очевидно — (8.12) есть уравнение того контура поперечного сечения, при котором получаются перемещения (8.1) и (8.2), т. е.

$$u = -\tau yz; \quad v = \tau xz; \quad w = \tau \varphi(x, y).$$

Можно сказать, что уравнение (8.12) задаёт значения функции $\psi(x, y)$ на контуре сечения

$$\psi = \frac{r^2}{2} + C, \quad (8.13)$$

где попрежнему r — радиус-вектор точки контура. Значит, для функции $\psi(x, y)$ ставится другая классическая задача, именно задача Дирихле: найти гармоническую функцию по заданным значениям этой функции на контуре сечения.

Теперь необходимо показать, что найденное решение действительно соответствует чистому кручению стержня. Уже доказано, что боковая цилиндрическая поверхность стержня свободна от напряжений. Силы, приложенные в поперечных сечениях, дают лишь касательные напряжения (8.7); остаётся показать, что эти силы приводятся к паре, т. е. не дают равнодействующей, или, другими словами, что главный вектор их равен нулю.

Если в (8.7) функцию φ заменим сопряжённой с ней функцией ψ согласно условиям Коши-Римана (8.11), то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \mu\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right), \\ Y_z &= -\mu\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Введём новую функцию

$$\Phi(x, y) = \mu\tau \left(\psi - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \quad (8.15)$$

и заметим, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \mu \tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu \tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right);$$

тогда из (8.14) получим следующие простые формулы для касательных напряжений в поперечном сечении:

$$X_z = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad Y_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad (8.16)$$

Функция Φ предложена Прандтлем и, по аналогии с функцией Эри в плоской задаче, называется функцией напряжений. Важно отметить, что согласно (8.12) эта функция во всех точках контура сохраняет постоянное, хотя и произвольное значение

$$\Phi = C \mu \tau; \quad (8.17)$$

Подсчитаем проекцию главного вектора касательных сил в поперечном сечении на ось Ox :

$$\begin{aligned} X_T &= \int_{(F)} X_z dF = \int_{(F)} \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} dx [\Phi(y_1) - \Phi(y_0)] = 0, \end{aligned}$$

так как $\Phi(y_1)$ и $\Phi(y_0)$ — значения функции напряжений в двух точках контура — одинаковые согласно (8.17). Совершенно так же можно показать, что другая проекция Y_T главного вектора обращается в нуль. Этим доказано, что решение задачи, предложенное выше, соответствует чистому кручению стержня.

Для завершения решения задачи следует выразить крутящий момент M_κ через касательные силы в сечении. Получим

$$M_\kappa = \int_{(F)} (Y_z x - X_z y) dF = - \int_{(F)} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dF - \int y \frac{\partial \Phi}{\partial y} dF. \quad (8.18)$$

Вычислим первый из интегралов правой части

$$\int_{(F)} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dF = \int_{(F)} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx.$$

Применяя к внутреннему интегралу интегрирование по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx &= \int_{y_0}^{y_1} dy \left[x \Phi \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \Phi dx \right] = \\ &= \int dy \left[x_1 \Phi(x_1, y) - x_0 \Phi(x_0, y) - \int_{x_0}^{x_1} \Phi dx \right]. \quad (8.19) \end{aligned}$$

Но

$$\Phi(x_1, y) \text{ и } \Phi(x_0, y)$$

являются значениями функции Φ на контуре сечения, определяемыми формулой (8.17); значение постоянной C не отразится на величине крутящего момента (8.18), так как эта величина не изменится, если Φ заменим на $\Phi + C_1$, где C_1 также произвольная постоянная. Если поперечное сечение односвязное, т. е. ограничено одним замкнутым контуром, то можно для простоты в (8.17) положить $C = 0$; тогда

$$\Phi(x_1, y) = \Phi(x_0, y) = 0$$

и (8.19) даёт

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = - \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \Phi dx = - \iint_{(F)} \Phi dF.$$

Проведя такие же рассуждения в отношении второго интеграла правой части (8.18), найдём для него то же значение. Таким образом, окончательно

$$M_k = +2 \iint_{(F)} \Phi dF, \quad (8.20)$$

или

$$M_k = +2\mu\tau \iint_{(F)} \left(\psi - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dF. \quad (8.21)$$

Если крутящий момент задан, то отсюда можно определить единственный угол кручения τ :

$$\tau = \frac{M_k}{\mu K}, \quad (8.22)$$

где

$$K = \iint_{(F)} (2\psi - x^2 - y^2) dF \quad (8.23)$$

зависит от размеров и формы контура сечения и представляет собою геометрическую характеристику сечения. Величина μK есть жёсткость стержня на кручение.

Из проделанного решения можно сделать важный вывод о пределах применимости теории кручения, данной Кулоном и основанной на предположении, что плоские поперечные сечения стержня остаются плоскими. Действительно, в этом случае

$$\omega = \text{const.} \quad \text{и} \quad \varphi(x, y) = \text{const.}$$

Тогда из (8.11) найдём

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0;$$

значит,

$$\psi(x, y) = \text{const.} = C.$$

Подставляя это в уравнение контура сечения (8.12), получим

$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

Следовательно, поперечное сечение есть круг. Ко всяким другим сечениям теория Кулона неприменима, и поперечные сечения при кручении будут искривляться.

§ 44. Метод Сен-Венана. Частные случаи.

Связь, устанавливаемая уравнениями (8.11) между функцией кручения $\varphi(x, y)$ и функцией $\psi(x, y)$, определяющей согласно (8.12) контур соответствующего поперечного сечения, позволила Сен-Венану предложить следующий изящный приём решения ряда частных задач.

Возьмём какую-либо аналитическую функцию $f(z)$ комплексной переменной

$$z = x + iy$$

и отделим в ней действительную и мнимую часть:

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y);$$

функции U и V будут гармоническими, и притом они удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dV}{dy}; \quad \frac{dU}{dy} = -\frac{dV}{dx}.$$

Положим поэтому $\varphi = U$; $\psi = V$. Тогда, если уравнение

$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C$$

выражает какую-либо замкнутую кривую, то оно даст контур поперечного сечения стержня, а функция U будет соответствующей функцией кручения, так что уравнение

$$\omega = \tau U(x, y)$$

определит перемещение в направлении оси z , т. е. даст искривление плоского поперечного сечения. Напряжения найдём по формулам (8.14). Можно, конечно, поступить обратно, т. е. положить

$$\varphi = V(x, y); \quad (8.24)$$

тогда уравнением контура (если он замкнут) будет

$$-U(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C^*, \quad (8.25)$$

и перемещение выразится так:

$$w = \tau V(x, y). \quad (8.26)$$

Рассмотрим частные случаи.

А. Стержень эллиптического сечения.

Возьмём аналитическую функцию

$$D_2 z^2 = D_2 (x + iy)^2 = D_2 (x^2 - y^2) + i2D_2 xy.$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} U &= D_2 (x^2 - y^2), \\ V &= 2D_2 xy. \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

Положим, что

$$\varphi = V = 2D_2 xy.$$

Тогда по (8.25) получим уравнение контура, заменив C на $-D_1$:

$$D_2 (x^2 - y^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) = D_1,$$

или

$$\left(D_2 + \frac{1}{2} \right) x^2 + \left(\frac{1}{2} - D_2 \right) y^2 = D_1,$$

или, наконец,

$$\frac{x^2}{\left(\frac{D_1}{D_2 + \frac{1}{2}} \right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\frac{1}{2} - D_2} \right)} = 1.$$

Положив здесь

$$\frac{D_1}{D_2 + \frac{1}{2}} = a^2, \quad \frac{D_1}{\frac{1}{2} - D_2} = b^2, \quad (8.28)$$

получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8.29)$$

т. е. будем иметь стержень эллиптического сечения.

Из (8.28) находим постоянные D_1 и D_2 , выражая их через полуоси a и b эллипса поперечного сечения:

$$D_2 = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}; \quad D_1 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

*) Здесь учтено, что если функция $U + iV$ — аналитическая, то $V - iU$ — также аналитическая, ибо для них условия Коши-Римана одинаковы.

Отсюда

$$w = 2D_2 \tau xy = \frac{b^3 - a^3}{a^2 + b^2} \tau xy. \quad (8.30)$$

Далее, по (8.7) находим касательные напряжения по сечению, заменяя обозначение μ на G :

$$\left. \begin{aligned} X_z &= G \left(\frac{b^3 - a^3}{a^2 + b^2} \tau y - \tau y \right) = -G \frac{2a^3}{a^2 + b^2} \tau y, \\ Y_z &= G \frac{2b^3}{a^2 + b^2} \tau x. \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

Наконец, связываем напряжения по сечению с крутящим моментом M_k :

$$\begin{aligned} M_k &= - \iint_F (X_z y - Y_z x) dF = \\ &= -G \frac{2\tau}{a^2 + b^2} \iint_F (-a^2 y^2 - b^2 x^2) dF. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Но

$$\iint y^2 dF = J_x; \quad \iint x^2 dF = J_y,$$

где J_x и J_y — моменты инерции эллипса около его осей:

$$J_x = \frac{\pi a b^3}{4}; \quad J_y = \frac{\pi a^3 b}{4};$$

Поэтому из уравнения (8.32) получаем

$$M_k = G \frac{2\tau}{a^2 + b^2} \frac{\pi a^3 b^3}{2} = G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \tau.$$

Отсюда выражаем угол закручивания τ через крутящий момент

$$\tau = \frac{M_k}{G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}}.$$

Вспоминаем из сопротивления материалов, что при круглом стержне получается

$$\tau = \frac{M_k}{GJ_p},$$

где J_p — полярный момент инерции сечения. Для сравнения этих выражений свяжем величину

$$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

с полярным моментом инерции эллипса:

$$\begin{aligned} J_p &= J_x + J_y = \frac{\pi a b^3}{4} + \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{\pi a b (a^2 + b^2)}{4} = \\ &= \frac{\pi a^4 b^4 (a^2 + b^2)}{4 a^3 b^3} = \frac{\pi a^4 b^4}{4} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \frac{\pi^3}{\pi^3} = \frac{F^4}{4 \pi^2} \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3}, \end{aligned}$$

т. е.

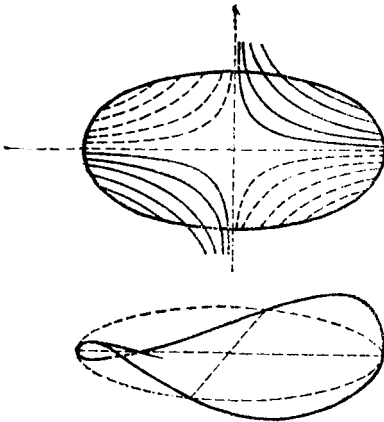
$$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{F^4}{4 \pi^2 J_p} \cong \frac{F^4}{39,4 J_p};$$

и следовательно,

$$\tau = \frac{M_k}{G F^4} 39,4 J_p. \quad (8.33)$$

Заменяя в уравнении (8.30) ω на z , получим уравнение искривлённой поверхности поперечного сечения $z = mxy$, где

$$m = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \tau;$$



Фиг. 78.

поверхность эта есть гиперболический параболоид; в пересечении с системой горизонтальных плоскостей $z = z_n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, она даёт гиперболы

$$xy = \frac{z_n}{m},$$

отнесённые к асимптотам (фиг. 78).

По уравнениям (8.31) можем найти наибольшие касательные напряжения. Действи-

тельно, полное касательное напряжение будет по величине таким:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{X_z^2 + Y_z^2} = \frac{2G\tau}{a^2 + b^2} \sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2} = \\ &= 2G\tau \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Отсюда видно, что напряжение t , как функция x и y , сохраняет постоянное значение

$$t = 2G\tau \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} C \quad (8.35)$$

во всех точках кривой

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = C^2, \quad (8.36)$$

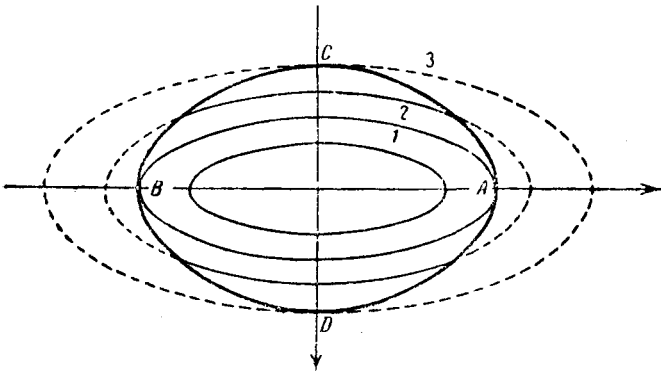
где C — какое-нибудь постоянное число. При различных значениях C уравнение (8.36) даёт семейство кривых [линий уровня функции $t(x, y)$]; каждая из этих кривых представляет собою эллипс с полуосями

$$a_1 = a^2 C; \quad b_1 = b^2 C. \quad (8.37)$$

Если положим, что $b < a$, то

$$\frac{b_1}{a_1} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 < \frac{b}{a}$$

и эллипс (8.36) будет более вытянут, чем эллипс (8.29) контура сечения. Уравнение (8.36) даёт семейство подобных и подобно расположенных эллипсов (отношение $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b^2}{a^2}$ постоянно), при-



Фиг. 79.

чём по мере увеличения размеров эллипса возрастает и напряжение (8.35), постоянное для всех его точек (фиг. 79). Отсюда ясно, что наибольшая величина напряжения (соответствующая эллипсу 3) получается в крайних точках C и D малой оси сечения. Для этих точек из (8.37) имеем $b_1 = b = b^2 C$, или $C = \frac{1}{b}$, а потому по уравнению (8.35)

$$t_1 = \max t = 2G\tau \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}.$$

В точках A и B напряжение (одинаковое во всех точках соответствующего эллипса 1) будет меньше; для них имеем

$$a_1 = a = a^2 C; \quad C = \frac{1}{a};$$

$$t_2 = 2G\tau \frac{ab^2}{a^2 + b^2} < t_1.$$

Б. Стержень треугольного сечения.

Возьмём аналитическую функцию

$$C_3 z^3 = C_3 (x + iy)^3 = C_3 (x^3 - 3xy^2) + iC_3 (3x^2y - y^3)$$

и примем

$$\varphi = V = C_3 (3x^2y - y^3). \quad (8.38)$$

Тогда по (8.25) получим уравнение контура

$$C_3 (x^3 - 3xy^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) = -C,$$

или, полагая

$$C_3 = \frac{1}{2} D_2; \quad -C = \frac{1}{2} D_1, \quad (8.39)$$

будем иметь

$$D_2 (x^3 - 3xy^2) + x^2 + y^2 = D_1. \quad (8.40)$$

Это уравнение выражает полную гиперболу третьего порядка с тремя асимптотами, направления которых получим по общему правилу, приравняв нулю совокупность членов третьей степени $x^3 - 3xy^2 = x(x + y\sqrt{3})(x - y\sqrt{3}) = 0$; отсюда уравнения трёх прямых, параллельных асимптотам, будут

$$x = 0; \quad x + y\sqrt{3} = 0; \quad x - y\sqrt{3} = 0.$$

Возьмём три прямые, параллельные этим:

$$x = a; \quad x + y\sqrt{3} = b; \quad x - y\sqrt{3} = b. \quad (8.41)$$

Можно показать, что при надлежащем выборе постоянных D_1 и D_2 кривая (8.40) распадается на эти три прямые, т. е. уравнение её примет вид

$$D_2 (x - a)(x - b + y\sqrt{3})(x - b - y\sqrt{3}) = 0,$$

или

$$D_2 (x - a)[(x - b)^2 - 3y^2] = 0. \quad (8.42)$$

Действительно, раскрывая уравнения (8.40) и (8.42), имеем

$$D_2 x^3 - 3D_2 xy^2 + x^2 + y^2 - D_1 = 0; \quad (8.43)$$

$$D_2 x^3 - 3D_2 xy^2 - D_2 (a + 2b)x^2 + 3D_2 ay^2 + D_2 b(2a + b)x - D_2 ab^2 = 0. \quad (8.44)$$

Сравнив коэффициенты этих уравнений, получим условия для определения D_1 , D_2 и b :

$$\begin{aligned} -D_2 (a + 2b) &= 1; & D_2 b(2a + b) &= 0; \\ 3D_2 a &= 1; & D_2 ab^2 &= D_1. \end{aligned}$$

Отсюда найдём

$$b = -2a; \quad D_2 = \frac{1}{3a}; \quad D_1 = \frac{4}{3} a^2, \quad (8.45)$$

и уравнение (8.44) примет вид

$$(x-a)[(x+2a)^2 - 3y^2] = 0,$$

или

$$(x-a)(x+2a+y\sqrt{3})(x+2a-y\sqrt{3}) = 0,$$

т. е. кривая (8.44) распадается на три прямые:

$$x = a; \quad x + a + y\sqrt{3} = 0; \quad x + a - y\sqrt{3} = 0,$$

образующие (фиг. 80) равносторонний треугольник с центром тяжести в начале координат. Таким образом, мы приходим к задаче о кручении стержня треугольного сечения.

Уравнение (8.38) на основании (8.39) и (8.45) даёт

$$w = \frac{\tau}{6a} (3x^2y - y^3), \quad (8.46)$$

т. е. поперечное сечение искривляется по поверхности

$$z = \frac{\tau}{6a} (3x^2y - y^3),$$

или

$$z = \frac{\tau}{6a} y(x\sqrt{3} + y)(x\sqrt{3} - y).$$

Отсюда видно, что прямые

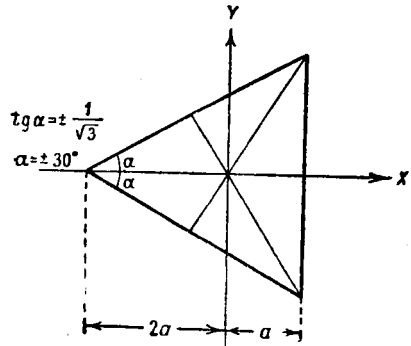
$$y = 0; \quad y = -x\sqrt{3}; \quad y = x\sqrt{3},$$

являющиеся тремя высотами треугольника сечения, остаются в первоначальной плоскости сечения, так как для всех точек этих прямых

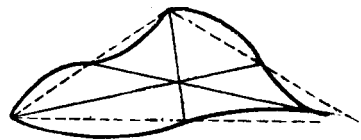
$w = z = 0$. На фиг. 81 показан вид искривлённого поперечного сечения. Имея функцию (8.46), по уравнениям (8.2) и (8.7) найдём составляющие напряжения X_z и Y_z . Далее, аналогично уравнению (8.32) получим связь между крутящим моментом M_x и углом закручивания τ .

В. Стержень прямоугольного сечения.

Задача эта также была решена Сен-Венаном; обозначим длины сторон сечения через b и c (фиг. 82) и начнём решение задачи с разыскания функции кручения $\varphi(x, y)$ в форме ряда.



Фиг. 80.



Фиг. 81.

Частные решения уравнения (8.4) найдём уже применявшимся ранее методом разделения переменных, полагая

$$\varphi = XY. \quad (8.47)$$

Переменные сейчас же разделяются:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2,$$

и отсюда

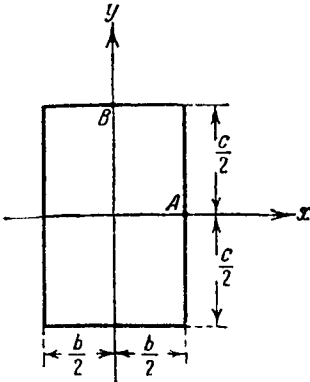
$$\left. \begin{aligned} X'' &= -\lambda^2 X; \\ Y'' &= \lambda^2 Y. \end{aligned} \right\} \quad (8.48)$$

Как увидим в дальнейшем, удобно положить

$$\lambda = \frac{m\pi}{b}, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \dots$$

При $m = 0$ уравнения (8.48) дают

$$X = \alpha x + \beta; \quad Y = \gamma x + \delta.$$



Фиг. 82.

Подставив это в (8.47) и удерживая лишь член второй степени, получим (положив ещё $\alpha = \gamma = 1$)

$$\varphi_0 = xy. \quad (8.49)$$

При $m \neq 0$ решения уравнений (8.48) будут

$$\left. \begin{aligned} X &= C_m \sin \frac{m\pi x}{b} + C'_m \cos \frac{m\pi x}{b}; \\ Y &= D_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b} + D'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (8.50)$$

Суммируя решения (8.49) и (8.50), получим (полагая при этом $C'_m = 0$ для всех значений m)

$$\varphi = xy + \sum C_m \sin \frac{m\pi x}{b} \left(D_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b} + D'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} \right). \quad (8.51)$$

Произвольными постоянными C_m , D_m и D'_m распорядимся так, чтобы были удовлетворены условия на контуре; они, как мы видели выше, требуют, чтобы касательные напряжения здесь были направлены по касательной к контуру; следовательно (фиг. 82), на боковых сторонах при $x = \pm \frac{b}{2}$ должно быть согласно (8.7)

$$X_z = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y; \quad (8.52)$$

на верхней и нижней сторонах при $y = \pm \frac{c}{2}$

$$Y_z = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x. \quad (8.53)$$

Обращаясь к (8.51), найдём

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y + \sum C_m \frac{m\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{b} \left(D_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b} + D'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} \right).$$

Отсюда видно, что условие (8.52) удовлетворится, если m будем давать только нечётные значения: $m = 1, 3, 5, \dots$; действительно, тогда при $x = \pm \frac{b}{2}$ имеем

$$\cos \frac{m\pi x}{b} = \cos \left(\pm \frac{m\pi}{2} \right) = 0.$$

Для рассмотрения условия (8.53) вычисляем из (8.51)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + \sum C_m \frac{m\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{b} \left(D_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} + D'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b} \right)$$

Внося сюда значение $y = \pm \frac{c}{2}$, напомним условие (8.53) в виде

$$-2x = \sum_{m=1, 3, 5, \dots} C_m \frac{m\pi}{b} \left(D_m \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b} \pm D'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi c}{2b} \right) \sin \frac{m\pi x}{b}.$$

Ввиду двузначности второго члена в скобках необходимо положить $D'_m = 0$; кроме того, конечно, можно принять $D_m = 1$, и тогда получим наше условие в окончательной форме

$$-2x = \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \beta_m \sin \frac{m\pi x}{b}, \quad (8.54)$$

где

$$\beta_m = C_m \frac{m\pi}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}. \quad (8.55)$$

Из (8.54) видно, что β_m являются коэффициентами ряда Фурье для функции $-2x$ на отрезке $\left(-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2}\right)$; определяются они обычным путём; умножая обе части (8.54) на $\sin \frac{m\pi x}{b}$ и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} \beta_m \frac{b}{2} &= -2 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x \sin \frac{m\pi x}{b} dx = -\frac{4b^2}{\pi^2 m^2} (-1)^{\frac{m-1}{2}} = \\ &= \frac{4b^2}{\pi^2 m^2} (-1)^{\frac{m+1}{2}} *) \quad \text{или} \quad \beta_m = \frac{8b}{\pi^2 m^2} (-1)^{\frac{m+1}{2}}. \end{aligned}$$

*) Здесь сделана замена

$$\sin \frac{m\pi}{2} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{при} \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

На этом основании из (8.55) найдём

$$C_m = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{8b^2}{\pi^2 m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}}.$$

Внося это в (8.51) и учитывая, что $D_m=1$; $D'_m=0$, получим окончательное выражение функции кручения

$$\varphi(x, y) = xy + \frac{8b^2}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \sin \frac{m\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b}. \quad (8.56)$$

Далее, пользуясь условиями Коши-Римана (8.11), ищем сопряжённую с ней функцию $\psi(x, y)$; имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y + \frac{8b}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \cos \frac{m\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b} = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + \frac{8b}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \sin \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Интегрируя первое из этих уравнений, получим:

$$\psi = \frac{y^2}{2} + \frac{8b^2}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \cos \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} + \omega_1(x);$$

второе даёт

$$\psi = -\frac{x^2}{2} + \frac{8b^2}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \cos \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} + \omega_2(y),$$

где ω_1 и ω_2 — произвольные функции. Для того чтобы оба эти выражения функции ψ были тождественны, следует положить:

$$\omega_1(x) = -\frac{x^2}{2} + C;$$

$$\omega_2(y) = \frac{y^2}{2} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Окончательно получаем:

$$\psi = \frac{y^2 - x^2}{2} + \frac{8b^2}{\pi^3} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \cos \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} + C. \quad (8.57)$$

Теперь по формуле (8.15) подсчитываем функцию напряжений (при этом принимаем $C = \frac{b^2}{4}$, чтобы эта функция на контуре обращалась в нуль):

$$\Phi(x, y) = \mu\tau \left[\frac{b^2}{4} - x^2 + \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \cos \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} \right]. \quad (8.58)$$

Для определения угла закручивания τ по заданному крутящему моменту пользуемся зависимостью (8.20); выполняя в ней интегрирование, получим *)

$$\begin{aligned} M_k &= \mu\tau \left[\frac{b^3 c}{3} + \frac{64b^4}{\pi^5} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} (-1)^m \frac{1}{m^5} \operatorname{th} \frac{m\pi c}{2b} \right] = \\ &= \mu\tau b^3 c \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{b}{c} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{m^5} \operatorname{th} \frac{m\pi c}{2b} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\tau = \frac{M_k}{\mu b^3 c \alpha}, \quad (8.59)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{b}{c} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \frac{1}{m^5} \operatorname{th} \frac{m\pi c}{2b}. \quad (8.60)$$

Видим, что α зависит только от отношения сторон прямоугольника $\frac{b}{c}$; для квадрата, т. е. при $\frac{b}{c} = 1$, получим

$$\alpha = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{243} \operatorname{th} \frac{3\pi}{2} + \dots \right).$$

Для очень вытянутого прямоугольника приближённо считаем $\frac{b}{c} = 0$, и тогда

$$\alpha = \frac{1}{3} = 0,333\dots$$

*) В выкладках далее учтено, что $(-1)^m = -1$ при $m=1, 3, 5, \dots$

Чтобы закончить решение задачи, вычислим касательные напряжения, пользуясь (8.16) и (8.58):

$$X_z = \mu\tau \frac{8b}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \cos \frac{m\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{b}; \quad (8.61)$$

$$Y_z = \mu\tau \left[2x + \frac{8b}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \sin \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} \right]. \quad (8.62)$$

Если $b < c$, то максимальное значение касательного напряжения получается в точке A (фиг. 82), т. е. при $x = \frac{b}{2}$, $y = 0$; тогда из (8.62) имеем

$$t_A = t_{\max} = \mu\tau b \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}} \right],$$

или, пользуясь (8.59):

$$t_{\max} = \frac{M_k}{b^2 c \beta}, \quad (8.63)$$

где

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi c}{2b}}}.$$

Напряжение в точке B (фиг. 82) получим из (8.61), полагая $x = 0$; $y = \frac{c}{2}$:

$$X_z = t_B = \mu\tau \frac{8b}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2} \operatorname{th} \frac{m\pi c}{2b},$$

или

$$t_B = \frac{M_k}{b^2 c \beta_1}, \quad (8.64)$$

где

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{\frac{8}{\pi^2} \sum (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m^2} \operatorname{th} \frac{m\pi c}{2b}}.$$

Значения введенных нами коэффициентов α , β и β_1 даны в таблице:

Таблица

$\frac{c}{b}$	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	∞
α	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β_1	0,208	0,270	—	0,309	—	0,354	0,379	0,402	—	—	0,448

§ 45. Решение задачи о кручении в напряжениях. Аналогия Прандтля.

