

Б. Ф. ЖДАНЮК

ОСНОВЫ
СТАТИСТИЧЕСКОЙ
ОБРАБОТКИ
ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ



МОСКВА «СОВЕТСКОЕ РАДИО» 1978

ББК 32.842

Ж42

УДК 629.76.78.015:519.2

Жданюк Б. Ф.

Ж 42 Основы статистической обработки траекторных измерений. — М.: Сов. радио, 1978. — 384 с., ил.

В пер. 1 р. 70 к.

Изложены основные методы статистической обработки экспериментальных данных. Приведены методы определения движения летательных аппаратов на основе статистической обработки результатов траекторных измерений.

Книга предназначена для специалистов по проектированию и применению траекторных измерительных средств, для студентов вузов и может быть полезна инженерам, использующим в своей работе статистическую обработку данных.

Ж 30402-060
046(01)-78 11-78

ББК 32.842
6Ф2.4

*Редакция литературы
по вопросам космической радиоэлектроники*

ИБ № 210

Борис Федорович Жданюк

ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ
ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт,
а/я 693

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

© Издательство «Советское радио», 1978 г.

В связи с развитием ракетной и космической техники, запуском космических аппаратов различного назначения, разработкой все более совершенных электронных вычислительных машин и внедрением в практику вероятностных методов исследований широкое развитие получили вопросы статистической обработки радиотехнических траекторных измерений с целью определения движения летательных аппаратов (ЛА).

Характерной особенностью современного уровня развития средств радиотехнических траекторных измерений является тесная связь и взаимовлияние процессов измерения параметров движения летательных аппаратов и математической обработки результатов измерений. Это обусловило повышенный интерес широкого круга специалистов, занимающихся проектированием и эксплуатацией радиотехнических траекторных измерительных средств, к изучению методов определения движения летательных аппаратов по результатам измерений.

В книге излагаются основные методы статистического оценивания параметров по экспериментальным данным. Главное внимание уделяется рассмотрению особенностей применения этих методов для оптимального оценивания движения летательных аппаратов на основе статистической обработки радиотехнических траекторных измерений. Хотя основная роль отводится математическому исследованию рассматриваемых вопросов, это не делает принятый подход чисто теоретическим. Каждая из задач в достаточной степени обосновывается потребностями практики использования траекторных измерений.

В конце книги приводится список литературы, использованной при ее написании, а также реко-

мендуемой для более подробного ознакомления с исследуемыми вопросами.

При написании книги были выявлены следующие трудности: недостаточно разработаны методы оценивания вероятностных характеристик ошибок измерений параметров движения ЛА, методы выявления и исключения аномальных результатов измерений, отсутствие общепринятой классификации и терминологии при рассмотрении методов определения движения ЛА по результатам траекторных измерений и др. При обобщении материала автор излагал ряд вопросов, используя свой опыт преподавания и участия в разработке методов решения некоторых рассматриваемых в книге задач. Поэтому не все определения и термины можно считать одинаково устоявшимися, некоторые из них, безусловно, требуют обсуждения. Все замечания и пожелания читателей будут приняты автором с благодарностью.

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность чл.-кор. АН СССР А. Ф. Богомолу, который ознакомился с рукописью книги и высказал ряд полезных замечаний и советов. Автор выражает искреннюю благодарность докт. техн. наук, проф. Д. А. Погорелову, кандидатам техн. наук В. П. Коваленко, Г. В. Обрезкову, А. П. Фурсову, А. А. Яковлеву, В. Д. Ястребову, ценные замечания и рекомендации которых оказали существенную помощь при доработке рукописи книги.

1.1. Постановка задачи определения движения летательных аппаратов по результатам траекторных измерений

Целью выполнения радиотехнических траекторных измерений является определение действительного движения летательных аппаратов для обеспечения их летных испытаний и летной эксплуатации*). Поэтому проектирование и эксплуатация измерительных средств, разработка структуры и принципов работы измерительного комплекса должны проводиться с точки зрения оптимизации решения этой задачи.

В постановке задачи определения движения ЛА по результатам траекторных измерений участвуют следующие основные элементы:

- математическая модель движения ЛА;
- уравнения измерений, определяющие связь между измеряемыми функциями и параметрами движения ЛА;
- условия опыта, описывающие функциональный вид и статистические свойства ошибок измерений;
- критерий оптимальности оценивания искоемых параметров.

Поясним введенные понятия.

Модель движения. Понятие математической модели в настоящее время широко используется в кибернетике. Детальный анализ способов построения и использования математических моделей проведен В. В. Налимовым [1]. В этой работе, в частности, отмечено, что понятию математической модели можно противопоставить понятие закона в науке. Такое противопоставление потребовалось, когда пришлось снизить требования, предъявляемые к математическому описанию наблюдаемых явлений. Закон в науке имеет характер некоторой абсолютной категории на данном уровне знаний. Он может быть либо абсолютно верен, либо безусловно

*) Летательными аппаратами будем называть баллистические ракеты, головные части баллистических ракет и искусственные спутники Земли (ИСЗ).

неверен, и тогда просто отвергается. Иные требования предъявляются к математической модели, применяемой для описания поведения плохо организованных систем, которые также иногда называют большими системами, поскольку приходится учитывать действие очень многих разнородных факторов, задающих различные по своей природе, но тесно взаимодействующие друг с другом процессы. При этом уже не идет речь об абсолютной категории. Математическая модель может давать лишь какое-то представление о поведении плохо организованной системы. Одни и те же аспекты изучаемой системы можно описывать различными моделями, одновременно имеющими право на существование.

Математическая модель строится на основе всестороннего анализа поведения системы и широкого использования результатов проведенных ранее статистических исследований. Она должна быть достаточно полной, чтобы адекватно описывать систему, но также и достаточно простой, чтобы получающиеся алгоритмы можно было реализовать на вычислительных машинах.

Движение ЛА является чрезвычайно сложным, поскольку оно происходит под действием системы сил, зависящих от параметров движения, свойств среды, в которой совершается полет, конструкции ЛА, его системы управления и других факторов. Сложность процесса движения ЛА затрудняет его изучение в полном объеме. Поэтому при теоретическом исследовании действительный процесс движения заменяется некоторой упрощенной моделью. Модель движения ЛА описывается определенной системой уравнений, выражающих основные закономерности процесса движения.

Модели движения, используемые при определении движения летательных аппаратов по результатам радиотехнических траекторных измерений, могут быть подразделены на *динамические* и *кинематические*. Данная классификация моделей движения проведена по принципу использования или не использования сведений об инертности (массе) летательного аппарата и силах, действующих на ЛА в полете. Именно это обстоятельство, как будет показано ниже, является решающим при выборе метода определения движения ЛА по результатам траекторных измерений.

Движение центра масс ЛА считаем известным, если для заданного интервала времени T удастся найти за-

висимость фазовых координат (параметров движения) $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3\}$; ($\dot{x}_l = dx_l/dt$ $l=1, 2, 3$) центра масс ЛА в некоторой выбранной системе координат от времени t .

Искомые параметры движения $\mathbf{X}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, \dot{x}_3(t)\}$ могут быть получены интегрированием соответствующей системы дифференциальных уравнений движения ЛА:

$$d\mathbf{X}/dt = f(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}, t), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ — вектор некоторых постоянных параметров, характеризующих ЛА, его систему управления и внешнюю среду, в которой совершается полет. Для решения системы уравнений (1.1) необходимо иметь значения постоянных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ и начальных условий движения $x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{x}_{30}$, соответствующих некоторому моменту времени $t_0 \in T$. Тогда можно считать, что для любого текущего момента времени $t \in T$ параметры движения $x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ являются функциями начальных условий движения x_{j0}, \dot{x}_{j0} ($j=1, 2, 3$) и постоянных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Система дифференциальных уравнений вида (1.1) представляет собой *динамическую модель движения* летательного аппарата.

Разработка динамической модели движения ЛА состоит из следующих основных этапов:

- схематизация ЛА и сил, действующих на него в полете;
- выбор системы отсчета, связанной с материальным объектом, относительно которого рассматривается движение ЛА;
- запись исходных векторных соотношений, выражающих основные законы движения;
- выбор системы координат;
- проектирование исходных векторных соотношений на оси выбранной системы координат и запись скалярных уравнений движения.

При решении конкретных задач исследования движения выбирают схемы ЛА и действующих на него сил такими, чтобы математическая модель движения обеспечивала заданную точность описания действительного движения ЛА. Система допущений устанавливается на основе предшествующего опыта исследования полета и

при необходимости может уточняться в процессе решения данной задачи. Исходным положением при построении модели является учет в ней основных факторов, определяющих движение ЛА, и исключение второстепенных.

В подавляющем большинстве практических задач по определению движения ЛА на основе математической обработки траекторных измерений оказывается возможным принять, что летательный аппарат представляет собой твердое тело постоянной или переменной массы и движется так, что во все время полета ось симметрии ЛА совпадает с вектором скорости его центра масс. В этом случае движение аппарата можно рассматривать в «схеме материальной точки», т. е. изучать движение только центра масс ЛА. Данная схема используется в настоящей работе.

ЛА рассматриваемого класса (баллистические ракеты, головные части баллистических ракет, искусственные спутники Земли) совершают околоземный полет. Поэтому движение таких ЛА целесообразно определять в системе отсчета, связанной с Землей. Выбор исходных векторных соотношений — основных законов движения и систем координат, на оси которых проектируются эти векторные соотношения, производят, исходя из цели исследования движения и обеспечения простоты выполнения расчета движения ЛА.

Динамическую модель движения ЛА на интервале времени T будем называть *детерминированной*, если все действующие на ЛА силы описываются известными детерминированными зависимостями. При этом значения всех или части параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, входящих в формулы для расчета ускорений, создаваемых действующими на ЛА силами, могут быть неизвестны или заданы недостаточно точно.

Детерминированные динамические модели движения наиболее часто применяют при определении движения ИСЗ, головных частей баллистических ракет и других летательных аппаратов на участке неуправляемого (баллистического) полета. Влияние атмосферы на движение ЛА рассматривается при этом как детерминированное явление. Массовая плотность воздуха, входящая в выражение для аэродинамической силы лобового сопротивления, представляется, например, в виде экспоненциальной зависимости как функция высоты ЛА над

поверхностью Земли с известными или неизвестными коэффициентами.

Понятно, что при этих допущениях использование детерминированной модели не всегда позволяет определить движение ЛА с требуемой точностью. Так, например, случайные флюктуации плотности воздуха могут вызвать существенные изменения траектории полета ЛА, особенно на длительных интервалах. В этих случаях для определения движения ЛА по результатам радиотехнических измерений, выполненных на достаточно больших интервалах времени наблюдения за полетом ЛА, можно использовать динамическую модель движения, содержащую случайные величины или случайные функции и называемую *стохастической* моделью движения.

Таким образом, если априори до статистической обработки измерений принято, что движение ЛА совершается под действием системы сил, хотя бы одна из которых описывается зависимостью, содержащей случайные величины или случайные функции, то для определения движения ЛА по результатам радиотехнических траекторных измерений должна использоваться стохастическая модель движения ЛА.

Стохастическая динамическая модель движения ЛА может быть представлена также уравнениями типа (1.1), но в этом случае те из параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, которые характеризуют действующие на ЛА силы, описываемые в стохастической модели случайными функциями, должны быть заменены постоянными параметрами $\Lambda_s, s=1, 2, \dots, m$, определяющими эти функции.

Интегрирование системы дифференциальных уравнений типа (1.1) не вызывает принципиальных затруднений. Поэтому можно считать, что при использовании детерминированной или стохастической динамической модели движение ЛА определено, если на основе статистической обработки радиотехнических траекторных измерений найдены значения начальных условий движения $x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{x}_{30}$ и неизвестных параметров из λ_i или Λ_s ($i=1, 2, \dots, k; s=1, 2, \dots, m$).

Но в практике обработки радиотехнических траекторных измерений встречаются случаи, когда до выполнения измерений нет априорных сведений о некоторых силах, действующих на ЛА в полете. Так, например, при контроле управляемого движения ЛА (активный

участок траектории баллистической ракеты или ракеты-носителя космического аппарата, движение на участке маневра космического аппарата и т. п.) не всегда имеются априорные сведения о законе изменения управляющих сил. При этом инерциальными датчиками, установленными на ЛА, могут быть измерены величины, пропорциональные поверхностным силам, к которым относятся тяга двигательной установки и аэродинамические силы. Полученные измерения можно использовать в динамической модели движения. Случайный характер ошибок измерений приводит к тому, что динамическая модель движения становится стохастической.

Если же измеряются координатные или координатные и скоростные параметры движения (фазовые координаты) ЛА, а априорные сведения о некоторых основных действующих на летательный аппарат силах отсутствуют или по каким-либо причинам не используются, то для определения движения может быть применена кинематическая модель движения. Напомним, что кинематика — это раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения материальных тел в пространстве без учета их инертности (массы) и действующих на них сил. Поэтому зависимость вектора фазовых координат ЛА от времени $\mathbf{X}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, \dot{x}_3(t)\}$, записываемую без использования сведений о массе ЛА и действующих на него силах, условимся называть *кинематической* моделью движения ЛА.

Наиболее часто эта зависимость представляется в виде многочленов

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{n_i} a_{ki} t^k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

или

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{n_i} C_{ki} \varphi_k(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

где $\varphi_k(t)$ — некоторая система линейно-независимых функций.

При использовании кинематической модели вида (1.2) или (1.3) для определения движения ЛА по результатам радиотехнических траекторных измерений необходимо установить степени полиномов n_i и найти значения коэффициентов a_{ki} или C_{ki} этих полиномов, аппроксимирующих измеренные фазовые координаты. Для

установления степени сглаживающего полинома обычно применяют теорию проверки статистических гипотез. Значения коэффициентов a_{ki} или C_{ki} находят статистической обработкой измерений.

Таким образом, для определения движения ЛА на основе использования рассмотренных динамической или кинематической моделей движения необходимо соответственно найти значения начальных условий движения $x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{x}_{30}$, неизвестных параметров $\lambda_i (\Lambda_s)$ или значения коэффициентов $a_{ki} (C_{ki})$. Условимся называть перечисленные величины *параметрами модели* и обозначать q_j .

В зависимости от используемых моделей движения производится классификация методов определения движения ЛА по результатам траекторных измерений. Динамическая модель движения используется, как правило, при определении неуправляемого движения ЛА, совершаемого под действием системы сил, описываемой известными математическими зависимостями. Кинематическая модель движения наиболее часто используется при определении управляемого движения ЛА.

Уравнения измерений. Функциональное соответствие между измеряемыми параметрами и текущими параметрами движения ЛА определяется уравнениями измерений:

$$\mathbf{Z} = \Phi(\mathbf{X}, t), \quad (1.4)$$

где \mathbf{Z} — m -мерный вектор измеряемых параметров.

Измеряемые параметры физически представляют собой радиальные дальности D , углы места γ , азимутальные углы A , направляющие косинусы $\cos \theta_x, \cos \theta_z$, скорости изменения радиальной дальности \dot{D} и т. д.

Уравнения (1.4) по своему характеру являются геометрическими и кинематическими соотношениями. Примем, что они записываются без каких-либо погрешностей по отношению к действительным соотношениям.

Условия опыта. Под условиями опыта в математической статистике принято понимать способ комбинации (связи) ошибок измерений с измеряемыми параметрами и статистические свойства ошибок измерений. В общем случае вектор измеренных параметров \mathbf{H} функционально связан с вектором измеряемых параметров \mathbf{Z} и вектором ошибок измерений $\Delta \mathbf{H} : \mathbf{H} = \xi(\mathbf{Z}, \Delta \mathbf{H}, t)$.

Будем рассматривать только такой способ комбини-

рования ошибок измерений с измеряемыми параметрами, при котором $\xi(\mathbf{Z}, 0, t) = \mathbf{Z}(t)$.

В частности, этому условию удовлетворяет наиболее распространенный в практике аддитивный способ: $\mathbf{H}(t) = \mathbf{Z}(t) + \Delta\mathbf{H}(t)$.

Исчерпывающей характеристикой статистических свойств случайных ошибок измерений является закон распределения $F(\Delta h_1, \Delta h_2, \dots, \Delta h_N)$. Однако ввиду сложности получения функции распределения случайных ошибок измерений исследователям часто приходится ограничиваться использованием лишь первых двух моментов: вектора математического ожидания $\mathbf{M}[\Delta\mathbf{H}]$ и корреляционной матрицы \mathbf{K}_H ошибок измерений.

Наличие в радиотехнических траекторных измерениях случайных ошибок приводит к необходимости использования для решения задачи определения движения ЛА по результатам наблюдения за их полетом методов математической статистики. При практическом решении задачи возможны различные подходы к статистической обработке результатов измерений. Это различие обуславливается априорно известными сведениями об искомых параметрах, о способе комбинирования ошибок измерений с измеряемыми параметрами (ошибки измерений аддитивны или представляют собой некоторые нелинейные функции измерений), о статистических свойствах ошибок измерений. Степень полноты использования перечисленных сведений определяет выбор критерия оптимальности оценивания искомых параметров $\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{H})$: по методу наименьших квадратов, по методу максимального правдоподобия, по методу максимума апостериорной вероятности и т. д.

Итак, для определения движения ЛА по результатам траекторных измерений имеется следующая постановка задачи.

Дано: математическая модель движения ЛА $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \lambda, t)$ или $\mathbf{X} = \theta(\mathbf{c}, t)$; уравнения измерений $\mathbf{Z} = \varphi(\mathbf{X}, t)$; условия опыта $\mathbf{H} = \xi(\mathbf{Z}, \Delta\mathbf{H})$ и функция распределения $F(\Delta h_1, \Delta h_2, \dots, \Delta h_N)$ или математическое ожидание $\mathbf{M}[\Delta\mathbf{H}]$ и корреляционная матрица \mathbf{K}_H ошибок измерений; выборка измерений $\mathbf{H} = \{h_1, h_2, \dots, h_N\}$. Требуется найти оценку $\hat{\mathbf{X}}$, оптимальную в смысле выбранного критерия $\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{H})$.

При определении движения ЛА по результатам траекторных измерений в первую очередь должен быть ис-

следован вопрос о существовании и единственности решения, т. е. о возможности определения параметров выбранной математической модели движения ЛА по имеющимся измерениям.

К решению этого вопроса подойдем с позиций теории наблюдаемости, представив ЛА как динамическую систему и используя математический аппарат теории наблюдаемости динамических систем.

Напомним, что если процесс в изучаемой системе является непрерывным и происходящие в ней изменения определяются производными компонент вектор-функции состояния, зависящими в каждый текущий момент времени только от значений этих компонент, то такую систему принято называть *динамической*. Процесс движения ЛА обладает всеми указанными свойствами и, следовательно, ЛА может быть представлен в виде динамической системы. Тогда движение ЛА может быть охарактеризовано вектором состояния соответствующей динамической системы.

Возможность определения состояния динамической системы по измерениям выходного сигнала системы принято называть наблюдаемостью динамической системы. Применительно к определению параметров движения ЛА (вектор-функции состояния динамической системы) по результатам радиотехнических траекторных измерений (измерениям некоторых функций выходного сигнала динамической системы) свойство наблюдаемости характеризует взаимно-однозначное соответствие между множеством векторов состояний соответствующей динамической системы и множеством выборок измерений. Вполне очевидно, что задача проверки наблюдаемости системы должна решаться одной из первых при практическом определении движения ЛА по экспериментальным данным.

Оптимизация выбранного критерия качества оценивания искомых параметров может производиться двумя способами: статистической обработкой измерений полной выборки, т. е. после того, как все результаты измерений поступят в запоминающее устройство вычислительной машины, или обработкой выборки измерений нарастающего объема, позволяющей находить оценки искомых параметров по мере поступления измерений. Использование первого или второго способа определяет вычислительную процедуру решения задачи.

Таким образом, решение задачи определения движения ЛА по результатам траекторных измерений складывается из следующих основных этапов:

- выбор модели движения ЛА;
- проверка принципиальной возможности определения движения ЛА по данной выборке измерений;
- принятие гипотезы об условиях опыта;
- выбор статистического метода обработки измерений (критерия оптимальности оценивания искомых параметров);
- выбор способа оптимизации критерия качества оценивания искомых параметров;
- оценивание искомых параметров и точности их определения;
- проверка адекватности принятой модели движения ЛА действительному движению и использованной гипотезы об условиях опыта действительным условиям.

При практической реализации перечисленных этапов решения рассматриваемой задачи возникают две основные проблемы: 1) выбор математической модели движения ЛА и 2) задание априорных данных об искомых параметрах модели и о вероятностных характеристиках ошибок измерений.

Подвергнутые статистической обработке и теоретическому обобщению результаты работ по определению движения ЛА по экспериментальным данным дают возможность выявить общие наиболее существенные свойства исследуемого процесса движения ЛА, количественно оценить влияние факторов, определяющих это движение, установить, какие из них нужно учитывать при определении движения ЛА, и тем самым правильно разрабатывать модели движения ЛА.

Следует отметить, что определение действительного движения ЛА по результатам радиотехнических траекторных измерений требует предварительного теоретического изучения ряда вопросов. Так, проведя теоретические исследования, необходимо разработать оптимальную программу измерений, т. е. определить виды привлекаемых измерительных средств, требуемое количество и шаг дискретности измерений, установить места расположения измерительных средств, на основе изучения влияния ошибок геодезической привязки измерительных средств на точность определения движения ЛА задать требования к точности геодезической привязки из-

мерительных средств и т. д. Особого внимания требует проблема определения вероятностных характеристик ошибок измерений. Составление научно обоснованной программы измерений, позволяющей эффективно использовать все получаемые измерения, является одной из основных задач теории планирования радиотехнических траекторных измерений. Эта задача может быть решена только на основе совместного использования аппарата технической кибернетики, теории проектирования и эксплуатации радиотехнических траекторных измерительных средств, баллистики ЛА, математической статистики, вычислительной математики и теории планирования эксперимента.

В настоящее время еще нет возможности рассмотреть в полном объеме все проблемы, которые необходимо решить для оптимизации процесса определения движения ЛА по результатам радиотехнических траекторных измерений. В данной книге делается лишь попытка поставить некоторые из основных задач теории оптимального планирования и использования радиотехнических траекторных измерений и рассмотреть методы их решения. Проведенная выше классификация этапов и методов решения задачи определения движения летательных аппаратов по результатам измерений определила содержание и методическое построение книги.

1.2. Оценки и их свойства

Пусть даны результаты N независимых измерений h_1, h_2, \dots, h_N некоторой величины a . Примем, что результаты измерений представляют собой случайные величины, причем математическое ожидание $M[h_i] = a$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Оценить истинное значение a измеряемой величины по выборке измерений h_1, h_2, \dots, h_N это значит:

а) указать такую функцию результатов измерений $\psi(h_1, h_2, \dots, h_N)$, которая дает достаточно хорошее приближение к значению a (такая функция называется точечной оценкой или просто оценкой значения a);

б) указать границы интервала $(\psi - \varepsilon_1; \psi + \varepsilon_2)$, который с заданной вероятностью P покрывает истинное значение a . Такая оценка называется доверительной оценкой, вероятность P — доверительной вероятностью

оценки, интервал $(\psi - \varepsilon_1; \psi + \varepsilon_2)$ — доверительным интервалом.

Оценка $\hat{a} = \psi(h_1, h_2, \dots, h_N)$ представляет собой случайную величину, зависящую от конкретной выборки результатов измерений и от вида функции ψ (от метода статистической обработки результатов измерений). Для сравнения оценок, получаемых различными методами статистической обработки результатов измерений, обычно используют следующие основные характеристики оценок.

Несмещенность. Если \hat{a} — оценка величины a , полученная статистической обработкой выборки измерений объема N , и если $M[\hat{a}] = a$, т. е. математическое ожидание оценки равно истинному значению величины a , то такая оценка называется несмещенной.

Несмещенные оценки для некоторых параметров оказываются иногда довольно сложными функциями результатов измерений. В таких случаях с целью упрощения вычислений используют оценки, у которых абсолютная величина смещения при увеличении объема выборки измерений N быстро уменьшается, а при $N \rightarrow \infty$ стремится к нулю, т. е. асимптотически-несмещенные оценки.

Эффективность. Оценка \hat{a} называется эффективной, если ее дисперсия минимальна на множестве всех возможных методов статистической обработки данной выборки измерений, т. е. если $D[\hat{a}] = \min$.

Оценка \hat{a} называется асимптотически эффективной, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D[\hat{a}] = \min.$$

Состоятельность. Оценка \hat{a} называется состоятельной, если при неограниченном увеличении объема выборки измерений N она стремится по вероятности к значению a , т. е. при сколь угодно малом значении $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(|\hat{a} - a| < \varepsilon) = 1.$$

Пример. Рассмотрим следующую задачу оценивания. Искусственный спутник Земли совершает полет по круговой орбите. При движении над океаном с помощью высотомера выполнены измерения высоты полета h

в N точках. Примем, что h — истинная высота полета, измеренные значения высоты $h_i = h + \delta h_i$, $i=1, 2, \dots, N$, где математическое ожидание ошибок измерений $M[\delta h] = 0$, а дисперсия $D[\delta h] = \sigma^2$.

Требуется найти оценку \hat{h} высоты полета спутника.

В качестве оценки \hat{h} измеряемой величины h возьмем среднее арифметическое значение результатов измерений

$$\hat{h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i.$$

Установим свойства полученной оценки.

Математическое ожидание оценки

$$M[\hat{h}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M[h_i] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h = h.$$

Следовательно, оценка \hat{h} — несмещенная. Дисперсия оценки \hat{h}

$$D[\hat{h}] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N D[h_i] = \frac{\sigma^2}{N}; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} D[\hat{h}] = 0,$$

т. е. оценка \hat{h} — асимптотически-эффективная.

Для проверки оценки \hat{h} на условие состоятельности воспользуемся неравенством Чебышева. Это неравенство утверждает, что, каково бы ни было положительное число ε , вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания m_x не меньше чем на ε , ограничена сверху величиной D_x/ε^2 :

$$P(|X - m_x| \geq \varepsilon) \leq D_x/\varepsilon^2,$$

где D_x — дисперсия случайной величины X .

В рассматриваемом примере случайная величина \hat{h} характеризуется математическим ожиданием $M[\hat{h}] = h$, дисперсией $D[\hat{h}] = \sigma^2/N$ и неравенство Чебышева имеет вид

$$P(|\hat{h} - h| \geq \varepsilon) \leq \sigma^2/\varepsilon^2 N,$$

откуда следует, что оценка \hat{h} является состоятельной.

Статистические свойства оценок $\hat{\mathbf{a}}$ векторных величин \mathbf{a} определяются аналогично тому, как это сделано для скалярных величин.

Несмещенность: $M[\hat{\mathbf{a}}] = \mathbf{a}$. Точность оценивания векторной величины характеризуется всеми элементами корреляционной матрицы оценки. Это приводит к необходимости сравнения оценок с помощью некоторых обобщенных показателей. Чаще всего в качестве таких показателей используются след (сумма диагональных элементов) или определитель корреляционной матрицы оценки.

Оценки $\hat{\mathbf{a}} = \|\hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_n\|^T$ (индекс «т» обозначает транспонирование) называются совместно эффективными, если обобщенная дисперсия (определитель корреляционной матрицы оценок $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{a}}}$) минимальна.

В случае, когда компоненты оцениваемого вектора \mathbf{a} имеют различный физический смысл и разные размерности, целесообразно в качестве обобщенного показателя точности оценивания этих параметров использовать скалярную величину $D = \mathbf{J}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{a}}}^{-1} \mathbf{J}$, где \mathbf{J} — некоторый наперед заданный вектор, размер которого равен размеру вектора \mathbf{a} . Использование данного критерия позволяет учитывать влияние на точность решения задачи, характеризуемую дисперсией D , каждого из оцениваемых параметров a_j ($j=1, 2, \dots, n$) с соответствующим «весом».

Так, например, по результатам траекторных измерений оцениваются начальные условия движения центра масс летательного аппарата $x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}$ для некоторого начального момента времени t_0 .

Оценки начальных условий движения $\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0, \hat{v}_{x0}, \hat{v}_{y0}, \hat{v}_{z0}$ используются для прогнозирования движения ЛА. Точность прогнозирования движения можно характеризовать дисперсией рассеивания точек положения центра масс ЛА на траектории в некоторый момент времени t , определяемой выражением $D = \mathbf{J}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{a}}}$ где

$$\mathbf{J}^T = \left\| \left\| \frac{\partial L}{\partial x_0} \quad \frac{\partial L}{\partial y_0} \quad \frac{\partial L}{\partial z_0} \quad \frac{\partial L}{\partial v_{x0}} \quad \frac{\partial L}{\partial v_{y0}} \quad \frac{\partial L}{\partial v_{z0}} \right\| \right\|$$

— матрица частных производных от положения центра масс

ЛА на траектории в момент времени t по начальным условиям движения; $K_{\hat{Q}}$ — корреляционная матрица оценок начальных условий движения центра масс ЛА.

Состоятельность. Оценка $\hat{\mathbf{a}}$ вектора \mathbf{a} называется состоятельной, если выполняется условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\{\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\} < \varepsilon) = 1,$$

где $\{\cdot\}$ — норма вектора.

Напомним, что нормой вектора \mathbf{a} называют действительное число $\{\mathbf{a}\}$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $\{\mathbf{a}\} > 0$, если $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\{\mathbf{0}\} = 0$;
- 2) $\{c\mathbf{a}\} = |c| \{\mathbf{a}\}$ при любом численном множителе c ;
- 3) $\{\mathbf{a} + \mathbf{b}\} \leq \{\mathbf{a}\} + \{\mathbf{b}\}$.

Наиболее часто применяют следующие нормы векторов.

1. Первая (кубическая) норма:

$$\{\mathbf{a}\}_1 = \max_i |a_i|.$$

Эта норма называется кубической из-за того, что множество точек действительного пространства, удовлетворяющих условию $\{\mathbf{a}\}_1 \leq 1$, образует единичный куб $-1 \leq a_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

2. Вторая (октаэдрическая) норма:

$$\{\mathbf{a}\}_2 = \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Название нормы объясняется тем, что множество векторов, для которых $\{\mathbf{a}\}_2 \leq 1$, образует n -мерный аналог октаэдра.

3. Третья (сферическая, или евклидова) норма:

$$\{\mathbf{a}\}_3 = \left[\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right]^{1/2} = |\mathbf{a}|.$$

Множество векторов \mathbf{a} , для которых $\{\mathbf{a}\}_3 \leq 1$, образует в пространстве шар единичного радиуса.

Несложно проверить, что во всех трех приведенных примерах аксиомы нормы выполняются.

Очевидно, что при выборе оценки следует отдавать предпочтение тому методу статистической обработки

экспериментальных данных, который при прочих равных условиях обеспечивает получение несмещенных, эффективных и состоятельных оценок.

В практике обработки измерений часто приходится составлять линейные комбинации из компонент Y_1, Y_2, \dots, Y_m случайного вектора \mathbf{Y} :

$$U_i = d_{i1}Y_1 + d_{i2}Y_2 + \dots + d_{im}Y_m, \quad i=1, 2, \dots, k, \quad (1.5)$$

где d_{ir} — постоянные величины.

Вводя вектор

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{k1} = \|U_1 U_2 \dots U_k\|^T$$

и матрицу $D = D_{km}$, зависимость (1.5) можем записать в виде

$$\mathbf{U} = D\mathbf{Y}, \quad (1.6)$$

где \mathbf{U} — линейная векторная функция случайного вектора \mathbf{Y} .

Теорема 1.1. Вектор $\mathbf{U} = D\mathbf{Y}$ есть k -мерный случайный вектор с математическим ожиданием

$$M[\mathbf{U}] = M_{\mathbf{U}} = D\mathbf{A} \quad (1.7)$$

и корреляционной матрицей

$$\mathbf{K}_{\mathbf{U}} = D\mathbf{K}_{\mathbf{Y}}D^T, \quad (1.8)$$

где \mathbf{A} — вектор-столбец математических ожиданий компонент случайного вектора \mathbf{Y} ; $\mathbf{K}_{\mathbf{Y}}$ — корреляционная матрица случайного вектора \mathbf{Y} .

Доказательство:

$$M[\mathbf{U}] = M[D\mathbf{Y}] = DM[\mathbf{Y}] = D\mathbf{A},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathbf{U}} &= M[(\mathbf{U} - D\mathbf{A})(\mathbf{U} - D\mathbf{A})^T] = M[D(\mathbf{Y} - \mathbf{A})(\mathbf{Y} - \mathbf{A})^T D^T] = \\ &= DM[(\mathbf{Y} - \mathbf{A})(\mathbf{Y} - \mathbf{A})^T] D^T = D\mathbf{K}_{\mathbf{Y}}D^T. \end{aligned}$$

Результаты теоремы 1.1 можно приближенно распространить и на случай нелинейных функций

$$U_i = f_i(Y_1, Y_2, \dots, Y_m), \quad i=1, 2, \dots, k, \quad (1.9)$$

если в окрестности вектора $\mathbf{Y} = \mathbf{A}$ уравнения (1.9) допускают линеаризацию.

Разложение функций f_i по формуле Тейлора с точностью до членов первого порядка дает

$$\begin{aligned} U_i &= f_i(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \approx \\ &\approx f_i(a_1, a_2, \dots, a_m) + \sum_{r=1}^m \left\{ (Y_r - a_r) \frac{\partial f_i}{\partial Y_r} \Big|_{\mathbf{A}} \right\}, \end{aligned}$$

Тогда вектор математических ожиданий случайного вектора \mathbf{U}

$$M[\mathbf{U}] = \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2, \dots, a_m) \\ f_2(a_1, a_2, \dots, a_m) \\ \vdots \\ f_k(a_1, a_2, \dots, a_m) \end{pmatrix},$$

а корреляционная матрица $K_U = FK_Y F^T$ содержит в своем составе элементы

$$K_{U_s, U_l} = \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^m \left\{ (Y_r - a_r) (Y_j - a_j) \frac{\partial f_s}{\partial Y_r} \Big|_{\mathbf{A}} \frac{\partial f_l}{\partial Y_j} \Big|_{\mathbf{A}} \right\},$$

$$l, s = 1, 2, \dots, k;$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Y_1} \Big|_{\mathbf{A}} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_2} \Big|_{\mathbf{A}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial Y_m} \Big|_{\mathbf{A}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial Y_1} \Big|_{\mathbf{A}} & \frac{\partial f_k}{\partial Y_2} \Big|_{\mathbf{A}} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial Y_m} \Big|_{\mathbf{A}} \end{pmatrix}.$$

1.3. Оценивание параметров с помощью доверительных интервалов

Использование методов математической статистики позволяет находить по результатам выборки измерений оценки искомых параметров: математического ожидания, дисперсии и других числовых характеристик случайных величин. Рассеивание значений числовых характеристик, получаемых статистической обработкой измерений, относительно их действительных значений характеризуется дисперсией соответствующей несмещенной оценки. Однако знание дисперсии еще не позволяет установить, насколько значения искомой числовой характеристики, определяемые с помощью той или иной ее оценки, могут при данном количестве измерений отличаться от действительного значения этой характеристики, т. е. какой может оказаться ошибка $\delta \hat{x}_j = \hat{x}_j - x_j$.

Поскольку оценки искомых параметров являются случайными величинами, то нельзя точно указать величину ошибки $\delta \hat{x}_j$. Однако если известен закон распре-

деления результатов измерений, то оказывается возможным сделать об этой ошибке суждения вероятностного характера.

Наиболее полно оценки искомых параметров, рассматриваемые как случайные величины, могут быть охарактеризованы с помощью их законов распределения. Зная законы распределения статистических числовых характеристик, можно определить вероятность отклонений их значений, полученных из эксперимента, от истинных значений соответствующих характеристик, т. е. степень достоверности полученных результатов. Данный подход к определению достоверности найденных числовых значений искомых величин лежит в основе оценивания параметров с помощью доверительных интервалов.

Под доверительным интервалом понимают интервал со случайными концами, который с достаточно высокой вероятностью P (доверительной вероятностью) «накрывает» неизвестное истинное значение искомого параметра.

Рассмотрим кратко сущность оценивания с помощью доверительных интервалов на простейшем примере определения скалярной величины x по результатам ее непосредственных измерений x_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Систематические ошибки измерений отсутствуют. Случайные ошибки измерений распределены по нормальному закону, независимы и характеризуются дисперсией σ^2 . Значение дисперсии σ^2 неизвестно.

Примем, что оценки искомого параметра x и дисперсии σ^2 определяются соответственно зависимостями

$$\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i; \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x})^2.$$

В математической статистике доказывается, что $\hat{\sigma}^2$ есть случайная величина, статистически независимая от x и распределенная как величина $\frac{\sigma^2}{N-1} \chi^2_{N-1}$, а дробь

$$t_{N-1} = (\hat{x} - x) \sqrt{N} / \hat{\sigma} \quad (1.10)$$

распределена по закону Стюдента с $N-1$ степенями свободы (степенью свободы называется число измерений минус число оцениваемых параметров) [2]. Распределение Стюдента не зависит от σ^2

и является функцией только аргумента t и числа степеней свободы $N-1$.

Знание законов распределения оценок \hat{x} и $\hat{\sigma}^2$ открывает возможность оценивания величин x и σ^2 с помощью доверительных интервалов.

Для распределения Стьюдента составлены таблицы, имеющие два входа: число степеней свободы $N-1$ и вероятность P [2-4]. Задавшись значениями $N-1$ и P , из этих таблиц можно найти такое число t_P , что

$$P(|t_{N-1}| < t_P) = P(\hat{x} - t_P \hat{\sigma} / \sqrt{N} \leq x \leq \hat{x} + t_P \hat{\sigma} / \sqrt{N}) = P. \quad (1.11)$$

Таким образом, интервал $\{\hat{x} - t_P \hat{\sigma} / \sqrt{N}; \hat{x} + t_P \hat{\sigma} / \sqrt{N}\}$ покрывает неизвестное значение x с вероятностью P .

Оценивание дисперсии σ^2 производится на основе использования χ^2 -распределения. Таблица этого распределения (приложение 1), также имеющая два входа: число степеней свободы $\mu = N-1$ и вероятность P , содержит значения γ_1 и γ_2 , которые удовлетворяют условию

$$P(\gamma_1 \hat{\sigma} \leq \sigma \leq \gamma_2 \hat{\sigma}) = P. \quad (1.12)$$

Отсюда следует, что интервал $\{\gamma_1 \hat{\sigma}; \gamma_2 \hat{\sigma}\}$ покрывает искомое значение σ с вероятностью P .

Из приведенных соотношений видно, что метод оценивания с помощью доверительных интервалов требует мало дополнительных вычислений по сравнению с методом точечной оценки.

МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ
ПАРАМЕТРОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ

2

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ
КВАДРАТОВ2.1. Сущность оценивания параметров методом
наименьших квадратов

Для того чтобы наиболее естественным образом перейти к применению и анализу метода наименьших квадратов рассмотрим пример.

Пусть известно, что некоторые переменные x и y связаны линейной зависимостью вида $y = a + bx$. Коэффициенты a и b неизвестны, и их необходимо определить по экспериментальным данным, измеряя в точках x_1, x_2, \dots, x_N значения величин y_1, y_2, \dots, y_N . Примем, что в результате измерений получены значения $h_i = y_i + \delta h_i, i = 1, 2, \dots, N$, где δh_i — неизвестные ошибки измерений.

Если мы попытаемся определить коэффициенты a и b , полагая $x = x_i$ и $y = h_i$, то придем к N уравнениям

$$b_i = a + bx_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

относительно двух величин a и b , причем из-за ошибок измерений эти уравнения окажутся несовместными. Можно использовать любые два уравнения, но в этом случае ошибки этих двух измерений могут существенно исказить значения коэффициентов. Естественно тогда

постараться найти такие значения \hat{a} и \hat{b} коэффициентов a и b , для которых абсолютные величины «невязок» $\eta_i = h_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)$, были бы в каком-то смысле «малыми в совокупности».

Способ расчета коэффициентов \hat{a} и \hat{b} и их значения зависят от того смысла, который вкладывается в понятие «малость η_i в совокупности». Можно, например, искать \hat{a} и \hat{b} из условия

$$\sum_{i=1}^N |\eta_i| = \min,$$

т. е. выбора таких значений искомых коэффициентов a и b , которые обеспечивали бы минимум суммы модулей невязок (минимум октаэдрической нормы вектора невязок). Однако такой метод решения задачи неудобен и громоздок в вычислительном отношении, так как вводит в расчеты аналитически неудобную (не всюду дифференцируемую) функцию $|h - (a + bx)|$.

Можно находить такие значения неизвестных коэффициентов a и b , которые делают минимальной сумму квадратов невязок (евклидову норму вектора невязок), т. е.

$$F = \sum_{i=1}^N \eta_i^2 = \min. \quad (2.1)$$

Необходимость удовлетворения условия (2.1) лежит в основе оценивания искомых параметров по методу наименьших квадратов. В данной главе будет показано, что для весьма широкого класса задач предписание (2.1) в определенном смысле является наилучшим. Убедимся, что расчет оценок коэффициентов \hat{a} и \hat{b} удобен в вычислительном отношении. Для нахождения оценок \hat{a} и \hat{b} , удовлетворяющих условию (2.1), составим уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{a}} = -2 \sum_{i=1}^N (h_i - \hat{a} - \hat{b}x_i) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{b}} = -2 \sum_{i=1}^N (h_i - \hat{a} - \hat{b}x_i) x_i = 0$$

или

$$\begin{aligned}\hat{a}N + \hat{b} \sum_{i=1}^N x_i &= \sum_{i=1}^N h_i, \\ \hat{a} \sum_{i=1}^N x_i + \hat{b} \sum_{i=1}^N x_i^2 &= \sum_{i=1}^N h_i x_i.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Из (2.2) оценки \hat{a} и \hat{b} определяются однозначно и без существенных вычислительных трудностей.

Рассмотрим применение критерия (2.1) для случая неравноточных измерений. Примем, что измерения некоторого параметра a выполнены с использованием нескольких приборов, точность работы которых характеризуется соответствующими значениями дисперсий случайных ошибок измерений. При статистической обработке полученных результатов измерений целесообразно учитывать «веса» измерений, т. е. сделать так, чтобы в формуле для оценки искомого параметра a измерения, характеризуемые большей дисперсией, оказывали меньшее влияние на результат, чем измерения, характеризуемые малой дисперсией. Этого можно достичь, если в выражении (2.1) учитывать невязки η_i с коэффициентами, обратно пропорциональными дисперсиям соответствующих измерений

$$F = \sum_{i=1}^N \omega_i \eta_i^2, \quad (2.3)$$

где $\omega_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$ — вес i -го измерения; σ_0^2 — некоторый безразмерный коэффициент; σ_i^2 — дисперсия i -го измерения.

Критерий (2.3) по сравнению с критерием (2.1) имеет преимущества в том, что при его использовании учитываются веса измерений и величина F оказывается безразмерной. Это удобно в случае, когда статистической обработке подвергаются результаты измерений разноименных величин.

2.2. Оценивание параметров при некоррелированных ошибках измерений

Пусть необходимо определить параметры x_1, x_2, \dots, x_n , связанные известными функциональными зависимостями с величинами z_1, z_2, \dots, z_N :

$$z_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad N \geq n. \quad (2.4)$$

В математической статистике и ее приложениях наиболее часто рассматриваются линейные функции неизвестных параметров. В этом случае решение получается наиболее простым и наглядным. Поэтому на начальном этапе изучения метода наименьших квадратов примем, что величины z_i линейно зависят от параметров x_j :

$$z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j. \quad (2.5)$$

Пусть коэффициенты a_{ij} известны точно, а величины z_i измерены со случайными ошибками δh_i , так что в результате измерений получены величины

$$h_i = z_i + \delta h_i. \quad (2.6)$$

Ошибки измерений некоррелированы в совокупности. Составим сумму квадратов отклонений измерений от их расчетных значений:

$$F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) = \sum_{i=1}^N \omega_i \left(h_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j \right)^2. \quad (2.7)$$

В выражении (2.7) каждое слагаемое учитывается со своим «весом» ω_i , пропорциональным точности измерения. Найдем значения неизвестных x_j из условия минимума функции $F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$.

Минимум функции (2.7) получим, приравняв нулю частные производные

$$\partial F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) / \partial \hat{x}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

Получаемые при решении уравнений (2.8) значения неизвестных будем называть *оценками метода наименьших квадратов (МНК-оценками)*.

Таким образом, для получения МНК-оценок необходимо совместно решить уравнения

$$\sum_{i=1}^N \omega_i \left(h_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j \right) (-a_{ik}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

или в развернутой форме записи

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 \sum_{i=1}^N \omega_i a_{i1} a_{i1} + \hat{x}_2 \sum_{i=1}^N \omega_i a_{i1} a_{i2} + \dots + \hat{x}_n \sum_{i=1}^N \omega_i a_{i1} a_{in} = \\ = \sum_{i=1}^N \omega_i a_{i1} h_i; \end{aligned}$$

$$\widehat{x}_1 \sum_{i=1}^N w_i a_{i1} a_{i1} + \widehat{x}_2 \sum_{i=1}^N w_i a_{i2} a_{i2} + \dots + \widehat{x}_n \sum_{i=1}^N w_i a_{in} a_{in} =$$

$$= \sum_{i=1}^N w_i a_{i2} h_i;$$

$$\widehat{x}_1 \sum_{i=1}^N w_i a_{in} a_{i1} + \widehat{x}_2 \sum_{i=1}^N w_i a_{in} a_{i2} + \dots + \widehat{x}_n \sum_{i=1}^N w_i a_{in} a_{in} =$$

$$= \sum_{i=1}^N w_i a_{in} h_i. \quad (2.9)$$

Система линейных уравнений (2.9) для нахождения неизвестных $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n$ называется системой нормальных уравнений. Количество неизвестных в этой системе равно числу уравнений.

При решении задачи отыскания оценок искоемых величин \widehat{x}_k ($k=1, 2, \dots, n$) применим матричную форму записи, удобную для представления решений линейных уравнений и изучения их свойств.

Введем векторы и матрицы

$$\widehat{X} = \widehat{X}_{n1} = \begin{vmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \vdots \\ \widehat{x}_n \end{vmatrix}; \quad Z = Z_{N1} = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{vmatrix};$$

$$H = H_{N1} = \begin{vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{vmatrix}; \quad \delta H = \delta H_{N1} = \begin{vmatrix} \delta h_1 \\ \delta h_2 \\ \vdots \\ \delta h_N \end{vmatrix}; \quad (2.10)$$

$$A = A_{Nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nn} \end{vmatrix};$$

$$W = W_{NN} = \begin{vmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_N \end{vmatrix}.$$

С учетом введенных обозначений выражения (2.2), (2.3) и система нормальных уравнений (2.9) принимают соответственно вид

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{X}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{Z} + \delta\mathbf{H}; \quad (2.11)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{H}. \quad (2.12)$$

Если ввести вектор невязок

$$\mathbf{v} = \mathbf{H} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}, \quad (2.13)$$

то функцию $F(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$, определяемую выражением (2.7), можно представить в виде квадратичной формы

$$F(\hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v}. \quad (2.14)$$

Следовательно, минимизация функции (2.7) тождественна минимизации квадратичной формы (2.14).

Введем обозначения

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{H} \quad (2.15)$$

и перепишем систему нормальных уравнений в виде

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{C}. \quad (2.16)$$

Матрица \mathbf{B} представляет собой таблицу коэффициентов при неизвестных $\hat{\mathbf{X}}$ в системе нормальных уравнений (является обобщенной матрицей Грама для системы векторов-строк или векторов-столбцов матрицы \mathbf{A}), а \mathbf{C} есть одностолбцевая матрица свободных членов этих уравнений.

Для отыскания неизвестных $\hat{\mathbf{X}}$ умножим обе части матричного уравнения (2.16) слева на \mathbf{B}^{-1} (матрицу, обратную по отношению к матрице \mathbf{B}). При этом получим

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}, \quad (2.17)$$

так как $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{E}$ — единичная матрица.

Из (2.17) следует, что оценки, получаемые по методу наименьших квадратов, являются линейными функциями результатов измерений, т. е. линейными оценками.

Полезно также отметить свойства системы нормальных уравнений (2.16), следующие из анализа формул (2.9), (2.10) и (2.15).

1. Матрица \mathbf{B} симметрична относительно главной диагонали.

2. Формирование элементов матриц **B** и **C** системы нормальных уравнений (2.16) можно производить последовательно, по мере поступления на ЭВМ результатов измерений. Благодаря этому отпадает необходимость хранения в запоминающем устройстве вычислительной машины коэффициентов a_{ij} и свободных членов $w_i a_{ij} h_i$ ($i=1, 2, \dots, N$; $j=1, 2, \dots, n$) всех уравнений (2.16).

Использование этих свойств нормальных уравнений позволяет рационально организовать статистическую обработку измерений на ЭВМ. Так, на основе свойства симметричности матрицы **B** $b_{jk}=b_{kj}$ ($k, j=1, 2, \dots, n$) заключаем, что нет необходимости рассчитывать и хранить в запоминающем устройстве ЭВМ все $n \times n$ элементов матрицы **B**, а можно ограничиться лишь $n(n+1)/2$ элементами b_{jk} ($j, k=1, 2, \dots, n$; $j \leq k$).

2.3. Оценивание параметров при коррелированных ошибках измерений

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов для случая, когда случайные ошибки измерений подчиняются совместному распределению с нулевым математическим ожиданием $\mathbf{M}[\delta \mathbf{H}] = 0$ и конечными вторыми моментами $\mathbf{K}_H = \|K_{ik}\|$, где $K_{ik} = \mathbf{M}[\delta h_i \delta h_k]$ — корреляционный момент случайных ошибок i -го и k -го измерений.

При этом задача отыскания МНК-оценок состоит в нахождении минимума квадратичной формы

$$F(\hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{V}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{V}, \quad (2.18)$$

где \mathbf{K}_H^{-1} — матрица, обратная по отношению к корреляционной матрице \mathbf{K}_H . Дифференцируя выражение (2.18) по вектору $\hat{\mathbf{X}}$ и учитывая обозначение (2.13), получаем систему нормальных уравнений

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{H}. \quad (2.19)$$

В практике обработки измерений корреляционная матрица ошибок измерений часто известна лишь с точностью до некоторого постоянного множителя:

$$\mathbf{K}_H = \sigma^2 \tilde{\mathbf{K}}_H \quad (2.20)$$

где матрица \tilde{K}_H известна, а величина σ_0^2 неизвестна. Это значит, что известны относительные, а не абсолютные значения элементов корреляционной матрицы. В этом случае $K_H^{-1} = \tilde{K}_H^{-1}/\sigma_0^2$ и система нормальных уравнений (2.19) приобретает вид

$$\frac{1}{\sigma_0^2} A^T \tilde{K}_H^{-1} A \hat{X} = \frac{1}{\sigma_0^2} A^T \tilde{K}_H^{-1} H. \quad (2.21)$$

Величина σ_0^2 , состоящая в обеих частях уравнений, сокращается, и решение в итоге зависит лишь от относительной величины элементов корреляционной матрицы. Матрица

$$W \equiv \tilde{K}_H^{-1} \quad (2.22)$$

называется весовой, а σ_0^2 — дисперсией измерения с единичным весом. Если, например, принять $K_H = \sigma_0^2 E$, где E — единичная матрица размера $N \times N$, то весовая матрица $W = E^{-1} = E$, т. е. веса всех измерений равны единице, а их дисперсии одинаковы и равны σ_0^2 .

Величину σ_0^2 можно включить в число оцениваемых параметров и использовать как критерий согласования априорных сведений о статистических свойствах ошибок измерений с апостериорными данными.

Подставим обозначение (2.22) в (2.21) и перепишем систему нормальных уравнений метода наименьших квадратов в виде

$$A^T W A \hat{X} = A^T W H. \quad (2.23)$$

Сравнивая уравнения (2.23) и (2.12) видим, что они имеют одинаковую форму записи. Зависимость (2.12) является частным случаем выражения (2.23), когда ошибки измерений не коррелированы между собой.

2.4. Свойства оценок метода наименьших квадратов

Решение системы нормальных уравнений (2.23)

$$\hat{X} = B^{-1} C, \quad (2.24)$$

где

$$B = A^T W A; \quad C = A^T W H; \quad W = \tilde{K}_H^{-1}, \quad (2.25)$$

определяет то значение \hat{X} , при котором достигается точка минимума функции $F(\hat{x})$ в n -мерном пространстве. Из (2.18) и (2.13) следует, что функция $F(\hat{X})$ является неотрицательной квадратичной формой относительно \hat{X} . Поэтому минимум функции $F(\hat{X})$ всегда существует, а так как точка минимума обязательно удовлетворяет системе (2.23), то последняя является совместной, т. е. всегда имеет решение. Однако система уравнений (2.23) может иметь несколько решений, а именно в тех случаях, когда матрица B является особенной. Для однозначного определения вектора оценок \hat{X} из (2.24) необходимо, чтобы матрица B была неособенной, т. е. определитель этой матрицы не должен быть равным нулю. Только в этом случае существует обратная матрица B^{-1} и однозначное решение (2.24).

Для того чтобы матрица B была неособенной, необходимо и достаточно, чтобы система векторов-строк или векторов-столбцов матрицы A , участвующая в разложении (2.2), представляла собой линейно-независимую систему. Действительно, если элементы строк a_{ik} и a_{il} при всех $i=1, 2, \dots, N$ связаны между собой линейной зависимостью $a_{ik} = \nu a_{il}$, то соответствующие элементы k -го и l -го столбцов в матрице B пропорциональны друг другу с одним и тем же коэффициентом пропорциональности ν . Но определитель, содержащий пропорциональные столбцы, равен нулю. Следовательно, метод наименьших квадратов в этом случае не позволяет найти оценки искомых параметров.

Если рассматривать значения оценки \hat{X} на множестве всевозможных результатов измерений H_1, H_2, \dots, H_N , то оценка \hat{X} будет являться случайным вектором, зависящим от случайных величин H_1, H_2, \dots, H_N . Поэтому качество оценки можно характеризовать ее вероятностными характеристиками, и в первую очередь математическим ожиданием $M[\hat{X}]$ и дисперсией или ее многомерным обобщением — корреляционной матрицей $K_{\hat{X}}$.

Теорема 2.1. *Оценки \hat{X} для параметров X , полученные статистической обработкой по методу наименьших квадратов результатов измерений, ошибки которых слу-*

чайны и принадлежат распределению с нулевыми математическими ожиданиями и конечными вторыми моментами, т. е. $\delta \mathbf{H} \in (0, \sigma_0^2 \mathbf{W}^{-1})$ *), являются несмещенными

$$M[\hat{\mathbf{X}}] = \mathbf{X} \quad (2.26)$$

и представляют собой случайный n -мерный вектор с корреляционной матрицей

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}} = \sigma_0^2 \mathbf{B}^{-1}. \quad (2.27)$$

Для доказательства равенства (2.26) запишем решение системы нормальных уравнений (2.24) в виде

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{H}.$$

Заметим, что в этом выражении лишь $\hat{\mathbf{X}}$ и \mathbf{H} являются случайными векторами, произведение $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}$ — детерминированная матрица. Ввиду этого

$$\begin{aligned} M[\hat{\mathbf{X}}] &= M[\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{H}] = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} M[\mathbf{H}] = \\ &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{X}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства второй части теоремы обозначим $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}$. Тогда

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{D} \mathbf{H}. \quad (2.28)$$

Учитывая, что для линейной зависимости вида (2.28) согласно теореме 1.1 имеет место равенство

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}} = \mathbf{D} \mathbf{K}_{\mathbf{H}} \mathbf{D}^T,$$

можем записать

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \sigma_0^2 \mathbf{W}^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A} (\mathbf{B}^{-1})^T = \sigma_0^2 \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} = \sigma_0^2 \mathbf{B}^{-1},$$

так как \mathbf{W} и \mathbf{B}^{-1} — симметрические матрицы.

Отметим, что при наличии в измерениях неизвестных систематических ошибок МНК-оценки искомых параметров являются смещенными. Это непосредственно следует из доказательства рассмотренной теоремы, так как в указанном случае $M[\mathbf{H}] \neq \mathbf{Z}$ и, следовательно,

$$M[\hat{\mathbf{X}}] \neq \mathbf{X}.$$

*) Запись $\delta \mathbf{H} \in (0, \sigma_0^2 \mathbf{W}^{-1})$ обозначает, что случайная величина $\delta \mathbf{H}$ принадлежит генеральной совокупности, характеризуемой математическим ожиданием 0 и корреляционной матрицей $\sigma_0^2 \mathbf{W}^{-1}$.

Докажем теперь теорему Гаусса — Маркова о наилучших линейных оценках.

Теорема 2.2. Для любого закона распределения случайных ошибок измерений и при линейной зависимости измерений от искомых параметров оценка для произвольной системы линейных функций параметров, получаемая по методу наименьших квадратов, имеет минимальные дисперсии среди множества линейных несмещенных оценок.

Рассмотрим произвольные линейные оценки $\tilde{Y} = TH$, где T — матрица размера $k \times N$. Потребуем, чтобы оценка \tilde{Y} была несмещенной для некоторой системы линейных функций от X , например $Y = CX$ (C — известная матрица постоянных коэффициентов), т. е.

$$M[\tilde{Y}] = M[TH] = TAX = CX = Y.$$

Таким образом, равенство $TA = C$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы оценка TH была несмещенной для Y .

Для упрощения последующих выкладок примем, что случайные ошибки измерений некоррелированы и имеют нулевые математические ожидания, т. е. $\delta H \equiv (0, \sigma^2_0 W^{-1})$,

где

$$W^{-1} = \begin{vmatrix} \tilde{\sigma}^2_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}^2_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\sigma}^2_N \end{vmatrix}.$$

Введем матрицы

$$\tilde{T}_i = T \Sigma; \quad \tilde{A}^T = A^T \Sigma^{-1}, \quad (2.29)$$

где

$$\Sigma = \sigma_0 \begin{vmatrix} \tilde{\sigma}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\sigma}_N \end{vmatrix}.$$

При этом имеют место очевидные равенства

$$\begin{aligned} \Sigma \Sigma &= \Sigma^T \Sigma = \Sigma \Sigma^T = \sigma^2_0 W^{-1}; \\ \tilde{T} \tilde{A} &= T \Sigma (\Sigma^{-1})^T A = TA = C. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Найдем корреляционную матрицу оценок \tilde{Y} .

На основе зависимостей (2.29), (2.30) и теоремы 1.1, можем записать $K_{\tilde{Y}} = \sigma^2_0 T W^{-1} T^T = \tilde{T} \tilde{T}^T$. Необходимо минимизировать диагональные элементы матрицы $K_{\tilde{Y}}$, являющиеся дисперсиями вектора оценок \tilde{Y} . Имеет место тождество

$$K_{\tilde{Y}} = \tilde{T} \tilde{T}^T = [C (\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^T] [C (\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^T]^T + \\ + (\tilde{T}_0 - C (\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^T) (\tilde{T} - C (\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^T)^T, \quad (2.31)$$

которое легко проверить, произведя умножение в правой части и воспользовавшись равенствами (2.30). При записи выражения (2.31) использовано свойство симметричности матрицы $(\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1} = \sigma^2_0 B^{-1}$.

Каждое из слагаемых правой части (2.31) представляет собой матрицу типа GG^T , диагональные элементы которой являются неотрицательными числами. Однако только второе слагаемое зависит от \tilde{T} . Поэтому диагональные элементы суммы минимальны, когда диагональные элементы второго слагаемого равны нулю. Это имеет место при выполнении соотношения $\tilde{T} = C (\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^T$. Отсюда следует, что

$$T = \tilde{T} \Sigma^{-1} = C (\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^T \Sigma^{-1} = C \sigma^2_0 B^{-1} A^T \Sigma^{-1} \Sigma^{-1} = C B^{-1} A^T W.$$

Но при этом $\tilde{Y} = T H = C B^{-1} A^T W H = C \hat{X} = \hat{Y}$, где $\hat{Y} = C \hat{X}$ — МНК-оценка вектора Y , и

$$K_{\tilde{Y}} = [C (\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^T] [C (\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^T]^T = \sigma^2_0 C B^{-1} C^T,$$

что и позволяет убедиться в справедливости доказываемой теоремы.

Не представляет труда распространить полученные результаты на более общий случай коррелированных измерений, приняв $W = \tilde{K}_H^{-1} = \sigma^2_0 K_H^{-1}$.

Если $C = E$ (E — единичная матрица), т. е. оценивается сам вектор X , то $\tilde{Y} = \hat{X}$ и $K_{\tilde{Y}} = K_{\hat{X}}$.

Отметим, что если оцениваемый параметр \tilde{Y} является векторной величиной, то точность его определения характеризуется всеми элементами корреляционной матрицы оценки. Это приводит к необходимости сравнения

оценок с помощью некоторых обобщенных показателей. Чаще всего в качестве таких показателей используют след или определитель корреляционной матрицы оценки искомого вектора.

Из приведенного доказательства теоремы 2.2 непосредственно следует, что наилучшая линейная оценка является оптимальной и в смысле первого критерия:

$$\text{Sp } K_{\hat{Y}} \leq \text{Sp } K_{\hat{Y}}^* \quad (2.32)$$

Можно показать, что определитель корреляционной матрицы $K_{\hat{Y}}$ МНК-оценки не больше определителя корреляционной матрицы любой другой линейной оценки [13].

Использование отмеченных свойств МНК-оценок позволяет несколько видоизменить процедуру отыскания оценок. Так, например, если вид функции $\hat{y}(t; h_1, h_2, \dots, h_N)$, которая может быть принята в качестве оценки некоторого процесса $y(t)$, по каким-либо соображениям оказывается известным (линейная функция, полином второго порядка и т. п.), то для отыскания несмещенной оценки исследуемого процесса для некоторого момента $t=t'$ с минимальной дисперсией можно использовать следующий прием. Применяя к функции $\hat{y}(t; h_1, h_2, \dots, h_N)$, записанной в общем виде, операцию нахождения математического ожидания, получают условие, которому должны удовлетворять коэффициенты этой функции для выполнения требования несмещенности оценки процесса при $t=t'$. Затем определяют значения этих коэффициентов, минимизирующие дисперсию оценки $\hat{y}(t; h_1, h_2, \dots, h_N)$ при соблюдении указанного условия несмещенности. Именно в такой постановке рассматривается вопрос о построении сглаживающих фильтров, используемых для предварительной статистической обработки результатов измерений, излагаемый в гл. 5.

При использовании данного способа получения оценки не требуется знания закона распределения ошибок измерений. Это позволяет находить несмещенные и эффективные оценки в классе линейных оценок при любых законах распределения ошибок измерений.

*) $\text{Sp } A$ — след матрицы A , т. е. сумма диагональных элементов матрицы A .

Отмеченные свойства МНК-оценок справедливы для любого закона распределения ошибок измерений. Если же принять, что ошибки измерений представляют собой случайные величины, распределенные по нормальному закону $\delta \mathbf{H} \in N(0, \sigma_0^2 \mathbf{W}^{-1})$ *), то совместная плотность вероятности измерений определится выражением

$$f(\mathbf{H}) = (2\pi\sigma_0^2)^{-N/2} |\mathbf{W}^{-1}|^{-1/2} \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_0^2} (\mathbf{H} - \mathbf{A}\mathbf{X})^T \mathbf{W} (\mathbf{H} - \mathbf{A}\mathbf{X}) \right], \quad (2.33)$$

где $|\mathbf{W}^{-1}|$ — определитель матрицы \mathbf{W}^{-1} .

Если находить оценку искомых параметров $\hat{\mathbf{X}}$ из условия минимума функции $(\mathbf{H} - \mathbf{A}\mathbf{X})^T \mathbf{W} (\mathbf{H} - \mathbf{A}\mathbf{X})$, то в данном случае для заданного вектора измерений \mathbf{H} плотность вероятности (2.33), рассматриваемая как функция от \mathbf{X} , при любом значении σ_0^2 примет наибольшее значение при $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}$.

Таким образом, оценки параметров $\hat{\mathbf{X}}$, определяемые из условия минимума квадратичной формы (2.18), являются при принятых допущениях об ошибках измерений теми значениями неизвестных величин \mathbf{X} , при которых наиболее вероятны данные результаты измерений (совместная плотность вероятности достигает максимума при тех значениях неизвестных, которые берутся в качестве оценок по методу наименьших квадратов). При случайных ошибках измерений, характеризуемых нормальным законом распределения с нулевым математическим ожиданием и конечными вторыми моментами, оценки метода наименьших квадратов являются несмещенными, состоятельными и эффективными, т. е. наилучшими среди всех возможных линейных точечных оценок.

Рассмотренные свойства МНК-оценок наряду с простотой алгоритма получения этих оценок свидетельствуют о целесообразности применения метода наименьших квадратов для обработки измерений.

*) Совокупность нормальных законов принято обозначать $N(\mathbf{A}, \mathbf{K}_x)$, из выражения $\mathbf{X} \in N(\mathbf{A}, \mathbf{K}_x)$ следует, что случайная величина \mathbf{X} характеризуется нормальным законом распределения с математическим ожиданием \mathbf{A} и корреляционной матрицей \mathbf{K}_x .

2.5. Оценивание величины σ^2_0

Для определения корреляционной матрицы МНК-оценок $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}}$ необходимо иметь значение дисперсии измерения с единичным весом σ^2_0 , и тогда $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}}$ будет полностью определена. Если же величина σ^2_0 неизвестна, то нужно иметь несмещенную оценку этой величины $\hat{\sigma}^2_0$, и тогда появится возможность определить несмещенные оценки элементов корреляционной матрицы $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}}$. Это приводит к необходимости оценивания величины σ^2_0 наряду с искомыми параметрами \mathbf{X} .

Покажем, что, обрабатывая методом наименьших квадратов измерения, ошибки которых аддитивны и характеризуются совместным распределением с нулевым математическим ожиданием $M[\delta\mathbf{H}] = 0$ и весовой матрицей \mathbf{W} , можно получить несмещенную оценку $\hat{\sigma}^2_0$.

Рассмотрим математическое ожидание взвешенной остаточной суммы квадратов отклонений измерений от их расчетных значений, полученных при использовании МНК-оценки искомого вектора $\hat{\mathbf{X}}$:

$$M[\mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v}] \equiv \sigma^2_0 M[\mathbf{v}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{v}],$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{H} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}$.

Далее $\mathbf{v}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{K}_H^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{v}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{H}$, поскольку условие $\mathbf{v}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{A} = 0$ эквивалентно системе нормальных уравнений (2.19).

Кроме того, используя (2.19), можно показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{H} &= (\mathbf{H}^T - \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}^T) \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{H} = \mathbf{H}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{H} - \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{H} = \\ &= \mathbf{H}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{H} - \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}}. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой легко установить справедливость равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{H} - \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}} &= (\mathbf{H} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}})^T \mathbf{K}_H^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}) - \\ &- (\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X})^T \mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{A} (\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$M[\nabla^T W \nabla] = \sigma_0^2 M[(H - AX)^T K_H^{-1} (H - AX) - (\hat{X} - X) A^T K_H^{-1} A (\hat{X} - X)]. \quad (2.34)$$

Так как $H - AX$ и $\hat{X} - X$ представляют собой случайные векторные величины с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными матрицами K_H и $K_{\hat{X}} = (A^T K_H^{-1} A)^{-1}$ ранга N и n соответственно, то выражение (2.34) можно привести к виду

$$M[\nabla^T W \nabla] = \sigma_0^2 (N - n).$$

Сделать это можно на основе использования следующей теоремы.

Теорема 2.3 Если $Y = \|Y_1 Y_2 \dots Y_m\|^T$ — случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и конечными вторыми моментами (корреляционная матрица K_Y вектора Y имеет ранг m), то математическое ожидание квадратичной формы $Y^T K_Y^{-1} Y$ равно m .

Доказательство. Так как $M[Y^T K_Y^{-1} Y] = M[\text{Sp}(Y^T \times \times K_Y^{-1} Y)]$, то, обозначая $Y^T K_Y^{-1} Y = A$; $Y = B$ и учитывая, что $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$, можем записать

$$M[\text{Sp}(Y^T K_Y^{-1} Y)] = M[\text{Sp}(Y Y^T K_Y^{-1})] = \text{Sp}[M(Y Y^T) K_Y^{-1}] = \\ = \text{Sp}(K_Y K_Y^{-1}) = \text{Sp} E_m = m.$$

Следовательно, $\sigma_0^2 = M[\nabla^T W \nabla] / (N - n)$ и несмещенная оценка $\hat{\sigma}_0^2$ дисперсии σ_0^2 определяется выражением

$$\hat{\sigma}_0^2 = \nabla^T W \nabla / (N - n). \quad (2.35)$$

2.6. Влияние систематических ошибок измерений на точность оценивания параметров.

Оценивание систематических ошибок измерений

Примем, что k -м ($k = 1, 2, \dots, p$) измерительным средством N_k раз измерено по l_k параметров. Общее количество измерений всеми p средствами $N = \sum_{k=1}^p N_k l_k$. Каж-

дый из параметров измеряется с постоянной систематической ошибкой s_r ($r=1, 2, \dots, l; l=\sum_{k=1}^p l_k$). Ошибки s_r между собой статистически независимы. Вектор измерений в данном случае может быть представлен в виде

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \mathbf{S} = \mathbf{Z}' + \delta\mathbf{H} + \mathbf{S}, \quad (2.36)$$

где

$$\mathbf{Z} = \|z_1 z_2 \dots z_N\|^T; \quad \delta\mathbf{H} = \|\delta h_1 \delta h_2 \dots \delta h_N\|^T;$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{N,1} = \|\underbrace{s_1 \dots s_1}_{N_1} \underbrace{s_2 \dots s_2}_{N_2} \dots \underbrace{s_l \dots s_l}_{N_l \text{ раз}}\|^T,$$

$\mathbf{Z} = \mathbf{A}_{Nn} \mathbf{X}_n$ — вектор истинных значений измеряемых параметров; $\delta\mathbf{H}$ — вектор случайных ошибок измерений; \mathbf{S} — вектор постоянных систематических ошибок измерений.

Влияние случайных ошибок измерений на точность оценивания искомых параметров в значительной степени удается снизить, используя статистические методы обработки измерительной информации.

Оценим влияние постоянных систематических ошибок измерений на точность определения искомых параметров, а также выясним возможность выявления и исключения систематической ошибки в процессе математической обработки измерений.

Если принять, что систематические ошибки измерений отсутствуют, а случайные ошибки измерений δh_i ($i=1, 2, \dots, N$) представляют собой случайные величины, характеризуемые нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $\sigma_0^2 \mathbf{W}^{-1}$, то оценки искомых параметров $\hat{\mathbf{X}}$ могут быть найдены в результате обработки измерений h_i ($i=1, 2, \dots, N$) методом наименьших квадратов. Используемые при этом зависимости имеют вид

$$\hat{\mathbf{X}}_n = (\mathbf{A}_{Nn}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nn})^{-1} \mathbf{A}_{Nn}^T \mathbf{W} \mathbf{H}; \quad (2.37)$$

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}},n} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}_{Nn}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nn})^{-1}. \quad (2.38)$$

В рассматриваемом случае вектор измерений описывается выражением (2.36), т. е. кроме случайных оши-

бок измерений содержит еще и постоянные систематические ошибки. При этом оценка вектора искомых параметров, определяемая обработкой измерений по методу наименьших квадратов, рассчитывается по формуле

$$\hat{X}'_n = (A^T_{Nn} W A_{Nn})^{-1} A^T_{Nn} W H'. \quad (2.39)$$

Оценим точность определения по формуле (2.39) искомого вектора X_n при наличии в измерениях постоянных систематических ошибок. Найдем математическое ожидание вектора оценок X'_n :

$$\begin{aligned} M[\hat{X}'_n] &= M[(A^T_{Nn} W A_{Nn})^{-1} A^T_{Nn} W H'] = \\ &= (A^T_{Nn} W A_{Nn})^{-1} A^T_{Nn} W M[A_{Nn} X_n + \delta H + S] = \\ &= X_n + (A^T_{Nn} W A_{Nn})^{-1} A^T_{Nn} W S. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Из выражения (2.40) следует, что в данном случае оценка вектора искомых параметров X'_n оказывается смещенной.

Для упрощения последующих выкладок целесообразно на данном этапе исследований совместить начало отсчета компонент оценок искомого вектора \hat{X}'_n с точкой n -мерного пространства, определяемой компонентами истинного значения вектора X_n . Тогда отличие от нуля выражения

$$M[\hat{X}'_n] - X_n = (A^T_{Nn} W A_{Nn})^{-1} A^T_{Nn} W S \quad (2.41)$$

характеризует величину смещения математического ожидания вектора оценок \hat{X}'_n от истинного его значения.

Учитывая, что при решении данной задачи наибольший интерес представляют характеристики рассеивания оценок относительно их истинных значений, условимся точность полученных по формуле (2.39) оценок характеризовать матрицей вторых начальных моментов $\hat{K}_{X',n}$.

Так как за начало отсчета вектора оценок \hat{X}'_n принято его истинное значение, то матрица вторых началь-

ных моментов характеризует отклонения вектора оценок относительно истинных значений искомого вектора:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\hat{X}',n} &= M[(\hat{X}'_n)(\hat{X}'_n)^T] = M\{[(A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W H'] \times \\ &\times [(A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W H']^T\} = M\{[(A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W (Z + \\ &+ \delta H + S)] [(A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W (Z + \delta H + S)]^T\}. \end{aligned}$$

Так как $Z=0$ при $X_n=0$, то

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\hat{X}',n} &= M\{[(A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W (\delta H + S)] [(A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} \times \\ &\times A_{Nn}^T W (\delta H + S)]^T\} = (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W M(\delta H \delta H^T) \times \\ &\times W A_{Nn} (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} + (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W S M[\delta H^T] \times \\ &\times W A_{Nn} (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} + (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W M[\delta H] \times \\ &\times S^T W A_{Nn} (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} + (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} \times \\ &\times A_{Nn}^T W S S^T W A_{Nn} (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1}. \end{aligned}$$

При записи последнего выражения учтено, что матрицы $(A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1}$ и W являются симметрическими.

Принимая во внимание, что $M[\delta H^T]=0$; $M[\delta H]=0$; $M[\delta H \delta H^T]=\sigma_0^2 W^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\hat{X}',n} &= \sigma_0^2 (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} + \\ &+ (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W S S^T W A_{Nn} (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Введя обозначение

$$\Delta = (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W, \quad (2.43)$$

выражение (2.42) перепишем в виде

$$\tilde{K}_{\hat{X}',n} = \sigma_0^2 (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} + \Delta S S^T \Delta^T. \quad (2.44)$$

Выясним физический смысл слагаемых формулы (2.44).

Для этого запишем зависимость для определения корреляционной матрицы искомого вектора $K_{\hat{X}',n}$:

$$\begin{aligned} K_{\hat{X}',n} &= M\{[\hat{X}'_n - M(\hat{X}'_n)] [\hat{X}'_n - M(\hat{X}'_n)]^T\} = \\ &= M\{[(A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W H' - (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W S] \times \\ &\times [(A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W H' - (A_{Nn}^T W A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T W S]^T\}. \end{aligned}$$

Учитывая равенство (2.36), имеющее в данном случае вид $\mathbf{H}' = \delta\mathbf{H} + \mathbf{S}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}', n} = & M \{ [(A_{Nn}^T \mathbf{W} A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T \mathbf{W} \delta\mathbf{H}] [(A_{Nn}^T \mathbf{W} A_{Nn})^{-1} \times \\ & \times A_{Nn}^T \mathbf{W} \delta\mathbf{H}]^T \} = (A_{Nn}^T \mathbf{W} A_{Nn})^{-1} A_{Nn}^T \mathbf{W} \times \\ & \times M[\delta\mathbf{H} \delta\mathbf{H}^T] \mathbf{W} A_{Nn} (A_{Nn}^T \mathbf{W} A_{Nn})^{-1} \end{aligned}$$

и окончательно

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}', n} = \sigma_0^2 (A_{Nn}^T \mathbf{W} A_{Nn})^{-1}. \quad (2.45)$$

Таким образом, матрица корреляционных моментов оценок вектора $\hat{\mathbf{X}}'_n$, найденных обработкой по методу наименьших квадратов измерений, содержащих случайные и постоянные систематические ошибки, остается такой же, как и при обработке измерений, имеющих только случайные ошибки.

Анализируя зависимости (2.41), (2.44) и (2.45), приходим к выводу, что первое слагаемое формулы (2.44) представляет собой корреляционную матрицу оценок $\hat{\mathbf{X}}'_n$, а второе слагаемое — квадрат смещения математического ожидания вектора оценок $\hat{\mathbf{X}}'_n$ относительно его истинного значения.

Оценим точность определения искомого вектора \mathbf{X}_n при включении постоянных систематических ошибок измерений в число оцениваемых параметров. В этом случае вектор оценок выразится так:

$$\hat{\mathbf{X}}'_{n+l} = (A_{N, n+l}^T \mathbf{W} A_{N, n+l})^{-1} A_{N, n+l}^T \mathbf{W} \mathbf{H}', \quad (2.46)$$

где

$$\hat{\mathbf{X}}'_{n+l} = \begin{pmatrix} \hat{x}'_1 \\ \hat{x}'_2 \\ \vdots \\ x'_n \\ \hline \hat{x}'_{n+1} \\ \vdots \\ \hat{x}'_{n+l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}'_n \\ \hline \hat{\mathbf{X}}'_l \end{pmatrix}$$

$$A_{N, n+l} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \frac{\partial z_1}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial x_{n+l}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial z_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_N}{\partial x_n} & \frac{\partial z_N}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial z_N}{\partial x_{n+l}} \end{vmatrix};$$

\widehat{X}'_n — вектор оценок искомых параметров, полученных совместным оцениванием с систематическими ошибками измерений: \widehat{X}'_l — вектор оценок систематических ошибок измерений.

Нетрудно показать, что при этом оценки \widehat{X}'_{n+l} будут несмещенными:

$$\begin{aligned} M[\widehat{X}'_{n+l}] &= M[(A_{N, n+l}^T W A_{N, n+l})^{-1} A_{N, n+l}^T W H'] = \\ &= (A_{N, n+l}^T W A_{N, n+l})^{-1} A_{N, n+l}^T W M[Z + \delta H + S] = \\ &= (A_{N, n+l}^T W A_{N, n+l})^{-1} A_{N, n+l}^T W \left(\|A_{Nn} \parallel 0 \parallel \left\| \frac{X_n}{0} \right\| + \right. \\ &\quad \left. + \|0 \parallel A_{N, l} \parallel \left\| \frac{0}{X_l} \right\| \right) = (A_{N, n+l}^T W A_{N, n+l})^{-1} \times \\ &\quad \times A_{N, n+l}^T W A_{N, n+l} X_{n+l} = X_{n+l}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где

$$X_{n+l} = \left\| \frac{X_n}{X_l} \right\|$$

— вектор истинных значений искомых параметров и систематических ошибок измерений.

Запишем выражение для корреляционной матрицы оценок \widehat{X}'_{n+l} :

$$\begin{aligned} K_{\widehat{X}'_{n+l}} &= M[(\widehat{X}'_{n+l} - X_{n+l})(\widehat{X}'_{n+l} - X_{n+l})^T] = \\ &= M\{[(A_{N, n+l}^T W A_{N, n+l})^{-1} A_{N, n+l}^T W (Z + \delta H + S) - X_{n+l}] \times \\ &\quad \times [(A_{N, n+l}^T W A_{N, n+l})^{-1} A_{N, n+l}^T W (Z + \delta H + S) - X_{n+l}]^T\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что согласно (2.47)

$$(A_{N, n+l}^T W A_{N, n+l})^{-1} A_{N, n+l}^T W (Z + S) = X_{n+l},$$

имеем

$$\begin{aligned} K_{\hat{X}', n+l} &= M \{ [(A_{N,n+l}^T W A_{N,n+l})^{-1} A_{N,n+l}^T W \delta H] [(A_{N,n+l}^T \times \\ &\times W A_{N,n+l})^{-1} A_{N,n+l}^T W \delta H]^T \} = (A_{N,n+l}^T W A_{N,n+l})^{-1} \times \\ &\times A_{N,n+l}^T W M [\delta H \delta H^T] W A_{N,n+l} (A_{N,n+l}^T W A_{N,n+l})^{-1} = \\ &= \sigma_0^2 (A_{N,n+l}^T W A_{N,n+l})^{-1}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Примем за начало отсчета компонент вектора оценок \hat{X}'_{n+l} в $(n+l)$ -мерном пространстве точку, определяемую компонентами истинного значения вектора X_{n+l} . Тогда из условия несмещенности оценок \hat{X}'_{n+l} следует, что матрица вторых начальных моментов $\tilde{K}_{\hat{X}', n+l}$ оценок \hat{X}'_{n+l} тождественно равна корреляционной матрице $K_{\hat{X}', n+l}$ этих оценок, т. е.

$$\tilde{K}_{\hat{X}', n+l} \equiv K_{\hat{X}', n+l}. \quad (2.49)$$

Проанализируем полученное выражение (2.48). Для этого представим корреляционную матрицу $K_{\hat{X}', n+l}$ в виде

$$\begin{aligned} K_{\hat{X}', n+l} &= \sigma_0^2 \left(\left\| \frac{A_{N,n}^T}{A_{N,l}^T} \left\| W \left\| A_{N,n} \right\| A_{N,l} \right\| \right\| \right)^{-1} = \\ &= \sigma_0^2 \left\| \frac{A_{N,n}^T W A_{N,n}}{A_{N,l}^T W A_{N,n}} \left\| \frac{A_{N,n}^T W A_{N,l}}{A_{N,l}^T W A_{N,l}} \right\| \right\|^{-1}. \end{aligned}$$

Используя правила обращения блочных матриц [8], записываем

$$\begin{aligned} &K_{\hat{X}', n+l} = \\ &= \left\| \begin{array}{c|c} K_{11}^{-1} + K_{11}^{-1} K_{12} (K_{22} - \\ - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12})^{-1} K_{21} K_{11}^{-1} & -K_{11}^{-1} K_{12} (K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12})^{-1} \\ \hline - (K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12})^{-1} K_{21} K_{11}^{-1} & (K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12})^{-1} \end{array} \right\|, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11} &= \sigma_0^2 A_{Nn}^T W A_{Nn}; & K_{12} &= \sigma_0^2 A_{Nn}^T W A_{Nl}; \\ K_{21} &= \sigma_0^2 A_{Nl}^T W A_{Nn}; & K_{22} &= \sigma_0^2 A_{Nl}^T W A_{Nl}. \end{aligned}$$

Рассмотрим блок

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{x}}^T, n} = \mathbf{K}_{11}^{-1} + \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} (\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12})^{-1} \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1}, \quad (2.51)$$

который представляет собой корреляционную матрицу n оценок искомого параметра \mathbf{X}_n , найденных с одновременным выявлением постоянных систематических ошибок измерений.

Учитывая (2.49) и используя обозначения (2.50), развернем выражение (2.51):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{x}}^T, n} = & \sigma^2 \cdot \{ (\mathbf{A}_{Nn}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nn})^{-1} + (\mathbf{A}_{Nn}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nn})^{-1} \mathbf{A}_{Nn}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nl} \times \\ & \times [\mathbf{A}_{Nl}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nl} - \mathbf{A}_{Nl}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nn} (\mathbf{A}_{Nn}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nn})^{-1} \mathbf{A}_{Nn}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nl}]^{-1} \times \\ & \times \mathbf{A}_{Nl}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nn} (\mathbf{A}_{Nn}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nn})^{-1} \}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Обозначим

$$\mathbf{D} = \sigma^2 \cdot [\mathbf{A}_{Nl}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nl} - \mathbf{A}_{Nl}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nn} (\mathbf{A}_{Nn}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nn})^{-1} \mathbf{A}_{Nn}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nl}]^{-1}. \quad (2.53)$$

С учетом обозначений (2.43) и (2.53) зависимость (2.52) примет вид

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{x}}^T, n} = \sigma^2 \cdot (\mathbf{A}_{Nn}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nn})^{-1} + \Delta \mathbf{A}_{Nl} \mathbf{D} \mathbf{A}_{Nl}^T \Delta^T. \quad (2.54)$$

Выражение (2.54) представляет собой матрицу вторых начальных моментов оценок искомого вектора \mathbf{X}_n , равных в данном случае корреляционным моментам этих оценок. Первое слагаемое выражения (2.54) определяет корреляционную матрицу оценок вектора \mathbf{X}_n , находимых без выявления систематических ошибок измерений. Наличие второго слагаемого в выражении (2.54) указывает на изменение точности оценок искомого вектора \mathbf{X}_n за счет включения в число оцениваемых параметров систематических ошибок измерений. Очевидно, что поскольку часть информации, содержащейся в измерениях, затрачивается на определение систематических ошибок измерений, то в этом случае точность определения искомого вектора \mathbf{X}_n снижается.

Выясним, при каких условиях целесообразно включать постоянные систематические ошибки в число оцениваемых параметров. Для этого запишем выражения для матриц вторых начальных моментов оценок искомого вектора \mathbf{X}_n для двух рассмотренных случаев:

1) систематические ошибки измерений не включаются в число оцениваемых параметров

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{x}}', n} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T N_n \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nn})^{-1} + \Delta \mathbf{S} \mathbf{S}^T \Delta^T; \quad (2.55)$$

2) систематические ошибки измерений включаются в число оцениваемых параметров

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\hat{\mathbf{x}}', n} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T_{Nn} \mathbf{W} \mathbf{A}_{Nn})^{-1} + \Delta \mathbf{A}_{NI} \mathbf{D} \mathbf{A}^T_{NI} \Delta^T. \quad (2.56)$$

Выражения (2.55) и (2.56) отличаются друг от друга матрицами

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{nn} = \Delta \mathbf{S} \mathbf{S}^T \Delta^T \quad (2.57)$$

и

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{nn} = \Delta \mathbf{A}_{NI} \mathbf{D} \mathbf{A}^T_{NI} \Delta^T. \quad (2.58)$$

Следовательно, на основе сравнения матриц \mathbf{R} и \mathbf{T} можно построить критерий для проверки целесообразности включения постоянных систематических ошибок измерений в число оцениваемых параметров. Однако при этом необходимо иметь в виду, что при практической обработке измерений величины систематических ошибок s_1, s_2, \dots, s_l неизвестны. Поэтому рассмотрим следующую схему приближенного оценивания влияния систематических ошибок измерений на точность оценивания искомого вектора \mathbf{X}_n . Приняв гипотезу о наличии постоянных систематических ошибок в измерениях всех l параметров средствами, ведущими наблюдение за движением ЛА, найдем оценки этих ошибок $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_l$. При этом рассчитываются элементы матрицы $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}', n+l}$, определяемой зависимостью (2.48). Как следует из (2.50), блок матрицы

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{s}}, l} = (\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12})^{-1} \quad (2.59)$$

представляет собой корреляционную матрицу оценок систематических ошибок измерений. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{s}}, l}$ являются дисперсиями $\sigma_{\hat{s}, r}^2$ соответствующих оценок $\hat{s}_r, r = 1, 2, \dots, l$.

Из найденных оценок \hat{s}_r , составляем вектор-столбец $\hat{\mathbf{S}}$ размером N вида (2.36), где вместо систематических

ошибок s_1, s_2, \dots, s_l записываем их оценки $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_l$. Далее по формулам (2.43), (2.57), (2.53) и (2.58) рассчитываем матрицы \hat{R} и T и проверяем выполнение неравенства

$$\text{Sp} \hat{R} > \text{Sp} T. \quad (2.60)$$

Если неравенство (2.60) не выполняется, то это означает, что влияние систематических ошибок измерений на оценку искомого вектора X_n пренебрежимо мало. Для последующего использования целесообразно принять оценки вектора \hat{X}'_n , найденные по формуле (2.37), т. е. без оценивания систематических ошибок измерений.