Введение функции напряжений Прандтля позволяет изменить весь ход решения задачи о кручении и найти прежде всего касательные напряжения в сечении (ср. §§ 18 и 29).

Функция кручения $\varphi(x, y)$ и сопряжённая с ней $\psi(x, y)$ являются гармоническими, т. е. удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0; \quad \nabla^2 \psi = 0. \quad (8.65)$$

Посмотрим, какому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция напряжений $\Phi(x, y)$. Выше мы нашли (8,16) что

$$\left. \begin{aligned} Y_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \mu \tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right); \\ X_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu \tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.66)$$

Исключим отсюда ψ , пользуясь вторым из уравнений (8.65); дифференцируя первое из уравнений (8.66) по x , а второе по y и складывая результаты, получим

$$\nabla^2 \Phi = -2\mu\tau. \quad (8.67)$$

Таким образом, функция напряжений удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона (8.67). Сюда следует добавить полученное выше граничное условие на контуре сечения (8.17)

$$\Phi = \mu\tau C. \quad (8.68)$$

В случае односвязного поперечного сечения, т. е. сечения, ограниченного одним замкнутым контуром и, следовательно, не имеющего внутренних полостей, произвольную постоянную C можно положить равной нулю. Тогда определение функции напряжений сведётся к классической задаче интегрирования уравнения Пуассона (8.67) при условии, что функция Φ на контуре сечения обращается в нуль:

$$\Phi = 0 \quad (\text{на контуре}). \quad (8.69)$$

Если эта задача решена, то напряжения в поперечном сечении сейчас же найдутся по формулам (8.63), а угол закручивания τ — по уравнению (8.20).

Случай, рассмотренные в предыдущем параграфе, легко решить этим способом. Например, для эллиптического сечения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

решение уравнения (8.67) можно взять в форме

$$\Phi = K\mu\tau\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right), \quad (8.70)$$

удовлетворяющей граничному условию (8.69). Подставляя это решение в (8.67), сейчас же найдём постоянную K .

Приведенный сейчас ход решения задачи, предложенный Прандтлем, привёл его к следующей аналогии, которая придаёт большую наглядность соответствующим выкладкам и, вместе с тем, позволяет дать чисто экспериментальный метод решения задачи при любом контуре поперечного сечения скручиваемого стержня. Представим себе гибкую нерастяжимую мембрану, натянутую на упругий контур той же формы, как и контур заданного поперечного сечения; натяжение постоянно во всех направлениях. Если к мембране приложим равномерное давление p , то она может несколько выпучиться за счёт небольших деформаций самого упругого контура*); уравнение равновесия мембраны было выведено Лапласом; оно совпадает с тем уравнением, которое приводится во всех курсах сопротивления материалов для расчёта тонких резервуаров, имеющих форму тел вращения:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h},$$

где σ_1 и σ_2 — главные напряжения в стенке резервуара, ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны стенки, h — толщина стенки.

Учитывая, что натяжение мембраны постоянно, т. е. что $\sigma_1 = \sigma_2$ и что $h\sigma_1 = h\sigma_2 = H$ есть величина этого натяжения на единицу длины сечения мембраны, получим

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{p}{H};$$

если выпучивание мембраны мало, то здесь можно положить

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

*) Однако, можно убедиться, что эти деформации будут малы по сравнению с провисанием мембраны z и ими можно пренебречь.

где z — ордината поверхности мембраны, и мы получим следующее дифференциальное уравнение поверхности мембраны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{p}{H}, \text{ или } \nabla^2 z = \frac{p}{H}. \quad (8.71)$$

К нему добавим очевидное граничное условие

$$z = 0 \text{ (на контуре)}. \quad (8.72)$$

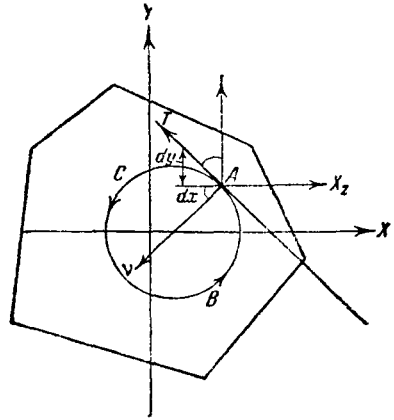
Сравнивая (8.71) и (8.72) соответственно с (8.67) и (8.69), придём к аналогии Прандтля: если натяжение мембраны H и нагрузку p выберем так, что

$$\frac{p}{H} = -2\mu\tau, \quad (8.73)$$

то

$$z = \Phi; \quad (8.74)$$

значит, ордината поверхности выпучившейся мембраны даст значение функции напряжений в данной точке поперечного сечения, а крутящий момент согласно (8.40) равен удвоенному объёму, ограниченному поверхностью мембраны и её первоначальной плоскостью.



Фиг. 83.

Распределение касательных напряжений по сечению также

может быть наглядно представлено с помощью аналогии Прандтля. Через выбранную произвольно точку A сечения (фиг. 83) проведём любой замкнутый контур BC и проведём в A касательную AT и внутреннюю нормаль Av к контуру. Проекция полного напряжения t в этой точке на касательную AT будет

$$t(T) = X \cos(xT) + Y_z \cos(yT);$$

но

$$\cos(xT) = +\cos(yv);$$

$$\cos(yT) = -\cos(xv).$$

Пользуясь также формулами (8.16), получим

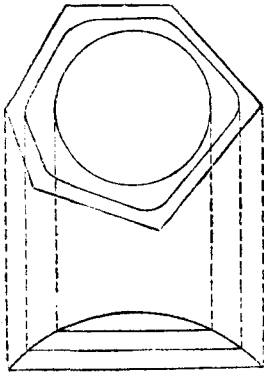
$$t(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos(xv) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(yv),$$

или

$$t(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial v}; \quad (8.75)$$

это есть обобщение свойства функции напряжений, выраженного формулами (8.16); проекция полного напряжения на какое-либо направление T равна производной функции Φ по нормали v к этому направлению.

Рассмотрим теперь поверхность выпучившейся мембраны и рассечём её рядом плоскостей, проведенных через равные промежутки параллельно контуру (фиг. 84). Получим ряд замкнутых контуров — горизонталей поверхности. В любой точке A горизонтали производная $\partial\Phi/\partial T$ по касательной к ней равна нулю, так как в этом направлении $\Phi = \text{const}$. Отсюда по (8.75) заключаем, что проекция полного касательного напряжения t на нормаль dn к горизонтали равна нулю; значит, напряжение t направлено



Фиг. 84.

по касательной к горизонтали в этой точке. Та же формула (8.75) показывает, что величина полного касательного напряжения равна производной функции Φ по внутренней нормали к горизонтали, или, что то же, градиенту функции Φ в данной точке:

$$t = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \text{grad } \Phi. \quad (8.76)$$

Учитывая, что градиент (тангенс наибольшего угла наклона поверхности мембраны в данной точке к начальной плоскости её) пропорционален густоте горизонталей, видим, что система горизонталей даёт наглядную картину распределения напряжений в сечении скручиваемого бруса. Отсюда, на-

пример, можно сделать следующие довольно общие выводы.

1. Если сечение ограничено простым, вскоду выпуклым контуром, то густота горизонталей возрастает по мере приближения к контуру, где и следует ожидать наибольших напряжений.

2. Если контур, указанный в п. 1, имеет две оси симметрии и несколько вытянут в направлении одной из этих осей, то густота горизонталей будет наибольшей у концов малой оси, как это имеет место, например, для эллипса или прямоугольника. (У концов большой оси возможность выпучивания мембраны стеснена меньшей шириной её, измеренной перпендикулярно к большой оси.)

3. Если поперечное сечение имеет форму очень вытянутого прямоугольника так, что одна его сторона b значительно менее другой стороны c (фиг. 85), тогда в местах, удалённых от коротких сторон, поверхность соответствующей мембраны может быть приближённо принята за цилиндрическую; ввиду равномерности нагрузки p на мембрану сечение этой поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси y , будет параболой*)

$$z = \frac{p}{2H} \left(-\frac{b^2}{4} + x^2 \right).$$

*) Которая является верёвочной кривой для равномерной нагрузки.

Но, согласно аналогии Прандтля [см. формулы (8.73) и (8.74)] отсюда имеем

$$\Phi = \mu\tau \left(\frac{b^2}{4} - x^2 \right). \quad (8.77)$$

Далее, согласно (8.20), получим

$$\begin{aligned} M_k &= -2 c \mu \tau \int_0^b \left(\frac{b^2}{4} - x^2 \right) dx = \\ &= -\mu\tau \frac{b^2 c}{3}; \end{aligned}$$

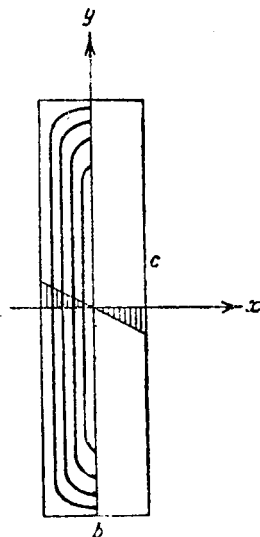
$$\tau = \frac{M_k}{\mu b^2 c \frac{1}{3}},$$

что уже было получено выше. Касательные напряжения в сечении, перпендикулярном к оси Oy :

$$Y_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{6M_k}{b^2 c} x,$$

распределены по линейному закону (фиг. 85); касательные напряжения X_z , очевидно, будут ничтожны вдали от коротких сторон прямоугольника.

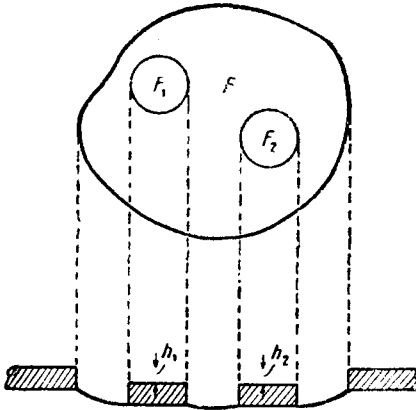
Очевидно, эти результаты, полученные для узкого прямоугольника, могут быть применены к другим сечениям, имеющим форму изогнутой полосы (швеллера, двутавры, уголки, незамкнутые кольца и т. д.), исключая, конечно, те места, где кривизна контура сечения резко меняется; здесь конфигурация горизонталей мембраны значительно осложняется (например, вблизи выкружек и входящих углов сечения). Эти приложения теории Сен-Венана и аналогии Прандтля подробно рассматриваются в курсах сопротивления материалов, и здесь мы на них останавливаться не будем.



Фиг. 85.

В случае замкнутого кольцевого сечения приходится иметь дело с особенностью, присущей всякому двухсвязному или вообще многосвязному сечению, ограниченному несколькими, взаимно не пересекающимися замкнутыми контурами. Дифференциальное уравнение (8.67) и граничное условие (8.68) для функции напряжений Φ сохраняют силу; однако, постоянные C в (8.68) на каждом

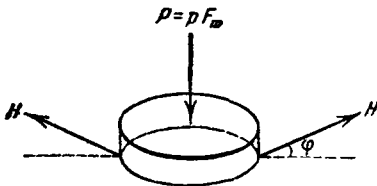
из контуров, ограничивающих сечение, будут различными; для одного из контуров, например, для внешнего, эту постоянную можно выбрать произвольно; способ определения остальных постоянных был указан Бредтом*). Соответствующая теорема



Фиг. 86.

Бредта, вытекающая из общей формулы Стокса, для наших целей может быть легко и наглядно получена из аналогии Прандтля. В случае многосвязного сечения аналогично эту приходится строить следующим образом (фиг. 83). Те области F_1 и F_2 мембраны, где в сечении скручиваемого стержня имеются полости, накрываем абсолютно твёрдыми пластинками, склеенными с мембраной; после этого на всю область сечения F оказываем равномерное давление p .

Условие (8.68) требует, чтобы пластинки F_1 и F_2 опустились параллельно своему начальному положению (для этого к пластинкам кроме давления необходимо, вообще говоря, приложить некоторые пары, которые, однако, в дальнейшие рассуждения не войдут). Запишем условие равновесия одной такой пластинки F_m , приравнявая нулю сумму проекций сил, приложенных к ней, на ось, нормальную к начальной плоскости мембраны. Это условие выразится в виде следующего уравнения (фиг. 87):



Фиг. 87.

$$\int H \sin \varphi ds = pF_m, \quad (8.78)$$

где интеграл распределён на весь контур взятой пластинки, а F_m означает площадь её. Замечаем, что [ср. (8.76)]

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \operatorname{grad} \Phi = t.$$

Кроме того, H , как постоянную, вынесем за знак интеграла и учтём, что согласно (8.73) $p = -2\mu t H$. Уравнение равновесия

*) См. А. и Л. Фёпль, Сила и деформация, т. II, стр. 77.

(8.78) получит вид

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds &= -2 \mu \tau F_m, \\ \text{или} \quad \int t ds &= -2 \mu \tau F_m; \end{aligned} \right\} \quad (8.79)$$

это и есть нужный нам частный случай теоремы Бредта о «циркуляции напряжения», выражаемой интегралом левой части второго из уравнений (8.79). Таких уравнений можно написать столько, сколько имеется внутренних полостей в данном сечении. Можно показать, что левые части уравнений (8.79) будут линейно зависеть от значений функции Φ на внутренних контурах сечения; эти значения из (8.79) могут быть определены. Заметим, что в случае многосвязного контура формула (8.18) после интегрирования правой части по частям даст вместо (8.20) следующий результат:

$$M_k = 2 C_0 F_0 - 2 \sum C_m F_m - 2 \iint \Phi ds, \quad (8.80)$$

где F_0 — площадь, ограниченная внешним контуром; C_0 — значение функции F_0 на этом контуре; F_m и C_m обозначают те же величины для внутренних контуров. Двойной интеграл распространяется на площадь сечения за вычетом внутренних полостей. В (8.80) остаётся подставить значения постоянных C_0 и C_m , найденные, как указано выше.

§ 46. Случай поперечного изгиба.

Рассмотрим (фиг. 88) случай изгиба прямого бруса произвольного поперечного сечения, длиной l , заделанного левым концом и нагруженного на правом конце силой Q , которую предполагаем осуществленной в форме касательных напряжений, распределённых по концевому поперечному сечению.

Эту задачу решил Сен-Венан, применяя к ней полуобратный метод; решение её проведём в напряжениях, пользуясь рассуждениями § 29. При решении аналогичной задачи, в случае плоской деформации или плоского напряжённого состояния (§ 34), мы сделали следующие предположения:

$$Z_z = \frac{M}{J} x = - \frac{Q(l-z)}{J} x; \quad Y_z = Y_y = X_z = X_y = 0.$$

Следуя Сен-Венану, решим настоящую задачу также полуобратным методом, несколько изменив предположения в том

смысле, что положим отличным от нуля также напряжение Y_z . Следовательно, мы делаем такие предположения:

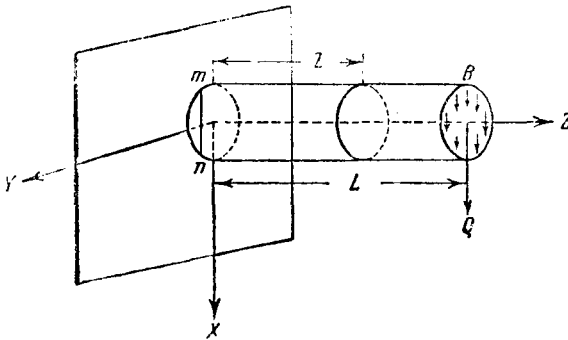
$$\left. \begin{aligned} Z_z &= -\frac{Q(l-z)}{J}x, \\ X_x &= Y_y = X_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.81)$$

Остальные напряжения $X_z = Z_x$ и $Y_z = Z_y$ найдём из условий на поверхности и притом так, чтобы были удовлетворены уравнения (I) и (VII). Посмотрим, какой вид примут эти уравнения при наших предположениях (8.81). Уравнения равновесия (I) напишутся так:

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0; \quad (8.82)$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} = -\frac{Qx}{J}. \quad (8.83)$$

Уравнения (8.82) показывают, что касательные напряжения X_z и Y_z не зависят от z , т. е. во всех поперечных сечениях они



Фиг. 88.

должны распределяться одинаково и, конечно, по тому же самому закону они должны быть распределены на концевом поперечном сечении B . Это налагает ограничение на способ приложения силы Q в сечении B . При других способах приложения силы Q будут получаться другие напряжения; однако, согласно принципу Сен-Венана, разница в распределении напряжений будет существенной только вблизи нагруженного конца B .

Переходим теперь к уравнениям (VII), заметив предварительно, что в нашем случае

$$\theta = Z_z = -\frac{Q(l-z)}{J}x.$$

Легко видеть, что из уравнений (VII) первое, второе, третье и шестое удовлетворяются тождественно предположениями (8.81). Уравнения же четвертое и пятое напишутся так:

$$(1 + \sigma) \nabla^2 Y_z = 0; \quad (1 + \sigma) \nabla^2 X_z + \frac{Q}{J} = 0,$$

или

$$\nabla^2 Y_z = 0; \quad \nabla^2 X_z = -\frac{Q}{(1 + \sigma)J}. \quad (8.84)$$

Напишем ещё условия (II) на боковой поверхности бруса. Первые два из них удовлетворяются тождественно, так как на боковой поверхности $\cos(VZ) = 0$. Остаётся только последнее:

$$Z_x \cos(VX) + Z_y \cos(VY) = 0. \quad (8.85)$$

Таким образом, задача сводится к разысканию двух напряжений X_z и Y_z , являющихся функциями x и y , из того условия, чтобы они всюду в бруске удовлетворяли уравнениям (8.83) и (8.84), а на боковой поверхности — условию (8.85).

В дальнейшем надо ещё добиться, чтобы эти касательные напряжения на концевом сечении приводились к заданному грузу Q , приложенному в центре тяжести сечения. Как и ранее, мы можем упростить решение задачи, вводя функцию напряжений; однако, здесь оказывается удобным ввести две новые функции; зададим напряжения так:

$$\left. \begin{aligned} Z_x = X_z = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{Qx^2}{2J} + f(y); \\ Z_y = Y_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (8.86)$$

Здесь $\varphi(x, y)$ и $f(y)$ — произвольные пока функции*). Подставляя эти выражения в уравнение (8.83), видим, что оно будет тождественно удовлетворено. Остаётся удовлетворить уравнениям (8.84) и условию на боковой поверхности (8.85).

Подставляя напряжения (8.86) в уравнения (8.84), напишем их так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \varphi - \frac{Q}{J} + f''(y) = -\frac{Q}{J(1 + \sigma)},$$

или же

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \varphi = \frac{cQ}{J(1 + \sigma)} - f''(y).$$

Из этих уравнений легко находим

$$\nabla^2 \varphi = \frac{Qxy}{J(1 + \sigma)} - f'(y) + C. \quad (8.87)$$

*) Введение функции $f(y)$ предложено С. И. Тимошенко.

Переходим к условию на боковой поверхности (8.85). Как и в задаче о кручении, получим

$$\cos(Vx) = \frac{dy}{ds}; \quad \cos(Vy) = -\frac{dx}{ds}.$$

Подставляя отсюда и из (8.86) в условие (8.85), будем иметь

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{Qx^2}{2J} + f(y) \right] \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 0,$$

или, имея в виду, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{d\varphi}{ds},$$

получим

$$\frac{d\varphi}{ds} = \left[\frac{Qx^2}{2J} - f(y) \right] \frac{dy}{ds}. \quad (8.88)$$

Вопрос сводится к интегрированию уравнения (8.87) при соблюдении условия на боковой поверхности (8.88). Введённой нами произвольной функцией $f(y)$ постараемся распорядиться так, чтобы выражение в квадратной скобке уравнения (8.88) на контуре поперечного сечения обращалось в нуль, т. е. на контуре должно соблюдаться условие

$$f(y) - \frac{Qx^2}{2J} = 0; \quad (8.89)$$

тогда уравнение (8.83) сведётся к условию $\frac{d\varphi}{ds} = 0$, требующему, чтобы функция напряжений φ сохраняла на контуре сечения постоянное значение. Остаётся рассмотреть условие на конечном поперечном сечении. Проектируя силы, приложенные к этому сечению на ось Oy , имеем

$$\iint Y_x dx dy = - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = - \int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = 0,$$

т. е. сумма касательных сил Q направлена вертикально (фиг. 88). Далее,

$$\begin{aligned} \iint X_z dx dy &= \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy - \frac{Q}{2J} \iint x^2 dx dy + \iint f(y) dx dy = \\ &= -\frac{Q}{2} + \int dy \int f(y) dx = -\frac{Q}{2} + \int dy [f(y_p) x_p - f(y_m) x_m] = \\ &= -\frac{Q}{2} + \int dy \left[\frac{Qx_p^2}{2J} - \frac{Qx_m^2}{2J} \right] = \\ &= -\frac{Q}{2} + \frac{3}{2} \frac{Q}{J} \int \frac{(x_p^2 - x_m^2) dy}{3} = -\frac{Q}{2} + \frac{3}{2} \frac{Q}{J} J = Q. \end{aligned}$$

Таким образом, касательные напряжения по конечному сечению действительно приводятся к заданному грузу Q , направленному вниз.

У нас ещё осталась одна произвольная постоянная C в уравнении (8.87). Можно убедиться, что при сечении, симметричном относительно плоскости xOz , следует принять $C = 0$.

Окончательно для решения задачи нужно подобрать $f(y)$ так, чтобы на контуре соблюдалось уравнение (8.89). Это выражение $f(y)$ вносим в уравнение (8.87) и интегрируем его. Получив отсюда $\varphi(x, y)$, вносим её в уравнения (8.86) и находим касательные напряжения.

Если поперечное сечение бруса не симметрично относительно главной центральной оси Ox , то явление изгиба значительно усложняется. Приведенное сейчас решение задачи сохраняет силу, если равнодействующая нагрузки Q лежит не в главной плоскости Oxz бруса, а в другой плоскости, ей параллельной и пересекающей поперечное сечение в некоторой точке, называемой центром изгиба. В случае тонкостенных брусьев разыскание центра изгиба можно выполнить приближённо элементарным способом, излагаемым в курсах сопротивления материалов. Общий метод определения его можно найти в книге А. и Л. Фёплъ «Сила и деформация», т. II, ОНТИ, 1936 г. Приложение: «О центре изгиба», статья Г. Э. Проктора.

Пример. Изгиб круглого бруса. Пусть контур сечения будет круг:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \quad (8.90)$$

Для удовлетворения уравнения (8.89) на контуре функцию $f(y)$, очевидно, можно задать так:

$$f(y) = \frac{Q}{2J}(r^2 - y^2). \quad (8.91)$$

После этого уравнение (8.87) получает такой вид:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\sigma Q y}{J(1+\sigma)} + \frac{Q y}{J} + C = \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{J} y + C. \quad (8.92)$$

Постараемся удовлетворить этому уравнению, задав функцию φ в следующем виде:

$$\varphi = m(r^2 - x^2 - y^2)y.$$

Для подстановки в уравнение (8.92) имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -2my; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -6my,$$

и уравнение (8.92) даёт

$$-8my = \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{J} y + C.$$

Отсюда, очевидно, $C = 0$,

$$m = -\frac{1}{8} \frac{(1+2\sigma)}{(1+\sigma)} \frac{Q}{J}.$$

Функция напряжений окончательно получается такой:

$$\varphi = \frac{1}{8} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{J} (x^2 + y^2 - r^2) y. \quad (8.91)$$

Подставляя это выражение функции φ , а также $f(y)$ из уравнения (8.91) в уравнение (8.86), находим касательные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \frac{Q}{2J} \frac{3+2\sigma}{4(1+\sigma)} \left(r^2 - x^2 - \frac{1-2\sigma}{3+2\sigma} y^2 \right), \\ Y_z &= -\frac{1}{4} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \frac{Q}{J} xy. \end{aligned} \right\} \quad (8.93)$$

Замечаем, что касательные напряжения зависят от пуассонова отношения σ ; полагая, например, $\sigma = \frac{1}{3}$, найдём

$$\left. \begin{aligned} X_z &= \frac{11}{32} \frac{Q}{J} \left(r^2 - x^2 - \frac{1}{11} y^2 \right), \\ Y_z &= -\frac{5}{16} \frac{Q}{J} xy. \end{aligned} \right\} \quad (8.94)$$

Так как, вообще говоря, $Y_z \neq 0$, то полное касательное напряжение

$$t = \sqrt{X_z^2 + Y_z^2}$$

направлено не вертикально. В точках сечения, расположенных на осях координат ($x=0, y=0$), составляющая Y_z отсутствует, и здесь t вертикально. На нейтральной оси ($x=0$) имеем

$$X_z = \frac{Q}{2J} \frac{3+2\sigma}{4(1+\sigma)} \left(r^2 - \frac{1-2\sigma}{3+2\sigma} y^2 \right).$$

Отсюда видно, что по нейтральной оси напряжения X_z распределяются неравномерно. Наибольшее их значение (в центре сечения при $y=0$) равно

$$X_z = \frac{Q}{2J} \frac{3+2\sigma}{4(1+\sigma)} r^2;$$

при $\sigma = \frac{1}{3}$ из уравнений (8.94) найдём

$$\max X_z = \frac{11}{32} \frac{Q}{J} r^2 = \frac{11}{32} \frac{Q_4 r^2}{\pi r^4} = \frac{11}{8} \frac{Q}{F} = 1,375 \frac{Q}{F}, \quad (8.95)$$

где $F = \pi r^2$ — площадь сечения бруса. Элементарный подсчёт по формуле $X_z = t = \frac{QS}{Jb}$ даёт

$$\max X_z = \frac{4Q}{3\pi r^2} = 1,33 \frac{Q}{F}.$$

Ошибка по сравнению с точным значением (8.95) составляет около $3,4\%$. Напряжениями Y_z в элементарном расчёте обычно пренебрегают.

* Г Л А В А IX.

**БОЛЕЕ ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.**

§ 47. О функциях гармонических и бигармонических.

В предыдущих главах нам приходилось встречаться с функциями гармоническими и бигармоническими. Из дальнейшего будет видно, что решение всех задач теории упругости очень тесно связано с этими функциями; в настоящем параграфе мы поэтому познакомимся ближе с некоторыми свойствами гармонических и бигармонических функций и общими методами построения последних.

Гармонической называется, как известно, функция

$$\varphi(x, y, z), \quad (9.1)$$

удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (9.2)$$

Гармонические функции иногда называются потенциалами Лапласа или лапласовыми потенциалами. Возьмём декартову систему координат x, y, z в пространстве: тогда полем функции $\varphi(x, y, z)$ называется та часть пространства, во всех точках которой функция $\varphi(x, y, z)$ принимает определённые конечные значения и остаётся однозначной. Если функция φ является потенциалом, то к ней предъявляется дополнительное требование: необходимо, чтобы в пределах поля существовали её первые частные производные; часто приходится требовать, чтобы существовали и производные высших порядков; например, из уравнения (9.2) видно, что для лапласова потенциала должны существовать производные по крайней мере второго порядка.

Если мы к функции (9.1) не предъявим никаких других требований кроме того, что она должна удовлетворять уравнению Лапласа, то заметим, что таких функций существует бесконечное множество. В частности, если нам известна какая-либо гармоническая функция, то, исходя из неё, можно получить сколько угодно новых гармонических функций, пользуясь свойством лапласова оператора, указанным в формуле (5.64) § 29.

Действительно, если $\varphi(x, y, z, a, b, c, \dots)$ есть гармоническая функция, причём a, b, c, \dots — какие-либо параметры или коэффициенты, входящие в её состав, то легко показать, что частная производная

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

где t — любая из величин x, y, z, a, b, c, \dots — также есть гармоническая функция. Проверим это:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \varphi;$$

но, так как φ есть гармоническая функция, то $\nabla^2 \varphi = 0$, а следовательно,

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0,$$

что и требовалось доказать. Ясно, что если существуют последние производные функции

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} \quad \text{и т. д.},$$

то все они являются также гармоническими функциями.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

или короче

$$\varphi = \frac{1}{r}, \quad (9.3)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ есть радиус-вектор из начала координат в точку (x, y, z) .

Прежде всего покажем, что функция (9.3) есть гармоническая. Предварительно заметим, что из зависимости

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (9.4)$$

получим

$$\frac{\partial (r^2)}{\partial x} = 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x, \quad (9.5)$$

или

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r};$$

таким же путём

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}. \quad (9.6)$$

На этом основании из (9.3) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) = -\frac{1 \cdot r^3 - 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x} x}{r^6} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}. \end{aligned} \right\} (9.7)$$

Аналогично дифференцируя по y и по z , получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{y^2}{r^5}; \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{z^2}{r^5}. \end{aligned} \right\} (9.8)$$

Складывая эти равенства почленно, находим

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -3 \frac{1}{r^3} + 3 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = -3 \frac{1}{r^3} + 3 \frac{1}{r^3} = 0,$$

что и требовалось доказать. Значит, функция (9.3) является лапласовым потенциалом. Полем этой функции является всё безграничное пространство, за исключением одной точки — начала координат, где функция (9.3) обращается в бесконечность.

Градиент функции (9.3) имеет такие проекции на оси координат [ср. формулы (9.7)]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{x}{r^3}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{y}{r^3}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{z}{r^3}. \end{aligned} \right\} (9.9)$$

Однако, обратим внимание на то, что

$$\frac{x}{r} = \cos(r, x); \quad \frac{y}{r} = \cos(r, y); \quad \frac{z}{r} = \cos(r, z),$$

и тогда формулы (9.9) перепишем так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \cos(r, x); \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \cos(r, y); \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \cos(r, z). \end{aligned} \right\} (9.10)$$

Отсюда заключаем, что

1) величина градиента равна $\frac{1}{r^2}$;

2) направлен он вдоль радиуса-вектора r к началу координат.

Такого рода поле получается, если в начале координат находится центр, притягивающий материальную точку по закону

всемирного тяготения (обратно пропорционально квадрату расстояния).

Так как функция $\frac{1}{r}$ есть функция гармоническая, то путём дифференцирования получим из неё ряд новых гармонических функций. Например, уравнения (9.9) дают нам три гармонические функции:

$$-\frac{x}{r^3}, \quad -\frac{y}{r^3}, \quad -\frac{z}{r^3}. \quad (9.11)$$

Функции (9.8), очевидно, также гармонические.

Докажем теперь одну лемму, весьма полезную для последующего: если $\psi(x, y, z)$ есть гармоническая функция, то имеем тождество

$$\nabla^2(x\psi) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (9.12)$$

в самом деле, дифференцируя последовательно функцию $x\psi$, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x\psi) &= \psi + x \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\psi) &= 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y}(x\psi) &= x \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x\psi) &= x \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial z}(x\psi) &= x \frac{\partial \psi}{\partial z}, & \frac{\partial^2}{\partial z^2}(x\psi) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

Складывая почленно равенства (9.13) и замечая, что $\nabla^2 \psi = 0$ по условию, убедимся в справедливости (9.12). Эта лемма, очевидно, может быть распространена таким образом: если ψ_1, ψ_2, ψ_3 — любые гармонические функции, то

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(x\psi_1) &= 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x}; \\ \nabla^2(y\psi_2) &= 2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y}; \\ \nabla^2(z\psi_3) &= 2 \frac{\partial \psi_3}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

На основании этих тождеств легко докажем следующую весьма важную теорему. Если $\varphi(x, y, z)$ — гармоническая функция, то

$$\Phi = x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (9.15)$$

— также гармоническая функция.

Так как производные функции φ будут также гармоническими функциями, то в (9.14) мы имеем право положить

$$\psi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \psi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \psi_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

После этого, складывая тождества (9.14) почленно, найдём

$$\nabla^2 \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 2\nabla^2 \varphi = 0,$$

что и требовалось доказать.

Функции Φ можно дать простое векторное выражение. Действительно, если r — радиус-вектор точки (x, y, z) , то

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos(r, x); \\ y &= r \cos(r, y); \\ z &= r \cos(r, z). \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

Далее, если $\nabla \varphi$ есть градиент функции φ или производная её по нормали $|\nabla \varphi| = \frac{d\varphi}{dn}$, то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{d\varphi}{dn} \cos \left(\frac{d\varphi}{dn}, x \right); \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{d\varphi}{dn} \cos \left(\frac{d\varphi}{dn}, y \right); \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \frac{d\varphi}{dn} \cos \left(\frac{d\varphi}{dn}, z \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

Подставляя из (9.16) и (9.17) в (9.15), получим

$$\Phi = \frac{d\varphi}{dn} r \left[\cos \left(\frac{d\varphi}{dn}, x \right) \cos(r, x) + \right. \\ \left. + \cos \left(\frac{d\varphi}{dn}, y \right) \cos(r, y) + \cos \left(\frac{d\varphi}{dn}, z \right) \cos(r, z) \right],$$

или

$$\Phi = \frac{d\varphi}{dn} r \cos \left(\frac{d\varphi}{dn}, r \right) \quad (9.18)$$

Но

$$\frac{d\varphi}{dn} \cos \left(\frac{d\varphi}{dn}, r \right) = \frac{d\varphi}{dr} *;$$

поэтому из (9.18) получаем следующее векторное выражение функции:

$$\Phi = x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = r \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (9.19)$$

§ 48. Бигармоническое уравнение.

Бигармоническим иногда называется дифференциальное уравнение вида

$$\nabla^2 \nabla^2 f(x, y, z) = 0. \quad (9.20)$$

*) Это следует из определения понятия производной от функции точки по данному направлению.

Функция f , удовлетворяющая этому уравнению, называется бигармонической. Уравнения типа (9.20) играют большую роль в теории упругости. Со случаем, когда функция f зависит только от двух переменных (x, y) , мы уже встречались в плоской задаче; там было показано, что функция напряжений должна удовлетворять бигармоническому уравнению (см. конец § 32)

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y) = 0.$$

Далее мы покажем, что уравнения Ламе (VI) § 18 при отсутствии объёмных сил ($X=Y=Z=0$) и уравнения Бельтрами VII § 29 также могут быть приведены к бигармоническим. Имея это в виду, мы сейчас укажем некоторые типы решений бигармонического уравнения, нужные для приложений. Решения эти указаны Буссинеском (Boussinesq); они тесно связаны с гармоническими функциями, чего вполне естественно ожидать, если мы примем во внимание весьма близкое родство между гармоническим уравнением (9.2) и бигармоническим (9.20).

Прежде всего заметим, что всякая гармоническая функция $\varphi(x, y, z)$ есть решение бигармонического уравнения, так как она удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \varphi = 0$, а потому и по-прежнему удовлетворяет уравнению (9.20): $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \nabla^2 0 = 0$. Таким образом, устанавливаем, что первый тип решений уравнения (9.20) представляется любой гармонической функцией.

Покажем теперь, что если ψ_1, ψ_2, ψ_3 — какие-либо гармонические функции, то функции

$$x\psi_1, \quad y\psi_2, \quad z\psi_3, \tag{9.21}$$

будут решениями бигармонического уравнения. Это легко сделать на основании вывода, резюмированного в формулах (9.14). Действительно, применив лапласов оператор к обеим частям первого из равенств (9.14), получим

$$\nabla^2 \nabla^2 (x\psi_1) = 2\nabla^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right).$$

Но так как ψ_1 есть гармоническая функция, то $\frac{\partial \psi_1}{\partial x}$ также будет гармонической; следовательно, правая часть последнего равенства равна нулю, а отсюда

$$\nabla^2 \nabla^2 (x\psi_1) = 0, \tag{9.22}$$

что и требовалось доказать.

Используя тем же путём второе и третье из равенств (9.14), покажем, что и остальные из функций (9.21) являются решениями бигармонического уравнения (9.20). Таким образом, мы приходим ко второму типу решений бигармонического уравнения в форме функций (9.21).

Если мы нашли два решения f_1 и f_2 уравнения (9.20), то сумма их также будет решением этого уравнения. Действительно, легко убедиться в том, что

$$\nabla^2 (f_1 + f_2) = \nabla^2 f_1 + \nabla^2 f_2.$$

Применив ещё раз оператор Лапласа к обеим частям этого равенства, получим

$$\nabla^2 \nabla^2 (f_1 + f_2) = \nabla^2 \nabla^2 f_1 + \nabla^2 \nabla^2 f_2,$$

но правая часть этого уравнения равна нулю, так как f_1 и f_2 являются решениями уравнения (9.20). Отсюда следует

$$\nabla^2 \nabla^2 (f_1 + f_2) = 0,$$

что и надо было доказать. Пользуясь этим выводом, мы получим третий тип решений бигармонического уравнения, суммируя решения первого и второго типов:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \varphi_1 + x\psi_1; \\ F_2 &= \varphi_2 + y\psi_2; \\ F_3 &= \varphi_3 + z\psi_3, \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ — какие-либо гармонические функции. Конечно, вместо этих функций можно брать любые частные производные их. Дальше нам понадобятся, например, три решения бигармонического уравнения следующего вида [по типу третьего из уравнений (9.23)]:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \varphi_1 + z \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ F_2 &= \varphi_2 + z \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ F_3 &= \varphi_3 + z \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и ψ — гармонические функции.

Покажем теперь, что функция вида

$$r^2 \psi \quad (9.25)$$

является решением бигармонического уравнения, если ψ есть функция гармоническая. Для этой цели займёмся составлением лапласова оператора функции (9.25); получаем

$$\frac{\partial (r^2 \psi)}{\partial x} = 2r \frac{\partial r}{\partial x} \psi + r^2 \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

но из (9.5) имеем

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x, \quad (9.26)$$

следовательно,

$$\frac{\partial (r^2\psi)}{\partial x} = 2x\psi + r^2 \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 (r^2\psi)}{\partial x^2} = 2\psi + 2x \frac{\partial\psi}{\partial x} + 2r \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + r^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

или, пользуясь (9.26),

$$\frac{\partial^2 (r^2\psi)}{\partial x^2} = 2\psi + 4x \frac{\partial\psi}{\partial x} + r^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial^2 (r^2\psi)}{\partial y^2} = 2\psi + 4y \frac{\partial\psi}{\partial y} + r^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 (r^2\psi)}{\partial z^2} = 2\psi + 4z \frac{\partial\psi}{\partial z} + r^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

Складывая последние три равенства почленно, найдём

$$\nabla^2 (r^2\psi) = 6\psi + 4 \left(x \frac{\partial\psi}{\partial x} + y \frac{\partial\psi}{\partial y} + z \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) + r^2 \nabla^2\psi;$$

так как по предположению ψ — гармоническая функция, то последний член исчезает и мы получаем

$$\nabla^2 (r^2\psi) = 6\psi + 4 \left(x \frac{\partial\psi}{\partial x} + y \frac{\partial\psi}{\partial y} + z \frac{\partial\psi}{\partial z} \right). \quad (9.27)$$

Но правая часть этого уравнения есть сумма двух решений гармонического уравнения [ср. формулу (9.15)], а потому она также является гармонической функцией. Следовательно, и левая часть $\nabla^2 (r^2\psi)$ представляет собою гармоническую функцию. Поэтому

$$\nabla^2 \nabla^2 (r^2\psi) = 0; \quad (9.28)$$

значит, функция (9.25) действительно есть решение бигармонического уравнения. Это есть новый — четвёртый — тип решений. Так как

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

— гармонические функции, то функции

$$r^2 \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad r^2 \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad r^2 \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

также будут решениями бигармонического уравнения. Суммируя эти решения с решениями первого типа $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, получим пятый тип решений:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \varphi_1 + r^2 \frac{\partial\psi}{\partial x}; \\ F_2 &= \varphi_2 + r^2 \frac{\partial\psi}{\partial y}; \\ F_3 &= \varphi_3 + r^2 \frac{\partial\psi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9.29)$$

Если к правым частям добавим ещё решения первого типа в виде функций

$$-a^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad -a^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad -a^2 \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

где a — постоянное число, то получим решения следующего — шестого — типа:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \varphi_1 + (r^2 - a^2) \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ F_2 &= \varphi_2 + (r^2 - a^2) \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ F_3 &= \varphi_3 + (r^2 - a^2) \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9.30)$$

§ 49. Приведение уравнений Ламе и Бельтрами к бигармоническим уравнениям.

Найденные нами частные решения бигармонического уравнения типов (9.24) и (9.29) имеют большое значение при решении задачи теории упругости в перемещениях, так как основные в этом методе уравнения Ламе

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X\rho &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y\rho &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z\rho &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (VI)$$

при отсутствии объёмных сил, т. е. при $X = Y = Z = 0$, легко приводятся к трём независимым бигармоническим уравнениям. Это обстоятельство значительно облегчает решение задачи.

Отбросив объёмные силы уравнения (VI), напишем в форме (VI') § 18:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + (k+1) \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0; \\ \nabla^2 v + (k+1) \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0; \\ \nabla^2 w + (k+1) \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.31)$$

где, согласно (3.15),

$$k = \frac{2\sigma}{1-2\sigma}.$$

Уравнения закона Гука соответственно этому напишем в форме (3.10):

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \mu (2e_{xx} + k\theta); \\ Y_y &= \mu (2e_{yy} + k\theta); \\ Z_z &= \mu (2e_{zz} + k\theta); \\ Y_z &= \mu e_{yz}; \\ Z_x &= \mu e_{zx}; \\ X_y &= \mu e_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (9.32)$$

Таким образом, уравнения (9.31) и (9.32) выражены через две упругие постоянные μ и k .

Обращаясь теперь к уравнениям Ламе (9.31), вспомним, что [§ 29, формулы (5.65)] в нашем случае, когда объёмных сил нет, объёмная деформация θ удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. является гармонической функцией:

$$\nabla^2 \theta = 0.$$

Производные

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

также будут гармоническими функциями, поэтому

$$\nabla^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \nabla^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \nabla^2 \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

На этом основании, применяя к уравнениям (9.31) оператор Лапласа, заметим, что они приведутся к виду

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 u &= 0, \\ \nabla^2 \nabla^2 v &= 0, \\ \nabla^2 \nabla^2 w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.33)$$

Особо важно то, что эти уравнения независимы, т. е. в каждое из них входит лишь одна из искоемых функций u , v , w , а так как эти уравнения — бигармонические, то выводы § 48 дадут нам возможность без труда подыскать для них сколько угодно частных решений *).

Обратимся теперь к уравнениям Бельтрами [(VII) § 29]. Мы имели [см. формулы (5.65) § 29 и (3.13) § 10] $\nabla^2 \theta = 0$; $\Theta = (3\lambda + 2\mu)\theta$. Отсюда получим $\nabla^2 \Theta = 0$, т. е. при отсутствии объёмных сил функция $\Theta = X_x + Y_y + Z_z$ является гармонической.

Примем ещё во внимание, что, например:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla^2 \Theta) = 0;$$

*) Правда, как мы увидим далее, не все эти решения будут удовлетворять исходным уравнениям (9.31).

тогда, применив оператор Лапласа к каждому из уравнений Бельтрами (VII), получим

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 X_x &= 0; & \nabla^2 \nabla^2 Y_z &= 0; \\ \nabla^2 \nabla^2 Y_y &= 0; & \nabla^2 \nabla^2 Z_x &= 0; \\ \nabla^2 \nabla^2 Z_z &= 0; & \nabla^2 \nabla^2 X_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

Значит, при отсутствии объёмных сил уравнения Ламе и Бельтрами приводятся к бигармоническим. Отсюда следует весьма важное заключение: все основные неизвестные функции в общей задаче теории упругости

$$\begin{aligned} &u, v, w; \\ &X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y \end{aligned}$$

являются функциями бигармоническими.

§ 50. Метод Буссинеска; приложение гармонических функций к разысканию частных решений уравнений Ламе.

Соображения §§ 48 и 49 показывают, что решения уравнений Ламе можно разыскивать как бигармонические функции, задавая их выражения в виде (9.24), (9.29) и (9.30); входящие в их состав гармонические функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi$ следует определить так, чтобы были удовлетворены уравнения Ламе и заданные граничные условия.

Исследуем решения типа (9.24):

$$\left. \begin{aligned} u &= \varphi_1 + z \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ v &= \varphi_2 + z \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ w &= \varphi_3 + z \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9.35)$$

и решения типа (9.29):

$$\left. \begin{aligned} u &= \varphi_1 + r^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ v &= \varphi_2 + r^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ w &= \varphi_3 + r^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (9.36)$$

Решений типа (9.30) мы не будем использовать, лишь отметим, что они нужны для задачи о равновесии упругого шара. Заметим, однако, следующее: вместо уравнений Ламе (9.31) мы путём дифференцирования получили уравнения (9.33) более высокого порядка, но более простого вида и нашли решения этих уравне-

ний (9.35) и (9.36). Однако, нельзя сказать, что (9.35) и (9.36) обязательно являются также решениями уравнений Ламе (9.31): решения уравнений Ламе всегда будут удовлетворять уравнениям (9.33), так как эти последние являются следствием уравнений Ламе; но благодаря более высокому порядку уравнений (9.33) они будут иметь более широкий класс решений, чем уравнения (9.31). Значит, нам придётся установить, при каких условиях (9.35) и (9.36) будут удовлетворять уравнениям (9.31); для этого надо, очевидно, подставить (9.35) и (9.36) в (9.31) *).

Займёмся решением (9.35). Для подстановки в (9.31) вычислим предварительно функции

$$\theta; \quad \nabla^2 u; \quad \nabla^2 v; \quad \nabla^2 w.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Складывая почленно эти уравнения и принимая во внимание, что функция ψ — гармоническая, найдём

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (9.37)$$

Далее, получим

$$\nabla^2 u = \nabla^2 \varphi_1 + \nabla^2 \left(z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right);$$

так как функции φ_1 и ψ — гармонические, то

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0$$

и согласно (9.14)

$$\nabla^2 \left(z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 v &= 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 w &= 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.38)$$

*) Заметим, что этот приём мы уже не раз применяли в §§ 25, 26 и 27.

Результаты (9.37) и (9.38) вносим в уравнения (9.31)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + (k+1) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + (k+1) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] = 0.$$

Делая приведение в квадратных скобках, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(k+1) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + (k+3) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = 0.$$

Точно такие же выкладки для второго и третьего уравнений дают

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(k+1) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + (k+3) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[(k+1) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + (k+3) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = 0.$$

Эти три уравнения удовлетворяются только при условии

$$(k+1) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + (k+3) \frac{\partial \psi}{\partial z} = C, \quad (9.39)$$

где C — произвольная постоянная.

Уравнение (9.39) и представляет собою то интересующее нас условие, при котором функции (9.35) будут решением системы уравнений Ламе (9.31). Произвольная постоянная C в (9.39) роли не играет, и мы положим её равной нулю *). Отсюда

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{k+1}{k+3} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right); \quad (9.40)$$

Получаем следующий вывод: частное решение системы уравнений Ламе

$$\nabla^2 u + (k+1) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0;$$

$$\nabla^2 v + (k+1) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0;$$

$$\nabla^2 w + (k+1) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

*) Действительно, мы, не нарушая общности уравнения (9.39), можем положить $C = D(k+3)$, где D — новая произвольная постоянная; обозначим ещё $\psi - Dz = \psi_1$, где ψ_1 будет, очевидно, как и ψ , гармонической функцией, тогда (9.39) получит вид

$$(k+1) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) + (k+3) \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0.$$

можно получить в форме

$$\left. \begin{aligned} u &= \varphi_1 + z \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ v &= \varphi_2 + z \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ w &= \varphi_3 + z \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (9.41)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — произвольные гармонические функции, а гармоническая функция ψ определяется из уравнения (9.40). Этим путём, очевидно, можно получить огромное количество частных решений, пользуясь имеющейся произвольностью выбора гармонических функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Рассмотрим теперь форму (9.36) решения бигармонических уравнений (9.33) и установим, при каких условиях это решение удовлетворяет уравнениям Ламе (9.31). Составляем на основании (9.36) выражение объёмного расширения θ . Получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right); \quad (9.42)$$

но

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial (r^2)}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

или на основании (9.5)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 2x \frac{\partial \psi}{\partial x} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Вносим это в (9.42); аналогично вычисляем и остальные производные, нужные для θ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + 2x \frac{\partial \psi}{\partial x} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + 2y \frac{\partial \psi}{\partial y} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + 2z \frac{\partial \psi}{\partial z} + r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.43)$$

Складывая эти равенства почленно и помня, что

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0,$$

найдем

$$\theta = \theta_0 + 2\Phi, \quad (9.44)$$

где введены следующие сокращённые обозначения *):

$$\theta_0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}; \quad (9.45)$$

$$\Phi = x \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial y} + z \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (9.46)$$

*) См. формулу (9.19).

Переходим теперь к составлению операторов Лапласа:

$$\nabla^2 u, \quad \nabla^2 v, \quad \nabla^2 w.$$

Первое из уравнений (9.36) даёт

$$\nabla^2 u = \nabla^2 \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (9.47)$$

так как $\nabla^2 \varphi_1 = 0$.

Для раскрытия правой части (9.47) воспользуемся формулой (9.27), заменив в ней ψ на $\frac{\partial \psi}{\partial x}$:

$$\nabla^2 u = 6 \frac{\partial \psi}{\partial x} + 4 \left(x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right). \quad (9.48)$$

Здесь скобку правой части преобразуем на основании следующих соображений:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right); \\ z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Складывая почленно эти тождества и пользуясь обозначением (9.46), найдём

$$x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Внося это в (9.48), получим

$$\nabla^2 u = 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + 4 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2 \frac{\partial}{\partial x} (\psi + 2\Phi).$$

Совершенно таким же путём получим

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 v &= 2 \frac{\partial}{\partial y} (\psi + 2\Phi), \\ \nabla^2 w &= 2 \frac{\partial}{\partial z} (\psi + 2\Phi). \end{aligned} \right\} \quad (9.49)$$

Вносим (9.44) и (9.49) в первое из уравнений (9.31):

$$2 \frac{\partial}{\partial x} (\psi + 2\Phi) + (k+1) \frac{\partial}{\partial x} (\theta_0 + 2\Phi) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} [(k+1) \theta_0 + 2\psi + 2(k+3) \Phi] = 0.$$

Остальные два из уравнений (9.31) дадут:

$$\frac{\partial}{\partial y} [(k+1) \theta_0 + 2\psi + 2(k+3) \Phi] = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [(k+1) \theta_0 + 2\psi + 2(k+3) \Phi] = 0.$$

Отсюда получаем вывод

$$(k+1)\theta_0 + 2\psi + 2(k+3)\Phi = \text{const.}$$

Не уменьшая общности этого уравнения, мы можем постоянную правую часть его положить равной нулю *); деля всё уравнение на $2(k+3)$, найдём

$$\Phi + \frac{1}{k+3}\psi = -\frac{k+1}{2(k+3)}\theta_0. \quad (9.50)$$

Припомним теперь, что согласно формуле (9.19) § 46 функция Φ имеет векторное выражение

$$\Phi = r \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

уравнение (9.50) перепишем так:

$$r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{k+3}\psi = -\frac{k+1}{2(k+3)}\theta_0,$$

или

$$r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \alpha\psi = -\beta\theta_0, \quad (9.51)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{k+3}; \quad \beta = \frac{k+1}{2(k+3)}.$$

Если от декартовых координат x, y, z перейдём к другой системе, в которой одной из координат является радиус-вектор r (например, к полярным координатам в пространстве), то производную $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ от функции ψ по направлению r можно рассматривать как частную производную ψ по переменной r ; при этом, очевидно, предполагается, что две другие координаты, определяющие направление радиуса-вектора r , остаются постоянными. Если эти же рассуждения приложим к функции θ_0 , то уравнение (9.51) можно будет рассматривать как обыкновенное линейное дифференциальное уравнение относительно функции ψ . Интегрируя его, найдём ψ как функцию от радиуса-вектора r ; однако, произвольная постоянная, которая при этом войдёт, будет, вообще говоря, зависеть от двух других координат, т. е. будет зависеть от направления радиуса-вектора r .

Уравнение (9.51) интегрируем обычным способом подстановки:

$$\psi = UV, \quad (9.52)$$

где U и V — две новые функции от r . Подставляя это в (9.51), находим

$$r(UV' + U'V) + \alpha UV = -\beta\theta_0,$$

*) Эту постоянную можно присоединить к любой из функций θ_0 или ψ левой части уравнения.