Если же неравенство (2.60) выполняется, то это значит, что влияние систематических ошибок измерений на оценку искомого вектора X_n существенно. В данном случае в качестве оценки вектора X_n целесообразно принять вектор \hat{X}'_n , найденный по формуле (2.46), т. е. при совместном оценивании искомого вектора X_n и систематических ошибок измерений.

2.7. Оценивание параметров по выборке измерений нарастающего объема

Для решения ряда практических задач представляет интерес отличная от рассмотренной выше форма записи алгоритма метода наименьших квадратов, которая обеспечивала бы последовательное уточнение оценок искоемых параметров по мере поступления измерений.

Пусть имеются оценка $\hat{X}_{(N)}$ и корреляционная матрица этой оценки $K_{\hat{X}_{(N)}}$, найденные статистической обработкой выборки измерений N_N по формулам (2.24), (2.25), (2.27). Индексы N указывают размер выборки измерений, по которой получена оценка \hat{X} .

Требуется уточнить оценку $\hat{X}_{(N)}$ и корреляционную матрицу $K_{\hat{X}_{(N)}}$ по вновь поступившей выборке измерений N_m , ошибки которой характеризуются нулевым матема-

тическим ожиданием и корреляционной матрицей

$$K_{H,m} = \sigma_0^2 W_m^{-1}.$$

Подставляя суммарную выборку измерений H_{N+m} в систему нормальных уравнений (2.24) и решая эту систему, находим

$$\hat{X}_{(N+m)} = (A_{N+m, m}^T W_{N+m} A_{N+m, n})^{-1} A_{N+m, n}^T W_{N+m} H_{N+m}, \quad (2.61)$$

где

$$A_{N+m, n} = \begin{vmatrix} A_{Nn} \\ A_{mn} \end{vmatrix}; \quad H_{N+m} = \begin{vmatrix} H_N \\ H_m \end{vmatrix};$$

$$\tilde{K}_{H, N+m} = \begin{vmatrix} \tilde{K}_{H, NN} & \tilde{K}_{H, Nm} \\ \tilde{K}_{H, mN} & \tilde{K}_{H, mm} \end{vmatrix}; \quad (2.62)$$

$$W_{N+m} = \tilde{K}_{H, N+m}^{-1}; \quad \tilde{K}_{H, N+m}^{-1} = \sigma_0^2 K_{H, N+m}^{-1};$$

$\sigma_0^2 \tilde{K}_{H, NN}$ и $\sigma_0^2 \tilde{K}_{H, mm}$ — корреляционные матрицы векторов измерений H_N и H_m , а $\sigma_0^2 \tilde{K}_{H, Nm}$ и $\sigma_0^2 \tilde{K}_{H, mN}$ — взаимные корреляционные матрицы этих векторов. Обозначим

$$\tilde{K}_{H, N+m}^{-1} = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}. \quad (2.63)$$

Матрицы R_{11} , R_{12} , R_{21} , R_{22} связаны с матрицами $\tilde{K}_{H, NN}$, $\tilde{K}_{H, Nm}$, $\tilde{K}_{H, mN}$, $\tilde{K}_{H, mm}$ соотношениями [8]

$$R_{22} = (\tilde{K}_{H, mm} - \tilde{K}_{H, mN} \tilde{K}_{H, NN}^{-1} \tilde{K}_{H, Nm})^{-1};$$

$$R_{21} = -R_{22} \tilde{K}_{H, mN} K_{H, NN}^{-1};$$

$$R_{12} = -\tilde{K}_{H, NN}^{-1} \tilde{K}_{H, Nm} R_{22};$$

$$R_{11} = \tilde{K}_{H, NN}^{-1} - R_{12} \tilde{K}_{H, mN} \tilde{K}_{H, NN}^{-1}. \quad (2.64)$$

Подставив формулы (2.62) — (2.64) в (2.61), получим

$$\hat{X}_{(N+m)} = B_{(N+m)}^{-1} \left[\begin{matrix} A_{Nn}^T \\ A_{mn}^T \end{matrix} \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_N \\ H_m \end{vmatrix} \right] =$$

$$= B_{(N+m)}^{-1} [(A_{Nn}^T R_{11} + A_{mn}^T R_{21}) H_N + (A_{Nn}^T R_{12} + A_{mn}^T R_{22}) H_m], \quad (2.65)$$

где

$$\begin{aligned} B_{(N+m)} &= A^T_{N+m, n} \tilde{K}^{-1}_{H, N+m} A_{N+m, n} = \\ &= \|A^T_{Nn} \quad A^T_{mn}\| \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{Nn} \\ A_{mn} \end{vmatrix} = \\ &= A^T_{Nn} R_{11} A_{Nn} + A^T_{mn} R_{21} A_{Nn} + A^T_{Nn} R_{12} A_{mn} + \\ &\quad + A^T_{mn} R_{22} A_{mn}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Если принять допущение о том, что векторы измерений H_N и H_m между собой некоррелированы, т. е. корреляционная матрица $\tilde{K}_{H, N+m}$ является квазидиагональной:

$$\tilde{K}_{H, N+m} = \begin{vmatrix} \tilde{K}_{H, NN} & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{H, mm} \end{vmatrix}$$

и, следовательно,

$$\tilde{K}^{-1}_{H, N+m} = \begin{vmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{vmatrix},$$

где $R_{11} = \tilde{K}^{-1}_{H, NN}$; $R_{22} = \tilde{K}^{-1}_{H, mm}$, то из (2.66), (2.62) и (2.27) найдем

$$\begin{aligned} \sigma^2_0 B^{-1}_{(N+m)} &= \sigma^2_0 (A^T_{Nn} \tilde{K}^{-1}_{H, NN} A_{Nn} + A^T_{mn} \tilde{K}^{-1}_{H, mm} A_{mn})^{-1} = \\ &= \left(K^{-1}_{\hat{X}(N)} + \frac{1}{\sigma^2_0} A^T_{mn} W_m A_{mn} \right)^{-1} = K_{\hat{X}, (N+m)}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Подставив (2.67) в уравнение (2.65), имеем

$$\begin{aligned} \hat{X}_{(N+m)} &= \frac{1}{\sigma^2_0} \left(K^{-1}_{\hat{X}(N)} + \frac{1}{\sigma^2_0} A^T_{mn} W_m A_{mn} \right)^{-1} \times \\ &\quad \times (A^T_{Nn} W_N H_N + A^T_{mn} W_m H_m). \end{aligned}$$

Так как

$$\hat{X}_{(N)} = \frac{1}{\sigma^2_0} K_{\hat{X}(N)} A^T_{Nm} W_N H_N,$$

то

$$A^T_{Nn} W_N H_N = \sigma^2_0 K^{-1}_{\hat{X}(N)} \hat{X}_{(N)}$$

и, следовательно,

$$\hat{X}_{(N+m)} = K_{\hat{X}_{(N+m)}} \left(K_{\hat{X}_{(N)}}^{-1} \hat{X}_{(N)} + \frac{1}{\sigma_0^2} A_{mn}^T W_m H_m \right). \quad (2.68)$$

При использовании зависимостей (2.67), (2.68) приходится обращать матрицы $K_{\hat{X}}$ и \tilde{K}_{H_m} , имеющие соответственно размеры $n \times n$ и $m \times m$. Если $n > m$, то целесообразно использовать другую форму записи рекуррентных соотношений (2.67), (2.68), которая может быть получена на основе использования леммы об обращении матриц:

$$(B^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} = B - B H^T (H B H^T + R)^{-1} H B, \quad (2.69)$$

где B и R — квадратные неособенные матрицы соответственно размеров $n \times n$ и $m \times m$.

Доказательство леммы:

$$\begin{aligned} (B^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} [B - B H^T (H B H^T + R)^{-1} H B] &= \\ &= E + H^T R^{-1} H B - H^T (H B H^T + R)^{-1} H B - \\ &\quad - H^T R^{-1} H B H^T (H B H^T + R)^{-1} H B = \\ &= E + H^T R^{-1} H B - H^T (H B H^T + R)^{-1} H B - \\ &\quad - H^T R^{-1} [(H B H^T + R) - R] (H B H^T + R)^{-1} H B = \\ &= E + H^T R^{-1} H B - H^T (H B H^T + R)^{-1} H B - \\ &\quad - H^T R H B + H^T R^{-1} R (H B H^T + R)^{-1} H B = E, \end{aligned}$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$.

Использование зависимости (2.69) позволяет заменить обращение матрицы размера $n \times n$ вычислением обратной матрицы меньшего размера $m \times m$. Снижение размера обрабатываемой матрицы позволяет сократить расход машинного времени, ускорить получение результатов, а иногда и несколько повысить их точность.

Применив к (2.67) лемму об обращении матриц (2.69), получим

$$\begin{aligned} K_{\hat{X}_{(N+m)}} &= K_{\hat{X}_{(N)}} - K_{\hat{X}_{(N)}} A_{mn}^T \times \\ &\times (A_{mn} K_{\hat{X}_{(N)}} A_{mn}^T + \sigma_0^2 W_m^{-1})^{-1} A_{mn} K_{\hat{X}_{(N)}}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Подставив (2.70) в (2.68), найдем

$$\begin{aligned} \hat{X}_{(N+m)} &= \hat{X}_{(N)} + K_{\hat{X}_{(N)}} A_{mn}^T (A_{mn} K_{\hat{X}_{(N)}} A_{mn}^T + \\ &\quad + \sigma_0^2 W_m^{-1})^{-1} (H_m - A_{mn} \hat{X}_{(N)}). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Таким образом, уточненная оценка $\hat{X}_{(N+m)}$ определяется прибавлением к предшествующей оценке $\hat{X}_{(N)}$ линейного поправочного члена, вычисляемого по новой информации H_m , A_m , W_m^{-1} , предшествовавшей оценке $\hat{X}_{(N)}$ и корреляционной матрице ее $K_{\hat{X}_{(N)}}$.

Формулы (2.68), (2.67) или (2.71), (2.70) могут рассматриваться как рекуррентные соотношения, позволяющие уточнять оценки искомого вектора X по выборке измерений нарастающего объема, последовательно переходя от N измерений к выборке из $N+m$ измерений ($m=1, 2, \dots$) при условии отсутствия корреляции между ошибками измерений используемых выборок.

В случае, когда $m=1$, вектор измерений H_m становится скалярной величиной h_{N+1} , матрица A_{mn} — равной вектору-строке $a_{N+1,n}^T = \|a_{N+1,1} a_{N+1,2} \dots a_{N+1,n}\|$, а корреляционная матрица $\sigma_0^2 W_m^{-1}$ — равной дисперсии $(N+1)$ -го измерения $\sigma_0^2 \tilde{\sigma}_{N+1}^2$.

Тогда из равенств (2.71) и (2.70) имеем

$$\begin{aligned} \hat{X}_{(N+1)} &= \hat{X}_{(N)} + (a_{N+1,n}^T K_{\hat{X}_{(N)}} a_{N+1,n} + \\ &+ \sigma_0^2 \tilde{\sigma}_{N+1}^2)^{-1} K_{\hat{X}_{(N)}} a_{N+1,n} (h_{N+1} - a_{N+1,n}^T \hat{X}_{(N)}); \\ K_{\hat{X}_{(N+1)}} &= K_{\hat{X}_{(N)}} - (a_{N+1,n}^T K_{\hat{X}_{(N)}} a_{N+1,n} + \\ &+ \sigma_0^2 \tilde{\sigma}_{N+1}^2)^{-1} K_{\hat{X}_{(N)}} a_{N+1,n} a_{N+1,n}^T K_{\hat{X}_{(N)}}. \end{aligned}$$

Задача обращения матрицы сведена в данном случае к делению на скаляр. Это очень полезный эффективный прием, позволяющий существенно сократить время решения задачи на ЭВМ.

При использовании зависимостей (2.68), (2.67) или (2.71), (2.70) на начальном этапе получения оценки вектора искомого параметра X нужно иметь $\hat{X}_{(0)}$ и $K_{\hat{X}_{(0)}}$. Если эти значения не заданы, то берут выборку измерений объема $N \geq n$, находят оценку $\hat{X}_{(N)}$ и корреляционную матрицу этой оценки $K_{\hat{X}_{(N)}}$ по формулам (2.24), (2.25), (2.27) и затем используют соотношения (2.68), (2.67) или (2.71), (2.70) для уточнения искомого оценок на основе статистической обработки вновь поступивших измерений.

Рассмотрим возможности учета корреляции между ошибками измерений при использовании рекуррентных соотношений метода наименьших квадратов для обработки выборки измерений, увеличивающейся каждый раз на одно измерение [9]. Пусть ошибки измерений являются несмещенными случайными величинами, характеризуемыми корреляционной функцией

$$K_h = \sigma^2 e^{-\alpha |h|}. \quad (2.72)$$

Для упрощения математических выкладок примем, что измерения производятся через равные промежутки времени $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ($i = 1, 2, \dots, s-1$; s — количество измерений в выборке, для которой справедлива зависимость (2.72)).

Для корреляционной матрицы, элементы которой определяются выражением (2.72), обратная матрица K_H^{-1} является трехдиагональной. Элементы матрицы K_H^{-1} могут быть вычислены по формулам

$$K_{i,i}^{(-1)} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2(1-r^2)} & \text{при } i=1; i=s; \\ \frac{1+r^2}{\sigma^2(1-r^2)} & \text{при } i=2, 3, \dots, s-1; \end{cases} \quad (2.73)$$

$$K_{i,i+1}^{(-1)} = -\frac{r}{\sigma^2(1-r^2)} \quad \text{при } i=1, 2, \dots, s-1;$$

$$K_{i,i-1}^{(-1)} = -\frac{r}{\sigma^2(1-r^2)} \quad \text{при } i=2, 3, \dots, s,$$

где $r = e^{-\alpha \Delta t}$; $K_{i,k} = \sigma^2 r^{|k-i|}$; $i, k = 1, 2, \dots, s$.

Пусть имеется оценка искомого вектора нулевого приближения $\hat{X}_{(0)}$ и корреляционная матрица этой оценки $K_{\hat{X}_{(0)}}$. Предположим, что в рассматриваемой выборке содержится i измерений. Тогда в соответствии с (2.68) и (2.67) можем записать

$$\hat{X}_{(i)} = K_{\hat{X}_{(i)}} (K_{\hat{X}_{(0)}}^{-1} \hat{X}_{(0)} + A^T_{i,n} K_{H_i}^{-1} H_i),$$

$$K_{\hat{X}_{(i)}} = (K_{\hat{X}_{(0)}}^{-1} + A^T_{i,n} K_{H_i}^{-1} A_{i,n})^{-1}. \quad (2.74)$$

В том случае, когда выборка состоит из $i+1$ измерений, получаем

$$\hat{X}_{(i+1)} = K_{\hat{X}_{(i+1)}} (K_{\hat{X}_{(0)}}^{-1} \hat{X}_{(0)} + A^T_{i+1,n} K_{H_{i+1}}^{-1} H_{i+1}),$$

$$K_{\hat{X}_{(i+1)}} = (K_{\hat{X}_{(0)}}^{-1} + A^T_{i+1,n} K_{H_{i+1}}^{-1} A_{i+1,n})^{-1}. \quad (2.75)$$

Матрицы $A^{\tau_{i+1,n}} K_{H,i+1}^{-1} H_{i+1}$ и $A^{\tau_{i+1,n}} K_{H,i+1}^{-1} A_{i+1,n}$ можно представить в виде

$$A^{\tau_{i+1,n}} K_{H,i+1}^{-1} H_{i+1} = [\sigma^2 (1-r^2)]^{-1} \left[a_i h_1 + a_{i+1} h_{i+1} + \right. \\ \left. + (1+r^2) \sum_{k=1}^i a_k h_k - r \sum_{k=1}^i a_k h_{k+1} - r \sum_{k=2}^{i+1} a_k h_{k-1} \right], \quad (2.76)$$

$$A^{\tau_{i+1,n}} K_{H,i+1}^{-1} A_{i+1,n} = [\sigma^2 (1-r^2)]^{-1} \left[a_i a^{\tau_1} + a_{i+1} a^{\tau_{i+1}} + \right. \\ \left. + (1+r^2) \sum_{k=1}^i a_k a^{\tau_k} - r \sum_{k=1}^i a_k a^{\tau_{k+1}} - r \sum_{k=2}^{i+1} a_k a^{\tau_{k-1}} \right],$$

а матрицы $A^{\tau_{i,n}} K_{H,i}^{-1} H_i$ и $A^{\tau_{i,n}} K_{H,i}^{-1} A_{i,n}$ соответственно в виде

$$A^{\tau_{i,n}} K_{H,i}^{-1} H_i = [\sigma^2 (1-r^2)]^{-1} \left[a_i h_1 + a_i h_i + (1+r^2) \sum_{k=1}^{i-1} a_k h_k - \right. \\ \left. - r \sum_{k=1}^{i-1} a_k h_{k+1} - r \sum_{k=2}^i a_k h_{k-1} \right], \\ A^{\tau_{i,n}} K_{H,i}^{-1} A_{i,n} = [\sigma^2 (1-r^2)]^{-1} \left[a_i a^{\tau_1} + a_i a^{\tau_i} + (1+r^2) \sum_{k=1}^{i-1} a_k a^{\tau_k} - \right. \\ \left. - r \sum_{k=1}^{i-1} a_k a^{\tau_{k+1}} - r \sum_{k=2}^i a_k a^{\tau_{k-1}} \right]. \quad (2.77)$$

Из сравнения формул (2.74), (2.75) и (2.76), (2.77) можно записать

$$\widehat{X}_{(i+1)} = \left[K_{\widehat{X}(i)}^{-1} + \frac{1}{\sigma^2 (1-r^2)} (a_{i+1} a^{\tau_{i+1}} + r^2 a_i a^{\tau_i} - \right. \\ \left. - r a_i a^{\tau_{i+1}} - r a_{i+1} a^{\tau_i}) \right]^{-1} \left[K_{\widehat{X}(0)}^{-1} \widehat{X}_{(0)} + A^{\tau_{i,n}} K_{H,i}^{-1} H_i + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sigma^2 (1-r^2)} (a_{i+1,n} h_{i+1} + r^2 a_i h_i - r a_i h_{i+1} - r a_{i+1} h_i) \right]. \quad (2.78)$$

Обозначим

$$q = \frac{r}{\sigma^2 (1-r^2)} (r a_i - a_{i+1}), \\ d = \frac{1}{\sigma^2 (1-r^2)} (a_{i+1} - r a_i). \quad (2.79)$$

Тогда

$$K_{\hat{X}(i+1)} = \left[K_{\hat{X}(i)}^{-1} + \frac{1}{\sigma^2(1-r^2)} (a_{i+1} \bar{a}^T_{i+1} + r^2 a_i a_i^T - r a_i a_i^T - r a_{i+1} a_i^T) \right]^{-1} = (K_{\hat{X}(i)}^{-1} + q a^T_i + d a^T_{i+1})^{-1} \quad (2.80)$$

и

$$\begin{aligned} & [\sigma^2(1-r^2)]^{-1} (a_{i+1, n} h_{i+1} + r^2 a_i h_i - r a_i h_{i+1} - r a_{i+1} h_i) = \\ & = [\sigma^2(1-r^2)]^{-1} [(a_{i+1, n} - r a_i) h_{i+1} + r (r a_i - a_{i+1}) h_i] = \\ & = q h_i + d h_{i+1}. \end{aligned}$$

Подставляя (2.80) в уравнение (2.78) и учитывая, что согласно (2.74)

$$K_{\hat{X}(0)}^{-1} \hat{X}_{(0)} + A^T_{i, n} K_{H, i}^{-1} H_i = K_{\hat{X}(i)}^{-1} \hat{X}_{(i)},$$

находим

$$\hat{X}_{(i+1)} = K_{\hat{X}(i+1)} (K_{\hat{X}(i)}^{-1} \hat{X}_{(i)} + q h_i + d h_{i+1}), \quad (2.81)$$

где

$$K_{\hat{X}(i+1)} = (K_{\hat{X}(i)}^{-1} + q a^T_i + d a^T_{i+1})^{-1}. \quad (2.82)$$

Таким образом, получены рекуррентные соотношения, связывающие оценки искомого вектора X по выборке из i измерений и результат уточнения этих оценок по $(i+1)$ -му измерению.

Для удобства дальнейшего анализа несколько преобразуем полученную зависимость (2.81). Умножим два слагаемых второго сомножителя формулы (2.81) слева на единичную матрицу

$$E = (K_{\hat{X}(i)}^{-1} + q a^T_i) (K_{\hat{X}(i)}^{-1} + q a^T_i)^{-1}.$$

При этом получим

$$\hat{X}_{(i+1)} = (K_{\hat{X}(i)}^{-1} + d a^T_{i+1})^{-1} (K_{\hat{X}(i)}^{-1} \hat{X}_{(i)} + d h_{i+1}), \quad (2.83)$$

где

$$K_{\hat{X}(i)}^{-1} = K_{\hat{X}(i)}^{-1} + q a^T_i,$$

$$\bar{\hat{X}}_{(i)} = (K_{\hat{X}(i)}^{-1} + q a^T_i)^{-1} (K_{\hat{X}(i)}^{-1} \hat{X}_{(i)} + q h_i). \quad (2.84)$$

Формула (2.83) имеет такую же структуру, как и зависимость (2.68) для случая одного измерения в выборке ($m=1$), и, следова-

тельно, выражение (2.83) преобразуется аналогично уравнению (2.68) к виду (2.71):

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{(i+1)} &= (K_{\widehat{X}(i)}^{-1} + da^T_{i+1})^{-1} [(K_{\widehat{X}(i)}^{-1} + da^T_{i+1} - \\ &\quad - da^T_{i+1}) \widehat{X}_{(i)} + dh_{i+1}] = \widehat{X}_{(i)} + (K_{\widehat{X}(i)}^{-1} + \\ &\quad + da^T_{i+1})^{-1} da^T_{i+1} \widehat{X}_{(i)} + (K_{\widehat{X}(i)}^{-1} + da^T_{i+1})^{-1} dh_{i+1}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\widehat{X}_{(i+1)} = \widehat{X}_{(i)} + (K_{\widehat{X}(i)}^{-1} + da^T_{i+1})^{-1} d(h_{i+1} - a^T_{i+1} \widehat{X}_{(i)}).$$

Представим

$$\begin{aligned} (K_{\widehat{X}(i)}^{-1} + da^T_{i+1})^{-1} d &= [(E + da^T_{i+1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1}) K_{\widehat{X}(i)}^{-1}]^{-1} d = \\ &= K_{\widehat{X}(i)}^{-1} (E + da^T_{i+1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1})^{-1} d. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что $(E + da^T_{i+1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1})^{-1} d = d(E + a^T_{i+1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1} d)^{-1}$.

Матрицы a^T_{i+1} , $K_{\widehat{X}(i)}$, d имеют соответственно размеры $1 \times n$, $n \times n$, $n \times 1$. Следовательно, произведение $a^T_{i+1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1} d$ имеет размер 1×1 ,

т. е. представляет собой число. Отсюда $E + a^T_{i+1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1} d = 1 +$

$+ a^T_{i+1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1} d$ и

$$\widehat{X}_{(i+1)} = \widehat{X}_{(i)} + (1 + a^T_{i+1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1} d)^{-1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1} d (h_{i+1} - a^T_{i+1} \widehat{X}_{(i)}), \quad (2.85)$$

$$K_{\widehat{X}(i+1)} = K_{\widehat{X}(i)} - (1 + a^T_{i+1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1} d)^{-1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1} da^T_{i+1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1}.$$

Аналогичные уравнения могут быть получены для оценки $\widehat{X}_{(i)}$ и корреляционной матрицы этой оценки $K_{\widehat{X}(i)}$:

$$\widehat{X}_{(i)} = \widehat{X}_{(i)} + (1 + a^T_i K_{\widehat{X}(i)}^{-1} q)^{-1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1} q (h_i - a^T_i \widehat{X}_{(i)}), \quad (2.86)$$

$$K_{\widehat{X}(i)} = K_{\widehat{X}(i)} - (1 + a^T_i K_{\widehat{X}(i)}^{-1} q)^{-1} K_{\widehat{X}(i)}^{-1} q a^T_i K_{\widehat{X}(i)}^{-1}.$$

Таким образом, алгоритм перехода от оценок искоемых параметров $\hat{X}_{(i)}$ и корреляционной матрицы этих оценок $K_{\hat{X}_{(i)}}$ к оценкам $\hat{X}_{(i+1)}$ и корреляционной матрице $K_{\hat{X}_{(i+1)}}$, учитывающим еще одно $(i+1)$ -е измерение, состоит в следующем:

- по формулам (2.79) вычисляются векторы-столбцы q и d ;
- по зависимостям (2.86) рассчитываются оценки $\hat{X}_{(i)}$ и корреляционные матрицы этих оценок $K_{\hat{X}_{(i)}}$;
- по формулам (2.85) определяются искоемые оценки $\hat{X}_{(i+1)}$ и корреляционная матрица $K_{\hat{X}_{(i+1)}}$.

Данный алгоритм удобен для использования на ЭВМ, так как не требует хранения в запоминающем устройстве машины всех измерений h_k и коэффициентов a_{kj} ($k=1, 2, \dots, i; j=1, 2, \dots, n$). Для уточнения искомой оценки по вновь поступившему $(i+1)$ -му измерению от всех предшествовавших измерений используются лишь ранее найденная оценка $\hat{X}_{(i)}$, корреляционная матрица этой оценки $K_{\hat{X}_{(i)}}$ коэффициенты a_i и измерение h_i .

Применение рекуррентных формул метода наименьших квадратов в ряде важных для практики случаев может ускорить получение оценок искоемых параметров, упростить реализацию алгоритма и обеспечить систематичность контроля исследуемого процесса.

2.8. Оценивание параметров при нелинейной зависимости измеряемых функций от искоемых параметров

Рассмотренные в предыдущих параграфах алгоритмы оценивания параметров основаны на использовании условия (2.2) линейной зависимости измеряемой функции Z от искоемых параметров X . Однако на практике, как правило, условие (2.2) не выполняется. Это приводит к необходимости рассмотрения способов оценивания искоемых параметров методом наименьших квадратов при нелинейном характере зависимости измеряемой функции Z от искоемых параметров X .

При нелинейной зависимости измеряемой функции $Z(X)$ за МНК-оценку искоемых параметров X принимают

такое значение $\hat{\mathbf{X}}$, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) квадратичная форма

$$F(\mathbf{X}) = [\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\mathbf{X})]^T \mathbf{W} [\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\mathbf{X})] \quad (2.87)$$

при $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}$ достигает локального минимума;

2) этот минимум не является вырожденным.

Поясним введенные понятия. Условие минимума квадратичной формы (2.87) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{X}}} \{[\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}})]^T \mathbf{W} [\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}})]\} = 0,$$

или, согласно правилам дифференцирования векторных функций,

$$\frac{\partial [\mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}})]^T}{\partial \hat{\mathbf{X}}} \mathbf{W} [\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}})] = 0. \quad (2.88)$$

Обозначим

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial z_1}{\partial \hat{x}_2} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial \hat{x}_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial z_N}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial z_N}{\partial \hat{x}_2} & \dots & \frac{\partial z_N}{\partial \hat{x}_n} \end{vmatrix}. \quad (2.89)$$

Тогда система нормальных уравнений (2.88) примет вид

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} [\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}})] = 0. \quad (2.90)$$

Полученные n уравнений являются в общем случае нелинейными и должны решаться итерационными методами. При этом необходимо отметить, что не все $\hat{\mathbf{X}}$, при которых квадратичная форма (2.87) достигает минимума, являются оценками искомого вектора \mathbf{X} , а только те из них, значения которых действительно зависят от результатов измерений функции $\mathbf{Z}(\mathbf{X})$. Формально это требование сводится к тому, чтобы матрица (2.89) содержала хотя бы один минор порядка n с определителем, отличным от нуля.

Минимумы квадратичной формы (2.87), обеспечиваемые оценками $\hat{\mathbf{X}}$, называются вырожденными, если при

этом ранг матрицы Λ меньше, чем n . Значения \hat{X}' , при которых достигаются вырожденные минимумы, не являются оценками параметров X .

Наиболее трудная с вычислительной точки зрения часть задачи получения оценок искомых параметров по методу наименьших квадратов при нелинейной зависимости измеряемых функций от искомых параметров — это отыскание локальных минимумов квадратичной формы (2.87), т. е. решение системы нормальных уравнений (2.90).

В настоящее время в практике статистической обработки измерений наибольшее распространение получили метод Гаусса — Ньютона, модифицированный метод скорейшего спуска (метод градиента) и модифицированный метод последовательных приближений. Рассмотрим математические основы этих методов и особенности их применения для решения уравнений (2.90).

Метод Гаусса — Ньютона. Если имеются достаточно достоверные априорные значения искомых параметров $\hat{X}_{(0)}$, то для получения необходимого решения уравнений (2.90) можно применить метод последовательных приближений Гаусса — Ньютона.

Запишем систему уравнений (2.90) в виде

$$f(\hat{X}) = 0. \quad (2.91)$$

Решение этих уравнений можно представить в форме

$$\hat{X} = \hat{X}_{(0)} + \Delta\hat{X}. \quad (2.92)$$

Подставив (2.92) в уравнение (2.91), будем иметь

$$f(\hat{X}_{(0)} + \Delta\hat{X}) = 0. \quad (2.93)$$

Предположив, что функция $f(\hat{X})$ непрерывно дифференцируема в некоторой выпуклой области, содержащей \hat{X} и $\hat{X}_{(0)}$, разложим левую часть уравнения (2.93) по формуле Тейлора в малой окрестности значений вектора $\hat{X}_{(0)}$, ограничившись линейными членами:

$$\begin{aligned} f(\hat{X}_{(0)} + \Delta\hat{X}) &\approx \\ &\approx f(\hat{X}_{(0)}) + \left. \frac{\partial f(\hat{X})}{\partial \hat{X}} \right|_{\hat{X}=\hat{X}_{(0)}} \Delta\hat{X} = 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Под производной $\partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}})/\partial \hat{\mathbf{X}}$ необходимо понимать матрицу Якоби системы функций f_1, f_2, \dots, f_n относительно переменных $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = \Phi(\hat{\mathbf{X}}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \hat{x}_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \hat{x}_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \hat{x}_n} \end{vmatrix}$$

Линеаризованное в окрестности значений вектора $\hat{\mathbf{X}}_{(0)}$ уравнение (2.91) в матричной форме принимает вид

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}_{(0)}) + \Phi(\hat{\mathbf{X}}_{(0)})\Delta\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{0}.$$

Отсюда, предположив, что матрица $\Phi(\hat{\mathbf{X}})$ неособенная, получим

$$\Delta\hat{\mathbf{X}} = -[\Phi(\hat{\mathbf{X}}_{(0)})]^{-1} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}_{(0)}).$$

Следовательно,

$$\hat{\mathbf{X}}_{(1)} = \hat{\mathbf{X}}_{(0)} - [\Phi(\hat{\mathbf{X}}_{(0)})]^{-1} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}_{(0)}). \quad (2.95)$$

Учитывая, что в соответствии с принятыми обозначениями

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}_{(0)}) = \mathbf{A}^T_{(0)} \mathbf{W} [\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}}_{(0)})],$$

$$\Phi(\hat{\mathbf{X}}_{(0)}) = -\mathbf{A}^T_{(0)} \mathbf{W} \mathbf{A}_{(0)},$$

зависимость (2.95) перепишем в виде

$$\hat{\mathbf{X}}_{(1)} = \hat{\mathbf{X}}_{(0)} + (\mathbf{A}^T_{(0)} \mathbf{W} \mathbf{A}_{(0)})^{-1} \mathbf{A}^T_{(0)} \mathbf{W} [\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}}_{(0)})]. \quad (2.96)$$

Таким образом, если разложение (2.94) справедливо, то тем самым задача сведена к линейной, в которой матрица \mathbf{A} представляет собой матрицу частных производных первого порядка от измеряемых функций по искомым параметрам, а в качестве вектора измерений принимается вектор отклонений измеренных значений от расчетных значений измеряемых функций:

$$\mathbf{Y}_{(0)} = \mathbf{H} - \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}}_{(0)}). \quad (2.97)$$

Отклонения (2.97) играют роль линейных функций в рассмотренном алгоритме метода наименьших квадратов. Для определения поправок $\Delta \mathbf{X}$ решается обычная система нормальных уравнений. В результате получают уточненные значения искоемых параметров $\hat{\mathbf{X}}_{(1)}$. Эти значения используются в качестве новых приближенных оценок параметров \mathbf{X} для определения расчетных значений измеряемых функций $\mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}}_{(1)})$, которые должны лучше согласовываться с результатами измерений, чем предыдущие. Это согласие, однако, может оказаться еще не столь хорошим, как требуется, и тогда вся процедура повторяется снова. Каждое приближение выполняется так же, как и в линейном случае. Итерационная процедура продолжается до тех пор, пока изменения оценок параметров не станут достаточно малыми, т. е. на некотором l -м приближении будут выполнены неравенства

$$|\Delta \hat{x}_j^{(l)}| \leq \varepsilon_j$$

для всех $j=1, 2, \dots, n$, где ε_j — малые наперед заданные положительные величины.

Последовательное приближение к наилучшему решению называют уточнением оценок искоемых параметров. После того, как уточнение закончено, за корреляционную матрицу найденных оценок искоемых параметров $\hat{\mathbf{X}}$ может быть принята матрица $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}}$, определяемая выражением (2.27).

Отметим некоторые особенности получения МНК-оценок при использовании нелинейных зависимостей измеряемых функций \mathbf{Z} от искоемых параметров \mathbf{X} .

Рассмотрим функцию z_k , изображенную на рис. 2.1, в зависимости от параметра x_j . Допустим, что наилучшая аппроксимация измерений достигается при наборе параметров, в котором $\hat{x}_j = a$. Соответствующее значение величины z_k есть $z_k^{(a)}$, и для упрощения будем считать, что оно совпадает с измеренным значением h_k . Если теперь окажется, что на некотором этапе итерационного процесса оценка параметра \hat{x}_j принимает значение b , а z_k — соответствующее значение $z_k^{(b)}$, то в соответствии с разложением измеряемой функции по формуле Тейлора согласие будет улучшаться при воз-

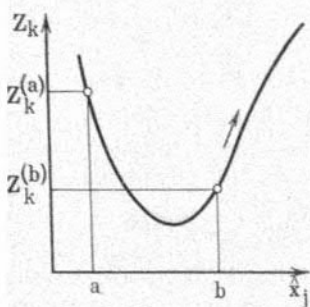


Рис. 2.1.

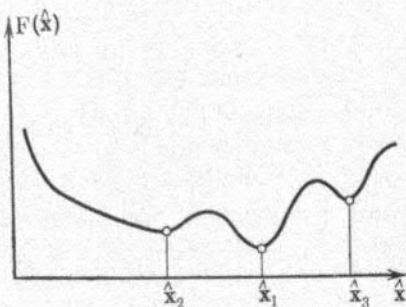


Рис. 2.2.

растании \hat{x}_j , вместо стремления к a . Действительно, согласие для этой функции улучшится, однако при этом, возможно, ухудшится согласие для других функций. Таким образом, уточнение этой функции будет противопоставлено остальным. Если к тому же она обладает большим весом или если используется несколько функций одинакового вида, то возможно, что процесс последовательных приближений никогда не сойдется к решению с минимальной дисперсией. При этом можно получить неверное решение, которое обеспечит лишь относительный минимум квадратичной формы (2.87).

Тенденцию процесса приближений сходиться к ложному минимуму квадратичной формы (2.87) иногда удается обнаружить, задавая различные начальные значения параметров $\hat{\mathbf{X}}_{(0)}$. Если число искомых параметров невелико, можно эффективно исключить эту опасность, варьируя значения $\hat{\mathbf{X}}_{(0)}$ в различных пределах и проверяя, всегда ли приближения сходятся к одним и тем же значениям.

Сходимость к истинному значению оценок искомых параметров в каждом конкретном случае зависит от выбора начальных значений $\hat{\mathbf{X}}_{(0)}$ и структуры многопараметрической поверхности ошибок измерений в окрестности начальной точки. Тем не менее можно сделать общее утверждение о том, что сходимость к правильному решению маловероятна, если значения производных $a_{ij} = \partial z_i / \partial \hat{x}_j$ ($i=1, 2, \dots, N$; $j=1, 2, \dots, n$) боль-

шого числа измеряемых функций в процессе итераций меняют знак. Данное утверждение для случая $n=1$ иллюстрируется рис. 2.2. На этом рисунке значение \hat{x}_1 соответствует абсолютному минимуму квадратичной формы $F(\hat{x})$ и является искомым. Значения \hat{x}_2 и \hat{x}_3 соответствуют относительным минимумам функции $F(\hat{x})$. Если начальное значение $\hat{x}_{(0)}$ находится вблизи \hat{x}_2 или \hat{x}_3 , то в результате последовательных приближений правильная оценка \hat{x}_1 параметра x , скорее всего, не будет получена.

Из рассмотрения особенностей определения МНК-оценок при нелинейной зависимости измеряемых функций от искоемых параметров ясна исключительно важная роль правильного задания начальных значений оценок $\hat{X}_{(0)}$. Поэтому при решении практических задач этому заданию должно быть уделено соответствующее внимание.

При невозможности получить достаточно хорошее начальное приближение для искоемых параметров или при обработке измерений низкой точности, когда метод Гаусса — Ньютона не позволяет найти решение, может применяться модифицированный метод скорейшего спуска.

Модифицированный метод скорейшего спуска. Рассмотрим модифицированный метод скорейшего спуска, предложенный в работе [10]. Идея метода заключается в построении такого алгоритма изменения оценок \hat{X} , на каждом шаге которого это изменение приводит к возможно более быстрому уменьшению текущих значений квадратичной формы $F(\hat{X})$, определяемой выражением (2.87).

Из вида зависимости (2.87) следует, что наиболее быстрое уменьшение функции $F(\hat{X})$ достигается при движении по нормали к поверхности уровня (2.87). Это движение описывается дифференциальными уравнениями скорейшего спуска:

$$dY/dS = -Y/\sqrt{F(\hat{X})}, \quad (2.98)$$

где

$$Y = H - Z(\hat{X}). \quad (2.99)$$

В малой окрестности некоторой точки это движение может быть также описано конечными формулами

$$\Delta Y = - (Y / \sqrt{F(\hat{X})}) \Delta S, \quad (2.100)$$

где ΔS — малое перемещение вдоль градиентной линии.

Однако, ввиду того что N переменных y_i связаны N соотношениями (2.99) с n переменными x_j , причем $n < N$, движение, удовлетворяющее формулам (2.100), вообще говоря, осуществить невозможно. Но можно найти такое направление перемещения относительно гиперповерхности (2.87), которое, удовлетворяя зависимостям (2.99), в то же время было бы наиболее близким к направлению движения по градиентной прямой (2.100).

Пусть параметры \hat{X} получают малые приращения $\Delta \hat{X}$. Согласно (2.99) и (2.89) при этом имеем

$$\Delta Y' = - \frac{\partial Z(\hat{X})}{\partial \hat{X}} \Delta \hat{X} = - A \Delta \hat{X}. \quad (2.101)$$

Составим новую квадратичную форму

$$\Phi = (\Delta Y - \Delta Y')^T W (\Delta Y - \Delta Y'). \quad (2.102)$$

Очевидно, что квадратичная форма (2.102) в некотором смысле характеризует близость малых перемещений вдоль градиентной линии гиперповерхности $\Phi(\Delta \hat{X})$ и вдоль направления, определяемого соотношениями (2.101).

Поставим задачу: для данного ΔS найти такие перемещения $\Delta \hat{X}$, для которых квадратичная форма (2.102) принимает минимальное значение. Записывая необходимые условия минимума функции $\partial \Phi / \partial \Delta \hat{X} = 0$, получаем n линейных алгебраических уравнений для определения приращений $\Delta \hat{X}$:

$$B \Delta \hat{X} = C \Delta S / \sqrt{F(\hat{X})}, \quad (2.103)$$

где матрицы B и C находятся из выражений

$$B = A^T W A; \quad C = A^T W Y. \quad (2.104)$$

Разделим правые и левые части уравнений (2.103) на ΔS и совершим предельный переход, устремив ΔS к нулю.

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\hat{\mathbf{X}}}{dS} = \frac{1}{\sqrt{F(\hat{\mathbf{X}})}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}. \quad (2.105)$$

Переменная S служит параметром вдоль кривой спуска в n -мерном пространстве переменных $\hat{\mathbf{X}} = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n\}$, так что каждому значению S соответствует определенное значение вектора оценок $\hat{\mathbf{X}}(S)$. Система дифференциальных уравнений (2.105) определяет характер изменения оценок $\hat{\mathbf{X}}$ для достижения минимума квадратичной формы (2.87).

Вычисление матриц \mathbf{B} и \mathbf{C} в системе (2.105) проводится для параметров $\hat{\mathbf{X}}(S)$ по формулам (2.104), (2.89), (2.99), используемым и для записи системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов. Система уравнений численно интегрируется по S при начальных условиях $S=0$, $\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}_{(0)}$.

Для сокращения затрат машинного времени на решение задачи рекомендуется использовать следующую процедуру изменения шага h численного интегрирования уравнений (2.105). Если после очередного шага интегрирования значение величины

$$R = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n C_j^2,$$

где N — количество измерений, уменьшится, то следующий цикл решения ведется с удвоенным шагом интегрирования. При увеличении значения величины R на очередном шаге происходит возврат к предыдущей точке, величина шага h уменьшается вдвое и процесс продолжается. Интегрирование ведется до значения $S = S_{(m)}$, при котором R становится меньше заданной малой величины. Полученные при этом оценки искомых параметров $\hat{\mathbf{X}}_{(m)}$ обеспечивают минимум квадратичной формы (2.87), т. е. наилучшим образом в смысле метода наименьших квадратов согласуются с измерениями.

Модифицированный метод последовательных приближений. В случае, когда отсутствуют априорные сведения

об оцениваемых параметрах для решения системы нормальных уравнений (2.90), может быть использована следующая модификация метода последовательных приближений.

Произвольным образом выбираются значения иско- мых параметров нулевого приближения $\hat{X}_{(0)}$. Оценки по- правок к ним $\Delta\hat{X}_{(0)}$ находят, как обычно, решением си- стемы нормальных уравнений

$$\Delta\hat{X}_{(0)} = (A^T_{(0)} W A_{(0)})^{-1} A^T_{(0)} W Y_{(0)}, \quad (2.106)$$

где

$$Y_{(0)} = N - Z(\hat{X}_{(0)}).$$

Далее вводится скалярный множитель $0 \leq \lambda \leq 1$ и уточненная оценка иско- мых параметров записывается в виде

$$\hat{X}_{(1)} = \hat{X}_{(0)} + \lambda_{(1)} \Delta\hat{X}_{(0)}. \quad (2.107)$$

Таким образом, квадратичная форма $F(\hat{X}_{(1)}) = Y^T_{(1)} W Y_{(1)}$, где $Y_{(1)} = N - Z(\hat{X}_{(1)})$ является функцией от λ . Исходной для следующего приближения будет такая оценка $\hat{X}_{(1)}$, для которой квадратичная форма $F(\hat{X}_{(1)})$ достигает мини- мума по λ . Практически наилучшее $\lambda_{(1)}$ удобно находить, вычисляя $F(\hat{X}_{(1)})$ при $\lambda = 0; 0,5$ и $1,0$ и аппроксимируя результаты параболой. После этого так же проводится следующее приближение и т. д. Таким образом, обычное решение дает направление изменения поправок, а чис- ленная минимизация величины $F(\hat{X})$ по λ позволяет по- лучить их значение.

Найденный минимум может не быть абсолютным. В большинстве случаев судить о том, достигнут абсолют- ный или относительный минимум приходится на основе анализа физического смысла полученных оценок пара- метров. Если этого сделать не удастся, то поиски абсо- лютного минимума проводят из многих начальных точек n -мерного пространства, разбрасывая их случайным об- разом по всей области определения измеряемых функ- ций $Z(X)$.

2.9. Оценивание параметров по выборке измерений нарастающего объема при нелинейной зависимости измеряемых функций от искоемых параметров

В § 2.6 приведены рекуррентные формы записи алгоритма статистического оценивания параметров, предназначенные для обработки выборки измерений нарастающего объема. Однако эти алгоритмы тождественны соответствующему методу оценивания по выборке измерений полного объема лишь в случае линейной зависимости измеряемых функций от искоемых параметров. В то же время параметры, измеряемые радиотехническими траекторными измерительными средствами, представляют собой нелинейные функции оцениваемых по ним параметров движения летательного аппарата, элементов орбиты и других интересующих исследователей величин. Поэтому представляет практический интерес рассмотреть методику оценивания параметров по выборке измерений нарастающего объема при нелинейной зависимости измеряемых функций от искоемых параметров \mathbf{X} .

Примем, что известны МНК-оценка $\hat{\mathbf{X}}_{(N)}$ и корреляционная матрица этой оценки $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}_{(N)}}$ искомого вектора \mathbf{X} , полученные статистической обработкой выборки измерений N объема N по формулам (2.96), (2.27), (2.25). Для упрощения математических преобразований и анализа получаемых результатов условимся, что производятся измерения скалярной функции $z(\mathbf{X})$. Задача заключается в получении формулы для последовательной линейной оценки вектора \mathbf{X} , оптимальной в некотором уточняемом ниже смысле.

Формула для оценки может быть записана в виде

$$\hat{\mathbf{X}}_{(N+1)} = \hat{\mathbf{X}}_{(N)} + \mathbf{G} [h_{N+1} - z_{N+1}(\hat{\mathbf{X}}_{(N)})], \quad (2.108)$$

где $h_{N+1} = z_{N+1}(\mathbf{X}) + \delta h_{N+1}$; \mathbf{G} — матричный «коэффициент усиления» формулы оценки; \mathbf{X} — истинное значение вектора оцениваемых параметров; δh_{N+1} — случайная ошибка измерения.

Ошибка оценки

$$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X} \quad (2.109)$$

может быть охарактеризована корреляционной матрицей $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}} = \mathbf{M}[\mathbf{e}\mathbf{e}^T]$. Условимся, что матрица \mathbf{G} в формуле оценки (2.108) выбрана таким образом, чтобы минимизировалась дисперсия $\mathbf{d} = \mathbf{J}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}} \mathbf{J}$, где \mathbf{J} — любой наперед

заданный вектор, размер которого равен размеру вектора \mathbf{X} . Получаемую при этом оценку искомого вектора $\hat{\mathbf{X}}$ назовем оценкой с минимальной дисперсией, что для случая линейной зависимости измеряемой функции z от искомого параметров \mathbf{X} соответствует, как было показано в § 2.4, МНК-оценке.

Для линейной функции измерения соответствующие соотношения приведены в § 2.6. В методе наименьших квадратов для линеаризованного варианта формулы (2.71) используется зависимость

$$\hat{\mathbf{X}}_{(N+1)} = \hat{\mathbf{X}}_{(N)} + \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}_{(N)}} \mathbf{a}_{N+1} (\mathbf{a}_{N+1}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}_{(N)}} \mathbf{a}_{N+1} + \sigma_{N+1}^2)^{-1} [h_{N+1} - z_{N+1}(\hat{\mathbf{X}}_{(N)})], \quad (2.110)$$

т. е.

$$\mathbf{G} = \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}_{(N)}} \mathbf{a}_{N+1} (\mathbf{a}_{N+1}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}_{(N)}} \mathbf{a}_{N+1} + \sigma_{N+1}^2)^{-1}, \quad (2.111)$$

где

$$\mathbf{a}_{N+1}^T = \left\| \frac{\partial z_{N+1}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial z_{N+1}}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial z_{N+1}}{\partial x_n} \right\|;$$

σ_{N+1}^2 — дисперсия случайных ошибок измерений функции $z_{N+1}(\mathbf{X})$.

При этом предполагается, что отсутствует корреляция между ошибками измерений δh_{N+1} и величинами \mathbf{X} и $\hat{\mathbf{X}}_{(N)}$, а матрица $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}_{(N)}}$ представляет собой истинную корреляционную матрицу ошибок $\mathbf{e}_{(N)}$. В противном случае выражение (2.110) не обеспечит оценки с минимальной дисперсией. Для того чтобы зависимость (2.111) обеспечивала вычисление оптимального коэффициента усиления \mathbf{G} при следующем измерении, необходимо, чтобы матрица $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}_{(N+1)}}$ была истинной корреляционной матрицей

ошибок $\mathbf{e}_{(N+1)}$, так как в очередном уточнении искомого параметров матрица $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}(N+1)}$ будет использоваться вместо матрицы $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}(N)}$.

В соответствии с (2.109) и (2.108) ошибка новой оценки

$$\mathbf{e}_{(N+1)} = \hat{\mathbf{X}}_{(N+1)} - \mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}_{(N)} - \mathbf{X} + \\ + \mathbf{G} [h_{N+1} - z_{N+1}(\hat{\mathbf{X}}_{(N)})].$$

Разложим функцию $\mathbf{e}(\mathbf{X})$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\hat{\mathbf{X}}_{(N)}$:

$$\mathbf{e}_{(N+1)} = \mathbf{e}_{(N)} + \mathbf{G} \left\{ \mathbf{a}_{N+1}^T (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{(N)}) + \frac{1}{2} (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{(N)})^T \times \right. \\ \times \frac{\partial^2 z_{N+1}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^2} (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{(N)}) + \dots + \delta h_{N+1} \left. \right\} = \\ = (\mathbf{E} - \mathbf{G} \mathbf{a}_{N+1}^T) \mathbf{e}_{(N)} + \mathbf{G} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{e}_{(N)}^T \times \right. \\ \times \frac{\partial^2 z_{N+1}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}^2} \mathbf{e}_{(N)} + \dots + \delta h_{N+1} \left. \right\}. \quad (2.112)$$

Если в выражении (2.112) пренебречь всеми членами, порядок которых выше порядка линейного члена по $\mathbf{e}_{(N)}$, то новую корреляционную матрицу уточняемых по измерению h_{N+1} оценок приближенно запишем в виде

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}(N+1)} = (\mathbf{E} - \mathbf{G} \mathbf{a}_{N+1}^T) \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}(N)} (\mathbf{E} - \mathbf{G} \mathbf{a}_{N+1}^T)^T + \\ + \mathbf{G} \sigma_{N+1}^2 \mathbf{G}^T. \quad (2.113)$$

Подставив в (2.113) выражение (2.111) для матрицы \mathbf{G} , получим уже известную формулу

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}(N+1)} = \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}(N)} - \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}(N)} \mathbf{a}_{N+1} (\mathbf{a}_{N+1}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}(N)} \mathbf{a}_{N+1} + \\ + \sigma_{N+1}^2)^{-1} \mathbf{a}_{N+1}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}(N)}. \quad (2.114)$$

Если в выражении (2.112) сохранить и квадратичный член, то определим для корреляционной матрицы $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}(N+1)}$

приближение более высокого порядка:

$$\begin{aligned}
 K_{\hat{x}_{(N+1)}} &= (E - G a_{N+1}^T) K_{\hat{x}_{(N)}} (E - G a_{N+1}^T)^T + \\
 &+ G \sigma_{N+1}^2 G^T + \frac{1}{2} (E - G a_{N+1}^T) \times \\
 &\times M \left\{ e_{(N)} e_{(N)}^T \left[\frac{\partial^2 z_{N+1}(X)}{\partial X^2} \right]^T e_{(N)} \right\} G^T + \\
 &+ \frac{1}{2} G M \left\{ e_{(N)}^T \frac{\partial^2 z_{N+1}(X)}{\partial X^2} e_{(N)} e_{(N)}^T \right\} \times \\
 &\times (E - G a_{N+1}^T)^T + \frac{1}{2} G \times \\
 &\times M \left[\left\{ e_{(N)}^T \frac{\partial^2 z_{N+1}(X)}{\partial X^2} e_{(N)} \right\}^2 \right] G^T. \quad (2.115)
 \end{aligned}$$

Чтобы оценить влияние «добавочных» членов в выражении (2.115), используем общепринятое допущение о том, что величина $e_{(N)}$ имеет симметричное распределение. Тогда зависимость (2.115) примет вид

$$\begin{aligned}
 K_{\hat{x}_{(N+1)}} &= (E - G a_{N+1}^T) K_{\hat{x}_{(N)}} (E - G a_{N+1}^T)^T + \\
 &+ G \left\{ \sigma_{N+1}^2 + \frac{1}{4} M \left[\left(e_{(N)}^T \frac{\partial^2 z_{N+1}(X)}{\partial X^2} e_{(N)} \right)^2 \right] \right\} G^T. \quad (2.116)
 \end{aligned}$$

Из анализа (2.116) следует, что выражение (2.113) дает хорошее приближение, если величина

$$M \left[\left(e_{(N)}^T \frac{\partial^2 z_{N+1}(X)}{\partial X^2} e_{(N)} \right)^2 \right]$$

мала по сравнению с величиной σ_{N+1}^2 .

Для иллюстрации результатов последовательного применения формулы (2.108) вместе с зависимостями (2.111), (2.113) рассмотрим для примера следующую простейшую задачу.

В качестве оцениваемого параметра возьмем скалярную величину x . Пусть измеряемая функция $z(x) = x^2$; $\hat{x}_0 = 1$; $K_{\hat{x}_{(0)}} = \sigma_{\hat{x}_{(0)}}^2 = 0,01$; $\sigma_h^2 = 0,0001$, т. е. среднее квадратическое отклонение ошибки $e_{(0)}$ составляет 10% от \hat{x}_0 , а среднее квадратическое отклонение ошибок измерений составляет 1% от \hat{x}_0 .

Для моделирования «работы» формулы оценки была составлена вычислительная программа, основанная на методе статистического моделирования. При получении начальной ошибки $e_0 = \hat{x}_0 - x$ и ошибки измерений δh в программе использовался датчик случайных чисел, имеющих нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и заданными дисперсиями $\sigma_{\hat{x}(0)}^2$ и $\sigma_{\delta h}^2$. Для каждого значения x вырабатывалась последовательность значений δh , в результате чего образовывалась последовательность «измерений» $h_i = x^2 + \delta h$. Каждое из измерений по очереди подвергалось обработке.

Новая оценка $\hat{x}_{(i)}$ после одного измерения принималась за априорную оценку $\hat{x}_{(0)}$ при использовании следующего измерения. Аналогично значение $K_{\hat{x}(i)}$ после обработки одного измерения становилось величиной $K_{\hat{x}(0)}$ для следующего измерения. Производная dz/dx вычислялась заново для каждого нового значения $\hat{x}_{(0)}$, величина G определялась по соответствующим значениям $K_{\hat{x}(0)}$ и производной dz/dx .

Результаты моделирования представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Количество обработанных измерений	$\hat{\sigma}_{\hat{x}}^2 \cdot 10^4$	$M = \hat{\sigma}_{\hat{x}}^2 / \hat{\sigma}_{\hat{x}}$	Количество обработанных измерений	$\hat{\sigma}_{\hat{x}}^2 \cdot 10^4$	$M = \hat{\sigma}_{\hat{x}}^2 / \hat{\sigma}_{\hat{x}}$
2	0,311	2,46	8	0,044	1,34
3	0,168	1,94	9	0,038	1,31
4	0,112	1,71	10	0,032	1,26
5	0,083	1,58	20	0,014	1,10
6	0,064	1,47			

Значение дисперсии $\hat{\sigma}_{\hat{x}}^2$ оценки \hat{x} , приведенное в таблице, в каждом опыте получено осреднением 1 000 реализаций:

$$\hat{\sigma}_{\hat{x}}^2 = 0,001 \sum_{l=1}^{1000} (\hat{x}_{(l)} - x)^2.$$

Величина $\hat{\sigma}_{\hat{x}}^2$ монотонно уменьшается при увеличении количества обработанных измерений. Значение дисперсии оценки \hat{x} определяется

мой зависимостью (2.113), обозначим $\sigma_{\hat{x}}^2$. Чтобы судить о достоверности (в среднем) вычисленных значений дисперсии $\sigma_{\hat{x}}^2$, определим значения отношения $M = \hat{\sigma}_{\hat{x}}^2 / \sigma_{\hat{x}}^2$. Если бы величина $\sigma_{\hat{x}}^2$ представляла собой истинное значение дисперсии оценки \hat{x} , что соответствует принятому предположению, то в среднем она равнялась бы $\hat{\sigma}_{\hat{x}}^2$. Следовательно, величина M должна быть близка к единице.

Анализ изменения величины M показывает, что значение M равно 3,76 после первого измерения и очень медленно уменьшается до значения 1,26 после десяти измерений. Это означает, что при обработке каждого измерения, следующего за первым, формула оценки «считает», что ошибка оценки значительно меньше, чем ее действительное значение. Поэтому матричные коэффициенты усиления (2.111) в формуле оценки оказываются заниженными, что приводит к неправильному учету последующих измерений. В этом случае процесс отыскания оценок по измерениям может оказаться расходящимся. Для улучшения сходимости процесса оценивания искомых параметров разработаны усовершенствования алгоритма оценивания. Некоторые из них рассмотрены ниже в гл. 4 и 9 при изложении практических задач по оцениванию динамических систем и определению движения летательных аппаратов на основе статистической обработки результатов радиотехнических траекторных измерений.

3

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДАМИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ И МАКСИМУМА АПОСТЕРИОРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

3.1. Оценивание параметров методом максимального правдоподобия

Рассмотренный в гл. 2 метод наименьших квадратов может быть применен для оценки неизвестных параметров, если известна функциональная зависимость между измеряемыми величинами и искомыми параметрами. Этот метод статистической обработки экспериментальных данных требует минимума априорных сведений об ошибках измерений: для его эффективного использова-

ния достаточно задать первые и вторые моменты случайных ошибок измерений.

В данном параграфе излагается метод статистической оценки неизвестных параметров, основанный на предположении, что известен закон распределения измеряемых случайных величин H_1, H_2, \dots, H_N , зависящий от искомым параметров x_1, x_2, \dots, x_n .

Обозначим: $\bar{\mathbf{H}}$ — случайный вектор с компонентами H_1, H_2, \dots, H_N ; \mathbf{X} — вектор с компонентами x_1, x_2, \dots, x_n . Значения, которые могут принимать случайные величины H_1, H_2, \dots, H_N , обозначим через h_1, h_2, \dots, h_N , значения случайного вектора $\bar{\mathbf{H}}$ — через \mathbf{H} .

Введем функцию

$$f(\mathbf{H}|\mathbf{X}) = f(h_1, h_2, \dots, h_N | x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.1)$$

Если случайные величины H_1, H_2, \dots, H_N дискретны, то (3.1) означает вероятность того, что они равны h_1, h_2, \dots, h_N при заданных x_1, x_2, \dots, x_n . Если же случайные величины H_1, H_2, \dots, H_N непрерывны, то (3.1) — их совместная плотность вероятности.

Сущность рассматриваемого метода оценивания параметров заключается в следующем. В $f(\mathbf{H}|\mathbf{X})$ подставляются те значения h_1, h_2, \dots, h_N , которые были получены в результате измерений, и в качестве оценок искомым параметров x_1, x_2, \dots, x_n берутся те их значения $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$, при которых функция (3.1) принимает наибольшее значение, т. е. в качестве оценок неизвестных берут такие значения параметров x_1, x_2, \dots, x_n , при которых данные результаты измерений h_1, h_2, \dots, h_N являются наиболее вероятными.

Функция $L(\mathbf{H}|\mathbf{X}) = f(\mathbf{H}|\mathbf{X})$, где \mathbf{H} — результаты измерений, называется функцией правдоподобия. Хотя она по форме и совпадает с условной плотностью вероятности, их не следует смешивать друг с другом, так как в функцию правдоподобия подставлены фиксированные значения h_1, h_2, \dots, h_N , а в выражении для плотности вероятности фигурируют значения, которые могут принимать случайные величины H_1, H_2, \dots, H_N . Функция правдоподобия является функцией только неизвестных параметров \mathbf{X} , в то время как плотность вероятности — функция \mathbf{H} и \mathbf{X} .

Те значения искомым параметров, при которых функция правдоподобия достигает максимума, называются оценками максимального правдоподобия, а метод их

определения — методом максимального правдоподобия.

Для нахождения точки максимума функции правдоподобия $L(\mathbf{H}|\mathbf{X})$ нужно, согласно известным правилам дифференциального исчисления, приравнять нулю ее частные производные по x_1, x_2, \dots, x_n . Поскольку точки максимума $L(\mathbf{H}|\mathbf{X})$ и $\ln L(\mathbf{H}|\mathbf{X})$ совпадают, то для экспоненциальных распределений получение решения упрощается, если использовать систему уравнений

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{H}|\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{x}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Если искомые параметры оцениваются на основе независимых измерений, проведенных в одинаковых условиях, то функция правдоподобия

$$L(\mathbf{H}|\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^N L(h_i | (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

и уравнения (3.2) принимают вид

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \ln L(h_i | \hat{x}_1 \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)}{\partial \hat{x}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Решая уравнения (3.2) относительно $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$, находим оценки искомых параметров как функции измерений h_1, h_2, \dots, h_N . Примем, что ошибки измерений $\delta h_i (i=1, 2, \dots, N)$ являются нормальными случайными величинами с математическими ожиданиями, равными нулю, и корреляционной матрицей $\mathbf{K}_H = \sigma_0^2 \mathbf{W}^{-1}$. Тогда функция правдоподобия выборки измерений \mathbf{H} объема N может быть записана в виде

$$L(\mathbf{H}|\mathbf{X}) = (2\pi\sigma_0^2)^{-N/2} |\mathbf{W}^{-1}|^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_0^2} [\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\mathbf{X})]^T \mathbf{W} [\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\mathbf{X})] \right\},$$

а условие максимума функции правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{X}}} \left\{ -\frac{1}{2\sigma_0^2} [\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}})]^T \mathbf{W} [\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}})] \right\} = 0$$

или, согласно правилам дифференцирования векторных функций,

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \frac{\partial [\mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}})]^T}{\partial \hat{\mathbf{X}}} \mathbf{W} [\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{X}})] = 0. \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что при всяком значении σ_0^2 максимум функции правдоподобия достигается при выборе \hat{X} , не зависящем от σ_0^2 .

Используя обозначение $A = \partial [Z(\hat{X})] / \partial \hat{X}$, переписываем систему уравнений правдоподобия (3.3) в виде

$$A^T W [N - Z(\hat{X})] = 0. \quad (3.4)$$

Решив (3.4) относительно вектора \hat{X} , найдем оценку максимального правдоподобия искомого вектора X .

Сравнивая уравнения правдоподобия (3.4) с системой нормальных уравнений (2.90) метода наименьших квадратов, полученной на основе минимизации квадратичной формы (2.87), устанавливаем их полную тождественность. Следовательно, метод наименьших квадратов является частным случаем метода максимального правдоподобия, когда измерения являются нормальными случайными величинами, а их математические ожидания связаны с оцениваемыми параметрами известными функциональными зависимостями. Это значит, что рассмотренные в § 2.4 свойства оценок метода наименьших квадратов могут быть распространены и на оценки метода максимального правдоподобия при нормальном законе распределения случайных ошибок измерений и линейной зависимости измеряемых функций от искомого параметра.

Кроме того, в математической статистике доказываются, что метод максимального правдоподобия обеспечивает для широкого класса задач получение состоятельных, асимптотически нормальных и асимптотически эффективных оценок [17]. Отсюда следует, что метод максимального правдоподобия наилучшим образом использует всю информацию о неизвестных параметрах, содержащуюся в выборке измерений. Однако применение этого метода связано с рядом трудностей. Главная из них заключена в том, что при использовании метода максимального правдоподобия приходится предполагать известный вид распределения вероятности результатов измерений. Это допущение может в ряде случаев наложить сильное ограничение на применение метода и изучение свойств полученных оценок. Другой причиной, ограничи-

вающей иногда применение метода, является сложность алгоритма получения оценок максимального правдоподобия.

3.2. Оценивание параметров методом максимума апостериорной вероятности

До сих пор предполагалось, что вектор оцениваемых параметров является неизвестным, но не случайным вектором, т. е. при всех измерениях этот вектор принимает одинаковые значения. Теперь же будем считать, что оцениваемый вектор—случайный и имеет свое распределение вероятностей.

Примем, что случайный вектор \bar{X} необходимо оценить по измерениям некоторого другого случайного вектора Z , статистически связанного с искомым вектором \bar{X} . Предполагается, что при каждом наблюдении случайного вектора Z реализуется некоторое выборочное значение X случайного вектора \bar{X} . В этом случае по результатам измерений $N = \{h_1, h_2, \dots, h_N\}$ необходимо определить оценку данного конкретного значения X .

Каждая выборка измерений N случайного вектора Z характеризуется условной плотностью вероятности $f(N|X)$ при допущении, что вектор \bar{X} принял определенное для данной выборки значение X . Примем, что условная плотность вероятности $f(N|X)$ известна для всех возможных значений X .

Случайный вектор \bar{X} характеризуется плотностью вероятности $f(X)$. В условиях рассматриваемой задачи плотность вероятности $f(X)$, не зависящая от результатов измерений N , называется априорной плотностью вероятности случайного вектора \bar{X} .

Известно, что векторная случайная величина \bar{X} полностью описывается своим вероятностным распределением. Если эта величина статистически связана с какой-либо другой случайной величиной Z , а случайная величина Z в результате испытания приняла какое-либо определенное значение N , то случайная величина \bar{X} полностью описывается условной плотностью вероятности $f(X|N)$ при $\bar{X}=X$. Таким образом, вся информация о случайной величине \bar{X} , получаемая в результате измерений N , заключена в плотности вероятности $f(X|N)$, которая,

как функция от \mathbf{X} , называется апостериорной плотностью вероятности случайного вектора $\bar{\mathbf{X}}$.

Итак, основное при решении задачи оценки значения случайного вектора \mathbf{X} по результатам измерений \mathbf{H} — определение апостериорной плотности вероятности $f(\mathbf{X}|\mathbf{H})$.

Функция $f(\mathbf{X}|\mathbf{H})$ определяется формулой Байеса

$$f(\mathbf{X}|\mathbf{H}) = \frac{f(\mathbf{X}, \mathbf{H})}{f(\mathbf{H})} = \frac{f(\mathbf{X})f(\mathbf{H}|\mathbf{X})}{f(\mathbf{H})}, \quad (3.5)$$

где $f(\mathbf{X})$ — априорная плотность вероятности случайного вектора $\bar{\mathbf{X}}$; $f(\mathbf{X}, \mathbf{H})$ — совместная плотность вероятности случайных векторов $\bar{\mathbf{X}}$ и \mathbf{Z} ; $f(\mathbf{H}|\mathbf{X})$ — условная плотность вероятности случайного вектора \mathbf{Z} ; $f(\mathbf{H})$ — плотность полной вероятности случайного вектора \mathbf{Z} , определяемая зависимостью

$$f(\mathbf{H}) = \int f(\mathbf{X})f(\mathbf{H}|\mathbf{X})d\mathbf{X}. \quad (3.6)$$

Отметим, что интеграл в (3.6) многомерный по dx_1, dx_2, \dots, dx_n , поскольку \mathbf{X} — вектор, и берется по всей области, где $f(\mathbf{X})$ отлична от нуля.

Наиболее распространенными оценками $\hat{\mathbf{X}}$ случайного вектора $\bar{\mathbf{X}}$ являются следующие.

1. Наиболее вероятная оценка $\hat{\mathbf{X}}_1$, обеспечивающая то значение вектора \mathbf{X} , которое может появиться с наибольшей вероятностью ($\hat{\mathbf{X}}_1$ — мода случайного вектора $\bar{\mathbf{X}}$, соответствующая максимуму плотности вероятности $f(\mathbf{X}|\mathbf{H})$). Необходимые условия, которым удовлетворяет точка максимума плотности вероятности $f(\mathbf{X}|\mathbf{H})$, находим, приравнявая нулю частные производные от $f(\mathbf{X}|\mathbf{H})$ по \mathbf{X} . Учитывая, что знаменатель в (3.5) не зависит от \mathbf{X} , получаем следующую систему уравнений, которым должна удовлетворять оценка:

$$\frac{\partial [f(\mathbf{X})f(\mathbf{H}|\mathbf{X})]}{\partial \mathbf{X}} = 0. \quad (3.7)$$

Отметим, что решение векторного уравнения (3.7) позволяет получить значение $\hat{\mathbf{X}}_1$ вектора $\bar{\mathbf{X}}$, имеющее наибольшую вероятность при данном векторе измерений \mathbf{H} . В этом заключается отличие данного метода от метода максимального правдоподобия, где в качестве

оценки неизвестного вектора берется то значение вектора \bar{X} , при котором наиболее вероятен данный вектор измерений H .

Для получения наиболее вероятной оценки \hat{X}_1 требуется знать, как это видно из уравнения (3.7), априорную плотность вероятности $f(X)$. Однако на практике возможны случаи, когда априорная плотность вероятности $f(X)$ неизвестна. При этом приходится делать предположение, что функция $f(X)$ не зависит от X , т. е. все значения \bar{X} равновероятны (нулевые математические ожидания и бесконечные дисперсии при нормальном распределении случайного вектора \bar{X}). При этом уравнения (3.7) принимают вид

$$\frac{\partial f(H|X_i)}{\partial X} = 0$$

и совпадают с уравнениями правдоподобия (3.2).

Таким образом, в случае равновероятных значений случайного вектора \bar{X} метод максимального правдоподобия и метод максимума апостериорной вероятности приводят к одинаковым оценкам.

2. Минимаксная оценка \hat{X}_2 , минимизирующая вероятность максимальной возможной ошибки $|X - \hat{X}|$, причем \hat{X}_2 — медиана случайного вектора \bar{X} . Так, если для одномерного случая ($n = 1$) провести через \hat{x}_2 прямую, параллельную оси ординат, то эта прямая разделит область между $f(X|H)$ и осью абсцисс на две части с одинаковой площадью. Величина \hat{X}_2 находится из решения уравнения

$$\int_{-\infty}^{\hat{x}_2} f(X|H) dX = \int_{\hat{x}_2}^{\infty} f(X|H) dX.$$

3. Условное математическое ожидание \hat{X}_3 относительно измерений $\hat{X}_3 = M[X|H]$, так называемое апостериорное среднее. Оценка \hat{X}_3 определяется соотношением

$$\hat{X}_3 = M[\bar{X}|H] = \int_{-\infty}^{\infty} X f(X|H) dX.$$

В общем случае оценки этих трех типов (наиболее вероятная, минимаксная и апостериорное среднее) отличаются друг от друга. Для нормально распределенных векторов \bar{X} и Z и линейной зависимости измеряемого вектора Z от искомого вектора \bar{X} оценки \hat{X}_1 , \hat{X}_2 , \hat{X}_3 совпадают.

Конкретизируем задачу определения оценки неизвестного вектора \bar{X} методом максимума апостериорной вероятности. Примем, что известны априорные значения математического ожидания \bar{X} и корреляционной матрицы $K_{\bar{X}}$ случайного вектора \bar{X} . По измерениям N требуется найти наиболее вероятную оценку \hat{X}_1 искомого вектора X , которую условимся называть байесовой оценкой и обозначать \hat{X}_B .

Для получения наиболее вероятной оценки требуется записать в явном виде и решить систему уравнений (3.7). Пусть векторы N и X связаны линейной зависимостью

$$N = AX + \delta N, \quad (3.8)$$

где A — прямоугольная матрица размера $N \times n$; δN — вектор случайных ошибок измерений, распределенный по нормальному закону с математическим ожиданием $M[\delta N] = 0$ и корреляционной матрицей K_N .

Необходимые для решения задачи плотности вероятностей $f(X)$ и $f(N|X)$ определяются выражениями

$$f(X) = (2\pi)^{-n/2} |K_{\bar{X}}|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (X - \bar{X}_0)^T K_{\bar{X}}^{-1} (X - \bar{X}_0) \right],$$

$$f(N|X) = (2\pi)^{-N/2} |K_N|^{-1/2} \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{1}{2} (N - AX)^T K_N^{-1} (N - AX) \right].$$

При этом согласно (3.5) и (3.6) имеем

$$f(X|N) = C \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(X - \bar{X}_0)^T K_{\bar{X}}^{-1} (X - \bar{X}_0) + \right.$$

$$+ (N - AX)^T K_N^{-1} (N - AX) -$$

$$\left. - (N - AX)^T (AK_{\bar{X}}^{-1} A^T + K_N)^{-1} (N - AX) \right\}, \quad (3.9)$$

где C — постоянный коэффициент, не зависящий от X .

$$\begin{aligned} \ln f(\mathbf{X}|\mathbf{H}) = & \ln C - \frac{1}{2} [(\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}_0)^T \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{-1} (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}_0) + \\ & + (\mathbf{H} - \mathbf{A}\mathbf{X})^T \mathbf{K}_H^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{A}\mathbf{X}) - \\ & - (\mathbf{H} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}}_0)^T (\mathbf{A}\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{K}_H)^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}}_0)]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что максимум функции $\ln f(\mathbf{X}|\mathbf{H})$, а следовательно, и функции $f(\mathbf{X}|\mathbf{H})$ достигается при таком значении вектора \mathbf{X} , которому соответствует максимум функции

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{X}) = & (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}_0)^T \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{-1} (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}_0) + (\mathbf{H} - \mathbf{A}\mathbf{X})^T \mathbf{K}_H^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{A}\mathbf{X}) - \\ & - (\mathbf{H} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}}_0)^T (\mathbf{A}\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{K}_H)^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}}_0). \end{aligned}$$

Дифференцируя выражение $\Phi(\mathbf{X})$ по вектору \mathbf{X} и приравняв результат нулю, получаем

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{-1} (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}_0) + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (3.10)$$

откуда

$$(\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{X} = \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{-1} \tilde{\mathbf{X}}_0 + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{H}.$$

При этом получаем следующее выражение для байесовой оценки вектора искомых параметров:

$$\hat{\mathbf{X}}_B = (\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{-1} \tilde{\mathbf{X}}_0 + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{H}). \quad (3.11)$$

Зависимость (3.11) можно переписать в ином виде, более удобном для практического использования и анализа. Обозначим

$$\mathbf{D}_B^{-1} = \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{A}. \quad (3.12)$$

Тогда

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{X}}}^{-1} = \mathbf{D}_B^{-1} - \mathbf{A}^T \mathbf{K}_H^{-1} \mathbf{A}. \quad (3.13)$$

Подставляя (3.13) в (3.11), имеем

$$\hat{X}_B = D_B (D_B^{-1} - A^T K_H^{-1} A) \tilde{X} + D_B A^T K_H^{-1} H$$

и

$$\hat{X}_B = \tilde{X} + D_B A^T K_H^{-1} (H - A \tilde{X}). \quad (3.14)$$

Свойства полученной байесовой оценки рассмотрим на простейшем примере определения скалярной величины x по выборке $\mathbf{H} = \{h_1, h_2, \dots, h_N\}$ равноточных измерений $\sigma^2_{h_i} = \sigma^2$, ошибки которых характеризуются нормальным распределением, несмещены и независимы, а матрица \mathbf{A} в (3.8) представляет собой вектор-столбец, элементы которого есть единицы. Последнее допущение означает, что измеряется сама величина x , при этом $h_i = x + \delta h_i$ ($i=1, 2, \dots, N$). Предполагаем известными параметры априорного распределения \tilde{x} и $\sigma^2_{\tilde{x}}$ случайной величины x . В этом случае имеем

$$f(x) = (2\pi\sigma^2_{\tilde{x}})^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2_{\tilde{x}}}(x - \tilde{x})^2\right],$$

$$f(\mathbf{H}|x) = (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (h_i - x)^2\right].$$

Определяя апостериорную плотность вероятности $f(x|\mathbf{H})$ по формуле (3.5), находим

$$f(x|\mathbf{H}) = \sqrt{\frac{N\sigma^2_{\tilde{x}} + \sigma^2}{2\pi\sigma^2\sigma^2_{\tilde{x}}}} \times \exp\left[-\frac{\left(x - \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i + \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\tilde{x}}} \tilde{x}}{1 + \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\tilde{x}}}}\right)^2}{\frac{2\sigma^2\sigma^2_{\tilde{x}}}{N\sigma^2_{\tilde{x}} + \sigma^2}}\right].$$

Отсюда получаем, что байесова оценка \hat{x}_B искомой величины x определяется зависимостью

$$\hat{x}_B = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i + \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\tilde{x}}} \tilde{x}\right) / \left(1 + \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\tilde{x}}}\right). \quad (3.15)$$

Оценка (3.15) представляет собой среднее взвешенное двух величин: оценки максимального правдоподобия $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i$ и априорного математического ожидания \tilde{x} оцениваемого параметра, причем отношение веса, приписываемого второму слагаемому, к весу первого слагаемого равно $\sigma^2 / N\sigma_x^2$. Отсюда следует, что

$$\hat{x}_B \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i \quad (3.16)$$

при

$$\sigma_x^2 \gg \sigma^2 / N. \quad (3.17)$$

Неравенство (3.17) выполняется, если при фиксированном отношении σ^2 / σ_x^2 неограниченно увеличивается объем выборки измерений N или если при фиксированном N величина $\sigma_x^2 \gg \sigma^2$. Первое условие означает, что при достаточно большом объеме выборки измерений N байесова оценка (3.15) практически не зависит от параметров \tilde{x} и σ_x^2 априорного распределения и совпадает с оценкой максимального правдоподобия. Из второго условия следует, что при $\sigma_x^2 \gg N\sigma^2$ имеет место асимптотическое соотношение $\hat{x}_B \approx \tilde{x}$, т. е. использование измерений практически не меняет значения априорной оценки искомого параметра.

Вычислим условное математическое ожидание оценки \hat{x}_B при фиксированном значении неизвестной x , для чего произведем усреднение только по множеству тех измерений, которые порождены некоторым фиксированным значением x_1 искомого параметра x .

Из (3.15) получаем

$$M[\hat{x}_B | x_1] = \frac{x_1 + \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} \tilde{x}}{1 + \frac{\sigma^2}{N\sigma_x^2}}. \quad (3.18)$$

Следовательно, при фиксированном значении оцениваемого параметра x_1 оценка (3.15) является смещенной. Но $M[\hat{x}_B | x_1] \rightarrow x_1$ при $N \rightarrow \infty$, т. е. оценка (3.15) при $x = x_1$ — асимптотически несмещенная.

Усреднив (3.18) по всем возможным значениям x_1 , получим безусловное математическое ожидание оценки \hat{x}_B

$$M[\hat{x}_B] = M\{M[\hat{x}_B | x_1]\} = \frac{m_x + \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} m_x}{1 + \frac{\sigma^2}{N\sigma_x^2}} = m_x.$$

Найдем дисперсию оценки (3.15) при фиксированном значении x_1 искомого параметра x :

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= M[(\hat{x}_B - M[\hat{x}_B | x_1])^2] = \\ &= \left(1 + \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2}\right)^{-2} M\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i + \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} \tilde{x} - \right. \right. \\ &\left. \left. - x_1 - \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2} \tilde{x}\right)^2\right] = \left(1 + \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2}\right)^{-2} M\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i - x_1\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} M\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i - x_1\right)^2\right] &= M\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i\right)^2\right] - \\ - 2M\left[\frac{x_1}{N} \sum_{i=1}^N h_i\right] + M[x_1^2] &= \sigma^2/N + x_1^2 - 2x_1^2 + x_1^2 = \sigma^2/N, \end{aligned}$$

то

$$\sigma_1^2 = \sigma^2/N \left(1 + \frac{1}{N} \frac{\sigma^2}{\sigma_x^2}\right)^2. \quad (3.19)$$

Из (3.19) следует, что в рассматриваемом случае дисперсия байесовой оценки σ_1^2 меньше дисперсии оценки максимального правдоподобия, равной σ^2/N .

Таким образом установлено, что байесова оценка \hat{x}_B является несмещенной оценкой искомого параметра x

только при условии, что усреднение производится по всем возможным значениям как вектора измерений \mathbf{N} , так и оцениваемого параметра x . Однако если усреднять байесову оценку \hat{x}_B только по множеству тех измерений \mathbf{N} , которые порождены некоторым фиксированным значением x_1 параметра x , то получаемая величина будет в общем случае отличаться от x_1 и байесова оценка окажется смещенной. Но байесова оценка при этом характеризуется дисперсией, меньшей, чем соответствующая дисперсия оценки максимального правдоподобия. Отсюда следует, что оценки метода максимума апостериорной вероятности имеют меньшее рассеивание относительно их условных математических ожиданий, чем соответствующие оценки метода максимального правдоподобия. Но в отличие от последних они имеют смещение даже при отсутствии систематических ошибок измерений. Это смещение обусловлено учетом априорной информации.

Наличие смещений байесовых оценок не должно всегда рассматриваться как снижение их точности по сравнению с оценками максимального правдоподобия, потому что величина смещения уменьшается с ростом количества используемых измерений N и, кроме того, уменьшение дисперсий оценок дает большой эффект в точности, чем потери, вызванные смещением. Более того, при наличии систематических ошибок в измерениях смещение за счет априорной информации может иногда оказаться полезным. При использовании же недостаточно достоверной априорной информации и при малых систематических ошибках измерений смещенность байесовых оценок может существенно исказить результаты статистической обработки измерений.

Запишем выражения для математического ожидания $M[\hat{X}_B]$ и корреляционной матрицы вектора байесовой оценки $\mathbf{K}_{\hat{X}_B}$, определяемого зависимостью (3.11), для

фиксированного значения X_1 случайного вектора \mathbf{X} . Этот случай представляет значительный интерес в практике обработки радиотехнических траекторных измерений.

Применяя операцию математического ожидания к зависимости (3.11) и учитывая обозначение (3.12), получаем

$$\begin{aligned}
 M[\hat{X}_B | X_1] &= M[D_B (K_{\tilde{X}}^{-1} \tilde{X} + A^T K_H^{-1} H)] = \\
 &= D_B K_{\tilde{X}}^{-1} \tilde{X} + D_B A^T K_H^{-1} M[H] = \\
 &= D_B K_{\tilde{X}}^{-1} \tilde{X} + D_B A^T K_H^{-1} A X_1 + D_B K_{\tilde{X}}^{-1} X_1 - \\
 &- D_B K_{\tilde{X}}^{-1} X_1 = D_B (A^T K_H^{-1} A + K_{\tilde{X}}^{-1}) X_1 + D_B K_{\tilde{X}}^{-1} (\tilde{X} - X_1)
 \end{aligned}$$

и

$$M[\hat{X}_B | X_1] = X_1 + (A^T K_H^{-1} A + K_{\tilde{X}}^{-1})^{-1} K_{\tilde{X}}^{-1} (\tilde{X} - X_1). \quad (3.20)$$

Корреляционную матрицу $K_{\hat{X}_B}$ вектора байесовых оценок \hat{X}_B найдем из зависимости

$$K_{\hat{X}_B} = M\{[\hat{X}_B - M(\hat{X}_B | X_1)][\hat{X}_B - M(\hat{X}_B | X_1)]^T\}.$$

Так как

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_B - M(\hat{X}_B | X_1) &= D_B (K_{\tilde{X}}^{-1} \tilde{X} + A^T K_H^{-1} H) - X_1 - \\
 &- D_B K_{\tilde{X}}^{-1} (\tilde{X} - X_1) = D_B A^T K_H^{-1} H - D_B D_B^{-1} X_1 + \\
 &+ D_B K_{\tilde{X}}^{-1} X_1 = D_B [A^T K_H^{-1} A X_1 + A^T K_H^{-1} \delta H - K_{\tilde{X}}^{-1} X_1 - \\
 &- A^T K_H^{-1} A X_1 + K_{\tilde{X}}^{-1} X_1] = D_B A^T K_H^{-1} \delta H,
 \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
 K_{\hat{X}_B} &= M[(D_B A^T K_H^{-1} \delta H)(D_B A^T K_H^{-1} \delta H)^T] = \\
 &= D_B A^T K_H^{-1} M[\delta H \delta H^T] K_H^{-1} A D_B = \\
 &= D_B A^T K_H^{-1} K_H K_H^{-1} A D_B = D_B A^T K_H^{-1} A D_B
 \end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned}
 K_{\hat{X}_B} &= (K_{\tilde{X}}^{-1} + A^T K_H^{-1} A)^{-1} A^T K_H^{-1} A \times \\
 &\times (K_{\tilde{X}}^{-1} + A^T K_H^{-1} A)^{-1}. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

При записи (3.21) учтено, что матрицы Γ_B и K_H^{-1} являются симметрическими.

В дополнение к сказанному выше полезно отметить еще одно свойство байесовых оценок. Из уравнений (3.11) следует, что учет априорной информации о векторе оцениваемых параметров позволяет получить оценки и для параметров, имеющих линейно зависимые функции влияния.

Это объясняется тем, что если матрица $A^*K_H^{-1}A$ особенная, то прибавление к ней матрицы $K_{\tilde{X}}^{-1}$ может при-

вести к тому, что суммарная матрица станет неособенной и решение задачи получения оценок искомого вектора X окажется возможным. В этом преимущество рассматриваемого метода по сравнению с методом максимального правдоподобия.

Заметим, что зависимость (3.11) для получения байесовой оценки искомого вектора X аналогична рекуррентному соотношению (2.68), определяющему оценку максимального правдоподобия при нормальном законе распределения ошибок измерений.

Из сравнения указанных выражений следует, что если в формулу (3.11) для байесовой оценки вместо априорно известных значений математического ожидания \tilde{X} и корреляционной матрицы $K_{\tilde{X}}$ подставить соответственно априорную оценку $\hat{X}_{(N)}$, полученную обработкой по методу

максимального правдоподобия N предшествовавших измерений и корреляционную матрицу этой оценки $K_{\hat{X}_{(N)}}$, то

формула (3.11) будет определять уточненную по вновь поступившей выборке измерений оценку максимального правдоподобия искомого вектора X . Корреляционная матрица этой оценки определяется выражением (2.67). Отмеченное обстоятельство иллюстрирует приведенный выше вывод о том, что если все значения случайного вектора X равновероятны, то уравнения байесова оценивания совпадают с уравнениями правдоподобия.

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ

4.1. Оценивание состояния линейных динамических систем

Пусть изменение во времени состояния некоторой динамической системы описывается совокупностью линейных дифференциальных уравнений*)

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + W(t), \quad (4.1)$$

где $X(t)$ — n -мерный вектор состояния динамической системы (вектор фазовых координат); координаты x_r ($r = 1, 2, \dots, n$) вектора X называются переменными состояния; $F(t)$ — квадратная $n \times n$ матрица; $W(t)$ — вектор случайных возмущений размера n . Элементы матрицы $F(t)$ — непрерывные функции времени t .

Динамическая система, описываемая уравнениями (4.1), называется стохастической. Если $W(t) = 0$, то динамическая система называется детерминированной.

Описание (4.1) является неполным без определения выхода $Z(t)$ системы. $Z(t)$ может быть m -мерным вектором, координаты которого суть линейные комбинации переменных состояния

$$Z(t) = A(t)X(t), \quad (4.2)$$

где $A(t)$ — прямоугольная $m \times n$ матрица функций влияния, непрерывных во времени t .

Уравнения (4.1) можно рассматривать как систему уравнений в вариациях около расчетной (номинальной) траектории исходной нелинейной системы. Матрица $F(t)$ представляет динамику системы, $A(t)$ — ограничение на возможность наблюдения за состоянием системы.

*) Более точно уравнения (4.1) записываются в виде стохастических уравнений с вынуждающей функцией, представляющей броуновское движение. Следует иметь в виду, что $W(t)$ является формальной производной от броуновского движения. Решения уравнений (4.1) выражаются через стохастические интегралы (см., например, [21]).

Общее решение системы уравнений (4.1) можно записать в форме

$$X(t) = \Phi(t, t_0) X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) W(\tau) d\tau, \quad (4.3)$$

где $\Phi(t, t_0)$ называется переходной матрицей системы (4.1).

Переходная матрица является невырожденной и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = F(t) \Phi(t, t_0) \quad (4.4)$$

и может быть сделана единственной, если наложить дополнительное условие

$$\Phi(t_0, t_0) = E \text{ для всех } t_0, \quad (4.5)$$

где E — единичная матрица.