или

$$rUV' + (rU' + \alpha U)V = -\beta\theta_0. \quad (9.53)$$

Подбираем функцию U из условия

$$rU' + \alpha U = 0 \text{ или } r \frac{\partial U}{\partial r} = -\alpha U. \quad (9.54)$$

Отсюда

$$\frac{\partial U}{U} = -\alpha \frac{dr}{r}.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln U = -\alpha \ln r \text{ или } U = r^{-\alpha}. \quad (9.55)$$

На основании (9.54) и (9.55) уравнение (9.53) получает вид

$$r^{-\alpha+1} \frac{dV}{dr} = -\beta\theta_0,$$

или

$$\frac{dV}{dr} = -\beta r^{\alpha-1} \theta_0.$$

Умножая обе части на dr и интегрируя, находим

$$V = -\beta \int \theta_0 r^{\alpha-1} dr + C.$$

Подставляя отсюда и из (9.55) в (9.52), находим функцию ψ :

$$\psi = -\beta r^{-\alpha} \int \theta_0 r^{\alpha-1} dr + Cr^{-\alpha}. \quad (9.56)$$

Здесь, как указано выше, постоянная C , вообще говоря, зависит от направления радиуса-вектора r , т. е. при C , равном постоянному числу, (9.56) даёт закон изменения функции ψ при движении по выбранному направлению, проведенному из начала координат.

§ 51. Действие нагрузки на среду, ограниченную плоскостью. (задача Буссинеска.)

Аналогичная задача рассматривалась нами в § 40 для случая плоской деформации; там мы предполагали, что нагрузка равномерно распределена по безграничной прямой на плоскости, ограничивающей среду. Здесь мы укажем метод решения задачи в общем случае, когда на рассматриваемую среду действует произвольная нагрузка; самую среду для краткости будем называть полупространством, а плоскость, её ограничивающую, — границей.

Начало координат выберем где-либо на границе; оси Ox и Oy направим в граничной плоскости, а ось Oz нормально к ней

по внешней нормали. Тогда интересующую нас задачу можно формулировать так: требуется найти напряжения и перемещения в любой точке полупространства (т. е. для любых x , y и $z < 0$), если на границе $z=0$ заданы напряжения от нагрузки X_z , Y_z , Z_z как функции от x и y . Если бы на границе были заданы не напряжения, а перемещения u , v , w , то решение задачи можно было бы найти прямо в форме (9.41). Действительно, если задано, что при $z=0$ на границе

$$u = f_1(x, y); \quad v = f_2(x, y); \quad w = f_3(x, y),$$

то, полагая в (9.41) $z=0$, найдём, что

$$\varphi_1(x, y, 0) = f_1(x, y); \quad \varphi_2(x, y, 0) = f_2(x, y); \quad \varphi_3(x, y, 0) = f_3(x, y);$$

значит, гармонические функции φ_1 , φ_2 , φ_3 надо найти из условия, чтобы на границе $z=0$ они обращались в заданные функции f_1 , f_2 и f_3 ; это есть основная краевая задача теории потенциала, допускающая вполне определённое решение; определив функции φ_1 , φ_2 и φ_3 , далее по (9.40) найдём функцию ψ и, внося всё это в (9.41), закончим решение задачи.

Однако, мы считаем заданными на границе напряжения, и потому ход решения задачи придётся несколько осложнить. Пусть напряжения на границе заданы в виде функций от x и y следующим образом:

$$Z_x = \Phi_1(x, y); \quad Z_y = \Phi_2(x, y); \quad Z_z = \Phi_3(x, y). \quad (9.57)$$

Так как мы решаем задачу в перемещениях (гл. IV, § 17), то левые части этих равенств выразим через перемещения u , v и w , пользуясь законом Гука (9.32) и уравнениями Коши (III) § 17:

$$\left. \begin{aligned} \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} + k\theta \right) &= \Phi_1; \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \Phi_2; \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \Phi_3. \end{aligned} \right\} \quad (9.58)$$

Эти уравнения справедливы только на границе, т. е. при $z=0$. Теперь предположим, что мы нашли три гармонические функции:

$$\omega_1(x, y, z), \quad \omega_2(x, y, z), \quad \omega_3(x, y, z),$$

такие, что на границе $z=0$ они обращаются в заданные нами функции (9.57) с точностью до постоянного множителя μ , который мы вводим для упрощения дальнейших выкладок:

$$\left. \begin{aligned} \mu \omega_1(x, y, 0) &= \Phi_1(x, y); \\ \mu \omega_2(x, y, 0) &= \Phi_2(x, y); \\ \mu \omega_3(x, y, 0) &= \Phi_3(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (9.59)$$

Внесём отсюда значения Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 в правые части уравнений (9.58), а в левых заменим u , v и w их выражениями из (9.41) и (9.37); получаем

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + 2z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + k \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= \omega_1; \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} &= \omega_2; \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \omega_3. \end{aligned}$$

В этих уравнениях отбросим члены, имеющие множитель z (так как на границе $z=0$), и заметим, что на основании (9.37) и (9.40)

$$\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{k+3}{k+1} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{2}{k+1} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (9.60)$$

Тогда предыдущие уравнения получат такой вид:

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{2}{k+1} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \omega_1; \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \omega_2; \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \omega_3. \end{aligned} \right\} \quad (9.61)$$

Эти уравнения, как мы уже говорили, имеют место на границе полупространства. Однако как левые, так и правые части их являются гармоническими функциями; известно, что если две гармонические функции совпадают на границе области, то они тождественно одинаковы во всей области. Отсюда следует, что уравнения (9.61) справедливы во всём полупространстве $z < 0$. Это заключение позволит нам, исключив из (9.61) и (9.40) три функции φ_1 , φ_2 и φ_3 , выразить ψ через ω_1 , ω_2 , ω_3 , которые предполагаются уже определёнными ранее для любой точки полупространства.

Продифференцируем первое из уравнений (9.61) по z , второе по x и третье по y и сложим результаты почленно; в полученном при этом уравнении исчезает ряд членов, так как функции φ_1 , φ_2 , φ_3 и ψ — гармонические, и потому

$$\nabla^2 \varphi_1 = \nabla^2 \varphi_2 = \nabla^2 \varphi_3 = \nabla^2 \psi = 0.$$

Мы найдём следующий результат:

$$-\frac{k-1}{k+1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) = \frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y}.$$

Чтобы исключить отсюда функции φ_1 , φ_2 , φ_3 , воспользуемся уравнением (9.40) и получим окончательно

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right). \quad (9.62)$$

После этого ход решения задачи представится в следующем виде:

1. По заданным функциям Φ_1, Φ_2, Φ_3 [см. уравнения (9.57)] находим гармонические функции $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, удовлетворяющие на границе условиям (9.59).

2. Из (9.62) двукратным интегрированием находим функцию ψ .

3. Из (9.61) разыскиваем гармонические функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

4. Внося значения ψ и φ в (9.41), находим перемещения u, v, w .

5. Из закона Гука (9.32) находим напряжения в произвольной точке полупространства.

В последующем мы ограничимся такими случаями нагрузки на границе, когда равнодействующая её есть величина конечная. Тогда при безграничном возрастании z (т. е. для бесконечно удалённого горизонтального сечения полупространства) все перемещения и напряжения должны стремиться к нулю; отсюда на основании уравнений (9.41) замечаем, что при $z \rightarrow -\infty$ функция ψ и первые её производные также должны стремиться к нулю. Замечанием этим мы воспользуемся при определении функции ψ из уравнения (9.62). Интегрируя его дважды по z в пределах от $-\infty$ до произвольного значения z , получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = - \int_{-\infty}^z \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) dz + f_1(x, y);$$

$$\psi = - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^z \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) dz dz + z f_1(x, y) + f_2(x, y).$$

Но при $z = -\infty$ левые части обоих этих равенств по условию должны обращаться в нуль; так как при этом интегралы правых частей также обращаются в нуль, то заключаем, что

$$f_1 = f_2 = 0,$$

и получаем окончательно:

$$\psi = - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^z \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) dz dz. \quad (9.63)$$

Первый этап указанного выше хода решения нашей задачи ставит нас перед необходимостью решить краевую задачу Дирихле для гармонических функций $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ [см. формулы (9.59)]. Однако эта задача, как показал Буссинеск, легко решается в том случае, когда нагрузка состоит из одной сосредоточенной силы, приложенной к какой-либо точке границы; отсюда к слу-

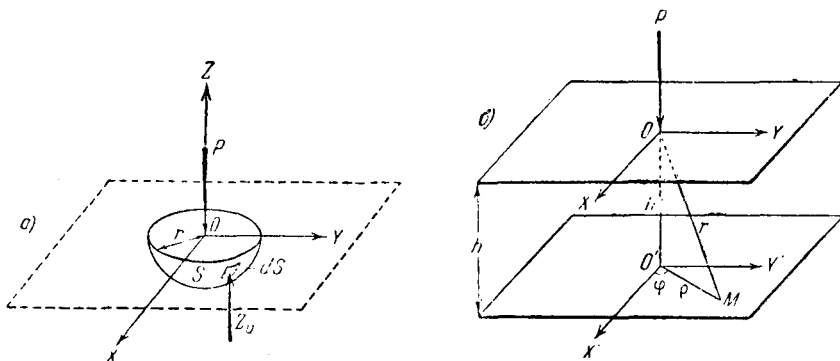
чаю произвольной нагрузки можно перейти примерно таким же приёмом, какой мы в § 40 применили к соответственной плоской задаче.

§ 52. Действие нормальной к границе сосредоточенной силы, приложенной в начале координат.

Условия на границе полупространства [см. уравнения (9.57)] в этом случае таковы:

1. Функция $\Phi_2 = \Phi_3 = 0$ на всей границе.

2. Функция Φ_1 равна нулю на всей границе, за исключением начала координат ($x=y=0$), где она обращается в бесконечность.



Фиг. 89.

Из этих условий нам следует найти [ср. условия (9.59)] гармонические функции $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Но можно доказать, что если гармоническая функция равна нулю на границе области, то она равна нулю и всюду в области; поэтому из условий $\Phi_2 = \Phi_3 = 0$ на границе полупространства мы заключаем, что $\omega_2 = \omega_3 = 0$ во всём полупространстве.

Остаётся найти функцию $\omega_1(x, y, z)$ из условия, что на всей границе ($z=0$) она равна нулю, за исключением начала координат ($x=y=z=0$), где она имеет особенность, ибо обращается в бесконечность; характер этой особенности надо ближе рассмотреть, чтобы точнее определить поведение функции на границе и вблизи особой точки.

Вырежем из полупространства полусферу радиусом r с центром в начале координат O ; из условия равновесия этой полусферы следует (фиг. 89, а), что

$$\int Z_v dS = P,$$

где Z_v , как обычно, обозначает проекцию на ось Oz напряжения

по площадке dS поверхности полусферы; интеграл распространён на поверхность полусферы. По теореме о среднем значении интеграла получаем

$$\int Z_v dS = Z_{vm} \int dS = Z_{vm} \cdot 2\pi r^2,$$

где Z_{vm} — некоторое среднее напряжение на поверхности полусферы. Отсюда

$$Z_{vm} \cdot 2\pi r^2 = P$$

и, наконец,

$$Z_{vm} = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{C}{r^2}. \quad (9.64)$$

Это заключение относится к некоторому среднему напряжению на поверхности полусферы; однако, отсюда можно сделать весьма важный вывод, что вообще напряжения в полупространстве от действия силы P при приближении к точке её приложения возрастают со скоростью того же порядка, как и (9.64), где r — расстояние от данной точки до точки приложения силы.

Но, как видно из (9.57) и (9.59), функция ω_1 есть величина того же порядка, как и напряжение; значит, она также должна:

1) обращаться в нуль всюду на границе, кроме начала координат;

2) обращаться в бесконечность такого же порядка как $\frac{1}{r^3}$ при $r \rightarrow 0$;

3) быть функцией гармонической, т. е. удовлетворять уравнению $\nabla^2 \omega_1 = 0$ всюду, кроме начала координат.

Всем этим условиям удовлетворяет последняя из функций (9.11), указанных в § 47; мы возьмём её в форме

$$\omega_1 = \frac{Cz}{r^3},$$

где C — произвольная постоянная интегрирования; далее её мы свяжем с величиной силы P . Таким образом, примем

$$\omega_1 = \frac{Cz}{r^3}; \quad \omega_2 = \omega_3 = 0. \quad (9.65)$$

Переходим к разысканию функции ψ ; из уравнения (9.63) имеем

$$\psi = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^z \frac{\partial \omega_1}{\partial z} dz dz = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \omega_1 dz.$$

Но в § 47 мы видели, что [ср. (9.7)]

$$\frac{z}{r^3} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \right).$$

Поэтому

$$\psi = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{C}{r} \right) dz = \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{r}. \quad (9.66)$$

Вычисляем функции φ_1 , φ_2 , φ_3 из уравнений (9.61). Первое из них даёт

$$2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = \omega_1 - \frac{2}{k+1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{Cz}{r^3} + \frac{2}{k+1} \frac{C}{2} \frac{z}{r^3} = \frac{k+2}{k+1} \frac{Cz}{r^3},$$

но

$$\frac{k+2}{k+1} = 2(1-\sigma).$$

Поэтому имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} &= C(1-\sigma) \frac{z}{r^3}, \\ \varphi_3 &= -\frac{C(1-\sigma)}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (9.67)$$

Пользуясь вторым из уравнений (9.61), находим φ_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{C(1-2\sigma)}{2} \frac{x}{r^3}, \\ \varphi_1 &= -\frac{C(1-2\sigma)}{2} x \int \frac{dz}{r^3}. \end{aligned}$$

Чтобы взять этот интеграл, припомним, что

$$r = \sqrt{z^2 + \xi^2}, \quad \text{где } \xi^2 = x^2 + y^2,$$

и применим подстановку Эйлера

$$r = t + z,$$

где t — новая переменная. Имеем

$$z = -\frac{t^2 - \xi^2}{2t}; \quad dz = -\frac{t^2 + \xi^2}{2t^2} dt; \quad r = \frac{t^2 + \xi^2}{2t}.$$

Внося это в интеграл, получим

$$\int \frac{dz}{r^3} = -4 \int \frac{t dt}{(t^2 + \xi^2)^2} = \frac{2}{t^2 + \xi^2} = \frac{1}{r(r-z)},$$

и потому

$$\varphi_1 = -\frac{C(1-2\sigma)}{2} \frac{x}{r(r-z)}. \quad (9.68)$$

Пользуясь третьим из уравнений (9.61), совершенно так же находим *)

$$\varphi_2 = -\frac{C(1-2\sigma)}{2} \frac{y}{r(r-z)}. \quad (9.69)$$

Теперь нам остаётся найденные функции (9.66), (9.67), (9.68) и (9.69) внести в уравнения (9.41), и мы получим следующие

*) Здесь, как и в (9.67) и (9.68), при вычислении неопределённых интегралов отброшены произвольные постоянные из того соображения, что функции φ_1 , φ_2 , φ_3 при $z \rightarrow \infty$ должны обращаться в нуль

выражения перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{C}{2} \left[(1-2\sigma) \frac{x}{r(r-z)} + \frac{xz}{r^3} \right]; \\ v &= -\frac{C}{2} \left[(1-2\sigma) \frac{y}{r(r-z)} + \frac{yz}{r^3} \right]; \\ w &= -\frac{C}{2} \left[2(1-\sigma) \frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9.70)$$

В дополнение мы выведем выражение объёмного расширения, необходимое при разыскании напряжений. Для этой цели проще всего воспользоваться уравнением (9.60), внося в него значение функции ψ из (9.66):

$$\theta = -\frac{2}{k+1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{C}{k+1} \frac{z}{r^3} = C(1-2\sigma) \frac{z}{r^3}. \quad (9.71)$$

Имея выражения (9.70) и (9.71), можем вычислить компоненты напряжения по формулам закона Гука (9.32) и уравнениям Коши (III). Опуская соответствующие выкладки, приводим окончательный результат:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= C\mu \left\{ \frac{3x^2z}{r^5} - (1-2\sigma) \left[\frac{r^2+rz-z^2}{r^3(r-z)} - \frac{x^2(2r-z)}{r^3(r-z)^2} \right] \right\}; \\ Y_y &= C\mu \left\{ \frac{3y^2z}{r^5} - (1-2\sigma) \left[\frac{r^2+rz-z^2}{r^3(r-z)} - \frac{y^2(2r-z)}{r^3(r-z)^2} \right] \right\}; \\ Z_z &= 3C\mu \frac{z^3}{r^5}; \\ Y_z &= 3C\mu \frac{yz^2}{r^5}; \\ Z_x &= 3C\mu \frac{xz^2}{r^5}; \\ X_y &= C\mu \left[\frac{3xyz}{r^5} + (1-2\sigma) \frac{xy(2r-z)}{r^3(r-z)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9.72)$$

Теперь остаётся определить вошедшую в выражения напряжений постоянную C таким образом, чтобы нагрузка на границе (в начале координат) приводилась к заданной силе P . Для этого достаточно потребовать, чтобы равнодействующая нормальных усилий $Z_z dS$ (фиг. 89, б) по любому горизонтальному сечению полупространства на постоянной глубине $z = -h$ была равна $-P$ (под P разумеем абсолютную величину силы и предполагаем её сжимающей). Отсюда получаем условие

$$\int Z_z dS = -P,$$

где интеграл распространяется на всю плоскость $z = -h$, парал-

тельную границу. Подставляя вместо Z_z его выражение (9.72), найдём

$$-3C_\mu h^3 \int \frac{dS}{r^5} = -P. \quad (9.73)$$

Для вычисления имеющегося здесь интеграла мы (фиг. 89, б) воспользуемся полярными координатами ρ и φ . К этим переменным преобразуем интеграл. Получаем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2} = \sqrt{\rho^2 + h^2}.$$

Элемент площади в полярных координатах, как известно, будет $dS = \rho d\rho d\varphi$. Внося всё это в интеграл равенства (9.73), будем иметь

$$3C_\mu h^3 \iint \frac{\rho d\rho d\varphi}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} = P,$$

или

$$3C_\mu h^3 \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi = P;$$

выполняем интегрирование по φ , а затем по ρ :

$$\int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d(\rho^2 + h^2)}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{(\rho^2 + h^2)^{-\frac{3}{2}}}{\left(-\frac{3}{2}\right)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{3h^3}.$$

Таким образом, предыдущее уравнение даёт

$$3C_\mu h^3 \cdot 2\pi \frac{1}{3h^3} = P,$$

а отсюда

$$C_\mu \cdot 2\pi = P; \quad C = \frac{P}{2\pi\mu}. \quad (9.74)$$

Остаётся внести это значение C в уравнения (9.72) и (9.70), и мы получим окончательные выражения напряжений и перемещений.

Относительно формул (9.70) и (9.72) необходимо сделать такую же оговорку, какую мы делали в начале § 40 для аналогичной плоской задачи: выражения (9.70) и (9.72) справедливы во всём полупространстве, за исключением небольшой области вблизи начала координат (точка приложения сосредоточенной силы), где напряжения переходят предел упругости данного материала. В этой области закон Гука, на котором основан весь вывод, не имеет места; пригодность нашего вывода в остальной части полупространства, как и в задаче § 40, определяется принципом Сен-Венана.

Проделанное нами решение задачи о действии сосредоточенной силы на границу полупространства основывалось на выражениях перемещений в форме (9.35) при условии (9.40).

Аналогичным путём решается задача о действии сосредоточенной силы в точке неограниченного пространства; для этого следует в качестве исходного пункта взять выражения перемещений (9.36) при условии (9.56)*).

Лява показал, что решение Буссинеска (9.70) и (9.72) для сосредоточенной силы может быть распространено на случай распределённой нагрузки интенсивности $q(\xi, \eta)$, находящейся на границе полупространства, где ξ, η — координаты некоторой точки нагруженной части границ; тогда можем принять, что на элементарной площадке dS в этой точке приложена элементарная сосредоточенная сила

$$q(\xi, \eta) dS. \quad (9.75)$$

Суммируя действие таких сил, получим перемещения и напряжения в упругом полупространстве от заданной распределённой нагрузки. Формулы Лява для перемещений в этом случае даны в его курсе теории упругости, а также в «Кратком курсе теории упругости» Л. С. Лейбензона.

Очень просто получается наиболее важная в приложениях формула для перемещения w точки на границе $z=0$, перпендикулярного к ней; для элементарной нагрузки (9.75) имеем согласно третьей из формул (9.70) и формуле (9.74), полагая $z=0$:

$$\delta w = -\frac{q(\xi, \eta) dS}{4\pi\mu} 2(1-\sigma) \frac{1}{r'},$$

где

$$r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

есть расстояние от груза (9.75) до точки границы x, y , в которой определяется перемещение. Выражение δw следует просуммировать по координатам ξ и η для всех точек нагруженной области; получим выражение полного вертикального перемещения точки (x, y) границы:

$$w = -\frac{1-\sigma}{2\pi\mu} \int \frac{q(\xi, \eta)}{r'} dS = -\frac{1-\sigma^2}{\pi E} \int \frac{q(\xi, \eta)}{r'} d\xi d\eta. \quad (9.76)$$

Случай нагрузки, распределённой на границе полупространства, послужил Герцу исходным пунктом для решения задачи о сжатии двух тел, органических кривыми поверхностями. В теории Герца

*) См. Трещин, Математическая теория упругости, ГТТИ, 1932 г., стр. 74.

формула (9.76) является основной. Эта же формула лежит в основе многих работ, касающихся теории расчёта грунтов как упругих оснований для различного рода зданий и сооружений.

Мы рассмотрели в этом параграфе случай сосредоточенной силы, нормальной к границе полупространства. Если сила P направлена в плоскости основания, например, вдоль оси Ox , то весь ход решения изменится лишь в том смысле, что вместо (9.65) надо положить $\omega_1 = \omega_3 = 0$, $\omega_2 = \frac{Cz}{r^3}$ и соответственно выполнить все последующие выкладки.

Имея решения для случаев вертикальной и горизонтальной сил, можно, конечно, получить отсюда перемещения и напряжения для силы, наклонённой к границе под произвольным углом.

Рассмотренные в настоящем параграфе решения Буссинеска вида (9.35) и (9.33), выраженные через три произвольные гармонические функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, не являются общими решениями уравнений теории упругости, хотя они и позволяют решить большое количество задач. Общее решение, выражающееся, при отсутствии объёмных сил, через три произвольные бигармонические функции, найдено академиком Б. Г. Галеркиным *).

§ 53. Решение плоской задачи теории упругости в функциях комплексной переменной.

В предыдущих параграфах (47 — 52) было выяснено важное значение гармонических функций от трёх переменных x, y, z при построении решений основных уравнений теории упругости. Обращаясь к плоской задаче, заметим, что здесь мы будем иметь дело с гармоническими функциями на плоскости, которые весьма тесно связаны с аналитическими функциями комплексной переменной

$$z = x + iy.$$

Сейчас мы приведём достаточно простые выкладки формального характера, которые подтвердят эту связь и, вместе с тем, будут полезны для последующего. Заменим независимые переменные x и y другими переменными z и \bar{z} по формулам

$$\left. \begin{aligned} z &= x + iy; \\ \bar{z} &= x - iy. \end{aligned} \right\} \quad (9.77)$$

*) См., например, Л. С. Лейбензон, Краткий курс теории упругости, Гостехиздат, гл. IV, § 16.

Очевидно, что z и \bar{z} — два взаимно сопряжённых комплексных числа. Дифференцируя (9.77) по x и по y , найдём

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i, \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} &= 1; \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = -i. \end{aligned} \right\} \quad (9.78)$$

Рассмотрим какую-либо функцию $f(x, y)$ и предположим, что независимые переменные её x и y заменены переменными z и \bar{z} согласно (9.77). Тогда при дифференцировании этой функции по x и по y необходимо применить правило дифференцирования сложной функции. Например:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x},$$

или, пользуясь (9.78), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ \text{и аналогично} \end{aligned} \right\} \quad (9.79)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial z} i - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} i. \end{aligned} \right\}$$

Из (9.79) сейчас же находим равенства, нужные для последующего:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} &= 2 \frac{\partial f}{\partial z}; \\ \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} &= 2 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.80)$$

Дифференцируя (9.79) соответственно по x и по y и снова пользуясь (9.78), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства почленно, получим формулу преобразования лапласова оператора к переменным z и \bar{z} :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (9.81)$$

Значит, уравнение Лапласа $\nabla^2 f = 0$ в новых переменных получает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0,$$

и потому сразу найдём общее его решение в форме

$$f = F_1(z) + F_2(\bar{z}), \quad (9.82)$$

где F_1 и F_2 — произвольные аналитические функции переменных z и \bar{z} (соответственно). Правильность решения (9.82) проверяется дифференцированием.

Значит, всякая гармоническая функция согласно (9.82) может быть представлена в виде суммы двух функций комплексных переменных z и \bar{z} . Это обстоятельство лежит в основе нескольких способов приложения комплексной переменной к плоской задаче теории упругости. Наиболее важные заслуги в этом отношении принадлежат Г. В. Колосову *) и особенно Н. И. Muskhelishvili, развившему метод Г. В. Колосова и построившему законченную теорию этого вопроса **). Из более ранних работ следует отметить работу А. Лява, изложенную в его курсе теории упругости (см. также «Краткий курс ...» Л. С. Лейбензона и «Теорию упругости» С. П. Тимошенко), и интересный способ, предложенный Файлоном ещё в 1903 г. ***).

§ 54. Метод Л. Файлона.

Метод Файлона мы здесь изложим, так как он наиболее просто и естественно приводит к решению задачи; со способами Лява и Н. И. Muskhelishvili можно ознакомиться по указанным выше источникам.

Рассмотрим случай плоской деформации при отсутствии объёмных сил; уравнения Ламе для этого случая получим из (9.31) § 49, положив $\omega = 0$ и считая u и v функциями только от x и y :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + (k+1) \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0; \\ \nabla^2 v + (k+1) \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.83)$$

где

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (9.84)$$

Для преобразования к новым независимым переменным z и \bar{z} умножим второе из уравнений (9.83) на $\pm i$ и сложим

*) Г. В. Колосов, Об одном приложении функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости, Юрьев, 1909 г.

***) Н. И. Muskhelishvili, Некоторые задачи математической теории упругости, АН СССР, 1933 и 1935 гг.

***) Philosophical Transactions R. S. London; т. 201, 1903, стр. 69, § 4.

с первым; получим следующие два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(u + iv) + (k + 1) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + i \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= 0; \\ \nabla^2(u - iv) + (k + 1) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - i \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.85)$$

Заменяем теперь искомые функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ новыми U и \bar{U} по формулам

$$\left. \begin{aligned} U &= u + iv; \\ \bar{U} &= u - iv. \end{aligned} \right\} \quad (9.86)$$

Пользуясь (9.79), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= i \frac{\partial v}{\partial z} - i \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства почленно, имеем

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} (u + iv) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u - iv),$$

или на основании (9.86)

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}. \quad (9.87)$$

Таким образом, θ выражено через новые функции (9.86) и новые независимые переменные z и \bar{z} . Далее, для преобразования (9.85) имеем из (9.81) и (9.80)

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(u + iv) &= \nabla^2 U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}; \\ \nabla^2(u - iv) &= \nabla^2 \bar{U} = 4 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z \partial \bar{z}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.88)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} + i \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 2 \frac{\partial \theta}{\partial z} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right); \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} - i \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 2 \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.89)$$

Внося (9.88) и (9.89) в уравнения (9.85), представим их в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[(k + 1) \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right) + 2 \frac{\partial U}{\partial z} \right] &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[(k + 1) \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right) + 2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование, получим (после небольшого приведения в квадратных скобках).

$$(k+3) \frac{\partial U}{\partial z} + (k+1) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} = f'_1(z);$$

$$(k+1) \frac{\partial U}{\partial z} + (k+3) \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} = f'_2(\bar{z}),$$

где $f'_1(z)$ и $f'_2(\bar{z})$ — произвольные аналитические функции переменных, показанных в скобках. Штрихами обозначены производные от них. Решаем последние уравнения относительно $\partial U / \partial z$ и $\partial \bar{U} / \partial \bar{z}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{1}{4k+8} [(k+3) f'_1(z) - (k+1) f'_2(\bar{z})]; \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{4k+8} [(k+3) f'_2(\bar{z}) - (k+1) f'_1(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (9.90)$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{4k+8} [(k+3) f_1(z) - (k+1) z f'_2(\bar{z}) + \varphi_2(z)]; \\ \bar{U} &= \frac{1}{4k+8} [(k+3) f_2(\bar{z}) - (k+1) \bar{z} f'_1(z) + \varphi_1(z)], \end{aligned} \right\} \quad (9.91)$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(\bar{z})$ — две новые произвольные аналитические функции переменных z и \bar{z} (соответственно). Выражения (9.91) дают общее решение уравнений Ламе (9.83); зная U и \bar{U} , можем по (9.86) найти компоненты перемещения u и v :

$$\begin{aligned} u &= \frac{U + \bar{U}}{2}; \\ v &= \frac{U - \bar{U}}{2i} = i \frac{\bar{U} - U}{2}. \end{aligned}$$

Таким путём получим

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{8(k+2)} \{ (k+3) [f_1(z) + f_2(\bar{z})] - \\ &\quad - (k+1) [z f'_2(\bar{z}) + \bar{z} f'_1(z)] + \varphi_1(z) + \varphi_2(\bar{z}) \}, \\ v &= \frac{i}{8(k+2)} \{ (k+3) [f_2(\bar{z}) - f_1(z)] - \\ &\quad - (k+1) [\bar{z} f'_1(z) - z f'_2(\bar{z})] + \varphi_1(z) - \varphi_2(\bar{z}) \}. \end{aligned} \right\} \quad (9.92)$$

В дополнение к этим формулам напомним выражение объёмного расширения, пользуясь (9.87) и (9.90):

$$\theta = \frac{1}{2(k+2)} [f'_1(z) + f'_2(\bar{z})]. \quad (9.93)$$

Для определения компонентов напряжённого состояния примем во внимание закон Гука, исходя из уравнений (9.32):

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + k\theta \right); \\ Y_y &= \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} + k\theta \right); \\ Z_z &= \mu k\theta; \\ X_y &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.94)$$

Внеся сюда значения u , v и θ из (9.92) и (9.93), получим

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\mu}{4(k+2)} \left\{ 2(k+1) [f_1'(z) + f_2'(\bar{z})] - \right. \\ &\quad \left. - (k+1) [zf_2'(\bar{z}) + \bar{z}f_1'(z)] + \varphi_1'(z) + \varphi_2'(\bar{z}) \right\}; \\ Y_y &= \frac{\mu}{4(k+2)} \left\{ 2(k+1) [f_1'(z) + f_2'(\bar{z})] + \right. \\ &\quad \left. + (k+1) [zf_2'(\bar{z}) + \bar{z}f_1'(z)] - \varphi_1'(z) - \varphi_2'(\bar{z}) \right\}; \\ X_y &= \frac{\mu i}{4(k+1)} \left\{ (k+1) [-\bar{z}f_1'(z) + zf_2'(\bar{z})] + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_1'(z) - \varphi_2'(\bar{z}) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (9.95)$$

Правые части формул (9.92), (9.93) и (9.95), вообще говоря, являются функциями комплексных переменных z и \bar{z} , однако, по смыслу самой задачи, они должны быть действительными. Этого мы достигнем, если чегырьмя пока произвольными аналитическими функциями

$$f_1(z), \quad f_2(\bar{z}), \quad \varphi_1(z) \quad \text{и} \quad \varphi_2(\bar{z}) \quad (9.96)$$

распорядимся так, чтобы было

$$\left. \begin{aligned} f_2(\bar{z}) &= \bar{f}_1(\bar{z}); \\ \varphi_2(\bar{z}) &= \bar{\varphi}_1(\bar{z}), \end{aligned} \right\} \quad (9.97)$$

где $\bar{f}_1(\bar{z})$ и $\bar{\varphi}_1(\bar{z})$ — выражения, сопряжённые $f_1(z)$ и $\varphi_1(z)$ соответственно, т. е. если

$$\left. \begin{aligned} f_1(z) &= \chi(x, y) + i\psi(x, y), \\ \varphi_1(z) &= \chi_1(x, y) + i\psi_1(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (9.98')$$

то

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_1(\bar{z}) &= \bar{f}_1(\bar{z}) = \chi(x, y) - i\psi(x, y), \\ \bar{\varphi}_1(\bar{z}) &= \bar{\varphi}_1(\bar{z}) = \chi_1(x, y) - i\psi_1(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (9.98'')$$

В самом деле, нетрудно показать, что при соблюдении условий (9.97) перемещения u и v , определяемые равенствами (9.92),

а следовательно, и напряжения (9.95) будут действительными величинами.

В самом деле,

$$\left. \begin{aligned} f_1'(z) &= \frac{\partial \chi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ f_2'(\bar{z}) &= \frac{\partial \chi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (9.99)$$

и, пользуясь (9.77), без труда найдём, что

$$zf_2'(\bar{z}) + \bar{z}f_1'(z) = 2 \left(x \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right); \quad \bar{z}f_1'(z) - zf_2'(\bar{z}) = 2i \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial \chi}{\partial x} \right).$$

Подставляя всё это в (9.92) и (9.93), получим после сокращения и упрощения

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{4(k+2)} \left[(k+3)\chi(x, y) - \right. \\ &\quad \left. - (k+1) \left(x \frac{\partial \chi}{\partial x} + y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \chi_1 \right]; \\ v &= \frac{1}{4(k+2)} \left[(k+3)\psi(x, y) + \right. \\ &\quad \left. + (k+1) \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) - \psi_1 \right]; \\ \theta &= \frac{1}{k+2} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (9.100)$$

где функции χ , ψ , χ_1 , ψ_1 связаны уравнениями Коши-Римана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}; & \frac{\partial \chi_1}{\partial x} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial y}; \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}; & \frac{\partial \chi_1}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (9.101)$$

Таким образом, формулы (9.100) при условии (9.97) дают для u , v и θ действительные значения, что и требовалось доказать. Очевидно, что при этом формулы (9.95) дадут действительные значения компонентов напряжённого состояния.

Напишем эти значения:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{\mu}{2(k+2)} \left[2(k+1) \frac{\partial \chi}{\partial x} - \right. \\ &\quad \left. - (k+1) \left(x \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial \chi_1}{\partial x} \right]; \\ Y_y &= \frac{\mu}{2(k+2)} \left[2(k+1) \frac{\partial \chi}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + (k+1) \left(x \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial \chi_1}{\partial x} \right]; \\ X_y &= \frac{\mu}{2(k+2)} \left[(k+1) \left(x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9.102)$$

Благодаря наличию условий (9.101) все входящие сюда функции χ , ψ , χ_1 , ψ_1 являются гармоническими.

§ 55. Переход к методам А. Лява и Н. И. Мусхелишвили.

Формулы (9.100) и (9.102) при условиях (9.101) дают общее решение плоской задачи для случая плоской деформации в функциях от действительных переменных x, y .

Однако можно вести дальнейшее решение в функциях комплексных переменных z и \bar{z} , взяв за основу полученные выше формулы (9.91) — (9.95) и (9.97). Действительно, отсюда легко получить исходные формулы указанных в конце § 53 методов А. Лява и Н. И. Мусхелишвили.

В дополнение к последней из формул (9.100) выведем выражение компонента вращения

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Пользуясь формулами (9.92), (9.97) и (9.98), получаем

$$2\omega_z = \frac{i}{2} [\bar{f}'_1(\bar{z}) - f'_1(z)] = \frac{i}{2} \left(-2i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Таким образом,

$$(k+2)\theta + i2\omega_z = \frac{\partial \gamma}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

или на основании (9.99) находим

$$(k+2)\theta + 2i\omega_z = f'_1(z).$$

Эта формула получена А. Лявом из уравнений Ламе (9.83) и является исходной в его методе*).

В методе Н. И. Мусхелишвили исходными являются:

1) первая из формул (9.91), которая на основании (9.97) примет вид

$$u + iv = \frac{1}{4(k+2)} [(k+3)f_1(z) - (k+1)zf'_1(\bar{z}) + \bar{\varphi}_1(\bar{z})]; \quad (9.103)$$

2) две следующие формулы, легко получающиеся из (9.95) и (9.97):

$$\left. \begin{aligned} X_x + Y_y &= \mu \frac{k+1}{k+2} [f'_1(z) + \bar{f}'_1(\bar{z})]; \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= \frac{\mu}{k+2} [(k+1)zf'_1(z) - \varphi'_1(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (9.104)$$

Формулы эти совпадут с теми, которые даны Н. И. Мусхелишвили, если введённые здесь функции f_1 и φ_1 заменить

* Ср. формулы (5.3) и (5.5) главы VIII «Краткого курса...» Л. С. Лейбензона.

другими функциями φ и ψ по формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{k+1}{2(k+2)} \mu f_1(z) &= \varphi(z), \\ -\frac{1}{2(k+2)} \mu \varphi_1(z) &= \psi(z) \end{aligned} \right\} \quad (9.105)$$

и положить

$$\frac{k+3}{k+1} = 3 - 4\sigma = \gamma.$$

Все рассуждения § 54 относились к случаю плоской деформации; для случая обобщённого плоского напряжённого состояния закон Гука получит вид

$$\begin{aligned} X_x &= \mu (2e_{xx} + k\theta); \\ Y_y &= \mu (2e_{yy} + k\theta); \\ Z_z &= 0 = \mu (2e_{zz} + k\theta). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} e_{xx} &= -\frac{k}{2} \theta; \quad \theta = e_{xx} + e_{yy} - \frac{k}{2} \theta; \\ \theta &= \frac{2}{k+2} (e_{xx} + e_{yy}) = \frac{2}{k+2} \theta', \end{aligned}$$

где

$$\theta' = e_{xx} + e_{yy}.$$

Поэтому имеем

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \mu (2e_{xx} + k'\theta'); \\ Y_y &= \mu (2e_{yy} + k'\theta'), \end{aligned} \right\} \quad (9.106)$$

где

$$k' = \frac{2k}{k+2} = \frac{2\sigma}{1-\sigma}.$$

Значит, в случае обобщённого плоского напряжённого состояния все формулы §§ 54 и 55 останутся в силе, если в них упругую постоянную k заменить на k' .

§ 56. О волновых уравнениях.

В §§ 19—21 главы IV было установлено, что динамические уравнения Ламе

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (9.107)$$

позволяют решать задачи о малых движениях упругого тела, и там были рассмотрены простейшие случаи распространения малых однородных колебаний бесконечной упругой среды, описываемые дифференциальным уравнением вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (9.108)$$

где f — функция от x и t . Это есть наиболее простой вид «волнового уравнения» *). В заключение настоящей главы мы выведем волновые уравнения для общей задачи о распространении упругих колебаний, принимая, как и ранее, что объёмные силы отсутствуют; поэтому они в уравнениях (9.107) опущены.

Применим к уравнениям (9.107) выкладку, уже использованную в § 29 для получения уравнения (5.65), т. е. продифференцируем их соответственно по x , y и z и сложим; при этом учтём, что (при постоянной плотности ρ)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right);$$

Два других равенства этого же вида получим, заменяя x на y и на z ; тогда получим

$$(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (9.109)$$

или

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \theta, \quad (9.109)$$

где, как и в (4.9) главы IV, обозначено

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}. \quad (9.110)$$

Продифференцируем теперь третье уравнение (9.107) по y и второе по z и вычтем один результат из другого:

$$\mu \nabla^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right);$$

но согласно (2.9) главы II

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \omega_x,$$

и поэтому предыдущее уравнение приводится к прежнему виду (9.109):

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 \omega_x, \quad (9.111a)$$

где [ср. формулы (4.12) главы IV]

$$b^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (9.112)$$

*) Ср. уравнения (4.8), (4.11), (4.26) главы IV.

Круговая подстановка в (9.111а) даёт два уравнения того же вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 \omega_y, \\ \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 \omega_x. \end{aligned} \right\} \quad (9.111б)$$

Уравнения, имеющие структуру (9.109) и (9.111а,б), представляют собою «волновые уравнения» общего вида. Коэффициенты a и b , как мы видели в § 19, представляют собой скорости распространения плоских волн двух видов: волн расширения и волн сдвига; эти же коэффициенты, как мы там видели, являются частотами колебания, если последние имеют периодический характер. Если удастся проинтегрировать уравнения (9.109) и (9.111а,б), то этим будут всюду определены: объёмное расширение θ , т. е. дивергенция вектора перемещения u (u, v, w), и вектор вращения (вихрь) ω ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$).

В векторном исчислении доказывается, что, зная θ и ω , можно найти во всех точках поля вектор u , т. е. определить перемещения точек упругого пространства *).

Рассмотрим в отдельности два предельных случая:

1. $\theta = 0$ во всём пространстве
2. $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ » » »

В первом случае волновой процесс совершается без изменения объёма; при этом, как видно прямо из уравнений Ламе (9.107), для компонент вектора перемещения u получаются волновые уравнения общего вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 u; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 v; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 w, \end{aligned} \right\} \quad (9.112)$$

где введено обозначение (9.112). Волны этого типа называются эквиволюминальными (равнообъёмными); распространяются они со скоростью

$$b = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}};$$

Второй случай $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ мы получим тогда, когда перемещения u, v, w имеют потенциал (см. конец § 6 главы II)

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

*) См. Н. Е. Кочин, Векторное исчисление, ГОНТИ, 1938 г., стр. 223.

Исходя из этих зависимостей, преобразуем первое из уравнений Ламе (9.107):

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi;$$

поэтому

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi = \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \nabla^2 u.$$

Остаётся это подставить в первое из уравнений (9.107); сделав аналогичное преобразование в остальных двух уравнениях и введя обозначение (9.110), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \nabla^2 u; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \nabla^2 v; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (9.114)$$

Для перемещения снова получились волновые уравнения общего вида, как это было и в случае эквиволуминальных волн (9.113); волны, соответствующие рассматриваемому случаю, называются безвихревыми волнами расширения. Скорость распространения их a , как мы уже знаем из § 20, значительно больше скорости распространения эквиволуминальных волн b . Из всего сказанного ясно, что основной задачей теории упругих волн является задача интегрирования общего волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 f, \quad (9.115)$$

где

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}; \quad (9.116)$$

c — скорость распространения волн или частота периодических колебаний, если последние имеют место. Простейшие волновые уравнения однородных колебаний (плоских волн), рассмотренные в §§ 19 и 20, получаются из (9.115), если f зависит лишь от одной координаты, например, от x , ибо тогда согласно (9.116)

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

и вместо (9.115) мы получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (9.117)$$

Для этого уравнения имеется общее решение Даламбера [см. формулу (4.18) главы IV]:

$$f = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct), \quad (9.118)$$

где φ и ψ — знаки произвольных функций.

§ 57. Некоторые частные решения волнового уравнения.

На общей задаче интегрирования волнового уравнения (9.115) мы здесь останавливаться не можем, но отметим одно простое свойство частных решений его, совершенно аналогичное свойству частных решений уравнений Лапласа, указанному в начале § 47; если известно какое-либо частное решение уравнения (9.115)

$$f = f_0(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma, \dots), \quad (9.119)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — некоторые параметры или коэффициенты, то частная производная от f_0 по любому из аргументов, показанных в скобках (9.119), также будет частным решением уравнения (9.115). Справедливость этого заключения прямо следует из того, что если через ζ обозначим любой из указанных аргументов, то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \zeta} \right); \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\nabla^2 f_0) &= \nabla^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \zeta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.120)$$

Действительно, так как f_0 является решением уравнения (9.115), то

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 f_0.$$

Дифференцируя обе части по ζ , имеем

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} \right) = c^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\nabla^2 f_0),$$

а на основании (9.120) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \zeta} \right) = c^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \zeta} \right);$$

значит,

$$\frac{\partial f_0}{\partial \zeta}$$

есть решение уравнения (9.115), что и требовалось доказать.

Рассмотрим чрезвычайно важное частное решение вида

$$f = f_0(r, t), \quad (9.121)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ представляет собою радиус-вектор произвольной точки относительно начала координат. Очевидно, что

решение (9.121) соответствует симметричному распределению фактора f_0 относительно начала координат, так что во всех точках сферы радиуса r с центром в начале координат величина f_0 *) имеет одно и то же значение; этот случай называется случаем сферических волн, имеющих источник в точке, выбранной за начало координат. Такие волны мы здесь рассматриваем только как математический образ [т. е. как частное решение уравнения (9.115)]; однако, они реально могут осуществляться как результат действия мгновенной или вообще переменной силы, приложенной в начале координат.

Проверим возможность решения (9.121) путём подстановки его в (9.115) и для этого подсчитаем лапласов оператор $\nabla^2 f_0$ [ср. формулы (9.4) — (9.6)]:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{x}{r};$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

Вычисляя аналогично вторые производные по y и по z , получаем в результате

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{r^2 - x^2}{r^3};$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{r^2 - y^2}{r^3};$$

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} \frac{z^2}{r^2} + \frac{\partial f_0}{\partial r} \frac{r^2 - z^2}{r^3};$$

Складывая эти равенства почленно и учитывая, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

получим

$$\nabla^2 f_0 = \frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f_0}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f_0).$$

Подставив это в (9.115), получим

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f_0),$$

или

$$r \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f_0);$$

*) Под f_0 можно разуметь какую-либо из величин:

$u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \theta.$

но, очевидно, что

$$r \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r f_0),$$

и последнее уравнение примет форму простейшего волнового уравнения [с (9.117)]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (r f_0) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f_0),$$

а потому сразу напомним общее его решение по типу (9.118)

$$r f_0 = \varphi(r - ct) + \psi(r + ct),$$

где φ и ψ — произвольные функции. Отсюда получим искомое частное решение уравнения (9.115), т. е. уравнение сферической волны

$$f_0 = \frac{1}{r} \varphi(r - ct) + \frac{1}{r} \psi(r + ct). \quad (9.122)$$

Первый член правой части соответствует волне, распространяющейся из центра (начало координат), второй член соответствует волне обратного направления (отражённая волна). Решение (9.122), как и решение (9.118) для случая однородных колебаний, изображает движущуюся волну.

Весьма важные частные решения типа «стоячих волн» могут быть получены для общего уравнения (9.115) методом разделения переменных, применявшимся к простейшему волновому уравнению (4.28) в § 21. Для этого следует искать решения в форме произведения двух функций

$$f = F(x, y, z) \cdot T(t). \quad (9.123)$$

Внося это в (9.115), получим

$$F(x, y, z) T''(t) = c^2 \nabla^2 F(x, y, z) T(t)$$

или, деля обе части на $F \cdot T$, разделяем переменные:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{\nabla^2 F(x, y, z)}{F(x, y, z)} = -\lambda^2,$$

где $-\lambda^2$ — произвольная постоянная. Это приводит к двум дифференциальным уравнениям:

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0; \quad (9.124)$$

$$\nabla^2 F(x, y, z) + \frac{\lambda^2}{c^2} F(x, y, z) = 0. \quad (9.125)$$

Частные решения уравнения (9.124)

$$T_1 = \sin \lambda t; \quad T_2 = \cos \lambda t$$

дают гармонические колебания; поэтому решение (9.123) получает один из видов

$$\begin{aligned} f_1 &= F(x, y, z) \sin \lambda t, \\ f_2 &= F(x, y, z) \cos \lambda t, \end{aligned}$$

где $F(x, y, z)$ должно удовлетворять уравнению (9.125).

Рассмотренные нами волны расширения и эквиволлюминальные имеют место внутри упругого тела; вблизи поверхности его возможны волны другого типа (волны Релея), вблизи же поверхности контакта двух упругих тел возникают особые волны (волны Лява)*).

*) См., например, «Краткий курс теории упругости» Л. С. Лейбензона.

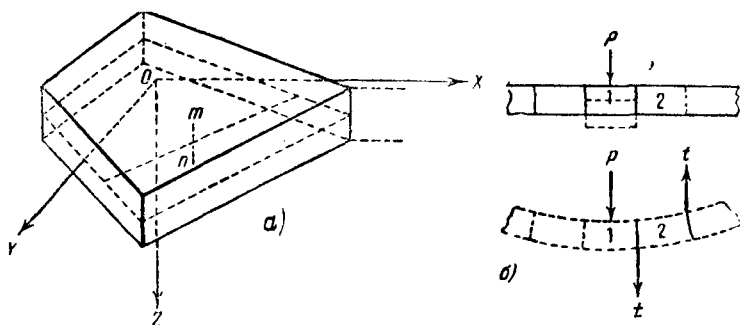
ГЛАВА X.

ИЗГИБ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКИ.

§ 58. Общие замечания.

Плоской пластинкой мы называем тело призматической или цилиндрической формы, у которого высота h мала по сравнению с размерами оснований (фиг. 90).

Отметим срединную плоскость пластинки, делящую пополам её высоту. Эта плоскость в теории пластинок играет такую же роль,



Фиг. 90.

как ось и нейтральная плоскость в теории изгиба бруса. Наме- тим систему координат, располагая оси OX и OY в срединной плоскости; ось OZ направим вниз.

В главах VI и VII мы рассматривали задачи о напряжениях и деформациях такой пластинки в том случае, если внешняя нагрузка и соответствующие ей реакции действуют в срединной плоскости (обобщённое плоское напряжённое состояние). Если при этом нагрузка не превосходит некоторого предела, то срединная плоскость не искривляется. Теперь мы обратимся к другому случаю, когда нагрузка и опорные реакции нормальны к срединной плоскости; в этом случае срединная плоскость пластинки искривляется, и мы имеем дело с изгибом плоской пластинки. Следует отметить, что, вообще говоря, мы здесь встречаемся не

с одним изгибом (как он понимается в сопротивлении материалов), так как в громадном большинстве случаев изгиб сопровождается кручением пластинки. Это обстоятельство легко объяснить себе, если поперечное сечение пластинки (фиг. 90, б), лежащей на двух опорах, мысленно разрежем на балки-полоски и нагрузим, например, одну из них. Если бы разрезы были осуществлены в действительности, прогиб получила бы одна нагруженная балка-полоска, благодаря же связи между отдельными балками-полосками на каждую из них (например, см. полосу 2) две соседние действуют, вызывая касательные напряжения t и t' по боковым граням (вдоль пролёта пластинки); эти напряжения вызовут, очевидно, поворот поперечных сечений балок-полосок вокруг их продольных осей, т. е. их скручивание.

В дальнейшем мы рассматриваем приближённую теорию изгиба пластинок, пригодную для пластинок, толщина которых мала по сравнению с другими их размерами, но, вместе с тем, прогибы малы по сравнению с толщиной. Такие пластинки называются «пластинками средней толщины», или, по терминологии Б. Г. Галеркина, — «тонкими плитами». При изучении напряжений и деформаций таких пластинок можно пользоваться теми же методами, как и в приближённой теории изгиба бруса, однако, в данном случае теория изгиба значительно усложняется как отмеченным выше явлением скручивания, так и тем, что приходится относить распределение напряжений и деформаций не к одной линии (ось бруса), но к целой плоскости (срединная плоскость). Это приводит к замене обыкновенных дифференциальных уравнений изгиба уравнениями в частных производных, интегрирование которых значительно сложнее.

В дальнейшем для упрощения теории мы будем принимать следующие допущения:

1. Будем (как и в элементарной теории изгиба бруса) пренебрегать напряжениями Z_x , возникающими вследствие взаимного нажатия горизонтальных слоёв пластинки, а также деформациями e_{xx} пластинки по направлению её толщины; благодаря этому обобщённый закон Гука (V) для пластинки примем в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} (X_x - \sigma Y_y); \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} (Y_y - \sigma X_x). \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

2. Введём гипотезу, аналогичную гипотезе плоских сечений в брус. При этом, если пластинка изгибается по цилиндрической поверхности, то указанную гипотезу можем принять в том же виде, как она формулируется для бруса: плоские поперечные сечения пластинки при изгибе остаются плоскими и нор-

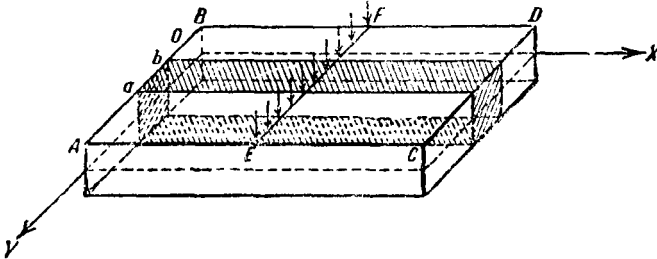
мальными к искривлённой срединной плоскости. Если же пластинка изгибается не по цилиндрической поверхности, то нашу гипотезу будем формулировать так: прямолинейный элемент mn (фиг. 89) внутри пластинки, нормальный к срединной плоскости, при изгибе остаётся прямым и нормальным к этой плоскости после её искривления.

После этих общих замечаний перейдём к изучению самого изгиба плоской пластинки, ведя исследование в порядке возрастающей сложности в такой последовательности:

- 1) цилиндрический изгиб пластинки;
- 2) чистый изгиб пластинки;
- 3) кручение пластинки;
- 4) общий случай изгиба пластинки.