Матрица $\Phi(t, t_0)$ обладает следующими свойствами, которые вытекают из существования и единственности решения системы (4.1):

$$\Phi^{-1}(t_1, t_0) = \Phi(t_0, t_1) \text{ для всех } t_0, t_1; \quad (4.6)$$

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) \text{ для всех } t_0, t_1, t_2. \quad (4.7)$$

Примем, что в некоторый произвольный момент времени t' выполнены измерения

$$H(t') = A(t') X(t') + \delta H(t'), \quad (4.8)$$

где $H(t')$ — вектор измерений размера m ; $\delta H(t')$ — вектор случайных ошибок измерений.

Для векторов гауссовых шумов $W(t)$ и $\delta H(t)$ справедливы соотношения

$$M[W(t)] = 0,$$

$$K_W(t, \tau) = M[W(t)W^T(\tau)] = K_W(t) \delta(t - \tau);$$

$$M[\delta H(t)] = 0, \quad (4.9)$$

$$K_H(t, \tau) = M[\delta H(t)\delta H^T(\tau)] = K_H(t) \delta(t - \tau),$$

где $\delta(t - \tau)$ — дельта-функция.

Матрицы $K_W(t)$, $K_H(t)$ — симметрические, непрерывно дифференцируемые по t . Кроме того $K_W(t)$ — неотрицательно определенная матрица для всех t ; $K_H(t)$ — по-

ложительно определенная матрица для всех t . Последнее условие обозначает, что ни одна составляющая сигнала $Z(t)$ не может быть точно измерена.

Примем, что известны априорные значения математического ожидания \hat{X}_0 и корреляционной матрицы $K_{\hat{X}_0}$ вектора состояния системы, соответствующие моменту времени t_0 , а также корреляционные функции вектора возмущений $K_W(t)$ и вектора ошибок измерений $K_H(t)$. Задача заключается в том, чтобы найти наилучшую в смысле максимального правдоподобия оценку \hat{X} вектора состояния динамической системы X и корреляционную матрицу этой оценки $K_{\hat{X}}$ для момента времени t' по измерениям, выполненным в момент времени t' .

Сначала получим уравнения для дискретной оценки вектора состояния X . Рассмотрим разбиение времени на приращения Δt ,

$$\text{где} \quad \Delta t = t_{k+1} - t_k, \quad k=0, 1, \dots, N.$$

Решения уравнения (4.1) могут быть записаны в рекуррентной форме

$$X(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k) X(t_k) + V(t_k), \quad (4.10)$$

где $V(t_k)$ — гауссова векторная случайная функция, характеризующаяся математическим ожиданием $M[V(t_k)] = 0$ и корреляционной матрицей

$$K_{V, kj} = M[V(t_k) V^T(t_j)] = 0 \quad \text{при} \quad k \neq j, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} K_{V, k} &= K[V(t_k)] = M[V(t_k) V^T(t_k)] = \\ &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) K_W(\tau) \Phi^T(t_k, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Полагая, что измерения производятся в дискретные моменты времени t_k , можем записать

$$H(t_k) = A(t_k) X(t_k) + \delta H(t_k), \quad k=0, 1, \dots, N. \quad (4.12)$$

Для сокращения последующих записей введем обозначения

$$X_k = X(t_k); \Phi_{k+1,k} = \Phi(t_{k+1}, t_k); V_k = V(t_k);$$

$$H_k = H(t_k); A_k = A(t_k); \delta H_k = \delta H(t_k).$$

Тогда уравнения (4.10) и (4.12) можно переписать в виде

$$X_{k+1} = \Phi_{k+1,k} X_k + V_k, \quad (4.13)$$

$$H_k = A_k X_k + \delta H_k. \quad (4.14)$$

Обозначим через $\hat{X}_{k+1/k}$ и $\hat{X}_{k+1/k+1}$ оценки вектора состояния системы X в момент времени t_{k+1} , полученные соответственно на основе статистической обработки измерений, выполненных в моменты времени до t_k и t_{k+1} включительно. Через $K_{\hat{X}, k+1/k}$ и $K_{\hat{X}, k+1/k+1}$ обозначим

корреляционные матрицы соответствующих оценок $\hat{X}_{k+1/k}$ и $\hat{X}_{k+1/k+1}$.

Так как в промежутках времени между t_k и t_{k+1} измерения не выполняются, то, исходя из линейных соотношений (4.13), можно записать

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1/k} &= \Phi_{k+1,k} \hat{X}_{k/k}, \\ K_{\hat{X}, k+1/k} &= \Phi_{k+1,k} K_{\hat{X}, k/k} \Phi_{k+1,k}^T + K_{V,k}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Заметим, что вектор $\hat{X}_{k+1/k}$ можно рассматривать как результат измерения фазового вектора $X(t_{k+1})$ с корреляционной матрицей $K_{\hat{X}, k+1/k}$, а H_{k+1} есть результат измерения вектора $Z_{k+1} = A_{k+1} X_{k+1}$ с корреляционной матрицей $K_{H, k+1}$. Согласно методу максимального правдоподобия составим функцию правдоподобия для этих двух измерений:

$$\begin{aligned} L = C \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\hat{X}_{k+1/k} - X_{k+1})^T K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} \times \right. \\ \times (\hat{X}_{k+1/k} - X_{k+1}) + (H_{k+1} - A_{k+1} X_{k+1})^T K_{H, k+1}^{-1} \times \\ \left. \times (H_{k+1} - A_{k+1} X_{k+1}) \right\}, \end{aligned}$$

где постоянная \hat{C} не зависит от \hat{X}_{k+1} . Искомая оценка $\hat{X}_{k+1/k+1}$ определяется из условия максимума функции L . Приравнявая нулю производную функцию L по \hat{X}_{k+1} , получаем

$$\begin{aligned} & K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} (\hat{X}_{k+1/k} - \hat{X}_{k+1/k+1}) + A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} \times \\ & \times (H_{k+1} - A_{k+1} \hat{X}_{k+1/k+1}) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует соотношение

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = B_{k+1} (K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} \hat{X}_{k+1/k} + A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} H_{k+1}), \quad (4.16)$$

где

$$B_{k+1} = (K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} + A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} A_{k+1})^{-1}.$$

Векторы $\hat{X}_{k+1/k+1}$, $\hat{X}_{k+1/k}$, H_{k+1} можно рассматривать как случайные величины, характеризуемые нормальным законом распределения с корреляционными матрицами $K_{\hat{X}, k+1/k+1}$, $K_{\hat{X}, k+1/k}$, $K_{H, k+1}$ соответственно, причем ве-

личины $\hat{X}_{k+1/k}$ и H_{k+1} независимы. Тогда из линейного соотношения (4.16) на основании теоремы 1.1 можем записать

$$\begin{aligned} & K_{\hat{X}, k+1/k+1} = \\ & = (B_{k+1} K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1}) K_{\hat{X}, k+1/k} (B_{k+1} K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1})^T = \\ & + (B_{k+1} A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1}) K_{H, k+1} (B_{k+1} A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1})^T = \\ & = B_{k+1} K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} B_{k+1}^T + B_{k+1} A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} A_{k+1} B_{k+1}^T = \\ & = B_{k+1} (K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} + A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} A_{k+1}) B_{k+1}^T = \\ & = B_{k+1} B_{k+1}^{-1} B_{k+1} = B_{k+1} = (K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} + A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} A_{k+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

В преобразованиях (4.17) использована формула (4.16) для V_{k+1} , а также свойство симметрии матриц $K_{\hat{X}, k+1/k}$, $K_{H, k+1}$, V_{k+1} и обратных к ним. Путем элементарных преобразований из (4.16) и (4.17) получим

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1/k+1} &= \hat{X}_{k+1/k} + V_{k+1} A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} H_{k+1} - \\ &- \hat{X}_{k+1/k} + V_{k+1} K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} \hat{X}_{k+1/k} = \hat{X}_{k+1/k} + \\ &+ V_{k+1} A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} H_{k+1} - V_{k+1} (V_{k+1}^{-1} - \\ &- K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1}) \hat{X}_{k+1/k} = \hat{X}_{k+1/k} + V_{k+1} A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} H_{k+1} - \\ &- V_{k+1} A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} A_{k+1} \hat{X}_{k+1/k} = \hat{X}_{k+1/k} + \\ &+ V_{k+1} A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} (H_{k+1} - A_{k+1} \hat{X}_{k+1/k}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Таким образом, алгоритм определения оценки максимального правдоподобия вектора состояния динамической системы на момент времени t_{k+1} по заданным значениям оценки $\hat{X}_{k/k}$ на момент t_k ($k=0, 1, \dots, N$), корреляционной матрицы этой оценки $K_{\hat{X}, k/k}$ и вектора измерений H_{k+1} , полученным в момент времени t_{k+1} имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1/k} &= \Phi_{k+1, k} \hat{X}_{k/k}; \quad K_{\hat{X}, k+1/k} = \\ &= \Phi_{k+1, k} K_{\hat{X}, k/k} \Phi_{k+1, k}^T + K_{V, k}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1/k+1} &= \hat{X}_{k+1/k} + K_{\hat{X}, k+1/k+1} A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} (H_{k+1} - \\ &- A_{k+1} \hat{X}_{k+1/k}), \\ K_{\hat{X}, k+1/k+1} &= (K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} + A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} A_{k+1})^{-1}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Применяя к последнему выражению лемму об обращении матриц, можно записать

$$\begin{aligned} K_{\hat{X}, k+1/k+1} &= K_{\hat{X}, k+1/k} - K_{\hat{X}, k+1/k} A_{k+1}^T \times \\ &\times (A_{k+1} K_{\hat{X}, k+1/k} A_{k+1}^T + K_{H, k+1})^{-1} A_{k+1} K_{\hat{X}, k+1/k}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Если в некоторые моменты времени t_{k+1} измерения не получены, то оптимальная оценка вектора состояния динамической системы и корреляционная матрица этой оценки определяются решениями уравнений (4.19), т. е. прогнозируемыми значениями вектора состояния $\hat{X}_{k+1/k}$ и корреляционной матрицы $K_{\hat{X}, k+1/k}$.

Следовательно, сравнительно результаты, полученные при решении уравнений (4.19) и (4.20), можно оценить вклад вектора измерений H_{k+1} в повышение точности определения вектора состояния исследуемой динамической системы.

В тех случаях, когда измерения производятся непрерывно или дискретно, но достаточно часто, целесообразно использовать другую форму записи рекуррентных соотношений для оценки вектора состояния динамической системы $\hat{X}(t)$ и корреляционной матрицы этой оценки $K_{\hat{X}}(t)$, представленных в виде дифференциальных уравнений [109]

$$d\hat{X}(t)/dt = F(t)\hat{X}(t) + K_{\hat{X}}(t)A^T(t)K_H^{-1}(t)[H(t) - A(t)\hat{X}(t)], \quad (4.22)$$

$$dK_{\hat{X}}(t)/dt = F(t)K_{\hat{X}}(t) + K_{\hat{X}}(t)F^T(t) - K_{\hat{X}}(t)A^T(t)K_H^{-1}(t)A(t)K_{\hat{X}}(t) + K_w(t). \quad (4.23)$$

Система уравнений (4.23) называется корреляционной и состоит из $n(n+1)/2$ (число различных элементов симметрической матрицы $K_{\hat{X}}(t)$) нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Зависимости (4.22) — (4.23) являются совокупностью дифференциальных уравнений фильтра Калмана, а формулы (4.19) — (4.21) — дискретным эквивалентом этого фильтра. В последние годы этот метод оценивания состояния динамических систем получил широкое распространение в практике статистической обработки радиотехнических траекторных измерений. Объясняется это тем, что алгоритм метода Калмана имеет удобную для реализации на ЭВМ структуру — рекуррентную форму и при принятых выше допущениях об ошибках измере-

ний и линейной зависимости измеряемых функций от искоемых параметров теоретически обеспечивает определение оценок с минимальными дисперсиями среди всех линейных несмещенных оценок.

Зависимости (4.19) — (4.21) используются для решения задачи фильтрации, когда оценивается состояние динамической системы в момент получения измерений. В случае, если состояние системы оценивается в момент времени, предшествующий моменту измерения, то такая задача называется сглаживанием.

Приведем без вывода систему рекуррентных соотношений для решения задачи оптимального сглаживания [22]. Предположим, что решение задачи оптимальной фильтрации $\hat{X}_{N/N}$ и $K_{\hat{X}, N/N}$ известно, и будем идти в обратном направлении, чтобы получить $\hat{X}_{k/N}$ для всех $k < N$:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k/N} &= \hat{X}_{k/k} + K_{\hat{X}, k/k} \Phi_{k+1, k}^T K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} [\hat{X}_{k+1/N} - \\ &\quad - \Phi_{k+1, k} \hat{X}_{k/k}], \\ \hat{X}_{k/k} &= \Phi_{k+1, k}^{-1} \hat{X}_{k+1/k+1} - \Phi_{k+1, k}^{-1} K_{\hat{X}, k+1/k} \times \\ &\quad \times A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} [H_{k+1} - A_{k+1}^T \hat{X}_{k+1/k+1}], \\ K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} &= K_{\hat{X}, k+1/k+1}^{-1} - A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} A_{k+1}, \\ K_{\hat{X}, k/k} &= \Phi_{k+1, k}^{-1} [K_{\hat{X}, k+1/k} - K_{W, k}] (\Phi_{k+1, k}^T)^{-1}. \quad (4.24) \end{aligned}$$

Корреляционная матрица оценки сглаживания определяется выражением

$$\begin{aligned} K_{\hat{X}, k/N} &= K_{\hat{X}, k/k} - K_{\hat{X}, k/k} \Phi_{k+1, k}^T K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} [K_{\hat{X}, k+1/k} - \\ &\quad - K_{\hat{X}, k+1/N}] K_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} \Phi_{k+1, k} K_{\hat{X}, k/k}. \quad (4.25) \end{aligned}$$

Решение задачи сглаживания записано в виде обратного разностного уравнения, которое начинается с оценки задачи фильтрации в последней точке (является

одновременно сглаженной оценкой в этой точке). Затем вычисление производится в обратном порядке, точка за точкой, в соответствии с уравнениями (4.24), (4.25), в результате чего определяются сглаженные оценки вектора состояния динамической системы.

Таким образом, для повышения точности получаемых оценок задача решается в два этапа: 1) используется решение задачи фильтрации (прямое разностное уравнение) для определения оценки фильтрации в каждой точке, начиная от первой и кончая последней N -й, 2) используется решение задачи сглаживания (обратное разностное уравнение) для определения сглаженной оценки в каждой точке, начиная от конечной и двигаясь в обратном направлении к первой.

Для иллюстрации роли сглаживания в повышении точности результатов оценивания состояния динамической системы рассмотрим числовой пример [23]. Пусть динамическая система задана уравнениями

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,606 \end{bmatrix} X_k^* + V_k,$$

$$[h_k = \| 1 \ 0 \ 0 \ 0 \| X_k + \delta h_k,$$

где $X_k = \|x_1 x_2 x_3 x_4\|^T$ — вектор переменных состояния системы; h_k — измерения переменной состояния x_1 ; δh_k — ошибки измерений.

Возмущения V_k и δh_k представляют собой независимые случайные векторы, характеризуемые нормальным распределением с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2 = \sigma_{x_3}^2 = 0$; $\sigma_{x_4}^2 = 0,63 \cdot 10^{-2}$; $\sigma_{\delta h}^2 = 1$. Начальное условие \tilde{X}_0 есть случайный вектор, характеризуемый нормальным распределением с математическим ожиданием X_0 и корреляционной матрицей $K_{\tilde{X}, 0}$.

Данную динамическую систему можно рассматривать как линейаризованный вариант описания движения искусственного спутника Земли по круговой орбите. Движение спутника подвержено влиянию сопротивления атмосферы с постоянной и случайной составляющими (см. гл. 9). Переменные состояния x_1 , x_2 , x_3 представляют собой угловую координату, скорость и постоянное ускорение соответственно. Величина x_4 есть случайная составляющая ускорения, порождаемая гауссовым марковским процессом первого порядка.

Рассмотрим два варианта:

$$1) \tilde{K}_{x,0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 \end{vmatrix}; \quad 2) \tilde{K}_{x,0} = \begin{vmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 \end{vmatrix}.$$

В каждом варианте производится по 25 измерений, начиная с h_1 . Дисперсии оценок переменных состояния системы для варианта 1 приведены в табл. 4.1 как для фильтрованной, так и для сгла-

Таблица 4.1

Точка измерения k	Фильтрованная оценка				Сглаженная оценка			
	$\hat{\sigma}_{x,1}^2$	$\hat{\sigma}_{x,2}^2$	$\hat{\sigma}_{x,3}^2$	$\hat{\sigma}_{x,4}^2$	$\hat{\sigma}_{x,1}^2$	$\hat{\sigma}_{x,2}^2$	$\hat{\sigma}_{x,3}^2$	$\hat{\sigma}_{x,4}^2$
0	1,00	1,00	1,00	0,0100	0,45	0,082	0,0020	0,0094
1	0,69	1,31	0,92	0,0100	0,26	0,053	0,0020	0,0089
2	0,80	1,31	0,54	0,0100				
3	0,82	0,96	0,26	0,0100				
4	0,79	0,68	0,13	0,0100				
5	0,75	0,49	0,07	0,0100	0,14	0,015	0,0020	0,0078
10	0,58	0,15	0,008	0,00995	0,135	0,014	0,0020	0,0078
15	0,50	0,10	0,004	0,0099	0,135	0,014	0,0020	0,0078
20	0,48	0,093	0,003	0,0099	0,15	0,015	0,0020	0,0078
21					0,15	0,017	0,0020	0,0080
22					0,15	0,023	0,0020	0,0085
23					0,18	0,036	0,0020	0,0091
24					0,26	0,058	0,0020	0,0096
25	0,47	0,089	0,002	0,0099	0,47	0,089	0,0020	0,0099

женной оценки. Из этой таблицы видно, как сглаживание уменьшает дисперсии оценок переменных состояния динамической системы. На рис. 4.1 показана дисперсия оценок x_1 для вариантов 1 и 2. Можно видеть, что влияние ошибок задания начальных условий (априорной информации о состоянии системы) быстро пропадает.

В начале параграфа было отмечено, что многомерный фильтр Калмана теоретически обеспечивает получение оценок вектора состояния линейной динамической системы с минимальными дисперсиями. Однако при практической реализации этого фильтра на ЭВМ неизбежны ошибки счета, которые приводят к отклонению машин-



Рис. 4.1.

ного решения от математического. Это объясняется следующим. Алгоритмы многомерных фильтров обладают двумя особенностями: 1) элементы матрицы

$$G_{k+1} = K_{\hat{x}, k+1/k+1} A_{k+1}^T K_{H, k+1}^{-1} \quad (\text{см. 4.20}),$$

условно называемой коэффициентом усиления фильтра, с течением времени уменьшаются и могут стать соизмеримыми с ошибками счета; 2) алгоритмы предусматривают многократное обращение матриц. Отмеченные особенности алгоритма фильтрации могут привести не только к значительному отклонению машинного решения от математического, но и к потере устойчивости машинного решения: рекуррентные уравнения, описывающие фильтры с растущей памятью, устойчивы при вполне определенных ограничениях на матричные коэффициенты усиления, которые могут быть нарушены при вырождении этих матриц. Этот момент наступает тем быстрее, чем меньше разрядность используемой ЭВМ, чем больше частота счета, чем более сложный алгоритм и чем выше точность измерений. Данные вопросы детально исследованы в работах [24, 25], где предложен ряд конкретных рекомендаций по разработке устойчивых алгоритмов для неустойчивых случаев, а также определены условия, при которых многомерная фильтрация нецелесообразна.

4.2. Оценивание состояния нелинейных динамических систем

Примем, что изменение во времени n -мерного вектора состояния динамической системы $\mathbf{X}(t)$ и вектора измерений выходного сигнала $\mathbf{H}(t)$ описываются совокупностью нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}_k, \xi_k, k), \\ \mathbf{H}_k &= \mathbf{S}(\mathbf{X}_k, \eta_k, k), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k)$; $\mathbf{H}_k = \mathbf{H}(t_k)$; ξ_k и η_k — независимые гауссовские векторные белые шумы.

Самый простой подход к нелинейной фильтрации состоит в том, чтобы линеаризовать уравнения (4.26) и применить соотношения фильтра Калмана к полученным зависимостям.

Линеаризуем уравнения (4.26), разложив их в ряд Тейлора относительно некоторой номинальной последовательности векторов состояния $\tilde{\mathbf{X}}_k$ и $\xi_k = 0$, $\eta_k = 0$ и оставив в разложении лишь члены первого порядка. При этом получим

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1} &= \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{X}}_k, 0, k) + \mathbf{\Phi}_k (\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k) + \mathbf{V}_k, \\ \mathbf{H}_k &= \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{X}}_k, 0, k) + \mathbf{A}_k (\mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k) + \mathbf{\Gamma}_k, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где $\tilde{\mathbf{X}}_k$ — номинальная последовательность \mathbf{X}_k ; $\mathbf{\Phi}_k$ — матрица частных производных от функции \mathbf{F} по компонентам вектора \mathbf{X} , вычисленных для момента времени t_k при $\mathbf{X}_k = \tilde{\mathbf{X}}_k$, $\xi_k = 0$. Элемент этой матрицы $\varphi_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столба, равен частной производной i -й компоненты f_i функции \mathbf{F} по j -й компоненте вектора \mathbf{X} . Аналогичным образом определяются и другие коэффициенты уравнений (4.27):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k &= \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{X}} \right\|_{(\tilde{\mathbf{X}}_k, 0, k)}, \\ v_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\tilde{\mathbf{X}}_k, 0, k)}{\partial \xi_j} \xi_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

$$d_v = \sum_{r=1}^m \frac{\partial s_v(\tilde{X}_k, \mathbf{0}, k)}{\partial \eta_r} \eta_r, \quad v=1, 2, \dots, m,$$

где v_i — i -я компонента вектора \mathbf{V}_k ; d_v — v -я компонента вектора Γ_k . Предположим, что $M[\mathbf{V}_k] = \mathbf{0}$; $M[\Gamma_k] = \mathbf{0}$; $M[\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T] = \mathbf{K}_{V, k} \delta_{ki}$; $M[\Gamma_k \Gamma_k^T] = \mathbf{K}_{D, k} \delta_{ki}$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \mathbf{X}_k - \tilde{\mathbf{X}}_k; \quad \gamma_k = \mathbf{H}_k - \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{X}}_k, \mathbf{0}, k); \\ \beta_{k+1} &= \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{X}}_k, \mathbf{0}, k). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Тогда зависимости

$$\beta_{k+1} = \Phi_k \alpha_k + \mathbf{V}_k; \quad \gamma_k = \mathbf{A}_k \alpha_k + \mathbf{D}_k \quad (4.29)$$

являются результатом линеаризации уравнений (4.26).

Фильтр Калмана для системы (4.29) описывается уравнением

$$\hat{\beta}_{k+1/k+1} = \hat{\beta}_{k+1/k} + \mathbf{G}_{k+1}(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{A}_{k+1} \hat{\beta}_{k+1/k}), \quad (4.30)$$

где $\hat{\beta}_{k+1/k} = \Phi_k \hat{\alpha}_{k/k}$, и, следовательно, в соответствии с обозначениями (4.28) оценка вектора состояния динамической системы удовлетворяет уравнению

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{X}}_k, \mathbf{0}, k) + \hat{\beta}_{k+1/k+1}. \quad (4.31)$$

Если номинальную последовательность $\tilde{\mathbf{X}}_k$ выбрать так, чтобы она удовлетворяла исходным нелинейным уравнениям (4.26) в отсутствие возмущений, то α_k совпадает с β_k . Если же функции \mathbf{F} и \mathbf{S} линеаризованы в окрестности $\hat{\mathbf{X}}_{k/k}$, а не $\tilde{\mathbf{X}}_k$, то $\hat{\alpha}_{k/k} = \mathbf{0}$, поскольку при этом $\alpha_k = \mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k/k}$.

Тогда

$$\hat{\beta}_{k+1/k} = \Phi_k \hat{\alpha}_{k/k} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \hat{\beta}_{k+1/k+1} = \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{y}_{k+1}. \quad (4.32)$$

Определим

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}}_{k/k}, \mathbf{0}, k). \quad (4.33)$$

При этом

$$\mathbf{K}_{\hat{X}, k+1/k} = \Phi_k \mathbf{K}_{\hat{X}, k/k} \Phi_k^T + \mathbf{K}_{V, k} \quad (4.34)$$

В этом случае уравнение

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1} = \hat{\mathbf{X}}_{k+1/k} + \mathbf{G}_{k+1} [\mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{S}(\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k}, \mathbf{0}, k)] \quad (4.35)$$

описывает фильтр Калмана для линеаризованной системы (4.27), причем матричный коэффициент усиления \mathbf{G}_{k+1} этого фильтра вычисляется по рекуррентной формуле

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{K}_{\hat{X}, k+1/k} \mathbf{A}_{k+1}^T (\mathbf{A}_{k+1} \mathbf{K}_{\hat{X}, k+1/k} \mathbf{A}_{k+1}^T + \mathbf{K}_{D, k+1})^{-1}$$

или

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{K}_{\hat{X}, k+1/k+1} \mathbf{A}_{k+1}^T \mathbf{K}_{D, k+1}^{-1},$$

где $\mathbf{K}_{\hat{X}, k+1/k+1}$ — корреляционная матрица оценки $\hat{\mathbf{X}}_{k+1/k+1}$, определяемая зависимостью

$$\mathbf{K}_{\hat{X}, k+1/k+1} = [\mathbf{K}_{\hat{X}, k+1/k}^{-1} + \mathbf{A}_{k+1}^T \mathbf{K}_{D, k+1}^{-1} \mathbf{A}_{k+1}]^{-1} \quad (4.36)$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\hat{X}, k+1/k+1} &= \mathbf{K}_{\hat{X}, k+1/k} - \mathbf{K}_{\hat{X}, k+1/k} \mathbf{A}_{k+1}^T \times \\ &\times (\mathbf{A}_{k+1} \mathbf{K}_{\hat{X}, k+1/k} \mathbf{A}_{k+1}^T + \mathbf{K}_{D, k+1})^{-1} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{K}_{\hat{X}, k+1/k}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

При рассмотрении фильтра Калмана для оценивания линейных динамических систем уже отмечались особенности реализации алгоритма этого фильтра на ЭВМ. Применение фильтра Калмана для линеаризованной системы уравнений (4.27) приводит к тому, что нелинейность динамической системы снижает точность вычисления корреляционной матрицы оценок вектора состояния, используемой для статистической обработки последующих измерений. Так, при практическом применении зависимостей (4.33) — (4.36) установлено, что ряд последовательных вычислений, производимых согласно рекуррентной формуле (4.33), приводит матрицу $\mathbf{K}_{\hat{X}}$ с большими значениями элементов к матрице, численные значения

элементов которой становятся очень малыми. Естественно, это сопровождается соответствующей потерей числовой значимости, что может привести к утрате корреляционной матрицей $K_{\hat{x}}$ свойства положительной определенности, а следовательно, в значительной степени нарушает оптимальность оценивания состояния динамической системы.

Существует несколько специально разработанных методов вычисления корреляционной матрицы $K_{\hat{x}}$, использование которых позволяет на каждом шаге рекуррентного процесса (4.33) — (4.36) сохранять положительную определенность матрицы $K_{\hat{x}}$.

Наиболее удобным представляется метод, предложенный в [26, 27]. Этот метод основан на вычислении корреляционной матрицы прогнозированной оценки вектора состояния динамической системы с помощью дифференциальных уравнений для меняющихся во времени собственных значений и собственных векторов корреляционной матрицы.

Приведем алгоритм метода. Из алгебры матриц известно, что всякую вещественную симметрическую матрицу R можно привести к диагональной форме, т. е. представить в виде

$$R = D_R \Lambda_R D_R^T, \quad (4.38)$$

где Λ_R — диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения матрицы R , а столбцы матрицы D_R — ортогональные собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям.

Корреляционная матрица $K_{\hat{x}}$ является вещественной и симметрической. Поэтому ее можно записать в форме (4.38):

$$K_{\hat{x}} = \Gamma \Lambda \Gamma^T, \quad (4.39)$$

Собственные значения λ_j и собственные векторы D_j ($j=1, 2, \dots, 6$) находятся интегрированием уравнений

$$\dot{\lambda}_j = D_j^T \dot{K}_{\hat{x}} D_j, \quad j=1, 2, \dots, 6, \quad (4.40)$$

$$\dot{\Gamma} = D \Gamma, \quad (4.41)$$

где

$$\Gamma_{ij} = \begin{cases} \mathbf{D}^T_i \dot{\mathbf{K}}_{\hat{x}} \mathbf{E}_j / (\lambda_j - \lambda_i) & \text{при } j > i \text{ и } \lambda_j \neq \lambda_i, \\ 0 & \text{при } j > i \text{ и } \lambda_j = \lambda_i, \\ 0 & \text{при } j = 1, \end{cases} \quad (4.42)$$

$$\Gamma_{ji} = -\Gamma_{ij}; \quad i, j = 1, 2, \dots, 6,$$

т. е. Γ — кососимметрическая матрица.

Дифференциальные уравнения (4.23), определяющие изменение во времени корреляционной матрицы оценок вектора состояния динамической системы, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_{\hat{x}} = & \mathbf{F}(t) \mathbf{K}_{\hat{x}}(t) + \mathbf{K}_{\hat{x}} \mathbf{F}^T(t) - \\ & - \mathbf{K}_{\hat{x}}(t) \mathbf{A}^T(t) \mathbf{K}_H^{-1}(t) \mathbf{A}(t) \mathbf{K}_{\hat{x}}(t) + \mathbf{K}_w(t). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Полезно отметить, что при применении рассмотренной методики дифференциальные уравнения (4.43) не интегрируются (что было бы связано с очень большими затратами машинного времени), а используются лишь при расчете правых частей уравнений (4.40), (4.41).

Получив решения уравнений (4.40), (4.41) для заданных моментов времени, т. е. матрицу собственных значений Λ и матрицу собственных векторов \mathbf{D} , из формулы (4.39) можно найти корреляционную матрицу $\mathbf{K}_{\hat{x}, k+1/k}$ прогнозированных оценок вектора состояния, а следовательно, и матрицу $\mathbf{K}_{\hat{x}, k+1/k+1}$.

Применение рассчитанной изложенным способом корреляционной матрицы $\mathbf{K}_{\hat{x}, k+1/k}$ вместо матрицы, определяемой зависимостью (4.33), позволяет существенно повысить точность рекуррентного оценивания состояния нелинейных динамических систем статистической обработкой измерений выходных сигналов этих систем.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СГЛАЖИВАЮЩИХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

5.1. Постановка задачи построения сглаживающих фильтров

Радиотехнические траекторные измерительные средства могут выдавать результаты измерений параметров движения летательных аппаратов с большой частотой. Для передачи значительного объема результатов измерений в вычислительный центр для последующей математической обработки необходимо использовать каналы связи с высокой пропускной способностью. Но и при этом время, необходимое для передачи данных, во много раз превысит время, затраченное на выполнение измерений. Кроме того, если использовать при обработке все эти измерения, то полученные результаты измерений займут чрезвычайно много места в запоминающем устройстве вычислительной машины и потребуют больших затрат времени на математическую обработку. Использование же не всех, а лишь отдельных выборочных измерений приведет к снижению точности решения задачи отыскания значений неизвестных параметров математической модели движения ЛА. Так возникает задача о целесообразной статистической обработке результатов измерений перед использованием их для расчета искомых параметров.

Предварительная статистическая обработка измерений преследует две основные цели: 1) повысить точность экспериментальных данных за счет уменьшения влияния случайных ошибок, допущенных в каждом отдельном измерении; 2) редуцировать большое количество экспериментальных данных к немногим коэффициентам сглаживающего полинома. Вместе с тем сокращение объема данных приводит к уменьшению времени передачи и, как правило, снижает количество сбоев в линиях связи, что повышает достоверность принимаемых измерений.

Таким образом, предварительная статистическая обработка траекторных измерений позволяет использовать всю полученную информацию о движении ЛА, рационально

нально использовать оперативное запоминающее устройство вычислительной машины, значительно сократить время и повысить точность решения задачи определения движения ЛА по результатам измерений. Кроме того, применение полиномов, аппроксимирующих дискретные измерения, полученные от различных измерительных средств, позволяет приводить измерения к совпадающим моментам времени и решать другие практически важные задачи. В частности, как показывается в § 5.4, при предварительной статистической обработке измерений могут быть частично выявлены и исключены аномальные результаты измерений.

Сглаживание дискретных траекторных измерений производится не только на этапе их предварительной статистической обработки. В гл. 8 и 9 показано, как аппроксимирование траекторных измерений принятой моделью движения ЛА используется для статистического оценивания движения по результатам измерений.

В данной главе рассматриваются математические основы построения оптимальных сглаживающих фильтров в виде степенных полиномов. При этом, поскольку излагаемый ниже математический аппарат используется не только для аппроксимации траекторных измерений, но и для оптимального сглаживания реализаций других случайных процессов, допускающих их аппроксимацию (например, для сглаживания определенным образом выделенных ошибок измерений), то постановку и решение задачи сглаживания рассмотрим в общем виде для некоторого процесса $z(t)$.

Итак, если $z(t)$ — исследуемый процесс и $h(t_0), h(t_1), \dots, h(t_{N-1})$ — последовательность дискретных измерений этого процесса, произведенных в неравноотстоящие моменты времени t_0, t_1, \dots, t_{N-1} , то нашей задачей будет определить вид функции $G[t; h(t_0), h(t_1), \dots, h(t_{N-1})]$, обеспечивающей в некотором уточняемом ниже смысле наиболее точное выполнение приближенного равенства

$$z(t) \approx G[t; h(t_0), h(t_1), \dots, h(t_{N-1})]. \quad (5.1)$$

Путь к решению вопроса об оптимальном выборе вида функции определяется:

а) условием, чтобы искомая функция была достаточно простой, непрерывной и дифференцируемой функцией времени;

б) смыслом, в котором понимается «наибольшая точность» приближенного равенства (5.1), т. е. принятым при разработке алгоритма G критерием оптимальности сглаживания;

в) априорными предположениями о характере процесса $z(t)$ и виде ошибок дискретных измерений.

При выборе функции $G[t; h(t_0), h(t_1), \dots, h(t_{N-1})]$ можно руководствоваться следующим. Если исследуемый процесс $z(t)$ является монотонной функцией времени, то для его аппроксимации целесообразно выбрать алгебраический полином или линейную комбинацию ортогональных полиномов, которые также представляют собой монотонные функции. Если же $z(t)$ имеет колебательный характер, то можно воспользоваться тригонометрическими полиномами вида

$$a_0 + \sum_{r=1}^k (a_r \cos rt' + b_r \sin rt'), \quad (5.2)$$

где $t' = 2\pi(t - t_0)/(t_{N-1} - t_0)$.

Наконец, если $z(t)$ имеет колебательную и монотонную составляющие одновременно, то для аппроксимации дискретных измерений этого процесса можно использовать полиномы Лежандра

$$P_m(\tau) = \frac{1}{2^m \cdot m!} \frac{d^m [(\tau^2 - 1)^m]}{d\tau^m}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (5.3)$$

где $\tau = - (2t - t_{N-1} - t_0)/(t_{N-1} - t_0)$, $-1 \leq \tau \leq 1$,

которые обладают как тем, так и другим свойством.

Функции, измеряемые радиотехническими траекторными средствами, представляют собой обычно монотонные функции времени. Поэтому при рассмотрении математических основ оптимального сглаживания дискретных значений результатов измерений основное внимание уделим использованию алгебраических многочленов и ортогональных полиномов.

5.2. Сглаживание дискретных измерений алгебраическими многочленами

Пусть имеются результаты измерений $h(t_i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, некоторого процесса $z(t)$. Примем, что результаты измерений представляют собой сумму

$$h(t_i) = z(t_i) + \delta h(t_i) \quad (5.4)$$

значений неслучайного процесса $z(t_i)$ и случайной ошибки измерений $\delta h(t_i)$, характеризуемой нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2_i = \sigma^2_0 / \omega_i$, где ω_i — известные положительные постоянные (веса измерений), σ^2_0 может быть и неизвестно.

Необходимо получить математическое выражение сглаживающей кривой $\hat{z}(t)$. Для нахождения этого выражения примем, что на интервале измерений функциональная зависимость $z(t)$ может быть аппроксимирована алгебраическим многочленом k -й степени.

Зависимость между z и временем t в форме алгебраического многочлена

$$z(t) = \sum_{r=0}^k a_r t^r, \quad (5.5)$$

где $k < N$ (N — количество обрабатываемых измерений), определим, пользуясь методом наименьших квадратов. Это значит, что среди многочленов вида (5.5) требуется найти такой многочлен

$$\hat{z}(t) = \sum_{r=0}^k \hat{a}_r t^r, \quad (5.6)$$

для которого взвешенная сумма квадратов отклонений его значений от измеренных значений $h(t)$ в точках t_0, t_1, \dots, t_{N-1}

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i [\hat{z}(t_i) - h(t_i)]^2 \quad (5.7)$$

имеет наименьшую величину.

Для построения искомого аппроксимирующего многочлена (5.6) необходимо определить оценки коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_k так, чтобы величина S была мини-

Введем векторы

$$\widehat{A} = \|\widehat{a}_0 \widehat{a}_1 \dots \widehat{a}_k\|^T; \quad H = \|h(t_0) h(t_1) \dots h(t_{N-1})\|^T \quad (5.11)$$

и матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^k \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{N-1} & t_{N-1}^2 & \dots & t_{N-1}^k \end{pmatrix};$$

$$W = \begin{pmatrix} w_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

С учетом этих обозначений система нормальных уравнений (5.10) может быть записана в виде

$$\widehat{A} \widehat{A} = D, \quad (5.13)$$

где

$$B = T^T W T; \quad D = T^T W H. \quad (5.14)$$

Тогда

$$\widehat{A} = B^{-1} D. \quad (5.15)$$

Многочлен (5.6) с коэффициентами, полученными из решения системы (5.13), обладает минимальным квадратическим отклонением S_{\min} и обеспечивает наилучшее приближение в среднем к искомой функции.

Точность оценивания коэффициентов сглаживающего полинома \widehat{A} характеризуется корреляционной матрицей $K_{\widehat{A}}$, определяемой зависимостью (2.27), которая в обозначениях данной задачи имеет вид

$$K_{\widehat{A}} = \sigma^2 (T^T W T)^{-1}. \quad (5.16)$$

Дисперсия сглаженного значения $\widehat{z}(t)$ исследуемого процесса может быть рассчитана по формуле

$$\sigma^2 [\widehat{z}(t)] = t^T K_{\widehat{A}} t, \quad (5.17)$$

где $t^T = \|1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^k\|$.

Изложенный метод получения многочлена наилучшего приближения имеет ряд существенных недостатков:

— для отыскания коэффициентов этого многочлена приходится решать систему из $k+1$ алгебраических уравнений, что при больших k сопряжено с громоздкой вычислительной работой;

— сравнительно сложный алгоритм расчета корреляционной матрицы оценок коэффициентов \hat{a}_r ($r=0, 1, \dots, k$) аппроксимирующего полинома и дисперсии $\sigma^2[\hat{z}(t)]$ сглаженного значения исследуемого процесса;

— если при выбранном значении степени многочлена k оказалось, что точность оценивания искомой функции полученным многочленом недостаточна, то, увеличив степень многочлена, необходимо заново повторить все вычисления.

Отмеченные недостатки ограничивают практическое применение алгебраических многочленов для сглаживания результатов дискретных измерений.

5.3. Сглаживание дискретных измерений линейной комбинацией ортогональных полиномов

Решение задачи сглаживания результатов дискретных измерений существенно упрощается, если для аппроксимации измеренных значений $h(t_i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, исследуемого процесса $z(t)$ использовать линейную комбинацию ортогональных полиномов Чебышева $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, \dots , $\varphi_k(t)$, т. е. переписать выражение (5.6) в виде

$$\hat{z}(t) = \sum_{r=0}^k \hat{C}_r \varphi_r(t). \quad (5.18)$$

Ортогональные полиномы Чебышева определяются выражениями

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 1, \\ \varphi_1(t) &= t - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} t_i, \\ \varphi_2(t) &= t^2 - \frac{\sum_{i=0}^{N-1} t_i^2 \varphi_1(t_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_1^2(t_i)} \varphi_1(t) - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} t_i^2, \end{aligned}$$

$$\varphi_3(t) = t^3 - \frac{\sum_{i=0}^{N-1} t^3 \varphi_2(t_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_2^2(t_i)} \varphi_2(t) - \frac{\sum_{i=0}^{N-1} t^3 \varphi_1(t_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_1^2(t_i)} \varphi_1(t) - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} t^3. \quad (5.19)$$

Общий вид полиномов Чебышева

$$\begin{aligned} \varphi_m(t) = & t^m - \frac{\sum_{i=0}^{N-1} t^m \varphi_{m-1}(t_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_{m-1}^2(t_i)} \varphi_{m-1}(t) - \\ & \frac{\sum_{i=0}^{N-1} t^m \varphi_{m-2}(t_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_{m-2}^2(t_i)} \varphi_{m-2}(t) - \dots - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} t^m. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ортогональные полиномы Чебышева при $m \neq l$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_m(t_i) \varphi_l(t_i) = 0, \quad (5.21)$$

благодаря чему очень удобны как для техники вычислений, так и для статистического анализа при использовании их для сглаживания дискретных измерений.

Получим расчетные зависимости для определения методом наименьших квадратов оценок коэффициентов $\hat{C}_0, \hat{C}_1, \dots, \hat{C}_k$ полинома (5.18), используемого для аппроксимации результатов равнооточных измерений ($\sigma_i^2 = \sigma^2, i=0, 1, \dots, N-1$). Для этого составим сумму квадратов отклонений значений полинома (5.18) от измеренных значений $h(t)$ в точках t_0, t_1, \dots, t_{N-1} :

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} \left[\sum_{r=0}^k \hat{C}_r \varphi_r(t_i) - h(t_i) \right]^2. \quad (5.22)$$

Найдем частные производные от S по всем параметрам $\widehat{C}_0, \widehat{C}_1, \dots, \widehat{C}_k$. Приравняв эти производные нулю, получим для определения искомым коэффициентов $\widehat{C}_0, \widehat{C}_1, \dots, \widehat{C}_k$ систему $k+1$ линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \widehat{C}_0} = 2 \sum_{i=0}^{N-1} [\widehat{C}_0 \varphi_0(t_i) + \widehat{C}_1 \varphi_1(t_i) + \dots + \widehat{C}_k \varphi_k(t_i) - h(t_i)] \varphi_0(t_i) = 0, \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \widehat{C}_1} = 2 \sum_{i=0}^{N-1} [\widehat{C}_0 \varphi_0(t_i) + \widehat{C}_1 \varphi_1(t_i) + \dots + \widehat{C}_k \varphi_k(t_i) - h(t_i)] \varphi_1(t_i) = 0,$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial S}{\partial \widehat{C}_k} = 2 \sum_{i=0}^{N-1} [\widehat{C}_0 \varphi_0(t_i) + \widehat{C}_1 \varphi_1(t_i) + \dots + \widehat{C}_k \varphi_k(t_i) - h(t_i)] \varphi_k(t_i) = 0.$$

Эту систему уравнений перепишем в виде

$$\widehat{C}_0 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_0(t_i) \varphi_0(t_i) + \widehat{C}_1 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_1(t_i) \varphi_0(t_i) + \dots + \widehat{C}_k \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_k(t_i) \varphi_0(t_i) = \sum_{i=0}^{N-1} h(t_i) \varphi_0(t_i),$$

$$\widehat{C}_0 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_0(t_i) \varphi_1(t_i) + \widehat{C}_1 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_1(t_i) \varphi_1(t_i) + \dots + \widehat{C}_k \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_k(t_i) \varphi_1(t_i) = \sum_{i=0}^{N-1} h(t_i) \varphi_1(t_i),$$

$$\dots$$

$$(5.24)$$

$$\widehat{C}_0 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_0(t_i) \varphi_k(t_i) + \widehat{C}_1 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_1(t_i) \varphi_k(t_i) + \dots + \widehat{C}_k \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_k(t_i) \varphi_k(t_i) = \sum_{i=0}^{N-1} h(t_i) \varphi_k(t_i).$$

Так как полиномы Чебышева удовлетворяют условиям ортогональности (5.21), то система нормальных уравнений (5.24) распадается на $k+1$ независимое уравнение

$$\begin{aligned} \widehat{C}_0 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_0^2(t_i) &= \sum_{i=0}^{N-1} h(t_i) \varphi_0(t_i), \\ \widehat{C}_1 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_1^2(t_i) &= \sum_{i=0}^{N-1} h(t_i) \varphi_1(t_i), \\ &\dots \dots \dots \\ \widehat{C}_k \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_k^2(t_i) &= \sum_{i=0}^{N-1} h(t_i) \varphi_k(t_i). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Отсюда получаем, что оценки искоемых коэффициентов \widehat{C}_r могут быть рассчитаны по формулам

$$\widehat{C}_r = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} h(t_i) \varphi_r(t_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i)}, \quad r=0, 1, \dots, k. \quad (5.26)$$

При аппроксимации измеренных дискретных значений исследуемого процесса с помощью ортогональных полиномов Чебышева не исключается возможность последующего перехода к алгебраическим полиномам. Иногда такой переход целесообразно сделать для наглядности и удобства практического использования. Как это можно сделать, рассмотрим на примере многочлена второй степени.

Запишем выражения для сглаживающей функции в виде алгебраического полинома

$$\widehat{z}(t) = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 t + \widehat{a}_2 t^2 \quad (5.27)$$

и в виде линейной комбинации полиномов Чебышева

$$\widehat{z}(t) = \widehat{C}_0 + \widehat{C}_1 \varphi_1(t) + \widehat{C}_2 \varphi_2(t). \quad (5.28)$$

В зависимость (5.28) подставим выражения для полиномов Чебышева (5.19):

$$\begin{aligned} \hat{z}(t) = & \hat{C}_0 + \hat{C}_1 \left(t - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} t_i \right) + \\ & + \hat{C}_2 \left[t^2 - \frac{\sum_{i=0}^{N-1} t_i \varphi_1(t_i)}{N-1} \left(t - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} t_i \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Введем обозначения

$$b_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} t_i, \quad b_2 = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} t_i \varphi_1(t_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_1^2(t_i)} \quad (5.30)$$

и, подставив их в (5.29), получим

$$\hat{z}(t) = \hat{C}_0 + \hat{C}_1 t - \hat{C}_1 b_1 + \hat{C}_2 t^2 - \hat{C}_2 b_2 t + \hat{C}_2 b_2 b_1. \quad (5.31)$$

Приравнявая (5.27) и (5.31) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , найдем:

$$\hat{a}_0 = \hat{C}_0 - \hat{C}_1 b_1 + \hat{C}_2 b_2 b_1, \quad \hat{a}_1 = \hat{C}_1 - \hat{C}_2 b_2, \quad \hat{a}_2 = \hat{C}_2. \quad (5.32)$$

Аналогично можно произвести пересчет коэффициентов и для аппроксимирующих полиномов более высокой степени.

Сглаживание неравноточных измерений также можно произвести используя ортогональные функции. Для этого функции должны быть ортогональны с весом $w(t)$, где $w(t)$ — положительная непрерывная на интервале измерений $[t_0, t_{N-1}]$ функция. Последовательность функций $\psi_r(t)$, $r=0, 1, \dots, k$, ортогональна на множестве точек t_i , $i=0, 1, \dots, N-1$, с весом $w(t_i)$, если при $m \neq l$ имеют место равенства

$$\sum_{i=0}^{N-1} w(t_i) \psi_m(t_i) \psi_l(t_i) = 0. \quad (5.33)$$

Из ортогональности системы $\{\psi_r(t_i)\}$ с весами $w(t_i)$ следует обычная ортогональность системы

$$\{\tilde{\varphi}_r(t_i)\} = \{V\overline{w(t_i)} \psi_r(t_i)\}, \quad (5.34)$$

так как

$$\sum_{i=0}^{N-1} w(t_i) \psi_m(t_i) \psi_l(t_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\varphi}_m(t_i) \tilde{\varphi}_l(t_i) = 0 \quad \text{при } m \neq l. \quad (5.35)$$

Отсюда следует, что если, например, принять $\hat{\varphi}_r(t_i) = \varphi_r(t_i)$, где $\varphi_r(t_i)$ — ортогональные полиномы Чебышева (5.20), то в качестве ортогональных с весом $w(t_i)$ многочленов можно использовать полиномы

$$\psi_r(t_i) = \varphi_r(t_i) / V\overline{w(t_i)}. \quad (5.36)$$

Итак, пусть на множестве точек t_i ($i=0, 1, \dots, N-1$) заданы измерения $h(t_i)$ и система функций $\psi_0(t_i), \psi_1(t_i), \dots, \psi_k(t_i)$, ортогональных с весом $w(t_i)$ на этом множестве. Составим многочлен

$$\hat{z}(t) = \sum_{r=0}^k \hat{q}_r \psi_r(t) \quad (5.37)$$

и подберем коэффициенты $\hat{q}_0, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k$ так, чтобы отклонение

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} w(t_i) [h(t_i) - \hat{z}(t_i)]^2 \quad (5.38)$$

было минимальным при фиксированном k .

Зависимость (5.38) можно переписать в виде

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} \left[V\overline{w(t_i)} h(t_i) - \sum_{r=0}^k \hat{q}_r V\overline{w(t_i)} \psi_r(t_i) \right]^2. \quad (5.39)$$

Из условия минимума величины S для определения коэффициентов \hat{q}_r имеем систему из $k+1$ уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{q}_j} = 2 \sum_{i=0}^{N-1} \left[\sqrt{\omega(t_i)} h(t_i) - \sum_{r=0}^k \hat{q}_r \sqrt{\omega(t_i)} \psi_r(t_i) \right] [-\sqrt{\omega(t_i)} \psi_j(t_i)] = 0, \quad j=0, 1, \dots, k. \quad (5.40)$$

После очевидных преобразований система (5.40) принимает вид

$$\sum_{r=0}^k \hat{q}_r \sum_{i=0}^{N-1} \omega(t_i) \psi_r(t_i) \psi_j(t_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \omega(t_i) h(t_i) \psi_j(t_i). \quad (5.41)$$

В силу ортогональности с весом $\omega(t_i)$ системы $\{\psi_r(t_i)\}$, $r=0, 1, \dots, k$, все слагаемые левой части уравнений (5.41), за исключением j -го, обращаются в нуль. Следовательно,

$$\hat{q}_j \sum_{i=0}^{N-1} \omega(t_i) \psi_j^2(t_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \omega(t_i) h(t_i) \psi_j(t_i) \quad (5.42)$$

и

$$\hat{q}_j = \sum_{i=0}^{N-1} \omega(t_i) h(t_i) \psi_j(t_i) \left/ \sum_{i=0}^{N-1} \omega(t_i) \psi_j^2(t_i) \right., \quad (5.43)$$

$j=0, 1, \dots, k$.

Из соотношений (5.37) и (5.43) видно, что использование ортогональных полиномов для сглаживания дискретных результатов измерений весьма удобно: коэффициенты аппроксимирующего полинома \hat{q}_r выражаются непосредственно через результаты измерений $h(t_i)$ и ортогональные с весом полиномы $\psi_r(t_i)$. Кроме того; если при выбранном значении степени многочлена k оказалось, что точность приближения функции полученным многочленом неудовлетворительна, то, увеличив степень многочлена до $k+1$, необходимо лишь рассчитать значения функции $\psi_{k+1}(t_i)$ и дополнительного коэффициента \hat{q}_{k+1} .

Далее, удобные выражения получаются для корреляционной матрицы $\mathbf{K}_{\hat{Q}}$ оценок $\hat{q}_0, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k$ коэффициентов аппроксимирующего полинома (5.37). Матрица коэффициентов при неизвестных в системе нормальных уравнений (5.41)

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}, \quad (5.44)$$

где \mathbf{W} — матрица весов (5.12);

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \psi_0(t_0) & \psi_1(t_0) & \dots & \psi_k(t_0) \\ \psi_0(t_1) & \psi_1(t_1) & \dots & \psi_k(t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_0(t_{N-1}) & \psi_1(t_{N-1}) & \dots & \psi_k(t_{N-1}) \end{vmatrix} \quad (5.45)$$

в силу ортогональности с весом $w(t_i)$ полиномов $\psi_r(t_i)$, $r=0, 1, \dots, k$, превращается в диагональную матрицу

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} w(t_i) \psi_0^2(t_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{N-1} w(t_i) \psi_1^2(t_i) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=0}^{N-1} w(t_i) \psi_k^2(t_i) \end{vmatrix}. \quad (5.46)$$

Отсюда согласно (2.27) имеем

$$\mathbf{K}_{\hat{Q}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{i=0}^{N-1} w(t_i) \psi_0^2(t_i) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=0}^{N-1} w(t_i) \psi_k^2(t_i) \end{vmatrix} = \sigma_0^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{i=0}^{N-1} w(t_i) \psi_0^2(t_i) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{i=0}^{N-1} w(t_i) \psi_k^2(t_i) \end{vmatrix}. \quad (5.47)$$

Полезно отметить то обстоятельство, что вычисление ортогональных полиномов с последующим обращением диагональной матрицы приводит к меньшим ошибкам округления, чем при использовании алгебраических полиномов (5.6), хотя обе процедуры алгебраически эквивалентны.

Таким образом, оценки \hat{q}_r коэффициентов полинома (5.37), определяемые по методу наименьших квадратов при $\delta h(t_i) \in (0, \sigma^2_0/\omega(t_i))$, независимы в совокупности и характеризуются дисперсиями

$$\sigma^2_{\hat{q}_r} = \sigma^2_0 \left/ \sum_{t=0}^{N-1} \omega(t) \psi_r^2(t) \right., \quad r=0, 1, \dots, k. \quad (5.48)$$

На основе выражений (5.37), (5.47) можно записать зависимости для определения оценок сглаженных значений измерений, производных от них по времени и дисперсий этих оценок для некоторого момента времени t_n , принадлежащего интервалу измерений:

$$\begin{aligned} \hat{z}(t_n) &= \sum_{r=0}^k \hat{q}_r \psi_r(t_n), \\ \hat{z}^{(m)}(t_n) &= \frac{d^m \hat{z}(t_n)}{dt^m} = \sum_{r=0}^k \hat{q}_r \frac{d^m \psi_r(t_n)}{dt^m}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2[\hat{z}(t_n)] &= \sum_{r=0}^k \sigma^2_{\hat{q}_r} \psi_r^2(t_n), \\ \sigma^2[\hat{z}^{(m)}(t_n)] &= \sum_{r=0}^k \sigma^2_{\hat{q}_r} \left[\frac{d^m \psi_r(t_n)}{dt^m} \right]^2, \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$m = 1, \dots, k.$$

Использование формул (5.49), (5.50) позволяет не только рассчитать производные для момента времени t_n и оценить их точность, но и выбрать начало отсчета времени так, чтобы дисперсии оценок производных $\hat{z}^{(m)}(t_n)$, $m=1, 2, \dots, k$, были минимальными.

Так, например, если задаться $k=2$, то при использовании равнооточных ($\omega(t_i)=\omega=1$) измерений, выполненных через равные промежутки времени, для момента

времени $t_n=0$, соответствующего середине интервала наблюдения, имеем

$$\begin{aligned}\hat{z}(0) &= \hat{C}_0 - \frac{\hat{C}_2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} t_i^2, \\ \hat{z}(0) &= \hat{C}_1 - \hat{C}_2 \sum_{i=0}^{N-1} t_i^2 \varphi_1(t_i) \bigg/ \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_1^2(t_i),\end{aligned}\quad (5.51)$$

$$\begin{aligned}\hat{z}(0) &= 2\hat{C}_2, \\ \sigma^2[\hat{z}(0)] &= \sigma_{\hat{C}_0}^2 + \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} t_i^2 \right)^2 \sigma_{\hat{C}_2}^2,\end{aligned}\quad (5.52)$$

$$\begin{aligned}\sigma^2[\hat{z}(0)] &= \sigma_{\hat{C}_1}^2 + \left(\frac{\sum_{i=0}^{N-1} t_i^2 \varphi_1(t_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_1^2(t_i)} \right)^2 \sigma_{\hat{C}_2}^2, \\ \sigma^2[\hat{z}(0)] &= 4\sigma_{\hat{C}_2}^2.\end{aligned}$$

Из анализа зависимостей (5.50) и (5.52) следует, что при равнооточных измерениях точность определения сглаженного значения измеренного процесса $\hat{z}(0)$ и производных $\hat{z}^{(m)}(0)$ повышается при выборе начала отсчета времени в середине интервала наблюдения по сравнению с произвольным расположением начала отсчета времени.

5.4. Особенности сглаживания дискретных коррелированных измерений

Рассмотренная в предыдущем параграфе методика аппроксимации результатов дискретных измерений исследуемого процесса может быть распространена на случай, когда ошибки измерений представляют собой коррелированные случайные величины. При этом, обрабатывая измерения методом наименьших квадратов, получаем следующее выражение для вектора оценок коэф-

коэффициентов $\hat{C}_0, \hat{C}_1, \dots, \hat{C}_k$ сглаживающего полинома (5.18):

$$\hat{C} = B^{-1}D, \quad (5.53)$$

где

$$B = A^T K_H^{-1} A, \quad (5.54)$$

$$D = A^T K_H^{-1} H, \quad (5.55)$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{C}_0 \\ \hat{C}_1 \\ \vdots \\ \hat{C}_k \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} h(t_0) \\ h(t_1) \\ \vdots \\ h(t_{N-1}) \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_0(t_0) & \varphi_1(t_0) & \dots & \varphi_k(t_0) \\ \varphi_0(t_1) & \varphi_1(t_1) & \dots & \varphi_k(t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(t_{N-1}) & \varphi_1(t_{N-1}) & \dots & \varphi_k(t_{N-1}) \end{pmatrix};$$

K_H — корреляционная матрица ошибок измерений;

$$B = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} K_{ij}^{(-1)} \varphi_0(t_i) \varphi_0(t_j) & \dots & \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} K_{ij}^{(-1)} \varphi_0(t_i) \varphi_k(t_j) \\ \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} K_{ij}^{(-1)} \varphi_1(t_i) \varphi_0(t_j) & \dots & \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} K_{ij}^{(-1)} \varphi_1(t_i) \varphi_k(t_j) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} K_{ij}^{(-1)} \varphi_k(t_i) \varphi_0(t_j) & \dots & \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} K_{ij}^{(-1)} \varphi_k(t_i) \varphi_k(t_j) \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

Дисперсия сглаженного значения исследуемого процесса определяется зависимостью

$$\sigma^2 [\hat{z}(t)] = a(t) B^{-1} a^T(t), \quad (5.57)$$

где

$$a(t) = \|\varphi_0(t) \quad \varphi_1(t) \quad \dots \quad \varphi_k(t)\|. \quad (5.58)$$

При учете коррелированности ошибок измерений процедура сглаживания дискретных результатов измерений оказывается значительно сложнее, чем при незави-

симых ошибках измерений, что обусловлено в первую очередь необходимостью обращения корреляционной матрицы ошибок измерений K_H . Это приводит к тому, что при аппроксимации результатов коррелированных измерений часто пренебрегают влиянием коррелированности ошибок измерений и получают заведомо неоптимальные оценки.

Рассмотрим, насколько снижается точность результатов сглаживания, когда не принимают во внимание имеющую место коррелированность ошибок измерений, и как следует учитывать коррелированность ошибок измерений, чтобы получать удовлетворительные результаты наиболее простым способом. Для простоты анализа примем, что ошибки измерений представляют собой стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и автокорреляционной функцией вида

$$K_H(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|}, \quad (5.59)$$

где σ^2 — дисперсия ошибок измерений; α — постоянный параметр.

В этом случае матрица K_H^{-1} , обратная корреляционной матрице ошибок измерений, представляет собой трехдиагональную матрицу

$$K_H^{-1} = \frac{1}{\sigma^2 (1-d^2)} \begin{pmatrix} 1 & -d & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -d & 1+d^2 & -d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 1+d^2 & -d & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -d & 1+d^2 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -d & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.60)$$

где $d = e^{-\alpha \Delta t}$; $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, \dots, N-2$.

Кроме того, примем, что сглаживание результатов измерений производится с использованием ортонормированных функций $\lambda_r(t_i)$, $r = 0, 1, \dots, k$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_m(t_i) \lambda_l(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } m=l, \\ 0 & \text{при } m \neq l, \end{cases} \quad (5.61)$$

а исследуемый процесс $z(t)$ на интервале измерений $[t_0, t_{N-1}]$ представляет собой полином степени k :

$$z(t) = \sum_{r=0}^k \beta_r \lambda_r(t). \quad (5.62)$$

Аппроксимируем измерения $h(t_i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, на интервале $t_0 \leq t_i \leq t_{N-1}$ многочленом

$$\widehat{z}(t) = \sum_{r=0}^k \widehat{\beta}_r \lambda_r(t), \quad (5.63)$$

коэффициенты которого $\widehat{\beta}_r$ найдем по методу наименьших квадратов. Используемые при этом зависимости (5.53) в обозначениях данной задачи имеют вид

$$\widehat{\beta} = B^{-1}D, \quad (5.64)$$

где

$$B = A^T K_H^{-1} A, \quad (5.65)$$

$$D = A^T K_H^{-1} H, \quad (5.66)$$

$$\widehat{\beta} = \|\widehat{\beta}_0 \widehat{\beta}_1 \dots \widehat{\beta}_k\|, \quad (5.67)$$

$$H = \|h(t_0) \ h(t_1) \ \dots \ h(t_{N-1})\|,$$

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_0(t_0) & \lambda_1(t_0) & \dots & \lambda_k(t_0) \\ \lambda_0(t_1) & \lambda_1(t_1) & \dots & \lambda_k(t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0(t_{N-1}) & \lambda_1(t_{N-1}) & \dots & \lambda_k(t_{N-1}) \end{array} \right\|. \quad (5.68)$$

Элементы матрицы B могут быть рассчитаны по формулам

$$b_{ml} = b_{lm} = \frac{1}{\sigma^2 (1-d^2)} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{m-1}(t_i) \lambda_{l-1}(t_i) - \right.$$

$$- d \sum_{i=0}^{N-2} [\lambda_{m-1}(t_{i+1}) \lambda_{l-1}(t_i) + \lambda_{m-1}(t_i) \lambda_{l-1}(t_{i+1})] +$$

$$\left. + d^2 \sum_{i=1}^{N-2} \lambda_{m-1}(t_i) \lambda_{l-1}(t_i) \right\}, \quad m, l = 1, 2, \dots, k+1. \quad (5.69)$$

Корреляционная матрица оценок коэффициентов $\hat{\beta}$ определяется зависимостью

$$K_{\hat{\beta}} = B^{-1}. \quad (5.70)$$

Как следует из (5.70), (5.69), при некоррелированных ошибках измерений ($d=0$) все оценки $\hat{\beta}_r$, $r=0, 1, \dots, k$, независимы и характеризуются дисперсией $\sigma^2(\hat{\beta}_r) = \sigma^2$. При коррелированных ошибках измерений дисперсии коэффициентов $\hat{\beta}_r$ зависят от порядка r ортонормированного полинома, степени аппроксимирующего члена k и количества используемых измерений N . Для дисперсий первых трех коэффициентов справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\hat{\beta}_0} &= \frac{1+d}{1 - \left(1 - \frac{2}{N}\right)d} \sigma^2 \quad \text{при } k=0 \text{ и } k=1; \\ \sigma^2_{\hat{\beta}_1} &= \frac{1-d^2}{1 - 2\left(1 - \frac{3}{N}\right)d + \frac{(N-2)(N-3)}{N(N+1)}d^2} \sigma^2 \\ &\quad \text{при } k=1 \text{ и } k=2; \\ \sigma^2_{\hat{\beta}_0} &= \frac{(1+d) \left\{ 1 - 2\left(1 - \frac{5}{N}\right)d + \right.}{1 - 3\left(1 - \frac{4}{N}\right)d + 3\frac{(N-3)(N-4)}{N(N+1)}d^2 -} \\ &\quad \left. + \left[1 - 10\frac{(N-1)(N-2)}{N(N+1)(N+2)} \right] d^2 \right\}}{-\frac{(N-2)(N-3)(N-4)}{N(N+1)(N+2)}d^2} \sigma^2, \\ &\quad \text{при } k=2; \\ \sigma^2_{\hat{\beta}_2} &= \frac{(1-d^2) \left[1 - \left(1 - \frac{2}{N}\right)d \right]}{1 - 3\left(1 - \frac{4}{N}\right)d + 3\frac{(N-3)(N-4)}{N(N+1)}d^2 -} \\ &\quad \left. - \frac{(N-2)(N-3)(N-4)}{N(N+1)(N+2)}d^2 \right] \sigma^2. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Математическое ожидание суммы квадратов отклонений сглаженных значений исследуемого процесса от

соответствующих истинных значений найдем на основе использования зависимостей (5.61) — (5.63). Разделив полученное выражение на количество измерений N , определим дисперсию сглаженных значений в среднем по всем точкам, в которых получены измерения:

$$\sigma_{\hat{z}, k}^2 = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^k \sigma_{\hat{\beta}, r}^2. \quad (5.72)$$

Если аппроксимировать измерения многочленом

$$\tilde{z}(t) = \sum_{r=0}^k \tilde{\beta}_r \lambda_r(t), \quad (5.73)$$

коэффициенты которого β_r найти по методу наименьших квадратов без учета коррелированности ошибок измерений, то дисперсия сглаженных значений в среднем по всем точкам определится выражением

$$\sigma_{\tilde{z}, k}^2 = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^k \sigma_{\tilde{\beta}, r}^2, \quad (5.74)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{\beta}, 0}^2 &= \left[\frac{1+d}{1-d} - \frac{2d(1-d^N)}{N(1-d)^2} \right] \sigma^2, \\ \sigma_{\tilde{\beta}, 1}^2 &= \left\{ \frac{1+d}{1-d} - \frac{6d(1-d^N)}{N(1-d)^2} + \frac{12d^2}{N(N^2-1)(1-d)^4} \times \right. \\ &\quad \left. \times [2 - (N+1)d^{N-1} + (N-1)d^{N+1}] \right\} \sigma^2, \\ \sigma_{\tilde{\beta}, 2}^2 &= \left\{ \frac{1+d}{1-d} - \frac{10d(1-d^N)}{N(1-d)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{60d^2}{N(N^2-1)(N^2-4)(1-d)^4} [2(N^2-4) - 4(N^2+2)d + \right. \\ &\quad \left. + 2(N^2-4)d^2 + N(N+1)(N+2)d^{N-1} - \right. \\ &\quad \left. - 2(N+1)(N^2-4)d^N - 2(N^2-4)d^{N+1} + \right. \\ &\quad \left. + 2(N-1)(N^2-4)d^{N+2} - N(N-1)(N-2)d^{N+3}] \right\} \sigma^2. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Из выражений (5.71) и (5.75) следует, что с увеличением количества используемых измерений ($N \rightarrow \infty$) дисперсии оценок коэффициентов аппроксимирующего полинома как оптимальных ($\hat{\beta}_r$), так и неоптимальных ($\tilde{\beta}_r$) стремятся к одному пределу:

$$\sigma_{\tilde{\beta}_r}^2 \rightarrow \sigma_{\hat{\beta}_r}^2 \rightarrow \frac{1+d}{1-d} \sigma^2.$$

Таблица 5.1

d	k	N				
		5	10	20	40	∞
0,4	0	1,842	2,059	2,188	2,258	2,333
		1,893	2,111	2,222	2,278	
	1	1,511	1,835	2,056	2,186	
		1,555	1,933	2,109	2,222	
	2	1,294	1,665	1,944	2,121	
		1,309	1,720	2,027	2,167	
0,8	0	3,461	5,000	6,429	7,500	9,000
		3,621	5,429	7,023	8,000	
	1	2,100	3,375	4,308	6,371	
		2,190	3,712	5,540	7,075	
	2	1,552	2,658	4,111	5,638	
		1,560	2,935	4,339	6,263	

Таблица 5.1 характеризует дисперсии сглаженных значений при оптимальной и неоптимальной процедурах аппроксимирования измерений. Значения дисперсий даны в единицах соответствующих дисперсий при независимых ошибках измерений ($d=0$), когда формулы (5.72) и (5.74) оказываются равными:

$$\sigma_{\hat{z}_k}^2 = \sigma_{\tilde{z}_k}^2 = (k+1)\sigma^2/N \text{ при } d=0.$$

Для каждого значения d , k , N в таблице приведены значения отношений

$$\hat{\delta}^2 = \frac{\sigma_{\hat{z}_k}^2}{(k+1/N)\sigma^2} \text{ (верхнее число)} \text{ и } \tilde{\delta}^2 = \frac{\sigma_{\tilde{z}_k}^2}{(k+1/N)\sigma^2} \text{ (ниж-}$$

нее число).

В последнем столбце помещены предельные значения этих отношений (при $N \rightarrow \infty$), которые не зависят от порядка аппроксимирующего полинома k .

Из анализа табл. 5.1 можно сделать следующие выводы. Чем больше величина d , тем медленнее сходятся дисперсии сглаженных значений измерений к своим пределам. При фиксированных значениях d и k величины $\hat{\delta}^2$ и $\tilde{\delta}^2$ растут с увеличением количества используемых измерений N , стремясь к единому предельному значе-

Таблица 5.2

d	k	N			
		5	10	20	40
0,4	0	1,4	1,2	0,8	0,4
	1	1,4	1,8	1,3	0,8
	2	0,6	1,6	2,1	1,1
0,8	0	2,3	4,2	5,3	3,3
	1	2,1	4,9	6,2	5,4
	2	0,3	5,1	4,2	5,4

нию. Величины $\hat{\delta}^2$ и $\tilde{\delta}^2$ уменьшаются с увеличением степени аппроксимирующего полинома k при постоянстве остальных параметров. Дисперсии сглаженных значений при коррелированных ошибках измерений всегда превосходят соответствующие дисперсии при некоррелированных ошибках измерений, но не более, чем в предельное число раз $(1+d)/(1-d)$. И наконец, отметим момент, наиболее существенный с точки зрения практического применения полученных результатов. Как и следовало ожидать, погрешности сглаженных значений измерений при неоптимальной процедуре сглаживания выше, чем при оптимальной. Величина $\tilde{\delta}^2$ всегда превосходит соответствующую величину $\hat{\delta}^2$. Однако это превышение практически невелико.

В табл. 5.2 представлены значения Δ — относительного увеличения среднего квадратического отклонения сглаженных значений, обусловленного неоптимальностью процедуры сглаживания:

$$\Delta = \frac{\tilde{\delta} - \hat{\delta}}{\hat{\delta}} 100\%.$$

Из табл. 5.2 следует, что для рассматриваемого примера увеличение погрешностей аппроксимированных значений измерений за счет неоптимальности процедуры сглаживания несущественно и практического значения не имеет. Это позволяет сделать важный для практики обработки радиотехнических траекторных измерений, корреляционная функция ошибок измерений которых описывается зависимостью (5.59), вывод о том, что в случае коррелированных ошибок измерений аппроксимацию результатов измерений можно выполнять простейшей процедурой метода наименьших квадратов, не учитывающей коррелированность ошибок измерений, без существенного снижения точности получаемых результатов.

При оценке точности сглаженных значений исследуемого процесса коррелированность ошибок измерений обязательно должна учитываться, ибо в противном случае дисперсии получаемых результатов окажутся неоправданно заниженными. При этом полезно иметь в виду, что поскольку дисперсии аппроксимированных значений несущественно различаются при неоптимальном и оптимальном сглаживании измерений, то для оценки точности результатов сглаживания по методу наименьших квадратов можно использовать зависимости (5.71), (5.72), требующие меньшего объема вычислений, чем соответствующие формулы (5.74), (5.75) неоптимальной процедуры сглаживания.

Отметим, что приведенные выше выводы о практической целесообразности неучета коррелированности ошибок измерений при сглаживании результатов измерений по методу наименьших квадратов получены в предположении, что автокорреляционная функция ошибок измерений описывается выражением вида (5.59). Однако, как следует из общих соображений, эти выводы можно распространить также на случаи статистической обработки измерений, ошибки которых характеризуются другими видами автокорреляционных функций, по крайней мере таких, функции автокорреляции которых монотонно убывают, оставаясь всюду положительными.

Рассмотренная задача решена в предположении, что исследуемый процесс представляет собой на интервале сглаживания $t_0 \leq t \leq t_{N-1}$ полином k -й степени. В действительности же зависимость измеряемых радиотехническими траекторными средствами функций параметров

движения летательного аппарата от времени более сложная и лишь с некоторым приближением может быть принята в виде полиномиальной. Это приводит к необходимости проведения специальных исследований для выбора порядка аппроксимирующего полинома при фиксированном интервале сглаживания измерений или установления интервала сглаживания при фиксированном порядке полинома. Методика выбора порядка сглаживающего полинома излагается в следующем параграфе.

5.5. Выбор степени полинома, сглаживающего измерения

5.5.1. Ошибки сглаживания результатов дискретных измерений

Определение порядка полинома для аппроксимации дискретных измерений исследуемого процесса является основным принципиальным моментом методики сглаживания измерений.

Примем, что измеряемый процесс $z(t)$ представляет собой полином k -го порядка

$$z(t) = \sum_{r=0}^k C_r \varphi_r(t), \quad (5.76)$$

а ошибки дискретных измерений $\delta h(t_i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, являются независимыми нормально распределенными случайными величинами, характеризуемыми нулевыми математическими ожиданиями и дисперсией $\sigma_{\delta h}^2 = \sigma^2$.

При фиксированном порядке полинома (5.18) чем больше интервал сглаживания T_0 (а следовательно, и количество измерений N), тем в большей степени можно уменьшить влияние случайных ошибок измерений. Поэтому для повышения точности определения результатов сглаживания было бы желательно увеличивать интервал T_0 . Но при этом нужно иметь в виду, что с ростом интервала сглаживания T_0 при фиксированном значении порядка n полинома (5.18) увеличивается методическая ошибка аппроксимации. Если же увеличивать порядок аппроксимирующего полинома, то методическая ошибка в результатах сглаживания уменьшится, а случайная

ошибка возрастет. Поэтому окончательному назначению порядка n аппроксимирующего полинома и интервала сглаживания T_0 должен предшествовать тщательный анализ зависимости (5.18) с тем, чтобы при проведении операции сглаживания обеспечивался минимум суммы методической и случайной ошибок.

Аппроксимируем совокупность измерений $h(t_i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, полиномом (5.18) n -й степени:

$$\widehat{z}_n(t) = \sum_{r=0}^n \widehat{C}_r \varphi_r(t). \quad (5.77)$$

При этом из (5.4) и (5.26) имеем

$$\widehat{C}_r = C_r + P_r, \quad (5.78)$$

где

$$\widehat{C}_r = \sum_{i=0}^{N-1} h(t_i) \varphi_r(t_i) \left/ \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i), \right.$$

$$P_r = \sum_{i=0}^{N-1} \delta h(t_i) \varphi_r(t_i) \left/ \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i). \right.$$

Тогда отклонение измеренного значения исследуемого процесса от аппроксимированного значения определяется зависимостью

$$a_n(t_i) = h(t_i) - \widehat{z}_n(t_i) = \delta h(t_i) + \sum_{r=n+1}^k C_r \varphi_r(t_i) - \sum_{r=0}^n P_r \varphi_r(t_i). \quad (5.79)$$

Возводя (5.79) в квадрат и суммируя по всем точкам, получаем

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_n^2(t_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ [\delta h(t_i)]^2 + 2\delta h(t_i) \sum_{r=n+1}^k C_r \varphi_r(t_i) - \right.$$

$$\left. - 2\delta h(t_i) \sum_{r=0}^n P_r \varphi_r(t_i) - 2 \sum_{r=n+1}^k C_r \varphi_r(t_i) \sum_{r=0}^n P_r \varphi_r(t_i) + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{r=n+1}^k C_r \varphi_r(t_i) \right]^2 + \left[\sum_{r=0}^n P_r \varphi_r(t_i) \right]^2 \right\}. \quad (5.80)$$

Проанализируем полученное выражение (5.80). Так как

$$\sum_{i=0}^{N-1} \delta h(t_i) \varphi_r(t_i) = P_r \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i), \quad r=0, 1, \dots, n, \quad (5.81)$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \delta h(t_i) \sum_{r=n+1}^k C_r \varphi_r(t_i) &= \sum_{r=n+1}^k C_r \times \\ &\times \sum_{i=0}^{N-1} \delta h(t_i) \varphi_r(t_i) = \sum_{r=n+1}^k C_r P_r \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i), \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \delta h(t_i) \sum_{r=0}^n P_r \varphi_r(t_i) &= \sum_{r=0}^n P_r \sum_{i=0}^{N-1} \delta h(t_i) \varphi_r(t_i) = \\ &= \sum_{r=0}^n P_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i). \end{aligned} \quad (5.83)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{r=n+1}^k C_r \varphi_r(t_i) \sum_{r=0}^n P_r \varphi_r(t_i) &= \\ &= \sum_{r=n+1}^k C_r \sum_{j=0}^n P_j \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r(t_i) \varphi_j(t_i) = 0, \end{aligned} \quad (5.84)$$

так как $r \neq j$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \left[\sum_{r=n+1}^k C_r \varphi_r(t_i) \right]^2 &= \sum_{r=n+1}^k \sum_{j=n+1}^k C_r C_j \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r(t_i) \varphi_j(t_i) = \\ &= \sum_{r=n+1}^k C_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) \end{aligned} \quad (5.85)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \left[\sum_{r=0}^n P_r \varphi_r(t_i) \right]^2 &= \sum_{r=0}^n \sum_{j=0}^n P_r P_j \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r(t_i) \varphi_j(t_i) = \\ &= \sum_{r=0}^n P_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Подставляя (5.81) — (5.86) в (5.80), находим

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_n^2(t_i) = \sum_{i=0}^{N-1} [\delta h(t_i)]^2 + 2 \sum_{r=n+1}^k C_r P_r \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) - \sum_{r=0}^n P_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) + \sum_{r=n+1}^k C_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i).$$

Обозначим

$$W_n^2 = \sum_{i=0}^{N-1} a_n^2(t_i) = V_n^2 + A_n, \quad (5.87)$$

$$V_n^2 = \sum_{i=0}^{N-1} [\delta h(t_i)]^2 - \sum_{r=0}^n P_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i), \quad (5.88)$$

$$A_n = 2 \sum_{r=n+1}^k C_r P_r \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) + \sum_{r=n+1}^k C_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i). \quad (5.89)$$

Величина V_n^2 представляет собой сумму квадратов отклонений измерений от их сглаженных значений для случая, когда $A_n=0$, т. е. степень аппроксимирующего полинома не менее действительной степени измеряемой функции ($n \geq k$). Она имеет распределение $\sigma^2 \chi^2$ с $N-n-1$ степенями свободы и характеризуется математическим ожиданием

$$M[V_n^2] = (N-n-1)\sigma^2 \quad (5.90)$$

и дисперсией

$$D[V_n^2] = 2(N-n-1)\sigma^4. \quad (5.91)$$

Случайная величина A_n распределена нормально с моментами

$$M[A_n] = a_n = \sum_{r=n+1}^k C_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) = \sum_{r=n+1}^{N-1} C_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i), \quad (5.92)$$

поскольку $C_{k+1} = C_{k+2} = \dots = C_{N-1} = 0$, и

$$D[A_n] = 4a_n\sigma^2. \quad (5.93)$$

Суммарная случайная величина W_n^2 имеет так называемое нецентральное $\sigma^2 \chi^2$ распределение [30, 32] с моментами

$$M[W_n^2] = (N-n-1)\sigma^2 + a_n, \quad (5.94)$$

$$D[W_n^2] = 2(N-n-1)\sigma^4 + 4a_n\sigma^2,$$

Величина a_n называется параметром нецентрально-сти. Для рассматриваемого случая a_n определяет ту часть спектра исследуемого процесса, которая приходится на степени, превышающие степень аппроксимирующего многочлена.

Найдем отклонение сглаживающей кривой от истинной функции в точке t_i :

$$g_n(t_i) = \hat{z}(t_i) - z(t_i) = \sum_{r=0}^n P_r \varphi_r(t_i) - \sum_{r=n+1}^k C_r \varphi_r(t_i). \quad (5.95)$$

Возводя (5.95) в квадрат и суммируя по всем N точкам, получаем

$$\begin{aligned} s_n^2 = \sum_{i=0}^{N-1} & \left\{ \left[\sum_{r=0}^n P_r \varphi_r(t_i) \right]^2 - 2 \sum_{r=0}^n P_r \varphi_r(t_i) \sum_{r=n+1}^k C_r \varphi_r(t_i) + \right. \\ & \left. + \left[\sum_{r=n+1}^k C_r \varphi_r(t_i) \right]^2 \right\} = \sum_{r=0}^n P_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) + \\ & + \sum_{r=n+1}^k C_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) = \sum_{r=0}^n P_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) + a_n. \quad (5.96) \end{aligned}$$

Величина s_n^2 , характеризующая качество сглаживания, является случайной, поскольку она представляет собой сумму случайной (первое слагаемое) и неслучайной (второе слагаемое) величин. При увеличении степени аппроксимирующего многочлена первое из слагаемых возрастает, а второе убывает (точнее, не возрастает, ибо при $r > k$ $C_r = 0$). Поэтому для каждого конкретного случая, когда определен спектр исследуемого процесса $z(t)$ и спектр мощности реализации помехи (совокупность значений P_r), найдется по крайней мере одно значение $n_{\text{опт}}$, при котором величина s_n^2 минимальна. Это значение $n_{\text{опт}}$ и определит наилучшую степень аппроксимирующего полинома.

Из (5.96) следует, что значение $n_{\text{опт}}$ не может превосходить истинную степень k функции $z(t)$. Действительно, при $n > k$ слагаемое a_n равно нулю и s_n^2 становится неубывающей функцией n .

Случайная величина s_n^2 имеет распределение $\sigma^2 \chi^2$ с $n+1$ степенью свободы и моментами

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 &= M[s_n^2] = (n+1)\sigma^2 + a_n, \\ D[s_n^2] &= 2(n+1)\sigma^4. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Практическое использование выражения (5.96) для определения степени сглаживающего полинома невозможно из-за незнания величин P_r и a_n . Поэтому возникает задача об установлении критериев выбора степени сглаживающего полинома, основанных на использовании априорных данных и результатов измерений.

5.5.2. Критерии выбора степени сглаживающего полинома при известной дисперсии ошибок измерений

Пусть имеется последовательность измерений $h(t_i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, процесса $z(t)$, описываемого полиномом (5.76) степени k . Относительно степени полинома $z(t)$ известно лишь, что $k \leq N-1$. Ошибки измерений $\delta h(t_i)$ — независимые нормально распределенные случайные величины, характеризующиеся нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 . Требуется выбрать степень сглаживающего полинома так, чтобы на интервале измерений обеспечивались наилучшие оценки $\hat{z}(t)$ исследуемого процесса $z(t)$. Смысл понятия «наилучшие оценки» уточняется ниже.

Возможны два подхода к выбору степени сглаживающего полинома. Первый из них ставит задачей найти такую степень аппроксимирующего многочлена, при которой ожидается минимальная дисперсия сглаженных значений. Поскольку эта дисперсия является мерой качества аппроксимации, такой подход можно назвать прямым решением задачи сглаживания.

Используя зависимости (5.94) и (5.97), записываем следующее выражение для дисперсии Δ_n^2 совокупности сглаженных значений:

$$\Delta_n^2 = M[W_n^2] - [N - 2(n+1)]\sigma^2. \quad (5.98)$$

Сумма квадратов отклонений измерений от сглаженных значений (5.87) при $n=k$ представляет собой несмещенную оценку математического ожидания величины W_n^2 . Поэтому случайная величина

$$\hat{\Delta}_n^2 = W_n^2 - [N - 2(n+1)]\sigma^2 \quad (5.99)$$

является несмещенной оценкой дисперсии Δ_n^2 . Степень $\hat{n}_{1 \text{ опт}}$, при которой оценка (5.99) минимальна, можно считать наилучшей для сглаживания, поскольку $M[\hat{n}_{1 \text{ опт}}] = \bar{n}_{1 \text{ опт}}$, где $\bar{n}_{1 \text{ опт}}$ — степень аппроксимирующе-

го полинома, при которой обеспечивается минимум дисперсии сглаженных значений.

Критерий, лежащий в основе рассмотренного решения, условимся называть первым критерием сглаживания и обозначать d_1 .

Второй подход к выбору степени аппроксимирующего полинома не ставит явно целью минимизацию дисперсии сглаженных значений, поэтому будем называть его косвенным решением задачи сглаживания. Этот подход реализуется в двух схемах решения в форме проверки статистических гипотез о значимости коэффициентов аппроксимирующего полинома.

Одна схема решения состоит в проверке относительно совокупности коэффициентов сглаживающего полинома гипотезы о равенстве нулю всех соответствующих коэффициентов функции $z(t)$. Так как принято, что $z(t)$ представляет собой полином степени k , то в соответствии с (5.78) $C_r = P_r$ для $r = k+1, k+2, \dots, N-1$.

Случайная величина $\sum_{r=k+1}^{N-1} \hat{C}_r \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i)$ распределена

в этом случае как $\sigma^2 \chi^2$ с $N-k-1$ степенями свободы. Отметим, что при этом нет необходимости вычислять все коэффициенты C_r , поскольку при аппроксимации измерений полиномом степени $N-1$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} a_{N-1}^2(t_i) &= \sum_{i=0}^{N-1} h^2(t_i) - 2 \sum_{r=0}^n \hat{C}_r \sum_{i=0}^{N-1} h(t_i) \varphi_r(t_i) - \\ &- 2 \sum_{r=n+1}^{N-1} \hat{C}_r \sum_{i=0}^{N-1} h(t_i) \varphi_r(t_i) + \sum_{r=0}^n \hat{C}_r \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) + \\ &+ \sum_{r=n+1}^{N-1} \hat{C}_r \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) = \sum_{i=0}^{N-1} h^2(t_i) - \sum_{r=0}^n \hat{C}_r \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) - \\ &- \sum_{r=n+1}^{N-1} \hat{C}_r \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{r=n+1}^{N-1} \hat{C}_r \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) = W_n^2. \quad [(5.100)]$$

Следовательно, проверка на значимость коэффициентов аппроксимации выше n тождественна проверке гипотезы о том, что статистика W_n^2 имеет распределение $\sigma^2\chi^2$ с $N-n-1$ степенями свободы. Такая операция в [2] называется проверкой гипотезы о наличии параболической регрессии n -го порядка.

Выбор степени сглаживающего полинома по рассматриваемой схеме осуществляют следующим образом. Аппроксимируя измерения $h(t_i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, многочленами возрастающей степени n , вычисляют статистику

$$W_n^2 = \sum_{i=0}^{N-1} h^2(t_i) - \sum_{r=0}^n \hat{C}_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) \quad (5.101)$$

и проверяют каждый раз выполнение неравенства

$$W_n^2 < \sigma^2 \chi_p^2(N-n-1), \quad (5.102)$$

где $\chi_p^2(N-n-1)$ — табличное значение распределения χ^2 с $N-n-1$ степенями свободы при доверительной вероятности p . В качестве подходящего сглаживающего полинома принимают тот, при котором впервые выполняется условие (5.102). Такой критерий будем называть вторым критерием сглаживания и обозначать d_2 . Полученную при этом степень сглаживающего полинома обозначим n_2 .