§ 59. Цилиндрический и чистый изгиб пластинки.

Рассмотрим прямоугольную пластинку $ABDC$, опёртую (или заделанную) по двум граням AB и CD и работающую на изгиб,



Фиг. 91.

как балка, пролётом $AC = BD$ (фиг. 91). Где-либо вдали от боковых граней AC и BD выделим балку-полоску шириною $ab = 1$. Нагрузка в направлении пролёта AC может быть какой угодно; однако, предположим, что вдоль любой образующей EF поперёк пролёта нагрузка неизменна. Очевидно, что тогда срединная плоскость пластинки изогнётся по цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси OY . Выделенная балка-полоска будет изгибаться в условиях плоской деформации, подробно рассмотренной в § 31 (фиг. 42) и называемой *цилиндрическим изгибом*.

Кручение, указанное в § 58, здесь отсутствует. Удлинение e_{yy} будет равно нулю, и второе из уравнений закона Гука (10.1) даёт $Y_y = \sigma X_x$. Подставляя это в первое из уравнений (10.1), найдём

$$X_x = \frac{E}{1 - \sigma^2} e_{xx},$$

или

$$X_x = E_1 e_{xx}, \quad (10.2)$$

где

$$E_1 = \frac{E}{1-\sigma^2} > E. \quad (10.3)$$

Уравнение (10.2) приводит нас к закону Гука в первичной его форме (пропорциональность между напряжением и удлинением), но с повышенным модулем упругости (10.3). Это повышение модуля упругости обуславливает разницу в работе пластинки по сравнению с узкой балкой; во всём остальном мы можем не делать различия между пластинкой и балкой и всю теорию изгиба последней применить к цилиндрическому изгибу пластинки. Для основного нормального напряжения получаем прежнюю формулу

$$X_x = \frac{M_1}{J} z = \frac{M_1}{\left(\frac{1}{12} h^3\right)} z, \quad (10.4)$$

где числитель M_1 — изгибающий момент, приходящийся на единицу ширины пластинки, а знаменатель

$$J = \frac{1 \cdot h^3}{12} \quad (10.5)$$

— момент инерции поперечного сечения пластинки также на единицу ширины.

Если согласно нашим обозначениям назовём через w прогиб пластинки, то легко напишем дифференциальное уравнение изогнутой срединной плоскости пластинки

$$E_1 J \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_1. \quad (10.6)$$

Здесь на основании уравнений (10.3) и (10.5) имеем

$$E_1 J = \frac{E h^3}{12(1-\sigma^2)}.$$

Величину

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\sigma^2)} \quad (10.7)$$

называют *цилиндрической жёсткостью пластинки*. Она в нашей задаче заменяет собой жёсткость балки EJ и постоянно встречается в дальнейшей теории изгиба пластинок. Дифференциальное уравнение (10.6) напишем так:

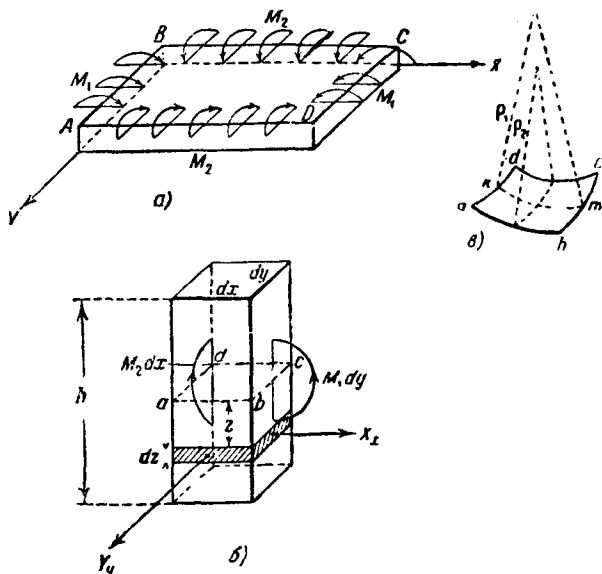
$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_1. \quad (10.8)$$

Формула (10.4) показывает, что напряжения в пластинке получаются такие же, как и в прямоугольной балке той же

высоты и под той же нагрузкой; прогиб пластинки согласно уравнению (10.8) будет менее прогиба соответственной балки, так как цилиндрическая жёсткость (10.7) более жёсткости балки шириной, равной единице:

$$D = E_1 J > EJ.$$

Пользуясь формулами (10.4) и (10.8), мы можем вести расчёт пластинок в случае цилиндрического изгиба тем же методом,



Фиг. 92.

каким мы рассчитываем балки статически определимые и статически неопределимые. Поэтому на деталях подобных расчётов мы здесь не останавливаемся.

Рассмотрим теперь другой случай — чистый изгиб. Пусть мы имеем прямоугольную пластинку (фиг. 92, а), по боковым граням которой приложены непрерывно распределённые изгибающие пары, и пусть момент этих пар, рассчитанный на единицу длины, равен соответственно M_1 по граням AB и CD , M_2 — по граням BC и AD .

Иначе можем сказать, что момент M_1 вращает вокруг оси Oy , а момент M_2 — вокруг оси Ox . Мы будем говорить, что в данном случае пластинка находится в состоянии чистого изгиба. Если из такой пластинки четырьмя вертикальными плоскостями выделим элемент (фиг. 92, б) размерами dx , dy и h

(где h — толщина пластинки), то действие на него отброшенных частей пластинки, очевидно, придётся заменить: по левой и правой граням парами с моментами $\pm M_1 dy$; по задней и передней граням — парами с моментами $\pm M_2 dx$.

Пары эти осуществляются распределёнными по граням сплошными нормальными силами:

$$X_x dy dz; Y_y dx dz.$$

где X_x и Y_y — нормальные напряжения по граням элемента; поэтому имеем

$$M_1 dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x dy dz \cdot z = dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x z dz; \quad M_2 dx = dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_y z dz,$$

или, сокращая на dx и dy , получим моменты на единицу длины граней:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_x z dz; \\ M_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_y z dz. \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

Переходим теперь к геометрическим свойствам явления. На фиг. 92, *в* представлена срединная плоскость $abcd$ выделенного элемента после изгиба; пусть ρ_1 и ρ_2 — радиусы кривизны двух кривых, получающихся при пересечении искривлённой срединной плоскости плоскостями, параллельными Oxz и Oyz . Если введём теперь гипотезу, указанную в конце § 58, то при помощи таких же рассуждений, как при изгибе прямого бруса, найдём следующие соотношения между относительными удлинениями, радиусами кривизны и расстоянием волокон z от срединной плоскости:

$$e_{xx} = -\frac{z}{\rho_1}; \quad e_{yy} = -\frac{z}{\rho_2}. \quad (10.10)$$

Действительно (фиг. 93),

$$\frac{pq}{km} = \frac{mq}{Om} \quad \text{или} \quad |e_{xx}| = \frac{|z|}{\rho_1}. \quad (10.11)$$

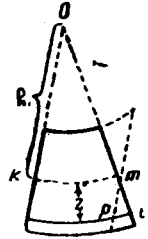
Будем считать, что кривизна положительна, если центр крив-

визны расположен в сторону положительной оси Oz ; ось же Oz мы направляем вниз (§ 58), тогда, например, для случая, показанного на фиг. 93, имеем

$$\frac{1}{\rho_1} < 0; \quad z > 0; \quad e_{xx} > 0$$

(растяжение), и потому (10.11) напомним так:

$$e_{xx} = -\frac{z}{\rho_1}.$$



Фиг. 93.

Для того чтобы связать деформации (10.10) с напряжениями, входящими в уравнение (10.9), воспользуемся законом Гука (10.1); решая эти уравнения относительно X_x и Y_y , найдём

$$X_x = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{xx} + \sigma e_{yy}); \quad Y_y = \frac{E}{1-\sigma^2} (e_{yy} + \sigma e_{xx}),$$

или, подставляя сюда из уравнений (10.10), получим

$$\left. \begin{aligned} X_x &= -\frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{\sigma}{\rho_2} \right) z, \\ Y_y &= -\frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{\sigma}{\rho_1} \right) z. \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Подставляя это в уравнения (10.9), найдём

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{\sigma}{\rho_2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz; \\ M_2 &= -\frac{E}{1-\sigma^2} \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{\sigma}{\rho_1} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz. \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

Но, очевидно, что

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{1}{12} h^3,$$

так как этот интеграл выражает момент инерции прямоугольного сечения шириною единица; подставляя это в уравнения (10.13) и на основании (10.7), получим

$$-D \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{\sigma}{\rho_2} \right) = M_1; \quad -D \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{\sigma}{\rho_1} \right) = M_2, \quad (10.14)$$

где D — цилиндрическая жёсткость пластинки. Уравнения (10.14) представляют собою распространение на пластинку известного соотношения

$$-\frac{EJ}{\rho} = M$$

для прямого бруса.

Если во всех точках пластинки $M_1 = M_2 = \text{const.}$, то из (10.14) найдём, что $\rho_1 = \rho_2 = \text{const.}$, т. е. пластинка изгибается по шаровой поверхности. Из уравнений (10.14) легко получим дифференциальные уравнения изогнутой срединной плоскости; для этого следует кривизны $\frac{1}{\rho_1}$ и $\frac{1}{\rho_2}$ выразить через прогиб $w(x, y)$, являющийся в нашем случае функцией двух переменных; как и при изгибе прямого бруса, примем приближённое выражение кривизны, полагая, что прогибы весьма малы:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Подставляя это в уравнения (10.14), получим два совокупных дифференциальных уравнения в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= M_1, \\ -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= M_2. \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

Это есть дальнейшее распространение уравнения (10.8), соответствующего случаю цилиндрического изгиба.

С явлением чистого изгиба, не осложнённым поперечными силами и крутящими моментами, в практике приходится встречаться крайне редко, однако, чистый изгиб является одной из составляющих общего случая, рассматриваемого нами далее; там мы воспользуемся уравнениями (10.15), дающими необходимую нам связь между изгибающими моментами и прогибом.

Заметим, что из уравнений (10.15) можно получить одно дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности; складывая их, имеем

$$-D(1 + \sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = M_1 + M_2.$$

Вводя обозначение

$$\frac{M_1 + M_2}{1 + \sigma} = \mathfrak{M}, \quad (10.16)$$

последнее уравнение напишем так:

$$-D \nabla^2 w = \mathfrak{M}. \quad (10.17)$$

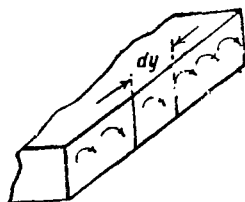
Сопоставляя это с дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня

$$-EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M,$$

замечаем, что при переходе от стержня к пластинке линейная жёсткость EJ заменяется цилиндрической; вторая производная прогиба переходит в оператор Лапласа; изгибающий момент M заменяется приведенной суммой моментов (10.16).

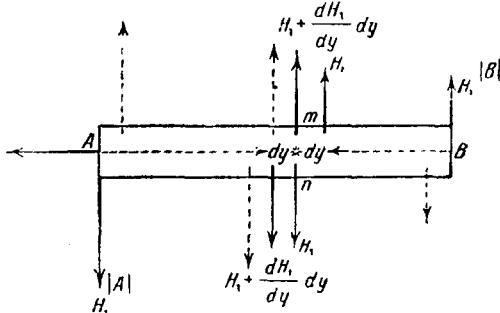
§ 60. Кручение пластинки.

Рассмотрим случай (фиг. 94), когда к какой-либо грани пластинки, например, к грани, нормальной к оси Ox , приложены распределённые крутящие пары. Распределение их предположим, вообще говоря, неравномерным и обозначим через H_1 величину момента этих пар, приходящуюся на единицу длины грани в данной точке. Величина момента на длину dy грани равна, очевидно, $H_1 dy$.



Фиг. 94.

Заметим, что с точки зрения статики распределённые крутящие пары равносильны некоторой поперечной силе. Действительно, пару с моментом $H_1 dy$ мы можем осуществить (фиг. 95) в виде двух равных противоположных сил H_1 , приложенных по краям площадки длиной dy .



Фиг. 95.

По соседней площадке длиной dy пару $(H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} dy) dy$ также осуществим в виде двух противоположных сил $H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} dy$ с плечом dy .

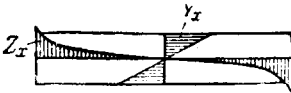
Выполнив это для всех площадок рассматриваемой грани, видим, что силы, приложенные в точках m и n на границе двух площадок, сводятся к одной силе $\frac{\partial H_1}{\partial y} dy$, приходящейся на длину dy . Заметим, однако, что на краях A и B грани при этом останутся две неуничтоженные конечные сосредоточенные силы H_1^A и H_1^B .

Отсюда мы и заключаем, что распределённые крутящие пары интенсивности H_1 статически эквивалентны распределённой попе-

речной силе, имеющей интенсивность

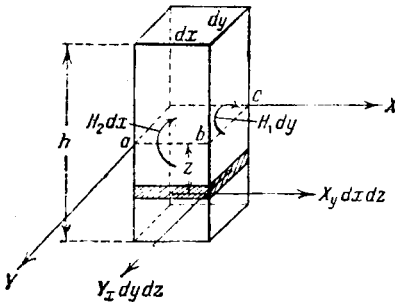
$$\frac{\partial H_1}{\partial y}, \quad (10.18)$$

и двум сосредоточенным поперечным силам H_1^A и H_1^B по концам. В частном случае, если момент H_1 распределён равномерно, то $H_1 = \text{const.}$; поперечная сила (10.18) всюду равна нулю, и крутящие пары по грани AB эквивалентны паре, состоящей из двух сил H_1 , в точках A и B .



Фиг. 96.

Крутящие моменты, возникающие в поперечном сечении пластинки, фактически осуществляются в форме касательных напряжений; например (фиг. 96), по сечению, нормальному к оси Ox , это будут напряжения Y_x и Z_x ; исследование кручения стержней с поперечным сечением в форме весьма узкого прямоугольника нам показало (см. § 45), что напряжения Z_x (в общем случае напряжения, нормальные к большей оси сечения) весьма малы по сравнению с напряжениями Y_x (параллельными большей оси). Поэтому для упрощения примем, что при кручении пластинки крутящие моменты осуществляются в форме касательных напряжений, параллельных срединной плоскости.



Фиг. 97.

Выделим из пластинки четырьмя вертикальными плоскостями бесконечно малый элемент (фиг. 97) и предположим, что действие на него отброшенных частей пластинки по граням bc и ab должно быть заменено только крутящими моментами $H_1 dy$ и $H_2 dx$, положительные направления которых примем так, как показано на фиг. 97 (вращение по часовой стрелке вокруг внешней нормали); в этом случае мы имеем дело с чистым кручением пластинки относительно двух осей Ox и Oy .

Аналогично уравнениям (10.9) при чистом изгибе напишем следующие условия эквивалентности крутящих моментов и соответственных касательных усилий*):

$$H_1 dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x dy dz \cdot z; \quad H_2 dx = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_y dx dz \cdot z.$$

*) Согласно сделанному выше предположению принимаем во внимание только напряжения X_y и Y_x , параллельные срединной плоскости.

Вынося постоянные dx и dy за знаки интегралов и сокращая на них, получим

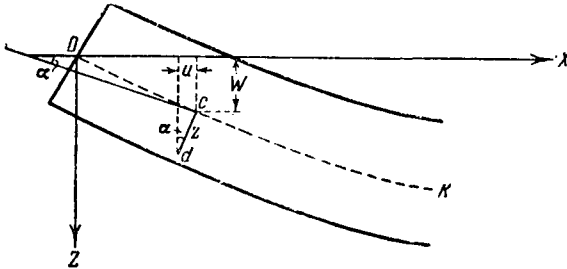
$$H_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Y_x z dz; \quad (10.19)$$

$$H_2 = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} X_y z dz. \quad (10.20)$$

Но так как по закону взаимности касательных напряжений $Y_x = X_y$, то из уравнений (10.19) и (10.20) получаем

$$H_2 = -H_1; \quad (10.21)$$

это есть закон взаимности крутящих моментов по двум взаимно перпендикулярным сечениям пластинки: моменты H_1 и H_2 одинаковы по величине, но противоположны по знаку.



Фиг. 98.

Постараемся теперь получить связь между крутящими моментами и прогибом w пластинки, другими словами, найдём дифференциальное уравнение искривлённой срединной плоскости при кручении. Для этого касательные напряжения, входящие в уравнение (10.19), связываем с перемещениями при помощи закона Гука и основных уравнений (III) (§ 17):

$$Y_x = \frac{E}{2(1+\nu)} e_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (10.22)$$

Теперь остаётся перемещения u и v связать с прогибом w срединной плоскости.

На фиг. 98 показан разрез пластинки какой-либо плоскостью, параллельной Oxz . Пусть OK — след срединной плоскости разреза после искривления. Возьмём какую-либо точку d на рас-

стоянии $cd = z$ от срединной плоскости. Для упрощения сделаем предположение, что все точки c срединной плоскости перемещаются вертикально; предположение это близко к действительности, если прогибы w малы по сравнению с толщиной пластинки h и если в срединной плоскости нет деформаций (натяжений или сжатий). В этих условиях (по фиг. 98) легко установить связь между перемещением u точки d и прогибом w срединной плоскости; делая некоторые допущения вследствие малости деформаций, запишем: $u = -z \sin \alpha \approx -z \operatorname{tg} \alpha$ (*), где α есть угол наклона касательной к следу OK срединной плоскости; так как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial w}{\partial x},$$

то окончательно

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (10.23)$$

Делая разрез пластинки плоскостью, параллельной OYZ , найдём путём таких же рассуждений

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (10.24)$$

Из уравнений (10.23) и (10.24) для подстановки в (10.22) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

тогда уравнение (10.22) даёт

$$Y_x = -\frac{E}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z. \quad (10.25)$$

Подставляя это в уравнение (10.19), получаем

$$H_1 = -\frac{E}{1 + \sigma} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = -\frac{Eh^3}{12(1 + \sigma)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

или, умножая числитель и знаменатель на $(1 - \sigma)$, на основании уравнения (10.7) имеем

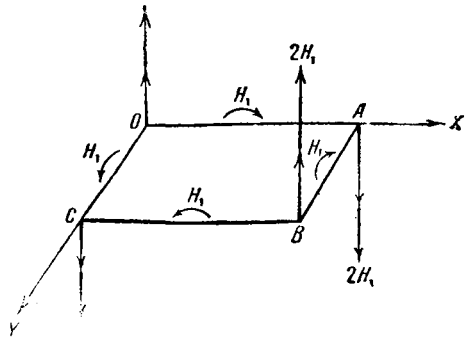
$$H_1 = -D(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (**). \quad (10.26)$$

*) Знак минус обусловлен тем, что, например, в случае, показанном на фиг. 98, $z > 0$; $\operatorname{tg} \alpha > 0$; $u < 0$.

**) Заметим, что

$$D(1 - \sigma) = \frac{Eh^3}{12(1 + \sigma)}.$$

Это уравнение по своей сущности аналогично уравнениям (10.15) и представляет собою дифференциальное уравнение искривлённой срединной плоскости при кручении. Как видно из самого вывода, применимость уравнения (10.20) ограничена случаем весьма малых прогибов w по сравнению с толщиной пластинки h . Уравнением (10.26) мы воспользуемся далее для общих выводов; здесь на основании его сделаем некоторые замечания о чистом кручении прямоугольной пластинки. Задача эта несколько иллюстрирует рассуждения §§ 44в и 45.



Фиг. 99.

Пусть по всем четырём боковым граням пластинки (фиг. 99) приложены равномерно распределённые крутящие пары с моментом $H_1 = -H_2 = M = \text{const.}$ на единицу длины. Заменяя эти пары эквивалентными поперечными силами, заметим, что распределённые поперечные силы $\frac{\partial H_1}{\partial y}$ и $\frac{\partial H_2}{\partial x}$ [ср. формулу (10.18)] всюду равны нулю; отсюда легко сообразить, что пластинка окажется под действием только четырёх сосредоточенных сил, по $2H_1 = 2M$ каждая, приложенных по углам*). Уравнение искривлённой срединной поверхности (10.26) получит вид

$$D(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -M = \text{const.} \quad (10.27)$$

Интеграл его возьмём в форме $w = Cxy$. Подставляя это в уравнение (10.27), видим, что оно удовлетворяется, если

$$C = -\frac{M}{D(1 - \sigma)}$$

Поэтому окончательно

$$w = -\frac{M}{D(1 - \sigma)} xy.$$

Срединная плоскость искривляется по поверхности гиперболического параболоида. Угол закручивания пластинки в сечении,

*) Следует заметить, что эти силы только статически равносильны приложенным распределённым моментам; в упругой пластинке такую замену нельзя делать, не изменяя распределения деформаций и напряжений. От действия этих сил вблизи точек их приложения возникают значительные местные напряжения; анализом их мы здесь не занимаемся.

параллельном OYZ и характеризуемом абсциссой x , будет [см. формулы (2.3) и (2.4) § 6]

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{M}{D(1-\sigma)} x.$$

Единичный угол закручивания равен

$$\tau = -\frac{M}{D(1-\sigma)} = -\frac{12(1+\sigma)}{Eh^3} M = -\frac{6}{Gh^3} M,$$

где G — модуль упругости при сдвиге. Последнее соотношение перепишем так:

$$M = -G\tau \frac{h^3}{6} = -0,333G \frac{\tau}{2} h^3. \quad (10.28)$$

По условиям нашей задачи пластинка скручивается двумя парами моментов в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Если одну пару моментов устраним, то получим вдвое меньший угол закручивания $\tau' = 0,5 \cdot \tau$. На этом основании уравнение (10.28) напишем так:

$$M = -0,333G\tau' h^3. \quad (10.29)$$

Точное решение, данное Сен-Венаном для случая прямоугольника со сторонами a и h , где $h < a$, имеет вид *)

$$M' = \alpha G\tau h^3 a, \quad \text{или} \quad \frac{M'}{a} = \alpha G\tau h^3,$$

где $\frac{M'}{a} = M$ — крутящий момент на единицу длиной стороны поперечного сечения; поэтому

$$M = \alpha G\tau h^3, \quad (10.30)$$

где α — коэффициент, имеющий значения, указанные в таблице (см. конец § 44).

Отсюда мы видим, что полученное нами соотношение (10.29) достаточно близко к точному (10.30) при $\frac{a}{h} > 10$, а при $\frac{a}{h} = \infty$ в точности с ним совпадает.

§ 61. Общий случай изгиба пластинки.

Рассмотрим теперь общий случай изгиба пластинки, как-либо опёртой или закреплённой по контуру и нагруженной сплошной нагрузкой q на единицу площади. Если мы, как и ранее, вырежем элемент (фиг. 100), то действие отброшенных частей по каждой грани придётся заменить, в самом общем случае, тремя составляющими силами X , Y , Z и тремя парами с моментами M_x , M_y

*) Ср. формулу (8.59) § 44 после замены в ней обозначений μ , b , c соответственно на G , h , a .

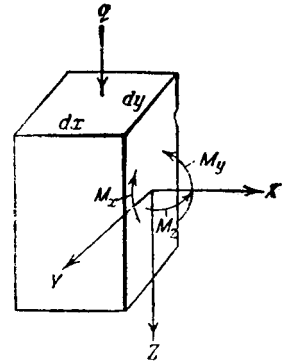
и M_x . Однако, как мы уже отмечали в § 58, силы X и Y и пара M_z , лежащие в срединной плоскости, соответствуют случаю обобщённого плоского напряжённого состояния; они не вызывают искривления срединной плоскости; поэтому в настоящей задаче, касающейся изгиба пластинки, мы их не рассматриваем. Остальные составляющие Z , M_x и M_y вызовут искривление срединной плоскости; из них влияние M_x и M_y по отдельности на изгиб пластинки нами уже рассмотрено выше: $M_y = M_1$ — изгибающий момент; $M_x = H_1$ — крутящий момент; Z есть поперечная сила в пластинке.

Примем уже введенные ранее обозначения:

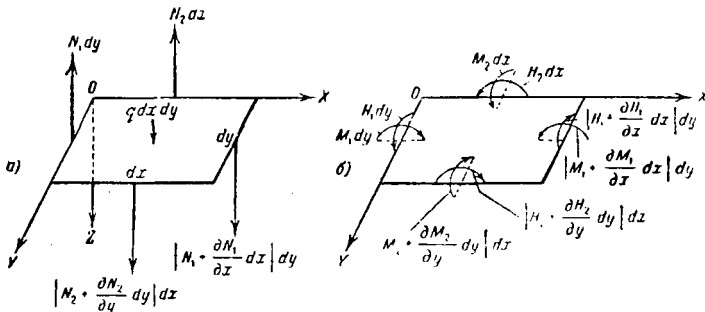
для моментов по грани \perp к оси Ox : M_1 и H_1 ,
а по грани \perp к оси Oy : M_2 и $H_2 = -H_1$.
Поперечные силы будем обозначать так:

- по грани \perp к Ox через N_1 ,
- » » \perp » Oy » N_2 .

Положительные направления моментов примем, как и ранее, по фиг. 92 и 97. Поперечные силы N_1 и N_2 по правой и передней граням (внешние нормали $+X$ и $+Y$) будем считать положи-



Фиг. 100.



Фиг. 101.

тельными вниз, т. е. для них знаки будут совпадать со знаками напряжений Z_x и Z_y .

На фиг. 101, а и б показана срединная плоскость выделенного элемента размерами dx и dy с нагрузкой $q dx dy$, приходящейся на площадь его $dx dy$; действие отброшенных частей заменено поперечными силами (фиг. 101, а) и моментами (фиг. 101, б); при этом учтено, что силы и моменты по передней и правой граням получили приращения по сравнению с соответственными им

факторами по задней и левой граням; приращения, как и всегда, мы заменяли частными дифференциалами, отбросив бесконечно малые высших порядков. Составим условия равновесия выделенного элемента под действием сил, показанных на фиг. 101, а и б. Так как мы отбросили силы и пары, действующие в срединной плоскости, то условия $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M_z = 0$ удовлетворяются тождественно; остаётся удовлетворить следующим условиям:

$$\sum Z = 0; \quad \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0. \quad (10.31)$$

Приняв оси координат, как на фиг. 101, раскроем первые два из этих условий так:

$$\begin{aligned} -N_1 dy + \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx \right) dy - N_2 dx + \left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial y} dy \right) dx + \\ + q dx dy = 0; \\ -H_1 dy + \left(H_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x} dx \right) dy - M_2 dx + \left(M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial y} dy \right) dx - \\ - \left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial y} dy \right) dx dy + N_1 dy \cdot \frac{dy}{2} - \\ - \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx \right) dy \cdot \frac{dy}{2} + q dx dy \cdot \frac{dy}{2} = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что бесконечно малые величины первого порядка взаимно сокращаются; имеющиеся во втором уравнении бесконечно малые третьего порядка отбрасываем; после этого оба уравнения сокращаем на $dx dy$. Совершенно таким же порядком раскроем и третье уравнение (10.31); в результате все они примут такой вид:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = -q; \quad (10.32')$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} = N_2; \quad (10.32'')$$

$$-\frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial M_1}{\partial x} = N_1. \quad (10.32''')$$

В случае прямого бруса мы имели аналогичные, но более простые зависимости:

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad \frac{dM}{dx} = Q.$$

В пластинке, как мы указывали ранее, явление осложняется вследствие распространения его на плоскость и наличия крутящих моментов.

Уравнений (10.32) оказывается недостаточно для определения составляющих:

$$N_1, N_2, M_1, M_2 \text{ и } H_1 = -H_2. \quad (10.33)$$

Поэтому мы к ним добавим уравнения (10.15) и (10.2б), полученные из рассмотрения упругих свойств пластинки:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_2 &= -D \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

$$H_1 = -D(1-\sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}. \quad (10.2б)$$

Теперь число уравнений (10.32), (10.15), (10.2б) соответствует количеству неизвестных N_1 , N_2 , M_1 , M_2 , $H_1 = -H_2$ и $w(x, y)$, и задача может быть решена; для этого выведем общее дифференциальное уравнение искривлённой срединной поверхности пластинки следующим путём. Исключаем из уравнений (10.32) поперечные силы N_1 и N_2 и в получившиеся уравнения внесём выражения моментов (10.15) и (10.2б). Дифференцируя уравнения (10.32') и (10.32''), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial y \partial x}; \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} &= \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Внося это в уравнение (10.32') и помня, что $H_2 = -H_1$, найдём

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = -q. \quad (10.34)$$

Для прямого бруса мы имели аналогичное, но более простое соотношение:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

Из уравнений (10.15) и (10.2б) найдём производные, необходимые для уравнения (10.34):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} &= -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \sigma \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right); \\ 2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} &= -2D(1-\sigma) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} &= -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \sigma \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Подставляя это в уравнение (10.34) и производя сокращения, получим

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q, \quad (10.35)$$

или [ср. уравнения (IX') и (IX) § 32]

$$D \nabla^2 (\nabla^2 w) = q, \quad (10.35a)$$

Это есть основное уравнение теории изгиба плоской пластинки или уравнение Софи Жермен (Sophie Germain); оно служит для нахождения искривлённой срединной плоскости пластинки; в случае бруса имеется более простая зависимость:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q.$$

Если удастся в условиях какой-либо задачи проинтегрировать уравнение (10.35), то по найденному конечному уравнению искривлённой срединной плоскости $w = f(x, y)$ получим из уравнений (10.15) и (10.26) моменты и затем из уравнений (10.32'') и (10.32''') — поперечные силы в любой точке пластинки. Подставляя значения моментов из уравнений (10.15) и (10.26) в уравнения (10.32'') и (10.32'''), выразим поперечные силы непосредственно через прогиб w :

$$N_1 = -D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (1 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right],$$

или

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \\ N_2 &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.36)$$

аналогично

По найденным усилиям можно уже вычислить напряжения. Для определения нормальных напряжений воспользуемся формулами (10.12); из них при помощи уравнений (10.14) получим

$$X_x = \frac{12M_1}{h^3} z; \quad Y_y = \frac{12M_2}{h^3} z,$$

что совпадает с известными формулами для бруса. Касательные напряжения $X_y = Y_x$ получим таким же путём из уравнения (10.25), подставляя сюда значение $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ из уравнения (10.26):

$$Y_x = X_y = \frac{12H_1}{h^3} z.$$

Для составляющих касательного напряжения, параллельных осп OZ , остаётся известная формула

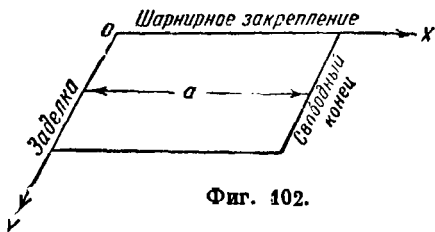
$$\begin{aligned} Z_x = X_z &= \frac{N_1 S}{Jb} = \frac{6N_1}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right); \\ Z_y = Y_z &= \frac{N_2 S}{Jb} = \frac{6N_2}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right). \end{aligned}$$

Посмотрим теперь, как составляются условия на контуре (гранях) пластинки. Возьмём, например, прямоугольную пластинку с закреплениями по фиг. 102. Для левого заделанного края имеем,

очевидно, условия: при $x=0$; $w=0$ и $\partial w/\partial x=0$, указывающие на отсутствие прогиба и угла наклона срединной плоскости на опоре. Для заднего шарнирно опёртого края следует потребовать отсутствия прогиба и изгибающего момента M_2 [ср. формулы (10.15)]:

$$\text{при } y=0; \quad w=0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

в обоих рассмотренных случаях мы получили по два условия; некоторое осложнение получим на правом, свободном краю, где должны отсутствовать все усилия: при $x=a$ $N_1=0$; $M_1=0$; $H_1=0$, т. е. получаем три условия вместо двух; однако, это противоречие лишь кажущееся, так как в § 60 мы показали, что распределённый крутящий момент H_1 статически равносильен поперечной силе $\frac{dH_1}{dy}$;



Фиг. 102.

добавляя её к основной поперечной силе N_1 , получим, как и в предыдущих случаях, два условия:

$$\text{при } x=a; \quad N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} = 0; \quad M_1 = 0,$$

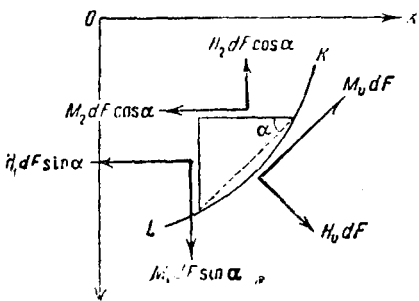
или, подставляя сюда выражения усилий из уравнений (10.15), (10.26) и (10.36), будем иметь при $x=a$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Кроме трёх рассмотренных основных случаев могут встретиться и другие способы закрепления, например, упругая опора (опора на балке), упругая заделка и т. д. Составление условий на контуре для этих случаев не представляет затруднений.

Для пластинок, имеющих криволинейный контур, необходимо бывает определить моменты, действующие по контуру (точнее — по криволинейной грани пластинки). Вырезая у контура KL (фиг. 103) трёхгранную элементарную призму, мы действие отброшенных частей пластинки заменим интересующими нас



Фиг. 103.

моментами, причём через M_v и H_v обозначим изгибающий и крутящий моменты по косой площадке контура. Моменты согласно общему приёму механики отложим в виде векторов перпендикулярно к плоскостям соответствующих пар в ту сторону, смотря с которой будем иметь вращение пары по часовой стрелке.

Принимая положительные направления моментов M_1 , M_2 , H_1 и H_2 по фиг. 101, б, а также в соответствии с этим выбирая положительные направления для M_v и H_v , получим схему векторов-моментов, показанную на фиг. 99; проектируя все эти векторы на направления M_v и H_v , легко напишем условия равновесия выделенного элемента; сокращая их на dF , получим следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} M_v &= M_1 \sin^2 \alpha + M_2 \cos^2 \alpha + 2H_1 \sin \alpha \cos \alpha, \\ H_v &= (M_2 - M_1) \sin \alpha \cos \alpha - H_1 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (10.37)$$

Найдя по уравнениям (10.15) и (10.26) моменты M_1 , M_2 и H_1 и внося их в уравнения (10.37), получим изгибающий момент M_v и крутящий момент H_v на площадке контура пластинки. Уравнениями (10.37) можно пользоваться, очевидно, и для вычисления моментов по косым сечениям внутри пластинки.

§ 62. Эллиптическая пластинка, закреплённая по контуру.

Зададимся выражением прогиба в форме

$$w = c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \quad (10.38)$$

и, обозначая для краткости

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = U, \quad (10.39)$$

будем иметь

$$w = cU^2. \quad (10.40)$$

Замечаем, что прогиб обращается в нуль на эллиптическом контуре:

$$U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (10.41)$$

Значит, получим решение задачи об изгибе эллиптической пластинки, если функция (10.38) удовлетворяет основному уравнению (10.35).

Взяв первые производные от прогиба (10.40):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2cU \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2cU \frac{\partial U}{\partial y},$$

видим, что они обращаются в нуль всюду на контуре (10.41); отсюда легко заключить, что на контуре срединная плоскость остаётся горизонтальной; значит, мы имеем пластинку с заделанными краями. В уравнение (10.35) входят четвертые производные прогиба; из выражения (10.38) видно, что все они будут постоянными числами; отсюда очевидно, что уравнению (10.35) можно удовлетворить, если $q = \text{const.}$, т. е. если нагрузка сплошная, равномерная.

Вычисление последовательных производных даёт

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 4 \frac{c}{a^2} Ux; & \frac{\partial w}{\partial y} &= 4 \frac{c}{b^2} Uy; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 8 \frac{c}{a^4} x^2 + 4 \frac{c}{a^2} U; & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 8 \frac{c}{a^2 b^2} xy; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 8 \frac{c}{b^4} y^2 + 4 \frac{c}{b^2} U; & \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= 24 \frac{c}{a^4} x; \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= 8 \frac{c}{a^2 b^2} y; & \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} &= 8 \frac{c}{a^2 b^2} x; & \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} &= 24 \frac{c}{b^4} y; \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= 24 \frac{c}{a^4}; & \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= 8 \frac{c}{a^2 b^2}; & \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= 24 \frac{c}{b^4}. \end{aligned} \right\} (10.42)$$

Подставляя значения производных в уравнение (10.35), найдём неопределённую пока постоянную c :

$$c = \frac{q}{\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right) D}.$$

Внося это значение в (10.38), получим уравнение искривлённой срединной плоскости.

Предлагаем читателю проделать следующие упражнения:

1. Найти наибольший прогиб пластинки в центре.
2. Пользуясь формулами (10.15), (10.26), (10.36) и выражениями производных (10.42), найти общие выражения M_1 , M_2 , $H_1 = -H_2$, N_1 и N_2 .
3. Вычислить наибольшие изгибающие моменты M_1 и M_2 на концах осей контура (моменты заделки) и в центре пластинки.
4. Положив $b = a$ (круглая пластинка), найти величины, указанные в предыдущих пунктах.

§ 63. Прямоугольная пластинка. Решение Навье.

Рассмотрим пластинку с шарнирно закреплёнными краями, нагруженную произвольной нагрузкой. В данном случае решение основного уравнения (10.35), т. е. выражение прогиба w ,

приходится разыскивать в форме бесконечного тригонометрического ряда. Зададим его в следующем виде, который, как легко в этом убедиться, удовлетворяет условию шарнирного закрепления всех четырёх сторон контура*):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (10.43)$$

Если для краткости обозначим

$$A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = U_{mn}, \quad (10.44)$$

то ряд (10.43) представится в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} = \\ & = U_{11} + U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1k} + \dots + U_{1n} + U_{1n+1} + \dots \\ & + U_{21} + U_{22} + U_{23} + \dots + U_{2k} + \dots + U_{2n} + \dots \\ & + U_{m_1} + U_{m_2} + U_{m_3} + \dots + U_{mk} + \dots + U_{mn} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.45)$$

каждая строка этого выражения является рядом по индексу n , а каждый столбец — рядом по индексу m .

Дифференцируя выражение (10.44) и подставляя его производные вместо w в левую часть уравнения (10.35), получим

$$DA_{mn}\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

поэтому уравнение (10.35) напишется так:

$$D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y), \quad (10.46)$$

или короче:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y), \quad (10.46a)$$

где

$$C_{mn} = D\pi^4 A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (10.47)$$

* Действительно, на контуре, т. е. при $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, имеем $w=0$; $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$; $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$, и условия для шарнирно закреплённого края будут удовлетворены.

Остаётся так подобрать коэффициенты ряда C_{mn} , чтобы уравнение (10.46а) было удовлетворено тождественно по всей площади пластинки; иначе говоря, согласно (10.46а) наша задача заключается в разложении функции $q(x, y)$ в тригонометрический ряд по двум переменным x и y ; выполняем это при помощи обычного приёма Эйлера для вычисления коэффициентов тригонометрического ряда; так как мы имеем двойной ряд, то и приём надо повторять дважды. Сначала умножим обе части равенства (10.46а) на

$$\sin \frac{k\pi y}{b} dy,$$

где k — какое-нибудь целое число, и проинтегрируем в пределах от 0 до b :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \\ = \int_0^b q(x, y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy. \end{aligned} \quad (10.48)$$

Состав этой двойной суммы, конечно, такой же, как и в выражении (10.45), однако, известно, что если $n \neq k$, то

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = 0;$$

если же $n = k$, то

$$\int_0^b \sin^2 \frac{k\pi y}{b} dy = \frac{b}{2}. \quad (10.49)$$

Отсюда легко понять, что в сумме левой части (10.48) исчезнут все члены, кроме членов, соответствующих k -му столбцу (10.45), в котором m имеет все значения $1, 2, 3, \dots, \infty$, и на основании (10.49) равенство (10.48) получит вид

$$\frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mk} \sin \frac{m\pi x}{a} = \int_0^b q(x, y) \frac{\sin k\pi y}{b} dy. \quad (10.50)$$

Обе части этого равенства являются функциями одного x . Над равенством (10.50) повторяем проделанный приём: обе части множим на

$$\sin \frac{i\pi x}{a} dx$$

и интегрируем в пределах от 0 до a ; в левой части исчезнут все члены, кроме члена, имеющего индекс $m=i$; по аналогии с (10.49) имеем

$$\int_0^a \sin^2 \frac{i\pi x}{a} dx = \frac{a}{2};$$

тогда из равенства (10.50) получаем

$$\frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} C_{ik} = \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy.$$

Отсюда находим коэффициент C_{ik} :

$$C_{ik} = \frac{4}{ab} \int \int q(x, y) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy,$$

и далее на основании (10.47) напомним

$$A_{ik} = \frac{4}{D\pi^4 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2 ab} \int \int q(x, y) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy.$$

Это есть общее выражение любого коэффициента ряда (10.43); заменяя обозначения i и k снова через m и n , получим

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 ab} \int \int q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (10.51)$$

По заданному распределению нагрузки $q(x, y)$ входящие сюда интегралы можно вычислить и, подставив найденные значения коэффициентов A_{mn} в уравнение (10.43), найти уравнение искривлённой срединной плоскости. Рассмотрим два основных случая, необходимых в расчётной практике.

1. Пусть нагрузка q — сплошная, равномерная по всей площади пластинки. Тогда для вычисления коэффициента A_{mn} по уравнению (10.51) имеем

$$\begin{aligned} \int \int q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \\ = q \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \end{aligned} \quad (10.52)$$

Следовательно, двойной интеграл разбился на два простых; вычисляем их:

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx &= \frac{a}{m\pi} \left[-\cos \frac{m\pi x}{a} \right]_0^a = \frac{a}{m\pi} (1 - \cos m\pi); \\ \int_0^b \sin \frac{k\pi y}{b} dy &= \frac{b}{n\pi} (1 - \cos n\pi). \end{aligned}$$

При нечётных m и n эти интегралы равны соответственно: $\frac{2a}{m\pi}$; $\frac{2b}{n\pi}$; при чётных m и n они обращаются в нуль. На этом основании интеграл (10.52) отличен от нуля только при нечётных m и n , и тогда он равен

$$\frac{4qab}{\pi^2 mn}.$$

Подставляя это значение в (10.51), получим:

$$A_{mn} = \frac{16q}{D\pi^6 mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

где $m=1, 3, 5, \dots, \infty$; $n=1, 3, 5, \dots, \infty$.

Замечаем, что при возрастании m и n величина коэффициента A_{mn} быстро убывает и ряд (10.43) быстро сходится; получаем окончательно:

$$w = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad (10.53)$$

где $m=1, 3, 5, \dots, \infty$; $n=1, 3, 5, \dots, \infty$.

Для разыскания наибольшего прогиба в центре пластинки полагаем $x=0,5a$; $y=0,5b$; тогда

$$f = \max w = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} = \frac{16q}{\pi^6 D} \beta. \quad (10.54)$$

Сюда вместо D следует вставить его выражение из (10.7). Для вычислений удобно положить $\frac{b}{a} = \mu$ и последнюю формулу выразить так:

$$f = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3};$$

Коэффициент α выражается в виде двойного ряда [ср. формулу (10.54)] и зависит от отношения сторон μ (см. таблицу на стр. 284).

Имея выражение прогиба (10.53), можем по уравнениям (10.15), (10.26) и (10.36) найти усилия в любой точке пластинки; например,

$$M_1 = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + \sigma \frac{n^2}{\mu^2}}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$M_2 = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n^2}{\mu^2} + \sigma m^2}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Благодаря шарнирному закреплению краёв наибольший момент получается в центре пластинки при $x=0,5a$; $y=0,5b$:

$$\max M_1 = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum \sum \frac{m^2 + \frac{\sigma}{\mu^2} n^2}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}+1} = \beta qa^2;$$

$$\max M_2 = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum \sum \frac{\frac{n^2}{\mu^2} + \sigma m^2}{mn \left(m^2 + \frac{n^2}{\mu^2} \right)^2} (-1)^{\frac{m+n}{2}+1} = \beta_1 qa^2.$$

Таким же путём вычисляются поперечные силы и опорные реакции пластинки по контуру. Результаты показаны в таблице, данной академиком Б. Г. Галеркиным.

Таблица

$\frac{b}{a} = \mu$	$\max \psi = \frac{qa^4}{\alpha E h^3}$	$\max M_1 = \beta qa^2$	$\max M_2 = \beta_1 qa^2$	$\max N_1 = \gamma qa$	$\max N_2 = \gamma_1 qb$	$\max \left(N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) = \delta qa$	$\max \left(N_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) = \delta_1 qb$	$R = m q a b$
μ	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	m
1,0	0,0443	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,06..
1,1	0,0530	0,0553	0,0494	0,360	0,315	0,440	0,400	0,064
1,2	0,0616	0,0626	0,0501	0,380	0,294	0,455	0,377	0,062
1,3	0,0697	0,0693	0,0504	0,397	0,275	0,468	0,357	0,061
1,4	0,0770	0,0753	0,0506	0,411	0,258	0,478	0,337	0,059
1,5	0,0843	0,0812	0,0500	0,424	0,242	0,486	0,323	0,057
1,6	0,0906	0,0852	0,0493	0,435	0,229	0,491	0,303	0,054
1,7	0,0964	0,0908	0,0486	0,444	0,216	0,496	0,287	0,052
1,8	0,1017	0,0948	0,0479	0,452	0,205	0,499	0,273	0,050
1,9	0,1064	0,0985	0,0471	0,459	0,194	0,502	0,260	0,048
2,0	0,1106	0,1017	0,0464	0,465	0,185	0,503	0,248	0,046
3,0	0,1336	0,1189	0,0404	0,493	0,124	0,505	0,166	0,031
4,0	0,1400	0,1235	0,0384	0,498	0,093	0,502	0,125	0,024
5,0	0,1416	0,1246	0,0375	0,500	0,074	0,500	0,100	0,019
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,500	—	0,500	—	—

Величины

$$\max \left(N_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) = \delta a q; \quad \max \left(N_2 + \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) = \delta_1 a q$$

выражают наибольшие единичные опорные реакции в серединах сторон контура. $R = m a b q$ — сосредоточенные реакции в углах пластинки; при вычислениях принято $\sigma = 0,3$.

2. Пластинка изгибается сосредоточенной силой P , приложенной в любой точке $x=c$; $y=d$. Силу P заменим сплошной нагрузкой q на бесконечно малой площадке $dx dy$:

$$P = q dx dy \quad \text{или} \quad q = \frac{P}{dx dy}. \quad (10.55)$$

Тогда в формуле (10.51) функция $q(x, y)$ равна нулю всюду, кроме точки $x=c$, $y=d$, где она равна величине (10.55). В интеграле правой части уравнения (10.51) сохраняется лишь один элемент, соответствующий точке (c, d) :

$$\begin{aligned} \iint q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy &= \\ &= \frac{P}{dx dy} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b} dx dy = P \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}; \end{aligned}$$

тогда по уравнению (10.51)

$$A_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Из (10.43) получаем уравнение искривлённой срединной плоскости:

$$w = \frac{4P}{D\pi^4 ab} \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{n\pi d}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (10.56)$$

§ 64. Прямоугольная пластинка. Решение М. Леви.

Метод, данный Морисом Леви (M. Levy), является более общим по сравнению с методом Навье; вместе с тем, он тесно связан с решениями Файлона и Рибьера для плоской задачи о прямоугольнике, изложенными в § 37, что объясняется близким сходством основных уравнений:

для прогиба пластинки

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q(x, y)}{D} \quad (10.57)$$

и для функции напряжений в плоской задаче

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0.$$

Метод Леви пригоден для всех тех случаев, когда (фиг. 104) у прямоугольной пластинки два противоположных края, например OB и AC , опёрты шарнирно; два других — OA и BC — могут

быть опёртыми как угодно или свободными. Имея в виду эти условия, будем искать решение уравнения (10.57) в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (10.58)$$

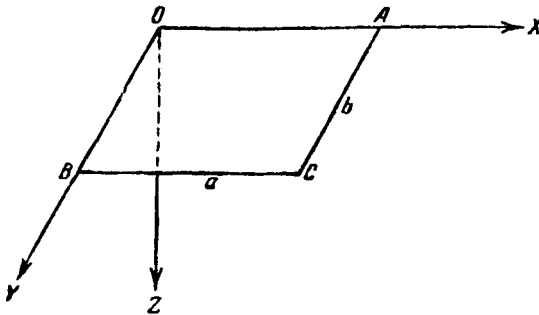
Так как

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{a^2} \sum m^2 f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

то имеем

$$\text{при } \left. \begin{array}{l} x=0; \\ x=a \end{array} \right\} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2} = 0,$$

т. е. удовлетворены условия шарнирного опирания краёв OB



Фиг. 104.

и AC . Подставляя (10.58) в левую часть уравнения (10.57), получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left[f_m^{(IV)}(y) - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 f_m''(y) + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 f_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = \\ = \frac{q(x, y)}{D}, \end{aligned} \quad (10.59)$$

или короче:

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_m^*(y) \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (10.60)$$

где

$$D_m^*(y) = f_m^{(IV)}(y) - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 f_m''(y) + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 f_m(y). \quad (10.61)$$

Левая часть представляет собою ряд Фурье по синусам, поэтому и правую часть надо представить себе разложенной в та-

кой же ряд:

$$\frac{q(x, y)}{D} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

где $F_m(y)$ — коэффициенты ряда, зависящие от y , так как от него зависит, вообще говоря, заданная нагрузка $q(x, y)$; подставляя это в правую часть (10.60), приравняем коэффициенты соответственных членов слева и справа:

$$D_m^*(y) = F_m(y),$$

а это согласно (10.31) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка для отыскания неизвестной пока функции $f_m(y)$.

Практически этот процесс сводится к следующей формальной выкладке: умножаем обе части (10.59) на $\sin \frac{n\pi x}{a}$ (где $n = 1, 2, \dots$) и интегрируем в пределах от нуля до a ; учитывая, что

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

равен нулю при $m \neq n$ и равен $\frac{a}{2}$ при $m = n$, получим нужное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} f_n^{(IV)}(y) - 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 f_n''(y) + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 f_n(y) = \\ = \frac{2}{Da} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \end{aligned} \quad (10.62)$$

По выполнении интегрирования в правой части этого уравнения она, очевидно, станет функцией от одного только y .

Общее решение уравнения (10.62) составит из общего решения однородного уравнения, которое совпадает с уравнением (6.84) § 37, если в последнем положить

$$\lambda = \frac{n\pi}{a},$$

и из какого-либо частного решения полного уравнения (10.62); обозначим это частное решение через

$$\bar{f}_n(y);$$

общее решение однородного уравнения сразу напишем, пользуясь рассуждениями § 37, по типу формулы (6.88) с заменой в ней обозначений m на n и l на a :

$$f_n^{(0)}(y) = A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + C_n y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}. \quad (10.63)$$

Поэтому общее решение уравнения (10.62) будет

$$f_n(y) = f_n^{(0)}(y) + \bar{f}_n(y) = A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + C_n y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + \bar{f}_n(y). \quad (10.64)$$

Внося это значение $f_n(y)$ в (10.58), найдём решение уравнения (10.57), соответствующее заданной нагрузке $q(x, y)$ и удовлетворяющее граничным условиям на шарнирно опёртых краях OB и AC . Остаётся так распорядиться произвольными постоянными

$$A_n, B_n, C_n, D_n, \quad (10.65)$$

чтобы каждый член суммы (10.58) в отдельности удовлетворял граничным условиям, заданным на двух других краях OA и BC ; число этих условий равно всегда четырём и их достаточно для определения постоянных (10.65). Рассмотрим, например, случай, когда края OA и BC также шарнирно опёрты; тогда граничные условия будут

$$\left. \begin{array}{l} y=0; \\ y=b; \end{array} \right\} w=0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0, \quad (10.66)$$

или согласно (10.58) имеем

$$\begin{aligned} \sum f_n(0) \sin \frac{n\pi x}{a} &= 0; & \sum f_n''(0) \sin \frac{n\pi x}{a} &= 0; \\ \sum f_n(b) \sin \frac{n\pi x}{a} &= 0; & \sum f_n''(b) \sin \frac{n\pi x}{a} &= 0, \end{aligned}$$

или ввиду произвольности x ($0 \leq x \leq a$) получаем

$$\left. \begin{array}{l} f_n(0) = 0; \quad f_n''(0) = 0; \\ f_n(b) = 0; \quad f_n''(b) = 0. \end{array} \right\} \quad (10.67)$$

Раскрывая эти условия при помощи (10.64), получим четыре уравнения:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= -\bar{f}_n^{(0)}(0); \\ A_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + D_n 2 \frac{n\pi}{a} &= -\bar{f}_n''(0); \\ A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} + C_n b \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} + D_n b \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} &= -\bar{f}_n(b); \\ A_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} + B_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} + \\ &+ C_n \left[2 \frac{n\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 b \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} \right] + \\ &+ D_n \left[2 \frac{n\pi}{a} \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 b \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} \right] &= -\bar{f}_n''(b). \end{aligned} \right\} \quad (10.68)$$

Подставив в правые части этих уравнений соответственные значения частного решения

$$\bar{f}_n(y), \quad (10.69)$$

мы должны решить их относительно постоянных (10.65). Решение сильно упрощается, если, пользуясь свободой выбора частного решения (10.69), построим его так, что

$$\bar{f}_n(0) = 0; \quad \bar{f}_n''(0) = 0. \quad (10.70)$$

Тогда первые два уравнения (10.68) дадут

$$A_n = D_n = 0. \quad (10.71)$$

Решая остальные два уравнения, получим

$$\left. \begin{aligned} B_n &= \frac{1}{2 \frac{n\pi}{a} \operatorname{sh}^2 \frac{n\pi b}{a}} \left\{ b \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} \bar{f}_n''(b) - \right. \\ &\quad \left. - \left[2 \frac{n\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 b \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{a} \right] \bar{f}_n(b) \right\}, \\ C_n &= \frac{1}{2 \frac{n\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \bar{f}_n(b) - \bar{f}_n''(b) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10.72)$$

Частное решение (10.69), удовлетворяющее условиям (10.70), найдём методом Коши. Для этого сначала найдём из (10.63), подбирая соответственным образом постоянные (10.65), то частное решение однородного уравнения

$$D_n^*(y) = 0,$$

которое удовлетворяет начальным условиям:

$$f_n(0) = f_n'(0) = f_n''(0) = 0; \quad f_n'''(0) = 1; \quad (10.73)$$

обозначим его $Y_n(y)$; оно имеет вид

$$Y_n = \frac{a^2}{2(n\pi)^2} \left[y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} - \frac{a}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right]. \quad (10.74)$$

Путём дифференцирования можно убедиться, что это решение удовлетворяет условиям (10.73). Если для краткости введём в правой части (10.62) обозначение

$$\frac{2}{Da} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \varphi_n(y), \quad (10.75)$$

то, следуя методу Коши, найдём нужное нам частное решение уравнения (10.62) в следующей форме:

$$\bar{f}_n(y) = \int_0^y Y_n(y - \eta) \varphi_n(\eta) d\eta, \quad (10.76)$$

или в раскрытом виде:

$$\bar{f}_n(y) = \frac{a}{D(n\pi)^2} \int_0^y \left\{ \left[(y-\eta) \operatorname{ch} \frac{n\pi(y-\eta)}{a} - \frac{a}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi(y-\eta)}{a} \right] \int_0^a q(x, \eta) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \right\} d\eta. \quad (10.76a)$$

Подставив значения (10.71), (10.72) и (10.76) в (10.64), найдём окончательно функцию $f_n(y)$, а внеся её в (10.58), получим решение для прямоугольной пластинки, шарнирно опёртой по контуру при любой заданной нагрузке $q(x, y)$. Усилия определяются обычным путём по формулам (10.15), (10.26) и (10.35).