Другая схема решения состоит в проверке относительно каждого в отдельности коэффициента аппроксимирующего полинома C_r , $r=0, 1, \dots, N-1$, гипотезы о равенстве нулю соответствующего коэффициента C_r . Если гипотеза верна, то случайная величина $C_r^2 = p_r^2$ имеет распределение $\sigma^2\chi^2$ с одной степенью свободы. Проверяемый коэффициент считается значимым и включается в аппроксимацию, если выполняется условие

$$\hat{C}_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) \geq \sigma^2 \chi_p^2(1), \quad (5.103)$$

где $\chi_p^2(1)$ — табличное значение распределения χ^2 с одной степенью свободы при доверительной вероятности p . В противном случае проверяемый коэффициент считается незначимым и не включается в аппроксимирующий многочлен. Последний критерий будем называть третьим критерием сглаживания и обозначать d_3

Проанализируем введенные критерии сглаживания, с тем чтобы найти по возможности наилучшее решение задачи сглаживания. Имея дело со случайными величинами, принципиально невозможно построить такое статистическое решение, которое давало бы наилучший результат в каждом конкретном случае. Сами статистические решения являются случайными, так что сравнивать их можно лишь с помощью неслучайных параметров, которыми они характеризуются. В рассматриваемом случае в качестве параметра, характеризующего качество сглаживания, может быть принята дисперсия сглаженных значений Δ^2_n . Поэтому под оптимальным будем понимать такое решение задачи сглаживания, которое в среднем по множеству реализаций обеспечивает минимальное значение случайной величины s^2_n . В терминах теории статистических решений величина s^2_n называется потерей, а ее математическое ожидание Δ^2_n при некотором статистическом решении — функцией риска этого решения. Оптимальным является решение с минимальной функцией риска.

Перечисленные решения задачи сглаживания по существу состоят в том, что относительно каждого из ортогональных полиномов так или иначе решается вопрос о его включении или не включении в состав аппроксимирующего многочлена. Первый и второй критерии, устанавливающие подходящую степень аппроксимирующего полинома, включают в сглаживание все те полиномы, порядок которых не превосходит этой степени. Третий критерий индивидуально решает вопрос о включении в сглаживание каждого ортогонального полинома.

Из анализа дисперсионных характеристик различных критериев следует, что они дают практически одинаковые результаты, если разложение функции $z(t)$ содержит только большие коэффициенты

$$\left| C_r \left(\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) \right)^{1/2} \right| > 5\sigma, \quad r=0, 1, \dots, N-1.$$

Однако для случаев, представляющих наибольший практический интерес, когда изменчивость процесса $z(t)$ не очень велика по сравнению с ошибками измерений, результаты сглаживания по различным критериям могут иметь значительные расхождения.

Сравним достоинства и недостатки различных критериев сглаживания. Критерий d_2 является наиболее эффективным, когда в спектре исследуемого процесса велика несущественная часть (высокочастотная составляющая, в которой величины $C_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i)$ не превосходят σ^2).

Недостатком критерия является его «смещенность»: при используемых обычно больших значениях вероятностной критерий в среднем дает заниженную степень полинома, как бы «пересглаживает» измерения.

Достоинство критерия d_1 в том, что он не имеет столь явной «смещенности», как d_2 . Однако проверка статистических гипотез при d_1 производится начиная с минимального числа степеней свободы, в то время как при d_2 — начиная с максимального их числа. Поэтому для указанных выше случаев критерий d_1 менее эффективен. Общим недостатком критериев d_1 и d_2 является то, что они включают в аппроксимацию все ортогональные полиномы до степени, на которой сработал критерий. Однако существенная часть спектра исследуемого процесса $z(t)$ может быть весьма неравномерной и содержать среди больших коэффициентов значительное количество малых. Включение последних в аппроксимацию ведет к неоправданному увеличению дисперсии сглаженных значений. От этого недостатка свободен критерий d_3 . Зато критерий d_3 мало эффективен на несущественной части спектра.

Критерий d_2 имеет перед остальными критериями большое преимущество, которое являясь по существу техническим, тем не менее чрезвычайно важно. Степени аппроксимирующих полиномов в практике статистической обработки радиотехнических траекторных измерений сравнительно невелики, в то время как количество измерений N может быть весьма большим. Если априорные сведения о спектре исследуемого процесса отсутствуют, то критерии d_1 и d_3 , в принципе, требуют проверки всех ортогональных полиномов до $(N-1)$ -го порядка включительно, поскольку они не содержат никакой информации о степенях, превышающих проверяемую. Вместе с тем известно, что применение ортогональных полиномов высоких порядков весьма нежелательно,

так как погрешности вычислений на ЭВМ быстро растут с увеличением степени полинома. Статистика W^2_n , на использовании которой основан критерий d_2 , несет в себе информацию о всей оставшейся части спектра исследуемого процесса — от $r=k+1$ до $r=N-1$. При срабатывании критерия d_2 можно получить оценки относительно этой части спектра. Поэтому при аппроксимации по критерию d_2 практически не приходится вычислять полиномы очень высоких порядков.

На основе проведенного анализа может быть разработана методика решения задачи сглаживания измерений процесса с неизвестными параметрами. Такое решение должно предусматривать использование комбинации рассмотренных критериев, применяемых последовательно. Сначала выполняется сглаживание по критерию d_2 при выбранной доверительной вероятности p (полученный результат может представлять самостоятельный интерес, поскольку он характеризуется фиксированной надежностью: с вероятностью p полученные вариации исследуемого процесса не обусловлены случайными ошибками измерений). Величина p должна быть достаточно большой с тем, чтобы можно было пренебречь вероятностью $\alpha=1-p$ ошибки первого рода, когда отвергается правильная гипотеза. Это означает, что практически критерий будет срабатывать при степени n , не большей, чем степень k полинома $z(t)$, т. е. измерения $h(t_i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, будут в среднем «пересглаживаться» ($a_n > 0$).

Если степень n находится за пределами существенной части спектра исследуемого процесса $z(t)$, т. е. величина a_n состоит из малых значений слагаемых $C^2_r \times$

$$\times \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i), \text{ то найденное решение задачи сглаживания}$$

не может быть улучшено путем повышения степени аппроксимации. Если же в сумме a_n среди первых слагае-

$$\text{мых имеются величины } C^2_r \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i), \text{ большие } \sigma^2, \text{ то ап-}$$

проксимация может быть улучшена за счет включения соответствующих ортогональных полиномов в сглаживание. Включение в аппроксимацию каждого r -го ортогонального полинома уменьшает дисперсию сглаженных значе-

ний соответственно на величину $C_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i)$ и увели-

чивает эту дисперсию примерно на величину σ^2 . Поэтому по величине a_n можно определить, сколько дополнительных полиномов (после степени n) следует проверить для возможного включения их в сглаживание. Нетрудно видеть, что это количество l равно целой части отношения a_n/σ^2 , ибо как бы ни были распределены значения

$C_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i)$ в составе a_n , при степени аппроксимации,

большой $k+l$, дисперсия сглаженных значений только возрастает.

Для определения оценки сверху величины a_n в работе [31] рекомендуется использовать формулу

$$\hat{a}_n = \sigma^2 \frac{u_p}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu}, \quad (5.104)$$

где $\mu = N - n - 1$; u_p — квантиль нормального стандартного распределения, отвечающая уровню вероятности P . Зависимость (5.104) справедлива при $\mu > 50$.

Для оценки величины \hat{a}_n при числе степеней свободы $\mu < 50$ могут быть использованы следующие приближенные зависимости:

$$\begin{aligned} \text{при } P=0,90 \quad \hat{a}_n &= 3\sigma^2, & \text{если } \mu \leq 10; \\ & \hat{a}_n = [3 + 0,08(\mu - 10)]\sigma^2, & \text{если } 10 < \mu < 50; \\ \text{при } P=0,95 \quad \hat{a}_n &= 5\sigma^2, & \text{если } \mu \leq 10; \\ & \hat{a}_n = [5 + 0,08(\mu - 10)]\sigma^2, & \text{если } 10 < \mu < 50. \end{aligned}$$

С увеличением доверительной вероятности P значение l возрастает. Поэтому вероятность P для критерия d_2 нельзя брать чрезмерно близкой к единице — это приведет к существенным потерям за счет больших значений l .

Для проверки l дополнительных степеней самым подходящим является критерий d_1 ввиду его относительной несмещенности (по сравнению с d_2) и эффективности на существенной части спектра (по сравнению с d_3). Проверка по критерию d_1 начинается со степени $n+1$. Степень \bar{n} , при которой в последний раз срабатывает этот

критерий ($n \leq \tilde{n} \leq n+l$), принимается в качестве наилучшей.

Если существенная часть спектра исследуемого процесса $z(t)$ (от $r=0$ до $r=\tilde{n}$) содержит значительное количество малых коэффициентов, то решение задачи сглаживания может быть улучшено за счет исключения ортогональных полиномов с малыми коэффициентами путем применения критерия d_3 . Поэтому в качестве заключительного этапа решения задачи сглаживания целесообразно производить проверку по критерию d_3 . По этому критерию аппроксимация выполняется до максимальной степени \tilde{n} с проверкой на необходимость включения в сглаживание слагаемых с коэффициентами C_r ($r=0, 1, \dots, \tilde{n}$) по условию (5.103).

Таким образом, алгоритм решения задачи сглаживания дискретных измерений исследуемого процесса при известной дисперсии σ^2 ошибок измерений строится следующим образом.

1. Проверка по критерию d_2 . Аппроксимируют измерения $h(t_i)$ ($i=1, 2, \dots, N-1$) многочленами возрастающей степени n ($n=0, 1, \dots$) и проверяют каждый раз выполнение неравенства

$$W_{n, p}^2 < \sigma^2 \chi_{p, N-n-1}^2, \quad (5.105)$$

где

$$W_{n, p}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} h^2(t_i) - \sum_{r=0}^n \hat{C}_r \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i);$$

$\chi_{p, N-n-1}^2$ — выбираемое из таблицы χ^2 -распределения по уровню вероятности p значение распределения χ^2 с $N-n-1$ степенями свободы.

В качестве подходящего значения n_2 степени сглаживающего полинома принимается та степень, при которой впервые выполняется условие (5.105).

2. Определение количества дополнительно проверяемых ортогональных полиномов:

$$\begin{aligned} l &= q, & \text{если } \mu &\leq 10; \\ l &= \{q + 0,08(\mu - 10)\}_{\text{целая часть}}, & \text{если } 10 < \mu < 50; \\ l &= \{u_p \sqrt{\mu/2}\}_{\text{целая часть}}, & \text{если } \mu &\geq 50, \end{aligned} \quad (5.106)$$

где $\mu = N - n_2 - 1$ — число степеней свободы; $u_p = 1,282$; $q = 3$, если доверительная вероятность $P = 0,90$ и $u_p = 1,645$; $q = 5$, если $P = 0,95$.

3. Проверка по критерию d_1 начинается со степени $n=n_2+1$ и заканчивается при $n=n_2+l$. Степень полинома n_1 , при которой в последний раз выполняется неравенство

$$\sum_{r=n_2+1}^n \widehat{C}_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) > 2(n+1)\sigma^2, \quad (5.107)$$

принимается в качестве наилучшей.

4. Проверка по критерию d_3 предусматривает проверку всех коэффициентов C_r , $r=0, 1, \dots, n_1$, включенных в аппроксимацию, по критерию (5.103):

$$\widehat{C}_r^2 \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_r^2(t_i) \geq \sigma^2 \chi_p^2(1). \quad (5.108)$$

Если условие (5.108) выполняется, то слагаемое $\widehat{C}_r \varphi_r(t)$ включается в аппроксимирующий многочлен (5.77):

$$\widehat{z}(t) = \sum_{r=0}^{n_1} \widehat{C}_r \varphi_r(t),$$

в противном случае — не включается.

5.5.3. Критерии выбора степени сглаживающего полинома при неизвестной дисперсии ошибок измерений

Решение вопроса о выборе степени сглаживающего полинома при неизвестной дисперсии σ^2 ошибок измерений основывается на использовании статистики R_n [30]

$$R_n = \frac{K_n}{W_n^2} = \frac{\sum_{i=0}^{N-2} [h(t_i) - \widehat{z}_n(t_i)] [h(t_{i+1}) - \widehat{z}_n(t_{i+1})]}{\sum_{i=0}^{N-1} [h(t_i) - \widehat{z}_n(t_i)]^2}, \quad (5.109)$$

представляющей собой оценку коэффициента автокорреляции при единичном сдвиге для отклонений измеренных величин от их сглаженных полиномом степени n значений. Величина R_n определяет взаимную коррелированность отклонений, взятых из одной совокупности, а именно коррелированность всех пар соседних значений $[h(t_i) - \widehat{z}_n(t_i)]$.

В случае равноотстоящих измерений ($t_{i+1} = t_i + \Delta t$; $\Delta t = \text{const}$; $i = 0, 1, \dots, N-2$) первые два момента распределения случайной величины R_n имеют вид

$$M[R_n] = -\frac{n+1}{N}; \quad D[R_n] = \frac{(N-n-2)^2(N+n+1)}{N^2(N-1)(N-n+1)}. \quad (5.110)$$

Если степень аппроксимирующего полинома $\hat{z}(t)$ равна степени исследуемого полинома $z(t)$, т. е. $n=k$, то $a_n=0$ и распределение статистики R_n не зависит от величины σ^2 . С увеличением числа степеней свободы $\mu = N-n-1$ распределение R_n стремится к нормальному. Строя для статистики R_n приближенный доверительный интервал, как для нормального закона, можно проверять гипотезы о порядке уравнения исследуемого процесса.

Гипотеза $k=n$ принимается, если выполняется условие

$$R_n > M[R_n] + u_p \sqrt{D[R_n]}, \quad (5.111)$$

где u_p — квантиль нормального стандартного закона распределения при уровне вероятности P .

Критерий выбора степени аппроксимирующего полинома, основанный на использовании статистики R_n , обозначают d'_2 , поскольку он эквивалентен критерию d_2 .

В работе [30] доказывается, что критерий d'_2 асимптотически (при $\mu \rightarrow \infty$) мощнее критерия d_2 , т. е. при равной вероятности ошибки первого рода $\alpha = 1 - P$ он обеспечивает меньшую вероятность ошибки второго рода (принятия гипотезы, когда она неверна). Это означает, что при больших значениях числа степеней свободы μ критерий d'_2 срабатывает в среднем ближе к действительной степени k , чем критерий d_2 . Следовательно, неслучайный остаток a_n в статистике W_n^2 при срабатывании критерия d'_2 в среднем меньше, чем при срабатывании критерия d_2 . Это позволяет после выполнения условия (5.111) величину

$$\hat{\sigma}_n^2 = W_n^2 / (N - n - 1) \quad (5.112)$$

принять за оценку дисперсии ошибок измерений σ^2 . При этом среднее квадратическое отклонение σ находится в пределах доверительного интервала $[\gamma_1 \hat{\sigma}_n; \gamma_2 \hat{\sigma}_n]$, где

величины γ_1 и γ_2 определяются из табл. 1 приложений по заданному уровню вероятности P и числу степеней свободы $\mu = N - n - 1$.

Таким образом, процедура сглаживания дискретных измерений исследуемого процесса при неизвестной дисперсии ошибок измерений σ^2 отличается от рассмотренной выше лишь тем, что на первом ее этапе вместо критерия d_2 (проверка условия (5.105)) используется критерий d'_2 , т. е. проверяется условие (5.111). Все остальные этапы решения задачи, рассмотренные в п. 5.5.2, остаются без изменения.

Однако при этом полезно иметь в виду следующее. При высоком уровне доверительной вероятности P критерий d'_2 , подобно критерию d_2 , в среднем занижает значение степени сглаживающего полинома, т. е. в среднем $a_n > 0$. Величина $\hat{\sigma}_n^2$ является несмещенной оценкой дисперсии ошибок измерений σ^2 лишь в том случае, когда неслучайное слагаемое a_n в статистике W_n^2 равно нулю, т. е. при отсутствии методической ошибки сглаживания ($n=k$). Поэтому при вычислении оценки дисперсии $\hat{\sigma}_n^2$ с использованием аппроксимирующего полинома степени n'_2 , найденной из условия (5.111), получается в среднем завышенная оценка дисперсии σ_n^2 . Целесообразно уточнить эту оценку путем повторного применения критерия d_1 : после нахождения степени n_1 по условию (5.107) следует вычислить снова оценку дисперсии $s_{n,1}^2 = \hat{\sigma}_n^2$ по формуле (5.112) и повторить проверки дополнительных степеней по критерию d_1 с использованием уточненной оценки $s_{n,1}^2$ дисперсии ошибок измерений.

5.6. Исключение из обработки аномальных результатов измерений

Практика статистической обработки радиотехнических траекторных измерений показывает, что среди множества результатов измерений имеются отдельные значения, которые резко отличаются от всех остальных. Такие измерения называют аномальными. Появление аномальных результатов измерений на входе ЭВМ, ведущей статистическую обработку измерений, обусловлено машинными сбоями при предварительной математи-

ческой обработке измерений, сбоями при передаче данных по линиям связи и сбоями работы самого измерительного средства. Возникновение сбоев определяется внешними и внутренними факторами. Влияние внешних факторов (колебание питающих напряжений, воздействие вибрационных и ударных нагрузок, изменение температуры окружающей среды и т. д.) в значительной степени может быть исключено применением стабилизирующих устройств, различного рода амортизаторов и систем кондиционирования воздуха. Внутренние факторы (флуктуации параметров радиоэлементов, постепенное изменение граничных значений параметров радиоэлементов за счет их старения и т. п.) в основном характеризуются постепенными отказами, которые проявляют себя через сбой. При оптимальной организации периодичности и качества профилактических работ постепенные отказы могут быть сведены к минимуму. Сбои в работе измерительных средств также зависят от перечисленных факторов, но главным образом обусловлены неправильным устранением неоднозначности измеряемой функции (наклонной дальности, направляющих косинусов и т. п.) при первичной математической обработке результатов измерений.

Аномальные измерения, нарушающие статистический характер информации об изучаемом по экспериментальным данным процессе, необходимо исключить из последующей обработки. Ниже на простом примере показано, как учет аномальных измерений может существенно исказить результаты статистической обработки измерений.

Способы отбраковки измерений базируются на априорных данных о характере изменения измеряемых функций во времени. Вместе с тем известно, что по нормальному закону при устойчивых условиях наблюдений возможны весьма большие отклонения результатов отдельных измерений от их истинных значений, хотя вероятность таких отклонений очень мала. Это свойство измерений исключает возможность достоверного решения вопроса о принадлежности данного измерения, резко отличающегося от других, к имеющейся выборке. Теория вероятностей может дать только вероятностную оценку аномальности данного измерения.

Исключение из совокупности траекторных измерений аномальных результатов целесообразно осуществлять

в процессе их получения и математической обработки. При этом можно использовать комбинацию закономерностей изменения измеряемых параметров движения ЛА.

Проверку результатов измерений на аномальность в процессе их получения проводят по условию нахождения измерений в допустимых пределах изменения:

$$h_{\min} \leq h_i \leq h_{\max}, \quad (5.113)$$

где h_i — измеренное значение параметра движения ЛА в текущий момент времени t_i ; h_{\min} , h_{\max} — допустимые минимальное и максимальное значения измеряемого параметра для данного типа траектории ЛА.

Дополнением к критерию (5.113) может служить проверка модуля разности двух соседних во времени измерений одного и того же параметра:

$$|h_{i+1} - h_i| \leq \dot{z}_{\max} |t_{i+1} - t_i|, \quad (5.114)$$

где \dot{z}_{\max} — максимальное значение скорости изменения параметра для данного типа траектории ЛА.

Исключение аномальных измерений можно производить также в процессе предварительной статистической обработки измерений на ЭВМ, используя так называемую опорную выборку измерений. Опорной выборкой измерений условимся называть ν измерений, не содержащих аномальных результатов. Объем выборки ν устанавливается заранее, исходя из условия, чтобы на интервале выполнения этих измерений (t_1, t_ν) измеряемую функцию $z(t)$ можно было представить полиномом n -го порядка. Примем, что ошибки измерений δh_i ($i=1, 2, \dots, \nu$) представляют собой независимые нормально распределенные случайные величины, характеризуемые нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

Проверка измерений на аномальность ведется в следующей последовательности.

А. Получение опорной выборки измерений.

1. Составляют выборку из первых полученных ν измерений.

2. Вычисляют сглаженные значения измерений

$$\hat{z}_k = \sum_{j=0}^n \hat{C}_j \varphi_j(t_k), \quad k=1, 2, \dots, \nu, \quad (5.115)$$

где

$$\widehat{C}_j = \frac{\sum_{k=1}^v h_k \varphi_j(t_k)}{\sum_{k=1}^v \varphi_j^2(t_k)}, \quad (5.116)$$

$$\varphi_0(t_k) = 1,$$

$$\varphi_j(t_k) = t_k^j - \frac{\sum_{k=1}^v t_k^j \varphi_{j-1}(t_k)}{\sum_{k=1}^v \varphi_{j-1}^2(t_k)} \varphi_{j-1}(t_k) - \dots - \frac{\sum_{k=1}^v t_k^j}{L^j}. \quad (5.117)$$

3. Рассчитывают оценку $\widehat{\sigma}$ среднего квадратического отклонения ошибок измерений

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^v (h_k - \widehat{z}_k)^2}{v - n - 1}}. \quad (5.118)$$

4. Учитывая, что случайная величина

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^v (h_k - \widehat{z}_k)^2$$

распределена как χ^2_{v-n-1} , составляют доверительный интервал

$$J = [\gamma_1 \widehat{\sigma}; \gamma_2 \widehat{\sigma}], \quad (5.119)$$

где величины γ_1 и γ_2 определяют из табл. 1 приложения по заданному уровню вероятности p и числу степеней свободы $\mu = v - n - 1$.

5. Проверяют выполнение неравенства

$$\gamma_1 \widehat{\sigma} \leq \sigma \leq \gamma_2 \widehat{\sigma}. \quad (5.120)$$

Если условие (5.120) выполняется, то это свидетельствует о правильности определения оценки $\widehat{\sigma}$ среднего квадратического отклонения ошибок измерений, что возможно для случая, когда в выборке отсутствуют аномальные измерения. Данная выборка может быть принята в качестве опорной. Если же неравенство (5.120) не выполняется, то к взятой выборке добавляется следующее по времени измерение и исключается первое изме-

рение. Полученная новая выборка из ν измерений обрабатывается по формулам (5.115)—(5.119). Если при этом условие (5.120) выполняется, то считают, что опорная выборка получена. В противном случае первое измерение включается в выборку, а второе — исключается из нее и проверка повторяется заново. Так последовательно проверяются на аномальность первое, второе, ..., ν -е измерения. При первом выполнении неравенства (5.120) считают, что опорная выборка измерений найдена. В случае, если неравенство (5.120) не выполнено ни разу, то это означает, что среди проверяемой выборки имеется более одного аномального измерения. В этом случае исключают первое измерение, добавляют еще одно очередное измерение и обрабатывают составленную выборку измерений рассмотренным выше способом по формулам (5.115)—(5.119) с проверкой неравенства (5.120). Описанный процесс продолжается до первого выполнения неравенства (5.120). Выборка, обеспечивающая выполнение этого неравенства, считается опорной.

Б. Проверка поступающих измерений

1. Исключают из опорной выборки первое измерение и добавляют очередное измерение.

2. По формулам (5.115)—(5.119) рассчитывают сглаженные значения измерений \hat{z}_k , оценку $\hat{\sigma}$ среднего квадратического отклонения ошибок измерений и доверительный интервал $[\gamma_1\hat{\sigma}; \gamma_2\hat{\sigma}]$.

3. Проверяют выполнение неравенства (5.120). При удовлетворении этого неравенства считают, что проверяемое измерение достоверное и может быть использовано в последующей статистической обработке. В качестве опорной выборки принимают ν последних измерений и переходят к проверке следующего измерения. Если же условие (5.120) не выполняется, то очередное измерение считается аномальным и исключается из обработки. Далее аналогично проверяется следующее измерение и т. д.

В случае, если количество аномальных измерений, следующих друг за другом, превзойдет некоторое наперед заданное число m , то переходят к отысканию новой опорной выборки. На этапе смены опорной выборки полезно включить проверку критерия контроля правильности раскрытия неоднозначности.

Поясним приведенный метод исключения аномальных результатов измерений на примере.

По заданным координатам точек траектории центра масс ЛА и положению радиодальномерной станции относительно траектории на ЭВМ были рассчитаны значения наклонной дальности D_k для семи точек траектории, соответствующих времени измерения t_k . После этого в ЭВМ с помощью датчика псевдослучайных чисел вырабатывались независимые «случайные» ошибки измерений, распределенные по нормальному закону и характеризующиеся средним квадратическим отклонением $\sigma=30$ м. При сложении этих «ошибок измерений» с полученными величинами D_k были определены так называемые измеренные значения наклонной дальности h_k . В точках $k=4$ и $k=7$ имитировано получение аномальных результатов измерений (см. табл. 5.3).

Таблица 5.3

k	1	2	3	4	5	6	7
$t_k, \text{с}$	0,0	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5	4,2
$D_k, \text{м}$	662 655	667 221	671 787	676 353	680 919	685 484	690 050
$h_k, \text{м}$	662 710	667 229	671 806	0	680 874	685 508	590 100
$t_k - \bar{t}, \text{с}$	-1,4	-0,7	0	0,7	1,4	—	—
$\widehat{D}_k, \text{м}$	662 704	599 614	536 524	473 434	410 344	—	—
$h_k - \widehat{D}_k, \text{м}$	6	67 615	135 282	-473 434	270 530	—	—

На рассматриваемом интервале в 4,2 с можно считать, что измеряемая функция $z(t)$ изменяется по линейному закону. Примем $v=5$. При заданных условиях сглаживание измерений h_k ($k=1, 2, \dots, 5$) может быть произведено полиномом первой степени. Тогда зависимости (5.115)–(5.117) примут вид

$$\varphi_0(t_k) = 1; \quad \varphi_1(t_k) = t_k - \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v t_k = t_k - \bar{t}; \quad (5.121)$$

$$\widehat{C}_0 = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v h_k; \quad \widehat{C}_1 = \frac{\sum_{k=1}^v h_k (t_k - \bar{t})}{\sum_{k=1}^v (t_k - \bar{t})^2};$$

$$\widehat{D}_k = \widehat{C}_0 + \widehat{C}_1 (t_k - \bar{t}).$$

По формулам (5.121) рассчитаны значения параметров $\bar{t}=1,4$ с; $\hat{C}_0=536\,523,8$ м; $\hat{C}_1=-90\,128,7$ м/с, а по зависимости (5.118) — оценка среднего квадратического отклонения ошибок измерений наклонной дальности $\hat{\sigma}=326\,700$ м. После этого по выбранным из табл. 1 приложения значениям нижней γ_1 и верхней γ_2 границы доверительного интервала χ^2 -распределения при уровне вероятности $p=0,95$ и числе степеней свободы $\mu=3$ был составлен доверительный интервал $[0,566 \cdot 326\,700; 3,73 \cdot 326\,700]$ м $= [184\,912; 1\,218\,591]$ м.

Проверка неравенства (5.120), которое для рассматриваемого примера имеет вид $(184\,912 \leq 30 \leq 1\,218\,591)$ м, показала, что среди имеющейся выборки измерений имеется аномальный результат. Это говорит о том, что первые пять измерений заданной выборки не составляют опорного интервала.

В соответствии с приведенными выше рекомендациями из анализируемой выборки из пяти первых измерений исключаем первое и добавляем шестое, т. е. исследуем выборку измерений h_k при $k=2, 3, 4, 5, 6$. В результате статистической обработки этих измерений по формулам (5.121) получаем приведенные в табл. 5.4 данные.

Расчетом по формуле (5.118) получена оценка среднего квадратического отклонения ошибок измерений $\hat{\sigma}=349\,268$. Проверка неравенства $(197\,686 \leq 30 \leq 1\,302\,770)$ м показала наличие аномального результата измерений. После этого анализируются измерения h_k при $k=1, 3, 4, 5, 6$. Для этого случая неравенство (5.120), имеющее вид $(197\,354 \leq 30 \leq 1\,300\,584)$ м, также не удовлетворяется.

Таблица 5.4

k	2	3	4	5	6
t_k , с	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5
h_k , м	667 229	671 806	0	680 874	685 508
$t_k - \bar{t}$, с	-1,4	-0,7	0	0,7	1,4
\hat{D}_k , м	531 958	536 521	541 083	545 646	550 209
$h_k - \hat{D}_k$, м	135 271	135 285	-541 083	135 228	135 299

Проверяем измерения h_k при $k=1, 2, 4, 5, 6$. Получающиеся при этом неравенство $(196\,532 \leq 30 \leq 1\,295\,168)$ м также не выполняется.

Проводим обработку измерений с индексами $k=1, 2, 3, 5, 6$. В результате находим $C_0=673\,625,4$ м; $C_1=6\,509,3$ м/с; $\bar{t}=1,68$ с; $\hat{\sigma}=29,5$ м. Остальные данные приведены в табл. 5.5. Неравенство

(5.120), имеющее в данном случае вид $(16,7 \leq 30 \leq 110)$ м, удовлетворяется, что свидетельствует об отсутствии в рассматриваемых измерениях аномальных результатов.

Таблица 5.5

k	1	2	3	4	5	6
t_k, c	0,0	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5
$D_k, м$	662 655	667 221	671 787	676 353	680 919	685 484
$h_k, м$	662 710	667 229	671 806	—	680 874	685 508
$t_k - \bar{t}, c$	-1,68	-0,98	-0,28	0,42	1,12	1,82
$\hat{D}_k, м$	662 690	667 246	671 803	(676 359)	680 916	685 472
$h_k - \hat{D}_k, м$	20	-17	3	—	-42	12

Таким образом, измерения в точках $k=1, 2, 3, 5, 6$ могут быть приняты в качестве опорной выборки. Используя опорную выборку, проверим очередное седьмое измерение (см. табл. 5.3.). Для этого по формулам (5.121), где $k=2, 3, 5, 6, 7$, рассчитываем сглаженное значение измерения \hat{D} для $k=7$ (табл. 5.6), оценку среднего квадратического отклонения ошибок измерений $\hat{\sigma}=39\ 352$ м и доверительный интервал $[0,566 \cdot 39\ 352; 3,73 \cdot 39\ 352]$ м = $[22\ 273; 146\ 783]$ м.

Таблица 5.6

k	2	3	5	6	7
t_k, c	0,7	1,4	2,8	3,5	4,2
$D_k, м$	667 221	671 787	680 919	685 484	690 050
$h_k, м$	667 229	671 806	680 874	685 508	590 100
$t_k - \bar{t}, c$	-1,82	-1,12	0,28	0,98	1,68
$\hat{D}_k, м$	683 499	674 116	655 350	645 967	636 584
$h_k - \hat{D}_k, м$	-16 270	-2 310	25 524	39 541	-46 484

Проверка неравенства $(22\ 273 \leq 30 \leq 146\ 783)$ м показывает, что анализируемое измерение h_7 является аномальным и должно быть исключено из последующей статистической обработки.

Отметим, что при необходимости для последующей обработки могут быть использованы сглаженные значе-

ния измерений вместо исключенных аномальных измерений в точках $k=4$ (в табл. 5.5 записано в скобках) и $k=7$ (экстраполированное по данным табл. 5.5 значение $D_7=690\ 029$ м). Это иногда целесообразно делать в связи с тем, что алгоритмы статистической обработки равноотстоящих по времени измерений значительно проще, чем алгоритмы обработки неравноотстоящих измерений.

Кроме того, рассмотренный метод исключения аномальных измерений удобен для использования в процессе предварительного осреднения измерений, когда для последующей статистической обработки используются лишь средние на некотором интервале из ν точек измерения. В этом случае вычисленное после исключения аномальных измерений по формуле (5.115) сглаженное значение измерения для момента времени, соответствующего середине интервала осреднения, может быть использовано в дальнейшей обработке. Однако рассмотренным способом не удастся полностью исключить из обработки все аномальные измерения. Поэтому выявление аномальных измерений необходимо вести и в процессе последующей статистической обработки измерений. Методика проведения анализа измерений на аномальность при определении движения ЛА по результатам радиотехнических траекторных измерений рассмотрена в гл. 9.

6

ОЦЕНИВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Для эффективного использования результатов измерений, получаемых от радиотехнических траекторных измерительных средств, с помощью которых ведется наблюдение за движением ЛА, должны быть достаточно достоверно известны вероятностные характеристики ошибок измерений.

Проектные значения характеристик точности работы измерительных средств в большинстве случаев лишь приближенно отражают фактическую картину ошибок

измерений. Поэтому использование при статистической обработке измерений проектных значений точностных характеристик измерительных средств не позволяет достоверно определять движение ЛА.

Для определения значений вероятностных характеристик ошибок измерений используются как теоретические, так и экспериментальные данные. Так, на стадии разработки измерительного средства теоретическими исследованиями устанавливаются основные факторы, определяющие точность измерения параметров движения ЛА, и находится функциональная зависимость измеряемых параметров от этих факторов. Это дает возможность использовать для определения вероятностных характеристик ошибок измерений результаты анализа экспериментальных данных, полученных при испытаниях других средств, но имеющих идентичные звенья. Так, например, различные измерительные средства могут иметь близкие по параметрам генераторы, регистрирующие устройства, аппаратуру службы единого времени и др.

Таким образом, установив на основании теоретического анализа основные определяющие точность измерений факторы и рассчитав по данным экспериментов их вероятностные характеристики, можно определить искомые характеристики ошибок измерений.

Однако наиболее надежные данные о вероятностных характеристиках ошибок измерений могут быть получены лишь на основе экспериментально-теоретического анализа работы измерительного средства в реальных условиях. Это приводит к необходимости рассмотрения методов определения вероятностных характеристик ошибок измерений параметров движения ЛА на основе статистической обработки экспериментальных данных.

В данной главе излагается один из возможных методов определения вероятностных характеристик ошибок измерений. Рассматриваемый метод предназначен, в первую очередь, для обработки результатов измерений параметров движения ЛА радиотехническими траекторными измерительными средствами, но может быть использован также и для обработки измерений других средств наблюдения за движением ЛА, к которым применимо принятое в главе представление о характере и составе ошибок измерений.

6.1. Ошибки измерений. Задача оценивания вероятностных характеристик ошибок измерений

На основе анализа работы траекторных измерительных средств установлено, что ошибки, сопровождающие измерения параметров движения ЛА, зависят от параметров наземной и бортовой аппаратуры, от условий распространения радиоволн, способов регистрации и методики дешифровки результатов измерений и других факторов. Ошибки измерений являются случайными функциями времени наблюдения за движением ЛА.

При исследовании случайных функций в качестве их вероятностных характеристик могут быть использованы смешанные начальные и центральные моменты. Из них наиболее широко используются такие числовые характеристики, как математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция. Знание этих характеристик ошибок измерений необходимо для осуществления эффективной статистической обработки экспериментальных данных и оценки достоверности получаемых результатов.

Объективно существующие закономерности наблюдений, с которыми связаны случайные функции ошибок измерений, проявляются при массовом воспроизведении процессов наблюдения за движением ЛА. Поэтому интересующие нас вероятностные характеристики случайных функций ошибок измерений должны определяться на основе статистической обработки результатов экспериментов.

Вероятностные характеристики случайных функций, полученные статистической обработкой экспериментальных данных, имеют случайный характер и отличаются от истинных значений соответствующих вероятностных характеристик, поскольку используемые для их определения результаты экспериментов являются выборкой случайных величин ограниченного объема. Поэтому полученные по экспериментальным данным вероятностные характеристики называют статистическими вероятностными характеристиками, или оценками вероятностных характеристик.

Одна и та же статистическая характеристика случайной функции ошибок измерений может определяться различными методами, но все эти методы должны давать в среднем (в смысле вероятностного осреднения) значения, близкие к соответствующим истинным значе-

ниям вероятностных характеристик. С увеличением количества экспериментальных данных статистические вероятностные характеристики должны приближаться к истинным значениям этих характеристик.

В теории математической статистики разработаны методы получения оценок вероятностных характеристик случайных функций на основе экспериментальных данных [38—40]. Для того чтобы можно было воспользоваться этими методами для оценивания вероятностных характеристик ошибок измерений параметров движения ЛА, необходимо в первую очередь выделить ошибку измерения как функцию времени

$$\Delta h_{\text{ист}}(t) = h(t) - z(t), \quad (6.1)$$

где $h(t)$ и $z(t)$ — соответственно измеренное и истинное значения измеряемой функции в момент времени t .

Однако выделение ошибок измерений не во всех случаях представляется возможным, и основные трудности в получении статистических вероятностных характеристик случайной функции $\Delta h_{\text{ист}}(t)$ определяются именно этим обстоятельством. Дело в том, что наличие ошибок измерений $\Delta h_{\text{ист}}(t)$ по формуле (6.1) возможно при наличии истинной зависимости измеряемой функции от времени $z(t)$. Ясно, что в действительности истинные значения измеряемых параметров неизвестны. Поэтому для выделения ошибки $\Delta h(t)$ в практике обработки измерений иногда используется способ сравнения результатов измерений $h(t)$ с результатами измерения этой же функции другим, более точным средством, которое называют эталонным. При этом к эталонным значениям измеряемых параметров предъявляются следующие требования:

- несмещенность, т. е. значения этих параметров не должны содержать систематических ошибок;
- измеренные величины должны наиболее тесно группироваться около своих истинных значений, т. е. их дисперсии должны быть минимальными.

Так, например, при определении ошибок измерений угловых координат радиолокационными станциями указанным требованиям наиболее полно удовлетворяют параметры, определенные путем соответствующего пересчета опытных значений координат, полученных по данным измерений кинотеодолитов. Как показывает опыт эксплуатации кинотеодолитных станций, тщательное вве-

дене поправок в результаты измерений сводит до минимума инструментальные систематические ошибки. Практически можно считать, что величина ошибки кинотеодолитных измерений в основном определяется случайными погрешностями со средними квадратическими отклонениями, на порядок меньшими, чем средние квадратические отклонения измерения угловых координат радиолокационной станцией. Кроме того, статистической обработкой результатов кинотеодолитных измерений можно существенно уменьшить случайные ошибки в полученных координатах.

То обстоятельство, что дисперсии $\sigma_{h_0}^2(t)$ эталонного значения измеряемого параметра существенно меньше дисперсий $\sigma_h^2(t)$ непосредственных ошибок измерений, позволяет использовать в формуле (6.1) значения $h_0(t)$ вместо истинных значений измеряемых параметров, т. е. считать, что

$$\Delta h(t) = h(t) - h_0(t). \quad (6.2)$$

При последующем рассмотрении методики определения статистических характеристик ошибок траекторных измерений примем, что зависимость ошибки измерений параметра z от времени t известна. (Для сокращения записей условимся в последующем называть ошибками измерений ошибки измерения параметров движения ЛА). В общем случае ошибки измерений $\Delta h(t)$ представляют собой нестационарные случайные функции. Для получения статистического математического ожидания, статистической дисперсии и статистической корреляционной функции случайной функции $\Delta h(t)$ необходимо обработать данные значительного количества экспериментов (сеансов наблюдения), проведенных в одинаковых условиях.

При очень большом количестве опытов можно быть уверенными в том, что полученные оценки вероятностных характеристик (статистические характеристики) практически совпадают с их истинными значениями.

Так, например, если определить дисперсию случайной функции $\Delta h(t)$ по результатам статистической обработки данных 51 опыта, то относительное среднее квадратическое отклонение равно 20%, при использовании для нахождения дисперсии данных 801 опыта относительное среднее квадратическое отклонение составляет 5%.

Однако в практике статистической обработки траекторных измерений с целью оценивания вероятностных характеристик ошибок измерений приходится ограничиваться малым количеством опытов. Объясняется это, в первую очередь, сложностью получения «эталонных» значений измеряемых параметров.

Так, например, использование кинотеодолитных измерений в качестве эталонных ограничено малой дальностью наблюдения ЛА с помощью кинотеодолитов и зависимостью работы этих средств от условий погоды. Поэтому возникает задача определения статистических характеристик случайных функций ошибок траекторных измерений по результатам слежения за ЛА в течение одного сеанса наблюдения с последующим уточнением полученных значений статистических характеристик на основе обработки экспериментальных данных всех проводимых впоследствии сеансов наблюдения, где имеются «эталонные» значения измеряемых параметров.

Рассмотрим один из возможных методов оценивания вероятностных характеристик ошибок измерений.

Изучение ошибок измерений показывает, что построенные по экспериментальным данным различных сеансов наблюдения графики функций $\Delta h(t)$ имеют общую характерную особенность. Она состоит в том, что для каждой функции $\Delta h(t)$ можно провести некоторую среднюю кривую, относительно которой по обе стороны сравнительно равномерно группируются опытные значения ошибок измерений. На рис. 6.1 в качестве примера показан характер изменения ошибок измерений на правляющего косинуса в функции времени.

Сами же средние кривые от одного сеанса наблюдения к другому для одного и того же измеряемого параметра одной и той же измерительной станции изменяются и, следовательно, не являются математическим ожиданием случайной функции $\Delta h(t)$.

Проведенный анализ случайной функции $\Delta h(t)$ показывает, что для последующего исследования ошибок измерений целесообразно разделить их на две составляющие:

$$\Delta h(t) = \delta h(t) + \delta \bar{h}(t), \quad (6.3)$$

где $\delta h(t)$ — быстроменяющаяся случайная функция с математическим ожиданием $M[\delta h(t)] = 0$ и корреляционной функцией $K_{\delta h}(t_i, t_k) \neq 0$; $\delta \bar{h}_k(y)$ — медленноменяющаяся

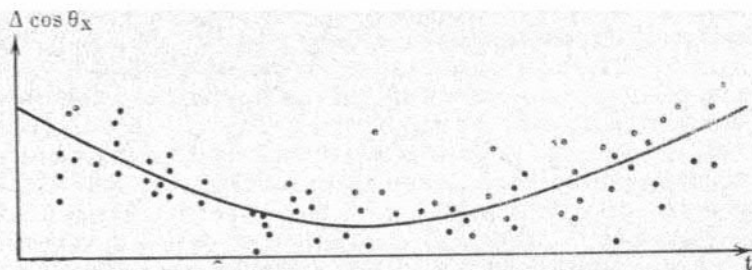


Рис. 6.1.

случайная функция, для которой в общем случае математическое ожидание $M[\delta\bar{h}(t)] \neq 0$ и корреляционная функция $K_{\delta\bar{h}}(t_i, t_k) \neq 0$; t_i и t_k — моменты времени на интервале наблюдения.

Приведенное разделение ошибок измерений на две составляющие обусловлено характером возмущений, приводящих к появлению этих ошибок. Основными причинами возникновения быстроменяющихся составляющих ошибок радиотехнических траекторных измерений являются шумы следящей системы и приемного устройства, шумы теплового характера, образующиеся в атмосфере, флюктуация мощности сигналов на входе бортового приемопередчика и т. п. Анализ характера опытных данных об ошибках $\delta h(t)$ и физической сущности причин, определяющих их возникновение, позволяют считать случайную функцию $\delta h(t)$ эргодической стационарной слабо коррелированной случайной функцией.

Вторую группу составляют возмущения, приводящие к возникновению сильно коррелированных составляющих ошибок измерений. Поскольку скорость изменения этих составляющих невелика, они получили название медленноменяющихся. Эти составляющие ошибок измерений в каждом j -м ($j=1, 2, \dots, m$) сеансе наблюдения являются функцией, определяемой в основном начальными возмущениями. Для траекторных радиотехнических средств — это ошибки юстировки, калибровки антенных баз, разброс параметров аппаратуры передатчи-

ка и приемника относительно их номинальных значений, изменение условий распространения радиоволн от одного сеанса наблюдения к другому и т. п. При этом случайный характер функции $\delta\bar{h}(t)$ имеет лишь для разных сеансов наблюдения, т. е. можно считать, что медленноменяющаяся ошибка является функцией номера сеанса наблюдения j . Эти детерминированные для каждого сеанса наблюдения функции $\delta\bar{h}_j(t)$ (иногда их называют систематическими ошибками измерений) различны для разных сеансов наблюдения и являются реализациями случайного процесса $\delta\bar{h}(j, t)$.

Равенство (6.3) с учетом зависимости входящих в него выражений от номеров сеансов наблюдения j можно переписать в виде

$$\Delta h_j(t) = \delta h(t) + \delta\bar{h}_j(t). \quad (6.4)$$

Условимся считать, что любая частная реализация ошибки $\Delta h_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, m$) принадлежит рассматриваемой случайной функции $\Delta h(j, t)$, если в процессе выполнения измерений условия работы измерительного средства соответствовали требованиям, предусмотренным техническими условиями. При выполнении этих требований каждая реализация ошибки $\Delta h_j(t)$, полученная при наблюдении за движением любого ЛА, может быть использована для определения статистических характеристик ошибок измерения параметра z .

Однако при этом необходимо иметь в виду следующее обстоятельство. Истинная ошибка измерения функции $z(t)$ определяется выражением (6.1). Использование же в качестве истинных значений измеряемой функции расчетных значений $h_a(t)$, полученных на основе статистической обработки измерений эталонных измерительных средств, ведущих наблюдение за движением ЛА, приводит к появлению некоторой дополнительной ошибки $\Delta h_a(t)$ в функции $\Delta h(t)$, т. е.

$$\Delta h_{\text{ист}}(t) = h(t) - h_a(t) + \Delta h_a(t). \quad (6.5)$$

Отличие расчетного значения $h_a(t)$ измеряемой функции от истинного значения $z(t)$, т. е. возникновение ошибки $\Delta h_a(t)$, обусловлено ошибками эталонных измерений, неточным знанием используемых в обработке вероятностных характеристик ошибок измерений, несовершенством методики обработки измерений, неточным

знанием возмущений, действующих на ЛА в полете, ошибками геодезической привязки измерительных средств и др.

С учетом формулы (6.3) выражение (6.5) можно переписать в виде

$$\Delta h_{\text{ист}}(t) = \delta h(t) + \delta \bar{h}(t) + \Delta h_9(t). \quad (6.6)$$

На основе определения математического ожидания и корреляционной функции случайного процесса, используя формулу (6.6), можем записать

$$M[\Delta h_{\text{ист}}(t)] = M[\delta h(t)] + M[\delta \bar{h}(t)] + M[\Delta h_9(t)] \quad (6.7)$$

и

$$K_{\Delta h_{\text{ист}}}(t_i, t_k) = K_{\delta h}(t_i, t_k) + K_{\delta \bar{h}}(t_i, t_k) + K_{\Delta h_9}(t_i, t_k) + 2K_{\delta h, \delta \bar{h}}(t_i, t_k) + 2K_{\delta h, \Delta h_9}(t_i, t_k) + 2K_{\delta \bar{h}, \Delta h_9}(t_i, t_k). \quad (6.8)$$

где $K_{\delta h}(t_i, t_k)$, $K_{\delta \bar{h}}(t_i, t_k)$, $K_{\Delta h_9}(t_i, t_k)$ — соответственно корреляционные функции случайных функций $\delta h(t)$, $\delta \bar{h}(t)$, $\Delta h_9(t)$; $K_{\delta h, \delta \bar{h}}(t_i, t_k)$, $K_{\delta h, \Delta h_9}(t_i, t_k)$, $K_{\delta \bar{h}, \Delta h_9}(t_i, t_k)$ — корреляционные функции связи соответствующих случайных функций. Проанализируем выражения (6.7) и (6.8). Ранее было принято, что математическое ожидание быстроменяющихся составляющих ошибок измерений $M[\delta h(t)] = 0$. Следовательно,

$$M[\Delta h_{\text{ист}}(t)] = M[\delta \bar{h}(t)] + M[\Delta h_9(t)]. \quad (6.9)$$

На основе анализа ошибок измерений установлено, что случайная функция $\delta h(t)$ не коррелирована со случайной функцией $\delta \bar{h}(t)$, т. е.

$$K_{\delta h, \delta \bar{h}}(t_i, t_k) = 0.$$

Корреляционные функции $K_{\Delta h_9}(t_i, t_k)$, $K_{\delta h, \Delta h_9}(t_i, t_k)$, $K_{\delta \bar{h}, \Delta h_9}(t_i, t_k)$ и математическое ожидание $M[\Delta h_9(t)]$ могут быть вычислены лишь приближенно. Поэтому надежное определение искомой корреляционной функции $K_{\Delta h_{\text{ист}}}(t_i, t_k)$ и математического ожидания $M[\Delta h_{\text{ист}}(t)]$

возможно лишь в случае, когда для рассматриваемого промежутка времени t_k, t_i имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |K_{\Delta h_0}(t_i, t_k) + 2K_{\delta h, \Delta h_0}(t_i, t_k) + 2K_{\overline{\delta h}, \Delta h_0}(t_i, t_k)| \ll \\ \ll |K_{\delta h}(t_i, t_k) + K_{\overline{\delta h}}(t_i, t_k)|, \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$M[\Delta h_0(t)] \ll M[\overline{\delta h}(t)]. \quad (6.11)$$

Использование условий (6.10), (6.11) позволяет выработать практические рекомендации о том, в каких случаях возможно применение расчетных значений $h_0(t)$ измеряемых параметров для определения вероятностных характеристик ошибок измерений.

Так, например, при статистической обработке результатов измерений параметров движения центра масс головной части баллистической ракеты, полученных на небольших интервалах времени наблюдения за движением ЛА на безатмосферном участке траектории, расчетные значения измеряемых параметров могут быть определены достаточно точно. Это объясняется тем, что отклонения расчетных значений сил, действующих в полете, от их действительных значений не приведут к существенным погрешностям в расчетных значениях измеряемых параметров, определяемых также для небольших интервалов времени.

Если же для определения вероятностных характеристик ошибок измерений используются данные наблюдения за полетом искусственного спутника Земли в течение нескольких суток, то ошибки в принимаемых при расчете орбиты значениях действующих на спутник силы притяжения и аэродинамической силы могут привести к недопустимо большим ошибкам $\Delta h_0(t)$ в расчетных значениях измеряемых параметров. При этом условия (6.10), (6.11) могут не выполняться.

При выполнении условий (6.10), (6.11) математическое ожидание и корреляционная функция ошибок измерения параметра z определяются по формулам

$$M[\Delta h_{\text{ист}}(t)] \approx M[\overline{\delta h}(t)] \quad (6.12)$$

и

$$K_{\Delta h_{\text{ист}}}(t_i, t_k) \approx K_{\delta h}(t_i, t_k) + K_{\overline{\delta h}}(t_i, t_k). \quad (6.13)$$

Корреляционная функция $K_{\Delta h, j}(t_i, t_k)$ случайной функции $\Delta h_j(t)$ для каждого j -го ($j=1, 2, \dots, m$) фиксированного сеанса наблюдения, как следует из определения корреляционной функции

$$K_{\Delta h, j}(t_i, t_k) = M \{[\Delta h_j(t_i) - m_{\Delta h, j}(t_i)] \times \\ \times [\Delta h_j(t_k) - m_{\Delta h, j}(t_k)]\} \quad (6.14)$$

и выражения (6.4), равна корреляционной функции $K_{\delta h}(t_i, t_k)$ стационарной случайной функции $\delta h(t)$, которая в силу стационарности зависит только от разности моментов времени $\tau = t_i - t_k$.

Таким образом, рассматриваемая случайная функция $\Delta h_j(t)$ имеет переменное во времени математическое ожидание $m_{\Delta h, j}(t)$ и корреляционную функцию $K_{\delta h}(\tau)$, соответствующую эргодической стационарной случайной функции $\delta h(t)$. Следовательно, разделение случайной функции ошибок измерений одного сеанса наблюдения $\Delta h_j(t)$ согласно формуле (6.4) на неслучайную функцию $\delta \bar{h}_j(t)$ и эргодическую стационарную случайную функцию $\delta h(t)$ позволяет решать задачу определения статистических характеристик случайной функции $\Delta \bar{h}_j(t)$ по экспериментальным данным одной реализации. При этом должны быть вычислены неслучайная для данной реализации функция $\delta \bar{h}_j(t)$ и корреляционная функция $K_{\delta h}(\tau)$ эргодической стационарной случайной функции $\delta h(t)$. Для определения статистических характеристик эргодической стационарной случайной функции $\delta h(t)$ можно ограничиться одной ее реализацией на достаточно большом интервале времени.

Таким образом, приведенное разделение ошибок измерений на две составляющие $\delta h(t)$ и $\delta \bar{h}(t)$ позволяет наметить следующий путь для оценивания их вероятностных характеристик.

1. На основе статистической обработки данных каждого отдельного j -го сеанса наблюдения определить частную реализацию медленноменяющейся составляющей ошибок измерений $\delta \bar{h}_j(t)$ и статистическую корреляционную функцию $\hat{K}_{\delta h, j}(\tau)$ быстроменяющейся составляющей ошибки измерения $\delta h(t)$,

2. Обработав реализации случайной функции $\delta\hat{h}_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) по всем m сеансам наблюдения, определить математическое ожидание $M[\delta\hat{h}(t)]$ и статистическую корреляционную функцию $\widehat{K}_{\delta\hat{h}}(t_i, t_k)$ случайной функции $\delta\hat{h}(t)$.

3. Найти осредненные по всем сеансам наблюдения значения статистической корреляционной функции $\widehat{K}_{\delta\hat{h}}(t_i, t_k)$.

4. По формуле (6.13) определить значения статистической корреляционной функции $\widehat{K}_{\Delta h}(t_i, t_k)$ суммарной ошибки измерений $\Delta h(t)$.

Последующие параграфы данной главы посвящены рассмотрению каждого из указанных этапов определения вероятностных характеристик ошибок измерений.

6.2. Определение частной реализации медленноменяющейся составляющей ошибок измерений

Для нахождения частной реализации $\delta\hat{h}_j(t)$ медленноменяющейся составляющей ошибок измерений, являющейся, как было указано в § 6.1, математическим ожиданием ошибок измерений параметра движения $z(t)$ на j -м сеансе наблюдения, необходимо провести сглаживание погрешностей измерений на данном сеансе наблюдения.

Чтобы найти условия, при которых метод сглаживания ошибок измерений может дать достаточную точность, необходимо получить математическое выражение сглаживающей кривой. Для нахождения этого выражения примем, что на интервале T_0 функциональная зависимость $\Delta h_j(t)$ может быть аппроксимирована степенным полиномом n -го порядка. Сделать это можно на основе теоремы Вейерштрасса [41]:

Если $f(x)$ — любая непрерывная в замкнутом конечном промежутке $a \leq x \leq b$ функция, то можно построить последовательность полиномов $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$, которая стремится равномерно к $f(x)$ во всем замкнутом промежутке (a, b) .

Рассматриваемая функция $\Delta h_j(t)$ удовлетворяет условию этой теоремы.

Зависимость между Δh_j и t в виде (5.43)

$$\Delta \hat{h}_j(t) = \sum_{r=0}^n \hat{C}_{rj} \varphi_r(t), \quad (6.15)$$

где $n < N$ (N — количество обрабатываемых однотипных измерений), определим, пользуясь методом наименьших квадратов. В этом случае задача сводится к следующему: провести через совокупность экспериментально полученных значений суммарных ошибок измерений $\Delta h_j(t_i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, полином n -й степени так, чтобы сумма квадратов отклонений кривой, определяемой выражением (6.15), от заданных точек была минимальной, и определить порядок n этого полинома. Методика решения данной задачи рассмотрена в гл. 5.

Осредненное значение функции $\Delta \hat{h}_j(t)$ можно принять приближенно равным медленноменяющейся составляющей ошибки измерения в j -м сеансе наблюдения, т. е.

$$\Delta \hat{h}_j(t) \approx \delta \bar{h}_j(t). \quad (6.16)$$

6.3. Оценивание статистической корреляционной функции быстроменяющихся составляющих ошибок измерений по данным одного сеанса наблюдения

Используя эргодическое свойство стационарной случайной функции быстроменяющихся составляющих ошибок измерений $\delta h(t)$, получим расчетные формулы для вычисления ее статистической корреляционной функции.

Из теории вероятностей известно, что если стационарная случайная функция $Y(t)$ является эргодической по отношению к корреляционной функции, то среднее значение произведения отклонений $[Y(t) - M_y]$ и $[Y(t + \tau) - M_y]$ функции $Y(t)$ от математического ожидания M_y на неограниченно возрастающем интервале времени сходится по вероятности к ее корреляционной функции $K_y(\tau)$. Это свойство эргодической стационарной случайной функции позволяет находить ее статистические вероятностные характеристики по одной экспериментальной записи.

На основании изложенного и учитывая, что математическое ожидание $M[\delta h(t)] = 0$, за оценку корреляционной функции быстроменяющихся составляющих ошибок измерений $\delta h(t)$ параметра движения $z(t)$ можно принять среднее значение произведения $\delta h(t)\delta h(t+\tau)$ на интервале времени наблюдения за движением ЛА:

$$\widehat{K}_{\delta h}(\tau) = \frac{1}{T_n - \tau} \int_0^{T_n - \tau} \delta h(t) \delta h(t + \tau) dt. \quad (6.17)$$

Здесь, как и далее, переменная интегрирования t отсчитывается от начала сеанса наблюдения.

Функция $\widehat{K}_{\delta h}(\tau)$ является несмещенной оценкой корреляционной функции $K_{\delta h}(\tau)$:

$$\begin{aligned} M[\widehat{K}_{\delta h}(\tau)] &= M\left[\frac{1}{T_n - \tau} \int_0^{T_n - \tau} \delta h(t) \delta h(t + \tau) dt\right] = \\ &= \frac{1}{T_n - \tau} \int_0^{T_n - \tau} M[\delta h(t) \delta h(t + \tau)] dt = K_{\delta h}(\tau). \end{aligned}$$

Выражение (6.17) может быть использовано для определения статистической дисперсии $\widehat{D}_{\delta h}$ быстроменяющихся составляющих ошибок измерений.

Поскольку $D_{\delta h} = K_{\delta h}(0)$, то, положив в (6.17) $\tau = 0$, получим

$$\widehat{D}_{\delta h} = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} [\delta h(t)]^2 dt. \quad (6.18)$$

Для того чтобы можно было судить о достоверности полученных значений статистической корреляционной функции $\widehat{K}_{\delta h}(\tau)$ и статистической дисперсии $\widehat{D}_{\delta h}$, произведем оценку точности их определения. Точность оценивания корреляционной функции $\widehat{K}_{\delta h}(\tau)$ можно характеризовать средним квадратическим отклонением $\sigma_{\widehat{K}}(\tau)$ статистической корреляционной функции $\widehat{K}_{\delta h}(\tau)$ от истинного значения корреляционной функции $K_{\delta h}(\tau)$.

Из определения среднего квадратического отклонения случайной функции следует, что

$$\sigma_{\hat{K}}^2(\tau) = M\{[\hat{K}_{\delta h}(\tau) - K_{\delta h}(\tau)]^2\} = M[\hat{K}_{\delta h}^2(\tau)] - K_{\delta h}^2(\tau). \quad (6.19)$$

Используя формулу (6.17), выражение для $M[\hat{K}_{\delta h}^2(\tau)]$ можно записать в виде

$$M[\hat{K}_{\delta h}^2(\tau)] = \frac{1}{(T_n - \tau)^2} \times \\ \times \int_0^{T_n - \tau} \int_0^{T_n - \tau} M[\delta h(t_1) \delta h(t_1 + \tau) \delta h(t_2) \delta h(t_2 + \tau)] dt_1 dt_2. \quad (6.20)$$

Учитывая, что математическое ожидание случайной функции $\delta h(t)$ равно нулю, можно заключить, что с вероятностной точки зрения подынтегральная функция выражения (6.20) представляет собой центральный момент четвертого порядка.

Примем, что случайная функция быстроменяющихся составляющих ошибок измерений $\delta h(t)$ распределена по нормальному закону. Тогда, учитывая, что для нормально распределенных процессов имеет место зависимость [38]

$$M[\overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{X}(t_2) \overset{\circ}{X}(t_3) \overset{\circ}{X}(t_4)] = M[\overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{X}(t_2)] M[\overset{\circ}{X}(t_3) \overset{\circ}{X}(t_4)] + \\ + M[\overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{X}(t_3)] M[\overset{\circ}{X}(t_2) \overset{\circ}{X}(t_4)] + M[\overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{X}(t_4)] M[\overset{\circ}{X}(t_2) \overset{\circ}{X}(t_3)], \quad (6.21)$$

где $\overset{\circ}{X}(t_k) = X(t_k) - M[X(t_k)]$, определяющая связь центральных моментов четвертого порядка с центральными моментами второго порядка, подынтегральное выражение формулы (6.20) можно переписать в виде

$$M[\delta h(t_1) \delta h(t_1 + \tau) \delta h(t_2) \delta h(t_2 + \tau)] = \\ = K_{\delta h}^2(\tau) + K_{\delta h}^2(t_2 - t_1) + K_{\delta h}(t_2 - t_1 + \tau) K_{\delta h}(t_2 - t_1 - \tau).$$

Следовательно,

$$M[\hat{K}_{\delta h}^2(\tau)] = K_{\delta h}^2(\tau) + \\ + \frac{1}{(T_n - \tau)^2} \int_0^{T_n - \tau} \int_0^{T_n - \tau} [K_{\delta h}^2(t_2 - t_1) + K_{\delta h}(t_2 - \\ - t_1 + \tau) K_{\delta h}(t_2 - t_1 - \tau)] dt_1 dt_2. \quad (6.22)$$

Подставляя (6.22) в (6.19), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\widehat{K}}^2(\tau) &= \frac{1}{(T_H - \tau)^2} \int_0^{T_H - \tau} \int_0^{T_H - \tau} [K_{\delta h}^2(t_2 - t_1) + K_{\delta h}(t_2 - \\ &\quad - t_1 + \tau) K_{\delta h}(t_2 - t_1 - \tau)] dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{(T_H - \tau)^2} \int_0^{T_H - \tau} dt_1 \int_0^{T_H - \tau - t_1} [K_{\delta h}^2(t_2 - t_1) + K_{\delta h}(t_2 - t_1 + \\ &\quad + \tau) K_{\delta h}(t_2 - t_1 - \tau)] dt_2. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Преобразуем формулу (6.23) к виду, удобному для практического использования. Обозначим

$$t = t_2 - t_1,$$

$$f(t) = K_{\delta h}^2(t_2 - t_1) + K_{\delta h}(t_2 - t_1 + \tau) K_{\delta h}(t_2 - t_1 - \tau) \quad (6.24)$$

и запишем формулу (6.23) в виде

$$\sigma_{\widehat{K}}^2(\tau) = \frac{1}{(T_H - \tau)^2} \int_0^{T_H - \tau} dt_1 \int_0^{T_H - \tau - t_1} f(t) dt. \quad (6.25)$$

Область интегрирования выражения (6.25) представлена на рис. 6.2. Изменив порядок интегрирования в (6.25) и выполнив его получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\widehat{K}}^2(\tau) &= \frac{1}{(T_H - \tau)^2} \int_0^{T_H - \tau} dt_1 \int_0^{T_H - \tau - t_1} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{(T_H - \tau)^2} \left\{ \int_0^{T_H - \tau} f(t) dt \int_0^{T_H - \tau - t} dt_1 + \int_{-(T_H - \tau)}^0 f(t) dt \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-t}^{T_H - \tau} dt_1 \right\} = \frac{1}{(T_H - \tau)^2} \left\{ \int_0^{T_H - \tau} (T_H - \tau - t) f(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-(T_H - \tau)}^0 (T_H - \tau + t) f(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

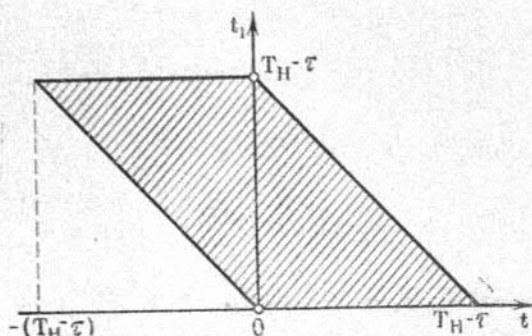


Рис. 6.2.

Так как $f(t)$ — функция четная, то

$$\sigma_{\hat{K}}^2(\tau) = \frac{2}{(T_H - \tau)^2} \int_0^{T_H - \tau} (T_H - \tau - t) f(t) dt$$

и окончательно

$$\sigma_{\hat{K}}^2(\tau) = \frac{2}{(T_H - \tau)^2} \int_0^{T_H - \tau} (T_H - \tau - t) [K_{\delta h}^2(t) + K_{\delta h}(t + \tau)K_{\delta h}(t - \tau)] dt. \quad (6.26)$$

Из (6.26) следует, что для определения дисперсии оценки корреляционной функции $\sigma_{\hat{K}}^2(\tau)$ необходимо знать саму корреляционную функцию $K_{\delta h}$. Это приводит к тому что оценивание точности определения корреляционной функции быстроменяющихся составляющих ошибок измерений можно произвести лишь после получения оценки корреляционной функции. Кроме того, сама дисперсия $\sigma_{\hat{K}}^2(\tau)$, рассчитанная по формуле (6.26) с использованием оценок $\hat{K}_{\delta h}$, является случайной величиной.

Положив в формуле (6.26) $\tau = 0$, получим выражение для дисперсии, характеризующей отклонение статистической дисперсии $\hat{D}_{\delta h}$ случайной функции быстроменяющихся

составляющих ошибок измерений $\delta h(t)$ от истинного значения дисперсии $D_{\delta h}$:

$$\sigma_{\widehat{K}}^2(0) = \sigma_{\widehat{D}}^2 = \frac{4}{T_n^2} \int_0^{T_n} (T_n - t) K_{\delta h}^2(t) dt. \quad (6.27)$$

Отметим, что если быстроменяющиеся составляющие ошибок измерений представляют собой случайный нормальный процесс, характеризуемый корреляционной функцией

$$K_{\delta h}(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|},$$

то из (6.27) будем иметь

$$\sigma_{\widehat{D}}^2 = D^2 (2\alpha T_n - 1 + e^{-2\alpha T_n}) / \alpha^2 T_n^2,$$

если же

$$K_{\delta h}(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau,$$

то

$$\begin{aligned} \sigma_{\widehat{D}}^2 = & D^2 (2\alpha T_n - 1 + e^{-2\alpha T_n}) / 2\alpha^2 T_n^2 + \\ & + (D^2 \cos^2 \varphi / 2\alpha^2 T_n^2) [2\alpha T_n - \cos \varphi + e^{-2\alpha T_n} \cos(2\alpha T_n \operatorname{tg} \varphi + \\ & + 2\varphi)]. \end{aligned}$$

где $\operatorname{tg} \varphi = \beta / \alpha$.

Приведенные зависимости для оценки точности определения корреляционной функции $\widehat{K}_{\delta h}(\tau)$ основаны на формуле (6.17), использование которой предполагает знание случайной функции $\delta h(t)$ на всем интервале наблюдения T_n . Однако при наблюдении за полетом ЛА траекторные измерительные средства регистрируют значения параметров движения в дискретные моменты времени. В этом случае и значения ошибок измерений также известны лишь для фиксированных моментов времени. Это приводит к необходимости замены интеграла в (6.17) приближенной суммой значений подынтегральной функции, соответствующих моментам времени t_k ($k=1, 2, \dots, N$), в которые производилась регистрация измерений.

Таким образом, для определения статистической корреляционной функции быстроменяющихся состав-

ляющих ошибок измерений $\delta h(t)$ может быть использовано выражение

$$\widehat{K}_{\delta h}(\tau_n) \approx \frac{1}{N-n} \sum_{k=1}^{N-n} \delta h(t_k) \delta h(t_{k+n}), \quad (6.28)$$

где N — количество равноотстоящих во времени измерений; $T_n/N = \Delta t$ — интервал времени между двумя последовательными измерениями; $\tau_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N-1$;

$$t_k = t_0 + k\Delta t.$$

Приняв в (6.28) $n=0$, получим зависимость для определения статистической дисперсии быстроменяющихся составляющих ошибок измерений

$$\widehat{D}_{\delta h} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\delta h(t_k)]^2. \quad (6.29)$$

Очевидно, что

$$M[\widehat{K}_{\delta h}(\tau_n)] = K_{\delta h}(\tau_n), \quad (6.30)$$

т. е. определяемая по приближенной формуле (6.28) статистическая корреляционная функция $\widehat{K}_{\delta h}(\tau_n)$ в среднем при большом числе экспериментов равна истинному значению корреляционной функции $K_{\delta h}(\tau_n)$.

Найдем среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\widehat{K}}(\tau)$ статистической корреляционной функции $\widehat{K}_{\delta h}(\tau)$ от ее истинного значения

$$\sigma_{\widehat{K}}^2(\tau_n) = M[\widehat{K}_{\delta h}^2(\tau_n)] - \{M[\widehat{K}_{\delta h}(\tau_n)]\}^2. \quad (6.31)$$

Подставляя в (6.31) соотношения (6.28), (6.30) и учитывая, что математическое ожидание случайной функции $\delta h(t)$ равно нулю, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\widehat{K}}^2(\tau_n) = & (N-n)^{-2} \sum_{k=1}^{N-n} \sum_{i=1}^{N-n} M[\delta h(t_k) \delta h(t_k + \tau_n) \times \\ & \times \delta h(t_i) \delta h(t_i + \tau_n)] - K_{\delta h}^2(\tau_n). \end{aligned}$$

Используя формулу (6.21) для центральных моментов четвертого порядка случайных величин, распределенных по нормальному закону, полученное выражение для $\sigma_{\hat{K}}^2(\tau_n)$ можно переписать в виде

$$\sigma_{\hat{K}}^2(\tau_n) = (N-n)^{-2} \sum_{k=1}^{N-n} \sum_{l=1}^{N-n} [K_{\delta h}^2(t_i - t_k) + K_{\delta h}(t_i - t_k + \tau_n) K_{\delta h}(t_i - t_k - \tau_n)]. \quad (6.32)$$

Сравнение формул (6.23) и (6.32) показывает, что они аналогичны, разница состоит лишь в том, что операция интегрирования, используемая в (6.23), заменена операцией суммирования в (6.32). С помощью описанных выше преобразований формула (6.23) заменена более удобной для практического использования зависимостью (6.26). Подобные преобразования могут быть проведены и для формулы (6.32). В результате получим

$$\sigma_{\hat{K}}^2(\tau_n) = (N-n)^{-1} \left\{ K_{\delta h}^2(0) + K_{\delta h}^2(\tau_n) + 2 \sum_{k=1}^{N-n} \left(1 - \frac{k}{N-n} \right) [K_{\delta h}^2(\tau_k) + K_{\delta h}(\tau_{k+n}) K_{\delta h}(\tau_{k-n})] \right\}. \quad (6.33)$$

Положив в выражении (6.33) $n=0$, найдем зависимость для среднего квадратического отклонения $\sigma_{\hat{D}}$ статистической дисперсии $\hat{D}_{\delta h}$ случайной функции быстроменяющихся составляющих ошибок измерений $\delta h(t)$ от истинного значения дисперсии $D_{\delta h}$:

$$\sigma_{\hat{K}}^2(0) = \sigma_{\hat{D}}^2 = \frac{2}{N} \left[K_{\delta h}^2(0) + 2 \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{k}{N} \right) K_{\delta h}^2(\tau_k) \right]. \quad (6.34)$$

В работе [42] приводятся следующие рекомендации по приближенному выбору величин Δt , n , T_n для исследования случайного процесса, вид корреляционной функции которого до проведения соответствующего изучения неизвестен.

Выбор промежутка между соседними измерениями Δt осуществляется из условия, при котором на интервале времени длиной в один период наиболее высокочастотной гармоникой, наблюдаемой в записи исследуемого случайного процесса, располагалось бы не менее 5—10 точек измерений. При установлении максимального числа n следует учесть, что оно не должно быть больше примерно $N/4$. При этом интервал наблюдения T_n должен быть достаточно большим, чтобы оценка $\hat{K}_{\delta h}(T_n n/N)$ была близка к нулю для всех n , близких к $N/4$.

6.4. Осреднение корреляционных функций быстроменяющихся составляющих ошибок измерений, полученных по нескольким сеансам наблюдения

Для повышения точности и достоверности определения статистических характеристик быстроменяющихся составляющих ошибок измерений целесообразно провести осреднение результатов определения статистической корреляционной функции $\hat{K}_{\delta h}(\tau)$ и статистической дисперсии $\hat{D}_{\delta h}$, полученных на основе обработки экспериментальных данных всех проведенных m сеансов наблюдения. При этом примем, что все эксперименты независимы и проведены в одинаковых условиях. Сеансы наблюдения считаем независимыми, если при проведении измерений вероятности появления ошибок измерений и вероятностные характеристики этих ошибок в каждом сеансе наблюдения не зависят от результатов других сеансов наблюдения. Для удовлетворения этого требования необходимо при организации измерений в каждом сеансе наблюдения провести некоторые специальные мероприятия, например уточнить привязку начала сеанса наблюдения к единому времени, проверить юстировку антенной колонки и др.

Перед осреднением полученных оценок вероятностных характеристик целесообразно провести проверку принадлежности их одной генеральной совокупности. Для проверки оценок дисперсии достаточно эффективным является критерий Фишера [5, 20].

В общем случае интервалы времени наблюдения летательного аппарата в каждом сеансе различны. Обозначим их через $T_{n1}, T_{n2}, \dots, T_{nm}$.

При записи формул для получения осредненных значений статистической корреляционной функции и статистической дисперсии быстроменяющихся составляющих ошибок измерений естественно принять условие, чтобы «вес» каждой отдельной осредняемой величины $\widehat{K}_{\delta h, j}(\tau)$ и $\widehat{D}_{\delta h, j}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) в формировании средних значений корреляционной функции $\overline{K}_{\delta h}(\tau)$ и дисперсии $\overline{D}_{\delta h}$ был пропорционален времени соответствующего j -го сеанса наблюдения.

Обозначим коэффициент веса через

$$\lambda_j = (T_{nj} - \tau) \left/ \left(\sum_{j=1}^m T_{nj} - m\tau \right) \right. . \quad (6.35)$$

Принимая во внимание выражение (6.17) для статистической корреляционной функции $\widehat{K}_{\delta h}(\tau)$ и статистической дисперсии $\widehat{D}_{\delta h}$ получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \overline{K}_{\delta h}(\tau) &= \\ &= \frac{\sum_{j=1}^m \int_0^{T_{nj}-\tau} \delta h_j(t) \delta h_j(t+\tau) dt}{\sum_{j=1}^m T_{nj} - m\tau} , \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\overline{D}_{\delta h} = \frac{\sum_{j=1}^m \int_0^{T_{nj}} \delta h_j^2(t) dt}{\sum_{j=1}^m T_{nj}} . \quad (6.37)$$

При обработке дискретных измерений формулы (6.35)–(6.37) принимают вид

$$\lambda_j = (N_j - n) \left/ \left(\sum_{j=1}^n N_j - mn \right) \right. , \quad (6.38)$$

$$\bar{K}_{\delta h}(\tau_n) = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{N_j-n} \delta h_j(t_k) \delta h_j(t_{k+n})}{\sum_{j=1}^m N_j - mn}, \quad (6.39)$$

$$\bar{D}_{\delta h} = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{N_j} \delta h_j^2(t_k)}{\sum_{j=1}^m N_j}. \quad (6.40)$$

Если же для каждого сеанса были рассчитаны значения $\hat{K}_{\delta h, j}(\tau_n)$ и $\hat{D}_{\delta h, j}$, то для нахождения средних значений этих характеристик более удобны формулы

$$\bar{K}_{\delta h}(\tau_n) = \frac{\sum_{j=1}^m (N_j - n) \hat{K}_{\delta h, j}(\tau_n)}{\sum_{j=1}^m N_j - mn}, \quad (6.41)$$

$$\bar{D}_{\delta h} = \sum_{j=1}^m N_j \hat{D}_{\delta h, j} \left/ \sum_{j=1}^m N_j \right. \quad (6.42)$$

Значения $\hat{K}_{\delta h, j}$ и $\hat{D}_{\delta h, j}$ определяются соответственно с помощью зависимостей (6.28) и (6.29).

Выше была найдена формула (6.33) для оценки точности определения статистической корреляционной функции

$\hat{K}_{\delta h, j}(\tau_n)$ по данным одного j -го сеанса наблюдения при использовании дискретных измерений, полученных в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_N = T_n$. Учитывая независимость случайных величин быстроменяющихся составляющих ошибок измерений, полученных в различных сеансах наблюдения $\delta h_1(t), \delta h_2(t), \dots, \delta h_m(t)$, и распространяя выражения (6.33) на множество измерений, полученных во всех m сеансах, запишем формулу для дисперсии $\sigma_{\bar{K}}^2(\tau_n)$, характеризующей отклонение среднего значе-

ния статистической корреляционной функции $\bar{K}_{\delta h}(\tau_n)$ от ее истинного значения $K_{\delta h}^*(\tau_n)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{K}}^2(\tau_n) = & \frac{1}{\left[\sum_{j=1}^m N_j - mn \right]^2} \times \\ & \times \sum_{j=1}^m (N_j - n) \left\{ K_{\delta h, j}^2(0) + K_{\delta h, j}^2(\tau_n) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{k=1}^{N_j - n} \left(1 - \frac{k}{N_j - n} \right) [K_{\delta h, j}^2(t_k) + K_{\delta h, j}(\tau_{k+n}) K_{\delta h, j}(\tau_{k-n})] \right\} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Выражение (6.43) может быть приведено к виду

$$\sigma_{\bar{K}}^2(\tau_n) = \frac{\sum_{j=1}^m (N_j - n)^2 \sigma_{\hat{K}, j}^2(\tau_n)}{\left(\sum_{j=1}^m N_j - mn \right)^2}, \quad (6.44)$$

где величина $\sigma_{\hat{K}, j}^2(\tau_n)$ определяется формулой (6.33).

Соотношение (6.44) позволяет находить дисперсию среднего значения статистической корреляционной функции $\bar{K}_{\delta h}(\tau_n)$ по известным значениям дисперсии $\sigma_{\hat{K}, j}^2(\tau_n)$ статистической корреляционной функции $\hat{K}_{\delta h, j}(\tau_n)$, полученной обработкой измерений j -го сеанса наблюдения ($j = 1, 2, \dots, m$).

Если принять, что интервал времени наблюдения и количество измерений на каждом сеансе наблюдения одинаковы, то из (6.44) получим

$$\sigma_{\bar{K}}^2(\tau_n) = \sigma_{\hat{K}, j}^2(\tau_n) / m. \quad (6.45)$$

Из (6.45) следует, что в рассматриваемом случае использование экспериментальных данных m сеансов наблюдения позволяет уменьшить в m раз дисперсию, характеризующую отклонение статистической корреляционной

функции $\bar{K}_{\delta h}(\tau_n)$ от ее истинного значения, по сравнению с дисперсией $\sigma_{\hat{K}_j}^2(\tau_n)$, полученной на основе обработки измерений одного сеанса наблюдения.

Полагая в (6.44) $n=0$, имеем выражение для оценки точности определения среднего значения статистической дисперсии:

$$\sigma_{\hat{D}}^2 = \sum_{j=1}^m N_j^2 \sigma_{\hat{D}_j}^2 \left/ \left(\sum_{j=1}^m N_j \right)^2 \right. \quad (6.46)$$

Величины $\sigma_{\hat{D}_j}^2$ определяются по формуле (6.34).

6.5. Оценивание вероятностных характеристик медленноменяющихся составляющих ошибок измерений по данным нескольких сеансов наблюдения

Примем, что для определения статистических характеристик сильно коррелированных составляющих ошибок измерений (случайной функции $\delta \bar{h}(t)$) используются данные m независимых сеансов наблюдения. Обозначим через $\delta \bar{h}_j(t)$, где t — время, отсчитываемое от начала сеанса наблюдения, — значение медленноменяющейся составляющей ошибки измерений параметра z в j -м сеансе наблюдения.

Тогда статистическое математическое ожидание $\hat{M}_{\delta \bar{h}}(t)$, статистическая дисперсия $\hat{D}_{\delta \bar{h}}(t)$, статистическая корреляционная функция $\hat{K}_{\delta \bar{h}}(t_i, t_k)$ и статистический коэффициент корреляции $\hat{r}_{\delta \bar{h}}(t_i, t_k)$ могут быть найдены из формул

$$\hat{M}_{\delta \bar{h}}(t_i) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta \bar{h}_j(t_i), \quad (6.47)$$

$$\hat{D}_{\delta \bar{h}}(t_i) = \hat{\sigma}_{\delta \bar{h}}^2(t_i) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m [\delta \bar{h}_j(t_i) - \hat{M}_{\delta \bar{h}}(t_i)]^2, \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}_{\delta \bar{h}}(t_i, t_k) &= \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m [\delta \bar{h}_j(t_i) - \hat{M}_{\delta \bar{h}}(t_i)] \times \\ &\times [\delta \bar{h}_j(t_k) - \hat{M}_{\delta \bar{h}}(t_k)], \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\widehat{r}_{\delta\bar{h}}(t_i, t_k) = \frac{\widehat{K}_{\delta\bar{h}}(t_i, t_k)}{\widehat{\sigma}_{\delta\bar{h}}(t_i)\widehat{\sigma}_{\delta\bar{h}}(t_k)}, \quad (6.50)$$

которые следуют из определения соответствующих статистических характеристик случайной функции.

При оценивании дисперсии и корреляционного момента для практического использования более удобны формулы

$$\widehat{D}_{\delta\bar{h}}(t_i) = \frac{m}{m-1} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [\delta\bar{h}_j(t_i)]^2 - [\widehat{M}_{\delta\bar{h}}(t_i)]^2 \right\}, \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{\delta\bar{h}}(t_i, t_k) = \frac{m}{m-1} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta\bar{h}_j(t_i) \delta\bar{h}_j(t_k) - \right. \\ \left. - \widehat{M}_{\delta\bar{h}}(t_i) \widehat{M}_{\delta\bar{h}}(t_k) \right\}, \quad (6.52) \end{aligned}$$

основанные на соотношениях между начальными и центральными моментами. При применении зависимостей (6.51), (6.52) во избежание использования разностей близких чисел рекомендуется заранее перенести начало отсчета по оси ординат ближе к математическому ожиданию.

Оценку точности полученных значений математического ожидания, дисперсии и корреляционных моментов можно произвести по зависимостям, аналогичным приведенным в § 6.3 для оценки точности вероятностных характеристик быстроменяющихся составляющих ошибок измерений. При этом надо иметь в виду, что указанные зависимости, основанные на применении центральной предельной теоремы теории вероятностей, справедливы лишь при использовании достаточно большого количества экспериментов, когда полученные из этих экспериментов числовые значения статистических характеристик (оценки вероятностных характеристик) можно приближенно считать равными их истинным значениям.

Статистические числовые характеристики случайной функции сами являются случайными функциями. Наиболее полно они могут быть описаны с помощью их законов распределения. Зная законы распределения стати-

стических характеристик, можно определить вероятность отклонения полученного из эксперимента их значения от истинного значения соответствующей характеристики, т. е. степень достоверности полученного результата.

Если количество экспериментов достаточно велико ($m > 30$), то законы распределения полученных на основе статистической обработки результатов наблюдений оценок вероятностных характеристик ошибок измерений оказываются близкими к нормальному. В этом случае определить степень достоверности полученных оценок можно, например, по вероятности того, что ошибка измерения $\Delta h(t)$ примет значение, заключенное в заданном интервале $[M_{\Delta h}(t) - \varepsilon, M_{\Delta h}(t) + \varepsilon]$.

Указанная вероятность может быть вычислена по формуле

$$P\{|\Delta h(t) - M_{\Delta h}(t)| < \varepsilon\} = 2\Phi(\varepsilon/\sigma_{\Delta h}(t)), \quad (6.53)$$

где ε — заданная положительная величина;

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-t^2/2} dt \text{ — функция Лапласа.}$$

Для оценки результатов статистической обработки сравнительно малого числа экспериментов, данные которых могут быть использованы для получения статистических характеристик медленноменяющихся составляющих ошибок измерений, применять зависимости (6.26), (6.27) и (6.53) нецелесообразно. Способ вычисления вероятностей приближения оценок к соответствующим вероятностным характеристикам, в основе которого лежат указанные зависимости, оказывается в этом случае слишком грубым. Поэтому при определении достоверности оценок, полученных при использовании сравнительно небольшого количества опытов, необходимо применять точные законы распределения оценок.

Рассмотрим, как можно оценить достоверность значений статистического математического ожидания $\hat{M}_{\delta h}(t)$, статистической дисперсии $\hat{D}_{\delta h}(t)$ и статистического коэффициента корреляции $\hat{r}_{\delta h}(t_i, t_k)$ медленноменяющейся составляющей ошибки измерений в предположении, что

случайные функции $\delta h_1^{\pm}(t)$, $\delta h_2^{\pm}(t)$, ..., $\delta h_m^{\pm}(t)$ подчинены нормальному закону распределения.

Условимся характеризовать достоверность значения статистического математического ожидания $\widehat{M}_{\delta h}(t)$ доверительной вероятностью математического ожидания, т. е. вероятностью того, что истинное значение математического ожидания $M_{\delta h}(t)$ находится в заданной области, охватывающей значение статистического математического ожидания

$$P_1 = P[\widehat{M}_{\delta h}(t) - \widehat{\sigma}_{\delta h}(t) \leq M_{\delta h}(t) \leq \widehat{M}_{\delta h}(t) + \widehat{\sigma}_{\delta h}(t)], \quad (6.54)$$

где ε — заданная положительная величина.

Таблица 6.1

ε	*															
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	
1	0,01	0,02	0,04	0,09	0,13	0,18	0,22	0,25	0,33	0,39	0,45	0,50	0,54	0,57	0,60	
2	0,01	0,02	0,06	0,12	0,18	0,24	0,29	0,34	0,44	0,52	0,59	0,65	0,70	0,74	0,77	
3	0,01	0,03	0,07	0,14	0,22	0,28	0,35	0,41	0,52	0,61	0,68	0,74	0,79	0,82	0,85	
4	0,02	0,03	0,08	0,17	0,25	0,32	0,39	0,46	0,58	0,67	0,74	0,81	0,85	0,88	0,91	
5	0,02	0,04	0,09	0,18	0,27	0,35	0,43	0,50	0,63	0,72	0,80	0,85	0,89	0,92	0,94	
6	0,02	0,04	0,10	0,20	0,29	0,38	0,47	0,54	0,67	0,76	0,83	0,88	0,92	0,94	0,96	
7	0,02	0,04	0,11	0,22	0,32	0,41	0,50	0,57	0,70	0,80	0,87	0,91	0,94	0,96	0,97	
8	0,02	0,05	0,12	0,23	0,33	0,43	0,52	0,60	0,73	0,82	0,89	0,93	0,96	0,97	0,98	
9	0,02	0,05	0,12	0,24	0,35	0,46	0,55	0,63	0,76	0,85	0,91	0,94	0,96	0,98	0,99	
10	0,03	0,05	0,13	0,25	0,37	0,48	0,57	0,65	0,79	0,87	0,92	0,96	0,98	0,99	0,99	
12	0,03	0,06	0,14	0,28	0,40	0,51	0,61	0,70	0,82	0,90	0,95	0,97	0,98	0,99	0,99	
14	0,03	0,06	0,15	0,30	0,43	0,55	0,65	0,73	0,85	0,92	0,96	0,98	0,99	1,00	1,00	
16	0,03	0,06	0,16	0,31	0,45	0,58	0,68	0,76	0,88	0,94	0,97	0,99	0,99			
18	0,03	0,07	0,17	0,33	0,48	0,61	0,71	0,79	0,90	0,95	0,98	0,99	1,00			
20	0,04	0,07	0,18	0,35	0,50	0,63	0,73	0,81	0,91	0,96	0,99	0,99				
25	0,04	0,08	0,20	0,39	0,55	0,68	0,78	0,85	0,95	0,98	0,99	1,00				
30	0,04	0,09	0,22	0,42	0,59	0,72	0,82	0,89	0,97	0,99	1,00					
35	0,05	0,10	0,23	0,45	0,63	0,75	0,85	0,92	0,98	0,99						
40	0,05	0,10	0,25	0,47	0,66	0,79	0,88	0,94	0,99	1,00						
45	0,05	0,11	0,26	0,50	0,69	0,81	0,90	0,95	0,99							
50	0,06	0,11	0,28	0,52	0,71	0,83	0,92	0,96	0,99							
60	0,06	0,12	0,30	0,56	0,75	0,87	0,95	0,97	1,00							
70	0,07	0,13	0,32	0,60	0,79	0,90	0,96	0,98								
80	0,07	0,14	0,35	0,63	0,82	0,92	0,98	0,99								
90	0,08	0,15	0,37	0,65	0,84	0,94	0,98	0,99								
100	0,08	0,16	0,38	0,68	0,87	0,95	0,99	1,00								

Значение искомой вероятности P_1 может быть определено из формулы

$$P_1 = 2 \int_0^{\varepsilon} \sqrt{\frac{m}{m-1}} S_{m-1} \left(y \sqrt{\frac{m}{m-1}} \right) dy, \quad (6.55)$$

где $y = [\widehat{M}_{\delta h}(t) - M_{\delta h}(t)] / \widehat{\sigma}_{\delta h}(t)$;

$S_{m-1} \left(y \sqrt{\frac{m}{m-1}} \right)$ — дифференциальный закон распределения Стьюдента.

Выражение (6.55) позволяет, задавшись величиной ε и количеством сеансов наблюдения m , по данным которых определяются значения $\hat{M}_{\delta h}(t)$ и $\hat{\sigma}_{\delta h}(t)$, найти доверительную вероятность P_1 того, что истинное значение математического ожидания $M_{\delta h}(t)$ лежит в области $2\varepsilon\hat{\sigma}_{\delta h}(t)$, симметрично расположенной относительно $\hat{M}_{\delta h}(t)$ (*).

$m-1$	ε									
	0,001	0,002	0,005	0,010	0,020	0,040	0,050	0,080	0,100	0,150
1	0,001	0,002	0,005	0,010	0,019	0,039	0,058	0,077	0,097	0,145
2	0,001	0,003	0,007	0,015	0,029	0,059	0,088	0,118	0,147	0,219
3	0,002	0,004	0,009	0,019	0,037	0,074	0,111	0,147	0,184	0,273
4	0,002	0,004	0,011	0,022	0,043	0,086	0,129	0,172	0,214	0,317
5	0,002	0,005	0,012	0,024	0,049	0,097	0,146	0,194	0,241	0,355
6	0,003	0,005	0,013	0,027	0,054	0,107	0,160	0,213	0,264	0,388
7	0,003	0,006	0,015	0,029	0,058	0,116	0,174	0,230	0,286	0,417
8	0,003	0,006	0,016	0,031	0,062	0,125	0,186	0,246	0,305	0,444
9	0,003	0,007	0,017	0,033	0,066	0,132	0,197	0,261	0,323	0,469
10	0,004	0,007	0,018	0,035	0,070	0,140	0,208	0,275	0,340	0,491
12	0,004	0,008	0,019	0,039	0,077	0,155	0,228	0,301	0,371	0,532
14	0,004	0,008	0,021	0,042	0,083	0,166	0,246	0,325	0,399	0,567
16	0,004	0,009	0,022	0,045	0,089	0,177	0,263	0,346	0,425	0,599
18	0,005	0,009	0,024	0,047	0,095	0,188	0,279	0,366	0,448	0,627
20	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,198	0,293	0,384	0,470	0,652
25	0,006	0,011	0,028	0,056	0,112	0,221	0,327	0,426	0,518	0,706
30	0,006	0,012	0,031	0,061	0,122	0,242	0,356	0,462	0,559	0,749
35	0,007	0,013	0,033	0,067	0,133	0,262	0,384	0,497	0,597	0,787
40	0,007	0,014	0,036	0,072	0,142	0,279	0,408	0,525	0,628	0,815
45	0,008	0,015	0,038	0,076	0,150	0,295	0,431	0,552	0,657	0,840
50	0,008	0,016	0,040	0,080	0,158	0,303	0,452	0,576	0,682	0,860
60	0,009	0,017	0,044	0,087	0,173	0,339	0,489	0,619	0,726	0,893
70	0,009	0,019	0,047	0,094	0,187	0,364	0,522	0,656	0,762	0,917
80	0,010	0,020	0,050	0,101	0,200	0,387	0,552	0,688	0,792	0,935
90	0,011	0,021	0,053	0,107	0,211	0,408	0,579	0,716	0,818	0,949
100	0,011	0,022	0,056	0,112	0,222	0,428	0,604	0,741	0,840	0,959
150	0,015	0,028	0,069	0,137	0,271	0,500	0,701	0,833	0,914	0,986
200	0,016	0,032	0,080	0,158	0,311	0,576	0,769	0,888	0,951	0,995

*) Формула (6.55) приведена здесь без вывода. Обоснование изложенного подхода к оценке достоверности статистических вероятностных характеристик и подробный вывод формулы (6.55), а также используемых ниже зависимостей (6.56) и (6.57) можно найти в [39] и [40].

В табл. 6.1 приведены значения вероятности P_1 для различных значений величин ϵ и числа экспериментов m , рассчитанные по формуле (6.55). Используя данные этой таблицы, можно, задавшись величинами P_1 и ϵ , определить количество сеансов наблюдения m , необходимое для получения требуемых значений доверительного интервала для математического ожидания медленноменяющейся составляющей ошибок измерения параметра z (случайной функции $\delta \bar{h}(t)$).

Так, например, задаваясь уровнем вероятности $P_1 = 0,9$ и величиной ϵ , определяем, что истинное значение

Таблица 6.2

0,200	0,250	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000	2,000
0,193	0,241	0,289	0,379	0,458	0,520	0,556	0,579	0,599	0,617	0,739
0,290	0,358	0,423	0,538	0,623	0,675	0,707	0,734	0,759	0,779	0,895
0,359	0,440	0,515	0,636	0,714	0,759	0,792	0,819	0,842	0,861	0,953
0,414	0,504	0,583	0,703	0,774	0,815	0,847	0,872	0,893	0,910	0,979
0,461	0,556	0,637	0,752	0,816	0,865	0,885	0,908	0,926	0,940	0,990
0,501	0,599	0,681	0,791	0,849	0,886	0,913	0,933	0,948	0,959	0,995
0,536	0,636	0,717	0,821	0,874	0,908	0,932	0,950	0,963	0,972	0,998
0,567	0,669	0,748	0,845	0,895	0,926	0,948	0,963	0,974	0,981	0,999
0,595	0,697	0,774	0,865	0,911	0,940	0,960	0,972	0,981	0,987	0,999
0,620	0,722	0,797	0,882	0,925	0,951	0,968	0,979	0,986	0,991	1,000
0,664	0,764	0,833	0,909	0,946	0,968	0,980	0,988	0,993	0,996	
0,701	0,798	0,862	0,929	0,960	0,978	0,988	0,993	0,996	0,998	
0,733	0,826	0,885	0,944	0,971	0,985	0,992	0,996	0,998	0,999	
0,760	0,849	0,903	0,955	0,980	0,990	0,995	0,998	0,999	0,999	
0,784	0,868	0,918	0,964	0,984	0,993	0,997	0,999	0,999	1,000	
0,832	0,905	0,944	0,979	0,992	0,997	0,999	1,000	1,000		
0,867	0,930	0,962	0,988	0,996	0,999	1,000				
0,893	0,944	0,969	0,990	0,997	0,999					
0,913	0,957	0,978	0,994	0,999	1,000					
0,929	0,967	0,984	0,996	0,999						
0,942	0,974	0,988	0,998	0,999						
0,960	0,984	0,993	0,999	1,000						
0,972	0,990	0,996	1,000							
0,980	0,994	0,998								
0,986	0,996	0,999								
0,990	0,997	0,999								
0,998	1,000	1,000								
1,000										

математического ожидания отличается от статистического математического ожидания не более чем на $\pm \epsilon \hat{\sigma}_{\delta \bar{h}}(t)$: при $\epsilon=0,20$, если $m=71$; при $\epsilon=0,50$, если $m=13$; при $\epsilon=1,00$, если $m=5$.

Выражение, аналогичное (6.55), может быть записано и для оценки достоверности значения статистического среднего квадратического отклонения $\widehat{\sigma}_{\delta h}(t)$:

$$P_2 = P[(1 - \varepsilon)\widehat{\sigma}_{\delta h}(t) \leq \sigma_{\delta h}(t) \leq (1 + \varepsilon)\widehat{\sigma}_{\delta h}(t)] = \int_{1/(1+\varepsilon)}^{1/(1-\varepsilon)} f_U(u) du, \quad (6.56)$$

где $f_U(u)$ — дифференциальный закон распределения случайной функции $U = \widehat{\sigma}_{\delta h}(t)/\sigma_{\delta h}(t)$, определяемый соотношением

$$f_U(u) = \frac{V_{2(m-1)}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \left(u \sqrt{\frac{m-1}{2}}\right)^{m-2} e^{-\frac{m-1}{2}u^2},$$

$\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) = \int_0^{\infty} u^{\frac{m-3}{2}} e^{-u} du$ — гамма-функция.

Формула (6.56) определяет вероятность того, что истинное среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\delta h}(t)$ отличается от статистического среднего квадратического отклонения $\widehat{\sigma}_{\delta h}(t)$ не более чем на $\pm \varepsilon \widehat{\sigma}_{\delta h}(t)$.

Используя формулу (6.56) или табл. 6.2, данные которой рассчитаны с использованием (6.56), можно найти необходимое количество сеансов наблюдения m для получения требуемого значения доверительной вероятности P_2 при заданной величине ε .

Так, например, задавшись уровнем вероятности $P_2 = 0,9$ и различными значениями величины ε , получим следующие значения m — количества экспериментов, необходимых для того, чтобы истинное значение среднего квадратического отклонения $\sigma_{\delta h}(t)$ отличалось от статистического среднего квадратического отклонения $\widehat{\sigma}_{\delta h}(t)$ не более чем на $\pm \varepsilon \widehat{\sigma}_{\delta h}(t)$: при $\varepsilon = 0,20$ необходимо 38 экспериментов, при $\varepsilon = 0,50$ необходимо 9 экспериментов, при $\varepsilon = 1,00$ необходимо 5 экспериментов и т. д.

Для оценки достоверности определения статистического коэффициента корреляции $\widehat{r}_{\delta h}(t_i, t_k)$ используется зависимость:

$$\begin{aligned} P_3 &= P[|r_{\delta h}(t_i, t_k) - \varepsilon| r_{\delta h}(t_i, t_k)| \leq \\ &\leq \widehat{r}_{\delta h}(t_i, t_k) \leq r_{\delta h}(t_i, t_k) + \varepsilon | r_{\delta h}(t_i, t_k)|] = \\ &= \Phi\left(\frac{b_y - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{a_y - m_y}{\sigma_y}\right), \end{aligned} \quad (6.57)$$

где $\sigma_y = (m - 3)^{-1/2}$; $\Phi(u)$ — функция Лапласа;

$$\begin{aligned} m_y &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + r_{\delta h}(t_i, t_k)}{1 - r_{\delta h}(t_i, t_k)} + \frac{r_{\delta h}(t_i, t_k)}{2(m-1)}, \\ a_y &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + [r_{\delta h}(t_i, t_k) - \varepsilon | r_{\delta h}(t_i, t_k)|]}{1 - [r_{\delta h}(t_i, t_k) - \varepsilon | r_{\delta h}(t_i, t_k)|]}, \\ b_y &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + [r_{\delta h}(t_i, t_k) + \varepsilon | r_{\delta h}(t_i, t_k)|]}{1 - [r_{\delta h}(t_i, t_k) + \varepsilon | r_{\delta h}(t_i, t_k)|]}. \end{aligned}$$

Выражение (6.57) определяет доверительную вероятность, т. е. вероятность того, что статистический коэффициент корреляции $\widehat{r}_{\delta h}(t_i, t_k)$ отличается от его истинного значения $r_{\delta h}(t_i, t_k)$ не более чем на $\Delta r_{\delta h}(t_i, t_k) = \varepsilon |r_{\delta h}(t_i, t_k)|$, где ε — некоторое положительное число.

Отметим, что для определения по формуле (6.57) доверительной вероятности P_3 необходимо предварительно найти по заданным значениям количества экспериментов m , величины ε и коэффициента корреляции $r_{\delta h}(t_i, t_k)$, значения математического ожидания m_y и среднего квадратического отклонения σ_y случайной величины

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \widehat{r}_{\delta h}(t_i, t_k)}{1 - \widehat{r}_{\delta h}(t_i, t_k)},$$

а также значения величин a_y и b_y .

6.6. Аппроксимация статистической корреляционной функции

При обработке измерений, полученных на достаточно протяженном участке траектории, корреляционная матрица ошибок измерений может содержать десятки тысяч элементов. Ввод такой матрицы в запоминающее устройство современной ЭВМ и обработка ее чрезвычайно затруднительны. Поэтому возникает необходимость сжатия информации о корреляционной функции $K_h(t, t+\tau)$. Это сжатие может быть осуществлено путем аппроксимации значений статистической корреляционной функции $K_h(t, t+\tau)$, заданных на дискретном множестве переменных t и τ .

Нахождение подходящего в определенном смысле аппроксимирующего выражения для $K_h(\tau)$ может быть осуществлено при помощи линейной комбинации конечного числа функций

$$K_h(\tau) = \sum_{j=0}^m C_j \varphi_j(\tau), \quad (6.58)$$

где $\varphi_j(\tau)$ — заданная система линейно независимых функций; C_j — некоторые постоянные вещественные числа, определяемые из условия минимизации суммы квадратов разностей между $K_h(\tau)$ и $K_h(\tau)$ на всем интервале задания величины τ . При этом возникает проблема выбора наиболее целесообразного вида аналитической зависимости, которая должна удовлетворять следующим требованиям:

1. Аппроксимирующие функции $\varphi_j(\tau)$ по возможности должны представлять собой семейство ортогональных функций. Ортогональность функций $\varphi_j(\tau)$ обеспечивает простоту контроля ошибки приближения в среднеквадратическом смысле.

2. Аппроксимирующие функции $\varphi_j(\tau)$ должны удовлетворять предельному соотношению

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi_j(\tau) = 0. \quad (6.59)$$

Это условие вытекает из аналитического поведения корреляционной функции при больших значениях аргумента τ . Требование (6.59) будет выполняться, если

аппроксимирующие функции $\varphi_j(\tau)$ содержат в качестве множителя затухающую экспоненту:

$$\varphi_j(\tau) = e^{-\alpha_j |\tau|} f_j(\tau), \quad (6.60)$$

где α_j — положительные вещественные числа.

3. Аппроксимирующие функции должны отражать колебательный характер изменения корреляционной функции. Для этого в качестве функции $f_j(\tau)$ в выражении (6.60) обычно берут тригонометрические функции, в частности

$$f_j(\tau) = \cos \beta_j \tau. \quad (6.61)$$

Подставляя (6.61) в (6.60), получаем в общем случае следующее выражение для наиболее общего вида аппроксимирующих функций:

$$\varphi_j(\tau) = e^{-\alpha_j |\tau|} \cos \beta_j \tau. \quad (6.62)$$

При выборе вида аналитической зависимости для аппроксимации значений статистической корреляционной функции $K_h(\tau)$ ошибок траекторных радиотехнических измерений надо учитывать результаты предшествующих теоретических и экспериментальных исследований.

Так, например, установлено, что входной случайный сигнал, состоящий из большого числа импульсов, действующих в случайные моменты времени с независимыми случайными амплитудами с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией, после прохождения через RC -фильтр, преобразуется в случайный сигнал с экспоненциальной затухающей корреляционной функцией. Случайные возмущения фазы сигнала приводят к тому, что корреляционная функция вместо экспоненциальной становится экспоненциально-косинусной. Флюктуации амплитуды и фазы радиолокационного сигнала, отраженного от ЛА, вызываемые возмущениями атмосферы, изменениями положения антенн бортового приемопередатчика и внутренними шумами в радиотехнической аппаратуре, также приводят к ошибкам измерений, корреляционная функция которых определяется экспоненциально-косинусной зависимостью.

Для практических целей использование выражения

$$K_h(\tau) = \sum_{j=1}^m C_j e^{-\alpha_j |\tau|} \cos \beta_j \tau, \quad (6.63)$$

как правило, удовлетворяет приближению $\widehat{K}_h(\tau)$.

Рассмотрим методику аппроксимации значений статистической корреляционной функции $\widehat{K}_h(t, t+\tau)$ нестационарного случайного процесса линейной комбинацией затухающих косинусов вида (6.63), где C_j, α_j, β_j — параметры, зависящие от времени t и подлежащие определению.

В качестве исходной информации служат значения статистической корреляционной функции $\widehat{K}_{ik} = \widehat{K}_h(t_i, t_i + \tau_k)$, $i = 1, 2, \dots, N$; $k = 1, 2, \dots, n$. Параметры α_j, C_j, β_j найдем из условия минимизации функции

$$F_i = \sum_{k=1}^n \left(\widehat{K}_{ik} - \sum_{j=1}^m C_j^{(i)} e^{-\alpha_j^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta_j^{(i)} \tau_k \right)^2.$$

Индекс i у параметров C_j, α_j, β_j означает, что эти параметры вычисляются для момента времени t_i .

Дифференцируя функцию F_i по $C_j^{(i)}, \alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}$ и приравнявая нулю полученные производные, получаем систему трансцендентных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f_m(\tau_k) e^{-\alpha_j^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta_j^{(i)} \tau_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^n f_m(\tau_k) |\tau_k| e^{-\alpha_j^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta_j^{(i)} \tau_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^n f_m(\tau_k) \tau_k e^{-\alpha_j^{(i)} |\tau_k|} \sin \beta_j^{(i)} \tau_k &= 0, \end{aligned} \quad (6.64)$$

$j = 1, 2, \dots, m,$

где

$$f_m(\tau_k) = \widehat{K}_{ik} - \sum_{j=1}^m C_j^{(i)} e^{-\alpha_j^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta_j^{(i)} \tau_k. \quad (6.65)$$

Для решения системы уравнений (6.64) могут быть использованы метод Ньютона, метод градиентов и др.

Рассмотрим применение метода Ньютона к решению системы (6.64) при $m=2$ [45].

Первое уравнение системы (6.64) для $j=1$ и $j=2$ записывается с учетом (6.65) соответственно в виде

$$\sum_{k=1}^n \widehat{K}_{ik} e^{-\alpha_1^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta_1^{(i)} \tau_k - C_1^{(i)} \sum_{k=1}^n e^{-2\alpha_1^{(i)} |\tau_k|} \times \\ \times \cos^2 \beta_1^{(i)} \tau_k - C_2^{(i)} \sum_{k=1}^n e^{-(\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)}) |\tau_k|} \cos \beta_1^{(i)} \tau_k \cos \beta_2^{(i)} \tau_k = 0, \quad (6.66)$$

$$\sum_{k=1}^n \widehat{K}_{ik} e^{-\alpha_2^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta_2^{(i)} \tau_k - C_1^{(i)} \sum_{k=1}^n e^{-(\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)}) |\tau_k|} \times \\ \times \cos \beta_1^{(i)} \tau_k \cos \beta_2^{(i)} \tau_k - C_2^{(i)} \sum_{k=1}^n e^{-2\alpha_2^{(i)} |\tau_k|} \cos^2 \beta_2^{(i)} \tau_k = 0.$$

Обозначив

$$b_1^{(i)} = \sum_{k=1}^n \widehat{K}_{ik} e^{-\alpha_1^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta_1^{(i)} \tau_k, \\ b_2^{(i)} = \sum_{k=1}^n \widehat{K}_{ik} e^{-\alpha_2^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta_2^{(i)} \tau_k, \\ a_{11}^{(i)} = \sum_{k=1}^n e^{-2\alpha_1^{(i)} |\tau_k|} \cos^2 \beta_1^{(i)} \tau_k, \\ a_{22}^{(i)} = \sum_{k=1}^n e^{-2\alpha_2^{(i)} |\tau_k|} \cos^2 \beta_2^{(i)} \tau_k, \\ a_{12}^{(i)} = a_{21}^{(i)} = \sum_{k=1}^n e^{-(\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)}) |\tau_k|} \cos \beta_1^{(i)} \tau_k \cos \beta_2^{(i)} \tau_k \quad (6.67)$$

и решив уравнения (6.66) относительно $C_1^{(i)}$ и $C_2^{(i)}$, выразим $C_1^{(i)}$ и $C_2^{(i)}$ через остальные неизвестные $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, $\beta_1^{(i)}$, $\beta_2^{(i)}$:

$$C_1^{(i)} = \frac{b_1^{(i)} a_{22}^{(i)} - b_{22}^{(i)} a_{12}^{(i)}}{a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - a_{12}^{(i)} a_{21}^{(i)}}; \quad C_2^{(i)} = \frac{b_2^{(i)} a_{11}^{(i)} - b_1^{(i)} a_{21}^{(i)}}{a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - a_{12}^{(i)} a_{21}^{(i)}}. \quad (6.68)$$

Искомые параметры $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, $\beta_1^{(i)}$, $\beta_2^{(i)}$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} g_1^{(i)} &= \sum_{k=1}^n f_2(\tau_k) |\tau_k| e^{-\alpha_1^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta_1^{(i)} \tau_k = 0, \\ g_2^{(i)} &= \sum_{k=1}^n f_2(\tau_k) |\tau_k| e^{-\alpha_2^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta_2^{(i)} \tau_k = 0, \\ g_3^{(i)} &= \sum_{k=1}^n f_2(\tau_k) \tau_k e^{-\alpha_1^{(i)} |\tau_k|} \sin \beta_1^{(i)} \tau_k = 0, \\ g_4^{(i)} &= \sum_{k=1}^n f_2(\tau_k) \tau_k e^{-\alpha_2^{(i)} |\tau_k|} \sin \beta_2^{(i)} \tau_k = 0. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Алгоритм вычисления неизвестных $C_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$, $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, $\beta_1^{(i)}$, $\beta_2^{(i)}$ строится следующим образом.

Обозначим

$$\mathbf{Q}^{(i)} = \left\| q_1^{(i)} \quad q_2^{(i)} \quad q_3^{(i)} \quad q_4^{(i)} \right\|_{\tau}; \quad \mathbf{G}^{(i)} = \left\| g_1^{(i)} \quad g_2^{(i)} \quad g_3^{(i)} \quad g_4^{(i)} \right\|_{\tau},$$

где

$$q_1^{(i)} = \alpha_1^{(i)}; \quad q_2^{(i)} = \alpha_2^{(i)}; \quad q_3^{(i)} = \beta_1^{(i)}; \quad q_4^{(i)} = \beta_2^{(i)}.$$

Пусть $\mathbf{Q}_l^{(i)}$ — l -е приближение вектора $\mathbf{Q}^{(i)}$. Вычисление следующего $(l+1)$ -го приближения этого вектора согласно методу Ньютона ведется по формуле

$$\mathbf{Q}_{l+1}^{(i)} = \mathbf{Q}_l^{(i)} - \mathbf{A}_{ll}^{-1} \mathbf{G}_l^{(i)}, \quad (6.70)$$

где

$$\mathbf{A}_l = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{(i)}}{\partial q_1^{(i)}} & \frac{\partial g_1^{(i)}}{\partial q_2^{(i)}} & \frac{\partial g_1^{(i)}}{\partial q_3^{(i)}} & \frac{\partial g_1^{(i)}}{\partial q_4^{(i)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_4^{(i)}}{\partial q_1^{(i)}} & \frac{\partial g_4^{(i)}}{\partial q_2^{(i)}} & \frac{\partial g_4^{(i)}}{\partial q_3^{(i)}} & \frac{\partial g_4^{(i)}}{\partial q_4^{(i)}} \end{vmatrix}.$$

Получив из (6.70) значения $q_{1,l+1}^{(i)}, q_{2,l+1}^{(i)}, q_{3,l+1}^{(i)}, q_{4,l+1}^{(i)}$, по формулам (6.67), (6.68) вычисляют $C_{1,l+1}^{(i)}, C_{2,l+1}^{(i)}$.

Из рассмотрения полученного алгоритма следует очевидная целесообразность использованного приема представления неизвестных $C_1^{(i)}$ и $C_2^{(i)}$ через остальные параметры $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}$, ибо это позволило составлять и обращать матрицу A_i не размера 6×6 , а размера 4×4 , что существенно упрощает решение задачи.

Окончание последовательных приближений производят при выполнении неравенства

$$|q_{j,l+1}^{(i)} - q_{j,l}^{(i)}| \leq \varepsilon_j, \quad j=1, 2, \dots, 6,$$

где $q_5^{(i)} = C_1^{(i)}$; $q_6^{(i)} = C_2^{(i)}$, ε_j — заданные положительные малые величины.

Выбор значений величин ε_j можно осуществить следующим образом. Необходимо сравнить результаты расчета значений корреляционной функции $K_A(\tau)$ по формуле (6.63) при использовании параметров $Q_{l+1}^{(i)}$ $(l+1)$ -го приближения и параметров $Q_l^{(i)}$ l -го приближения. Если отклонения соответствующих значений корреляционной функции не превосходят среднего квадратического отклонения оценок корреляционной функции, то процесс последовательных приближений можно считать законченным. В противном случае сближения необходимо продолжить. Изучая при этом характер изменения значений искоемых параметров $Q^{(i)}$, можно назначить величины допустимых отклонений этих параметров.

Приведем один из возможных способов выбора значений искоемых параметров нулевого приближения $C_{1,0}^{(i)}, C_{2,0}^{(i)}, \alpha_{1,0}^{(i)}, \alpha_{2,0}^{(i)}, \beta_{1,0}^{(i)}, \beta_{2,0}^{(i)}$.

В качестве начального приближения для неизвестных $C_{1,0}^{(i)}, C_{2,0}^{(i)}, \alpha_{2,0}^{(i)}, \beta_{2,0}^{(i)}$ можно принять следующие значения: $C_{1,0}^{(i)} = \hat{K}_l, k^{(0)}$, $C_{2,0}^{(i)} = 0$, $\alpha_{2,0}^{(i)} = 0$, $\beta_{2,0}^{(i)} = 0$, причем индекс $k(0)$ такой, что $\tau_{k(0)} = 0$.

Пусть $\tau_{k(i)}$ — интервал времени от нуля до первого прохождения через нуль корреляционной функции $\widehat{K}_h(t_i, t_i + \tau)$. Тогда можно, например, принять

$$\alpha_{1,0}^{(i)} = 1/|\tau_{k(i)}| \quad (6.71)$$

и

$$\beta_{1,0}^{(i)} = \pi/2|\tau_{k(i)}|. \quad (6.72)$$

Иногда оказывается возможным аппроксимировать статистическую корреляционную функцию $\widehat{K}_h(t_i, t_i + \tau)$ зависимостью вида

$$K_h(t_i, t_i + \tau) = C^{(i)} e^{-\alpha^{(i)}|\tau|} \cos \beta^{(i)}\tau, \quad (6.73)$$

приняв в формуле (6.63) $m=1$.

В этом случае коэффициент $C^{(i)}$ можно положить равным дисперсии исследуемого процесса в момент t_i , т. е. $C^{(i)} = R_{ii}$. Параметры $\alpha^{(i)}$ и $\beta^{(i)}$ находятся из условия минимизации функции

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^n (\widehat{r}_{i,k} - e^{-\alpha^{(i)}|\tau_k|} \cos \beta^{(i)}\tau_k)^2. \quad (6.74)$$

Дифференцируя функцию (6.74) по $\alpha^{(i)}$ и $\beta^{(i)}$ и приравняв нулю полученные производные, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} d_1^{(i)} &= \sum_{k=1}^n \varphi(\tau_k) |\tau_k| e^{-\alpha^{(i)}|\tau_k|} \cos \beta^{(i)}\tau_k = 0, \\ d_2^{(i)} &= \sum_{k=1}^n \varphi(\tau_k) \tau_k e^{-\alpha^{(i)}|\tau_k|} \sin \beta^{(i)}\tau_k = 0, \end{aligned} \quad (6.75)$$

где $\varphi(\tau_k) = \widehat{r}_{ik} - e^{-\alpha^{(i)}|\tau_k|} \cos \beta^{(i)}\tau_k$. Используя метод Ньютона для решения уравнений (6.75), находим

$$\begin{aligned} \alpha_{l+1}^{(i)} &= \alpha_l^{(i)} - (b_{11}^{(i)} d_1^{(i)} + b_{12}^{(i)} d_2^{(i)}), \\ \beta_{l+1}^{(i)} &= \beta_l^{(i)} - (b_{21}^{(i)} d_1^{(i)} + b_{22}^{(i)} d_2^{(i)}), \end{aligned} \quad (6.76)$$

где

$$b_{11}^{(i)} = \frac{a_{22}^{(i)}}{\Delta}, \quad b_{12}^{(i)} = b_{21}^{(i)} = -\frac{a_{12}^{(i)}}{\Delta}, \quad b_{22}^{(i)} = \frac{a_{11}^{(i)}}{\Delta},$$

$$\Delta = a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - (a_{12}^{(i)})^2;$$

$$a_{11}^{(i)} = \frac{\partial d_1^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} = \sum_{k=1}^n [2e^{-\alpha^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta^{(i)} \tau_k - \widehat{r}_{ik}] \tau_k^2 e^{-\alpha^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta^{(i)} \tau_k; \quad (6.77)$$

$$a_{12}^{(i)} = a_{21}^{(i)} = \frac{\partial d_1^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}} = \frac{\partial d_2^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} = \sum_{k=1}^n [2e^{-\alpha^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta^{(i)} \tau_k - \widehat{r}_{ik}] \tau_k |\tau_k e^{-\alpha^{(i)} |\tau_k|} \sin \beta^{(i)} \tau_k;$$

$$a_{22}^{(i)} = \frac{\partial d_2^{(i)}}{\partial \beta^{(i)}} = - \sum_{k=1}^n [2e^{-\alpha^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta^{(i)} \tau_k - \widehat{r}_{ik}] \tau_k^2 \times \\ \times e^{-\alpha^{(i)} |\tau_k|} \cos \beta^{(i)} \tau_k + \sum_{k=1}^n \tau_k^2 e^{-2\alpha^{(i)} |\tau_k|}.$$

Начальные приближения $\alpha_0^{(i)}$ и $\beta_0^{(i)}$ можно вычислить по формулам (6.71) и (6.72).

Пример. На рис. 6.3 представлены графики статистической корреляционной функции $R(\tau)$ (сплошная линия) и аппроксимации этой функции выражениями следующего вида:

$$a) C e^{-\alpha_1 |\tau|} \cos \beta_1 \tau; \quad (6.78)$$

$$b) C_1 e^{-\alpha_1 |\tau|} \cos \beta_1 \tau + C_2 e^{-\alpha_2 |\tau|} \cos \beta_2 \tau. \quad (6.79)$$

Анализ этих графиков показывает, что для рассматриваемой реализации аппроксимация корреляционных функций является вполне удовлетворительной. При использовании зависимости (6.78) обеспечивается высокая точность аппроксимации на небольшом интервале τ . С увеличением интервала, на котором производится аппроксимация, растет влияние отклонений отдельных гармоник от среднего периода. Уменьшение этого влияния может быть достигнуто

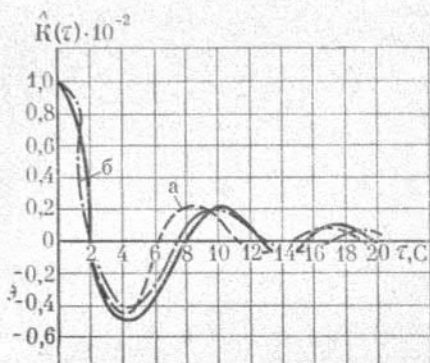


Рис. 6.3.

путем увеличения числа m (например, применяя зависимость (6.79)). Но и при этом с ростом τ погрешность аппроксимации возрастает. Однако, если учесть, что аппроксимация производится применительно к оценкам статистических корреляционных функций, точность которых с ростом τ также уменьшается, следует рассматривать приведенную аппроксимацию как целесообразную для применения на практике при аппроксимации корреляционной функции на сравнительно небольших интервалах времени изменения τ .

Рассмотренную методику аналитического представления статистической корреляционной функции применяют для аппроксимации корреляционных функций нестационарных случайных процессов. Однако при этом приходится затрачивать очень много времени на расчет коэффициентов аппроксимирующих зависимостей для различных моментов t_i начала отсчета τ . Кроме того, использование множества аппроксимирующих функций $K_h(t_i, t_i + \tau)$, $i=1, 2, \dots, N$, также очень неудобно. Вместе с тем часто на основе предварительного анализа случайной функции $\Delta h(t)$ удается установить, что ее математическое ожидание примерно постоянно, дисперсия несущественно меняется со временем, а значения элементов матрицы нормированной корреляционной функции вдоль параллелей главной диагонали, соответствующих $\tau = \text{const}$, примерно постоянны.

Если некоторые отступления характеристик случайного процесса $\Delta h(t)$ от закономерностей изменения со-

ответствующих характеристик стационарного случайного процесса незначительны и не имеют сколько-нибудь закономерного характера, а следовательно, могут быть объяснены ограниченным количеством обработанных реализаций, то можно принять допущение о стационарности случайного процесса $\Delta h(t)$. В этом случае целесообразно провести осреднение значений математического ожидания, дисперсии и нормированной корреляционной функции, а затем аппроксимировать нормированную корреляционную функцию аналитической зависимостью вида (6.63).

6.7. Определение интервала корреляции

Корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ характеризует степень зависимости между двумя сечениями процесса $X(t)$ и $X(t+\tau)$. Мерой протяженности этой связи, называемой корреляционной, выступает интервал (время) корреляции $\tau_{\text{кор}}$, под которым понимается расстояние между сечениями $X(t)$ и $X(t+\tau)$, начиная с которого можно считать практически некоррелированными случайные величины $X(t)$ и $X(t+\tau)$, $\tau \gg \tau_{\text{кор}}$.

В практике используется несколько определений интервала корреляции [20, 43, 44].

1. Пусть ε — некоторая малая положительная величина. Интервал корреляции $\tau_{\text{кор}}$ определяется как такое значение аргумента нормированной корреляционной функции $r(\tau)$, начиная с которого выполняется условие

$$|r(\tau)| \leq \varepsilon \quad \text{для всех } \tau \geq \tau_{\text{кор}}. \quad (6.80)$$

Недостаток такого определения интервала корреляции состоит в неопределенности выбора уровня ε и в значительной зависимости величины $\tau_{\text{кор}}$ от принятого уровня ε .

2. Определение интервала корреляции, рекомендуемое для использования при выборе шага дискретности по времени непрерывной измеряемой функции, ведется по формуле

$$\tau_{\text{кор}} = \int_0^{\infty} |r(\tau)| d\tau. \quad (6.81)$$

Применение этого определения позволяет получить следующие зависимости для расчета интервала корреляции типовых корреляционных функций:

$$\text{при } r(\tau) = e^{-\alpha |\tau|} \quad \tau_{\text{кор}} = 1/\alpha; \quad (6.82)$$

$$\text{при } r(\tau) = e^{-\alpha |\tau|} \cos \beta \tau \quad \tau_{\text{кор}} = \frac{1}{2(1 + \mu^2)} \left[1 + \mu e^{-\pi/2\mu} + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{e^{2\pi/\mu} - 1} (e^{-\pi/2\mu} + 2e^{-\pi/2\mu} + e^{-3\pi/2\mu}) \right], \quad (6.83)$$

где $\mu = \beta/\alpha$.

При разработке программы измерений и изучении свойств оценок параметров, найденных статистической обработкой результатов радиотехнических траекторных измерений, необходимо знать статистические свойства ошибок измерений. В частности, очень важным является вопрос о характере корреляционной зависимости поступающих измерений. Знание интервала корреляции $\tau_{\text{кор}}$ позволяет выбрать интервал τ между последовательными измерениями таким, чтобы полученные измерения можно было считать практически некоррелированными и использовать достаточно простой алгоритм статистической обработки этих измерений. Если же по каким-либо причинам необходимо использовать измерения с шагом $\tau < \tau_{\text{кор}}$, то статистическая обработка полученных измерений должна вестись с учетом коррелированности этих измерений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ
ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

7

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ И МЕТОДЫ
ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Интегрирование дифференциальных уравнений движения летательных аппаратов лежит в основе решения следующих задач: расчет целеуказаний измерительным средствам, ведущим наблюдение за полетом ЛА; определение параметров траектории на основе статистической обработки измерений; прогнозирование движения ЛА; коррекция движения ЛА; расчет момента включения тормозной двигательной установки, траектории спуска, координат точки приземления ЛА и др. Это обуславливает необходимость записи дифференциальных уравнений движения ЛА и рассмотрения методов их интегрирования.

В данной главе вводятся системы координат, используемые для записи уравнений движения ЛА, анализируется система сил, под действием которой ЛА совершает движение, записываются основные соотношения невозмущенного (кеплерова) движения, а также уравнения возмущенного движения, наиболее широко используемые при статистической обработке траекторных измерений и прогнозировании движения ЛА. Рассматриваются методы численного интегрирования уравнений движения ЛА.

7.1. Системы координат

Для записи уравнений движения ЛА и алгоритмов статистической обработки траекторных измерений наиболее часто используются прямоугольные, сферические и цилиндрические системы координат. В зависимости от выбора начала отсчета системы координат

можно классифицировать на геоцентрические (с началом отсчета в центре масс Земли A) и топоцентрические (начало отсчета связано с некоторой точкой O поверхности Земли). Геоцентрические системы координат, в свою очередь, подразделяют на экваториальные и и эклиптические, в зависимости от того, какая плоскость принимается за опорную при определении орбиты ЛА. Если в качестве опорной выбрана плоскость экватора Земли, то система называется экваториальной. При выборе за опорную плоскости эклиптики, т. е. плоскости, в которой находится орбита Земли при ее движении вокруг Солнца, система координат называется эклиптической.

Кроме того, геоцентрические системы координат классифицируют на относительные, оси которых жестко связаны с Землей и вращаются вместе с ней, и абсолютные, сохраняющие неизменным положение своих осей в пространстве «неподвижных» звезд.

7.1.1. Геоцентрические системы координат

Геоцентрическая относительная система координат $Ax_r Y_r Z_r$. Ось AZ_r направлена по оси вращения Земли к Северному полюсу, ось Ax_r проходит через точку пересечения начального меридиана с плоскостью экватора, а ось Ay_r проведена так, чтобы образовалась правая прямоугольная система координат. Если в качестве начального меридиана выбран Гринвичский, то система координат называется гринвичской.

Геоцентрическая абсолютная система координат $Ax_{га} Y_{га} Z_{га}$. Ось $AZ_{га}$ направлена по оси вращения Земли к Северному полюсу, ось $Ax_{га}$ — в точку весеннего равноденствия, а ось $Ay_{га}$ — так, что составляет с $Ax_{га}$ и $AZ_{га}$ правую прямоугольную систему координат (рис. 7.1).

Связь между параметрами движения центра масс ЛА в геоцентрической абсолютной системе координат $Ax_{га} Y_{га} Z_{га}$ и гринвичской относительной системе координат $Ax_r Y_r Z_r$ определяется формулами

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} = A_{га,г}^T \begin{pmatrix} x_{га} \\ y_{га} \\ z_{га} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{x,г} \\ v_{y,г} \\ v_{z,г} \end{pmatrix} = A_{га,г}^T \begin{pmatrix} v_{x,га} \\ v_{y,га} \\ v_{z,га} \end{pmatrix} + \Omega_3 \begin{pmatrix} y_r \\ -x_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

$$A_{га,г} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

где $\gamma = S_0 + \Omega_3(t - \Delta t_m)$, — угол, отсчитываемый в плоскости земного экватора от оси $Ax_{га}$ геоцентрической абсолютной системы координат до оси Ax_r гринвичской системы координат; S_0 — всемирное звездное время на нуль часов гринвичского времени даты сеанса

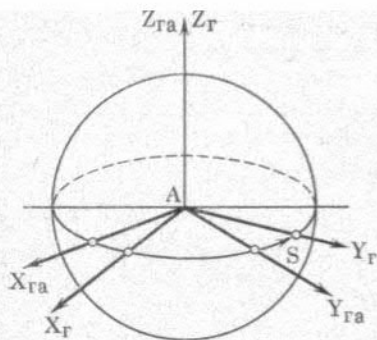


Рис. 7.1.

наблюдения (в соответствующих единицах измерения), определяемое из Астрономического ежегодника [53]; $\Omega_3 = 0,729211 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли; t — время от нуля часов московского времени даты сеанса наблюдения; $\Delta t_m = 3 \text{ ч}$ — поправка для перехода от московского к гринвичскому времени; $\mathbf{V} = \|V_{x, ra} V_{y, ra} V_{z, ra}\|^T$ — вектор абсолютной скорости центра масс ЛА; $\mathbf{V} = \|v_{x, r} v_{y, r} v_{z, r}\|^T$ — вектор относительной скорости центра масс ЛА.

При необходимости учета нутации и прецессии вращения Земли используют формулы

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} = A_{ra, r}^{*T} \begin{pmatrix} x_{ra} \\ y_{ra} \\ z_{ra} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{x, r} \\ v_{y, r} \\ v_{z, r} \end{pmatrix} = A_{ra, r}^{*T} \begin{pmatrix} V_{x, ra} \\ V_{y, ra} \\ V_{z, ra} \end{pmatrix} + \Omega_3 A^* \begin{pmatrix} x_{ra} \\ y_{ra} \\ z_{ra} \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

где

$$A_{ra, r}^* = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & g \cos (G + \gamma) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & -g \sin (G + \gamma) \\ -g \cos (G + \gamma) & g \sin (G + \gamma) & 1 \end{pmatrix}; \quad (7.4)$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -\sin \gamma & \cos \gamma & g \sin (G + \gamma) \\ -\cos \gamma & -\sin \gamma & g \cos (G + \gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma = S_0 + \Omega_3 (t - \Delta t_m) (1 + \mu'); \quad \mu' = 0,0027378119;$$

g, G — редуционные величины, с помощью которых учитываются нутация и прецессия вращения земной оси, через g обозначается угол между земной осью данной эпохи и земной осью для заданной даты; G — угол между плоскостью $A X_{ra} Z_{ra}$ и плоскостью, содержащей угол g .

Геоцентрическая эллиптическая абсолютная система координат $AX_0Y_0Z_0$. Ось AZ_0 совпадает с нормалью к плоскости эклиптики и направлена в сторону Северного полюса, ось AX_0 — в точку весеннего равноденствия, а ось AY_0 дополняет систему до правой.

Связь между параметрами движения центра масс ЛА в геоцентрической абсолютной системе координат $AX_{га}Y_{га}Z_{га}$ и геоцентрической эллиптической абсолютной системе координат $AX_0Y_0Z_0$ определяется зависимостями

$$\begin{pmatrix} x_{га} \\ y_{га} \\ z_{га} \end{pmatrix} = A_{га, 0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_{x, га} \\ V_{y, га} \\ V_{z, га} \end{pmatrix} = A_{га, 0} \begin{pmatrix} V_{x, 0} \\ V_{y, 0} \\ V_{z, 0} \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

где

$$A_{га, 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix},$$

ε — наклонение эклиптики.

Орбитальная система координат $AX_rY_rZ_r$. Ось AX_r направлена по радиусу-вектору \vec{r} текущего положения центра масс D ЛА; ось AY_r расположена в плоскости, проведенной через вектор скорости центра масс ЛА и ось AX_r и направлена перпендикулярно радиусу-вектору \vec{r} в сторону движения; ось AZ_r проведена так, чтобы образовалась правая прямоугольная система координат. В некоторых случаях начало орбитальной системы координат совмещают с центром масс D ЛА.

Положение орбитальной системы координат относительно абсолютной геоцентрической системы определяется долготой восходящего узла Ω , наклонением орбиты i , угловым расстоянием u (аргументом широты) ЛА от линии узлов. Физический смысл величин Ω , i и u поясняется в § 7.2.

Текущие координаты x_r, y_r, z_r и проекции $V_{x, r}, V_{y, r}, V_{z, r}$ вектора абсолютной скорости ЛА в орбитальной системе координат могут быть пересчитаны в геоцентрическую абсолютную систему координат по формулам

$$\begin{pmatrix} x_{га} \\ y_{га} \\ z_{га} \end{pmatrix} = A_{га, r} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_{x, га} \\ V_{y, га} \\ V_{z, га} \end{pmatrix} = A_{га, r} \begin{pmatrix} V_{x, r} \\ V_{y, r} \\ V_{z, r} \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

где

$$A_{га, r} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos u & -\cos \Omega \sin u & \sin \Omega \sin i \\ -\sin \Omega \sin u \cos i & -\sin \Omega \cos u \cos i & \\ \sin \Omega \cos u + & -\sin \Omega \sin u + & -\cos \Omega \sin i \\ + \cos \Omega \sin u \cos i & + \cos \Omega \cos u \cos i & \\ \sin u \sin i & \cos u \sin i & \cos i \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

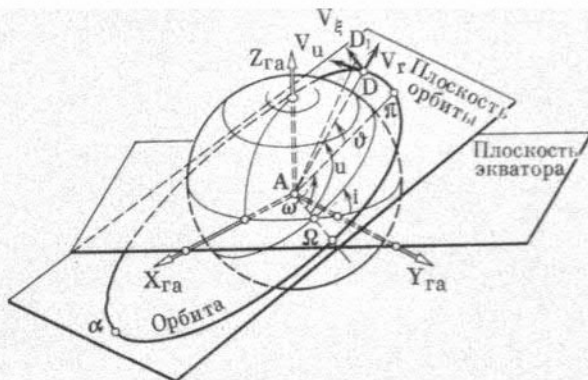


Рис. 7.2.

— матрица направляющих косинусов связи между орбитальной и геоцентрической абсолютными системами координат.

Перигейная система координат $AX_{п}Y_{п}Z_{п}$ получается фиксированием орбитальной системы координат в момент, когда ЛА находится в перигее, т. е. $u = \omega$.

Матрица направляющих косинусов связи между перигейной и геоцентрической абсолютными системами координат определяется зависимостями (7.7), в которых необходимо принять $u = \omega$.

Цилиндрическая абсолютная система координат r, u, ζ определяется следующим образом. За основную плоскость принимают плоскость орбиты в начальный момент времени t_0 . Положение этой плоскости относительно абсолютной геоцентрической системы координат $AX_{га}Y_{га}Z_{га}$ задается начальной долготой восходящего узла орбиты Ω_0 и начальным наклоном i_0 .

Цилиндрические координаты: r — расстояние от центра Земли до проекции центра масс D летательного аппарата на основную плоскость; u — угол, отсчитываемый в основной плоскости по направлению движения точки D от направления на восходящий узел орбиты до направления на проекцию центра масс ЛА на основную плоскость; ζ — аппликата — расстояние от основной плоскости до точки D (рис. 7.2).

Преобразование текущих значений координат r, u, ζ и проекций вектора абсолютной скорости центра масс ЛА на радиус-вектор \vec{r} (V_r), нормаль к \vec{r} в основной плоскости (V_u) и на перпендикуляр к основной плоскости (V_z) в геоцентрическую абсолютную систему координат $AX_{га}Y_{га}Z_{га}$ может быть произведено по формулам

$$x_{ra} = r (\cos \Omega_0 \cos u - \cos i_0 \sin \Omega_0 \sin u) + \zeta \sin i_0 \sin \Omega_0, \quad (7.8)$$

$$y_{ra} = r (\sin \Omega_0 \cos u + \cos i_0 \cos \Omega_0 \sin u) - \zeta \sin i_0 \cos \Omega_0,$$

$$z_{ra} = r \sin i_0 \sin u + \zeta \cos i_0;$$

$$V_r = dr/dt, \quad V_u = r du/dt, \quad V_\zeta = d\zeta/dt; \quad (7.9)$$

$$V_{x, ra} = V_r (\cos \Omega_0 \cos u - \cos i_0 \sin \Omega_0 \sin u) - \\ - V_u (\cos \Omega_0 \sin u + \cos i_0 \sin \Omega_0 \cos u) + V_\zeta \sin i_0 \sin \Omega_0,$$

$$V_{y, ra} = V_r (\sin \Omega_0 \cos u + \cos i_0 \cos \Omega_0 \sin u) + \\ + V_u (\cos \Omega_0 \cos i_0 \cos u - \sin \Omega_0 \sin u) - V_\zeta \sin i_0 \cos \Omega_0, \quad (7.10)$$

$$V_{z, ra} = V_r \sin i_0 \sin u + V_u \sin i_0 \cos u + V_\zeta \cos i_0.$$

7.1.2. Топоцентрические системы координат

Местная система координат $OX_M Y_M Z_M$. Ось OY_M направлена по внешней нормали к поверхности земного эллипсоида; ось OX_M расположена в плоскости, касательной к земному эллипсоиду в точке O , и составляет с плоскостью меридиана начала системы координат угол A_M — геодезический азимут, отсчитываемый по направлению движения часовой стрелки от направления на север; ось OZ_M проведена так, чтобы получилась правая прямоугольная система координат.

Измерительная система координат $OX_H Y_H Z_H$. Ось OY_H направлена по отвесной линии от земной поверхности; ось OX_H расположена в плоскости, перпендикулярной отвесной линии в точке O , и составляет с плоскостью меридиана начала системы координат угол A_H — астрономический азимут, отсчитываемый по направлению движения часовой стрелки от направления на север; ось OZ_H проведена так, чтобы образовалась правая прямоугольная система координат.

Естественно, что для строгой математической обработки результатов измерений параметров движения летательных аппаратов относительно земного эллипсоида, полученных с использованием измерительных средств, у которых оси антенн ориентированы относительно направления отвесной линии, необходимо учитывать уклонение отвесной линии.

Уклонение отвесной линии определяют как угол между направлением нормали к поверхности земного эллипсоида и направлением отвесной линии в точке O . Оно зависит от распределения массы Земли и ориентации используемого эллипсоида. Уклонение отвесных линий в какой-либо точке O определяется двумя параметрами: ве-

личной углы отклонения, обозначаемого обычно u , и азимутом плоскости, в которой расположен этот угол, обозначаемым Θ . Однако чаще отклонения отвесных линий определяются двумя другими величинами: проекцией полного отклонения отвесной линии u на плоскость первого меридиана, называемой слагающей отклонения в меридиане и обозначаемой ξ , и проекцией u на плоскость первого вертикала данной точки — слагающей отклонения в первом вертикале, обозначаемой η . При этом под плоскостью первого вертикала понимают плоскость, проведенную через рассматриваемую точку O перпендикулярно меридиональной плоскости этой точки.

Между величинами u , Θ и ξ , η существует однозначная связь [54]:

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\eta}{\xi}; \quad u = \frac{\xi}{\cos \Theta} = \frac{\eta}{\sin \Theta} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Зная отклонение отвесной линии, можно осуществить точный переход от измеренного астрономического азимута $A_{\text{н}}$ к геодезическому азимуту $A_{\text{м}}$ при помощи уравнения Лапласа:

$$A_{\text{м}} = A_{\text{н}} - (\lambda - L) \sin \varphi,$$

где $\lambda = L + \eta \operatorname{sec} \varphi$; $\varphi = B + \xi$; L , B — геодезические долгота и широта точки O ; λ , φ — астрономические долгота и широта точки O .

Таким образом, положение местной системы координат $Ox_{\text{м}}y_{\text{м}}z_{\text{м}}$ относительно геоцентрической системы определяется расстоянием R_0 точки O от центра Земли, геодезической долготой L , широтой B и азимутом $A_{\text{м}}$, а положение измерительной системы координат $Ox_{\text{н}}y_{\text{н}}z_{\text{н}}$ относительно геоцентрической системы — радиусом R_0 , астрономическими долготой λ , широтой φ и азимутом $A_{\text{н}}$.

Формулы для пересчета текущих параметров относительного движения центра масс ЛА $x_{\text{м}}$, $y_{\text{м}}$, $z_{\text{м}}$, $v_{x, \text{м}}$, $v_{y, \text{м}}$, $v_{z, \text{м}}$ из местной в геоцентрическую относительную систему координат имеют вид

$$\begin{pmatrix} x_{\Gamma} \\ y_{\Gamma} \\ z_{\Gamma} \end{pmatrix} = A_{\Gamma \text{м}} \begin{pmatrix} x_{\text{м}} \\ y_{\text{м}} \\ z_{\text{м}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\Gamma 0} \\ y_{\Gamma 0} \\ z_{\Gamma 0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{x, \Gamma} \\ v_{y, \Gamma} \\ v_{z, \Gamma} \end{pmatrix} = A_{\Gamma \text{м}} \begin{pmatrix} v_{x, \text{м}} \\ v_{y, \text{м}} \\ v_{z, \text{м}} \end{pmatrix}, \quad (7.11)$$

где $A_{\Gamma \text{м}}$ — матрица направляющих косинусов связи между местной и геоцентрической относительными системами координат, определяемая по значениям геодезической долготы L и широты B начала местной системы координат, а также азимута $A_{\text{м}}$, задающего направление оси $Ox_{\text{м}}$.

Элементы матрицы A_{FM} могут быть вычислены по формуле

$$A_{FM} = \begin{pmatrix} -\sin L \sin A_M & \cos L \cos B & -\sin L \cos A_M + \\ -\cos L \sin B \cos A_M & & +\cos L \sin B \sin A_M \\ \cos L \sin A_M & \sin L \cos B & \cos L \cos A_M + \\ -\sin L \sin B \cos A_M & & +\sin L \sin B \sin A_M \\ \cos B \cos A_M & \sin B & -\cos B \sin A_M \end{pmatrix}; \quad (7.12)$$

x_{r0}, y_{r0}, z_{r0} — координаты начала местной системы координат в геоцентрической системе, определяемые зависимостями

$$\begin{aligned} x_{r0} &= (N + h_0) \cos L \cos B, \\ y_{r0} &= (N + h_0) \sin L \cos B, \\ z_{r0} &= [N(1 - e^2_3) + h_0] \sin B; \end{aligned} \quad (7.13)$$

$N = a_3 / \sqrt{1 - e^2_3 \sin^2 B}$, h_0 — превышение начала местной системы координат (точки O) над поверхностью эллипсоида Красовского*); a_3, e_3 — параметры эллипсоида Красовского — большая полуось эллипсоида и первый эксцентриситет меридианного эллипса, определяемый выражением $e^2_3 = (a^2_3 - b^2_3) / a^2_3$, b_3 — малая полуось эллипсоида Красовского.

В случае задания начала местной системы геодезическими координатами L, B, h_0 относительно эллипсоида Красовского и необходимости определения движения ЛА в местной системе координат относительно общего земного эллипсоида производят пересчет геодезических координат точки O по формулам [54]**):

$$\begin{aligned} \bar{L} &= L + \Delta L, \quad \bar{B} = B + \Delta B, \quad \bar{h}_0 = h_0 + \Delta h, \\ \Delta L &= \frac{1}{N \cos B} (\delta y \cos L - \delta x \sin L), \\ \Delta B &= \frac{1}{M} \left\{ -\delta x \sin B \cos L - \delta y \sin B \sin L + \delta z \cos B + \right. \\ &+ \left[\frac{N(\bar{a}_3 - a_3)}{a_3} e^2 + \frac{M(2 - e^2 \sin^2 B)}{1 - \alpha} (\bar{\alpha} - \alpha) \right] \sin B \cos B \left. \right\}, \\ \Delta h &= \delta x \cos B \cos L + \delta y \cos B \sin L + \delta z \sin B - \\ &- \frac{N}{a_3} (1 - e^2 \sin^2 B) (\bar{a}_3 - a_3) + \frac{M(1 - e^2 \sin^2 B)}{1 - \alpha} (\bar{\alpha} - \alpha) \sin^2 B, \end{aligned}$$

*) На основании постановления Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г. в геодезических работах СССР используется земной эллипсоид вращения, называемый эллипсоидом Красовского.

**) Эллипсоид, наилучшим образом представляющий фигуру и гравитационное поле всей Земли в целом, называется общим земным эллипсоидом.

где \tilde{L} , \tilde{B} , \tilde{h}_0 — геодезические долготы, широта и превышение точки O относительно общего земного эллипсоида; δx , δy , δz — проекции центра эллипсоида Красовского на оси геоцентрической (гринвичской) системы координат, связанной с общим земным эллипсоидом; $M = a_3(1 - e^2) / \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B)^3}$; \bar{a}_3 , \bar{a} , e — большая полуось, полярное сжатие и эксцентриситет общего земного эллипсоида; $\alpha = (a_3 - b_3) / a_3$ — полярное сжатие эллипсоида Красовского.

После этого, используя параметры общего земного эллипсоида и геодезические координаты \tilde{L} , \tilde{B} , \tilde{h}_0 , по формулам (7.12), (7.13) пересчитывают матрицу $\tilde{A}_{гм}$ и координаты $x_{г0}$, $y_{г0}$, $z_{г0}$ начала местной системы в геоцентрической системе координат, имеющей начало в центре общего земного эллипсоида.

Пересчет текущих параметров x_n , y_n , z_n , $v_{x,n}$, $v_{y,n}$, $v_{z,n}$ относительного движения центра масс летательного аппарата из измерительной в геоцентрическую относительную систему координат может быть выполнен по формулам (7.11), (7.12), в которых углы L , B , A_m должны быть заменены соответственно на углы λ , φ , A_n .

7.2. Необходимые сведения из теории кеплерова движения

Неуправляемое движение ЛА совершается под действием силы притяжения Земли, сил притяжения других небесных тел (Солнца, Луны и др.), аэродинамических сил, силы светового давления и др. Однако основной силой, определяющей движение ЛА по околоземным траекториям, является сила притяжения Земли.

Наиболее простая модель неуправляемого движения ЛА получается в предположении, что аппарат представляет собой материальную точку массой m и совершает полет под действием единственной силы \mathbf{V}_0 — основной силы притяжения Земли, принимаемой за шар радиуса R с концентрическим распределением плотности. Такое движение принято называть невозмущенным, или кеплеровым, движением.

Ускорение \mathbf{V}_0 , создаваемое основной силой земного притяжения, направлено к центру Земли и его абсолютная величина определяется формулой Ньютона

$$b_0 = \mu / r^2, \quad (7.14)$$

где μ — коэффициент, равный произведению гравитационной постоянной на массу Земли; r — расстояние ЛА от центра Земли.

Исследованию кеплерова движения ЛА посвящены [55—58 и др.]. В данном параграфе приводятся без вывода основные положения теории кеплерова движения, используемые в последующем изложении.

Движение материальной точки под действием основной силы притяжения Земли является частным случаем движения ЛА в заданном поле сил. Как известно, такое движение описывается векторным уравнением

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{b}_0 \quad (7.15)$$

или системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. Отсюда следует, что для определения движения материальной точки необходимо задать шесть независимых параметров. В качестве таких параметров могут быть приняты начальные условия движения, т. е. координаты и проекции вектора скорости на оси выбранной системы координат, соответствующие некоторому заданному времени t_0 , или шесть других независимых величин, связанных взаимно однозначными соотношениями с начальными условиями движения. Такая система параметров полностью определяет движение аппарата, т. е. позволяет находить значения координат и составляющих вектора скорости ЛА для заданного момента времени t .

Кеплерово движение ЛА происходит в плоскости, проходящей через центр Земли. Линию пересечения плоскости орбиты с плоскостью экватора называют *линией узлов*. Точку, в которой ЛА, двигаясь по орбите с юга на север, пересекает плоскость экватора, называют *восходящим узлом* и обозначают Ω (см. рис. 7.2). Противоположную относительно центра Земли точку орбиты называют *нисходящим узлом*. Для определения движения ЛА необходимо задать параметры, характеризующие положение плоскости орбиты, форму, размеры, ориентацию орбиты на плоскости, а также временную привязку движения аппарата.

В качестве параметров ориентации плоскости орбиты используются: Ω — прямое восхождение, или *долгота восходящего узла*, — угол, отсчитываемый в плоскости экватора против направления движения часовой стрелки (если смотреть со стороны северного полюса) от начального направления (оси $Ax_{гг}$ геоцентрической абсолютной системы координат) до линии узлов; i — *наклонение орбиты* — угол $B\Omega C$ (рис. 7.2), образованный на поверхности Земли двумя дугами большого круга, получающимися при пересечении Земли плоскостями экватора и орбиты. Отсчет угла ведется от плоскости экватора против движения часовой стрелки. Наклонение орбиты изменяется в пределах от 0° до 180° .

В зависимости от величины наклонения i орбиты подразделяют на экваториальные ($i=0^\circ$), полярные ($i=90^\circ$) и наклонные. Если $0^\circ < i < 90^\circ$, орбиту называют прямой (движение спутника совпадает с направлением вращения Земли), при $90^\circ < i < 180^\circ$ орбита обратная (движение спутника происходит противоположно направлению вращения Земли).

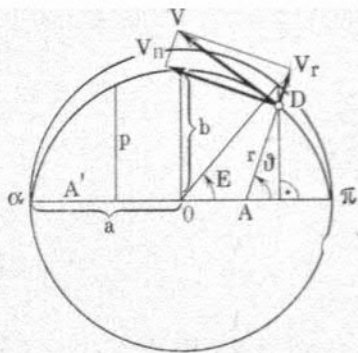


Рис. 7.3.

Форма орбиты определяется величиной эксцентриситета e . При $e=0$ — орбита круговая, $e<1$ — эллиптическая, $e=1$ — параболическая и $e>1$ — гиперболическая. Заметим, что летательные аппараты рассматриваемого класса (искусственные спутники Земли и головные части баллистических ракет) совершают движение по эллиптическим или круговым орбитам ($0 \leq e < 1$).

Размеры эллиптической орбиты характеризуются фокальным параметром p или большой полуосью a (рис. 7.3), которые связаны между собой зависимостью

$$p = a(1 - e^2). \quad (7.16)$$

Ориентацию орбиты на плоскости определяют аргументом перигея ω , представляющим собой угловое расстояние перигея π орбиты от восходящего узла Ω , отсчитываемое по направлению движения ЛА. Временная привязка движения ЛА осуществляется заданием времени τ прохождения аппаратом перигея орбиты.

Положение ЛА при его движении по траектории характеризует истинной аномалией θ или аргументом широты u — угловым расстоянием ЛА соответственно от перигея или восходящего узла орбиты, отсчитываемым по направлению движения аппарата (рис. 7.3).

Уравнение траектории в полярной системе координат r, θ имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}. \quad (7.17)$$

Зависимость (7.17) с геометрической точки зрения представляет собой уравнение конического сечения с фокальным параметром p и эксцентриситетом e .

Связь между положением ЛА на орбите и временем определяется уравнением Кеплера

$$E - e \sin M = M, \quad (7.18)$$

где E — эксцентрическая аномалия, физический смысл которой пояснен на рис. 7.3; M — средняя аномалия — угловое расстояние, на которое удалился бы аппарат от перигея, если бы он двигался равномерно по круговой орбите с периодом T_n , равным периоду обращения ЛА по эллиптической орбите:

$$M = \frac{2\pi}{T_n} (t - \tau), \quad (7.19)$$

$$T_n = 2\pi \sqrt{a^3/\mu}. \quad (7.20)$$

Связь между истинной аномалией θ и эксцентрической E определяется зависимостью

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (7.21)$$

При определении величины E по этой формуле следует иметь в виду, что углы $E/2$ и $\theta/2$ всегда находятся в одной четверти.

Проекция вектора скорости V ЛА в произвольной точке орбиты на радиус V_r и нормаль к нему V_n (рис. 7.3) определяются выражениями

$$V_r = \sqrt{\mu/p} e \sin \theta, \quad (7.22)$$

$$V_n = \sqrt{\mu/p} (1 + e \cos \theta). \quad (7.23)$$

В последующем изложении используется переход от известных значений параметров орбиты к параметрам движения аппарата в геоцентрической абсолютной системе координат $AX_{га}Y_{га}Z_{га}$. При этом в качестве аргумента, определяющего положение ЛА на орбите, как правило, принимается время t .

Приведем схему расчета координат $x_{га}$, $y_{га}$, $z_{га}$ и проекций $V_{x,га}$, $V_{y,га}$, $V_{z,га}$ вектора скорости ЛА для момента времени t по заданным значениям параметров орбиты.

1. Решая уравнение Кеплера (7.18), находят значение эксцентрической аномалии E , соответствующее заданному времени t .

Для решения уравнения Кеплера можно использовать метод последовательных приближений, по которому значения эксцентрической аномалии определяются с помощью рекуррентного соотношения

$$E_{l+1} = M + e \sin E_l, \quad (7.24)$$

где l — номер приближения. В качестве первого приближения принимают $E_1 = M$, где $M = \sqrt{\mu/a^3} (t - \tau)$.

Последовательные приближения сходятся, если $e < 1$.

2. Рассчитывают значения параметров движения ЛА в перигейной системе координат:

$$\begin{aligned}x_{\text{п}} &= a (\cos E - e), \\y_{\text{п}} &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \\z_{\text{п}} &= 0;\end{aligned}\quad (7.25)$$

$$\begin{aligned}V_{x, \text{п}} &= -\sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}, \\V_{y, \text{п}} &= \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos E}{1 - e \cos E}, \\V_{z, \text{п}} &= 0.\end{aligned}\quad (7.26)$$

3. Пересчитывают полученные значения параметров движения из перигейной в геоцентрическую абсолютную систему координат

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_{\text{га}} \\ y_{\text{га}} \\ z_{\text{га}} \end{pmatrix} &= A_{\text{га, п}} \begin{pmatrix} x_{\text{п}} \\ y_{\text{п}} \\ z_{\text{п}} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} V_{x, \text{га}} \\ V_{y, \text{га}} \\ V_{z, \text{га}} \end{pmatrix} = A_{\text{га, п}} \begin{pmatrix} V_{x, \text{п}} \\ V_{y, \text{п}} \\ V_{z, \text{п}} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (7.27)$$

Элементы матрицы направляющих косинусов связи между перигейной и геоцентрической абсолютными системами координат вычисляют по зависимостям (7.7), в которых необходимо принять $u = \omega$.

Если же требуется найти параметры движения ЛА в геоцентрической абсолютной системе координат при использовании в качестве аргумента истинной аномалии ϑ , то предпочтительнее следующая схема расчета:

$$\begin{aligned}p &= a (1 - e^2), \\r &= \frac{p}{(1 + e \cos \vartheta)}, \\u &= \omega + \vartheta, \\\operatorname{tg} \frac{E}{2} &= \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2},\end{aligned}\quad (7.28)$$

$$\begin{aligned}\lambda &= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad t = \tau + \frac{(E - e \sin E)}{\lambda}, \\V_r &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta, \quad V_u = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta); \\x_{\text{га}} &= r (\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i), \\y_{\text{га}} &= r (\sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i), \\z_{\text{га}} &= r \sin u \sin i;\end{aligned}\quad (7.29)$$

$$\begin{aligned}
 V_{x,ra} &= V_r (\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i) - \\
 &- V_u (\cos \Omega \sin u + \sin \Omega \cos u \cos i), \\
 V_{y,ra} &= V_r (\sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i) - \\
 &- V_u (\sin \Omega \sin u - \cos \Omega \cos u \cos i), \\
 V_{z,ra} &= V_r \sin u \sin i + V_u \cos u \sin i.
 \end{aligned}$$

Приведенные формулы позволяют, зная параметры орбиты Ω , i , ω , a , e , τ , рассчитывать однозначно параметры абсолютного ЛА для заданного момента времени t или значения истинной аномалии θ .

Рассмотрим теперь обратную задачу определения параметров орбиты по заданным на момент времени t значениям параметров движения x_{ra} , y_{ra} , z_{ra} , $V_{x,ra}$, $V_{y,ra}$, $V_{z,ra}$. Для решения этой задачи используются формулы

$$\begin{aligned}
 C_1 &= y_{ra} V_{z,ra} - z_{ra} V_{y,ra}, \quad C_2 = z_{ra} V_{x,ra} - x_{ra} V_{z,ra}, \\
 C_3 &= x_{ra} V_{y,ra} - y_{ra} V_{x,ra}, \quad C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}; \quad (7.30) \\
 \operatorname{tg} \Omega &= -\frac{C_1}{C_2}, \quad \cos i = \frac{C_3}{C}, \quad 0 < i < \pi,
 \end{aligned}$$

$$V = \sqrt{V_{x,ra}^2 + V_{y,ra}^2 + V_{z,ra}^2}, \quad r = \sqrt{x_{ra}^2 + y_{ra}^2 + z_{ra}^2}$$

$$\cos \theta = \frac{C}{Vr}, \quad \sin \theta = \frac{1}{Vr} (x_{ra} V_{x,ra} + y_{ra} V_{y,ra} + z_{ra} V_{z,ra}),$$

$$k = rV^2/2\mu, \quad a = r/2(1-k), \quad e = \sqrt{1-4k(1-k)\cos^2\theta},$$

$$\sin \vartheta = \frac{k}{e} \sin \theta \cos \theta, \quad \cos \vartheta = \frac{1}{e} (k \cos^2 \theta - 1),$$

$$\sin u = \frac{z_{ra}}{r \sin i}, \quad \cos u = \frac{1}{r} (x_{ra} \cos \Omega + y_{ra} \sin \Omega),$$

$$\omega = u - \vartheta, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2},$$

$$\tau = t - (E - e \sin E)/\lambda. \quad (7.31)$$

При вычислениях по формулам (7.31) необходимо учитывать, что знак $\sin \Omega$ совпадает со знаком величины C_1 , а знак $\cos \Omega$ противоположен знаку величины C_2 . Кроме того, углы $E/2$ и $\vartheta/2$ должны находиться в одной четверти.

Зависимости (7.31) позволяют однозначно определять параметры орбиты Ω , i , a , e , ω , τ по заданным в момент времени t значениям координат и проекций вектора скорости движения ЛА в геоцентрической абсолютной системе координат, удовлетворяющим условию эллиптичности траектории

$$k = rV^2/2\mu < 1.$$

Из (7.30), (7.31) следует, что при использовании этих зависимостей не может быть найдено значение истинной аномалии θ при $e=0$ (для круговых орбит) и аргумента широты u при $i=0$ (для экваториальных орбит).

Для круговых орбит положение перигея не определено. Поэтому можно принять, что $\omega=0$ и круговая орбита будет характеризоваться долготой восходящего узла Ω , наклонением орбиты i , радиусом r , а положение ЛА на орбите — углом u , причем $u=\theta=E=M$ и $r=a$. Так как скорость движения ИСЗ по круговой орбите постоянна, то

$$u = \frac{2\pi}{T_n} (t - t_{\Omega}), \quad (7.32)$$

где T_n — период обращения ИСЗ по орбите, определяемый по формуле (7.20); t — заданный момент времени; t_{Ω} — время прохождения ИСЗ через восходящий узел.

Для экваториальных орбит, когда $i=0$ или $i=\pi$, положение восходящего узла становится неопределенным. В этом случае принимают, что $\Omega=0$, т. е. за начало отсчета аргумента широты u выбирают направление оси Ax_{Ga} геоцентрической абсолютной системы координат.

7.3. Уравнения возмущенного движения летательного аппарата

Для получения уравнений движения ЛА, рассматриваемого в «схеме материальной точки» (см. гл. 1), необходимо спроектировать на оси выбранной системы координат основное уравнение динамики свободной материальной точки, записанное в векторной форме

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (7.33)$$

где \mathbf{V} — вектор абсолютной скорости точки; \mathbf{F} — равнодействующая сил, действующих на точку.

7.3.1. Силы, действующие на летательный аппарат в полете

Летательный аппарат совершает неуправляемое движение под действием силы притяжения Земли и других небесных тел, силы сопротивления атмосферы, силы светового давления и других сил. Основной силой, определяющей движение ЛА по околоземной орбите, является сила земного притяжения. Сила притяжения является

консервативной, т. е. имеет силовую функцию. Под силовой функцией, или потенциалом, понимают такую функцию координат потенциального силового поля, частные производные от которой по координатам равны проекциям силы на оси этих координат.

Потенциал (силовую функцию) земного притяжения, действующего на точку единичной массы, представляют в виде разложения [59]:

$$U_n = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n0} \left(\frac{a_3}{r} \right)^n P_n(\sin \psi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_3}{r} \right)^n P_n^m(\sin \psi) [C_{nm} \cos mL + d_{nm} \sin mL] \right\}, \quad (7.34)$$

где $\mu = fM$ — произведение гравитационной постоянной на массу Земли; a_3 — средний экваториальный радиус Земли; r , L , ψ — геоцентрические радиус, долгота и широта рассматриваемой точки; $P_n(\sin \psi)$ — полином Лежандра n -го порядка; $P_n^m(\sin \psi)$ — присоединенные сферические функции; C_{n0} , C_{nm} , d_{nm} — безразмерные постоянные, характеризующие форму и гравитационное поле Земли.

Первое слагаемое формулы (7.34) определяет потенциал Земли, принимаемой в виде тела сферической структуры. Слагаемые, содержащие $P_n(\sin \psi)$, называются зональными гармониками. Они характеризуют Землю как тело вращения. Нечетные зональные гармоники и долготные члены, для которых $n+m$ нечетно, характеризуют асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

Параметры фигуры и гравитационного поля Земли определяют путем наземных астрономо-геодезических и гравиметрических измерений. В последние годы все большее значение приобретают новые геодезические методы, основанные на использовании наблюдений за полетом искусственных спутников Земли.

Смитсоннанской астрофизической обсерваторией (США) в сборниках «Стандартная Земля» регулярно публикуются результаты исследований по уточнению данных, характеризующих гравитационное поле Земли. В табл. 7.1 приведены значения зональных коэффициентов C_{n0} , а в табл. 7.2 — значения нормированных коэффициентов \bar{C}_{nm} и \bar{d}_{nm} гравитационного поля Земли, заимствованные из сборника «Стандартная Земля III» 1973 г. Нормированные коэффициенты \bar{C}_{nm} и \bar{d}_{nm} связаны с C_{nm} и d_{nm} формулами:

$$\bar{C}_{nm} = C_{nm}/N_{nm}, \quad \bar{d}_{nm} = d_{nm}/N_{nm}, \quad (7.35)$$

причем $N_{nm} = \sqrt{2(n-m)!(2n+1)/(n+m)!}$.

В этой же работе рекомендуется при проведении исследований использовать следующие значения постоянных [122]:

$$a_0 = 6\,378\,140 \text{ м}; \quad \mu = 0,398\,601\,3 \cdot 10^{15} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2};$$

$$\Omega = 0,729\,211\,508\,5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \quad 1/a = 298,256.$$

Целесообразность учета тех или иных возмущающих гравитационных воздействий зависит от требуемой точности расчета движения ЛА и определяется видом траектории, интервалом времени, на котором рассматривается движение, и точностью задания гравитационных констант.

Таблица 7.1

n	$C_{n0} \cdot 10^6$	n	$C_{n0} \cdot 10^6$	n	$C_{n0} \cdot 10^6$
2	-1082,637	7	0,345	11	-0,317
3	2,540	8	0,204	12	0,196
4	1,619	9	0,162	13	0,336
5	0,230	10	0,232	14	-0,101
6	-0,552				

Таблица 7.2

n	m	$\bar{C}_{nm} \cdot 10^6$	$\bar{d}_{nm} \cdot 10^6$	n	m	$\bar{C}_{nm} \cdot 10^6$	$\bar{d}_{nm} \cdot 10^6$
2	2	2,3799	-1,3656	5	3	-0,58429	-0,16338
3	1	1,9977	0,22337	5	4	-0,11538	-0,045393
3	2	0,77830	-0,75519	5	5	0,13956	-0,86841
3	3	0,49011	1,5283	6	1	-0,072166	0,017756
4	1	-0,51748	-0,48140	6	2	0,024670	-0,40654
4	2	0,34296	0,67174	6	3	0,0044139	0,029055
4	3	1,0390	-0,11923	6	4	-0,10003	-0,30297
4	4	-0,10512	0,35661	6	5	-0,13504	-0,60964
5	1	-0,053667	-0,079973	6	6	-0,029136	-0,26327
5	2	0,59869	-0,39910				

Как следует из вида формулы (7.34), наиболее простые выражения для составляющих вектора ускорения силы притяжения \mathbf{b} получаются при разложении этого вектора на радиальную составляющую b_r , направленную по радиусу к центру Земли, меридианальную составляющую b_ϕ , лежащую в плоскости меридиана рассматриваемой точки и направленную перпендикулярно радиусу в сторону

экваториальной плоскости, и на нормальную составляющую b_L , направленную по нормали к плоскости меридиана на восток:

$$b_r = \frac{\partial U_{\Pi}}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) C_{n0} \left(\frac{a_3}{r}\right)^n P_n(\sin \psi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n (n+1) P_n^m(\sin \psi) \left(\frac{a_3}{r}\right)^n (C_{nm} \cos mL + d_{nm} \sin mL) \right], \quad (7.36)$$

$$b_{\psi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\Pi}}{\partial \psi} = -\frac{\mu}{r^2} \left[\sum_{n=2}^{\infty} C_{n0} \left(\frac{a_3}{r}\right)^n P'_n(\sin \psi) \cos \psi - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n C_{nm} \left(\frac{a_3}{r}\right)^n P_n^{m'}(\sin \psi) \cos \psi (C_{nm} \cos mL + d_{nm} \sin mL) \right],$$

$$b_L = \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial U_{\Pi}}{\partial L} = -\frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_3}{r}\right)^n \frac{P_n^m(\sin \psi)}{\cos \psi} m (-C_{nm} \sin mL + d_{nm} \cos mL).$$

Функции Лежандра и их производные вычисляются с помощью следующих рекуррентных формул:

$$P_n(\sin \psi) = \frac{1}{n} [-(n-1) P_{n-2}(\sin \psi) + (2n-1) \sin \psi P_{n-1}(\sin \psi)],$$

$$\frac{P'_n(\sin \psi)}{\cos \psi} = \frac{1}{n-m} \left[-(n+m-1) \frac{P_{n-2}^m(\sin \psi)}{\cos \psi} + (2n-1) \sin \psi \frac{P_{n-1}^m(\sin \psi)}{\cos \psi} \right], \quad (7.37)$$

$$\frac{P_n^m(\sin \psi)}{\cos \psi} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1) (\cos \psi)^{m-1},$$

$$P_n^{m'}(\sin \psi) \cos \psi = (n+1) \sin \psi \frac{P_n^m(\sin \psi)}{\cos \psi} - (n-m+1) \frac{P_{n+1}^m(\sin \psi)}{\cos \psi},$$

с начальными значениями функций

$$P_0(\sin \psi) = P'_1(\sin \psi) = 1, \quad P_1(\sin \psi) = \sin \psi, \\ \frac{P_{m-1}^m(\sin \psi)}{\cos \psi} = 0.$$

Использование частного $P^{m_n}(\sin \psi)/\cos \psi$ позволяет избежать значительных вычислительных трудностей, связанных с расчетом b_L при больших значениях широты.

Полезно отметить также, что при вычислениях синусы и косинусы должны определяться непосредственно, например, с помощью формул вида $\sin \psi = z_r/\sqrt{x_r^2 + y_r^2 + z_r^2}$ и $\cos \psi = x_r/\sqrt{x_r^2 + y_r^2 + z_r^2}$, что позволяет избежать тригонометрических вычислений и потерь в точности, присущих выражениям типа $\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi}$.

Сила тяжести. При изучении движения ЛА в системе координат, связанной с вращающейся Землей, необходимо учитывать действие переносной центробежной силы. Равнодействующая этой силы и силы притяжения Земли называется силой тяжести.

Центробежное ускорение направлено перпендикулярно оси вращения Земли, величина его определяется выражением

$$F_{ц} = \Omega_3^2 r \cos \psi, \quad (7.38)$$

а соответствующий потенциал

$$U_{ц} = \frac{1}{2} \Omega_3^2 r^2 \cos^2 \psi, \quad (7.39)$$

где Ω_3 — угловая скорость вращения Земли.

Потенциал силы тяжести определяется зависимостью

$$U_{\tau} = U_{п} + U_{ц}. \quad (7.40)$$

Радиальная, меридианальная и нормальная составляющие ускорения силы тяжести могут быть вычислены по формулам

$$g_r = \frac{\partial U_{\tau}}{\partial r}, \quad g_{\psi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\tau}}{\partial \psi}, \quad g_L = \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial U_{\tau}}{\partial L}. \quad (7.41)$$

Силы притяжения Луны и Солнца. При использовании абсолютной геоцентрической системы координат для записи уравнений движения ЛА учет возмущающего воздействия Луны и Солнца можно осуществить на основе применения пертурбационной функции [56]

$$P_k = \mu_k \left[\frac{1}{\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2}} - \frac{x_k x + y_k y + z_k z}{r_k^3} \right], \quad (7.42)$$

где $\mu_k = GM_k$ — произведение гравитационной постоянной на массу небесного тела; x_k, y_k, z_k — координаты центра масс небесного тела; x, y, z — координаты центра масс ЛА; r_k — расстояние от центра Земли до центра k -го небесного тела. Индексы обозначают: $k=C$ — Солнце, $k=L$ — Луна.

Ускорения, соответствующие действию сил притяжения Луны и Солнца в проекциях на оси геоцентрической абсолютной системы

координат, определяются формулами, полученными дифференцированием зависимостей (7.42) по координатам x, y, z :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{СЛ} &= \mu_C \left(\frac{x_C - x}{r_{DC}^3} - \frac{x_C}{r_{AC}^3} \right) + \mu_L \left(\frac{x_L - x}{r_{DL}^3} - \frac{x_L}{r_{AL}^3} \right), \\ \ddot{y}_{СЛ} &= \mu_C \left(\frac{y_C - y}{r_{DC}^3} - \frac{y_C}{r_{AC}^3} \right) + \mu_L \left(\frac{y_L - y}{r_{DL}^3} - \frac{y_L}{r_{AL}^3} \right), \\ \ddot{z}_{СЛ} &= \mu_C \left(\frac{z_C - z}{r_{DC}^3} - \frac{z_C}{r_{AC}^3} \right) + \mu_L \left(\frac{z_L - z}{r_{DL}^3} - \frac{z_L}{r_{AL}^3} \right), \end{aligned} \quad (7.43)$$

где $x_L, y_L, z_L, x_C, y_C, z_C$ — соответственно координаты центров масс Луны и Солнца в геоцентрической системе координат;

$$r_{DC} = \sqrt{(x_C - x)^2 + (y_C - y)^2 + (z_C - z)^2}$$

— расстояние между ЛА и центром масс Солнца;

$$r_{DL} = \sqrt{(x_L - x)^2 + (y_L - y)^2 + (z_L - z)^2}$$

— расстояние между ЛА и центром масс Луны;

$$r_{AC} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2}$$

— расстояние между центрами Земли и Солнца;

$$r_{AL} = \sqrt{x_L^2 + y_L^2 + z_L^2}$$

— расстояние между центрами Земли и Луны.

Эти возмущения приводят к вращению (прецессии) плоскости движения ИСЗ относительно полюса эклиптики с угловыми скоростями Ω_C и Ω_L и к изменению фокального параметра орбиты искусственного спутника δr_C и δr_L ^{*}).

Для величин $\delta r_{СЛ}$ и $\Omega_{СЛ}$ в работе [61] приводятся следующие оценки. Для круговой орбиты, удаленной на 800 км от поверхности Земли, за один оборот: $\delta r_{C \text{ макс}} = 25,6$ см, $\delta r_{L \text{ макс}} = 57,5$ см. Суммарное отклонение за счет влияния Солнца и Луны: $\delta r_{СЛ} \approx \approx 83$ см. При тех же условиях ИСЗ, удаленный на «суточную» орбиту ($r = 42\,112,3$ км), испытывает возмущения, приводящие к отклонениям: $\delta r_{L \text{ макс}} = 783$ м, $\delta r_C \text{ макс} = 313$ м и $\delta r_{СЛ \text{ макс}} = 1096$ м. Ско-

^{*} Плоскость, в которой происходит движение Земли вокруг Солнца, называют гелиоцентрической плоскостью эклиптики. Полюса эклиптики образуются при пересечении прямой, проведенной через центр Земли перпендикулярно плоскости эклиптики, с небесной сферой.

рость перемещений восходящего узла относительно полюса эклиптики: $\Omega_L = 0,63 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1}$, $\Omega_C = 0,28 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1}$.

Возмущающее действие Луны в некоторых случаях может существенно менять картину движения ИСЗ. При определенных наклонениях плоскости орбиты спутника к плоскости движения Луны время существования ИСЗ уменьшается. Так, например, вследствие возмущающего влияния Луны время существования спутника «Эксплорер VI» 1959 δ_2 (параметры орбиты: большая полуось $a_0 = 43\,446 \text{ км}$, начальное значение эксцентриситета $e_0 = 0,7604$, начальное наклонение $i_0 = 47,10^\circ$) сократилось более чем в 10 раз.

Фактическое определение эволюции орбиты спутника «Авангард I» 1958 β_2 (параметры: высота апогея над поверхностью Земли $h_a = 3\,948 \text{ км}$, высота перигея $h_p = 658 \text{ км}$, $i_0 = 34,3^\circ$, $e_0 = 0,19$, кеплеровский период обращения $T_n = 134^m, 18$, масса $G_0 = 2 \text{ кг}$) за счет возмущающего влияния Солнца показало такие величины: $\Omega_C = 0,18^\circ$ в год, $\delta r_C = 56,6 \text{ см}$. Влияние Луны на эволюцию орбиты было в 2,2 раза больше [114].

Таким образом, неучет на интервале в одни сутки возмущающего влияния Луны и Солнца при изучении ИСЗ, движущегося, например, на среднем удалении до 3—4 тыс. км от поверхности Земли, приводит к ошибке в определении положения спутника, равной нескольким сотням метров, для спутников с апогеем около 40 тыс. км на этом же интервале времени ошибка достигает нескольких десятков километров (главным образом за счет погрешности в определении положения плоскости орбиты).

Аэродинамическая сила сопротивления. Движение искусственных спутников Земли происходит на высотах, где воздух сильно разрежен и поэтому оказывает малое сопротивление этому движению. Однако длительное воздействие сопротивления, несмотря на его малость, может привести к существенным изменениям параметров движения спутника. Именно атмосферное торможение — основная причина того, что искусственные спутники Земли имеют ограниченное время существования.

При изучении поступательного движения ЛА рассматриваемого класса обычно учитывают лишь ту компоненту аэродинамических сил, направление которой противоположно вектору относительной скорости.

Под действием аэродинамической силы лобового сопротивления Q энергия движущегося ЛА непрерывно уменьшается. Тормозящее влияние атмосферы характеризуется ускорением

$$b_Q = -S_0 \rho v_{отн}^2 v_{отн}^0, \quad (7.44)$$

где $v_{отн}$ — скорость движения ЛА относительно воздуха; $v_{отн}^0$ — единичный вектор относительной скорости ЛА; ρ — плотность воз-

духа; $S_0 = S_m C_x / 2m$ — баллистический коэффициент ЛА; S_m — площадь миделева сечения ЛА; C_x — аэродинамический коэффициент силы лобового сопротивления; m — масса ЛА.

Принимая, что атмосфера вращается вместе с Землей, считают $v_{отн} = v$, где v — скорость движения ЛА относительно вращающейся Земли.

Баллистический коэффициент является исчерпывающей аэродинамической характеристикой принятой схемы ЛА. Коэффициент C_x для конусообразных и выпуклых тел, движущихся в верхних слоях атмосферы, может быть взят равным 2,2. Величина площади миделева сечения S_m в случае неориентированного движения ЛА в среднем в течение больших промежутков времени может быть принята также постоянной и равной одной четвертой величины площади внешней поверхности тела [62].

Распределение плотности воздуха по высоте определяется выражением

$$\rho(h) = A_i \exp [k_{1i}(h-h_i)^2 - k_{2i}(h-h_i)]. \quad (7.45)$$

Значения коэффициентов A_i , k_{1i} , k_{2i} для каждого i -го слоя атмосферы выбираются как функции высоты h из специальных таблиц, составленных в соответствии с принятой моделью атмосферы. Так, например, в табл. 7.3 приведены значения этих коэффициентов, рассчитанные с использованием «Таблицы стандартной атмосферы ГОСТ-4401-64» и «Временной стандартной атмосферы ВСА-60» [63].