Это решение удобнее для приложений, чем решение Навье, данное в § 62, благодаря хорошей сходимости соответствующих рядов. Таким же путём можно получить решения и для других граничных условий на краях OA и BC ; следует только соответственно изменить уравнения (10.68) для отыскания постоянных (10.65); дальнейший ход решения остаётся в силе.

Много задач, касающихся изгиба пластинок, решено акад. Б. Г. Галеркиным. Все эти результаты собраны в его капитальном труде «Упругие тонкие плиты» (Госстройиздат, 1933).

§ 65. Круглая пластинка.

При исследовании круглой пластинки весьма удобно пользоваться полярными координатами r и θ ; поэтому все основные уравнения изгиба пластинки преобразуем к полярным координатам по формулам

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta.$$

Так как левая часть основного уравнения (10.35) по своему составу совершенно сходна с левой частью уравнения (IX) § 32 плоской задачи, то для нужных нам преобразований мы можем использовать выкладки § 60, заменив в них функцию φ на ω . Таким образом, непосредственно получаем

$$\nabla^2 \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2},$$

и основное уравнение (10.35a) получит вид [ср. (IX_n) § 38]

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) = q(r, \theta). \quad (10.77)$$

Мы здесь коснёмся только случая, когда нагрузка не зависит от θ , т. е. когда она по всем направлениям от центра пластинки распределена одинаково. В этом случае искривлённая средн-

ная поверхность, очевидно, должна быть поверхностью вращения, прогиб w не будет зависеть от θ , и уравнение (10.77) упрощается [ср. уравнение (IX_{n'}) § 39]:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = q. \quad (10.78)$$

Общий интеграл этого уравнения составится из общего интеграла w уравнения без последнего члена

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (10.79)$$

и какого-либо частного интеграла полного уравнения (10.78); однако, общий интеграл уравнения (10.79) мы уже знаем [уравнение (7.10), § 39]:

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2; \quad (10.80)$$

поэтому общий интеграл уравнения (10.78) напомним так:

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2 + \bar{w}. \quad (10.81)$$

Частный интеграл w весьма просто разыскивается, если нагрузка q постоянна (сплошная равномерная нагрузка по всей площади пластинки); самый вид уравнения (10.78) показывает, что можно положить $\bar{w} = cr^4$, где c — неопределённое пока число; подставляя это значение в уравнение (10.78), легко найдём, что $c = q/64D$, и поэтому

$$\bar{w} = \frac{qr^4}{64D}.$$

Подставляя это в уравнение (10.81), получим общее решение для круговой пластинки под сплошной равномерной нагрузкой:

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 + C_4 r^2 + \frac{qr^4}{64D}. \quad (10.82)$$

Для вычисления моментов воспользуемся уравнениями (40.15) и (40.26), преобразовав их к полярным координатам. Направляя ось Ox вдоль радиуса r данной точки, аналогично [(7.7), § 38], найдём

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0.$$

Внося это в уравнения (40.15) и (40.26), найдём

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\ M_2 &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \\ H_1 &= H_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.83)$$

Здесь M_1 — изгибающий момент по площадке, нормальной к радиусу, M_2 — момент по радиальному сечению; крутящие моменты по рассматриваемым основным сечениям, как и следовало ожидать, ввиду симметрии пластинки и нагрузки отсутствуют.

Рассмотрим несколько частных случаев закрепления пластинки на контуре. Если мы возьмём полную пластинку без круглого выреза вокруг центра, то в общем решении (10.82) придётся отбросить два первых члена; в противном случае в центре пластинки ω , $\frac{\partial \omega}{\partial r}$ и $\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}$ обращаются в бесконечность, т. е. будут равны ∞ прогиб и кривизна пластинки. Следовательно, получим

$$\omega = C_3 + C_4 r^2 + \frac{qr^4}{64D}. \quad (10.84)$$

Оставшиеся две произвольные постоянные можно определить из условий закрепления.

а) Если пластинка радиуса a заделана по контуру, то получим следующие условия на контуре: при $r = a$; $\omega = 0$; $\partial \omega / \partial r = 0$. Находя из этих условий C_3 и C_4 и подставляя их значения в уравнение (10.84), получим

$$\omega = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2. \quad (10.85)$$

Далее, по уравнениям (10.83) найдём

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{q}{16} [a^2(1 + \sigma) - r^2(3 + \sigma)], \\ M_2 &= \frac{q}{16} [a^2(1 + \sigma) - r^2(1 + 3\sigma)]. \end{aligned} \right\} \quad (10.86)$$

Предлагаем читателю проверить эти формулы и найти $\max M$ на контуре пластинки и в центре её; равным образом найти прогиб в центре. Все эти результаты предлагаем сверить с результатами § 62 в случае $b = a$.

б) Если пластинка шарнирно оперта по контуру, то условия на контуре имеют вид

при $r = a$; $\omega = 0$

$$M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = 0;$$

определяя отсюда C_3 и C_4 , получим из уравнения (10.84)

$$\omega = \frac{q}{64D} \left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1 + \sigma} \right]. \quad (10.87)$$

Далее найдём по уравнениям (10.83)

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{q}{16} [a^2(3 + \sigma) - r^2(3 + \sigma)]; \\ M_2 &= \frac{q}{16} [a^2(3 + \sigma) - r^2(1 + 3\sigma)]. \end{aligned} \right\} \quad (10.88)$$

Предлагаем читателю вычислить $\max M$ и прогиб в центре пластинки.

в) Рассмотрим ещё случай пластинки с шарнирно опёртым краем при отсутствии нагрузки ($q = 0$), но под действием равномерно распределённого момента $M_1 = M$ по контуру. В этом случае из уравнения (10.84) получаем

$$\omega = C_3 + C_4 r^2.$$

Постоянные придётся определить из условий при $r = a$;

$$\omega = 0; \quad -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = M.$$

Без труда получим, что

$$\omega = \frac{M}{2D(1+\sigma)} (a^2 - r^2). \quad (10.89)$$

Это решение оказывается необходимым при расчёте днищ круглых цилиндрических резервуаров. Здесь мы имеем дело со случаем чистого изгиба пластинки.

В заключение приведём результаты, получающиеся в случае нагрузки пластинки сосредоточенной силой P , приложенной в центре пластинки. Если пластинка заделана по контуру, то

$$\omega = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{1}{2} (a^2 - r^2) - r^2 \ln \frac{a}{r} \right]. \quad (10.90)$$

Если пластинка опёрта шарнирно, то

$$\omega = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{1}{2} \frac{3+\sigma}{1+\sigma} (a^2 - r^2) - r^2 \ln \frac{a}{r} \right]. \quad (10.91)$$

Вычисление моментов по уравнениям (10.83) не представит затруднений.

Комбинируя эти решения с предыдущими и приравняв нулю прогиб в центре, можно решить задачу о пластинке, подпёртой по контуру и в центре и нагруженной сплошной равномерной нагрузкой.

§ 66. Аналогия с мембраной. Метод Маркуса.

Продолжим несколько рассуждения § 59 и покажем новую форму, принимаемую основными уравнениями пластинки при введении лапласова оператора от прогиба

$$\nabla^2 \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

и приведённой суммы моментов

$$\mathfrak{M} = \frac{M_1 + M_2}{1 + \sigma}. \quad (10.92)$$

В § 59 мы вывели уравнение (10.17)

$$D \nabla^2 w = -\mathfrak{M}. \quad (10.93)$$

Выражения поперечных сил (10.36) можем написать так:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}, \\ N_2 &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (10.94)$$

Эти соотношения аналогичны известной зависимости для прямого бруса

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

Далее уравнение (10.35а) на основании (10.93) перепишем так:

$$D \nabla^2 \left(-\frac{\mathfrak{M}}{D} \right) = q, \text{ или } \nabla^2 \mathfrak{M} = -q. \quad (10.95)$$

Для прямого бруса имеется аналогичная зависимость

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

Будем теперь параллельно с пластинкой рассматривать гибкую нерастяжимую мембрану (плёнку), закреплённую на таком же контуре, как и рассматриваемая пластинка, и нагруженную такой же нагрузкой $q(x, y)$; дифференциальное уравнение поверхности мембраны было получено в § 45 [см. уравнение (8.71)]:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{H}, \quad (10.96)$$

или короче:

$$\nabla^2 z = -\frac{q}{H}. \quad (10.96a)$$

Для верёвочной кривой имеем аналогичное уравнение:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{q}{H},$$

где H — полюсное расстояние.

Сопоставим теперь уравнения (10.93), (10.95) и (10.96а):

$$\nabla^2 w = -\frac{\mathfrak{M}}{D}, \quad (10.93)$$

$$\nabla^2 \mathfrak{M} = -\frac{q}{D}, \quad (10.95)$$

$$\nabla^2 z = -\frac{q}{H}. \quad (10.96a)$$

Из них сделаем следующие выводы, подобные выводам, основанным на аналогии между упругой линией и верёвочной кривой.

1. Если положим $H = 1$, то $z = \mathfrak{M}$; значит, при натяжении мембраны, равном единице, поверхность её провисания под нагрузкой q даёт эпюру приведенной суммы моментов \mathfrak{M} от этой нагрузки. (Сравните с эпюрой M , как верёвочной кривой или верёвочным многоугольником для данной нагрузки.)

2. Если положим $H = D$; $q = \mathfrak{M}$, то $z = w$; следовательно, при натяжении мембраны, равном жёсткости D , поверхность провисания мембраны под нагрузкой в виде эпюры \mathfrak{M} даёт искривлённую поверхность пластинки. (Ср. с упругой линией, как верёвочной кривой от нагружения эпюрой M .)

Пользуясь этой аналогией между пластинкой и мембраной, Г. Маркус построил свой способ расчёта пластинки; мембрану он заменяет сеткой (ср. приближённую замену верёвочной кривой верёвочным многоугольником), и этим дифференциальное уравнение её (10.96а) превращает в уравнение в конечных разностях; идя таким путём, он заменяет интегрирование дифференциального уравнения (10.96а) решением системы уравнений первой степени *).

*) См. H. Marcus, Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Berlin, 1924.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.

1. Ляв А., Математическая теория упругости, 1935 г.
2. Лейбензон Л. С., Краткий курс теории упругости, 1942 г.
3. Тимошенко С. П., Теория упругости, 1934 г.
4. Папкович П. Ф., Теория упругости, 1939 г.
5. Фёпль А. и Л., Сила и деформация, т. 1 и 2, 1936 и 1939 гг.
6. Мухелишвили Н. И., Некоторые задачи теории упругости, 1933 и 1937 гг.
7. Треффц Е., Математическая теория упругости, 1932 г.
8. Пфейффер П., Колебания упругих тел, 1932 г.
9. Колосов Г. В., Применение комплексной переменной к теории упругости, 1935 г.
10. Серенсен С. В., Основы технической теории упругости, 1934 г.
11. Крылов А. Н., О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, 1932 г.

ИНОСТРАННЫЕ ИСТОЧНИКИ.

1. Navier, Résumé des leçons, 1864, с примечаниями С.-Венана.
2. Mathieu E., Theorie de l'élasticité des corps solides, 1890.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ.

Бельтрами 7, 108, 109, 111, 222, 225,
226, 227
Бредт 240, 211
Буссинск 4, 7, 166, 222, 227, 233,
236, 242, 243

Галеркин Б. Г. 243, 260, 284, 290
Гакнелер 4
Герсевич Н. М. 174
Герц 242
Грин 21, 113
Гун 6, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 61,
70, 71, 73, 76, 84, 93, 97, 109, 110,
117, 118, 120, 121, 132, 161, 187,
226, 234, 240, 241, 247, 260, 262,
265, 269

Даламбер 84, 255
Дирихле 190

Жермен Софи 276

Иностранцев 87

Кирхгофф 112
Клапейрон 112
Кокер Э. 152
Колосов Г. В. 245
Кочин Н. Е. 253
Копи 24, 26, 27, 29, 33, 39, 48, 70,
168, 187, 189, 190, 193, 194, 202,
234, 236, 240, 249, 289
Кулаков 148
Кулон 193

Лаплас 74, 109, 187, 205, 206, 217
223, 225, 226, 227, 231, 244, 255,
267

Леви М. 7, 8, 120, 123, 143, 144, 285
Лейбензон Л. С. 3, 5, 242, 243, 245,
250, 259
Ляв Л. 3, 7, 242, 245, 250, 258

Ляме 6, 7, 29, 30, 33, 55, 56, 69, 73,
74, 75, 76, 109, 110, 163, 187, 222,
226, 227, 228, 229, 230, 245, 247,
251, 254

Маклорен 61

Маркус 8, 293, 295

Маслов Г. Н. 151

Мичелл 5, 7, 108, 111, 184

Мухелишвили Н. И. 3, 7, 24, 27,
46, 48, 245, 250, 251

Навье 8, 70, 84, 279, 285

Нейман 189

Ньютон 16

Папнович П. Ф. 3, 151, 152

Прандтль 7, 191, 205, 206, 207, 209

Пронтор Г. Э. 215

Пуассон 4, 53, 205

Релей 258

Рибьер 4, 7, 146, 285

Риман 189, 190, 193, 194, 202, 249

Сен-Венан 7, 45, 47, 48, 70, 76, 91,
92, 110, 132, 137, 142, 145, 152,
186, 193, 209, 210, 211, 212,
241, 272

Серенсен С. В. 3

Стокс 210

Тимошенко С. П. 3, 109, 151, 152,
186, 213, 245

Треффц 4, 242

Файлон 1, 7, 146, 149, 152, 245, 285

Фёппль Л. 3, 210, 215

Фламан 7, 166

Эйлер 4, 62, 87, 107, 239, 281

Эри 124, 126, 191,

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуда колебаний** 79
Аналогия Прандтля 205, 207, 209, 210
 — с мембраной 293
- Балка на двух опорах** 137
 — полоска 260
Брусья тонкостенные 215
- Вектор вращения** 253
 — напряжений 29, 31
 — перемещения (вихрь) 253
- Взаимность касательных напряжений** 17, 33, 113
 — крутящих моментов 269
- Волны Лява** 258
 — отражённые 257
 — расширения 253, 254
 — безвихревые
 — Релея 258
 — сдвига 253
 — стоячие 257
 — сферические 256, 257
 — эквиволлюминальные 253
- Выкружки** 209
- Гиперboloид двуполостный** 25
 — напряжений 25
 — однополостный 25
- Гипотеза о естественном состоянии тела** 60, 62, 106
 — — потенциале упругих сил 59, 69
 — плоских сечений 96, 100, 105, 130, 132, 135, 164, 186, 260, 261
- Градиент функции** 208, 219, 221
- Двуатав** 209
- Деформации** 36, 43, 158
 — большие 48
 — зависящие нелинейно от перемещений 49
 — линейные 36, 37, 39
 — малые 49, 71
 — попаречные 82
 — угловые 37, 39
- Деформация изотропного тела** 48
 — объёмная 48, 226
 — однородная 42
 — плоская 146
 — чистая 43
- Диагональ матрицы главная** 40
- Дивергенция вектора перемещений** 253
- Единственность решения** 106, 111, 114, 115, 163, 184
- Жёсткость изгиба** 262
 — кручения 192
 — цилиндрическая 262
- Зависимость между перемещениями и деформациями** 36
 — — — — — нелинейная 49
- Задача Буссинеска** 233
 — Дирихле 190, 234, 236
 — контактная 112
 — краевая 234
 — Ляме 163
 — Неймана 189
 — плоская 121
 — — в декартовых координатах 116
 — — — — — полярных—155
 — теории упругости вторая 112
 — — — — — первая 111
 — — — — — смешанная 112
 — Фламана-Буссинеска 166
 — Эйлера 107
- Задачи основные** 111
 — статически неопределимые 18
- Закон взаимности касательных напряжений** 17, 33, 113
 — крутящих моментов 269
 — Гука 51, 53 54, 71
 — — в плоской задаче 148, 121, 161, 251
 — — для пластинок 260
 — независимости действия сил 53, 106, 107, 108

- Изгиб балки сплошной нагрузкой** 137
 — бруса 49, 215
 — консоли 130
 — пластинки 259, 261, 272
 — — сосредоточенной силой 285
 — — сплошной нагрузкой 282, 291
 — поперечный 211
 — продольный 107
 — прямоугольной полосы 146, 285
 — цилиндра 13
 — цилиндрический 260, 261
 — части круглого кольца 164
 — чистый 35, 49, 96, 124, 129, 261, 263
Инвариант линейный 28
 — преобразования координат 28
Искажение плоского сечения 100, 135, 193, 195
Касательные напряжения 11, 12, 22, 53, 89, 197, 207, 216, 260, 269, 276
 — — наибольшие 30, 32
 — — усилия 90, 140, 151
Катки 112, 117
Квадрика Коши
Клин 185
 — нагруженный в вершине 172
 — острый 175
 — тупой 175
Колебания в неограниченной среде 76
 — вынужденные 87
 — гармонические 79
 — земной коры 87
 — однородные 77, 254
 — периодические 77
 — поперечные 76, 78, 82
 — продольные 76, 77, 254, 255
 — — стержня 83
 — свободные 87
Кольцо замкнутое 185
 — круглое 164
 — незамкнутое 164, 209
Компоненты вращения 41, 42, 43, 47
 — деформации 36, 40, 42, 43, 47, 62, 63, 68
 — матрицы 40, 46
 — перемещения 24, 28, 187
Консоль 130
Контур двухсвязный 163
 — замкнутый 209
 — многосвязный 164, 210, 211
 — односвязный 124, 184, 192
Координаты полярные 123, 148, 156, 177, 232, 241, 290
 — цилиндрические 156, 232
Косинусы направляющие 26, 27
Коэффициенты Ляме 55, 69
 — Пуассона 52, 53
 — тригонометрического ряда 87, 281, 282
 — упругости 52, 63, 64, 80
Кривая верёвочная 294
Кривизна пластинки 264, 266
Кристаллы 64
Кручение круглого стержня 50, 89, 93
 — пластинки 200, 267
 — — чистое 268
 — призматического стержня 186
 — стержня прямоугольного сечения 199
 — — треугольного сечения 198
 — — эллиптического сечения 194, 206
 — теория—Кулона 193
 — цилиндра 13, 186
Матрица антисимметричная 46
 — компонентов деформации 40, 46
 — симметричная 46
Мембрана 206, 209, 210, 293, 294
Метод вариации постоянных 168
 — Коши 289
 — Лява 250
 — Маркуса 293
 — Мухелишвили 250
 — напряжений 72, 88, 108, 205
 — обратный 76, 77, 106
 — оптический 124
 — перемещений 70, 72, 187
 — полуобратный 76, 186, 211
 — разделения переменных 146, 147, 200
 — Сен-Венана 193
 — Файлона 245
Многоугольник верёвочный 295
Однозначность решения 105, 108, 163, 164
Оператор Лапласа 74, 109, 123, 129, 226, 231
Отношение Пуассона 52
Параболоид вращения 105, 196, 271
Параллелепипед 13, 19, 36, 37
 — косой 42
Парность касательных напряжений 17, 33
Пары крутящие 267
Переменные комплексные 143, 144, 243, 245, 248
Перемещения 36, 43, 158
 — абсолютно твёрдого тела 42

Перемещения возможные 58, 59
 — поступательные 42
 Период колебаний 79
 Пирамида 19
 Пластина 117, 120, 259
 — заделанная по контуру 292
 — круглая 290
 — прямоугольная 279
 — тонкая 120
 — шарнирно опёртая 292
 — эллиптическая 278
 Плиты подвижных опор 112
 — тонкие 260
 Плоскость нейтральная 259
 Плотина 12, 34, 117, 143
 Плотность 14, 80, 84
 Площадки главные 27, 31, 33
 Поверхность напряжений 25
 Поворот жёсткого тела 46
 Подшипники 112
 Полиномы 128, 131, 137, 143, 146
 Полупространство 233
 Постоянные упругие 63, 64
 Потенциал Лапласа 217
 — перемещений 43
 — упругих сил 59, 60, 64, 114
 Принцип Сен-Венана 91, 132
 Прогиб в пластинке 283
 Производная потенциальной энергии
 60
 — нормальная 128, 189
 Процесс волновой 253

 Работа внешних сил 112, 113
 — на единицу объёма 59
 — упругих сил 58
 Равновесие мембраны 206
 — параллелепипеда 13
 — тетраэдра 19
 Радиус кривизны 101
 Растяжение всестороннее 130
 — цилиндра 102
 Ряд Маклорена 61
 Ряды Фурье 84, 87

 Свет поляризованный 124
 Свод 117
 Связь деформаций и напряжений
 51, 53
 — перемещений и деформаций 70
 Сдвиг 37, 39, 41, 52, 65, 82,
 Сейсмограмма 87
 Сечение двухсвязное 209
 — треугольное 198
 Сжатие всестороннее 26, 30
 — двух тел 242
 — полосы 152

Силы объёмные 14, 19, 74, 76, 109,
 110 114, 126, 226
 — тяжести 14
 Скорость распространения колебаний
 80, 81, 254
 — — деформации 80, 84
 Сопротивление материалов
 Сопряжённость касательных напря-
 жений 17, 33
 Составляющие деформаций 43
 — напряжений 11, 14, 24
 Состояние напряжённое 10, 21
 — — однородное 129
 — — плоское 120
 Состояние тела естественное 62
 Стенка плотины 12
 — подпорная 143, 144

 Тело абсолютно твёрдое 36, 42
 — анизотропное 52, 64
 — изотропное 52, 57, 64, 67
 — многосвязное 48, 58, 124, 163, 209
 — неизотропное 52, 64
 — неоднородное 51
 — однородное 51, 67
 — односвязное 48, 124, 184, 192
 — сыпучее 143
 Тензор деформации 46
 — жёсткого вращения антисимме-
 тричный 46
 — малой деформации 46
 — напряжений 24, 28
 — чистой деформации 46
 Теорема Бредта 210
 — единственности 108, 111, 114
 — Клапейрона 112
 — Эйлера об однородных функциях 62
 Теория Герца 242
 — деформаций 36, 51
 — Кулона 192, 193
 — напряжений 10, 51
 — перемещений 36, 51
 — потенциала 234
 Тетраэдр 19
 Трёхгранник 24, 32
 Труба круглая 163

 Углы нормали направляющие 26, 27
 — поворота 43
 Угол закручивания 89, 272
 — наклона поверхности мембраны
 208
 — сдвига 68
 Уголок 209
 Удлинение 36, 37, 38, 39, 52, 65
 Уравнение волновое 251, 254, 257
 — изогнутой оси 99, 136

- Уравнение (условие) Мориса Леви
120, 123
- Уравнения Бельтрами Мичелла 108,
223, 225, 226, 227
- бигармонические 221, 222, 225
- искривлённой пластинки 279
- колебаний 80
- — стержня 89
- Коши 39, 70, 240
- — в плоской задаче 119
- Лямэ 73, 74, 109, 222, 225, 226
- Лапласа 109, 187
- непрерывности деформаций 43, 45,
50, 71
- равновесия Навье 16, 18, 70
- Сен-Венана 45, 110
- совместности деформаций 45, 119
- Софи Жермен 276
- статические 70
- физические 71
- Условия граничные 20, 146
- деформаций 18
- закрепления стержня 95, 104, 134
- Коши-Римана 189, 193, 299
- на контуре 128, 276
- на поверхности 13, 19, 20, 70, 75,
119
- неразрывности 45
- равновесия 13, 15, 16, 18, 70, 119
- см. уравнения
- Формула Грина** 21, 43
- Формула Лява** 242
- Эйлера 87
- Функции бигармонические** 128, 227
- гармонические 220, 222, 224, 226,
228
- однородные 62
- Функция аналитическая** 193, 194, 198
- комплексной переменной 193,
194, 243, 245, 248
- кручения 186, 191, 192, 193, 202,
205
- напряжений 203, 213, 216
- — Эри 126
- однозначная 217
- Центр изгиба** 215
- Цилиндр** 102
- Циркуляция напряжений** 211
- Частота периодических колебаний**
254
- Швеллер** 209
- Эллипсоид Лямэ** 29, 33
- напряжений 25, 29
- Энергия** 59
- в единице объёма 59
- потенциальная 59, 114
- тепловая 59
- упругая 59
- электромагнитная 59