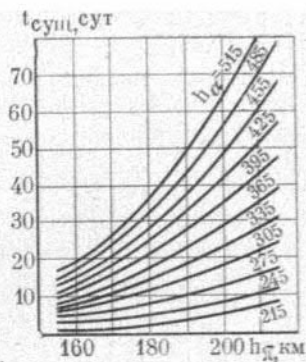
Для того чтобы дать представление о величине возмущений от влияния атмосферы, приведем некоторые результаты расчетов [63].

Таблица 7.3

i	$h_i < h < h_{i+1}$, м	A_i , кг/м ³	k_{1i} , м ⁻²	k_{2i} , м ⁻¹
1	$0 < h \leq 20\,000$	1,225	$-0,2639 \cdot 10^{-8}$	$0,7825 \cdot 10^{-4}$
2	$20\,000 < h \leq 60\,000$	$0,891 \cdot 10^{-2}$	$0,4407 \cdot 10^{-9}$	$0,16375 \cdot 10^{-3}$
3	$60\,000 < h \leq 100\,000$	$2,578 \cdot 10^{-4}$	$-0,2560 \cdot 10^{-8}$	$0,5905 \cdot 10^{-4}$
4	$100\,000 < h \leq 150\,000$	$4,061 \cdot 10^{-7}$	$0,1469 \cdot 10^{-8}$	$0,1787 \cdot 10^{-3}$
5	$150\,000 < h \leq 300\,000$	$2,130 \cdot 10^{-9}$	$0,8004 \cdot 10^{-10}$	$0,3734 \cdot 10^{-4}$
6	$300\,000 < h \leq 600\,000$	$4,764 \cdot 10^{-11}$	$0,7111 \cdot 10^{-11}$	$0,1547 \cdot 10^{-4}$
7	$600\,000 < h \leq 900\,000$	$8,726 \cdot 10^{-12}$	$0,1831 \cdot 10^{-11}$	$0,928 \cdot 10^{-5}$
8	$900\,000 < h$	$6,367 \cdot 10^{-13}$	0	$0,954 \cdot 10^{-5}$

На рис. 7.4 представлены графики, определяющие время существования $t_{сущ}$ ИСЗ, рассчитанные при значении баллистического коэффициента $S_0 = 0,0034$ м²/кг и наклонении орбиты $i = 63^\circ 26'$. Анализ этих графиков показывает, что в диапазоне высот до 300 км от поверхно-

Рис. 7.4.



сти Земли атмосфера существенно влияет на движение ИСЗ. В целом ряде случаев (особенно при изучении движения ИСЗ на сравнительно большом интервале времени) это воздействие обязательно должно приниматься во внимание. Однако при этом необходимо иметь в виду, что использование при расчетах движения ИСЗ стандартной модели атмосферы, учитывающей зависимость плотности воздуха ρ только от высоты над поверхностью Земли, может привести к существенным ошибкам в прогнозируемых значениях параметров движения спутника.

В результате проведенных в последние годы исследований околоземного пространства установлено, что плотность воздуха зависит не только от высоты, но и от географических координат ЛА, времени суток и года, положения Солнца и физических процессов, происходящих на Солнце. Причем для этой зависимости характерна периодичность изменения, связанная с суточным и годичным периодами обращения Земли, периодом вращения Солнца вокруг его оси (около 27 сут) и периодом изменения солнечной активности (около 11 лет). Для высот перигея орбит ИСЗ $h_{\text{п}} < 250\text{--}300$ км плотность воздуха мало зависит от расположения Солнца относительно перигея (участка орбиты, где сильнее всего проявляется действие атмосферы). Для высот перигея свыше 300 км плотность воздуха существенно меняется от того, на освещенной или неосвещенной стороне Земли находится перигей. На высотах 400, 500, 600 и 700 км плотность

воздуха в дневное время больше, чем в ночное в 1,6; 3; 5; 11 раз соответственно. На высотах свыше 500 км проявляется зависимость плотности воздуха от широты.

Колебания плотности воздуха с периодом 27 сут связаны с количеством и активностью солнечных пятен на видимой стороне Солнца. Амплитуда колебаний плотности с таким периодом на высоте 200 км может составлять 20%, а на высоте 600 км 70% от средней плотности. Самые большие вариации плотности воздуха связаны с 11-летним циклом солнечной деятельности. Плотность воздуха днем возрастала между 1958 г. (максимум активности) и 1964 г. (минимум активности) на высоте 300 км примерно в 3 раза, а на высоте 600 км в 20 раз. Кроме того, имеются еще иррегулярные изменения плотности воздуха, связанные в первую очередь также с активностью Солнца. Эти непредсказуемые изменения могут длиться от нескольких часов до нескольких суток и достигать достаточно большой величины. Таким образом, плотность воздуха имеет весьма сложную зависимость от времени.

Изучение закономерностей изменения параметров атмосферы, главным образом на основе данных о торможении спутников, позволило приступить к составлению экспериментально-статистических моделей атмосферы, учитывающих отмеченные выше вариации плотности воздуха. Так, в работе [121] приведены таблицы и формулы, позволяющие находить значения плотности воздуха в зависимости от высоты и широты точки, а также местного солнечного времени.

Сила светового давления. Световое поле Солнца оказывает силовое воздействие на космический ЛА [65, 57]. Возмущающее ускорение светового давления определяется выражением

$$\mathbf{f} = -v \frac{S_{\perp}}{m} k p_c \mathbf{r}_c^0, \quad (7.46)$$

где \mathbf{r}_c^0 — единичный вектор направления на Солнце; S_{\perp} — площадь поперечного сечения ЛА, перпендикулярного световому потоку; m — масса ЛА; k — коэффициент, зависящий от характера отражения света, а также от распределения теплового излучения по поверхности ЛА; p_c — световое давление в районе земной орбиты; v — коэффициент, равный единице, если ЛА освещен Солнцем, и равный нулю, если ЛА находится в земной тени.

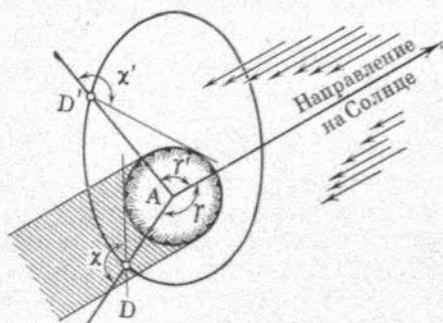


Рис. 7.5.

По данным [65] $\rho_0 = 4,5 \cdot 10^{-7}$ кг/м²; $1,00 \leq k \leq 1,44$.

В качестве величины S_{Π} в [57] рекомендуется брать некоторую характерную для данного ЛА площадь (например, для ЛА, сохраняющих постоянную ориентацию относительно направления на Солнце, — площадь поперечного сечения, нормального к световому потоку; для неориентированных выпуклых ЛА — площадь, равную 1/4 величины полной поверхности ЛА).

Для определения значения коэффициента ν принимают, что тень Земли представляет собой круговой цилиндр радиуса R (R — средний радиус Земли), ось которого совпадает с направлением Земля — Солнце. Задача сводится к определению моментов пересечения летательным аппаратом этого цилиндра.

Обозначив (рис. 7.5) γ — угол между направлениями центр Земли — ЛА и центр Земли — Солнце; χ — угол между направлениями центр Земли — ЛА и касательной к поверхности Земли, проведенной из ЛА, можем записать условие пересечения ЛА тени Земли

$$\gamma = \chi, \quad (7.47)$$

при этом, если $\gamma \geq \chi$, то ЛА находится в тени ($\nu=0$), если $\gamma < \chi$, то ЛА освещен Солнцем ($\nu=1$).

Равенство (7.47) можно записать в виде

$$\cos \gamma = \cos \chi$$

или [57]

$$\begin{aligned} \sin \delta \sin \delta_C + \cos \delta \cos \delta_C \cos (\alpha_C - \alpha) = \\ = -\sqrt{1 - R^2/r^2}, \end{aligned} \quad (7.48)$$

где δ , α — склонение и прямое восхождение ЛА; δ_c , α_c — склонение и прямое восхождение Солнца; r — расстояние ЛА до центра Земли.

Величины δ_c и α_c берутся по астрономическим данным, а значения δ и α определяются по формулам

$$\alpha = \Omega + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} u \cos i); \quad \delta = \operatorname{arcsin}(\sin u \sin i).$$

Возмущения движения ЛА под воздействием светового давления рассмотрены довольно подробно в [65, 57]. При этом путем сравнения влияния возмущений от действия атмосферы и светового давления установлено, что на высотах менее 700 км преобладает влияние атмосферы, а на больших высотах — влияние светового давления. Наиболее сильно световое давление воздействует на движение легких спутников с величиной $S_n/G_0 > 2,5 \text{ м}^2/\text{кг}$.

Давление солнечных лучей на ИСЗ, движущийся по круговой орбите, приводит к смещению геометрического центра орбиты [65]. В качестве примера укажем, что если бы Солнце находилось в плоскости орбиты американского спутника «Эхо-1» (начальные параметры орбиты: высота апогея $h_a = 1750 \text{ км}$; высота перигея $h_p = 1633 \text{ км}$; период обращения $T = 121^{\text{м}}, 6$; $S_n/G_0 = 12,5 \text{ м}^2/\text{кг}$), то геометрический центр орбиты смещался бы на 7 км в сутки. Фактически ($i = 47^\circ$) скорость смещения, по данным [114], составляла 2—3 км в сутки.

После того как рассмотрены необходимые зависимости для расчета сил, под действием которых совершается движение ЛА, имеется возможность записать в уравнении (7.33) развернутое выражение для результирующей силы \mathbf{F} и приступить к составлению уравнений движения ЛА.

7.3.2. Уравнения движения летательного аппарата

Примем, что выбрана система прямоугольных координат $AXYZ$ с началом в центре Земли A . Проектируя на оси этой системы основное уравнение динамики (7.33), получаем

$$m\dot{V}_x = F_x, \quad m\dot{V}_y = F_y, \quad m\dot{V}_z = F_z,$$

где F_x , F_y , F_z — проекции результирующей силы \mathbf{F} .

Конкретный выбор используемой системы координат и составляющих силы \mathbf{F} обуславливается типом орбиты и необходимой точностью определения движения ЛА. Так, например, для расчета неуправляемого движения головных частей баллистических ракет и искусственных

Составляющая ускорения силы тяжести \mathbf{g}' действует в направлении, противоположном направлению вектора \mathbf{g}_r . Их можно объединить в одном выражении

$$\mathbf{g}'_r = \mathbf{g}_r - \mathbf{g}'.$$

Таким образом, при составлении уравнений движения ЛА используют две составляющие ускорения силы тяжести: \mathbf{g}'_r и \mathbf{g}_z . При этом направление действия \mathbf{g}'_r к центру Земли, а \mathbf{g}_z — обратно направлению вектора угловой скорости вращения Земли.

Сила инерции Кориолиса определяется зависимостью

$$\mathbf{F}_K = -m\mathbf{a}_K, \quad (7.49)$$

где

$$\mathbf{a}_K = 2(\boldsymbol{\Omega}_z \times \mathbf{v}) \quad (7.50)$$

-- вектор ускорения силы инерции Кориолиса; \mathbf{v} -- вектор относительной скорости центра масс ЛА.

Векторное равенство (7.50) можно представить в виде

$$\mathbf{a}_K = 2 \begin{vmatrix} \mathbf{x}_r^0 & \mathbf{y}_r^0 & \mathbf{z}_r^0 \\ \Omega_{z;x,r} & \Omega_{z;y,r} & \Omega_{z;z,r} \\ v_{x,r} & v_{y,r} & v_{z,r} \end{vmatrix}, \quad (7.51)$$

где \mathbf{x}_r^0 , \mathbf{y}_r^0 , \mathbf{z}_r^0 -- единичные векторы осей гринвичской системы координат; $\Omega_{z;x,r}$, $\Omega_{z;y,r}$, $\Omega_{z;z,r}$ -- проекции вектора угловой скорости вращения Земли на оси гринвичской системы координат, причем $\Omega_{z;x,r} = \Omega_{z;y,r} = 0$, $\Omega_{z;z,r} = \Omega_z$.

Проектируя равенство (7.51) на оси Ax_r , Ay_r , Az_r , получаем

$$a_{K;x,r} = -2\Omega_z v_{y,r}; \quad a_{K;y,r} = 2\Omega_z v_{x,r}; \quad a_{K;z,r} = 0.$$

Составляющие ускорения силы аэродинамического сопротивления получаем, проектируя на оси гринвичской системы координат вектор \mathbf{b}_Q , определяемый выражением

ем (7.44). Система дифференциальных уравнений движения ЛА в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{v}_{x,r} &= g_r \frac{x_r}{r} - S_0 \rho v v_{x,r} + 2\Omega_3 v_{y,r}, \\ \dot{v}_{y,r} &= g_r \frac{y_r}{r} - S_0 \rho v v_{y,r} - 2\Omega_3 v_{x,r}, \\ \dot{v}_{z,r} &= g_r \frac{z_r}{r} - S_0 \rho v v_{z,r} + g_2, \\ \dot{x}_r &= v_{x,r}, \\ \dot{y}_r &= v_{y,r}, \\ \dot{z}_r &= v_{z,r},\end{aligned}\tag{7.52}$$

где $v = \sqrt{v_{x,r}^2 + v_{y,r}^2 + v_{z,r}^2}$; $r = \sqrt{x_r^2 + y_r^2 + z_r^2}$; ρ — плотность воздуха, определяемая по зависимости (7.45); h — превышение над поверхностью Земли, рассчитываемое по формуле

$$h = r - \bar{a}_3 \sqrt{1 - \bar{e}_3^2} / \sqrt{1 - \bar{e}_3^2 \cos^2 \psi};$$

\bar{a}_3 , \bar{e}_3 — большая полуось и первый эксцентриситет общего земного эллипсоида; $\cos \psi = r_1/r$; $r_1 = \sqrt{x_r^2 + y_r^2}$.

Начальными условиями для интегрирования системы (7.52) являются координаты x_{r0} , y_{r0} , z_{r0} и проекции вектора скорости ЛА $v_{x,r0}$, $v_{y,r0}$, $v_{z,r0}$, соответствующие некоторому заданному времени t_0 .

Знание полученных при решении этих уравнений параметров относительного движения ЛА позволяет по простым аналитическим зависимостям определить расчетные значения измеряемых траекторными средствами функций, установить зоны видимости ЛА измерительными средствами, рассчитать трассы ИСЗ, целеуказания измерительным средствам и решить ряд других практически важных задач. Поэтому уравнения движения (7.52) широко используются для определения параметров траектории неуправляемого движения ЛА на основе статистической обработки траекторных измерений и для прогнозирования движения ИСЗ на сравнительно небольшие интервалы времени. Использование уравнений типа (7.52) для определения движения ИСЗ на продол-

жительном интервале времени нецелесообразно из-за большого расхода машинного времени и значительного накопления ошибок при численном интегрировании этих уравнений.

Более удобными параметрами для описания долгосрочного движения ИСЗ являются цилиндрические координаты или оскулирующие элементы орбиты. Система дифференциальных уравнений движения ИСЗ в цилиндрической абсолютной системе координат имеет вид [66]

$$\begin{aligned} \dot{V}_r &= \frac{1}{r} V_u^2 - S_0 \rho v v_r - A r + D f_2 \zeta, \\ \dot{V}_u &= -\frac{1}{r} V_r V_u - S_0 \rho v v_u + D r_1 \sin i_0 \cos u, \\ \dot{V}_\zeta &= -S_0 \rho v v_\zeta - A \zeta - D f_2 r, \\ \dot{r} &= V_r, \quad \dot{u} = \frac{1}{r} V_u, \quad \dot{\zeta} = V_\zeta, \end{aligned} \quad (7.53)$$

где $A = B[1 + C(3f_1^2 - 1)]$,

$$B = \frac{\mu}{r_1^3}, \quad C = \frac{3}{2} C_{20} \left(\frac{a_2}{r_1} \right)^2,$$

$$f_1 = \frac{1}{r_1} (r \sin i_0 \sin u + \zeta \cos i_0), \quad D = 2BCf_1,$$

$$f_2 = \frac{1}{r_1} (\zeta \sin i_0 \sin u - r \cos i_0), \quad r_1 = \sqrt{r^2 + \zeta^2},$$

$$v_r = V_r - \Omega_3 \zeta \sin i_0 \cos u, \quad v_u = V_u + \Omega_3 r_1 f_2,$$

$$v_\zeta = V_\zeta + \Omega_3 r \sin i_0 \cos u, \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_u^2 + v_\zeta^2}.$$

При интегрировании системы уравнений (7.53) принимают следующие начальные условия: при $t=t_0$: $V_r = V_{r0}$, $V_u = V_{u0}$, $V_\zeta = 0$, $r = r_0$, $u = u_0$, $\zeta = 0$.

Для широкого класса орбит ИСЗ с малыми эксцентриситетами ($e \leq 0,1$) система уравнений (7.53) может решаться с большим шагом численного интегрирования, что существенно повышает быстродействие расчета движения спутника в сравнении с использованием системы уравнений (7.52).

При долгосрочном прогнозировании движения ИСЗ по орбитам с эксцентриситетом $e > 0,1$ наиболее часто используются системы дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах.

Поясним сущность понятия «оскулирующие элементы орбиты». Из-за действия возмущающих сил реальная

орбита отличается от кеплеровой. Однако каждой точке реальной орбиты можно поставить в соответствие кеплерову орбиту, по которой двигался бы ИСЗ, если бы начиная с данной точки движение стало невозмущенным, т. е. начиная с момента времени пребывания спутника в данной точке на него стала бы действовать только основная сила притяжения Земли, а все возмущающие силы прекратили воздействие. В рассматриваемой точке реальная и кеплерова орбиты имеют общий радиус-вектор r , проведенный из центра притяжения, и одинаковый вектор скорости V . Иными словами, если эту точку считать за начальную, то начальные условия движения (а следовательно, и параметры орбиты $\Omega, i, \omega, a, e, \tau$) по возмущенной и невозмущенной орбитам должны быть одинаковыми. Но для невозмущенной кеплеровой орбиты параметры орбиты остаются постоянными во все время движения, а для возмущенной орбиты параметры $\Omega, i, \omega, a, e, \tau$ представляют собой функции времени.

Кеплерова орбита, соответствующая в данной точке в указанном выше смысле реальной орбите, называется оскулирующей орбитой, а ее элементы $\Omega, i, \omega, a, e, \tau$ — оскулирующими элементами орбиты.

В рассматриваемом случае задача определения движения ИСЗ сводится к отысканию значений элементов орбиты для заданных моментов времени или другого аргумента. При известных значениях оскулирующих элементов орбиты по формулам (7.24) — (7.27) могут быть рассчитаны координаты и проекции вектора скорости ИСЗ.

Уравнения движения в оскулирующих элементах обычно записываются в виде [56, 57, 71]

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 2\tilde{T}r, & \frac{de}{dt} &= \tilde{S} \sin \vartheta + \tilde{T} \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right) \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right], \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\tilde{S} \frac{\cos \vartheta}{e} + \tilde{T} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin \vartheta - \tilde{W} \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \tilde{W} \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i}, \\ \frac{di}{dt} &= \tilde{W} \frac{r}{p} \cos u, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{V \sqrt{\mu}}{r^2} + \tilde{S} \frac{\cos \vartheta}{e} - \tilde{T} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (7.54)$$

$$\text{где } \tilde{S} = \sqrt{p/\mu} S, \quad \tilde{T} = \sqrt{p/\mu} T, \quad \tilde{W} = \sqrt{p/\mu} W,$$

S, T, W — проекции возмущающего ускорения на радиус-вектор, перпендикуляр к нему в плоскости орбиты и на нормаль к плоскости орбиты соответственно.

Иногда при определении возмущенного движения ИСЗ оказывается более удобным использовать дифференциальные уравнение в оскулирующих элементах, записанные по аргументу широты u . Переход к аргументу u осуществляется путем умножения правой и левой частей первых пяти уравнений (7.54) на функцию

$$F = \frac{dt}{du} = \left(\frac{V_{p_{14}}}{r^2} - \frac{r}{p} \tilde{W} \operatorname{ctg} i \sin u \right)^{-1}$$

и заменой последним выражением шестого уравнения системы (7.54).

При этом будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dp}{du} &= 2F\tilde{T}r, \\ \frac{de}{du} &= F \left\{ \tilde{S} \sin \vartheta + \tilde{T} \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \right] \right\}, \\ \frac{d\omega}{du} &= F \left\{ -\tilde{S} \frac{\cos \vartheta}{e} + \tilde{T} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{W} \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right\}, \quad \frac{d\Omega}{du} = F\tilde{W} \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i}, \\ \frac{di}{du} &= F\tilde{W} \frac{r}{p} \cos u, \quad \frac{dt}{du} = F. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Используемые в уравнениях (7.54) и (7.55) проекции возмущающего ускорения S, T, W представим в виде

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \\ T &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \\ W &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4, \end{aligned}$$

где S_1, T_1, W_1 — проекции возмущающего ускорения из-за нецентральной и аномалий силы притяжения Земли; S_2, T_2, W_2 — проекции возмущающего ускорения, создаваемого аэродинамической силой лобового сопротивления; S_3, T_3, W_3 — проекции возмущающего ускорения, создаваемого притяжением летательного аппарата Солнцем и Луной; S_4, T_4, W_4 — проекции возмущающего ускорения, создаваемого световым давлением.

Дифференцируя выражение (7.34) для потенциала силы земного притяжения по r, ψ, L и проектируя составляющие ускорения на оси орбитальной системы ко-

ординат S , T и W , получаем формулы для определения проекций возмущающего ускорения S_1 , T_1 , W_1 :

$$S_1 = \frac{\partial U_{\Pi}}{\partial r},$$

$$T_1 = \frac{\partial U_{\Pi}}{\partial \psi} \frac{1}{r} \frac{\cos u}{\cos \psi} \sin i + \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial U_{\Pi}}{\partial L} \frac{\cos i}{\cos \psi},$$

$$W_1 = \frac{\partial U_{\Pi}}{\partial \psi} \frac{1}{r} \frac{\cos i}{\cos \psi} - \frac{1}{r \cos \psi} \frac{\partial U_{\Pi}}{\partial L} \frac{\cos u}{\cos \psi} \sin i,$$

где ψ , L — геоцентрическая широта и долгота подспутниковой точки.

Для определения проекций возмущающего ускорения силы сопротивления воздуха необходимо знать проекции вектора относительной скорости летательного аппарата \mathbf{v} на оси орбитальной системы координат. Вектор относительной скорости ЛА определяется выражением $\mathbf{v} = \mathbf{V} - \mathbf{v}_{\text{пер}}$, где \mathbf{V} — вектор абсолютной скорости ЛА; $\mathbf{v}_{\text{пер}}$ — вектор переносной скорости ЛА, обусловленной вращением Земли, равный

$$\mathbf{v}_{\text{пер}} = \Omega_3 \times \mathbf{r} = \Omega_3 \begin{vmatrix} x^0_r & y^0_r & z^0_r \\ \sin u \sin i & \cos u \sin i & \cos i \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где x^0_r , y^0_r , z^0_r — единичные векторы соответствующих осей орбитальной системы координат.

Следовательно, проекции вектора относительной скорости \mathbf{v} на оси орбитальной системы координат имеют вид

$$v_{x,r} = V_r,$$

$$v_{y,r} = V_n - \Omega_3 r \cos i,$$

$$v_{z,r} = \Omega_3 r \cos u \sin i,$$

откуда на основе (7.44) может записать

$$S_2 = -S_0 \rho v V_r,$$

$$T_2 = -S_0 \rho v (V_n - \Omega_3 r \cos i),$$

$$W_2 = -S_0 \rho v \Omega_3 r \cos u \sin i,$$

где

$$v = \sqrt{v_{x,r}^2 + v_{y,r}^2 + v_{z,r}^2}.$$

Проекции ускорения силы притяжения Луны и Солнца на оси орбитальной системы координат S_3 , T_3 , W_3

определяются зависимостями (7.43), где положение центров масс ИСЗ, Луны и Солнца должно быть задано в орбитальной системе координат [53].

Проекции возмущающего ускорения светового давления S_4 , T_4 , W_4 на оси орбитальной системы координат получим, спроектировав выражение (7.46) на оси Ax_r , Ay_r , Az_r :

$$S_4 = -q_{сд} \frac{x_{Cr} - x_r}{r_{DC}}, \quad T_4 = -q_{сд} \frac{y_{Cr} - y_r}{r_{DC}},$$

$$W_4 = -q_{сд} \frac{z_{Cr} - z_r}{r_{DC}},$$

где $q_{сд} = v(S_{п}/m)kp_c$; r_{DC} — расстояние между ИСЗ и центром масс Солнца; x_{Cr} , y_{Cr} , z_{Cr} — координаты центра масс Солнца в орбитальной системе координат.

Для определения положения спутника относительно тени Земли проверяется условие (7.47). Углы γ и χ в рассматриваемом случае могут быть вычислены по формулам

$$\gamma = \arccos \frac{x_{Cr}x_r + y_{Cr}y_r + z_{Cr}z_r}{r r_{AC}};$$

$$\chi = \arccos \left(-\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}} \right).$$

Таким образом, получены все необходимые зависимости для расчета проекций возмущающих ускорений из-за нецентральности и аномалий силы притяжения Земли и ускорений, создаваемых аэродинамической силой лобового сопротивления, притяжением спутника Луной и Солнцем, а также ускорением, создаваемым световым давлением. При необходимости аналогичным же образом могут быть записаны выражения для учета воздействия других возмущающих сил.

7.4. Методы решения уравнений движения

Для определения движения ЛА необходимо решить записанную в предыдущем параграфе систему дифференциальных уравнений (7.52), (7.53) или (7.54) с заданными начальными условиями, т. е. решить задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом наиболее целесообразно было бы

иметь такие методы решения дифференциальных уравнений, которые позволяли бы получать общие решения интересующих нас уравнений в аналитическом виде. Основное достоинство этих методов заключается в том, что возможность интегрирования уравнений в аналитическом виде позволяет с помощью общего решения анализировать интересующие нас свойства решения и непосредственно выяснять зависимость результатов интегрирования от параметров, характеризующих условия задачи.

Однако область применения аналитических методов ограничена. К настоящему времени они разработаны только для некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений, самым широким из которых является класс линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Общее решение в аналитическом виде удается записывать только в результате тех или иных допущений, упрощающих уравнения. Так, например, для получения аналитических формул теории кеплерова движения были сделаны допущения о том, что Земля — тело сферической структуры, поле силы притяжения — центральное, атмосфера отсутствует, а ЛА представляет собой материальную точку.

Для более сложных моделей движения ЛА приближенное решение в аналитическом виде удалось получить лишь в результате использования такого вида функции, аппроксимирующей гравитационное поле Земли, которая допускает решение дифференциальных уравнений движения ЛА в квадратурах [67]. Существующие приближенные аналитические методы решения уравнений движения ЛА не могут рассматриваться как универсальные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений, описывающих движение летательных аппаратов.

Поэтому для расчета движения ЛА широко используются численные методы, которые в большинстве случаев оказываются вообще единственными методами, с помощью которых могут быть получены решения задач баллистического обеспечения запусков и функционирования ЛА. В настоящее время численные методы решения являются, по существу, основными при расчете движения ЛА и вопросам их развития и эффективного использования придается большое значение.

Рассмотрим основные из применяемых на практике численных методов интегрирования уравнений движения

ЛА с точки зрения выбора наиболее удобных из них при использовании цифровых вычислительных машин и обеспечивающих требуемую точность и оперативность расчета движения ЛА.

Метод Адамса. Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$dy/dx = y' = f(x, y), \quad (7.56)$$

удовлетворяющее начальным условиям $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$.

Численное решение задачи Коши для этого уравнения состоит в определении значений функции $y(x)$, удовлетворяющей уравнению (7.56) и заданным начальным условиям, для некоторых фиксированных значений аргумента x_1, x_2, \dots, x_s , которые принято называть узлами.

Расчет значения искомой функции y в узловой точке x_{i+1} по известному ее значению в предыдущей точке x_i и известных значениях производной (7.56) в точках $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-m}$ можно выполнить по формуле

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{k=0}^m \alpha_k y'_{i-k}, \quad (7.57)$$

называемой экстраполяционной формулой Адамса.

Для повышения точности интегрирования дифференциального уравнения вычисляют первое приближение для y_{i+1} по экстраполяционной формуле (7.57), подсчитывают по зависимости (7.56) значение производной y'_{i+1} , а затем находят второе приближение для y_{i+1} по более точной интерполяционной формуле Адамса

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{k=0}^m \beta_k y'_{i+1-k}. \quad (7.58)$$

При $m=7$ коэффициенты α_k и β_k имеют следующие значения:

$\alpha_0 = 0,358995535 \cdot 10$	$\beta_0 = 0,304224537$
$\alpha_1 = -0,952520668 \cdot 10$	$\beta_1 = 0,115615906 \cdot 10$
$\alpha_2 = 0,180545387 \cdot 10^2$	$\beta_2 = -0,100691964 \cdot 10$
$\alpha_3 = -0,220277530 \cdot 10^2$	$\beta_3 = 0,101796461 \cdot 10$
$\alpha_4 = 0,173796544 \cdot 10$	$\beta_4 = -0,732035384$
$\alpha_5 = -0,861212797 \cdot 10$	$\beta_5 = 0,343080357$
$\alpha_6 = 0,244516369 \cdot 10$	$\beta_6 = -0,938409392 \cdot 10^{-1}$
$\alpha_7 = 0,304224537$	$\beta_7 = 0,113673942 \cdot 10^{-1}$

Метод Рунге — Кутта. Примем, что в рассматриваемой области изменения аргументов функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до некоторого порядка m .

Выбрав фиксированное приращение — шаг интегрирования $\Delta x = h$ независимого переменного x — и последовательно дифференцируя уравнение (7.56), можем найти

$$y'' = d^2 y / dx^2, \quad y''' = d^3 y / dx^3, \dots$$

и записать разложение функции y в ряд Тейлора в окрестности точки (x_i, y_i) :

$$\Delta y_i = y(x_i + h) - y(x_i) = hy'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i + \frac{h^3}{3!} y'''_i + \dots \quad (7.59)$$

В зависимости от того, сколькими членами разложения мы ограничимся в формуле (7.59), получим ту или иную точность приближенного искомого решения. Если принять, что в разложении (7.59) удерживается m членов, то для определения искомого приращения Δy_i необходимо вычисление производных до порядка m , что для $m > 2$ при интегрировании уравнений движения ЛА чрезвычайно затруднительно. Поэтому на практике используется предложенная Рунге вычислительная схема, в которой приращение Δy_i представляется в виде линейной комбинации

$$\Delta y_i \approx c_1 k_1 + c_2 k_2 + \dots + c_j k_j + \dots + c_m k_m, \quad (7.60)$$

где

$$k_1 = hf(x_i; y_i),$$

$$k_2 = hf(x_i + a_2 h; y_i + b_{21} k_1),$$

.....

$$k_j = hf(x_i + a_j h; y_i + b_{j1} k_1 + \dots + b_{jp} k_p + \dots + b_{j, j-1} k_{j-1}),$$

.....

$$k_m = hf(x_i + a_m h; \tilde{y}_i + b_{m1} k_1 + \dots + b_{mp} k_p + \dots + b_{m, m-1} k_{m-1}),$$

$$c_j, a_j, b_{jp} (j = 1, 2, \dots, m; p = 1, 2, \dots, m-1)$$

— постоянные коэффициенты; m — число обращений к вычислению правой части уравнения (7.56), необходимых для расчета Δy_i .

Выбор постоянных коэффициентов c_j, a_j, b_{jp} производится так, чтобы разложения (7.59) и (7.60) по степеням h совпадали до возможно более высоких степеней h при произвольной функции $f(x, y)$ и произвольном

шаге интегрирования h . Для определения коэффициентов составляются соответствующие уравнения, из решения которых и находятся значения c_j, a_j, b_{jp} . В случае, когда число неизвестных (искомых коэффициентов) в системе уравнений больше числа уравнений системы, допускается некоторый произвол в выборе значений одного или нескольких коэффициентов. В результате для формулы одного и того же порядка m получаются различные значения коэффициентов [68]. Так, например, четырехчленные формулы метода Рунге — Кутта наиболее часто записывают в виде.

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (7.61)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3). \end{aligned} \quad (7.62)$$

В последние годы опубликованы работы, где на основе метода Рунге — Кутта проведен вывод оптимальных в некотором смысле значений коэффициентов формулы (7.60) численного интегрирования дифференциальных уравнений [111—113].

Так, в работе Шенкса [112] рекомендуется использовать следующие значения коэффициентов a_j, c_j, b_{jp} для формулы (7.60) седьмого порядка:

$$\begin{aligned} a_2 &= 1/192; a_3 = 1/6; a_4 = 1/2; a_5 = 1; a_6 = 5/6; a_7 = 1; \\ c_1 &= 14/300; c_2 = 0; c_3 = 81/300; c_4 = 110/300; c_5 = 0; \\ c_6 &= 81/300; c_7 = 14/300; b_{21} = 1/192; b_{31} = -15/6; \\ b_{22} &= 16/6; b_{41} = 4867/186; b_{42} = -5072/186; \\ b_{43} &= 298/186; b_{51} = -19995/31; b_{52} = 20896/31; \\ b_{53} &= -1025/31; b_{54} = 155/31; b_{61} = -469/5022; \\ b_{62} &= 490960/5022; b_{63} = -22736/5022; b_{64} = 5580/5022; \\ b_{65} &= 186/5022; b_{71} = 914314/2604; b_{72} = \\ &= -955136/2604; b_{73} = 47983/2604; b_{74} = \\ &= -6510/2604; b_{75} = -558/2604; b_{76} = 2511/2604. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Приведем некоторые рекомендации по применению рассмотренных численных методов интегрирования дифференциальных уравнений при расчете движения ЛА.

Быстродействие и точность расчетных методов определения движения ЛА определяются главным образом полнотой учета всех известных факторов, определяющих движение ЛА, выбранной формой записи уравнений движения, используемым методом и величиной шага численного интегрирования. Все эти факторы между собой тесно связаны.

Необходимость учета того или иного фактора, от которого зависит движение ЛА, выбор системы координат для записи уравнений движения и метода их решения определяются в каждом конкретном случае характером решаемой задачи. Так, если ведется статистическая обработка траекторных измерений, полученных на сравнительно коротком временном интервале, то для определения расчетных значений измеряемых параметров целесообразно использовать уравнения движения ЛА в гринвичской системе координат (7.52). При этом, если рассчитываются значения параметров движения для высот свыше 100 км над поверхностью Земли, где влияние атмосферы на полет ЛА в течение короткого времени практически не сказывается, система уравнений (7.52) может быть упрощена за счет исключений ускорений, создаваемых аэродинамической силой лобового сопротивления. Если же обрабатываются измерения, полученные на больших интервалах времени наблюдения, то для определения расчетных значений измеряемых параметров лучше использовать сочетание системы дифференциальных уравнений в цилиндрической системе координат (7.53) или системы уравнений в оскулирующих элементах (7.54) и системы уравнений в гринвичской системе координат (7.52). При этом уравнения (7.52) интегрируются на интервале выполнения измерений, а уравнения (7.53) или (7.54) — на остальных участках орбиты.

Еще большее значение имеет выбор целесообразной формы записи уравнений движения при прогнозировании движения ЛА. Так, при обработке измерений и прогнозировании неуправляемого движения головной части баллистической ракеты целесообразно получать начальные условия и вести расчет движения и координат точки падения в гринвичской системе координат. Форма записи уравнений движения (7.52) наиболее проста и ком-

пактна. Расчет движения ведется на небольшие интервалы времени полета.

При выборе метода численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения ЛА необходимо исходить из условий наименьшей затраты машинного времени при удовлетворении заданной точности вычислений.

Алгоритмы вычислений методом Рунге — Кутта относительно просты для программирования, остаются неизменными от начала и до конца расчетов и позволяют организовать цикличность расчетов. Кроме того, правые части формул Рунге — Кутта содержат только значения аргумента и искомой функции в предыдущей точке. Это очень удобно при реализации метода на ЭВМ, так как позволяет в нужный момент легко изменить шаг интегрирования в зависимости от вида интегральной кривой. Однако при интегрировании дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутта m -го порядка точности приходится для определения очередного $(i+1)$ -го значения искомой функции вычислять m раз значения правых частей дифференциальных уравнений, что приводит к значительным затратам машинного времени.

Метод Адамса имеет то преимущество перед методом Рунге — Кутта, что он требует меньшего количества вычислений при определении приращения искомой функции на каждом шаге, так как правые части дифференциальных уравнений необходимо при этом вычислять лишь один раз. Недостаток метода Адамса состоит в том, что для начала вычислений с использованием формул Адамса m -го порядка точности необходимо иметь значения искомой функции в $m+1$ точках. Эти значения определяют, интегрируя исходное дифференциальное уравнение другим численным методом, чаще всего методом Рунге — Кутта. При этом необходимо иметь в виду, что «начало решения» должно быть вычислено с большей точностью, чем требуется для всего решения, по крайней мере в 10 раз. Если для начала решения применяется метод Рунге — Кутта, то величину шага $\Delta x = h$ для него надо брать меньшую, чем для метода Адамса.

Второй недостаток метода Адамса заключается в том, что при его использовании изменение шага интегрирования h не может быть осуществлено так легко, как при методе Рунге — Кутта. Действительно, формулы (7.57), (7.58) содержат значения правых частей уравнений в m

предшествующих равноотстоящих точках. Следовательно, изменение шага интегрирования на некотором этапе вычислений потребует дополнительного определения значений функций в промежуточных точках, что может быть выполнено наиболее просто с использованием формул метода Рунге — Кутты.

Указанные недостатки метода Адамса приводят к тому, что программа решения задачи по методу Адамса должна быть дополнена программой определения начальных решений и программой интерполяции функций для промежуточных точек, что приводит к увеличению загрузки запоминающего устройства ЭВМ. Несмотря на это метод Адамса находит широкое применение при решении уравнений движения ЛА, так как обеспечивает значительную в сравнении с методом Рунге — Кутта экономию машинного времени при довольно высокой точности. Объясняется это тем, что при расчете движения ЛА приходится сравнительно редко менять шаг интегрирования, особенно когда производятся массовые расчеты, для которых известна оценка шага.

Методические ошибки численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения ЛА зависят от принятого метода интегрирования, количества членов, учитываемых в формулах для расчета приращений m , шага численного интегрирования h , а также от вида траектории.

Так, при расчете движения ИСЗ по орбите, характеризуемой в начальный момент времени величинами: период обращения спутника $T=90,2$ с, высота перигея $h_n=210$ км, высота апогея $h_a=375$ км, эксцентриситет $e=0,01$, на основе интегрирования уравнений (7.52) методом Адамса при $m=4$, $h=30$ с ошибки Δl в определении положения ИСЗ вдоль орбиты составляют около 10 и 300 км при прогнозировании соответственно на 3 и 15 сут. Применение формул более высокого порядка позволяет повысить точность численного интегрирования и сократить расход машинного времени на решение задачи. При $m=8$ и $h=60$ с ошибка $\Delta l \approx 0,7$ км при длительности прогнозирования 15 сут, а время, затраченное на расчет движения, уменьшилось примерно в 1,5 раза в сравнении с соответствующими расчетами при $m=4$ и $h=30$ с.

В работе [63] рекомендуется при расчете движения ИСЗ по орбите с эксцентриситетом $e \leq 0,2$ применять метод Адамса при $m=7-9$ и $h=90-120$ с, а при $e > 0,2$

применять метод Адамса с автоматическим выбором шага численного интегрирования h .

В заключение рассмотрения методов решения уравнений движения ЛА отметим, что практика использования ЭВМ показывает, что все расчеты должны обязательно вестись с контролем. Вследствие этого по ходу вычислений должны быть предусмотрены специальные способы контроля правильности счета. Наиболее эффективно при этом использовать контрольные соотношения. Идея этого способа состоит в следующем. Если получаемые в процессе решения задачи результаты должны удовлетворять какому-нибудь соотношению, известному заранее и неиспользуемому для получения этих результатов, то через определенные промежутки вычислительного процесса должна производиться проверка, удовлетворяют ли получаемые результаты с заданной точностью этому контрольному соотношению.

Для контроля правильности вычислений при численном интегрировании дифференциальных уравнений неуправляемого движения ЛА широко используется в качестве контрольного соотношения выражение, которое получается из условия постоянства интеграла энергии ЛА на траектории:

$$U - \int_{t_0}^t \frac{Q}{m} v dt - \frac{v^2}{2} = h_0 = \text{const}, \quad (7.64)$$

где U — значение потенциала силы притяжения в рассматриваемой точке траектории; v — скорость ЛА в рассматриваемой точке траектории. Под знаком интеграла стоит выражение для элементарной работы, совершенной силой лобового сопротивления Q .

При использовании контрольных соотношений для проверки точности получаемых результатов нужно иметь в виду, что вычисления на ЭВМ ведутся с ограниченным количеством разрядов. Поэтому даже при правильных результатах контрольное равенство абсолютно точно никогда не будет выполняться. Контрольным соотношениям нужно придавать вид неравенств. Например, выражение (7.64) записывается в виде

$$\left| U - \int_{t_0}^t \frac{Q}{m} v dt - \frac{v^2}{2} - h_0 \right| < \varepsilon, \quad (7.65)$$

где ε — допустимое отклонение величины h_0 от ее начального значения h_{00} .

Достоинством рассматриваемого способа контроля является возможность выявления как случайных, так и систематических ошибок ценой незначительного увеличения расхода машинного времени. Метод контрольных соотношений может быть с успехом применен не только для проверки правильности работы ЭВМ, но и для отладки программ решения задач, а в некоторых случаях и для оценки точности получаемых результатов. Данный метод контроля является наиболее рациональным и его нужно применять при решениях всех задач, допускающих такую проверку.

7.5. Особенности расчета движения ИСЗ на большие интервалы времени

При решении ряда практических задач, таких, как определение времени существования искусственного спутника Земли, определение эволюции орбиты ИСЗ за время его существования, долгосрочное прогнозирование движения спутника и других, требуется находить решение системы дифференциальных уравнений, описывающих движение ИСЗ, для больших интервалов времени. В этих случаях наиболее широко используются уравнения в оскулирующих элементах орбиты (7.55). Для интегрирования этих уравнений численными методами требуется весьма большое время работы ЭВМ. Объясняется это тем, что изменения оскулирующих элементов на протяжении одного оборота имеют колебательный характер и шаг интегрирования не может быть большим. В связи с этим в работах [69, 70] было предложено перейти от обычно используемой системы уравнений в оскулирующих элементах по аргументу широты u к системе уравнений, получающейся в результате интегрирования первой системы за период, равный 2π .

Левые части получаемых при этом уравнений представляют собой значения отклонений оскулирующих элементов орбиты за один оборот. В силу малости этих отклонений в указанных работах они были приближенно приняты равными производным от оскулирующих элементов по числу оборотов N . Вместо исходной системы уравнений (7.55) по аргументу широты u интегрирова-

лась система дифференциальных уравнений по N . Правые части таких уравнений представляют собой некоторую совокупную систему интегралов. Эта система интегралов может быть заменена соответствующей системой дифференциальных уравнений. В таком случае решение преобразованной системы уравнений сводится к двухцикловому алгоритму: внешнему интегрированию по аргументу N и внутреннему интегрированию по аргументу широты u за период 2π , т. е. за один виток, причем последнее необходимо производить каждый раз при вычислении правых частей внешней системы уравнений.

Однако рассмотренный метод двухциклового интегрирования не является вполне корректным, таким, например, как изложенные выше методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, заменой приращений оскулирующих элементов за один оборот производными от этих элементов по числу витков вносится ошибка методического характера. Очевидно, что такая методическая ошибка тем больше, чем меньше шаг интегрирования внешней системы уравнений. По этой причине вместо указанной внешней системы дифференциальных уравнений следует использовать решение системы в конечных разностях относительно оскулирующих элементов орбиты, правые части которых представляют собой некоторую совокупную систему интегралов. Применением методов численного решения непосредственно уравнений в конечных разностях указанная выше методическая ошибка полностью устраняется.

По аналогии с методами численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в [71] разработаны два типа методов численного решения уравнений в конечных разностях: методы типа Адамса и методы типа Рунге — Кутта.

Приведем формульные зависимости для численного решения уравнений в конечных разностях обобщенным методом типа Рунге — Кутта.

Пусть имеем уравнение в конечных разностях первого порядка

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (7.66)$$

где $x_{i+1} = x_i + h$; $f(x, y)$ — дифференцируемая функция.

Примем, что уравнение (7.66) удовлетворяет начальному условию: при $x = x_0, y = y_0$.

Задачу численного решения уравнения (7.66) сформулируем следующим образом: найти значение искомой функции y , удовлетворяющей уравнению (7.66) при $x = x_i + H$ ($H = Nh$, N — положительное целое число), если значение искомой функции y при $x = x_i$ известно.

Искомую функцию y представим в виде разложения с помощью интерполяционного полинома Ньютона

$$y(x_i + H) = y_i + Nf_i + \frac{N(N-1)}{2!} \delta f_i + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} \delta^2 f_i + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!} \delta^3 f_i + \dots, \quad (7.67)$$

где

$$\begin{aligned} f_i &= f(x_i, y_i), \\ \delta f_i &= f(x_i + h, y_{i+1}) - f(x_i, y_i), \\ \delta^2 f_i &= f(x_i + 2h, y_{i+2}) - 2f(x_i + h, y_{i+1}) + f(x_i, y_i), \\ &\dots \end{aligned} \quad (7.68)$$

По аналогии с методами Рунге — Кутты четвертого порядка численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений приращение искомой функции y представим в виде комбинации четырех выражений

$$\begin{aligned} k_1 &= Nf(x_i, y_i), \\ k_2 &= Nf(x_i + \alpha_1 H, y_i + \beta_1 k_1), \\ k_3 &= Nf(x_i + \alpha_2 H, y_i + \beta_2 k_1 + \beta_3 k_2), \\ k_4 &= Nf(x_i + \alpha_3 H, y_i + \beta_4 k_1 + \beta_5 k_2 + \beta_6 k_3). \end{aligned} \quad (7.69)$$

Параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ и весовые функции R_1, R_2, R_3, R_4 , зависящие от N , подбираются таким образом, чтобы с точностью до членов четвертого порядка (к которым относятся слагаемые, содержащие выражения типа $f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}, \dots$) выполнялось равенство

$$\Delta y_i = y(x_i + H) - y(x_i) = R_1 k_1 + R_2 k_2 + R_3 k_3 + R_4 k_4. \quad (7.70)$$

Конечные разности $\delta f_i, \delta^2 f_i, \dots$ могут быть выражены формулами (7.68) через функции $f(x_i, y_i), f(x_i+H, y_i+H), \dots$. Разлагая последние, а также функции k_j ($j=1, 2, 3, 4$) в ряды Тейлора по двум переменным в точке (x_i, y_i) , ограничиваясь членами четвертого порядка и сравнивая коэффициенты при одинаковых производных в равенствах (7.70) и (7.67), получаем алгебраическую систему уравнений четвертого порядка для определения параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_6$ и весовых функций R_j ($j=1, 2, 3, 4$).

При исследовании полученной системы уравнений установлено, что параметры α_k и β_v должны быть связаны соотношениями $\alpha_1=\beta_1; \alpha_2=\beta_2+\beta_3; \alpha_3=\beta_4+\beta_5+\beta_6$, а два из искомых параметров могут быть заданы произвольным образом.

Если принять $\alpha_1=\alpha_2$ и $\beta_3=(N-3)/2N$, то формулы (7.70) и (7.69) примут вид зависимостей (7.61) и (7.62) метода Рунге—Кутты интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\Delta y_i = \frac{1}{6(N-1)} [(N+1)k_1 + 2(N-2)k_2 + 2(N-2)k_3 + (N+1)k_4], \quad (7.71)$$

где

$$k_1 = Nf(x_i, y_i),$$

$$k_2 = Nf\left(x_i + \frac{N-1}{2N}H; y_i + \frac{N-1}{2N}k_1\right),$$

$$k_3 = Nf\left(x_i + \frac{N-1}{2N}H; y_i + \frac{1}{N}k_1 + \frac{N-3}{2N}k_2\right),$$

$$k_4 = Nf\left[x_i + \frac{N-1}{N}H, y_i + \frac{1}{N}k_1 + \frac{2(N-2)}{N(N+1)}k_2 + \frac{(N-1)(N-2)}{N(N+1)}k_3\right].$$

При применении данного метода для численного решения уравнений в конечных разностях очень важно правильно выбрать шаг $H=Nh$, а для этого необходимо иметь возможность оценивать величину погрешности искомой функции.

Если в выражение (7.70) вместо R_1, R_2, R_3, R_4 подставить значения весовых функций $R^*_1, R^*_2, R^*_3, R^*_4$, определяемых зависимостями

$R^*_1 = D_1/D, R^*_2 = D_2/D, R^*_3 = D_3/D, R^*_4 = D_4/D$,
где

$$D_1 = \frac{N-1}{6N^2} [(2N-1)(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1\beta_5 - \alpha_2\beta_6) -$$

$$- \alpha_1\beta_3(2N-1)(\alpha_2 - \alpha_1) - (N-2)(\alpha_2 - \alpha_1) \times \\ \times (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)],$$

$$D_2 = \frac{N-1}{6N^2} [\alpha_2\alpha_3(N-2)(\alpha_3 - \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2\beta_3(2N-1) - \\ - \alpha_2(2N-1)(\alpha_1\beta_5 + \alpha_2\beta_6)],$$

$$D_3 = \frac{\alpha_1(N-1)}{6N^2} [(\alpha_1\beta_5 + \alpha_2\beta_6)(2N-1) + \alpha_3(N-2)(\alpha_1 - \alpha_3)],$$

$$D_4 = \frac{\alpha_1(N-1)}{6N^2} [\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)(N-2) - \alpha_1\beta_3(2N-1)],$$

$$D = \alpha_1\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_1\beta_5 + \alpha_2\beta_6) + \alpha_1^2\alpha_3\beta_3(\alpha_1 - \alpha_3),$$

то зависимость

$$\Delta y_i = R^*_1 k_1 + R^*_2 k_2 + R^*_3 k_3 + R^*_4 k_4 \quad (7.72)$$

будет содержать лишь члены третьего порядка малости и еще некоторые члены более высокого порядка. Таким образом, можно считать, что выражение (7.72) позволяет определить величину члена разложения (7.67) третьего порядка малости, которая характеризует погрешность решения.

Рассмотрим, как приведенные зависимости могут быть использованы для расчета орбит искусственных спутников Земли.

Для этого перейдем от исходной системы уравнений (7.55) к системе уравнений, которая получается в результате интегрирования по u за один оборот (т. е. за период 2π) системы (7.55). В результате получим систему уравнений в конечных разностях относительно оскулирующих элементов орбиты и времени t вида

$$\begin{aligned} \delta p &= \varphi_1(u, p, e, \omega, \Omega, i; t), \\ \delta e &= \varphi_2(u, p, e, \omega, \Omega, i; t), \\ \delta \omega &= \varphi_3(u, p, e, \omega, \Omega, i; t), \\ \delta \Omega &= \varphi_4(u, p, e, \omega, \Omega, i; t), \\ \delta i &= \varphi_5(u, p, e, \omega, \Omega, i; t), \\ \delta t &= \varphi_6(u, p, e, \omega, \Omega, i; t), \end{aligned} \quad (7.73)$$

где δp , δe , $\delta \omega$, $\delta \Omega$, δi , δt — изменения оскулирующих элементов орбиты p , e , ω , Ω , i и времени t за один оборот, т. е. при изменении u на 2π :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_{u_0}^{u_0+2\pi} \frac{dp}{du} du; & \varphi_2 &= \int_{u_0}^{u_0+2\pi} \frac{de}{du} du; \\ \varphi_3 &= \int_{u_0}^{u_0+2\pi} \frac{d\omega}{du} du; & \varphi_4 &= \int_{u_0}^{u_0+2\pi} \frac{d\Omega}{du} du; \\ \varphi_5 &= \int_{u_0}^{u_0+2\pi} \frac{di}{du} du; & \varphi_6 &= \int_{u_0}^{u_0+2\pi} \frac{dt}{du} du. \end{aligned}$$

Производные под знаками интегралов определяются уравнениями (7.55).

Примем, что система уравнений (7.73) является решением системы (7.55) для начальных условий $u=u_0$:

$$p=p_0, e=e_0, \omega=\omega_0,$$

$$\Omega=\Omega_0, i=i_0, t=t_0.$$

Система уравнений в конечных разностях (7.73), правые части которой выражены через значения совокупной системы интегралов, описывает изменение элементов орбиты спутника с течением времени. Решение этой системы представляет собой дискретную последовательность оскулирующих элементов орбиты для целых значений N или для значений аргумента широты $u=u_0+2\pi k$, $k=1, 2, \dots$

Переход от решения системы дифференциальных уравнений (7.55) к решению системы уравнений в конечных разностях (7.73) показан геометрически на рис. 7.7.

Сплошными линиями изображены кривые изменения оскулирующих элементов p и e некоторой орбиты, описываемые системой уравнений (7.55) в продолжение первых четырех оборотов. Штриховыми линиями изображены значения тех же оскулирующих элементов, соответствующие системе разностных уравнений.

Интегралы в правых частях уравнений (7.73) следует заменить соответствующими дифференциальными уравнениями. В таком случае решение системы уравнений в конечных разностях (7.73) сводится к двухцикло-

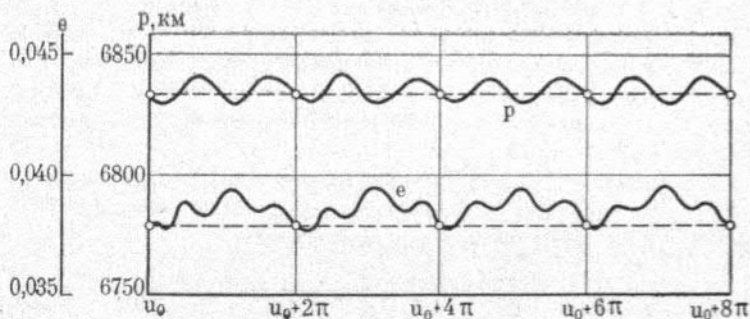


Рис. 7.7.

вому алгоритму: внешнему — численному интегрированию по аргументу N (h должно быть в данном случае равно 2π) и внутреннему — интегрированию по аргументу u , причем последнее необходимо производить в каждой точке внешнего алгоритма при вычислении правых частей уравнений.

Шаг $H=Nh$ численного решения системы уравнений в конечных разностях (7.73) выбирается таким, чтобы погрешность в определении искомых функций не превышала бы заданных величин (при условии, что шаг интегрирования внутренней системы (7.55) выбран соответствующим образом). Шаг интегрирования H может быть переменным, однако следует иметь в виду, что величина H должна быть такой, чтобы функции k_j ($j=1, 2, 3, 4$), определяемые зависимостями (7.69) и служащие для расчета приращений искомых функций (7.73), вычислялись для синфазных точек относительно аргумента u , например для точек $u+2\pi k$, где k — целое число.

Приведем развернутую схему и некоторые результаты применения метода двухциклового интегрирования уравнений в конечных разностях для расчета орбит ИСЗ.

При начальных значениях оскулирующих элементов для $u = u_0 = 0$:

$$\begin{array}{ll}
 y_{1,0} = p_0 = 12\,662,060 \text{ км} & y_{4,0} = \Omega_0 = 3,73512100 \\
 y_{2,0} = e_0 = 0,721414081 & y_{5,0} = i_0 = 1,13202000 \\
 y_{3,0} = \omega_0 = 4,87461300 & y_{6,0} = t_0 = 0,00 \text{ с}
 \end{array}$$

система уравнений (7.55) интегрировалась по формулам Шенкса (см. § 7.4) с шагом $h=0,02\pi$ до $u_1=2\pi$. При расчете возмущающих ускорений учитывалось влияние сжатия Земли (в формуле (7.34) для потенциала силы притяжения Земли учитывались слабые с коэффициентами C_{20} и C_{40}). В результате были получены значения оскулирующих элементов орбиты $p_1, e_1, \omega_1, \Omega_1, i_1$ и времени t_1 , т. е. $y_{j,1}$ ($j=1, 2, \dots, 6$).

По формуле (7.66) определялись значения $f_j(u_0, y_{j,0})=y_{j,1}-y_{j,0}$ и $k_{j,1}=Nf_j(u_0, y_{j,0})$, $j=1, 2, \dots, 6$. Далее согласно (7.71) рассчитывались значения u_2 и $y_{j,2}$ по формулам

$$u_2 = u_0 + \frac{N-1}{2N} H, \quad y_{j,2} = y_{j,0} + \frac{N-1}{2N} k_{j,1},$$

где $H=N2\pi$.

Величины $u_2, y_{j,2}$ принимались за начальные условия для интегрирования системы уравнений (7.55) с шагом h на интервале от u_2 до $u_3=u_2+2\pi$. При этом были получены значения $y_{j,3}$ ($j=1, 2, \dots, 6$). После этого были найдены $f_j(u_2, y_{j,2})=y_{j,3}-y_{j,2}$ и $k_{j,2}=Nf_j(u_2, y_{j,2})$. Затем рассчитывались значения

$$u_4 = u_0 + \frac{N-1}{2N} H, \quad y_{j,4} = y_{j,0} + \frac{1}{N} k_{j,1} + \frac{N-3}{2N} k_{j,2},$$

которые принимались за начальные условия для интегрирования системы уравнений (7.55) с шагом h на интервале от u_4 до $u_5=u_4+2\pi$. В результате интегрирования были получены значения $y_{j,5}$. Далее определялись величины $f_j(u_4, y_{j,4})=y_{j,5}-y_{j,4}$ и $k_{j,3}=Nf_j(u_4, y_{j,4})$. После этого находились значения

$$u_6 = u_0 + \frac{N-1}{N} H,$$

$$y_{j,6} = y_{j,0} + \frac{1}{N} k_{j,1} + \frac{2(N-2)}{N(N+1)} k_{j,2} + \frac{(N-1)(N-2)}{N(N+1)} k_{j,3}$$

и интегрировалась система дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах (7.55) с шагом h при начальных условиях $u_6, y_{j,6}$ на интервале от u_6 до $u_7=u_6+2\pi$.

В результате были получены значения оскулирующих элементов и времени $y_{j,7}$, что позволило определить $f_j(u_6, y_{j,6})=y_{j,7}-y_{j,6}$ и $k_{j,4}=Nf_j(u_6, y_{j,6})$.

После этого по формуле (7.71) были найдены приращения элементов орбиты и времени Δy_j к начальным значениям этих величин, а затем рассчитаны значения оскулирующих элементов орбиты и времени, соответствующие моменту завершения спутником N -го оборота вокруг Земли:

$$y_j = y_{j,0} + \Delta y_j, \quad j=1, 2, \dots, 6.$$

Результаты расчета значений оскулирующих элементов, соответствующих концу 61-го витка, представлены в табл. 7.4, где в качестве варианта № 1 приведены результаты интегрирования уравнений в оскулирующих элементах (7.55) методом Рунге — Кутты с коэффициентами (7.63), а в качестве варианта № 2 — результаты решения уравнений в конечных разностях.

Таблица 7.4

Номер варианта	p , км	e	ω
1	12 662,060	0,721 409 656	4,866 587 21
2	12 662,060	0,721 409 652	4,866 587 20
Номер варианта	Ω	i	t , с
1	3,668 145 97	1,132 020 00	2 601 436,40
2	3,668 145 99	1,132 020 00	2 601 436,43

Сравнение результатов, полученных решением уравнений в конечных разностях, с соответствующими значениями оскулирующих элементов и времени, найденными решением дифференциальных уравнений (7.55) методом Рунге — Кутты с коэффициентами (7.63), которые могут быть приняты за эталонные значения, показывает хорошее совпадение результатов.

Однако при использовании зависимостей (7.71) необходимо иметь в виду, что они справедливы лишь для нечетных значений числа витков N , определяющих шаг внешнего интегрирования системы уравнений в конечных разностях. Объясняется это следующим. При задании четного значения числа витков N функция $f(u, y)$, представляющая собой согласно (7.66) конечную разность значений элементов орбиты, рассчитывается при определении коэффициентов k_2, k_3 в формулах (7.71) для значений аргумента u , некратных целым числам количества витков N . Это противоречит основному принципу решения уравнений в конечных разностях, заключающемуся в использовании конечных разностей для синфазных значений аргумента.

Поясним сказанное на примере определения эксцентриситета орбиты e . Если принять $u_1 = u_0 = 0$, $y_1 = e_0$ и четное значение N , то при вычислении коэффициентов k_2 и k_3 по формулам (7.71) значение аргумента

$$u_0 + \frac{N-1}{2N} H = u_0 + \frac{N-1}{2} (2\pi)$$

не будет кратным числу оборотов.

Вместе с тем, как следует из 7.7, действительные значения эксцентриситета e (сплошная линия на рис. 7.7), имеющие периодические колебания, совпадают с соответствующими значениями конечных разностей, учитывающих лишь вековые изменения эксцентриситета (штриховая линия на рис. 7.7), только для значений аргумента u , кратных целому числу оборотов. Поэтому, если вычисляя коэффициенты k_2 и k_3 по формулам (7.71), использовать значения аргумента u , не кратные числу витков N , то конечные разности будут найдены «внутренним интегрированием» для других орбит, имеющих действительные значения эксцентриситетов в этих точках, равные значениям эксцентриситета, найденным при использовании конечных разностей для исследуемой орбиты. Аналогичные результаты получаются и для других элементов орбиты.

Для иллюстрации рассмотренного явления в табл. 7.5 приведены результаты интегрирования уравнений (7.55) по семичленным формулам метода Рунге — Кутты (вариант № 1) и результаты применения формул (7.71) для решения уравнений в конечных разностях при $N=60$.

Из анализа данных табл. 7.5 следует, что в рассматриваемом случае имеют место существенные ошибки в определении t — времени полета ИСЗ, ω — аргумента перигея и других элементов орбиты.

Если же принять в качестве N нечетное число витков, то все коэффициенты k_r ($r=1, 2, 3, 4$) в формулах (7.71) рассчитываются для значений аргумента u , кратных целым числам витков. В этом случае наблюдается совпадение результатов интегрирования диффе-

Таблица 7.5

Номер варианта	p , км	e	ω
1	12 662,060	0,721 409 728	4,866 718 78
2	12 662,102	0,721 412 889	4,866 715 05
Номер варианта	ω	i	t , с
1	3,669 243 92	1,132 020 00	2 558 789,94
2	3,669 255 55	1,132 020 77	2 559 807,72

ренциальных уравнений в оскулирующих элементах и решения уравнений в конечных разностях (см. табл. 7.4).

Таким образом, использование зависимостей (7.71) позволяет получать значения элементов орбиты с высокой точностью лишь при нечетном числе витков N , определяющем шаг внешнего интегрирования уравнений в конечных разностях (7.73). Если же необходимо

решать уравнения (7.73) с четным значением N , то вместо формул (7.71) можно использовать зависимости

$$\Delta y_i = \frac{N+1}{6(N-1)} k_1 + \frac{(N-2)(N+1)}{3N(N-1)} k_2 + \frac{(N-2)(N-1)}{3N(N-1)} k_3 + \frac{N+1}{6(N-1)} k_4, \quad (7.74)$$

где

$$k_1 = Nf(x_i, y_i),$$

$$k_2 = Nf\left(x_i + \frac{1}{2}H, y_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = Nf\left(x_i + \frac{1}{2}H, y_i + \frac{1}{N-1}k_1 + \frac{N-3}{2(N-1)}k_2\right),$$

$$k_4 = Nf\left[x_i + \frac{N-1}{N}H, y_i + \frac{1}{N}k_1 + \frac{(N-2)(3N-1)}{N^2(N+1)}k_2 + \frac{(N-1)^2(N-2)}{N^2(N+1)}k_3\right].$$

Результаты решения уравнений в конечных разностях (7.73) при $N=60$ методом Г. П. Таратыновой с применением формул (7.74) представлены в табл. 7.6 вариантом № 2. Эти данные полностью совпадают с результатами интегрирования дифференциальных уравнений (7.55) методом Рунге — Кутта с коэффициентами (7.63) (вариант № 1).

Таблица 7.6

Номер варианта	p , км	e	ω
1	12 662,060	0,721 409 728	4,866 718 78
2	12 662,060	0,721 409 729	4,866 718 77
Номер варианта	Ω	i	t , с
1	3,669 243 92	1,132 020 00	2 558 789,94
2	3,669 243 93	1,132 020 00	2 558 789,94

Учитывая, что при использовании метода Г. П. Таратыновой на решение задачи расчета движения ИСЗ на ЭВМ затрачивается примерно в $N/4$ раз меньшее время, чем при численном интегрировании дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах (7.55) одноцикловым методом Рунге — Кутта, можно рекомендовать за-

висимости (7.71) при нечетных значениях N и формулы (7.74) при четных N для практического использования при долгосрочном прогнозировании движения искусственных спутников Земли.

8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ НА ОСНОВЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ

В практике определения движения летательных аппаратов по результатам радиотехнических траекторных измерений часто встречаются случаи, когда некоторые из основных сил, действующих на ЛА в полете, неизвестны или известны недостаточно точно. При этом, как показано в гл. 1, определение движения ЛА может быть выполнено на основе использования кинематической модели движения, записываемой на основе статистической обработки и анализа измерений.

Если в каждый фиксированный момент времени имеется достаточно большое количество измерений координатных и скоростных параметров движения ЛА, то статистической обработкой этих измерений можно найти некоторые средние значения положения и вектора скорости ЛА. Однако чаще измерения рассредоточены на довольно протяженном интервале времени, а в каждый фиксированный момент времени ее недостаточно для статистического оценивания параметров движения. В этом случае для определения движения ЛА на интервале измерений необходимо иметь, как минимум, измерения трех координат ЛА в каждый фиксированный момент времени. Скоростные параметры движения ЛА на интервале измерений могут быть определены численным дифференцированием измеренных координат или дифференцированием аналитической зависимости, аппроксимирующей измеренные координаты. В последнем случае вся информация о движении ЛА, полученная обработкой измерений, содержится в коэффициентах аппроксимирующих зависимостей, характеризующих локальное (на интервале измерений) изменение координат ЛА во времени.

Методика оптимального аппроксимирования траекторных измерений детально рассмотрена в гл. 5. В данной главе приводятся наиболее часто применяемые на практике алгоритмы определения параметров движения ЛА по минимально необходимому количеству траекторных измерений и численного дифференцирования измеренных траекторными средствами координат ЛА. Эти алгоритмы могут быть использованы для определения как управляемого, так и неуправляемого движения ЛА. Однако наиболее широко они применяются для определения параметров управляемого движения ЛА, когда неизвестен закон изменения сил, действующих на аппарат в полете.

8.1. Определение параметров движения летательного аппарата по минимально необходимому количеству измерений

Для определения положения ЛА в пространстве в некоторый момент времени t достаточно иметь измерения трех координатных параметров, соответствующие этому моменту времени. Рассмотрим часто встречающиеся на практике случаи определения положения ЛА по измерениям, полученным с использованием радиолокационной станции, радиодальномера и фазового пеленгатора, двух фазовых пеленгаторов, трех радиодальномеров.

Наиболее простые зависимости для определения координат ЛА в измерительной системе координат $Ox_{II}y_{II}z_{II}$ с началом в точке стояния измерительной станции получаются при использовании радиолокационных измерений наклонной дальности D , угла места γ и азимутального угла A :

$$x_{II} = D \cos \gamma \cos A, \quad y_{II} = D \sin \gamma, \quad z_{II} = D \cos \gamma \sin A, \quad (8.1)$$

а также при использовании измерений наклонной дальности D и направляющих косинусов $\cos \theta_x$ и $\cos \theta_z$, полученных с измерительного комплекса радиодальномер—фазовый пеленгатор:

$$x_{II} = D \cos \theta_x, \quad y_{II} = D \cos \theta_y, \quad z_{II} = D \cos \theta_z, \quad (8.2)$$

где

$$\cos \theta_y = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_x - \cos^2 \theta_z}.$$

Запишем зависимости для определения координат ЛА по измерениям направляющих косинусов, полученным с двух фазовых пеленгаторов. Примем, что заданы точки стояния фазовых пеленгаторов O_1 и O_2 в геоцентрической гринвичской системе координат соответственно координатами x_{r1}, y_{r1}, z_{r1} и x_{r2}, y_{r2}, z_{r2} . Свяжем с точками O_1 и O_2 измерительные системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и $O_2X_2Y_2Z_2$, положение которых относительно гринвичской системы координат зададим матрицами направляющих косинусов A_{r1} и A_{r2} . Элементы этих матриц представлены соотношением (7.12).

Пусть в момент времени t первым фазовым пеленгатором измерены направляющие косинусы $\cos \theta_{x1}$ и $\cos \theta_{z1}$, а вторым фазовым пеленгатором — направляющие косинусы $\cos \theta_{x2}$ и $\cos \theta_{z2}$ (рис. 8.1).

Очевидно, что $x_1 = D_1 \cos \theta_{x1}$, $y_1 = D_1 \cos \theta_{y1}$, $z_1 = -D_1 \cos \theta_{z1}$, где

$$\cos \theta_{y1} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{x1} - \cos^2 \theta_{z1}}.$$

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо определить величину D_1 — расстояние между летательным аппаратом S и точкой стояния первого фазового пеленгатора O_1 .

Применяя к треугольнику O_1SO_2 (рис. 8.1) теорему синусов, можем записать $(\sin \gamma)/b = (\sin \beta)/D_1$. Отсюда $D_1 = b \sin \beta / \sin \gamma$.

Получим формулы для расчета величин b , $\sin \beta$, $\sin \gamma$. Расстояние между точками O_1 и O_2 может быть рассчитано по соотношению

$$b = \sqrt{(x_{r2} - x_{r1})^2 + (y_{r2} - y_{r1})^2 + (z_{r2} - z_{r1})^2}.$$

Из треугольника O_1SO_2 имеем

$$\sin \gamma = \sin [180^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (8.3)$$

$$\cos \alpha = D_1^0 \mathbf{b}^0, \quad \cos \beta = D_2^0 \mathbf{b}^0,$$

где D_1^0 , D_2^0 , \mathbf{b}^0 , \mathbf{b}^0 — единичные векторы соответствующих направлений (см. рис. 8.1).

Векторы D^0_1 и D^0_2 заданы соответственно составляющими по осям координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и $O_2X_2Y_2Z_2$:

$$\begin{aligned} D^0_1 &= \cos \theta_{x1} x^0_1 + \cos \theta_{y1} y^0_1 + \cos \theta_{z1} z^0_1, \\ D^0_2 &= \cos \theta_{x2} x^0_2 + \cos \theta_{y2} y^0_2 + \cos \theta_{z2} z^0_2. \end{aligned} \quad (8.4)$$

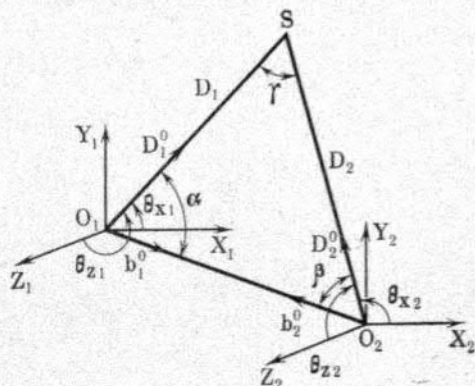


Рис. 8.1.

Векторы \mathbf{b}_1^0 и \mathbf{b}_2^0 наиболее просто могут быть выражены через составляющие по осям гринвичской системы координат:

$$\mathbf{b}_1^0 = \frac{1}{b} [(x_{r2} - x_{r1}) \mathbf{x}_r^0 + (y_{r2} - y_{r1}) \mathbf{y}_r^0 + (z_{r2} - z_{r1}) \mathbf{z}_r^0], \quad (8.5)$$

$$\mathbf{b}_2^0 = \frac{1}{b} [(x_{r1} - x_{r2}) \mathbf{x}_r^0 + (y_{r1} - y_{r2}) \mathbf{y}_r^0 + (z_{r1} - z_{r2}) \mathbf{z}_r^0].$$

Подставив (8.4) и (8.5) в выражение (8.3), получим

$$\begin{aligned} \cos \alpha = & \frac{1}{b} [(x_{r2} - x_{r1}) (\cos \theta_{x1} \mathbf{x}_1^0 \mathbf{x}_r^0 + \cos \theta_{y1} \mathbf{y}_1^0 \mathbf{x}_r^0 + \\ & + \cos \theta_{z1} \mathbf{z}_1^0 \mathbf{x}_r^0) + (y_{r2} - y_{r1}) (\cos \theta_{x1} \mathbf{x}_1^0 \mathbf{y}_r^0 + \\ & + \cos \theta_{y1} \mathbf{y}_1^0 \mathbf{y}_r^0 + \cos \theta_{z1} \mathbf{z}_1^0 \mathbf{y}_r^0) + (z_{r2} - z_{r1}) \times \\ & \times (\cos \theta_{x1} \mathbf{x}_1^0 \mathbf{z}_r^0 + \cos \theta_{y1} \mathbf{y}_1^0 \mathbf{z}_r^0 + \cos \theta_{z1} \mathbf{z}_1^0 \mathbf{z}_r^0)]. \quad (8.6) \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^0 \mathbf{x}_r^0 &= \cos(\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_r^0) = a_{11}^{1,r}; \\ \mathbf{y}_1^0 \mathbf{x}_r^0 &= \cos(\mathbf{y}_1^0, \mathbf{x}_r^0) = a_{21}^{1,r} \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

зависимость (8.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \cos \alpha = & \frac{1}{b} [(x_{r2} - x_{r1}) (\cos \theta_{x_1} a_{11}^{1,r} + \cos \theta_{y_1} a_{21}^{1,r} + \\ & + \cos \theta_{z_1} a_{31}^{1,r}) + (y_{r2} - y_{r1}) (\cos \theta_{x_1} a_{12}^{1,r} + \cos \theta_{y_1} a_{22}^{1,r} + \\ & + \cos \theta_{z_1} a_{32}^{1,r}) + (z_{r2} - z_{r1}) (\cos \theta_{x_1} a_{13}^{1,r} + \\ & + \cos \theta_{y_1} a_{23}^{1,r} + \cos \theta_{z_1} a_{33}^{1,r})], \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\cos \alpha = \mathbf{D}_1^0 \mathbf{A}_{r,1}^T \mathbf{b}_1^0,$$

где

$$\mathbf{D}_1^0 = \|\cos \theta_{x_1} \cos \theta_{y_1} \cos \theta_{z_1}\|,$$

$$\mathbf{b}_1^0 = \frac{1}{b} \begin{vmatrix} x_{r2} - x_{r1} \\ y_{r2} - y_{r1} \\ z_{r2} - z_{r1} \end{vmatrix}.$$

Аналогично получается зависимость для определения $\cos \beta$:

$$\cos \beta = -\mathbf{D}_2^0 \mathbf{A}_{r,2}^T \mathbf{b}_1^0,$$

где

$$\mathbf{D}_2^0 = \|\cos \theta_{x_2} \cos \theta_{y_2} \cos \theta_{z_2}\|.$$

Необходимые для решения задачи $\sin \alpha$ и $\sin \beta$ находятся по формулам

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}.$$

Таким образом, получены все необходимые зависимости для определения координат x_1, y_1, z_1 ЛА по результатам синхронизированных измерений направляющих косинусов двумя фазовыми пеленгаторами.

Рассмотрим, как могут быть определены координаты ЛА по значениям трех наклонных дальностей D_1, D_2, D_3 , измеренных в момент времени t радиодальномерами, расположенными соответственно в точках $O_1\{x_{r1}, y_{r1}, z_{r1}\}$, $O_2\{x_{r2}, y_{r2}, z_{r2}\}$, $O_3\{x_{r3}, y_{r3}, z_{r3}\}$. Геометрически эта задача сводится к отысканию точки пересечения трех сфер радиусов D_1, D_2, D_3 , каждая из которых имеет своим центром точку стояния соответствующего радиодальномера.

Для удобства вычислений введем условную систему координат $Ox_y Y_y Z_y$, начало которой совпадает с точкой

стояния одного из радиодальномеров (например, O_1), а оси O_1X_y , O_1Y_y , O_1Z_y параллельны соответствующим осям гринвичской системы координат.

Координаты измерительных средств в условной системе координат определяются формулами

$$\begin{aligned}x_{y_1} &= 0; & x_{y_2} &= x_{r_2} - x_{r_1}; & x_{y_3} &= x_{r_3} - x_{r_1}; \\y_{y_1} &= 0; & y_{y_2} &= y_{r_2} - y_{r_1}; & y_{y_3} &= y_{r_3} - y_{r_1}; \\z_{y_1} &= 0; & z_{y_2} &= z_{r_2} - z_{r_1}; & z_{y_3} &= z_{r_3} - z_{r_1}.\end{aligned}$$

Получим уравнения для определения искоемых координат x_y , y_y , z_y ЛА в момент измерений t в условной системе координат. Уравнения сферических поверхностей в этой системе имеют вид

$$(x_y - x_{yi})^2 + (y_y - y_{yi})^2 + (z_y - z_{yi})^2 = D_{1i}^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.7)$$

Учитывая, что $x_{yi}^2 + y_{yi}^2 + z_{yi}^2 = D_{1i}^2$, где D_{1i} — расстояние от начала условной системы координат до точки стояния i -го радиодальномера, систему уравнений (8.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}x_y^2 + y_y^2 + z_y^2 &= D_1^2, \\x_{y_2}x_y + y_{y_2}y_y + z_{y_2}z_y &= q_2, \\x_{y_3}x_y + y_{y_3}y_y + z_{y_3}z_y &= q_3,\end{aligned} \quad (8.8)$$

где $q_2 = (D_1^2 + D_{12}^2 - D_2^2)/2$; $q_3 = (D_1^2 + D_{13}^2 - D_3^2)/2$.

Последние два уравнения системы (8.8) представим в виде

$$y_y = a_1 x_y + b_1, \quad z_y = a_2 x_y + b_2, \quad (8.9)$$

где

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{x_{y_3}z_{y_2} - x_{y_2}z_{y_3}}{y_{y_2}z_{y_3} - y_{y_3}z_{y_2}}; & b_1 &= \frac{q_2z_{y_3} - q_3z_{y_2}}{y_{y_2}z_{y_3} - y_{y_3}z_{y_2}}; \\a_2 &= \frac{x_{y_2}y_{y_3} - x_{y_3}y_{y_2}}{y_{y_2}z_{y_3} - y_{y_3}z_{y_2}}; & b_2 &= \frac{q_2y_{y_3} - q_3y_{y_2}}{y_{y_2}z_{y_3} - y_{y_3}z_{y_2}}.\end{aligned}$$

Подставив (8.9) в первое уравнение системы (8.8), получим

$$Ax_y^2 + 2Bx_y + C = 0, \quad (8.10)$$

где

$$A = 1 + a_1^2 + a_2^2; \quad B = a_1b_1 + a_2b_2; \quad C = b_1^2 + b_2^2 - D_1^2.$$

Решение квадратного уравнения (8.10) находим по известной формуле

$$x_y = -\frac{B}{A} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)^2 - \frac{C}{A}}.$$

Подставляя полученные решения для x_y в уравнения (8.9), определяем значения остальных неизвестных y_y и z_y . После этого можно рассчитать координаты центра масс ЛА в гринвичской системе координат: $x_r = x_{r1} + x_y$; $y_r = y_{r1} + y_y$; $z_r = z_{r1} + z_y$.

Однако найденные при этом координаты соответствуют либо действительному положению ЛА, либо его зеркальному отображению относительно базисной плоскости, проходящей через точки стояния радиодальномеров. Для выделения истинного решения из двух полученных необходимо вычислить геоцентрические радиусы точек, определяемых найденными координатами. Если базисная плоскость не проходит через центр Земли, то истинному решению соответствует больший радиус.

При определении скорости ЛА необходимо иметь измерения координат и составляющих скорости. В качестве примера рассмотрим, как по результатам измерения в момент времени t параметров D , $\cos \theta_x$, $\cos \theta_z$, \dot{D} , $\dot{\cos \theta_x}$, $\dot{\cos \theta_z}$ могут быть найдены проекции вектора скорости ЛА на оси измерительной системы координат. Запишем очевидные соотношения

$$\begin{aligned} D^2 &= x_n^2 + y_n^2 + z_n^2; \quad \cos \theta_x = x_n/D; \quad \cos \theta_z = z_n/D; \\ \dot{D} &= (x_n \dot{x}_n + y_n \dot{y}_n + z_n \dot{z}_n)/D; \\ \dot{\cos \theta_x} &= (\dot{x}_n D - x_n \dot{D})/D^2; \\ \dot{\cos \theta_z} &= (\dot{z}_n D - z_n \dot{D})/D^2. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Их можно переписать также в виде

$$\begin{aligned} d_{11} \dot{x}_n + d_{12} \dot{y}_n + d_{13} \dot{z}_n &= \dot{D}; \\ d_{21} \dot{x}_n + d_{22} \dot{y}_n + d_{23} \dot{z}_n &= \dot{\cos \theta_x}; \\ d_{31} \dot{x}_n + d_{32} \dot{y}_n + d_{33} \dot{z}_n &= \dot{\cos \theta_z}, \end{aligned} \quad (8.12)$$

где коэффициенты d_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) могут быть определены из сравнения соответствующих уравнений (8.11) и (8.12). Эти коэффициенты представляют собой частные производные от измеряемых параметров по проекциям

вектора скорости ЛА в измерительной системе координат:

$$d_{11} = \frac{\partial \dot{D}}{\partial \dot{x}_n} = \frac{x_n}{D}; \quad d_{21} = \frac{\partial \dot{\cos \theta_x}}{\partial \dot{x}_n} = \frac{1}{D} - \frac{x_n^2}{D^3};$$

$$d_{31} = \frac{\partial \dot{\cos \theta_z}}{\partial \dot{x}_n} = -\frac{x_n z_n}{D^3}$$

и т. д.

Коэффициенты d_{ij} являются функциями координат ЛА. Поэтому для определения проекций вектора скорости $\dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n$ должны быть выполнены измерения не только скоростных, но и координатных параметров движения ЛА. Для определения значений $\dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n$ необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (8.12). Получаемое при этом решение будет единственным, если определитель матрицы

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

8.2. Определение составляющих скорости летательного аппарата численным дифференцированием измеренных координат

Рассмотренный в предыдущем параграфе метод определения параметров движения ЛА по результатам траекторных измерений не позволяет найти значения скорости ЛА при отсутствии в составе измерений скоростных параметров. В этом случае для решения задачи определения движения может быть проведено численное дифференцирование измеренных координат.

Однако при численном дифференцировании измеренных функций часто оказывается, что обычные разностные формулы не обеспечивают необходимой точности определения производных. Это объясняется тем, что для уменьшения остаточной погрешности этих формул нужно либо уменьшать шаг изменения аргумента, либо по-

вышать порядок используемых разностей. Но и в том и в другом случае резко возрастают погрешности, вызываемые случайными ошибками измерения дифференцируемой функции. Поэтому возникает задача получения таких формул численного дифференцирования, которые были бы свободны от этих недостатков.

Рассмотрим некоторую функцию $z=z(t)$ и примем, что путем измерений в точках t_j ($j=0, 1, 2, \dots, N-1$) получены соответствующие опытные значения этой функции $h_j=z_j+\delta h_j$, где δh_j — величины случайных ошибок измерений.

Допустим, что при этом удовлетворяются следующие условия: функция $z(t)$ имеет ограниченную n -ю производную; ошибки измерений δh_j являются некоррелированными случайными величинами, характеризуемыми нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями σ^2_j ; измерения координатного параметра z выполнены через равные промежутки времени Δt .

Требуется определить $\hat{z}(t)$ — оценку первой производной по времени от функции $z(t)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\hat{z}}$, обусловленное случайными ошибками измерений и выбрать оптимальный интервал численного дифференцирования.

Для численного дифференцирования функций, полученных в результате измерений, целесообразно применять метод скользящего дифференцирования, при котором производная вычисляется только для одной (средней) точки выбранного интервала измерений. Вычисления производных для следующих точек производится на основе математической обработки данных соответствующих интервалов.

Первую производную функции $z(t)$ в некоторой опорной точке s , являющейся серединой интервала $[t_{s-h}, t_{s+h}]$, можно определить по формуле

$$\dot{z}_s = \hat{z}_s + R, \quad (8.13)$$

где \hat{z}_s — приближенное значение производной; R — остаточный член.

Для получения расчетных зависимостей для величин \hat{z}_s и R разложим функцию $z(t)$ в окрестности точки s в ряд

Тейлора, приняв, что величина $(i\Delta t)$, где $i=1, 2, \dots, k$, является малой:

$$z_{s+i} = z_s + \dot{z}_s i\Delta t + \frac{\ddot{z}_s}{2!} (i\Delta t)^2 + \frac{\overset{\dots}{z}_s}{3!} (i\Delta t)^3 + \frac{z_s^{(IV)}}{4!} (i\Delta t)^4 + \frac{z_s^{(V)}}{5!} (i\Delta t)^5 + \dots, \quad (8.14)$$

$$z_{s-i} = z_s - \dot{z}_s i\Delta t + \frac{\ddot{z}_s}{2!} (i\Delta t)^2 - \frac{\overset{\dots}{z}_s}{3!} (i\Delta t)^3 + \frac{z_s^{(IV)}}{4!} (i\Delta t)^4 - \frac{z_s^{(V)}}{5!} (i\Delta t)^5 + \dots \quad (8.15)$$

Вычтем (8.15) из (8.14):

$$z_{s+i} - z_{s-i} = 2\dot{z}_s i\Delta t + 2\frac{\overset{\dots}{z}_s}{3!} (i\Delta t)^3 + 2\frac{z_s^{(V)}}{5!} (i\Delta t)^5 + \dots \quad (8.16)$$

Отсюда

$$\dot{z}_s = \frac{z_{s+i} - z_{s-i}}{2i\Delta t} - \frac{\overset{\dots}{z}_s}{3!} (i\Delta t)^2 - \frac{z_s^{(V)}}{5!} (i\Delta t)^4 - \dots, \quad i=1, 2, \dots, k. \quad (8.17)$$

Если принять, что приближенное значение искомой производной определяется зависимостью

$$\tilde{z}_s = \tilde{z}_{s_i} = \frac{z_{s+i} - z_{s-i}}{2i\Delta t}, \quad (8.18)$$

то остаточный член может быть представлен рядом

$$R = R_i = - \left[\frac{\overset{\dots}{z}_s}{3!} (i\Delta t)^2 + \frac{z_s^{(V)}}{5!} (i\Delta t)^4 + \dots \right]. \quad (8.19)$$

Из выражения (8.17) следует, что при линейной или квадратической зависимости измеряемого параметра z от аргумента t использование формулы (8.18) позволяет находить значение искомой производной \dot{z}_s , не содержащее методической ошибки численного дифференцирования. Далее, из формул (8.13), (8.18) и (8.19) вытекает, что ошибка определения производной \dot{z}_s зависит от случайных ошибок измерений процесса $z(t)$ в точках $s+i$ и

$s-i$, вызывающих так называемую случайную ошибку дифференцирования, и от неучета остаточного члена R_i , приводящего к ошибке, называемой методической.

Известно, что

$$|R_i| \leq \frac{|z_{\text{макс}i}^{\dots}|}{3!} (i\Delta t)^3 = \frac{|z_{\text{макс}i}^{\dots}| T_i^3}{24}, \quad (8.20)$$

где $T_i = 2i\Delta t$; $z_{\text{макс}i}^{\dots}$ — максимальное на рассматриваемом интервале T_i значение третьей производной по времени от измеряемой функции. Отсюда следует, что с увеличением интервала T_i между точками $s+i$ и $s-i$ методическая ошибка растет.

Для уменьшения методической ошибки получим формулу численного дифференцирования, остаточный член которой не содержит третьей и четвертой производных по времени от дифференцируемой функции. Разложим измеряемую функцию $z(t)$ в ряд Тейлора, приняв, что величина $2i\Delta t$ является малой ($i=1, 2, \dots, m$; m — целая часть числа $k/2$):

$$\begin{aligned} z_{s+2i} = & z_s + \dot{z}_s 2i\Delta t + \frac{\ddot{z}_s}{2!} (2i\Delta t)^2 + \frac{\overset{\dots}{z}_s}{3!} (2i\Delta t)^3 + \\ & + \frac{z_s^{(IV)}}{4!} (2i\Delta t)^4 + \frac{z_s^{(V)}}{5!} (2i\Delta t)^5 + \dots, \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned} z_{s-2i} = & z_s - \dot{z}_s 2i\Delta t + \frac{\ddot{z}_s}{2!} (2i\Delta t)^2 - \frac{\overset{\dots}{z}_s}{3!} (2i\Delta t)^3 + \\ & + \frac{z_s^{(IV)}}{4!} (2i\Delta t)^4 - \frac{z_s^{(V)}}{5!} (2i\Delta t)^5 + \dots \end{aligned} \quad (8.22)$$

Вычитая (8.22) из (8.21), получаем

$$\begin{aligned} z_{s+2i} - z_{s-2i} = & 2\dot{z}_s 2i\Delta t + 2 \frac{\overset{\dots}{z}_s}{3!} (2i\Delta t)^3 + \\ & + 2 \frac{z_s^{(V)}}{5!} (2i\Delta t)^5 + \dots \end{aligned} \quad (8.23)$$

Из совместного решения уравнений (8.16) и (8.23) имеем

$$\begin{aligned} \dot{z}_s = & \frac{1}{12i\Delta t} \left[8(z_{s+i} - z_{s-i}) - (z_{s+2i} - z_{s-2i}) + \right. \\ & \left. + 48 \frac{z_s^{(V)}}{5!} (i\Delta t)^5 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Для удобства последующего сравнительного анализа зависимостей (8.17) и (8.24), содержащих одинаковый индекс i , но с различными пределами его изменения, заменим в последнем выражении индекс i на l . Из (8.24) следует, что методическая ошибка приближенной формулы

$$\tilde{z}_s \approx \tilde{z}_{sl} = (1/12l\Delta t) [8(z_{s+l} - z_{s-l}) - (z_{s+2l} - z_{s-2l})] \quad (8.25)$$

может быть охарактеризована зависимостью

$$|R_l| \leq |z_{\max}^{(V)}| (l\Delta t)^4 / 30, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (8.26)$$

При математической обработке траекторных измерений можно принять, что $z_{\max}^{(V)} = 0$, и не учитывать методической погрешности формулы (8.25).

Полагая результаты измерения координатного параметра z в точках $s+i$ и $s-i$ ($s+l$ и $s-l$) некоррелированными и равноточными ($\sigma_{z,s+i} = \sigma_{z,s-i} = \sigma_{z,s+l} = \sigma_{z,s-l} = \sigma$), записываем формулы для определения дисперсий случайных ошибок оценок скоростного параметра, найденного численным дифференцированием измеренных координат, по формулам (8.18) и (8.25):

$$\sigma_{\hat{z}, si}^2 = \frac{\sigma^2 z_{s+i} + \sigma^2 z_{s-i}}{(2i\Delta t)^2} = \frac{\sigma^2}{2(i\Delta t)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{z}, sl}^2 &= \frac{64\sigma^2 z_{s+l} + 64\sigma^2 z_{s-l} + \sigma^2 z_{s+2l} + \sigma^2 z_{s-2l}}{144(l\Delta t)^2} = \\ &= \frac{65\sigma^2}{72(l\Delta t)^2}, \quad l = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Из соотношений (8.27) и (8.28) следует, что дисперсия оценки производной \hat{z}_s пропорциональна дисперсии ошибок измерений, возрастает с увеличением числа привлекаемых для численного дифференцирования измерений и уменьшается при увеличении интервала между используемыми измерениями.

В случае коррелированных ошибок измерений дисперсия оценки производной зависит от корреляционной функции ошибок измерений. Так, при использовании для

численного дифференцирования формулы (8.18) дисперсия оценки производной определяется выражением

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{z}, sl}^2 &= M \left[\frac{1}{2i\Delta t} (\delta h_{s+i} - \delta h_{s-i}) \right]^2 = \\ &= M \left[\frac{1}{4(i\Delta t)^2} (\delta h_{s+i}^2 - 2\delta h_{s+i}\delta h_{s-i} + \delta h_{s-i}^2) \right] = \\ &= \frac{1}{2(i\Delta t)^2} [\sigma^2 - K_h(2i\Delta t)],\end{aligned}\quad (8.29)$$

где $K_h(\tau)$ — корреляционная функция ошибок измерений.

При уменьшении интервала $i\Delta t$ между измерениями дисперсия оценки производной стремится к величине второй производной корреляционной функции ошибок измерений при $\tau=0$, взятой с противоположным знаком:

$$\lim_{i\Delta t \rightarrow 0} \sigma_{\hat{z}, sl}^2 = -K''_h(0).$$

Это означает, что если ошибки измерений сильно коррелированы и значение второй производной их корреляционной функции при $\tau=0$ близко к нулю, то ошибки измерений практически не влияют на оценку производной. В частности, постоянная систематическая ошибка измерений не вызывает ошибок в оценке производной, что наглядно видно из формулы (8.18).

Для снижения влияния случайных ошибок измерений функции $z(t)$ на точность производной \dot{z}_s применим многократное определение производной \hat{z}_{sl} при $l=1, 2, \dots, k$ или \hat{z}_{sl} при $l=1, 2, \dots, m$. Определив k раз производную \hat{z}_{sl} , можно найти среднее значение \hat{z}_{s1} с учетом весов отдельных определений:

$$\hat{z}_{s1} = \frac{\sum_{i=1}^k w_i \hat{z}_{sl}}{\sum_{i=1}^k w_i}, \quad (8.30)$$

где

$$w_i = 1/\sigma_{\hat{z}, sl}^2 = 2(i\Delta t)^2/\sigma^2. \quad (8.31)$$

В этом случае дисперсия среднего значения производной может быть найдена по формуле:

$$\sigma^2_{\widehat{z}, s_1} = 1 \left/ \sum_{i=1}^k \omega_i = \sigma^2 / 2 (\Delta t)^2 \sum_{i=1}^k i^2 \right.$$

Подставив (8.31) в (8.30), получим

$$\widehat{z}_{s_1} = \frac{2 (\Delta t)^2 \sigma^2 \sum_{i=1}^k i^2 \widehat{z}_{s_1}}{\sigma^2 2 (\Delta t)^2 \sum_{i=1}^k i^2} = \frac{\sum_{i=1}^k i^2 \widehat{z}_{s_1}}{\sum_{i=1}^k i^2}. \quad (8.32)$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1),$$

окончательно находим

$$\widehat{z}_{s_1} = 6 \sum_{i=1}^k i^2 \widehat{z}_{s_1} / k(k+1)(2k+1), \quad (8.33)$$

$$\sigma^2_{\widehat{z}, s_1} = 3\sigma^2 / (\Delta t)^2 k(k+1)(2k+1). \quad (8.34)$$

Аналогичным образом могут быть получены зависимости для определения среднего значения производной \widehat{z}_{s_2} и дисперсии этой оценки $\sigma^2_{\widehat{z}, s_2}$ при использовании соотношений (8.26) и (8.28):

$$\widehat{z}_{s_2} = 6 \sum_{i=1}^m i^2 \widehat{z}_{s_2} / m(m+1)(2m+1), \quad (8.35)$$

$$\sigma^2_{\widehat{z}, s_2} = \frac{65}{12} \frac{\sigma^2}{(\Delta t)^2 m(m+1)(2m+1)}. \quad (8.36)$$

И при этом случайная ошибка производной \widehat{z}_s тем меньше, чем больше интервал измеренных значений функции $z(t)$, используемых для численного дифференцирования.

При однократном определении производной \hat{z}_{s_i} методическая ошибка R_i определяется зависимостью (8.20).

При получении среднего значения производной \hat{z}_s по k вычислениям методическая ошибка найдется из формулы (8.33), где вместо \hat{z}_{s_i} необходимо подставить величины $|R_i|$, определяемые зависимостью (8.20). В этом случае

$$|R| = \frac{6 \sum_{i=1}^k i^2 |R_i|}{k(k+1)(2k+1)} \leq \frac{6 \sum_{i=1}^k i^2 |\ddot{z}_{\max}| i^2 (\Delta t)^2}{3! k(k+1)(2k+1)} \leq \frac{|\ddot{z}_{\max}| (\Delta t)^2 \sum_{i=1}^k i^4}{k(k+1)(2k+1)},$$

где $|\ddot{z}_{\max}|$ — максимальное на всем используемом интервале измерений значение третьей производной по времени от измеряемой функции. Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^k i^4 = k(k+1)(2k+1)(3k^2 + 3k - 1)/30,$$

получаем

$$|R| \leq |\ddot{z}_{\max}| (\Delta t)^2 (3k^2 + 3k - 1)/30. \quad (8.37)$$

Из (8.37) следует, что чем больше взят интервал численного дифференцирования координат, тем больше методическая ошибка $|R|$.

Таким образом, установлено, что выбор количества точек $2k$, измеренные значения функции $z(t)$ в которых используются для численного дифференцирования, должен осуществляться из условий удовлетворения двух противоречивых требований.

Если известны оценки величин $|\ddot{z}_{\max}|$ и σ , то, пользуясь полученными зависимостями, можно подобрать такие значения Δt и k , которые обеспечат заданную точность определения производной \dot{z}_s . Отметим, что на практике невозможно беспрестанно уменьшать шаг измерения Δt , получая при этом взаимно-некоррелированные измерения. Поэтому, задавшись определенным значением величины Δt , выбирают так называемое оптимальное

значение интервала дифференцирования или количество точек $2k$. Если необходимо использовать измерения, ошибки которых коррелированы между собой, то при проведении исследований за основу должны быть взяты зависимости типа (8.29).

В качестве величины, характеризующей суммарную ошибку оценки производной \hat{z}_s , возьмем сумму квадратов максимальной случайной ошибки дифференцирования и методической ошибки

$$f(k) = (3\sigma_{z,s})^2 + R^2. \quad (8.38)$$

Будем искать оптимальное значение $k_{\text{опт}}$ количества пар значений измеряемой функции, используемых для определения производной \dot{z}_s по формуле (8.33), из условия минимума функции (8.38), которая с учетом (8.34) и (8.37) может быть записана в виде

$$f(k) = \frac{27\sigma^2}{(\Delta t)^2} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} + \left[\frac{\ddot{z}_{\text{макс}} (\Delta t)^2}{30} \right]^2 (3k^2 + 3k - 1)^2. \quad (8.39)$$

Обозначим

$$A = 27\sigma^2/(\Delta t)^2; \quad B = [\ddot{z}_{\text{макс}} (\Delta t)^2/30]^2. \quad (8.40)$$

Тогда

$$f(k) = A/k(k+1)(2k+1) + B(3k^2 + 3k - 1)^2.$$

Из условия $\partial f(k)/\partial k = 0$ находим

$$-\frac{A(6k^2 + 6k + 1)}{(2k^3 + 3k^2 + k)^2} + 6B(6k^3 + 9k^2 + k - 1) = 0.$$

Отсюда с учетом (8.40) имеем

$$\frac{(6k^3 + 9k^2 + k - 1)(2k^3 + 3k^2 + k)^2}{6k^2 + 6k + 1} = \frac{4050\sigma^2}{(\Delta t)^6 (\ddot{z}_{\text{макс}})^2}. \quad (8.41)$$

Таким образом, получено выражение (8.41), используя которое можно подобрать целое число $k_{\text{опт}}$, обеспечивающее значение функции (8.39), близкое к минимуму.

При вычислениях значение $\ddot{z}_{\text{макс}}$ берут из расчета требуемой траектории движения ЛА. Если же требуемое

Движение неизвестно, то значение $z_{\text{макс}}$ находят численным дифференцированием измеренных координат. Так как величина $z_{\text{макс}}$ используется лишь для установления длины интервала дифференцирования, то погрешности определения производной $\dot{z}_{\text{макс}}$ не должны существенно сказываться на точности решения задачи.

Отметим, что формулы (8.26) и (8.35) практически не содержат методической ошибки дифференцирования, но несколько сложнее и определяют производную с большей случайной составляющей ошибки, чем формулы (8.18) и (8.33). Поэтому, определив с помощью зависимости (8.41) величину $k_{\text{опт}}$, полезно проверить, использование какой из формул — (8.33) или (8.35) позволяет найти значение производной \dot{z}_s с большей точностью.

Таблица 8.1

Номер точки	$t, \text{с}$	$h, \text{м}$	$D, \text{м}$	$\dot{D}, \text{м/с}$	$\ddot{D}, \text{м/с}^2$
1	0,0	685 411	685 430	-3 310,5	61,42
2	0,8	682 816	682 802	-3 261,1	62,14
3	1,6	680 217	680 213	-3 211,1	62,85
4	2,4	677 644	677 664	-3 160,5	63,57
5	3,2	675 141	675 156	-3 109,4	64,28
6	4,0	672 706	672 689	-3 057,7	64,99
7	4,8	670 260	670 264	-3 005,4	65,70
8	5,6	667 889	667 881	-2 952,6	66,41
9	6,4	665 538	665 540	-2 899,2	67,12
10	7,2	663 237	663 242	-2 845,2	67,82
11	8,0	660 955	660 988	-2 790,7	68,52
12	8,8	658 775	658 777	-2 735,6	69,21
13	9,6	656 588	656 611	-2 679,9	69,90
14	10,4	654 463	654 490	-2 623,8	70,58
15	11,2	652 385	652 413	-2 567,0	71,26
16	12,0	650 391	650 364	-2 509,8	71,94
17	12,8	648 356	648 354	-2 452,0	72,61

Поясним сказанное на примере. В табл. 8.1 приведены значения наклонной дальности D , радиальной скорости \dot{D} и ускорения \ddot{D} , полученные из расчета требуемой траектории, а также результаты измерений наклонной дальности h до ЛА, движущегося по требуемой траектории, на интервале от 0 до 12,8 с. Ошибки измерений взаимно некоррелированы, распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением $\sigma=20$ м. Требуется определить значение радиальной

скорости численным дифференцированием измеренных дальностей для середины интервала наблюдения (\dot{D}_9).

Используя формулу (8.33) для численного дифференцирования заданных значений ускорений, находим величину третьей производной $\ddot{D}_{\text{макс}} \approx \ddot{D}_9 = 0,8756 \text{ м/с}^3$. После этого из условия (8.41) можно определить оптимальное количество измерений, обработка которых по формуле (8.33) позволит найти искомую производную \dot{D}_9 с минимальной суммарной ошибкой (8.38). Для рассматриваемых условий $A = 0,16875 \cdot 10^5$; $B = 0,3489 \cdot 10^{-3}$; $4050\sigma^2 / (\Delta t)^6 (\ddot{D}_{\text{макс}})^2 = 0,806 \cdot 10^7$. Примем $k=7$. При этом

$$\frac{(6k^3 + 9k^2 + k - 1)(2k^3 + 3k^2 + k)^2}{6k^2 + 6k + 1} \approx 0,524 \cdot 10^7.$$

Если $k=8$, то

$$\frac{(6k^3 + 9k^2 + k - 1)(2k^3 + 3k^2 + k)^2}{6k^2 + 6k + 1} \approx 1,265 \cdot 10^7.$$

Из сравнения полученных результатов следует, что уравнение (8.41) приближенно удовлетворяют $k=7$ и $k=8$. Проверим, какая из этих величин обеспечивает меньшее значение функции (8.38):

$$f_1(7) = 29,8198; f_1(8) = 29,9147.$$

Таким образом, использование $k=7$ и $k=8$ обеспечивает примерно одинаковое значение критерия $f(k)$. Примем $k_{\text{опт}} = 7$.

Используя зависимости (8.18), (8.33), (8.34), (8.37) и (8.38) последовательно находим $\hat{D}_{9,1} = -2897,9 \text{ м/с}$; $\sigma_{\hat{D}_{9,1}}^2 = 2,23214 \text{ м}^2/\text{с}^2$; $\sigma_{\hat{D}_{9,1}} = 1,494 \text{ м/с}$; $|R| = 3,1195 \text{ м/с}$; $\sqrt{f_1(7)} = 5,461 \text{ м/с}$.

Расчет искомой производной \dot{D}_9 и ее дисперсии по формулам (8.26), (8.35), (8.36) соответственно дает

$$\hat{D}_{9,2} = -2905,7 \text{ м/с}; \sigma_{\hat{D}_{9,2}}^2 = 40,3026 \text{ м}^2/\text{с}^2; \sigma_{\hat{D}_{9,2}} = 6,348 \text{ м/с}.$$

Существенное увеличение среднего квадратического отклонения $\sigma_{\hat{D}_{9,2}}$ в сравнении с $\sigma_{\hat{D}_{9,1}}$ объясняется тем, что при применении зависимостей (8.25), (8.35) в рассматриваемом примере не используются измерения при $t=0,8; 2,4; 10,4; 12,0 \text{ с}$, т. е. сокращается объем используемой выборки измерений, в то время как при вычислении производной по зависимостям (8.18), (8.33) обработка подвергаются все измерения, содержащиеся в табл. 8.1.

Если принять, что случайные ошибки измерений отсутствуют ($\sigma=0$), то при применении формул (8.33) и (8.35) соответственно получим $\dot{D}_{9,1} = -2896,6$ м/с; $\dot{D}_{9,2} = -2899,2$ м/с.

Сравнение этих результатов с точным значением производной, приведенным в табл. 8.1 ($\dot{D}_9 = -2899,2$ м/с), показывает, что при отсутствии случайных ошибок измерений использование зависимости (8.35) позволяет получать значение производной практически без методической ошибки численного дифференцирования. Это дает возможность приближенно принять методическую ошибку численного дифференцирования измеренных координат по формуле (8.35), равной нулю.

$$\text{Тогда } \sqrt{f_2(\bar{T})} \approx 3\sigma_{\hat{D}_{9,2}} = 19,044 \text{ м/с.}$$

Из сравнения величин f_1 и f_2 , характеризующих суммарные ошибки определения производной \dot{D}_9 , следует, что в рассматриваемом примере из-за преобладающего влияния случайной составляющей ошибки нецелесообразно использование формулы численного дифференцирования (8.35), учитывающей все производные от измеряемой функции по времени до четвертой включительно. Более высокая точность определения искомой производной достигается при использовании менее сложной формулы (8.33), учитывающей лишь первую и вторую производные от измеряемой функции по времени.

Исследование ошибок определения вторых производных проводится аналогично. Вторые производные в средних точках выбранных интервалов вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{si} &= (z_{s-i} - 2z_s + z_{s+i}) / (i\Delta t)^2, \quad i = 1, 2, \dots, k; \\ \ddot{z}_{sl} &= (-z_{s-2l} + 16z_{s-l} - 30z_s + 16z_{s+l} - z_{s+2l}) / 12(\Delta t)^2, \\ & \quad l = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Методические ошибки $R(\ddot{z}_{si})$ и $R(\ddot{z}_{sl})$ вычисления вторых производных измеряемого процесса $z(t)$ по приближенным зависимостям (8.42) определяются соответственно выражениями

$$|R(\ddot{z}_{si})| \leq \frac{|z_{\text{макс}}^{(IV)}|}{12} (i\Delta t)^2,$$

$$|R(\ddot{z}_{sl})| \leq \frac{|z_{\text{макс}}^{(VI)}|}{90} (\Delta t)^4.$$

Дисперсии оценок вторых производных в случае некоррелированных случайных ошибок измерений соответственно равны

$$\sigma_{\hat{z}, si}^2 = 6\sigma^2/(l\Delta t)^4,$$

$$\sigma_{\hat{z}, si}^2 = 173\sigma^2/18(l\Delta t)^4.$$

Применяя критерий типа (8.38), можно рассмотренным способом установить оптимальное количество измерений, необходимых для оценивания второй производной по времени от измеряемой функции.

Методика, изложенная в данном параграфе, позволяет находить значения скоростных параметров движения ЛА по результатам измерения координат, используя оптимальную длину интервала численного дифференцирования измерений. Если же, кроме скоростных параметров, необходимо еще знать и сглаженные значения измеренных координатных параметров, то эта задача может быть решена на основе аппроксимации измерений многочленами по методике, рассмотренной в гл. 5.

9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ НА ОСНОВЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ

9.1. Постановка задачи

Сущность определения неуправляемого движения ЛА на основе статистической обработки результатов радиотехнических траекторных измерений заключается в следующем. Как отмечено в § 1.1, движение ЛА, рассматриваемое в «схеме материальной точки», будет определено, если удастся найти зависимость координат x_1, x_2, x_3 и проекций вектора скорости $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ центра масс ЛА в некоторой выбранной системе координат от времени t . Для определения движения ЛА с малыми методическими ошибками в качестве этой зависимости целесообразно использовать решение соответствующей системы дифференциальных уравнений движения. Интегрирование этих уравнений можно выполнить, если известны значе-

ния всех параметров математической модели движения ЛА, т. е. параметров траектории (начальных условий движения) и параметров, входящих в расчетные зависимости для ускорений, создаваемых действующими на ЛА силами.

Обозначим шесть начальных условий движения ЛА через q_1, q_2, \dots, q_6 и k параметров, входящих в выражения, описывающие ускорения движения ЛА, через q_7, q_8, \dots, q_l ; $l=6+k$. Тогда можно считать, что для любого момента времени t параметры движения $x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ являются функциями системы параметров математической модели движения ЛА q_1, q_2, \dots, q_l :

$$\begin{aligned} x_r &= x_r(t; q_1, q_2, \dots, q_l), \\ \dot{x}_r &= \dot{x}_r(t; q_1, q_2, \dots, q_l), \quad r=1, 2, 3. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Задача определения начальных условий движения q_1, q_2, \dots, q_6 может быть решена на основе математической обработки измерений, полученных от радиотехнических траекторных измерительных средств, ведущих наблюдения за движением ЛА. Так, если радиотехническая система в каждый фиксированный момент времени измеряет три координаты и три компоненты скорости ЛА (например, D — наклонную дальность до ЛА, γ — угол места ЛА, A — азимутальный угол, \dot{D} — радиальную скорость, $\dot{\gamma}$ и \dot{A} — скорости изменения угла места и азимутального угла), то за начальные условия движения можно принять соответствующим образом пересчитанные результаты измерений в некоторой точке траектории, принимаемой за начальную.

Если же в каждой точке измеряется по три координаты ЛА, то для получения начальных условий движения можно интегрированием выбранной системы дифференциальных уравнений движения решить краевую задачу, приняв за граничные условия соответствующие результаты измерений в двух выбранных точках. Рассмотренные задачи имеют единственные решения и если бы измерения выполнялись без ошибок, то в результате расчетов получались бы одни и те же значения параметров движения ЛА. В действительности же с помощью измерительных средств получают не истинные значения измеряемых параметров в определенные моменты времени, а величины, представляющие собой значения некоторых функций неизвестных истинных значений этих параметров и неизвестных ошибок, т. е. $h=f(z, \delta h)$.

Поэтому, если для определения начальных условий движения использовать описанный выше прием, то наличие ошибок в измерениях приведет к тому, что полученные значения искомым начальных условий могут существенно отличаться от их истинных значений.

Для того чтобы хотя бы частично компенсировать случайные ошибки измерений, обычно берут количество наблюдений значительно большим, чем требуется для определения неизвестных параметров, т. е. используют избыточную информацию. При этом появляется возможность находить значения и некоторых других параметров, знание которых необходимо для определения движения ЛА. Так, если некоторые из параметров q_7, q_8, \dots, q_i до контроля движения известны с точностью, недостаточной для решения поставленной задачи, и могут быть определены по результатам траекторных измерений, то эти параметры можно включить в число оцениваемых параметров и уточнять в результате статистической обработки траекторных измерений. Например, можно принять $q_7 = S_6$, где S_6 — баллистический коэффициент, входящий в выражение для ускорения, создаваемого аэродинамической силой лобового сопротивления, и уточнять этот коэффициент по результатам радиотехнических траекторных измерений.

Поэтому, не ограничивая общности постановки задачи, будем считать, что необходимо определить параметры q_1, q_2, \dots, q_n , где $l \geq n \geq 6$. Примем, что для получения значений искомым параметров q_1, q_2, \dots, q_n могут быть использованы результаты траекторных измерений m функций параметров движения ЛА в M точках на траектории.

Для удобства дальнейшего изложения введем однотипные обозначения для всех измерений следующим образом: z_i — истинные значения измеряемых функций; h_i — измеренные значения этих функций; i — номер измерения.

Поясним введенные обозначения. Пусть радиотехническая станция измеряет в каждой v -й точке траектории ($v=1, 2, \dots, M_1$) три координаты ($m_1=3$): наклонную дальность D , угол места γ , азимутальный угол A . При этом будет получено $N_1 = m_1 M_1$ измерений.

Если используется k станций, каждая из которых измеряет соответственно m_1, m_2, \dots, m_k функций в M_1, M_2, \dots, M_k точках на траектории, то общее количество

измерений $N = \sum_{j=1}^k m_j M_j$. Все измерения пронумеруем по порядку, начиная с первого измерения первого измерительного средства.

Под решением задачи определения неуправляемого движения ЛА будем понимать нахождение по выборке $\mathbf{H} = \{h_1, h_2, \dots, h_N\}$ результатов траекторных измерений n неизвестных параметров модели $q_1, q_2, \dots, q_n, l \geq n \geq 6$, и вычисление с помощью зависимостей (9.1) координат x_1, x_2, x_3 и проекций скорости $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ ЛА для заданных моментов времени t .

К вопросам определения параметров q_1, q_2, \dots, q_n естественнее всего подойти с позиций нахождения вероятностных оценок искомых параметров, т. е., подвергнув результаты измерений статистической обработке, найти из семейства интегральных кривых, заданного системой дифференциальных уравнений движения ЛА, ту интегральную кривую (среднеопытную траекторию), которая наилучшим образом, в смысле выбранного вероятностного критерия, удовлетворяет имеющейся выборке измерений.

Таким образом, перед началом обработки измерений необходимо выбрать систему дифференциальных уравнений движения ЛА, т. е. математическую модель движения ЛА.

Наземные радиотехнические траекторные средства измеряют некоторые функции параметров относительно движения ЛА, т. е. движения ЛА относительно вращающейся Земли. Поэтому целесообразно при обработке измерений использовать уравнения движения ЛА, записанные в проекциях на оси относительной системы координат. Наиболее часто используются уравнения (7.52) движения ЛА в гринвичской системе координат. Решения этих уравнений с помощью зависимостей, приведенных в гл. 7, достаточно просто могут быть пересчитаны в измерительную систему координат, связанную с соответствующим измерительным средством, а затем и в расчетные значения измеряемых функций, используемые в алгоритме статистической обработки измерений. Кроме того, правые части уравнений (7.52) определяются довольно простыми расчетными зависимостями, что также обуславливает удобство их использования и не требуется больших затрат машинного времени.

При статистической обработке траекторных измерений, полученных при наблюдении за полетом ИСЗ типа «Молния» в течение нескольких суток, более экономичным по затратам времени решения задачи на ЭВМ может оказаться использование уравнений движения ЛА в цилиндрической абсолютной системе координат (7.53).

Поэтому выбор математической модели движения ЛА, используемой при оценивании параметров q_1, q_2, \dots, q_n на основе статистической обработки траекторных измерений, должен проводиться дифференцированно для каждой конкретной практической задачи и учитывать количество измерений, интервалы времени, на которых они получены, тип траектории ЛА и некоторые другие факторы.

Основными методами нахождения значений искомых параметров q_1, q_2, \dots, q_n , определяющих при выбранной модели движение ЛА, являются статистические методы, использующие как априорную информацию об этих параметрах, так и результаты измерений, проводимых средствами наземного командно-измерительного комплекса и бортовыми измерительными средствами.

Из математической статистики известно, что одним из эффективных методов для отыскания оценок параметров по данным выборки, требующим минимума априорной информации об оцениваемых параметрах и ошибках измерений, является метод наименьших квадратов.

Рассмотрим применение этого метода для определения параметров q_1, q_2, \dots, q_n по результатам радиотехнических траекторных измерений. Примем, что ошибки измерений аддитивны, не имеют систематических составляющих $M[\delta h_i] = 0, i=1, 2, \dots, N$ и являются случайными величинами, характеризуемыми матрицей корреляционных моментов $K_N = \sigma_0^2 W^{-1}$, где σ_0^2 — неизвестный коэффициент; W — известная весовая матрица.

Указанные допущения об ошибках измерений объясняются следующим. В практике обработки радиотехнических траекторных измерений часто встречаются случаи, когда известны лишь приближенные значения дисперсий и нормированной корреляционной функции ошибок измерений. При этом целесообразно уточнять вероятностные характеристики ошибок измерений в процессе статистической обработки наблюдений совместно с определением искомых параметров. Так, например, если принять допущение о некоррелированности ошибок измере-

ний и задаться значениями весов измерений w_i , считая их равными $\sigma_{\text{шт}}^{-2}$, где $\sigma_{\text{шт}}^2$ — номинальное значение дисперсии ошибки i -го измерения, задаваемое в формуляре на данное измерительное средство, то, определив значение величины σ_0^2 , можно уточнить значение дисперсии $\sigma_i^2 = \sigma_0^2 w_i^{-1}$, характеризующей реальную точность измерений в данном опыте, т. е. произвести апостериорную оценку точности измерений.

Итак, требуется определить значения параметров q_1, q_2, \dots, q_n , связанные с измеряемыми функциями $z_i = z_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n)$ дифференцируемой зависимостью, и произвести оценку точности полученных результатов.

9.2. Оценивание неизвестных параметров математической модели движения летательного аппарата по результатам траекторных измерений

Расчетные зависимости для определения оценок искомых параметров на основе статистической обработки экспериментальных данных методом наименьших квадратов приведены в гл. 2. В данном параграфе рассмотрим особенности применения этих зависимостей для оценивания неизвестных параметров математической модели движения ЛА по результатам радиотехнических траекторных измерений.

Функции, измеряемые траекторными средствами, представляют собой нелинейные зависимости от искомых параметров модели \mathbf{Q} . Система нормальных уравнений для отыскания МНК-оценок этих параметров записана в § 2.7 и в обозначениях данной задачи имеет вид

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} [\mathbf{H} - \hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q})] = 0, \quad (9.2)$$

где $\mathbf{A} = \partial \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{Q}}) / \partial \hat{\mathbf{Q}}$ — матрица частных производных измеряемых функций по искомым параметрам модели; \mathbf{H} — вектор измерений.

Методы решения системы нормальных уравнений рассмотрены в § 2.7. Применение этих методов предусматривает линеаризацию измеряемых функций в окрестности, определяемой предварительными приближенными значениями искомых параметров математической модели движения ЛА, которые условимся называть параметрами нулевого приближения.

При проведении контроля точности пусков ЛА в качестве начальных условий движения нулевого приближения $q_1^{(0)}, q_2^{(2)}, \dots, q_6^{(0)}$ могут быть использованы значения соответствующих величин на момент отделения ЛА от ракеты-носителя, полученные расчетом при подготовке исходных данных для пуска. При регулярном слежении за ЛА в качестве параметров нулевого приближения $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_6^{(0)}$ можно принять прогнозируемые на момент начала очередного контроля за движением ЛА значения величин q_1, q_2, \dots, q_6 (координат и проекций скорости ЛА или оскулирующих параметров орбиты в зависимости от используемых при обработке измерений уравнений движения).

В тех случаях, когда действительная траектория ЛА существенно отличается от расчетной или отсутствуют какие-либо априорные сведения о траектории, значения $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_6^{(0)}$ могут быть определены на основе статистической обработки части полученных результатов траекторных измерений (например, на основе аппроксимирования измерений полиномами способом, рассмотренным в § 5.2).

В качестве параметров нулевого приближения для других уточняемых величин q_7, q_8, \dots, q_n принимают их соответствующие номинальные значения.

Решение системы нормальных уравнений (9.2) дает значения оценок искомых параметров $\hat{\mathbf{Q}} = \|\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_n\|^T$.

Оценку точности полученных оценок искомых параметров можно произвести на основе использования зависимости (2.27):

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{Q}}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{B}^{-1}, \quad (9.3)$$

где $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{Q}}}$ — корреляционная матрица вектора оценок искомых параметров; $\hat{\sigma}_0^2$ — оценка дисперсии векторного фиктивного измерения, вес которого равен единице, определяемая по формуле (2.30), имеющей при используемых в данной задаче обозначениях вид

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{[\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{Q}})]^T \mathbf{W} [\mathbf{H} - \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{Q}})]}{N - n}, \quad (9.4)$$

В рассматриваемом случае величина σ_0 характеризует меру разброса измерений относительно среднеопытной траектории, определяемой параметрами \hat{Q} , полученными в результате решения задачи.

Изложенная методика оценивания вектора параметров Q по результатам измерений основана на предположении, что траекторные измерения содержат лишь случайные ошибки. В действительности же не всегда удается специальными мерами исключить из результатов измерений систематические ошибки.

В § 2.7 приведена методика совместного оценивания искоемых параметров и систематических ошибок измерений при обработке измерений методом наименьших квадратов. Рассмотрим на примере, как эта методика может быть использована при оценивании начальных условий движения ИСЗ по результатам радиотехнических траекторных измерений, содержащих случайные и постоянные систематические ошибки.

Для иллюстрации работы указанной методики был смоделирован на ЭВМ процесс получения и обработки измерений. При этом было принято, что пятью радиодальномерными станциями ведется наблюдение за полетом ИСЗ, движущегося по орбите с эксцентриситетом $e=0,04$ и периодом обращения $T=90$ мин. Каждая станция проводит измерения в зоне видимости спутника с частотой одно измерение в 3 с. Всего получено около 500 измерений. Результаты измерений искажены независимыми случайными ошибками, характеризуемыми нулевыми математическими ожиданиями и средними квадратическими отклонениями $\sigma=30$ м.

При моделировании принято, что известны точные значения начальных условий движения и начальные условия нулевого приближения, соответствующие моменту времени t_0 (табл. 9.1).

Измерения обрабатывались методом наименьших квадратов. Полученные при этом оценки начальных условий движения, средние квадратические отклонения этих оценок и разности между соответствующими оценками и точными значениями начальных условий движения приведены в табл. 9.1 (вариант 1). После этого к измерениям каждой станции были прибавлены постоянные для данного измерительного средства систематические ошибки δD_k ($k=1, 2, \dots, 5$), величины которых приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.1

Параметр	Точные значения	Нулевое приближение	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
v_{x_0} , м/с	-7 098,73	-7 085,00	-7 098,73	-7 098,32	-7 098,76
v_{y_0} , м/с	2 231,61	2 240,00	2 231,63	2 230,73	2 231,63
v_{z_0} , м/с	593,51	605,00	593,51	592,76	593,51
x_0 , м	1 595 858,6	1 590 000,0	1 595 860,4	1 595 786,3	1 595 865,9
y_0 , м	3 781 454,6	3 790 000,0	3 781 449,5	3 781 459,3	3 781 466,5
z_0 , м	5 157 761,4	5 130 000,0	5 157 758,9	5 157 823,4	5 157 766,3
$\sigma_{\hat{v}_{x_0}}$, м/с	—	—	0,01	—	0,04
$\sigma_{\hat{v}_{y_0}}$, м/с	—	—	0,03	—	0,13
$\sigma_{\hat{v}_{z_0}}$, м/с	—	—	0,04	—	0,16
$\sigma_{\hat{x}_0}$, м	—	—	2,54	—	13,06
$\sigma_{\hat{y}_0}$, м	—	—	4,07	—	10,66
$\sigma_{\hat{z}_0}$, м	—	—	5,02	—	14,79
Δv_{x_0} , м/с	—	-13,73	0,00	-0,41	0,03
Δv_{y_0} , м/с	—	-8,39	-0,02	0,88	0,02
Δv_{z_0} , м/с	—	-11,49	0,00	0,75	0,00
Δx_0 , м	—	5 858,6	-1,8	72,3	-7,3
Δy_0 , м	—	-8 545,4	5,1	-5,2	-11,9
Δz_0 , м	—	27 761,4	2,5	62,0	-4,9

Эти измерения были вновь подвергнуты обработке по методу наименьших квадратов с оцениванием шести начальных условий движения (вариант 2) и с оцениванием одиннадцати величин: шести начальных условий движения и пяти постоянных систематических ошибок измерений (вариант 3). Результаты оценивания начальных условий движения приведены в табл. 9.1, а результаты оценивания систематических ошибок измерений — в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Параметр	Номер измерительной станции				
	1	2	3	4	5
δD , м	5,0	-61,5	117,0	-37,7	106,0
$\delta \bar{D}$, м	3,3	-76,6	104,8	-54,9	106,2
$\sigma \delta \bar{D}$, м	11,7	8,2	13,8	12,0	14,3

Далее по зависимостям (2.57) и (2.58) были рассчитаны матрицы T и \hat{R} , затем найдены значения сумм дисперсий оценок проекций начальной скорости движения ИСЗ: $Sp \hat{R}(v) = 0,6118$; $Sp T(v) = 0,0402$.

В соответствии с рекомендациями, сделанными в § 2.5, при выполнении неравенства $Sp \hat{R}(v) > Sp T(v)$ целесообразно в качестве оценок искомых начальных условий движения принять оценки, найденные при совместном оценивании начальных условий движения и постоянных систематических ошибок измерений. Сравнительный анализ результатов оценивания начальных условий движения и отклонений их от точных значений начальных условий показывает, что при наличии в измерениях постоянных систематических ошибок совместное оценивание начальных условий движения и систематических ошибок измерений позволило в рассматриваемом примере получить оценки начальных условий движения, близкие к их точным значениям. Таким образом, постоянные систематические ошибки измерений в случае необходимости могут быть включены в число оцениваемых параметров и определены совместно с искомыми начальными условиями движения.

Для определения искомых параметров q_j ($j = 1, 2, \dots, n$) и величины σ_j по изложенной методике могут быть использованы разнотипные измерения ($D, \dot{D}, A, \gamma, \dot{A}, \dot{\gamma}, \cos \Theta_x$ и др.), полученные с помощью одного или нескольких измерительных средств. Приведения измерений к единым моментам времени не требуется. Необходимо лишь, чтобы расчетные значения измеряемых параметров соответствовали моментам измерений. Этими свойствами рассмотренного метода обработки измерений, наряду с высокой точностью получаемых результатов, объясняется то обстоятельство, что в настоящее время определение движения ЛА основано на применении данного метода для статистической обработки траекторных измерений.

Заметим, что изложенная методика получения искомых параметров основана на линейаризации измеряемых функций. Неучет производных второго и более высокого порядков от измеряемых функций по искомым параметрам приводит к необходимости решения системы нормальных уравнений (9.2) методами последовательных

приближений или скорейшего спуска (см. § 2.7). Сходимость процесса сближений зависит от степени соответствия параметров нулевого приближения их истинным значениям, состава, точности и количества измерений, вида траектории, а также от расположения измерительных средств относительно траектории.

Метод скорейшего спуска применяется при отсутствии достаточно хорошего нулевого приближения определяемых параметров или при обработке измерений низкой точности, когда метод Ньютона не дает решения задачи. Однако при этом необходимо иметь в виду, что метод скорейшего спуска в статистической задаче обработки траекторных измерений существенно повышает надежность методики обработки, но уступает по скорости решения задачи методом Ньютона. Поэтому при решении задачи целесообразно совмещение обоих методов, в котором методу Ньютона, как более быстродействующему, должно быть отдано предпочтение. Метод скорейшего спуска привлекается лишь в случае нарушения нормальной сходимости процесса приближений, которое проявляется в росте среднего квадратического отклонения $\hat{\sigma}_0$ на s -м приближении в сравнении с значением его на $(s-1)$ -м приближении. Это означает, что полученные на s -м приближении оценки искомых параметров уводят от требуемого минимума квадратичной формы (2.87) и в этом смысле являются ошибочными. Используя оценки искомых параметров, полученные в $(s-1)$ -м приближении, привлекают метод скорейшего спуска для определения направления движения к минимуму. Таким способом делают один или несколько шагов и вновь продолжают процесс решения системы нормальных уравнений методом Ньютона.

В тех же случаях, когда не удается получить начальные условия движения ЛА нулевого приближения, т. е. отсутствуют априорные сведения об оцениваемых параметрах, может быть использован модифицированный метод последовательных приближений (см. § 2.7).

Как отмечалось в гл. 5, отдельные результаты измерений, кроме случайных и систематических ошибок, могут еще содержать и грубые ошибки. Эти измерения называют аномальными и стремятся исключить из общей совокупности измерений. Методика выявления и исключения аномальных результатов измерений на этапе предварительной обработки измерений приведена в § 5.4.

Однако рассмотренным способом не удается полностью исключить из обработки все аномальные измерения. Так, например, невозможно в процессе получения измерений скорректировать или исключить измерения, имеющие ошибку во временной привязке, или измерения, содержащие грубую систематическую ошибку. Поэтому выявление аномальных измерений необходимо вести и в процессе последующей статистической обработки измерений.

Осуществляется это следующим образом. В каждом приближении решения задачи по определению искомым параметров производится отбор измерений, подлежащих обработке. Это достигается тем, что в формировании матрицы системы нормальных уравнений (9.2) участвуют лишь те измерения h_i , для которых выполняются условия

$$|h_i^* - z_i(\hat{\mathbf{Q}})| < \Delta_{\text{доп}i}, \quad (9.5)$$

где $z_i(\hat{\mathbf{Q}})$ — расчетное значение измеряемой функции, полученное при использовании параметров $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_n$ предыдущего приближения; $\Delta_{\text{доп}i}$ — допустимое отклонение для соответствующей измеряемой функции.

Величины допустимых отклонений определяются из приближенной формулы

$$\Delta_{\text{доп}i} = 3\sigma_i \hat{\sigma}_0, \quad (9.6)$$

где σ_i — априорно заданное значение среднего квадратического отклонения i -го измерения; $\hat{\sigma}_0$ — оценка среднего квадратического отклонения некоторого измерения, вес которого равен единице.

В процессе последовательных приближений величина $\hat{\sigma}_0$ уменьшается вследствие уточнения параметров $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_n$ и исключения аномальных измерений. Анализ практики обработки измерений показывает, что осуществление рассмотренных этапов проверки измерений на аномальность позволяет достаточно надежно выявить и исключить из обработки результаты аномальных измерений, что приводит к повышению точности и достоверности получаемых оценок искомым параметров.

Из рассмотрения методики определения параметров \mathbf{Q} следует, что в каждом приближении при использовании для решения нормальных уравнений метода после-

довательных приближений или на каждом шаге интегрирования уравнений (2.105) при применении метода скорейшего спуска производится вычисление матрицы C , содержащей разности между измеренными и расчетными значениями измеряемых функций, и матрицы B , включающей производные от измеряемых функций по искомым параметрам. Таким образом, можно заключить, что решение задачи определения неуправляемого движения ЛА по результатам статистической обработки измерений складывается из следующих этапов:

1) определение значений искомых параметров нулевого приближения (в тех случаях, когда это возможно);

2) получение расчетных значений измеряемых функций для всех моментов измерений при каждом приближении;

3) вычисление частных производных от измеряемых функций по искомым параметрам на все моменты измерений;

4) уточнение оценок искомых параметров решением системы нормальных уравнений;

5) определение параметров движения ЛА для заданных моментов времени на основе решения уравнений движения с использованием полученных оценок параметров $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_n$.

Общее количество измерений, используемых для определения параметров q_1, q_2, \dots, q_n , может быть очень большим. Прогнозирование движения ЛА также может вестись на продолжительное время. Это приводит к тому, что время, затрачиваемое на ЭВМ для решения задачи определения движения ЛА на основе статистической обработки траекторных измерений, может оказаться недопустимо большим. Поэтому возникает задача выбора таких алгоритмов решения перечисленных выше частных задач, которые при условии обеспечения заданной точности, решения требовали бы минимальных затрат машинного времени.

Задача оценивания параметров Q решена в данном параграфе с учетом этих требований, но в предположении, что известны расчетные значения измеряемых функций $z_i = z_i(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_n)$ и частные производные a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, n$). Расчетные значения измеряемых параметров определяют интегрированием уравнений движения ЛА и пересчетом полученных парамет-

ров движения в измеряемые функции по зависимостям, приведенным в гл. 7.

Получению зависимостей, с помощью которых могут быть определены значения частных производных от измеряемых функций по начальным условиям движения q_1, q_2, \dots, q_6 , посвящен следующий параграф.

9.3. Определение частных производных от измеряемых функций по искомым параметрам

Разработке методов расчета частных производных от измеряемых функций по оцениваемым параметрам

$$a_{ij} = \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, 6), \quad (9.7)$$

необходимых для решения задачи определения искомых параметров Q и оценки их точности, в практике обработки траекторных измерений придается очень большое значение. Объясняется это тем, что время работы ЭВМ, затрачиваемое на решение задачи определения движения ЛА на основе статистической обработки результатов траекторных измерений, в основном определяется временем вычисления частных производных (9.7) и параметров движения ЛА. При этом, как показывают исследования, на расчет производных (9.7) может иногда затрачиваться до 80% общего времени решения задачи. Перед рассмотрением конкретных методов расчета искомых частных производных (9.7) остановимся на некоторых общих положениях, используемых во всех этих методах.

При известном законе движения для определения параметров движения центра масс ЛА p_k ($k=1, 2, \dots, 6$) достаточно задать численное значение некоторого параметра v , непрерывно изменяющегося в процессе движения ЛА. В качестве этого параметра может быть выбрано, например, время полета t , угловое расстояние от некоторого фиксированного направления и т. п. Основным условием, которое должно удовлетворяться при выборе параметра v , является требование однозначного соответствия между положением ЛА и величиной v .

При $v=t$ в качестве величин p_k обычно принимают координаты и составляющие вектора скорости ЛА в какой-либо системе координат. Если в качестве параметра v принята одна из координат, то величинами p_k могут

Допустим, что известна матрица $\left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\|$, связывающая вариации параметров движения p_k с вариациями параметров траектории q_j при $v = \text{const}$, и возникает необходимость в составлении аналогичной матрицы для какой-то другой системы параметров движения p'_k ($k=1, 2, \dots, 6$) и параметров траектории q'_j ($j=1, 2, \dots, 6$). Для решения поставленной задачи воспользуемся тем, что вариации рассматриваемых первоначальных и измененных величин связаны зависимостями вида:

$$\begin{aligned} \Delta p' &= \left\| \frac{\partial p'_1, p'_2, \dots, p'_6}{\partial p_1, p_2, \dots, p_6} \right\| \Delta p; & (9.10) \\ \Delta q &= \left\| \frac{\partial q_1, q_2, \dots, q_6}{\partial q'_1, q'_2, \dots, q'_6} \right\| \Delta q'. \end{aligned}$$

Умножая левую и правую части уравнения (9.9) слева на матрицу $\left\| \frac{\partial p'_1, p'_2, \dots, p'_6}{\partial p_1, p_2, \dots, p_6} \right\|$ и используя зависимости (9.10), находим

$$\begin{aligned} \Delta p' &= \left\| \frac{\partial p'_1, p'_2, \dots, p'_6}{\partial p_1, \partial p_2, \dots, p_6} \right\| \left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\| \times \\ &\quad \times \left\| \frac{\partial q_1, q_2, \dots, q_6}{\partial q'_1, q'_2, \dots, q'_6} \right\|. & (9.11) \end{aligned}$$

Входящие в выражение (9.11) матрицы частных производных

$$\left\| \frac{\partial p'_1, p'_2, \dots, p'_6}{\partial p_1, p_2, \dots, p_6} \right\| \text{ и } \left\| \frac{\partial q_1, q_2, \dots, q_6}{\partial q'_1, q'_2, \dots, q'_6} \right\|$$

определяют путем соответствующего преобразования параметров движения ЛА из одной системы координат в другую (см. § 7.1).

Для расчета частных производных от текущих параметров движения ЛА по параметрам траектории в выбранной системе координат, т. е. матрицы

$$\left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\|, & (9.12)$$

используются следующие методы: метод конечных разностей; метод вариаций; методы, основанные на применении аналитических зависимостей теории кеплерова движения.

Рассмотрим сущность этих методов с тем, чтобы можно было оценить достоинства и недостатки метода и установить области его целесообразного использования.

9.3.1. Метод конечных разностей

При использовании этого метода частные производные (9.12) определяются численным дифференцированием по следующей схеме.

Задаются начальными условиями

$$\tilde{q}_i = q_i^{(0)} + \Delta \tilde{q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (9.13)$$

где $q_i^{(0)}$ — начальные условия нулевого приближения в используемой системе координат; $\Delta \tilde{q}_1 \neq 0$; $\Delta \tilde{q}_2 = \Delta \tilde{q}_3 = \Delta \tilde{q}_4 = \Delta \tilde{q}_5 = \Delta \tilde{q}_6 = 0$ при вычислении производных $\left(\frac{\partial p_{kl}}{\partial q_1}\right)_{t_0}$ ($k = 1, 2, \dots, 6$; $l = 1, 2, \dots, M$); $\Delta \tilde{q}_2 \neq 0$; $\Delta \tilde{q}_1 = \Delta \tilde{q}_3 = \Delta \tilde{q}_4 = \Delta \tilde{q}_5 = \Delta \tilde{q}_6 = 0$ при вычислении производных $\left(\frac{\partial p_{kl}}{\partial q_2}\right)_{t_0}$ и т. д.; M — количество точек на траектории, в которых получены измерения.

По начальным условиям (9.13) интегрированием системы уравнений движения ЛА рассчитываются значения параметров движения \tilde{p}_{klj} ($k, j = 1, 2, \dots, 6$; $l = 1, 2, \dots, M$). После этого принимаются новые начальные условия $\tilde{q}_i = q_i^{(0)} - \Delta \tilde{q}_i$, $i = 1, 2, \dots, 6$, которые определяются так же, как и начальные условия (9.13). При этих начальных условиях снова интегрируется система уравнений движения ЛА и для тех же моментов времени определяются параметры движения \tilde{p}_{klj} . Расчет производных ведется по формулам

$$\left(\frac{\partial p_{kl}}{\partial q_j}\right)_{t_0} = \frac{\tilde{p}_{klj} - \tilde{p}_{klj}}{2\Delta \tilde{q}_j}. \quad (9.14)$$

В результате получают все требуемые производные от параметров движения p_{kl} по начальным условиям q_j ($j, k = 1, 2, \dots, 6$; $l = 1, 2, \dots, M$).

Однако рассмотренный метод определения частных производных (9.12) связан с большими затратами машинного времени, так как для получения расчетных

значений параметров движения и определения величин этих параметров, соответствующих плюсовым и минусовым приращением начальных условий, требуется 13 раз интегрировать систему уравнений движения. Поэтому в целях сокращения расхода машинного времени для расчета частных производных часто используют более простую зависимость

$$\left(\frac{\partial p_{kl}}{\partial q_j} \right)_{t_0} = \frac{\tilde{p}_{klj} - p_{kl}^{(0)}}{\Delta \tilde{q}_j}, \quad (9.15)$$

где $p_{kl}^{(0)}$ — значения параметров движения, рассчитанные при начальных условиях нулевого приближения.

Проведенными исследованиями установлено, что при тщательном подборе величин приращений начальных условий $\Delta \tilde{q}_j$ погрешности расчета производных, обусловленные применением формулы (9.15), практически не сказываются на точности оценивания параметров траектории. В то же время применение для расчета производных формулы (9.15) позволяет уменьшить примерно вдвое время, затрачиваемое при использовании (9.14).

9.3.2. Метод вариаций

Для расчета частных производных от параметров движения по начальным условиям можно использовать уравнения в вариациях. Рассмотрим этот метод применительно к изучению движения ЛА в гринвичской системе координат.

Обозначим матрицу частных производных от текущих параметров движения по начальным условиям через

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{\Gamma}}{\partial x_{\Gamma 0}} & \frac{\partial x_{\Gamma}}{\partial y_{\Gamma 0}} & \frac{\partial x_{\Gamma}}{\partial z_{\Gamma 0}} & \frac{\partial \dot{x}_{\Gamma}}{\partial x_{\Gamma 0}} & \frac{\partial \dot{x}_{\Gamma}}{\partial y_{\Gamma 0}} & \frac{\partial \dot{x}_{\Gamma}}{\partial z_{\Gamma 0}} \\ \frac{\partial y_{\Gamma}}{\partial x_{\Gamma 0}} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial z_{\Gamma}}{\partial x_{\Gamma 0}} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \dot{x}_{\Gamma}}{\partial x_{\Gamma 0}} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \dot{y}_{\Gamma}}{\partial x_{\Gamma 0}} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \dot{z}_{\Gamma}}{\partial x_{\Gamma 0}} & \frac{\partial \dot{z}_{\Gamma}}{\partial y_{\Gamma 0}} & \frac{\partial \dot{z}_{\Gamma}}{\partial z_{\Gamma 0}} & \frac{\partial \dot{x}_{\Gamma}}{\partial x_{\Gamma 0}} & \frac{\partial \dot{x}_{\Gamma}}{\partial y_{\Gamma 0}} & \frac{\partial \dot{x}_{\Gamma}}{\partial z_{\Gamma 0}} \end{pmatrix}. \quad (9.16)$$

Выведем систему дифференциальных уравнений, интегрирование которых позволит определить искомую матрицу производных \mathbf{D} . Для этого введем вектор-столбец

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\Gamma \\ y_\Gamma \\ z_\Gamma \\ \dot{x}_\Gamma \\ \dot{y}_\Gamma \\ \dot{z}_\Gamma \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

и запишем уравнения движения ЛА (7.52) в виде

$$\dot{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \\ \dot{m}_4 \\ \dot{m}_5 \\ \dot{m}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_\Gamma \\ \dot{y}_\Gamma \\ \dot{z}_\Gamma \\ \ddot{x}_\Gamma \\ \ddot{y}_\Gamma \\ \ddot{z}_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_4 & & & & & \\ & m_5 & & & & \\ & & m_6 & & & \\ \ddot{x}_\Gamma(m_1, m_2, \dots, m_6) & & & & & \\ \ddot{y}_\Gamma(m_1, m_2, \dots, m_6) & & & & & \\ \ddot{z}_\Gamma(m_1, m_2, \dots, m_6) & & & & & \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M} \quad (9.18)$$

Пользуясь методом малых отклонений, представим дифференциал вектора (9.18) в виде:

$$\Delta \dot{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \Delta \dot{m}_1 \\ \Delta \dot{m}_2 \\ \Delta \dot{m}_3 \\ \Delta \dot{m}_4 \\ \Delta \dot{m}_5 \\ \Delta \dot{m}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta m_4 \\ \Delta m_5 \\ \Delta m_6 \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \ddot{x}_\Gamma}{\partial m_i} \Delta m_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \ddot{y}_\Gamma}{\partial m_i} \Delta m_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \ddot{z}_\Gamma}{\partial m_i} \Delta m_i \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

Отсюда получаем следующее векторно-матричное соотношение между $\Delta \dot{\mathbf{M}}$ и $\Delta \mathbf{M}$:

$$\Delta \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{G}(t) \Delta \mathbf{M}, \quad (9.20)$$

В котором квадратная матрица шестого порядка $\mathbf{G}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{G}(t) = \begin{vmatrix} 0_3 & \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{F}_p & \mathbf{F}_v \end{vmatrix}, \quad (9.21)$$

где 0_3 — нулевая квадратная матрица третьего порядка; \mathbf{E}_3 — единичная матрица третьего порядка;

$$\mathbf{F}_p = \begin{vmatrix} \frac{\partial \ddot{x}_r}{\partial x_r} & \frac{\partial \ddot{x}_r}{\partial y_r} & \frac{\partial \ddot{x}_r}{\partial z_r} \\ \frac{\partial \ddot{y}_r}{\partial x_r} & \frac{\partial \ddot{y}_r}{\partial y_r} & \frac{\partial \ddot{y}_r}{\partial z_r} \\ \frac{\partial \ddot{z}_r}{\partial x_r} & \frac{\partial \ddot{z}_r}{\partial y_r} & \frac{\partial \ddot{z}_r}{\partial z_r} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{F}_v = \begin{vmatrix} \frac{\partial \ddot{x}_r}{\partial \dot{x}_r} & \frac{\partial \ddot{x}_r}{\partial \dot{y}_r} & \frac{\partial \ddot{x}_r}{\partial \dot{z}_r} \\ \frac{\partial \ddot{y}_r}{\partial \dot{x}_r} & \frac{\partial \ddot{y}_r}{\partial \dot{y}_r} & \frac{\partial \ddot{y}_r}{\partial \dot{z}_r} \\ \frac{\partial \ddot{z}_r}{\partial \dot{x}_r} & \frac{\partial \ddot{z}_r}{\partial \dot{y}_r} & \frac{\partial \ddot{z}_r}{\partial \dot{z}_r} \end{vmatrix}. \quad (9.22)$$

Справедливость (9.20) можно проверить путем непосредственного умножения матрицы $\mathbf{G}(t)$ на вектор $\Delta \mathbf{M}$ и сравнения с (9.19).

Матрица $\mathbf{G}(t)$ может быть определена аналитически с помощью уравнений движения ЛА, записанных в гл. 7. Так, например, при использовании уравнений движения ЛА в гринвичской системе координат (7.52) производные, являющиеся элементами матрицы $\mathbf{G}(t)$, определяются зависимостями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ddot{x}_r}{\partial x_r} &= g_r \frac{1}{r} + \left(A - g_r \frac{1}{r} \right) \frac{x_r^2}{r^2}; & \frac{\partial \ddot{x}_r}{\partial \dot{x}_r} &= 0; \\ \frac{\partial \ddot{x}_r}{\partial y_r} &= \left(A - g_r \frac{1}{r} \right) \frac{x_r y_r}{r^2}; & \frac{\partial \ddot{x}_r}{\partial \dot{y}_r} &= 2\Omega_3; \\ \frac{\partial \ddot{x}_r}{\partial z_r} &= \left(A - g_r \frac{1}{r} - 15 \frac{\pi_2}{r^5} \right) \frac{x_r z_r}{r^2}; & \frac{\partial \ddot{x}_r}{\partial \dot{z}_r} &= 0; \\ \frac{\partial \ddot{y}_r}{\partial x_r} &= \left(A - g_r \frac{1}{r} \right) \frac{x_r y_r}{r^2}; & \frac{\partial \ddot{y}_r}{\partial \dot{x}_r} &= -2\Omega_3; \\ \frac{\partial \ddot{y}_r}{\partial y_r} &= \left(A - g_r \frac{1}{r} \right) \frac{y_r^2}{r^2} + g_r \frac{1}{r}; & \frac{\partial \ddot{y}_r}{\partial \dot{y}_r} &= 0; \\ \frac{\partial \ddot{y}_r}{\partial z_r} &= \left(A - g_r \frac{1}{r} - 15 \frac{\pi_2}{r^5} \right) \frac{y_r z_r}{r^2}; & \frac{\partial \ddot{y}_r}{\partial \dot{z}_r} &= 0; \\ \frac{\partial \ddot{z}_r}{\partial x_r} &= \left(A - g_r \frac{1}{r} - 15 \frac{\pi_2}{r^5} \right) \frac{x_r z_r}{r^2}; & \frac{\partial \ddot{z}_r}{\partial \dot{x}_r} &= 0; \end{aligned} \quad (9.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ddot{z}_r}{\partial y_r} &= \left(A - g_r \frac{1}{r} - 15 \frac{\pi_2}{r^5} \right) \frac{y_r z_r}{r^2}; \quad \frac{\partial \ddot{z}_r}{\partial y_r} = 0; \\ \frac{\partial \ddot{z}_r}{\partial z_r} &= \left(A - g_r \frac{1}{r} - 15 \frac{\pi_2}{r^5} \right) \frac{z_r^2}{r^2} + g_r \frac{1}{r} - \\ &- 3 \frac{\pi_2}{r^5} \left(5 \frac{z_r^2}{r^2} - 1 \right) - \Omega^2 z_r; \quad \frac{\partial \ddot{z}_r}{\partial z_r} = 0, \end{aligned}$$

где

$$A = 2 \frac{\mu}{r^3} + 3 \frac{\pi_2}{r^5} \left(15 \frac{z_r^2}{r^2} - 2 \right) + \Omega^2 z_r; \quad \pi_2 = \mu r^2 C_{20}.$$

При записи уравнений (9.23) ввиду малости опущены составляющие от ускорения силы лобового сопротивления и слагаемые, имеющие коэффициент C_{40} , получающиеся при дифференцировании проекций ускорения силы тяжести.

Рассмотрим соотношение (9.20), которое представим в виде

$$\Delta \frac{dM}{dt} = \frac{d\Delta M}{dt} = G(t) \Delta M.$$

Разделим левую и правую части последнего выражения на постоянное приращение начального значения Δm_{j_0} , так что

$$\frac{1}{\Delta m_{j_0}} \frac{d\Delta M}{dt} = G(t) \frac{\Delta M}{\Delta m_{j_0}}$$

или, поскольку Δm_{j_0} постоянно,

$$\frac{d}{dt} \frac{\Delta M}{\Delta m_{j_0}} = G(t) \frac{\Delta M}{\Delta m_{j_0}}, \quad j = 1, 2, \dots, 6. \quad (9.24)$$

Так как ΔM есть вектор-столбец, определяемый как дифференциал (9.17), то при $\Delta m_{j_0} \rightarrow 0$ отношения конечных разностей стремятся к точным значениям производных $\Delta M / \Delta m_{j_0} \rightarrow \partial M / \partial m_{j_0}$ или же (в скалярной форме) $\Delta m_i / \Delta m_{j_0} \rightarrow \partial m_i / \partial m_{j_0}$ для всех соответствующих значений индексов i и j . Следовательно, выражение (9.24) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial m_{j_0}} = [G(t)] \frac{\partial M}{\partial m_{j_0}}. \quad (9.25)$$

Отметим, что (9.25) при $j=1$ представляет собой вектор-столбец, компоненты которого суть уравнения

относительно скоростей изменения m_1, m_2, \dots, m_6 по $m_{10} = x_{r_0}$, т. е. относительно

$$\frac{\partial x_r}{\partial x_{r_0}}, \frac{\partial y_r}{\partial x_{r_0}}, \frac{\partial z_r}{\partial x_{r_0}}, \frac{\partial \dot{x}_r}{\partial x_{r_0}}, \frac{\partial \dot{y}_r}{\partial x_{r_0}}, \frac{\partial \dot{z}_r}{\partial x_{r_0}}.$$

Если $j=2$, то (9.25) представляет собой другой вектор-столбец с компонентами, являющимися уравнениями относительно скоростей изменения m_1, m_2, \dots, m_6 по $m_{20} = y_{r_0}$ и т. д. Следовательно, индекс $j=1$ соответствует первому столбцу матрицы \mathbf{D} , определяемой выражением (9.16), индекс $j=2$ — второму столбцу матрицы \mathbf{D} и т. д. Таким образом, можно заменить (9.25) матричным уравнением

$$\dot{\mathbf{D}} = [\mathbf{G}(t)] \mathbf{D}, \quad (9.26)$$

называемым обычно вариационным уравнением по отношению к системе (9.18).

Начальные условия для интегрирования (9.26) можно получить, если непосредственно рассмотреть формулу (9.16) при $t=t_0$, т. е. при $x_r = x_{r_0}$, $y_r = y_{r_0}$ и т. д. Так как $\partial x_{r_0} / \partial x_{r_0} = 1$, $\partial x_{r_0} / \partial y_{r_0} = 0$ и т. д., то $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}(t_0) = \mathbf{E}_6$ и, следовательно, начальные условия для численного интегрирования системы уравнений (9.26) принимаются в виде единичной матрицы шестого порядка.

Таким образом, если задаться начальными условиями для интегрирования уравнений (9.26) в виде единичной матрицы шестого порядка и начальными условиями v_{x, r_0} , v_{y, r_0} , v_{z, r_0} , x_{r_0} , y_{r_0} , z_{r_0} для уравнений (7.52) и совместно проинтегрировать эти уравнения, то для заданных моментов времени можно непосредственно получить значения искомых частных производных $(\partial p_{k_p} / \partial q_j)_{t_0}$ ($k, j = 1, 2, \dots, 6$; $p = 1, 2, \dots, M$). При этом расход машинного времени, необходимого для расчета частных производных, оказывается существенно меньшим, чем при использовании метода конечных разностей. Однако применение рассматриваемого метода расчета производных (9.12) связано с необходимостью решения на вычислительной машине системы дифференциальных уравнений в вариациях. Это приводит к тому, что в оперативное запоминающее устройство вычислительной машины должна быть введена дополнительная программа решения этих уравнений. Для расчета же частных производных методом конечных разностей используется программа

решения системы уравнений (7.52), что позволяет более экономно использовать запоминающее устройство ЭВМ.

Целесообразность применения метода расчета производных (9.12) решением дифференциальных уравнений в вариациях или методом конечных разностей определяется в каждом конкретном случае возможностями ЭВМ, используемой для решения задачи статистической обработки траекторных измерений, а также целями решения этой задачи. Если вычислительная машина имеет большое оперативное запоминающее устройство, то предпочтение при расчете частных производных (9.12) должно быть отдано методу решения уравнений в вариациях; если же быстродействие ЭВМ велико, а оперативное запоминающее устройство имеет сравнительно небольшое количество ячеек, то для вычисления производных более удобным может оказаться метод конечных разностей.

9.3.3. Методы, основанные на применении теории кеплерова движения

Использование теории кеплерова движения (см. § 7.2) позволило получить аналитические зависимости для расчета частных производных от текущих параметров движения ЛА по начальным условиям движения.

Приведем формулы для расчета частных производных от текущих параметров движения r , u , ζ , V_r , V_u , V_ζ в цилиндрической системе координат $Ar u \zeta$ по начальным условиям движения r_0 , u_0 , ζ_0 , V_{r0} , V_{u0} , V_{ζ_0} при $t = \text{const}$ [57]:

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = a \left[-\frac{3V_r}{r_0^2} t + \frac{1}{r_0} \left(2 \frac{r}{r_0} + 1 - \frac{p}{r} - \cos \varphi \right) - \frac{V_r V_{r0}}{u} \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial r_0} = \frac{a}{r} \left\{ -\frac{3V_u}{r_0^2} t + \sqrt{\frac{p}{u}} \left[\frac{V_r}{r_0} - \frac{V_{r0}}{r} + \frac{r}{r_0 p} (V_r - V_{r0}) \right] + \frac{1}{r_0} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \varphi \right\},$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r_0} = a \left[-\frac{3u}{r^2 r_0^2} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) t + \frac{V_u}{r r_0} \sin \varphi + \frac{V_{r0}}{r^2} - \frac{V_r}{r_0^2} + \frac{p}{r} \left(\frac{V_r}{r_0} - \frac{V_{r0}}{r} \right) \right];$$

$$\frac{\partial V_u}{\partial r_0} = \frac{aV_r}{r} \left\{ \frac{3V_u}{r_0^2} t - \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{V_r}{r_0} - \frac{V_{r_0}}{r} + \frac{r}{r_0 p} (V_r - V_{r_0}) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r_0} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \varphi \right\} - \frac{V_{u_0}}{p} (1 - \cos \varphi),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r_0} = 0, \quad \frac{\partial V_\xi}{\partial r_0} = 0,$$

$$\frac{\partial r}{\partial u_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial u_0} = 1, \quad \frac{\partial V_r}{\partial u_0} = \frac{\partial V_u}{\partial u_0} = \frac{\partial V_\xi}{\partial u_0} = 0, \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial u_0} = 0,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_0} = \frac{\partial u}{\partial \xi_0} = \frac{\partial V_r}{\partial \xi_0} = \frac{\partial V_u}{\partial \xi_0} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \xi_0} = 1 - \frac{r}{p} (1 - \cos \varphi),$$

$$\frac{\partial V_\xi}{\partial \xi_0} = -\frac{1}{p} \left(V_r - V_{r_0} + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \varphi \right),$$

$$\frac{\partial r}{\partial V_{r_0}} = a \left[-\frac{3V_r V_{r_0}}{\mu} t + \frac{2}{\mu} (rV_{r_0} - r_0 V_r) + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin \varphi \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial V_{r_0}} = \frac{aV_u}{\mu} \left[-\frac{3V_{r_0}}{r} t + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \varphi - \right.$$

$$\left. - 2 \frac{r_0}{r} + \frac{r}{p} \left(\frac{p}{r_0} - 1 \right) \right],$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial V_{r_0}} = a \left[-\frac{3V_{r_0}}{r^2} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) t + \frac{p}{r^2} \cos \varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{2r_0}{r^2} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) - \frac{V_r V_{r_0}}{\mu} \right],$$

$$\frac{\partial V_u}{\partial V_{r_0}} = \frac{aV_r V_u}{\mu} \left[\frac{3V_{r_0}}{r} t - \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{2r_0}{r} - \frac{r}{p} \left(\frac{p}{r_0} - 1 \right) \right] - \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial V_{r_0}} = \frac{\partial V_\xi}{\partial V_{r_0}} = 0, \quad (9.27)$$

$$\frac{\partial r}{\partial V_{u_0}} = a \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{3V_r}{r_0} t - \left(\frac{r_0}{p} + 1 \right) \cos \varphi + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{r}{r_0} - \frac{r_0}{p} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial V_{u_0}} = \frac{aV_u}{\mu} \left\{ -\frac{3V_{u_0}}{r} t + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \sin \varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{V_{\mu p}} \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) r_0 V_r - \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) r V_{r_0} \right] \right\}.$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial V_{u0}} = \frac{a}{r} \left[-\frac{3V_u}{r_0} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) t + \frac{p}{r} \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \sin \varphi + \right. \\ \left. + V_r \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left(\frac{r_0}{r} - \frac{r}{r_0} \right) \right],$$

$$\frac{\partial V_u}{\partial V_{u0}} = \frac{aV_r V_u}{\mu} \left\{ \frac{3V_{u0}}{r} t - \left(1 + \frac{r}{p} \right) \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \sin \varphi - \right. \\ \left. - \frac{1}{V_{\mu p}} \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) r_0 V_{r0} - \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) r V_{r0} \right] \right\} - \\ - \frac{r_0}{p} + \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial V_{u0}} = \frac{\partial V_\zeta}{\partial V_{u0}} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial V_{\zeta 0}} = \frac{r_0 r}{V_{\mu p}} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial V_\zeta}{\partial V_{\zeta 0}} = 1 - \frac{r_0}{p} (1 - \cos \varphi),$$

$$\frac{\partial r}{\partial V_{\zeta 0}} = \frac{\partial u}{\partial V_{\zeta 0}} = \frac{\partial V_r}{\partial V_{\zeta 0}} = \frac{\partial V_u}{\partial V_{\zeta 0}} = 0.$$

Использованные в (9.27) обозначения пояснены в § 7.2. Зависимости (9.27) определяют матрицу частных производных (9.12), которая в данном случае имеет вид

$$\left\| \frac{\partial r, u, \xi, V_r, V_u, V_\zeta}{\partial r_0, u_0, \zeta_0, V_{r0}, V_{u0}, V_{\zeta 0}} \right\|.$$

Для решения задачи статистической обработки измерений необходимо иметь матрицу частных производных от измеряемых функций по параметрам траектории.

Пусть, например, радиотехническим траекторным комплексом измеряются наклонная дальность D и направляющие косинусы $\cos \theta_x$ и $\cos \theta_z$. Для описания движения ЛА принята цилиндрическая абсолютная система координат. В этом случае искомая матрица частных производных от измеряемых функций по параметрам траектории (начальным условиям движения ЛА в цилиндрической абсолютной системе координат) может быть найдена из выражения

$$\left\| \frac{\partial D, \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z}{\partial r_0, u_0, \zeta_0, V_{r0}, V_{u0}, V_{\zeta 0}} \right\| = \left\| \frac{\partial D, \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z}{\partial r, u, \xi, V_r, V_u, V_\zeta} \right\| \times \\ \times \left\| \frac{\partial r, u, \xi, V_r, V_u, V_\zeta}{\partial r_0, u_0, \zeta_0, V_{r0}, V_{u0}, V_{\zeta 0}} \right\|. \quad (9.28)$$

Производные $\cos \Theta_y$ по параметрам траектории дописаны для удобства выполнения выкладок, а для обработки измерений не используются.

Для решения поставленной задачи необходимо получить зависимости для расчета матрицы частных производных от измеряемых функций D , $\cos \Theta_x$, $\cos \Theta_y$, $\cos \Theta_z$ по текущим параметрам движения ЛА r , u , ζ , V_r , V_u , V_ζ в абсолютной цилиндрической системе координат:

$$G = \left\| \frac{\partial D, \cos \Theta_x, \cos \Theta_y, \cos \Theta_z}{\partial r, u, \zeta, V_r, V_u, V_\zeta} \right\|. \quad (9.29)$$

Наиболее просто измеряемые функции выражаются через параметры движения ЛА в измерительной системе координат:

$$D = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}; \quad \cos \Theta_x = x_u/D, \quad \cos \Theta_y = y_u/D, \\ \cos \Theta_z = z_u/D. \quad (9.30)$$

Поэтому целесообразно текущие параметры движения ЛА пересчитать из цилиндрической абсолютной системы координат в измерительную относительную систему координат.

Введем обозначения

$$D = \begin{Bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{Bmatrix}, \quad r = \begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{Bmatrix}, \quad R_3 = \begin{Bmatrix} x_{uA} \\ y_{uA} \\ z_{uA} \end{Bmatrix}, \quad (9.31)$$

где D — вектор-столбец координат ЛА в измерительной системе координат; r — вектор-столбец координат ЛА в орбитальной системе координат; R_3 — вектор-столбец координат центра Земли A в измерительной системе координат.

Координаты ЛА в орбитальной системе координат $Ax_r y_r z_r$ выражаются через цилиндрические координаты r , u , ζ соотношениями

$$x_r = r \cos u; \quad y_r = r \sin u; \quad z_r = \zeta. \quad (9.32)$$

Используя введенные обозначения, можем записать

$$G = A_u r + R_3, \quad (9.33)$$

где $A_{иг}$ — матрица направляющих косинусов связи между измерительной и орбитальной системами координат, определяемая зависимостью

$$A_{иг} = A_{гм}^T A_{г,га} A_{га,r}.$$

Матрицы $A_{гм}$, $A_{г,га}$, $A_{га,r}$ могут быть рассчитаны соответственно по формулам (7.12), (7.2) и (7.7).

Из зависимостей (9.30) — (9.33) следует, что измеряемые координатные параметры не зависят от текущих значений проекций вектора скорости ЛА. Поэтому матрицу искомых частных производных (9.29) можно представить в виде

$$G = \begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial r} & \frac{\partial D}{\partial u} & \frac{\partial D}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \cos \theta_x}{\partial r} & \frac{\partial \cos \theta_x}{\partial u} & \frac{\partial \cos \theta_x}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \cos \theta_y}{\partial r} & \frac{\partial \cos \theta_y}{\partial u} & \frac{\partial \cos \theta_y}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \cos \theta_z}{\partial r} & \frac{\partial \cos \theta_z}{\partial u} & \frac{\partial \cos \theta_z}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ G_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (9.34)$$

где

$$G_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial r} & \frac{\partial D}{\partial u} & \frac{\partial D}{\partial \zeta} \end{vmatrix},$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \cos \theta_x}{\partial r} & \frac{\partial \cos \theta_x}{\partial u} & \frac{\partial \cos \theta_x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \cos \theta_y}{\partial r} & \frac{\partial \cos \theta_y}{\partial u} & \frac{\partial \cos \theta_y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \cos \theta_z}{\partial r} & \frac{\partial \cos \theta_z}{\partial u} & \frac{\partial \cos \theta_z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}.$$

Задача отыскания искомой матрицы G может считаться решенной, если получены зависимости для вычисления матриц G_1 и G_2 .

Как следует из (9.32) и (9.33), для вычисления матриц G_1 и G_2 целесообразно представить эти матрицы в виде

$$G_1 = \left\| \frac{\partial D}{\partial r, u, \zeta} \right\| = \left\| \frac{\partial D}{\partial x_r, y_r, z_r} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial x_r, y_r, z_r}{\partial r, u, \zeta} \right\|,$$

$$G_2 = \left\| \frac{\partial \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z}{\partial r, u, \zeta} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\partial \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z}{\partial x_r, y_r, z_r} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial x_r, y_r, z_r}{\partial r, u, \zeta} \right\|,$$

где

$$\left\| \frac{\partial x_r, y_r, z_r}{\partial r, u, \zeta} \right\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_r}{\partial r} & \frac{\partial x_r}{\partial u} & \frac{\partial x_r}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y_r}{\partial r} & \frac{\partial y_r}{\partial u} & \frac{\partial y_r}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z_r}{\partial r} & \frac{\partial z_r}{\partial u} & \frac{\partial z_r}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & -r \sin u & 0 \\ \sin u & r \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получим выражения для вычисления матриц

$$G' = \left\| \frac{\partial D}{\partial x_r, y_r, z_r} \right\|, \quad G'' = \left\| \frac{\partial \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z}{\partial x_r, y_r, z_r} \right\|. \quad (9.35)$$

Учитывая обозначения (9.31) и используя правила векторного дифференцирования, можем записать

$$G' = \left\| \frac{\partial D}{\partial x_r} \quad \frac{\partial D}{\partial y_r} \quad \frac{\partial D}{\partial z_r} \right\| = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}},$$

$$\begin{vmatrix} \cos \theta_x \\ \cos \theta_y \\ \cos \theta_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_n}{D} \\ \frac{y_n}{D} \\ \frac{z_n}{D} \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{vmatrix} = \frac{\mathbf{D}}{D} = K_D, \quad (9.36)$$

где K_D — единичный вектор направления D ,

$$G'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial \cos \theta_x}{\partial x_r} & \frac{\partial \cos \theta_x}{\partial y_r} & \frac{\partial \cos \theta_x}{\partial z_r} \\ \frac{\partial \cos \theta_y}{\partial x_r} & \frac{\partial \cos \theta_y}{\partial y_r} & \frac{\partial \cos \theta_y}{\partial z_r} \\ \frac{\partial \cos \theta_z}{\partial x_r} & \frac{\partial \cos \theta_z}{\partial y_r} & \frac{\partial \cos \theta_z}{\partial z_r} \end{vmatrix}. \quad (9.37)$$

Так как $D = \sqrt{(D)^2} = (D^T D)^{1/2}$ и

$$\frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A}_{wr} \mathbf{r} + \mathbf{R}_3,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} (D^T D)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{A}_{wr} \mathbf{r} + \mathbf{R}_3) = \frac{2D^T}{2(D^T D)^{1/2}} \mathbf{A}_{wr} = \\ &= \frac{1}{D} (\mathbf{A}_{wr} \mathbf{r} + \mathbf{R}_3)^T \mathbf{A}_{wr} = \frac{1}{D} (\mathbf{r}^T \mathbf{A}_{wr}^T + \mathbf{R}_3^T) \mathbf{A}_{wr}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{A}_{wr}^T = \mathbf{A}_{wr}^{-1}$, то последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{1}{D} (\mathbf{r}^T \mathbf{A}_{wr}^{-1} + \mathbf{R}_3^T) \mathbf{A}_{wr} = \frac{1}{D} (\mathbf{r}^T + \mathbf{R}_3^T \mathbf{A}_{wr}) = \\ &= \frac{1}{D} (\|x_r \ y_r \ z_r\| + \|x_{нА} \ y_{нА} \ z_{нА}\| \mathbf{A}_{wr}). \end{aligned} \quad (9.38)$$

При применении зависимости (9.38) полезно иметь в виду, что использование теории кеплерова движения дает возможность считать $\zeta = z_r = 0$, $x_{нА} = 0$, $y_{нА} = -R_3$, $z_{нА} = 0$ (R_3 — средний радиус Земли). Тогда

$$\mathbf{G}' = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{D} (\|x_r \ y_r \ 0\| - \|0 \ R_3 \ 0\| \mathbf{A}_{wr}). \quad (9.39)$$

Получим матрицу производных (9.37). Пользуясь правилами дифференцирования вектора по вектору и выражениями (9.36), (9.37), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{K}_D}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{K}_D}{\partial \mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{r}}, \quad (9.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_D}{\partial \mathbf{D}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} \left(\frac{\mathbf{D}}{D} \right) = \frac{1}{D} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{D}} + \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} \left(\frac{1}{D} \right) = \frac{1}{D} \mathbf{E} + \\ + \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} (D^T D)^{-1/2} &= \frac{1}{D} \mathbf{E} - \frac{\mathbf{D} D^T}{(D^T D)^{3/2}} = \frac{1}{D} \mathbf{E} - \frac{\mathbf{D} D^T}{D^3}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Дифференцирую (9.33) по вектору \mathbf{r} , находим

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{A}_{wr} \mathbf{r} + \mathbf{R}_3) = \mathbf{A}_{wr}. \quad (9.42)$$

Подставим (9.41) и (9.42) в равенство (9.40):

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_D}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{1}{D} \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{D}\mathbf{D}^T}{D^2} \right) \mathbf{A}_{wr} = \frac{1}{D} \left[\mathbf{A}_{wr} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{D^2} (\mathbf{A}_{wr} \mathbf{r} + \mathbf{R}_3) (\mathbf{r}^T \mathbf{A}_{wr}^{-1} + \mathbf{R}_3^T) \mathbf{A}_{wr} \right] = \frac{1}{D} \left[\mathbf{A}_{wr} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{D^2} (\mathbf{A}_{wr} \mathbf{r} \mathbf{r}^T \mathbf{A}_{wr}^{-1} + \mathbf{R}_3 \mathbf{r}^T \mathbf{A}_{wr}^{-1} + \mathbf{A}_{wr} \mathbf{r} \mathbf{R}_3^T + \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_3^T) \mathbf{A}_{wr} \right] = \\ &= \frac{1}{D} \left[\mathbf{A}_{wr} - \frac{1}{D^2} (\mathbf{A}_{wr} \mathbf{r} \mathbf{r}^T + \mathbf{R}_3 \mathbf{r}^T + \mathbf{A}_{wr} \mathbf{r} \mathbf{R}_3^T \mathbf{A}_{wr} + \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_3^T) \mathbf{A}_{wr} \right] = \\ &= \frac{1}{D} \left[\mathbf{A}_{wr} - \frac{1}{D^2} (\mathbf{A}_{wr} \mathbf{r} + \mathbf{R}_3) (\mathbf{r}^T + \mathbf{R}_3^T \mathbf{A}_{wr}) \right]. \end{aligned}$$

Учитывая обозначения (9.31) и (9.37), находим

$$\mathbf{G}'' = \frac{1}{D} \left[\mathbf{A}_{wr} - \frac{1}{D^2} \left(\mathbf{A}_{wr} \begin{vmatrix} x_r \\ y_r \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{R}_3 \\ 0 \end{vmatrix} \right) (\|x_r \ y_r \ 0\| - \right. \\ \left. - \|0 \ \mathbf{R}_3 \ 0\| \mathbf{A}_{wr}) \right].$$

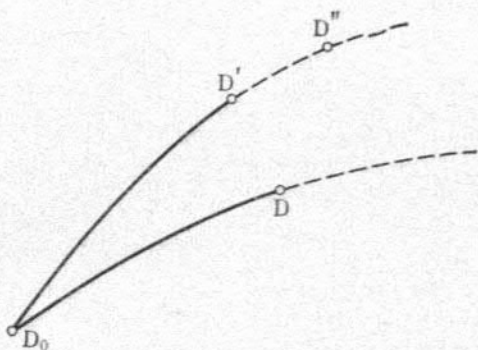
Таким образом, искомая матрица (9.34) частных производных от измеряемых функций по параметрам движения ЛА в цилиндрической абсолютной системе координат получена.

Аналогично, используя формулы (7.3)—(7.11) и соответствующие зависимости типа (8.11), можно записать выражения для матриц частных производных измеряемых параметров z_r ($r=1, 2, \dots, 6$) по текущим параметрам движения в геоцентрической относительной системе координат.

Применение аналитических зависимостей теории кеплерова движения для расчета частных производных от измеряемых функций по начальным условиям движения целесообразно при обработке большого объема измерительной информации, полученной при наблюдении за ЛА, движущимся по орбите, близкой к кеплеровой.

Отметим, что при определении параметров движения ЛА по результатам траекторных измерений преимущественно используются изохронные производные, связывающие вариации текущих и начальных параметров движения при фиксированном времени t_0 . Однако в ряде случаев более удобным может оказаться применение других

Рис. 9.1.



типов производных. Так, например, при обработке измерений, полученных в течение длительного промежутка времени, оказывается целесообразным задавать начальные условия движения не по времени t_0 , а как параметры, определяющие движение ЛА при фиксированной начальной широте φ_0 . Текущие параметры движения находятся при этом обычным способом, т. е. по времени. Это вызывает необходимость использования формул для преобразования частных производных $(\partial p_k / \partial q_j)_\psi$ при переходе от параметра ψ , фиксирующего положение текущей точки D на траектории, к другому параметру ξ .

Запишем необходимые зависимости [57].

Рассмотрим участок невозмущенной траектории D_0 , D и мало отклоняющуюся от нее возмущенную траекторию (рис. 9.1). Обозначим через ψ_1 , ξ_1 , p_{k1} значения параметров ψ , ξ , p_k ($k=1, 2, \dots, 6$) в текущей точке D невозмущенной орбиты. На возмущенной орбите точке D при фиксированном значении ψ соответствует некоторая точка D' , а при фиксированном значении ξ — точка D'' . Параметры ψ , ξ , p_k в этих точках принимают значения:

$$\psi(D') = \psi_1; \quad \xi(D') = \xi_1 + \Delta_\psi \xi; \quad p_k(D') = p_{k1} + \Delta_\psi p_k; \quad (9.43)$$

$$\psi(D'') = \psi_1 + \Delta_\xi \psi; \quad \xi(D'') = \xi_1; \quad p_k(D'') = p_{k1} + \Delta_\xi p_k,$$

где $\Delta_\psi p_k$ и $\Delta_\psi \xi$ — вариации величин p_k и ξ при $\psi = \text{const}$; $\Delta_\xi p_k$ и $\Delta_\xi \psi$ — вариации величин p_k и ψ при $\xi = \text{const}$.

Отсюда с точностью до малых высшего порядка получаем

$$p_k(D') = p_k(D'') + \Delta_\psi \xi dp_k/d\xi, \quad (9.44)$$

где значение производной $dp_k/d\xi$ определяется на невозмущенной траектории.

Подставляя в (9.44) выражения (9.43) для $p_k(D')$ и $p_k(D'')$, получаем

$$\Delta_\psi p_k = \Delta_\xi p_k + \Delta_\psi \xi dp_k/d\xi.$$

Разделив левую и правую части последнего уравнения на приращения параметра Δq_j ($j=1, 2, \dots, n$) и перейдя к пределу, запишем

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_j}\right)_\xi = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_j}\right)_\psi - \left(\frac{\partial \xi}{\partial q_j}\right)_\psi \frac{dp_k}{d\xi}, \quad (9.45)$$

где $(\partial \xi / \partial q_j)_\psi$ представляет собой частную производную $\partial \xi / \partial q_j$ при $\psi = \text{const}$.

Использование выражения (9.45) позволяет, зная матрицу частных производных от текущих параметров движения по искомым параметрам $\left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_n}{\partial q_1, q_2, \dots, q_n} \right\|$ при $\psi = \text{const}$, рассчитать значения элементов матрицы $\left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_n}{\partial q_1, q_2, \dots, q_n} \right\|$ при $\xi = \text{const}$.

9.4. Уточнение влияния атмосферы на движение ИСЗ по результатам траекторных измерений

Определение начальных условий движения ИСЗ на основе статистической обработки результатов радиотехнических траекторных измерений методом наименьших квадратов производится путем минимизации суммы квадратов взвешенных разностей между измеренными значениями некоторых функций параметров действительного движения ИСЗ и расчетными значениями этих функций. Для нахождения расчетных значений измеряемых функций используются решения уравнений движения ЛА. Если бы при этом были известны точные значения сил, действующих на спутник в полете, то ошибки полученных параметров траектории определялись бы только ошибками измерений. Однако вследствие неточ-

ного знания параметров атмосферы Земли значение силы лобового сопротивления известно с ошибкой. Это приводит к ошибкам в решениях уравнений движения. Следовательно, расчетные значения измеряемых функций также искажены погрешностями.

Наличие ошибок в расчетных значениях измеряемых параметров приводит к дополнительным ошибкам в значениях параметров траектории q_1, q_2, \dots, q_6 , поскольку эти значения подбираются так, чтобы на измеряемом участке расчетная траектория наилучшим образом (в смысле выбранного критерия оптимизации статистической обработки результатов измерений) согласовывалась с измерениями.

Для уменьшения влияния ошибок в используемых значениях параметров атмосферы на точность прогнозирования движения ИСЗ по результатам измерений целесообразно уточнять параметры атмосферы на основе статистической обработки измерений. При этом, как отмечалось в гл. 1, могут быть использованы детерминированная или стохастическая модели движения летательных аппаратов.

Рассмотрим, как может быть уточнено влияние атмосферы на полет ИСЗ при использовании для обработки измерений и прогнозирования движения спутника детерминированной модели движения.

Расчетное значение ускорения, создаваемого аэродинамической силой лобового сопротивления, определяется из выражения (7.44)

$$b_Q = S_6 \rho(h) v^2,$$

где $S_6 = S_m C_x / 2m$ — баллистический коэффициент силы лобового сопротивления; $\rho(h)$ — плотность воздуха на высоте h над поверхностью Земли.

Аэродинамический коэффициент C_x силы лобового сопротивления Q определяется с некоторой погрешностью δC_x . Значения плотности воздуха $\rho(h)$ находят из таблиц, соответствующих принятой модели атмосферы, и, следовательно, отличаются от истинного значения плотности на некоторую величину $\delta \rho(h)$. Это приводит к тому, что ускорение b_Q определяется с ошибками.

Считая баллистический коэффициент S_6 параметром согласования расчетных данных с опытными, принимаем, что ошибки определения ускорения b_Q , создаваемого

аэродинамической силой лобового сопротивления, обусловлены ошибками задания коэффициента S_6 :

$$\delta b_Q = \rho(h) v^2 \delta S_6.$$

В этом случае, принимая величину баллистического коэффициента постоянной на некотором интервале определения движения ИСЗ, уточним значение коэффициента S_6 наряду со значениями начальных условий движения q_1, q_2, \dots, q_6 . Тогда для того, чтобы можно было уточнить значение баллистического коэффициента S_6 по методике, рассмотренной в § 9.2, необходимо знать частные производные от измеряемых параметров по коэффициенту S_6 .

Анализ влияния атмосферы на полет ИСЗ показывает, что периодические возмущения параметров движения пренебрежимо малы по сравнению с вековыми возмущениями. При этом наиболее существенные значения имеют вековые возмущения вдоль орбиты. Так, например, для почти круговых орбит возмущения вдоль радиуса увеличиваются примерно пропорционально числу витков, в то время как вековые возмущения вдоль орбиты возрастают пропорционально квадрату числа витков. На суточном интервале времени вековые возмущения вдоль орбиты примерно на порядок превышают периодические и вековые возмущения положения спутника в других направлениях. Аналогичная картина наблюдается и в случае эллиптических орбит [57].

Приведенные соображения позволяют при исследовании влияния атмосферы на полет ИСЗ учитывать только вековые возмущения параметров движения вдоль орбиты.

Используя формулу (9.43), выразим искомые изохронные производные $(\partial p_k / \partial S_6)_t$ через изоугловые:

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial S_6}\right)_t = \left(\frac{\partial p_k}{\partial S_6}\right)_\vartheta - \left(\frac{\partial t}{\partial S_6}\right)_\vartheta \frac{dp_k}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (9.46)$$

Для рассматриваемого случая можно пренебречь в формуле (9.46) в соответствии со сказанным выше изоугловыми производными от параметров движения по баллистическому коэффициенту S_6 . При этом получим

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial S_6}\right)_t = - \left(\frac{\partial t}{\partial S_6}\right)_\vartheta \frac{dp_k}{dt}.$$

В теории полета космических аппаратов даются следующие выражения для изменения периода обращения ИСЗ под влиянием сопротивления атмосферы за один виток [57]:

$$\Delta T = -\frac{12\pi^2}{V_{\mu}} S_{\sigma} \rho_{cp} a^{5/2} \left[1 + \frac{v^2}{4} + \frac{v^4}{64} + \frac{v^6}{2304} + \dots + ve \left(1 + \frac{v^2}{8} + \frac{v^3}{192} + \dots \right) \right] \text{ при } v \leq 2,$$

$$\Delta T = -\frac{6\pi}{V_{\mu}} S_{\sigma} \rho_{cp} a^{5/2} \frac{1+e}{1-e} \sqrt{1-e^2} f_0 \sqrt{\frac{2\pi}{v}} \text{ при } v > 2, \quad (9.47)$$

где $v = ae/K$; a и e — большая полуось и эксцентриситет орбиты;

$$K = - \left[\frac{d [\ln \rho(h)]_{h=h_{\Pi}}}{dh} \right]^{-1}; \quad (9.48)$$

h_{Π} — превышение перигея орбиты спутника над поверхностью Земли; $\rho(h_{\Pi})$ — плотность воздуха на высоте h_{Π} ; $\rho_{cp} = \rho((h_{\alpha} + h_{\Pi})/2)$; h_{α} — превышение апогея орбиты над поверхностью Земли;

$$f_0 = 1 + \frac{1}{8v} + \frac{9}{128v^2} + \frac{75}{1024v^3} + \dots$$

Распределение плотности воздуха по высоте определяется выражением

$$\rho(h) = A_i \exp [k_{1i}(h - h_i)^2 - k_{2i}(h - h_i)]. \quad (9.49)$$

Значения коэффициентов A_i , k_{1i} , k_{2i} для каждого i -го слоя атмосферы выбираются как функции высоты h из специальных таблиц, составленных в соответствии с принятой моделью атмосферы (например, из табл. 7.3).

Используя зависимости (9.49) и (9.48), получаем

$$K = [k_{2m} - 2k_{1m}(h_{\Pi} - h_m)]^{-1},$$

где m — номер слоя, в котором находится перигей орбиты.

Изменение времени прихода спутника в точку орбиты, фиксированную с помощью заданного углового расстояния θ , через n витков полета под влиянием сопро-

тивления атмосферы можно характеризовать [57] зависимостью вида

$$\Delta t_{\phi} = \Delta T n^2 / 2. \quad (9.50)$$

Варьируя выражение (9.50) по S_0 , получаем

$$\left[\frac{\partial (\Delta t)}{\partial S_0} \right]_{\phi} \delta S_0 = \frac{n^2}{2} \frac{\partial (\Delta T)}{\partial S_0} \delta S_0. \quad (9.51)$$

Из (9.47) имеем

$$\partial (\Delta T) / \partial S_0 = \Delta T / S_0. \quad (9.52)$$

Полагая $(\partial t / \partial S_0)_{\phi} = [\partial (\Delta t) / \partial S_0]_{\phi}$ и учитывая выражение (9.52), приведем зависимость (9.51) к виду

$$\left(\frac{\partial t}{\partial S_0} \right)_{\phi} = \frac{n^2}{2} \frac{\Delta T}{S_0}. \quad (9.53)$$

Подставляя (9.53) в (9.52), получаем искомые выражения для изохронных частных производных от параметров движения спутника по баллистическому коэффициенту S_0 :

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial S_0} \right)_t = - \frac{n^2}{2} \frac{\Delta T}{S_0} \frac{dp_k}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (9.54)$$

Принимая

$$n = \frac{t - t_0}{T_n} \Big|_{t_0=0} = \frac{t}{T_n} = \frac{t}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},$$

где T_n — период обращения ИСЗ, и учитывая (9.47), выражение (9.54) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial S_0} \right)_t = \eta_l \frac{dp_k}{dt} t^2, \quad l = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad (9.55)$$

где при $v \leq 2$

$$\eta_1 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \rho_{cp} \left[1 + \frac{v^2}{4} + \frac{v^4}{64} + \frac{v^6}{2304} + \dots + v e \left(1 + \frac{v^2}{8} + \frac{v^4}{192} + \dots \right) \right],$$

при $v > 2$

$$\eta_2 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \rho_{nf_0} \frac{1+e}{1-e} \sqrt{\frac{1-e^2}{2\pi v}}.$$

Полученные выражения (9.54), (9.55) удобны для практического использования, так как величины dp_k/dt ($k=1, 2, \dots, 6$) представляют собой правые части диф-

ференциальных уравнений движения, вычисляемые на каждом шаге численного интегрирования уравнений.

При использовании для записи уравнений движения спутника системы уравнений в оскулирующих элементах (7.54) выражение (9.55) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial p}{\partial S_6} \frac{\partial e}{\partial S_6} \frac{\partial \omega}{\partial S_6} \frac{\partial \Omega}{\partial S_6} \frac{\partial i}{\partial S_6} \frac{\partial \vartheta}{\partial S_6} \right\|^T = \\ & = \eta_1 t^2 \left\| \frac{dp}{dt} \frac{de}{dt} \frac{d\omega}{dt} \frac{d\Omega}{dt} \frac{di}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} \right\|^T. \end{aligned}$$

Отметим, что для уточнения значения коэффициента S_6 необходимо иметь измерения на участках орбиты, как правило, разнесенные во времени не менее, чем на сутки.

На движение ИСЗ, совершающего полет на сравнительно небольших высотах ($\sim 200-300$ км), заметное влияние оказывают случайные флуктуации плотности атмосферы. Поэтому при прогнозировании движения такого спутника целесообразно вместо детерминированной модели движения использовать стохастическую модель, в которой ускорение ИСЗ, создаваемое аэродинамической силой лобового сопротивления, представлено случайной функцией.

Примем, что средние значения плотности воздуха с высотой изменяются по экспоненциальной зависимости, описываемой выражением (9.49). Любые дополнительные изменения плотности воздуха могут быть наложены на эту модель. Так, например, предположим, что случайные флуктуации плотности атмосферы характеризуются стационарным процессом Гаусса — Маркова первого порядка:

$$\begin{aligned} M[\delta\rho(t)] &= 0, \\ M[\delta\rho(t)\delta\rho(t+\tau)] &= \sigma_p^2 e^{-\alpha|\tau|}, \end{aligned} \quad (9.56)$$

где σ_p^2 и α — дисперсия и коэффициент затухания автокорреляционной функции стохастической модели изменения плотности воздуха.

При этом статистические характеристики флуктуаций плотности воздуха определяются двумя величинами, имеющими определенный физический смысл: дисперсией (насколько они велики) и коэффициентом затухания автокорреляционной функции (насколько они продолжительны).

В этом случае движение спутника может быть определено восемью параметрами, в число которых входят средние значения шести параметров орбиты, некоторый седьмой параметр, характеризующий постоянное среднее значение сопротивления атмосферы, и восьмой параметр, характеризующий мгновенное значение сопротивления атмосферы, вызванное стохастическим процессом изменения плотности воздуха.

Положение и скорость движения спутника в любой момент времени могут быть определены на основе использования результатов интегрирования уравнений движения в оскулирующих элементах, например, вида (7.54). Тогда, если принять допущение о том, что изменения средних значений элементов орбиты ИСЗ можно приближенно заменить изменением соответствующих оскулирующих элементов орбиты, то уравнения (7.54) будут определять характер изменения средних элементов орбиты во времени.

Процедура оценки для стохастической модели отличается от процедуры оценки для детерминированной модели тем, что влияние случайных возмущений сопротивления атмосферы учитывается в первом случае путем вычисления случайной флюктуации плотности воздуха в каждой точке траектории. При задании случайных флюктуаций плотности воздуха в виде (9.56) оцениваемыми параметрами являются шесть начальных значений оскулирующих элементов орбиты, среднее квадратическое отклонение σ_p и коэффициент затухания α автокорреляционной функции стохастической модели изменения плотности воздуха.

В работе [77] приведены числовые результаты статистического оценивания движения ИСЗ по результатам радиолокационных наблюдений при использовании стохастической модели атмосферы описанного выше типа и детерминированной модели атмосферы. Сравнение полученных оценок с результатами высокоточных оптических измерений положения спутника, принимаемых за эталонные, позволило авторам указанной работы сделать вывод о том, что применение стохастической модели атмосферы при определении движения низкоорбитальных ИСЗ позволяет существенно уменьшить отклонения вдоль орбиты в сравнении с использованием детерминированной модели атмосферы.

В заключение отметим, что в случае необходимости стохастическую модель атмосферы можно обобщить и на случай процесса более высокого порядка или сделать нестационарной. Например, ее можно распространить на процесс второго порядка с учетом как длиннопериодических, так и короткопериодических случайных флуктуаций или же ее можно сделать переменной во времени, чтобы оценить влияние суточных колебаний плотности воздуха.

9.5. Последовательное совместное оценивание параметров движения летательного аппарата и корреляционной матрицы ошибок траекторных измерений

При последовательном оценивании параметров движения ЛА по результатам траекторных измерений методом, рассмотренным в гл. 4, обычно предполагают, что известны априорные статистические характеристики ошибок параметров движения ЛА в начальный момент времени (начального состояния динамической системы) и ошибок измерений. Принимают, что распределение ошибок измерений имеет нулевое математическое ожидание и некоторую известную корреляционную матрицу. Однако в силу различных причин истинная корреляционная матрица ошибок измерений может значительно отличаться от априорно задаваемой. Использование же при статистической обработке неправильной корреляционной матрицы ошибок измерений может привести к значительному отклонению полученных оценок параметров движения ЛА от их истинных значений.

Рассмотрим методику одновременного оценивания параметров движения ЛА (состояния динамической системы) и корреляционной матрицы ошибок измерений по критерию максимального правдоподобия.

Введем n -мерный вектор Δ_i , представляющий собой разность между истинными значениями параметров движения ЛА (вектором истинного состояния) X_i и вектором расчетных значений параметров движения ЛА, определяемых по начальным условиям нулевого приближения (номинального состояния) \hat{X}_i для некоторого заданного момента времени t_i . Если абсолютная величина

вектора Δ_i достаточно мала, то вектор Δ_i связан с вектором Δ_k соотношением

$$\Delta_i = \Phi(t_i, t_k) \Delta_k, \quad (9.57)$$

где $\Phi(t_i, t_k)$ — матрица перехода состояний.

Примем, что p -мерный вектор $Y_i = H_i - \hat{Z}_i$ представляет собой разность между измерениями и расчетными значениями измеряемых в момент времени t_i функций, рассчитанными для номинальной траектории. Если величины Y_i достаточно малы и если $\hat{Z}_i = \varphi(X_i, t_i)$, то связь между переменными Y_i и Δ_i приближенно описывается линейным выражением

$$Y_i = A_i \Delta_i + \vartheta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (9.58)$$

где $A_i = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_i} \right)_{X_i = \hat{X}_i}$, а p -мерный вектор ошибок измерений является элементом случайной некоррелированной совокупности, распределенной по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и диагональной корреляционной матрицей R , т. е. $\vartheta_i \in N(0, R)$.

Предполагается, что матрица R неизвестна, но на протяжении периода измерений $t_1 \leq t \leq t_N$ постоянна. Если ввести матрицу

$$B_i = A_i \Phi(t_i, t_k), \quad (9.59)$$

то уравнение (9.58) можно записать в виде

$$Y_i = B_i \Delta_k + \vartheta_i. \quad (9.60)$$

Величины Y_i условимся называть измерениями.

Итак, имеется следующая постановка задачи. Дано: последовательность измерений Y_1, Y_2, \dots, Y_N , соотношение $Y_i = B_i \Delta_k + \vartheta_i$, где величина ϑ_i имеет распределение вида $N(0, R)$, причем постоянная матрица R неизвестна, и априорные вероятностные характеристики отклонения вектора состояния системы для некоторого начального момента времени t_0 : $M[\hat{\Delta}_0] = 0$ и $M[\hat{\Delta}_0 \hat{\Delta}_0^T] = P_0$. Требуется найти на основе принципа максимального правдоподобия наилучшие оценки $\hat{\Delta}_k$ и \hat{R} вектора Δ_k и матрицы R .

Логарифм функции правдоподобия от Δ_k и R определяется выражением

$$F(\Delta_k, R) = \ln L(\Delta_k, R | Y_1, Y_2, \dots, Y_N) = C + \frac{N}{2} \ln |R^{-1}| - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (Y_i - B_i \Delta_k)^T R^{-1} (Y_i - B_i \Delta_k) + \\ + (\Delta_k - \bar{\Delta}_k)^T P_{k/0}^{-1} (\Delta_k - \bar{\Delta}_k), \quad (9.61)$$

где C — постоянная;

$$\bar{\Delta}_k = \Phi(t_k, t_0) \Delta_0; \quad P_{k/0} = \Phi(t_k, t_0) P_0 \Phi^T(t_k, t_0).$$

Для получения оценок максимального правдоподобия требуется максимизировать функцию $F(\Delta_k, R)$ по переменным Δ_k и R .

Чтобы обеспечить максимум функции $F(\Delta_k, R)$, нужно удовлетворить следующим условиям:

$$\partial F / \partial \Delta_k = 0, \quad \partial F / \partial R = 0. \quad (9.62)$$

Дифференцируя выражение (9.61) по вектору Δ_k , получаем

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta_k} = - \sum_{i=1}^N (Y_i - B_i \hat{\Delta}_k)^T R^{-1} B_i + \\ + (\hat{\Delta}_k - \bar{\Delta}_k)^T P_{k/0}^{-1} = 0. \quad (9.63)$$

Перегруппировав члены в транспонированном соотношении (9.63), находим

$$\left(\sum_{i=1}^N B_i^T R^{-1} B_i + P_{k/0}^{-1} \right) \hat{\Delta}_k = \sum_{i=1}^N B_i^T R^{-1} Y_i + P_{k/0}^{-1} \bar{\Delta}_k. \quad (9.64)$$

Учитывая, что $\bar{\Delta}_k = \Phi(t_k, t_0) \hat{\Delta}_0 = 0$ при $\hat{\Delta}_0 = 0$ и предполагая, что матрица коэффициентов размерности $n \times n$ при $\hat{\Delta}_k$ в выражении (9.64) неособенная, получаем следующее соотношение для $\hat{\Delta}_k$:

$$\hat{\Delta}_k = \left(\sum_{i=1}^N B_i^T R^{-1} B_i + P_{k/0}^{-1} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N B_i^T R^{-1} Y_i. \quad (9.65)$$

При решении уравнения $\partial \bar{F} / \partial \mathbf{R} = 0$ воспользуемся тождеством $\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}$. Если матрица \mathbf{R} неособенная, то из однозначности матрицы \mathbf{W} следует однозначность матрицы \mathbf{R} . Тогда необходимое условие максимума функции правдоподобия $L(\Delta_k, \mathbf{R} / \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_N)$ можно записать в виде $\partial F / \partial \mathbf{W} = 0$ или $\partial F / \partial w_{jl} = 0$, $j, l = 1, 2, \dots, p$.

Отсюда получаем следующее условие:

$$\frac{\partial F}{\partial w_{jl}} = 2 \left[\frac{N}{2} \frac{1}{|\mathbf{W}|} \frac{\partial |\mathbf{W}|}{\partial w_{jl}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y_i^{(j)} - B_i^{(j)} \hat{\Delta}_k) (y_i^{(l)} - B_i^{(l)} \hat{\Delta}_k) \right],$$

где $y_i^{(j)}$ обозначает j -ю компоненту вектора \mathbf{Y}_i , а $B_i^{(j)}$ — j -ю строку матрицы \mathbf{B}_i . Множитель 2 появляется потому, что $w_{jl} = w_{lj}$. Замечая, что

$$|\mathbf{W}| = \sum_{j=1}^p w_{jl} A_{jl},$$

где A_{jl} обозначает адьюнкту элемента w_{jl} , получаем

$$\frac{\partial |\mathbf{W}|}{\partial w_{jl}} = A_{jl}.$$

Тогда из равенства $\partial F / \partial w_{jl} = 0$ вытекает условие

$$N \frac{A_{jl}}{|\mathbf{W}|} = \sum_{i=1}^N (y_i^{(j)} - B_i^{(j)} \hat{\Delta}_k) (y_i^{(l)} - B_i^{(l)} \hat{\Delta}_k). \quad (9.66)$$

Аналогичным образом, если $j=l$, то из равенства $\partial F / \partial w_{jl} = 0$ следует

$$\frac{N}{2} \frac{A_{jl}}{|\mathbf{W}|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y_i^{(j)} - B_i^{(j)} \hat{\Delta}_k)^2. \quad (9.67)$$

Учитывая, что $A_{jl} / |\mathbf{W}|$ представляет собой jl -й элемент матрицы \mathbf{W}^{-1} , и комбинируя уравнения (9.66) и (9.67), получаем

$$\hat{\mathbf{W}}^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{Y}_i - \mathbf{B}_i \hat{\Delta}_k) (\mathbf{Y}_i - \mathbf{B}_i \hat{\Delta}_k)^T$$

и, следовательно,

$$\widehat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{Y}_i - \mathbf{B}_i \widehat{\Delta}_k) (\mathbf{Y}_i - \mathbf{B}_i \widehat{\Delta}_k)^T. \quad (9.68)$$

Оценки вектора $\widehat{\Delta}_k$ и матрицы $\widehat{\mathbf{R}}$, определяемые формулами (9.65) и (9.68), предусматривают использование полной выборки измерений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_N$. Искомые величины $\widehat{\Delta}_k$ и $\widehat{\mathbf{R}}$ входят в зависимости (9.65), (9.68) нелинейным образом. Поэтому для их определения необходимо использовать итерационные формулы, а именно для каждой номинальной траектории нужно выполнить цикл итераций, чтобы получить искомые значения оценок $\widehat{\Delta}_k$ и $\widehat{\mathbf{R}}$, удовлетворяющих уравнениям (9.65) и (9.68). Для выполнения итерационного цикла нужно задать начальное значение матрицы \mathbf{R} и затем вычислить $\widehat{\Delta}_k$ и $\widehat{\mathbf{R}}$. После этого выбирается новая номинальная траектория, скорректированная с учетом оцененной ошибки $\widehat{\Delta}_k$, и весь процесс повторяется, пока он не сойдется. Оценка, к которой сойдется итерационный цикл, удовлетворяет неравенству $|\widehat{\Delta}_k^{(r)} - \widehat{\Delta}_k^{(r-1)}| \leq \varepsilon$, где ε — вектор-столбец, компонентами которого являются малые наперед заданные числа.

Выражения (9.65) и (9.68), определяющие оценки $\widehat{\Delta}_k$ и $\widehat{\mathbf{R}}$ по полной выборке измерений, можно привести к рекуррентной форме. Если заменить индекс k на N и ввести обозначение

$$\mathbf{P}_N = \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i^T \widehat{\mathbf{R}}_i^{-1} \mathbf{B}_i + \mathbf{P}_{N/0}^{-1} \right)^{-1},$$

то матрицу \mathbf{P}_N^{-1} можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_N^{-1} &= \mathbf{B}_N^T \widehat{\mathbf{R}}_N^{-1} \mathbf{B}_N + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{B}_i^T \widehat{\mathbf{R}}_i^{-1} \mathbf{B}_i + \mathbf{P}_{N/0}^{-1} = \\ &= \mathbf{B}_N^T \widehat{\mathbf{R}}_N^{-1} \mathbf{B}_N + \overline{\mathbf{P}}_N^{-1}, \end{aligned} \quad (9.69)$$

где

$$\bar{P}_N^{-1} = \sum_{i=1}^{N-1} B_i^T \hat{R}_i^{-1} B_i + P_{N/0}^{-1}.$$

Из уравнения (9.69) следует, что

$$P_N = (\bar{P}_N^{-1} + B_N^T \hat{R}_N^{-1} B_N)^{-1}. \quad (9.70)$$

Используя лемму об обращении матриц (2.69), уравнение (9.70) можно представить в следующем виде:

$$P_N = \bar{P}_N - K_N B_N \bar{P}_N, \quad (9.71)$$

где

$$K_N = \bar{P}_N B_N^T (B_N \bar{P}_N B_N^T + \hat{R}_N)^{-1}.$$

После некоторых алгебраических преобразований уравнения (9.65) можно привести к виду

$$\hat{\Delta}_N = P_N B_N^T \hat{R}_N^{-1} Y_N + P_N \bar{P}_N^{-1} \bar{\Delta}_N, \quad (9.72)$$

где

$$\bar{\Delta}_N = \Phi(t_N, t_{N-1}) \hat{\Delta}_{N-1} = P_N \sum_{i=1}^{N-1} B_i \hat{R}_i^{-1} Y_i,$$

т. е. вектор $\bar{\Delta}_N$ представляет собой оценку вектора Δ_N , полученную по $N-1$ наблюдениям. Подставляя в уравнение (9.72) матрицу P_N в виде (9.71), получаем

$$\hat{\Delta}_N = \bar{\Delta}_N + K_N (Y_N - B_N \bar{\Delta}_N). \quad (9.73)$$

Для вывода последовательного алгоритма оценивания матрицы R соотношения (9.68) представим в виде

$$\begin{aligned} \hat{R}_N = & \frac{1}{N} (Y_N - B_N \hat{\Delta}_N) (Y_N - B_N \hat{\Delta}_N)^T + \\ & + \frac{(N-1)}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} (Y_i - B_i \hat{\Delta}_{i|N}) (Y_i - B_i \hat{\Delta}_{i|N})^T, \end{aligned} \quad (9.74)$$

где

$$B_i \hat{\Delta}_N = A_i \Phi(t_i, t_N) \hat{\Delta}_N = A_i \hat{\Delta}_{i|N}.$$

Если второй член правой части выражения (9.74) аппроксимировать оценкой матрицы \mathbf{R} , полученной для $N-1$ точек выполнения измерений, т. е. величиной $\hat{\mathbf{R}}_{N-1}(N-1)/N$, то соотношение (9.74) можно выразить в последовательной форме следующим образом:

$$\hat{\mathbf{R}}_N = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \hat{\mathbf{R}}_{N-1} + \frac{1}{N} (\mathbf{Y}_N - \mathbf{B}_N \hat{\Delta}_N) (\mathbf{Y}_N - \mathbf{B}_N \hat{\Delta}_N)^T. \quad (9.75)$$

Уравнения (9.73) и (9.75) вместе с (9.71) и

$$\bar{\Delta}_k = \Phi(t_k, t_{k-1}) \hat{\Delta}_{k-1};$$

$$\bar{\mathbf{P}}_k = \Phi(t_k, t_{k-1}) \mathbf{P}_{k-1} \Phi^T(t_k, t_{k-1})$$

образуют алгоритм последовательного оценивания. Преимущество использования выражения (9.75) по сравнению с формулой (9.68) состоит в том, что в каждый момент измерения надо обрабатывать лишь последнюю экспериментальную точку, в то время как при использовании соотношения (9.68) требуется для каждого значения N обрабатывать всю последовательность экспериментальных данных.

Когда N мало, то оценка матрицы \mathbf{R} сильно зависит от начальной оценки состояния. Так как в этом случае оценка состояния может быть недостаточно точной, что может привести к большим колебаниям оценки матрицы \mathbf{R} . Поэтому желательно модифицировать весовую функцию $1/N$. При модификации нужно обеспечить возможность стабилизации последовательной оценки состояния, прежде чем эта последовательная оценка будет использована для коррекции начальной оценки матрицы \mathbf{R} . В работе [78] предложено выражение (9.75) представить в виде

$$\hat{\mathbf{R}}_N = (1 - \gamma_N) \hat{\mathbf{R}}_{N-1} + \gamma_N (\mathbf{Y}_N - \mathbf{B}_N \hat{\Delta}_N) (\mathbf{Y}_N - \mathbf{B}_N \hat{\Delta}_N)^T, \quad (9.76)$$

где

$$\gamma_N = (N-1)(N-2) \dots (N-k) / N^{k+1}; \quad (9.77)$$

k — целое число.

Весовая функция γ равна нулю при всех $N \leq k$, а при $N \rightarrow \infty$ функция γ стремится к $1/N$. Следовательно, при $N \leq k$ матрица $\hat{\mathbf{R}}_N$ совпадает с априорно заданной ма-

трицей \mathbf{R}_0 . Выбор числа k зависит от того, насколько хорошо известна матрица \mathbf{R}_0 ; а именно, чем более точна матрица \mathbf{R}_0 , тем большее значение k можно взять.

Таким образом, оценка вектора $\hat{\Delta}_N$ и матрицы $\hat{\mathbf{R}}$ производится на основе выполнения следующих этапов:

1) выбрать \mathbf{P}_0 , $\hat{\Delta}_0$, $\hat{\mathbf{R}}_0$, k ;

2) принять $N=1$;

3) вычислить $\bar{\Delta}_N = \Phi(t_N, t_{N-1}) \hat{\Delta}_{N-1}$;

4) рассчитать γ_n и $\hat{\mathbf{R}}_N$ по формулам

а) $\gamma_n = (N-1)(N-2) \dots (N-k) / N^{k+1}$;

б) $\hat{\mathbf{R}}_N = (1 - \gamma_n) \hat{\mathbf{R}}_{N-1} + \gamma_n (\mathbf{Y}_N - \mathbf{B}_N \bar{\Delta}_N) (\mathbf{Y}_N - \mathbf{B}_N \bar{\Delta}_N)^T$;

5) вычислить $\hat{\Delta}_N$ по формулам

а) $\bar{\mathbf{P}}_N = \Phi(t_N, t_{N-1}) \mathbf{P}_{N-1} \Phi^T(t_N, t_{N-1})$;

б) $\mathbf{K}_N = \bar{\mathbf{P}}_N \mathbf{B}_N^T (\mathbf{B}_N \bar{\mathbf{P}}_N \mathbf{B}_N^T + \hat{\mathbf{R}}_N)^{-1}$;

в) $\hat{\Delta}_N = \bar{\Delta}_N + \mathbf{K}_N (\mathbf{Y}_N - \mathbf{B}_N \bar{\Delta}_N)$;

6) вернуться к п. 4б и уточнить оценку $\hat{\mathbf{R}}_N$, заменив $\bar{\Delta}_N$ на $\hat{\Delta}_N$;

7) повторить счет по пп. 5б и в;

8) повторять пп. 6 и 7, пока величины $\hat{\mathbf{R}}_N$ и $\hat{\Delta}_N$ не перестанут изменяться;

9) положить $N=N+1$ и вернуться к п. 3.

После того как обработана вся совокупность измерений, можно получить новый номинал, заменив $\hat{\mathbf{X}}_0$ на $\hat{\mathbf{X}}_0 + \hat{\Delta}_0$, и вновь подвергнуть всю совокупность данных статистической обработке, чтобы исправить ошибки из-за нелинейности соотношений, описывающих распространение состояний, и зависимостей, связывающих измерения с переменными состояниями системы.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение изложенной методики рекуррентного оценивания вектора состояния \mathbf{X}_k и корреляционной матрицы ошибок измерений \mathbf{R} .

Примем, что радиолокационная станция, измеряющая наклонную дальность D , угол места γ и азимут A с шагом $\Delta t = 6$ с, ведет наблюдение за ИСЗ, движущимся по низкой околоземной орбите. Для моделирования измерений использовалось решение уравнений движения спутника типа (7.52) с начальными условиями

$$\begin{aligned} x_0 &= 467\,851,3 \text{ м} & \dot{x}_0 &= 7551,08 \text{ м/с} \\ y_0 &= -5\,635\,504,5 \text{ м} & \dot{y}_0 &= 1\,514,23 \text{ м/с} \\ z_0 &= 3\,279\,738,8 \text{ м} & \dot{z}_0 &= 1\,522,83 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Средняя высота орбиты составляла 177 км.

Результаты расчета измеряемых дальностей, углов места и азимутов искажались путем прибавления моделированных независимых случайных ошибок измерений, характеризуемых нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\sigma^2_D = 37,5 \text{ м}^2$; $\sigma^2_\gamma = \sigma^2_A = = 0,625 \cdot 10^{-3} \text{ град}^2$. Полученная совокупность данных содержала 42 вектора измерений, каждый из которых состоял из одиночных измерений дальности, угла места и азимута.

Использованные для расчета номинальной траектории начальные условия движения спутника на 305 м превышали каждую из приведенных координат положения и на 1,51 м/с каждую из проекций скорости. Для начала процедуры оценивания в качестве начальной оценки вектора $\hat{\Delta}_0$ был выбран нулевой вектор, начальные дисперсии ошибок оценивания положения были приняты равными $0,372 \cdot 10^5 \text{ м}^2$, а начальные дисперсии по скоростям были выбраны равными $2,8 \text{ м}^2/\text{с}^2$. Начальные значения корреляционных моментов приняты равными нулю.

Кроме того, требовалось выбрать начальную оценку \hat{R}_0 для матрицы R . Если принять значение \hat{R}_0 значительно меньшим, чем R_n — истинное значение матрицы R , то величина матрицы P будет быстро уменьшаться. По мере того как величина матрицы P стремится к нулю, алгоритм оценивания пренебрегает последующими данными измерений. Однако при игнорировании измерений могут возникнуть большие ошибки в оценке состояния. Чтобы избежать этого, матрицу \hat{R}_0 следует выбирать достаточно большой, с гарантией, что ее величина больше величины матрицы R_n — истинной, но неизвестной величины матрицы R .

В рассматриваемом примере матрица R_n соответствует значению матрицы R , принятому для моделирования ошибок измерений. Было использовано несколько значений матрицы \hat{R}_0 и при этом обнаружено, что оценка состояния сравнительно нечувствительна к \hat{R}_0 в ди-

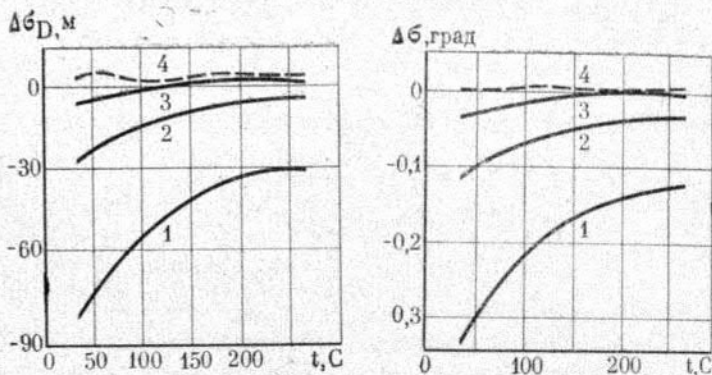


Рис. 9.2.

апазоне $R_{и} \leq \widehat{R}_0 \leq 4R_{и}$. Поэтому здесь приведены результаты для $\widehat{R}_0 = 15R_{и}$.

Ошибки оценивания средних квадратических отклонений измерения дальности σ_D и угла места σ_T приведены на рис. 9.2, где арабскими цифрами отмечены номера итераций. График ошибки оценивания среднего квадратического отклонения σ_A измерения азимутального угла полностью тождественен графику ошибки оценивания величины σ_T . Показанные на рис. 9.2 ошибки определялись как разности между истинной величиной среднего квадратического отклонения соответствующего измерения и оценкой этой величины. Как видно из рис. 9.2, процесс вычисления сходится за четыре итерации.

Каждая итерация выполняется путем обработки всех данных, затем следует возвращение к первому этапу вычислительного алгоритма. После этого результаты измерений вновь обрабатываются с использованием в качестве \widehat{R}_0 последнего значения матрицы \widehat{R}_x из предыдущей итерации. После каждой итерации начальные условия для номинальной траектории уточняются, чтобы улучшить справедливость линеаризации.

Графики, характеризующие ошибки по положению и скорости для первой и пятой итераций, приведены на рис. 9.3 и 9.4. Ошибки определялись по формулам

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \quad \Delta v = \sqrt{\Delta \dot{x}^2 + \Delta \dot{y}^2 + \Delta \dot{z}^2}.$$

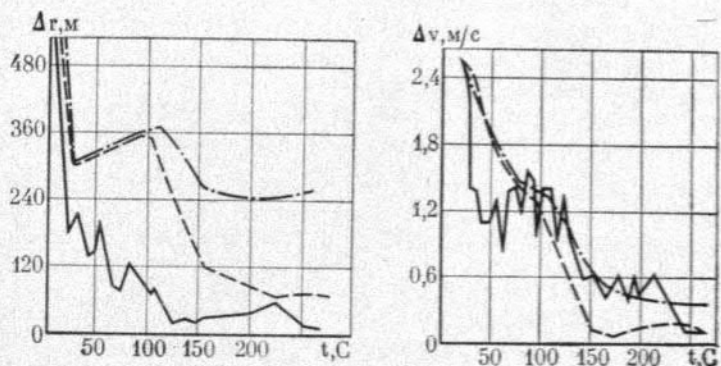


Рис. 9.3.

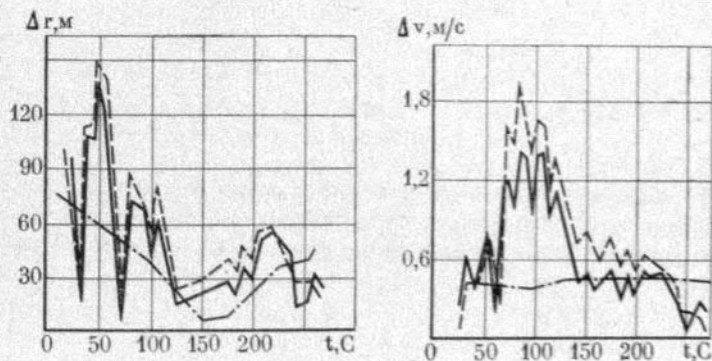


Рис. 9.4.

На рис. 9.3 и 9.4 приведены результаты при $R=R_n$ (сплошные линии), $R=15R_n$ (отмечены точками) и для значения R , полученного с помощью процедуры последовательной оценки по уравнению (9.76) при $k=2$ и $\hat{R}_0=15R_n$ (штриховые линии).

Исследование уравнений алгоритма последовательного оценивания состояния системы позволяет сделать вывод, что малые дисперсии ошибок измерений заставляют алгоритм оценки придавать больший вес результатам измерений, чем предыдущей лучшей оценке состояния. Алгоритм оценивания придает больший вес результатам измерений до тех пор, пока матрица коэффициентов усиления K не

приблизится к нулю. Наоборот, если матрица \mathbf{R} достаточно велика, то на фильтр большее влияние оказывает предыдущая наилучшая оценка состояния. Приведенные на рис. 9.3 и 9.4 результаты демонстрируют эту особенность, так как ошибки Δr и Δv для тех случаев, когда $\mathbf{R} = \mathbf{R}_n$, значительно более чувствительны к индивидуальным измерениям, чем когда $\mathbf{R} = 15\mathbf{R}_n$.

Наконец, как было отмечено выше, при выборе параметра k в уравнении (9.77) надо учитывать, насколько хорошо известна матрица \mathbf{R}_0 , а именно, чем более точно известна $\hat{\mathbf{R}}_0$, тем большее значение k нужно выбирать. Было установлено, что для данного примера достаточно хорошие результаты получаются при $k=2-3$, если $\hat{\mathbf{R}}_0$ находится в диапазоне $\mathbf{R}_n \leq \hat{\mathbf{R}}_0 \leq 15\mathbf{R}_n$.

В заключение следует подчеркнуть, что итерационный процесс обработки совокупности измерений нецелесообразно осуществлять в реальном масштабе времени при текущем слежении за движением ЛА. Рассмотренный метод последовательного оценивания параметров движения ЛА и дисперсий ошибок траекторных измерений может быть эффективно использован для послеполетных исследований.

9.6. Определение управляемого движения ЛА совместной статистической обработкой результатов измерений траекторных средств и инерциальных датчиков

Определение управляемого движения центра масс ЛА по результатам измерений некоторых функций параметров движения его имеет ряд специфических особенностей в сравнении с определением неуправляемого движения. Основная особенность состоит в том, что для управляемого движения ЛА характерно существенное нарушение детерминированности траектории, обусловленное действием управляющих сил. Поэтому определить управляемое движение ЛА можно, лишь замерив с помощью инерциальных датчиков (акселерометров) ускорения, создаваемые поверхностными силами (тягой двигательной установки, аэродинамической силой, солнечным давлением) [79].

Примем, что рассматривается движение центра масс ЛА с управляющим ускорением, описываемым непрерывной или кусочно-непрерывной функцией.

Введем некоторую абсолютную систему координат, начало которой совместим с центром Земли. Движение центра масс летательного аппарата в этой системе координат описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \mathbf{b}(\mathbf{r}) + \mathbf{p}, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (9.78)$$

где \mathbf{V} , \mathbf{r} — соответственно вектор абсолютной скорости и радиус-вектор ЛА; $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ — ускорение силы притяжения; \mathbf{p} — ускорение, создаваемое действием поверхностных сил и зависящее в общем случае как непосредственно от времени (в соответствии с программой управления), так и от параметров движения и различных факторов случайного характера.

Примем, что с центром масс ЛА связана вершина трехгранника, вдоль осей которого установлены оси чувствительности акселерометров. Направления ребер трехгранника неизменно совпадают с направлениями осей выбранной системы координат. При этом предполагается, что поддержание точной ориентации осей акселерометров осуществляется с помощью гиростабилизированной платформы, телескопической системы слежения за звездами или каким-либо иным способом. В этом случае $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ — вектор-функция времени, компоненты которой определяются по показаниям соответствующих акселерометров.

Определение \mathbf{r} и \mathbf{V} путем интегрирования уравнений (9.78) подобно решению задачи прогнозирования неуправляемого движения ЛА. Основное отличие состоит в том, что одна из компонент \mathbf{p} полного вектора ускорения, испытываемого ЛА, известна лишь на интервале измерений. Это отличие обуславливает принципиальную возможность получения решения лишь для моментов времени t , удовлетворяющих неравенствам

$$t_{\text{н}} \leq t < t_{\text{к}} \leq t_{\text{к}}, \quad (9.79)$$

где $t_{\text{н}}$ — время начала измерений; t — текущее время; $t_{\text{к}}$ — время окончания измерений.

Второе отличие заключается в том, что функция $\mathbf{p}(t)$, определяемая в рассматриваемом случае по показаниям

акселерометров, известна с ошибками. Это значит, что при интегрировании уравнений (9.78) приходится принимать $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_н(t)$, где $\mathbf{p}_н(t)$ — измеренное ускорение.

Определение параметров движения центра масс ЛА для моментов времени, удовлетворяющих неравенствам (9.79), может быть произведено численным интегрированием уравнений движения ЛА на универсальной ЭВМ. Для этого информация, поступающая от акселерометров, может, например, преобразовываться устройствами предварительного интегрирования и запоминаться в виде величин, соответствующих приращениям вектора скорости за счет действия поверхностных сил

$$\Delta \mathbf{V}_{p,ni} = \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \mathbf{p}_н(\tau) d\tau. \quad (9.80)$$

Интервалы времени Δt могут соответствовать длительности импульса тяги или шагу интегрирования дифференциальных уравнений (для случая непрерывного действия поверхностных сил). При этом для решения задачи должны выбираться такие методы численного интегрирования дифференциальных уравнений (9.78), которые позволили бы ввести в алгоритм величины $\Delta \mathbf{V}_{p,ni}$. Данному условию, например, удовлетворяет экстраполяционный метод Адамса (см. § 7.4).

Представим приращение вектора скорости $\Delta \mathbf{V}_i$ на каждом шаге интегрирования Δt суммой двух слагаемых $\Delta \mathbf{V}_{b,i}$ и $\Delta \mathbf{V}_{p,i}$, первое из которых обусловлено действием ускорения земного притяжения, а второе — действием измеряемого ускорения, создаваемого поверхностными силами. Тогда в силу линейности экстраполяционной формулы Адамса (7.57)

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \sum_{k=0}^m \alpha_k y'_{i-k} \quad (9.81)$$

решение системы дифференциальных уравнений движения центра масс ЛА (9.78) в некоторой точке $i+1$, соответствующей времени $t_{i+1} = t_i + \Delta t$, запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \Delta \mathbf{r}_i, \\ \mathbf{V}_{i+1} &= \mathbf{V}_i + \Delta \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_i + \Delta \mathbf{V}_{b,i} + \Delta \mathbf{V}_{p,i}, \end{aligned} \quad (9.82)$$

где

$$\Delta r_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} V(\tau) d\tau; \quad \Delta V_{b,i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{b}(\tau) d\tau; \quad \Delta V_{p,i} = \\ = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{p}(\tau) d\tau.$$

Вместо $\Delta V_{p,i}$ при расчете используются поступающие для обработки величины $\Delta V_{p,ni}$, определяемые по зависимости (9.80), а величины Δr_i и $\Delta V_{b,i}$ рассчитываются по формулам (9.81), где $y'_i, y'_{i-1}, \dots, y'_{i-m}$ — соответственно значения вектора абсолютной скорости \mathbf{V} и вектора ускорения силы притяжения \mathbf{b} в точках, соответствующих моментам времени $t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-m}$.

Другой способ учета измерений акселерометров связан с рассмотрением движения ЛА при действии поверхностных сил в качестве возмущенного по отношению к опорному движению, для которого принимается, что $\mathbf{p}=0$ (поверхностные силы отсутствуют).

9.6.1. Способы использования решений уравнений движения ЛА в вариациях

При решении задачи определения управляемого движения центра масс ЛА в качестве опорной может приниматься траектория, определяемая в результате интегрирования уравнений (9.78) для двух вариантов представления ускорения $\mathbf{p}(t)$, создаваемого поверхностными силами 1) $\mathbf{p}(t)=0$ и 2) $\mathbf{p}(t)=\mathbf{p}_n(t)$.

Предположим, что коррекция ориентации трехгранника акселерометров достаточно точна и введем в рассмотрение функцию ошибок собственно акселерометров $\delta \mathbf{p}(t)$, которая может также приближенно учитывать ошибки других видов. Функция $\delta \mathbf{p}(t)$ есть векторная случайная функция с математическим ожиданием $\mathbf{M}[\delta \mathbf{p}(t)]$ и корреляционной функцией $\mathbf{K}_p(t, t')$.

В соответствии с двумя принятыми способами построения опорной траектории возмущающими ускорениями соответственно будут

$$1) \quad \mu_p(t) = \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_n(t) - \delta \mathbf{p}(t) \quad (9.83)$$

и

$$2) \quad \mu_p(t) = -\delta \mathbf{p}(t). \quad (9.84)$$

Тогда уравнения в отклонениях от опорной траектории запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} &= \delta \mathbf{V}, \\ \frac{d}{dt} \delta \mathbf{V} &= \mathbf{b}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - \mathbf{b}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\mu}_p(t). \end{aligned} \quad (9.85)$$

Благодаря наличию кинематической зависимости между положением и скоростью ЛА удобно использовать понятие шестимерного фазового пространства, координаты которого представляют собой компоненты отклонений по положению и скорости центра масс ЛА от опорной траектории, зависящие от времени. Каждая точка этого пространства определяется своим шестимерным вектором отклонений

$$\delta \mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}(t) \\ \delta \mathbf{V}(t) \end{pmatrix}. \quad (9.86)$$

Вектор $\delta \mathbf{q}(t)$ определяет динамическое, или фазовое, состояние центра масс ЛА в момент времени t .

Составим вектор

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\mu}_p(t) \end{pmatrix} \quad (9.87)$$

и матрицу гравитационного градиента $\mathbf{G}(t)$, элементы которой представляют собой производные от $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$ в некоторой точке опорной траектории по координатам этой точки:

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_x(t)}{\partial x} & \frac{\partial b_y(t)}{\partial x} & \frac{\partial b_z(t)}{\partial x} \\ \frac{\partial b_x(t)}{\partial y} & \frac{\partial b_y(t)}{\partial y} & \frac{\partial b_z(t)}{\partial y} \\ \frac{\partial b_x(t)}{\partial z} & \frac{\partial b_y(t)}{\partial z} & \frac{\partial b_z(t)}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (9.88)$$

После линеаризации (9.85) получаем следующие уравнения движения ЛА в вариациях:

$$\dot{\delta \mathbf{q}}(t) = \mathbf{B}(t) \delta \mathbf{q} + \boldsymbol{\eta}(t), \quad (9.89)$$

где $\dot{\delta \mathbf{q}}(t) = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q}(t)$;

$\mathbf{B}(t)$ — матрица переменных коэффициентов, определяемая через $\mathbf{G}(t)$ и единичную матрицу третьего порядка, т. е.

$$\mathbf{B}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{G}(t) & \mathbf{0} \end{vmatrix}. \quad (9.90)$$

Пусть $\Phi(t, t_0)$ — матрица перехода (фундаментальная нормализованная матрица решений уравнений (9.89)), полученная интегрированием системы (9.89) при $\eta(t) = \mathbf{0}$ и матрице начальных условий, равной единичной матрице \mathbf{E} шестого порядка.

По физическому смыслу элементы матрицы $\Phi(t, t_0)$ представляют собой частные производные от некоторого k -го параметра движения в момент времени t по j -му начальному условию движения ($k, j = 1, 2, \dots, 6$).

Используя свойства решений линейных дифференциальных уравнений, записываем решение неоднородной системы (9.89) в виде

$$\delta \mathbf{q}(t) = \Phi(t, t_0) \delta \mathbf{q}(t_0) + \beta(t), \quad (9.91)$$

где

$$\beta(t) = \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) \eta(\tau) d\tau. \quad (9.92)$$

При использовании сферической модели гравитационного поля Земли переходная матрица $\Phi(t, t_0)$ относится к классу симплектических матриц.

Напомним, что матрица четной размерности \mathbf{A} называется симплектической, если выполняется равенство

$$\mathbf{A}^T \mathbf{J} \mathbf{A} = \mathbf{J}, \quad (9.93)$$

где

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{vmatrix}.$$

\mathbf{E} — единичная матрица.

Так как $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}$, то можно считать матрицу \mathbf{J} аналогом мнимой единицы $i = \sqrt{-1}$ в алгебре комплексных чисел.

Из определения (9.93) следует, что симплектическая матрица обладает такими же свойствами по отношению к матрице \mathbf{J} , как и ортогональная матрица по отношению к единичной матрице \mathbf{E} .

Принадлежность матрицы \mathbf{A} к классу симплектических матриц облегчает ее обращение. Умножив уравнение (9.93) справа на \mathbf{A}^{-1} и слева на \mathbf{J} , получим

$$\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{J}\mathbf{A}^T\mathbf{J}, \quad (9.94)$$

так что обращение симплектической матрицы сводится к перестановке ее элементов.

Для того чтобы показать, что переходная матрица $\Phi(t, t_0)$ является симплектической, заметим следующее:

$$\Phi^T(t_0, t_0)\mathbf{J}\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{J},$$

так как $\Phi(t_0, t_0)$ равна единичной матрице. Следовательно, необходимое доказательство будет получено, если удастся показать, что

$$\frac{d}{dt} [\Phi^T(t, t_0)\mathbf{J}\Phi(t, t_0)] = 0.$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = \mathbf{B}(t)\Phi(t, t_0),$$

то, учитывая зависимость (9.90), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\Phi^T(t, t_0)\mathbf{J}\Phi(t, t_0)] &= \Phi^T(t, t_0)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{J}\Phi(t, t_0) + \\ &+ \Phi^T(t, t_0)\mathbf{J}\mathbf{B}(t)\Phi(t, t_0) = \Phi^T(t, t_0) \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^T(t) \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \times \\ &\times \Phi(t, t_0) \Phi^T(t, t_0) \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{G}(t) & \mathbf{0} \end{vmatrix} \Phi(t, t_0) = \\ &= \Phi^T(t, t_0) \begin{vmatrix} -\mathbf{G}^T(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{vmatrix} \Phi(t, t_0) + \Phi^T(t, t_0) \times \\ &\times \begin{vmatrix} \mathbf{G}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E} \end{vmatrix} \Phi(t, t_0) = 0. \end{aligned}$$

Справедливость последнего шага вытекает из того, что $\mathbf{G}^T(t) = -\mathbf{G}(t)$, т. е. матрица гравитационного градиента при использовании сферической модели гравитационного поля Земли является симметрической.

Наконец, если переходную матрицу $\Phi(\tau, t_0)$ разбить на блоки таким образом

$$\Phi(\tau, t_0) = \begin{vmatrix} \Phi_{11}(\tau, t_0) & \Phi_{12}(\tau, t_0) \\ \Phi_{21}(\tau, t_0) & \Phi_{22}(\tau, t_0) \end{vmatrix}, \quad (9.95)$$

то ее обращение выполнится по формуле

$$\Phi^{-1}(\tau, t_0) = \Phi(t_0, \tau) = \left\| \begin{array}{cc} \Phi_{22}^T(\tau, t_0) & -\Phi_{12}^T(\tau, t_0) \\ -\Phi_{21}^T(\tau, t_0) & \Phi_{11}^T(\tau, t_0) \end{array} \right\|, \quad (9.96)$$

что следует из зависимостей (9.93), (9.94).

При применении первого способа построения опорной траектории ($\mathbf{p}(t) = 0$)

$$\beta(t) = \beta_p(t) + \beta_\delta(t), \quad (9.97)$$

а второго способа ($\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_n(t)$) —

$$\beta(t) = \beta_\delta(t), \quad (9.98)$$

где $\beta_p(t)$ и $\beta_\delta(t)$ — соответственно результаты преобразования (9.92) для

$$\eta(\tau) = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{p}_n(\tau) \end{array} \right\| \quad (9.99)$$

и

$$\eta(\tau) = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ -\delta \mathbf{p}(\tau) \end{array} \right\|. \quad (9.100)$$

Для $\beta_p(t)$ на основании (9.92), (9.96) и (9.99) имеем

$$\begin{aligned} \beta_p(t) &= \Phi(t, t_0) \mathbf{d}_p(t, t_0); \quad \mathbf{d}_p(t, t_0) = \\ &= \int_{t_0}^t \left\| \begin{array}{c} -\Phi_{12}^T(\tau, t_0) \mathbf{p}_n(\tau) \\ \Phi_{11}^T(\tau, t_0) \mathbf{p}_n(\tau) \end{array} \right\| d\tau. \end{aligned} \quad (9.101)$$

Ошибка $\beta_\delta(t)$ определяется через $\delta \mathbf{p}(t)$ по формулам, аналогичным (9.101):

$$\begin{aligned} \beta_\delta(t) &= \Phi(t, t_0) \mathbf{d}_\delta(t, t_0); \quad \mathbf{d}_\delta(t, t_0) = \\ &= \int_{t_0}^t \left\| \begin{array}{c} -\Phi_{12}^T(\tau, t_0) \delta \mathbf{p}(\tau) \\ \Phi_{11}^T(\tau, t_0) \delta \mathbf{p}(\tau) \end{array} \right\| d\tau, \end{aligned} \quad (9.102)$$

а математическое ожидание ошибки $\beta_\delta(t)$ — по формуле

$$\begin{aligned} M[\beta_\delta(t)] &= \Phi(t, t_0) M[\mathbf{d}_\delta(t, t_0)], \\ M[\mathbf{d}_\delta(t, t_0)] &= \\ &= \int_{t_0}^t \left\| \begin{array}{c} -\Phi_{12}^T(\tau, t_0) M[\delta \mathbf{p}(\tau)] \\ \Phi_{11}^T(\tau, t_0) M[\delta \mathbf{p}(\tau)] \end{array} \right\| d\tau. \end{aligned}$$

Корреляционную матрицу функции $\beta_0(t)$ можно получить, используя зависимости (9.102) и (1.8):

$$K_{\beta_0}(t) = \Phi(t, t_0) K_{d_0}(t, t_0) \Phi^T(t, t_0).$$

Учитывая очевидные равенства

$$Y = \begin{Bmatrix} \Phi & X \\ P & X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi \\ P \end{Bmatrix} X;$$

$$K_Y = \begin{Bmatrix} \Phi \\ P \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} K_X \\ \Phi^T P^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi K_X \Phi^T & \Phi K_X P^T \\ P K_X \Phi^T & P K_X P^T \end{Bmatrix}$$

и формулы (9.102), записываем выражение для корреляционной матрицы $K_{d_0}(t, t_0)$:

$$\begin{aligned} K_{d_0}(t, t_0) &= \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \begin{Bmatrix} \Phi_{12}^T(\tau, t_0) K_P^-(\tau, \tau') \Phi_{12}(\tau, t_0) \\ -\Phi_{11}^T(\tau, t_0) K_P^-(\tau, \tau') \Phi_{12}(\tau, t_0) \\ -\Phi_{12}^T(\tau, t_0) K_P^-(\tau, \tau') \Phi_{11}(\tau, t_0) \\ \Phi_{11}^T(\tau, t_0) K_P^-(\tau, \tau') \Phi_{11}(\tau, t_0) \end{Bmatrix} d\tau d\tau'. \end{aligned} \quad (9.103)$$

Таким образом, задача определения параметров управляемого движения центра масс ЛА решена в предположении, что известны параметры движения ЛА по опорной траектории и имеются зависимости для вычисления матрицы $\Phi(t, t_0)$.

9.6.2. Последовательная оценка параметров управляемого движения центра масс летательного аппарата в точках измерений (динамическая фильтрация)

Для определения управляемого движения центра масс ЛА большое значение имеет последовательная оценка параметров движения для моментов времени измерений, что позволяет, во-первых, отказаться от запоминания результатов измерений; во-вторых, использовать для решения задачи определения движения ЛА по результатам измерений более простые ЭВМ и, в-третьих, управлять движением ЛА, используя текущие, система-

тически уточняемые результаты статистической обработки измерений.

В качестве опорной траектории при этом может использоваться:

- 1) траектория, определяемая по априорным данным без учета действия поверхностных сил;
- 2) траектория, определяемая с учетом только данных инерциальных измерителей;
- 3) траектория, определяемая с учетом измерений всех средств, ведущих наблюдение за движением ЛА.

Применение первого варианта ограничивается определенными максимально допустимыми начальными отклонениями от опорной траектории и величиной управляющей силы. Для второго варианта сохраняется лишь первое из ограничений. Наиболее благоприятными свойствами обладает третий вариант построения опорной траектории, одного он сложен для практической реализации.

Пусть в качестве опорной взята траектория, при расчете которой учитываются лишь гравитационные силы. Оценка параметров движения центра масс ЛА в точке t_{k+1} по известным значениям оценки $\delta \hat{q}(t_k) = \delta \hat{q}_{k/k}$ отклонений параметров движения от опорной траектории в точке t_k , корреляционной матрицы этой оценки $\mathbf{K}_{\hat{q}_{k/k}}$ и полученным в момент времени t_{k+1} векторам траекторных измерений $\mathbf{H}(t_{k+1}) = \mathbf{H}_{k+1}$ и измерений $\mathbf{p}_u(t_{k+1}) = \mathbf{p}_{u,k+1}$, поступившим от акселерометров, может быть выполнена по зависимостям (4.35) — (4.37). В обозначениях данной задачи эти зависимости имеют вид

$$\delta \hat{q}_{k+1/k+1} = \delta \bar{q}_{k+1/k} + \mathbf{G}_{k+1} [\mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{Z}(\bar{q}_{k+1/k})], \quad (9.104)$$

$$\mathbf{K}_{\delta \hat{q}_{k+1/k+1}} = \mathbf{K}_{\delta \bar{q}_{k+1/k}} - \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{K}_{\delta \bar{q}_{k+1/k}}, \quad (9.105)$$

где $\delta \bar{q}_{k+1/k}$ — предварительная (до использования траекторных измерений, полученных в момент времени t_{k+1}) оценка вектора отклонений параметров движения ЛА от опорной траектории, определяемая на основе зависимостей (9.91), (9.101) выражением

$$\delta \bar{q}_{k+1/k} = \Phi(t_{k+1}, t_k) [\delta \hat{q}_{k/k} + \mathbf{d}_p(t_{k+1}, t_k)];$$

$K_{\delta \bar{q}_{k+1/k}}^-$ — корреляционная матрица предварительной оценки $\delta \bar{q}_{k+1/k}$, определяемая по формуле

$$K_{\delta \bar{q}_{k+1/k}}^- = \Phi(t_{k+1}, t_k) [K_{\delta \hat{q}_{k/k}} + K_{d\delta}(t_{k+1}, t_k)] \times \\ \times \Phi^T(t_{k+1}, t_k);$$

$$G_{k+1} = K_{\delta \bar{q}_{k+1/k}}^- A_{k+1}^T (A_{k+1} K_{\delta \bar{q}_{k+1/k}}^- A_{k+1}^T + K_{H_{k+1}})^{-1};$$

A_{k+1} — матрица частных производных от измеряемых траекторными средствами в момент t_{k+1} функций по искомым параметрам движения в этот же момент времени; $K_{H_{k+1}}$ — корреляционная матрица ошибок траекторных измерений в момент времени t_{k+1} ; $Z(\bar{q}_{k+1/k})$ — вектор расчетных значений измеряемых в момент времени t_{k+1} траекторными средствами функций, полученных с использованием предварительных оценок параметров движения $\bar{q}_{k+1/k}$.

Рассмотрим возможные способы расчета матриц $\Phi(t_{k+1}, t_k)$, $d_p(t_{k+1}, t_k)$ и $K_{d\delta}(t_{k+1}, t_k)$.

В случае полета ЛА с малой тягой в пределах определенных интервалов времени опорную траекторию можно считать достаточно близкой к кеплеровой. Тогда, разбив исследуемую часть траектории на маловозмущенные участки (t_k, t_{k+1}) , можно для расчета частных производных от текущих параметров движения в точке t_{k+1} по параметрам движения в момент времени t_k воспользоваться соответствующими зависимостями кеплеровой теории. Путем соответствующего преобразования возможен переход к частным производным в исследуемой системе координат и составление матрицы $\Phi(t_{k+1}, t_k)$. После этого, применяя соотношения для подматриц $\Phi_{11}(t_{k+1}, t_k)$ и $\Phi_{12}(t_{k+1}, t_k)$ матрицы $\Phi(t_{k+1}, t_k)$, можно по формулам (9.101), (9.103) определить матрицы $d_p(t_{k+1}, t_k)$ и $K_{d\delta}(t_{k+1}, t_k)$.

Другой способ расчета матриц $\Phi(t_{k+1}, t_k)$, $d_p(t_{k+1}, t_k)$ и $K_{d\delta}(t_{k+1}, t_k)$ основан на представлении матрицы $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ в пределах небольших последовательных отрезков времени $[t_k, t_{k+1}]$ разложением по формуле Тейлора. Для этого рассмотрим способ непосредственного представления решения системы уравнений (9.89) матричной

формулой Тейлора, позволяющей получить выражения для $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ и $d_p(t_{k+1}, t_k)$ в удобном для практического использования виде.

Запишем приближенное решение матричного уравнения (9.89) в окрестности точки t_k при $\eta(t)=0$ в виде суммы $M+1$ членов формулы Тейлора:

$$\delta q(t) = \sum_{m=0}^M \frac{(t-t_k)^m}{m!} \delta q^{(m)}(t_k), \quad (9.106)$$

где $\delta q^{(m)}(t_k)$ — вектор производных по времени текущих параметров движения, отнесенных к моменту времени t_k .

Приняв в (9.89) $\eta(t)=0$ и последовательно дифференцируя, получим

$$\delta q^{(m)}(t) = \sum_{r=0}^{m-1} C_{m-1}^r B^{(r)}(t) \delta q^{(m-r-1)}(t), \quad (9.107)$$

$$m = 1, 2, \dots, M,$$

где C_{m-1}^r — биномиальные коэффициенты; $B^{(r)}(t)$ — матрицы, получаемые r -кратным дифференцированием матрицы $B(t)$.

Полагая в (9.107) $t=t_k$; $\delta q^{(l)}(t_k) = \delta q_k^{(l)}$; $B^{(r)}(t_k) = B_k^{(r)}$ и последовательно выражая все производные $\delta q_k^{(m)}$ через δq_k , после подстановки в (9.106) получаем требуемый результат.

Так, например, приняв $M=3$, будем иметь

$$\delta q^{(1)}(t) = B(t) \delta q(t);$$

$$\delta q^{(2)}(t) = B^{(1)}(t) \delta q(t) + B(t) \delta q^{(1)}(t) = B^{(1)}(t) \delta q(t) +$$

$$+ B^{(2)}(t) \delta q(t) = [B^{(1)}(t) + B^{(2)}(t)] \delta q(t);$$

$$\delta q^{(3)}(t) = B(t) \delta q^{(2)}(t) + 2B^{(1)}(t) \delta q^{(1)}(t) + B^{(2)}(t) \delta q(t) =$$

$$= [B^{(2)}(t) + 2B^{(1)}(t) B(t) + B(t) B^{(1)}(t) + B^3(t)] \delta q(t)$$

и

$$\delta q(t) = \left[E + (t-t_k) B_k + \frac{(t-t_k)^2}{2!} (B_k^{(1)} + B_k^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{(t-t_k)^3}{3!} (B_k^{(2)} + 2B_k^{(1)} B_k + B_k B_k^{(1)} + B_k^3) \right] \delta q_k. \quad (9.108)$$

Подставляя в (9.108) выражение (9.90) для \mathbf{B}_k и принимая во внимание, что $\delta \mathbf{q}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k) \delta \mathbf{q}_k$, получаем следующее представление $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ через первые члены формулы Тейлора

$$\begin{aligned} \Phi(t_{k+1}, t_k) = & \left\| \begin{array}{c} \mathbf{E} \ 0 \\ 0 \ \mathbf{E} \end{array} \right\| + (t_{k+1} - t_k) \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{G}_k \end{array} \right\| \mathbf{E} \left\| + \right. \\ & + \frac{(t_{k+1} - t_k)^2}{2!} \left\| \begin{array}{c} \mathbf{G}_k \ 0 \\ \mathbf{G}_k^{(1)} \ \mathbf{G}_k \end{array} \right\| + \\ & + \frac{(t_{k+1} - t_k)^3}{3!} \left\| \begin{array}{c} \mathbf{G}_k^{(1)} \ \mathbf{G}_k \\ \mathbf{G}_k^{(2)} + \mathbf{G}_k^2 \ 2\mathbf{G}_k^{(1)} \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (9.109)$$

Подставляя в (9.101) подматрицы $\Phi^{T_{12}}$ и $\Phi^{T_{11}}$ матрицы $\Phi(t_{k+1}, t_k)$, определяемой выражением (9.109), полагая $t_0 = t_k$, $t = t_{k+1}$ и учитывая симметричность матрицы \mathbf{G}_k , получаем формулу для расчета матрицы $\mathbf{d}_p(t_{k+1}, t_k)$ на интервалах $[t_k, t_{k+1}]$:

$$\mathbf{d}_p(t_{k+1}, t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| \begin{array}{c} - \left[(\tau - t_k) \mathbf{E} + \frac{(\tau - t_k)^2}{2!} \mathbf{G}_k \right] \mathbf{p}_n(\tau) \\ \left[\mathbf{E} + \frac{(\tau - t_k)^2}{2!} \mathbf{G}_k + \frac{(\tau - t_k)^3}{3!} \mathbf{G}_k^{(1)} \right] \mathbf{p}_n(\tau) \end{array} \right\| d\tau. \quad (9.110)$$

Необходимо еще получить рекуррентную зависимость для определения корреляционной функции $\mathbf{K}_{\delta \mathbf{d}}$ в процессе поступления и статистической обработки измерительной информации.

Для этой цели можно воспользоваться зависимостями (9.109), (9.110) и представлением случайных векторов ошибок измерений $\delta \mathbf{p}(t)$ приближенными каноническими разложениями

$$\delta \mathbf{p}(t) = \sum_{v=1}^t \gamma_v \delta \mathbf{p}_v(t), \quad (9.111)$$

где γ_v — некоррелированные случайные величины с дисперсиями σ_v^2 ; $\delta \mathbf{p}_v(t)$ — известные вектор-функции.

На основе зависимостей (9.110), где вместо $\mathbf{d}_p(t_{k+1}, t_k)$ и $\mathbf{p}_n(\tau)$ подставляются соответственно $\mathbf{d}_{\delta \mathbf{p}_v}(t_{k+1}, t_k)$

и $\delta \mathbf{p}_v(t)$, получим рекуррентную формулу для расчета значений

$$\begin{aligned} & \mathbf{d}_{\delta_v}(t_{k+1}, t_k) = \\ & = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| \begin{aligned} & - \left[(\tau - t_k) \mathbf{E} + \frac{(\tau - t_k)^2}{2!} \mathbf{G}_k \right] \delta \mathbf{p}_v(\tau) \\ & \left[\mathbf{E} + \frac{(\tau - t_k)^2}{2!} \mathbf{G}_k + \frac{(\tau - t_k)^3}{3!} \mathbf{G}_k^{(1)} \right] \delta \mathbf{p}_v(\tau) \end{aligned} \right\| d\tau. \end{aligned}$$

Например, для $\delta \mathbf{p}_1(\tau) = \delta \mathbf{p}_1$, где $\delta \mathbf{p}_1$ — постоянный вектор, получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{d}_{\delta_1}(t_{k+1}, t_k) = \\ & = \left\| \begin{aligned} & - \left[\frac{(\Delta t_k)^2}{2} \mathbf{E} + \frac{1}{24} (\Delta t_k)^4 \mathbf{G}_k \right] \delta \mathbf{p}_1 \\ & \left[\Delta t_k \mathbf{E} + \frac{1}{6} (\Delta t_k)^3 \mathbf{G}_k + \frac{1}{24} (\Delta t_k)^4 \mathbf{G}_k^{(1)} \right] \delta \mathbf{p}_1 \end{aligned} \right\|, \end{aligned}$$

где

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

В соответствии с (9.111) для корреляционной матрицы $\mathbf{K}_{\delta_0}(t_{k+1}, t_k)$ имеем формулу

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\delta_0}(t_{k+1}, t_k) &= M[\mathbf{d}_{\delta_0}(t_{k+1}, t_k) \mathbf{d}_{\delta_0}^T(t_{k+1}, t_k)] = \\ &= \sum_{v=1}^l \sigma_{\delta_v}^2 \mathbf{d}_{\delta_v}(t_{k+1}, t_k) \mathbf{d}_{\delta_v}^T(t_{k+1}, t_k). \end{aligned}$$

Таким образом, получены все необходимые зависимости для оценивания по формулам (9.104) — (9.105) отклонений параметров движения центра масс ЛА от опорной траектории на основе статистической обработки измерений траекторных средств и инерциальных датчиков. Прибавив найденные поправки к параметрам движения центра масс ЛА по опорной траектории, получим оценки параметров действительного движения. В случае, если время, отведенное на решение задачи определения управляемого движения ЛА, позволяет повторить решение по алгоритму сглаживания, изложенному в § 4.1, то целесообразно это сделать. Процедура сглаживания позволяет, как показано в гл. 4 на примере оценивания неуправляемого движения ЛА, существенно повысить точность определения движения ЛА по результатам измерений.

Методика оценивания управляемого движения ЛА, рассмотренная в данном параграфе, предусматривает использование траекторных измерений и измерений, полученных от акселерометров, установленных на борту ЛА. При наличии только траекторных измерений задача определения управляемого движения ЛА может быть решена на основе использования кинематической модели движения ЛА по методике, изложенной в гл. 5 и 8.

10

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕУПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ ЛА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

10.1. Постановка задачи

Задача определения неуправляемого движения ЛА на основе статистической обработки траекторных измерений решается в два этапа. На первом этапе производится статистическая обработка результатов траекторных измерений с целью определения параметров траектории (начальных условий движения ЛА) q_1, q_2, \dots, q_6 . На втором этапе, используя уравнения движения и полученные оценки параметров траектории, рассчитывают параметры движения ЛА для заданных моментов времени. При решении этой задачи исходными данными для расчета движения ЛА являются результаты траекторных измерений h_i ($i=1, 2, \dots, N$) и принятая модель движения.

Результаты траекторных измерений искажены ошибками, обусловленными несовершенством измерительной аппаратуры и методики учета условий, в которых производятся измерения. Кроме того, при обработке измерений имеют место ошибки за счет погрешностей привязки измерений к единому времени и геодезической привязки измерительных средств к центру общего земного эллипсоида, за счет неточного задания вероятностных характеристик ошибок траекторных измерений и т. п. Параметры, входящие в формулы для расчета действующих на ЛА сил, известны недостаточно достоверно. В силу этого найденные значения параметров движения ЛА

также содержат ошибки. Для оценки точности определения движения ЛА необходимо установить основные факторы, от которых зависят ошибки определения движения ЛА, и оценить влияние каждого из этих факторов на точность определения параметров движения.

Анализ результатов практического применения алгоритма определения неуправляемого движения ЛА на основе статистической обработки траекторных измерений, изложенного в гл. 9, позволяет сделать вывод о том, что точность определения движения ЛА в основном зависит от следующих факторов:

- состава, количества и точности траекторных измерений;
- точности геодезической привязки измерительных средств;
- точности параметров атмосферы и гравитационного поля Земли, используемых при расчете сил, действующих на ЛА в полете.

Алгоритм оценки точности определения параметров траектории на основе статистической обработки траекторных измерений, позволяющий проанализировать как состав, точность и количество измерений, а также взаимное положение измерительных средств и траектории ЛА влияют на характеристики точности оценки этих параметров, приведен в гл. 9. В данной главе рассмотрим методы оценки влияния перечисленных выше факторов на точность определения движения ЛА с тем, чтобы обосновать рациональные требования к точностным характеристикам проектируемых измерительных средств и выработать рекомендации по оптимальному использованию существующих и разрабатываемых траекторных измерительных средств, точности их геодезической привязки и использованию методов статистической обработки результатов измерений.

10.2. Оценка точности определения неуправляемого движения ЛА

Текущие значения параметров движения p_1, p_2, \dots, p_6 ЛА связаны с параметрами траектории q_1, q_2, \dots, q_6 нелинейными соотношениями

$$p_k = p_k(t; q_1, q_2, \dots, q_6), \quad k=1, 2, \dots, 6, \quad (10.1)$$



Рис. 10.1.

представляющими собой решения одной из систем дифференциальных уравнений движения ЛА, рассмотренных в § 7.3. Использование при интегрировании уравнений движения ЛА не истинных значений начальных условий движения, а их статистических оценок, полученных математической обработкой результатов траекторных измерений, приводит к тому, что результат прогнозирования движения ЛА является случайной величиной даже при детерминированном задании всех сил, действующих на ЛА.

Достаточно строгую оценку влияния ошибок задания начальных условий на точность прогнозирования, т. е. на точность определения параметров движения ЛА для некоторого момента t , можно произвести лишь на основе статистического моделирования исследуемого процесса.

Схематическая структура алгоритма исследования влияния ошибок параметров траектории на точность определения движения ЛА представлена на рис. 10.1.

Нормальный закон распределения ошибок в оценках начальных условий движения (параметров траектории) и числовые характеристики этого закона служат входными данными для блока выработки случайных ошибок параметров траектории. На основе этой информации в нем вырабатываются значения случайных ошибок в параметрах траектории, подчиняющихся нормальному закону распределения с заданными характеристиками.



Ошибки, сложенные с номинальными значениями параметров траектории, образуют так называемые возмущенные значения параметров траектории, которые и используются при интегрировании уравнений движения ЛА. Таким образом, каждое решение представляет собой случайную реализацию.

Задаваясь числовой характеристикой достоверности результата (доверительными границами), можно найти необходимое количество случайных реализаций, удовлетворяющих параметрам траектории, выдаваемых блоком А. Статистическая обработка этих решений (условно принимается, что они также подчиняются нормальному закону распределения, хотя, строго говоря, вследствие нелинейности решений уравнений движения этот закон видоизменяется) позволяет определить математическое ожидание и матрицу вторых моментов параметров движения ЛА, соответствующих времени t .

Такой путь решения задачи связан с чрезвычайно большой затратой машинного времени (например, для получения результата с достоверностью примерно равной 0,9 необходимо обработать около 50 реализаций). Вместе с тем очень часто требуется получить результаты с меньшей достоверностью, имеющие более грубый характер, но достаточно просто.

Для приближенной оценки точности определения параметров движения ЛА p_1, p_2, \dots, p_6 примем, что связь

между малыми отклонениями параметров траектории δq_j ($j=1, 2, \dots, 6$) и текущих параметров движения δp_k ($k=1, 2, \dots, 6$) задается линейной зависимостью

$$\delta p_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \delta q_j, \text{ или в матричной форме записи}$$

$$\delta P = \left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\| \delta Q, \quad (10.2)$$

где

$$\delta P = \left\| \begin{array}{c} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ \vdots \\ \delta p_6 \end{array} \right\|; \quad \delta Q = \left\| \begin{array}{c} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \delta q_6 \end{array} \right\|;$$

$\left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\|$ — матрица частных производных текущих параметров движения ЛА по параметрам траектории, вычисляемая по формулам, приведенным в § 9.3.

Для оценки точности определения движения ЛА необходимо найти матрицу математических ожиданий $M_{\delta P}$ и матрицу корреляционных моментов

$$K_{\delta P} = \left\| \begin{array}{cccc} K_{\delta p_1 \delta p_1} & K_{\delta p_1 \delta p_2} & \dots & K_{\delta p_1 \delta p_6} \\ K_{\delta p_2 \delta p_1} & K_{\delta p_2 \delta p_2} & \dots & K_{\delta p_2 \delta p_6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{\delta p_6 \delta p_1} & K_{\delta p_6 \delta p_2} & \dots & K_{\delta p_6 \delta p_6} \end{array} \right\|$$

ошибок оценок текущих параметров движения ЛА.

Для нахождения матрицы $M_{\delta P}$ применим к выражению (10.2) операцию определения математического ожидания. При этом, полагая, что частные производные от текущих параметров движения ЛА по параметрам траектории известны точно, можем записать

$$M_{\delta P} = \left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\| M_{\delta Q},$$

где $M_{\delta Q}$ — матрица математических ожиданий ошибок оценок параметров траектории.

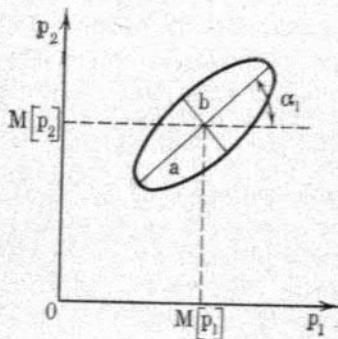


Рис. 10.2.

На основании (10.2) и теоремы 1.1, учитывая, что ошибки δq_j ($j=1, 2, \dots, 6$) определяются как зависимые случайные величины, получаем

$$\mathbf{K}_{\delta p} = \left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\| \mathbf{K}_Q \left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\|^T, \quad (10.3)$$

или в соответствии с (9.3)

$$\mathbf{K}_{\delta p} = \hat{\sigma}_0^2 \left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\| \mathbf{B}^{-1} \left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\|^T.$$

В шестимерном пространстве параметров движения p_k ($k=1, 2, \dots, 6$) область их возможного разброса относительно математических ожиданий с заданной вероятностью P_c попадания в эту область ограничена поверхностью эллипсоида ошибок. Эллипсоид ошибок определяется корреляционной матрицей $\mathbf{K}_{\delta p}$. Центр эллипсоида совпадает с концом вектора математических ожиданий параметров p_1, p_2, \dots, p_6 .

В наиболее наглядном случае $k=1, 2$ пространство параметров p_1, p_2 представляет собой плоскость, а эллипсоид ошибок — эллипс ошибок (рис. 10.2). Вероятность P_c попадания конца вектора \mathbf{P} (p_1, p_2) внутрь эллипса определяется выражением

$$P_c = 1 - e^{-r^2/2}, \quad (10.4)$$

где $\zeta = a/\sigma_{p_1} = b/\sigma_{p_2}$; a и b — соответственно большая и малая полуоси эллипса ошибок.

Из формулы (10.4) следует, что при $\zeta = 1$ $P_\zeta \approx 0,39$; при $\zeta = 3$ $P_\zeta \approx 0,99$. Заметим, что $P_1 \approx 0,39$ определяет вероятность попадания вектора \mathbf{P} в среднеквадратический (единичный) эллипс ошибок, $P_3 \approx 0,99$ — вероятность попадания в полный эллипс.

Параметры единичного эллипса (большая полуось a_1 , малая полуось b_1 и угол α_1 между направлением большой полуоси a_1 и осью координат p_1) при известных значениях элементов корреляционной матрицы

$$K_{\delta p} = \begin{vmatrix} \sigma_{\delta p, 1}^2 & K_{\delta p, 1 \delta p, 2} \\ K_{\delta p, 2 \delta p, 1} & \sigma_{\delta p, 2}^2 \end{vmatrix}$$

могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_1 &= \frac{2K_{\delta p, 1 \delta p, 2}}{\sigma_{\delta p, 1}^2 - \sigma_{\delta p, 2}^2}; \\ a_1^2 &= \sigma_{\delta p, 1}^2 + K_{\delta p, 1 \delta p, 2} \operatorname{tg} \alpha_1; \\ b_1^2 &= \sigma_{\delta p, 2}^2 + K_{\delta p, 1 \delta p, 2} \operatorname{tg} \alpha_1. \end{aligned}$$

Рассмотренный случай может быть использован, например, для определения эллипса ошибок прогнозирования точки падения головной части баллистической ракеты, обусловленных ошибками задания начальных условий движения.

10.3. Влияние ошибок геодезической привязки измерительных средств на точность определения движения ЛА

При статистической обработке результатов измерений уменьшается влияние случайных ошибок измерений на точность оценивания искомым параметров. Однако ошибки геодезической привязки измерительного средства при этом не исключаются и целиком входят в оценки искомым параметров. Так возникает необходимость рассмотрения влияния этих ошибок на точность определения движения ЛА по результатам наблюдения за ЛА наземных траекторных измерительных средств.

Ошибки геодезической привязки азимутального направления δA и точки стояния измерительного средства

по долготе δL , широте δB , высоте δH , т. е. измерительной системы координат $OX_H Y_H Z_H$, к общему земному эллипсоиду, параметры которого используются при определении движения ЛА, слагаются из ошибок триангуляционной привязки измерительного средства на эллипсоиде Красовского и ошибок привязки эллипсоида Красовского к общему земному эллипсоиду.

Эти ошибки приводят к возникновению дополнительных погрешностей δh_{r_i} при определении используемых в алгоритме статистической обработки измерений разностей между расчетными значениями измеряемых функций, определяемых в измерительной системе координат, и их измеренными значениями.

Величины δh_{r_i} ($i=1, 2, \dots, N$) могут быть найдены с помощью приближенных зависимостей вида

$$\delta h_{r_i} = \frac{\partial z_i}{\partial L} \delta L + \frac{\partial z_i}{\partial B} \delta B + \frac{\partial z_i}{\partial H} \delta H + \frac{\partial z_i}{\partial A} \delta A.$$

Ошибки геодезической привязки измерительной системы координат δL , δB , δH , δA являются случайными величинами и могут быть охарактеризованы математическими ожиданиями

$$M_{\delta L}, M_{\delta B}, M_{\delta H}, M_{\delta A} \quad (10.5)$$

и корреляционной матрицей

$$K_r = \begin{pmatrix} K_{\delta L \delta L} & K_{\delta L \delta B} & K_{\delta L \delta H} & K_{\delta L \delta A} \\ K_{\delta B \delta L} & K_{\delta B \delta B} & K_{\delta B \delta H} & K_{\delta B \delta A} \\ K_{\delta H \delta L} & K_{\delta H \delta B} & K_{\delta H \delta H} & K_{\delta H \delta A} \\ K_{\delta A \delta L} & K_{\delta A \delta B} & K_{\delta A \delta H} & K_{\delta A \delta A} \end{pmatrix}. \quad (10.6)$$

В [54] указывается, например, что точность определения астрономических широт, долгот и азимутов первого класса характеризуется средними квадратическими отклонениями: (0,3—0,7)".

Если известны вероятностные характеристики ошибок геодезической привязки (10.5) и (10.6), то можно найти математическое ожидание $M_{\delta H, r}$ и корреляционную матрицу $K_{\delta H, r}$ вектора ошибок δH_r , вызванных ошибками геодезической привязки измерительной системы координат:

$$M_{\delta H, r} = \Phi_r \| M_{\delta L}, M_{\delta B}, M_{\delta H}, M_{\delta A} \|^\tau;$$

$$K_{\delta H, r} = \Phi_r K_r \Phi_r^\tau,$$

где

$$\Phi_{\Gamma} = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{14} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{N1} & \varphi_{N2} & \dots & \varphi_{N4} \end{vmatrix}$$

— матрица частных производных от измеряемых траекторными средствами параметров по координатам L, B, H измерительного средства и азимутальному направлению A соответствующей измерительной системы координат причем $\varphi_{i1} = \partial z_i / \partial L$, $\varphi_{i2} = \partial z_i / \partial B$, $\varphi_{i3} = \partial z_i / \partial H$, $\varphi_{i4} = \partial z_i / \partial A$; $i = 1, 2, \dots, N$.

Знание корреляционной матрицы $K_{\delta H, \Gamma}$ ошибок измерений, обусловленных случайными ошибками геодезической привязки измерительной системы координат, позволяет найти матрицу $B_{\Gamma} = A^T K_{\delta H, \Gamma}^{-1} A$, рассчитать корреляционную матрицу ошибок параметров траектории $K_{\hat{Q}, \Gamma} = B_{\Gamma}^{-1}$ и по формуле (10.3) определить корреляционную матрицу ошибок текущих параметров движения ЛА, вызванных ошибками геодезической привязки измерительной системы координат:

$$K_{\delta p, \Gamma} = \left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\| K_{\hat{Q}, \Gamma} \left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\|^T. \quad (10.7)$$

Задача оценки влияния ошибок геодезической привязки измерительной системы координат на точность определения движения ЛА решена в предположении, что известны зависимости для частных производных от текущих параметров движения по параметрам траектории $\partial p_k / \partial q_i$ (элементов матрицы $\left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\|$), частных производных от измеряемых функций по параметрам траектории $\partial z_i / \partial q_j$ (элементов матрицы A) и частных производных от измеряемых функций по геодезическим координатам L, B, H, A (элементов матрицы Φ_{Γ}).

Формулы для расчета элементов матриц

$$\left\| \frac{\partial p_1, p_2, \dots, p_6}{\partial q_1, q_2, \dots, q_6} \right\|$$

и A приведены в § 9.3.

Вывод формул для определения частных производных от измеряемых функций по геодезическим координатам L, B, H измерительного средства покажем на примере дифференцирования зависимости для наклонной дальности, измеряемой радиодальномером:

$$D = \sqrt{(x_T - x_{T,ин})^2 + (y_T - y_{T,ин})^2 + (z_T - z_{T,ин})^2}, \quad (10.8)$$

где x_T, y_T, z_T — текущие координаты ЛА в гринвичской системе координат; $x_{T,ин}, y_{T,ин}, z_{T,ин}$ — координаты измерительного средства в гринвичской системе координат, вычисляемые по формулам (7.13).

Дифференцируя выражение (10.8) и учитывая (7.13), получаем

$$\frac{\partial D}{\partial L} = \frac{1}{D} (x_T y_{T,ин} - y_T x_{T,ин});$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial B} = \frac{1}{D} \left\{ \left[\frac{N^2}{a^2_3} (1 - e^2_3) + H \right] [(x_T - x_{T,ин}) \cos L + \right. \\ \left. + (y_T - y_{T,ин}) \sin L] \sin B - \left[\frac{N^2}{a^2_3} - N e^2_3 + H \right] \times \right. \\ \left. \times (z_T - z_{T,ин}) \cos B \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial H} = - \frac{1}{D} [(x_T - x_{T,ин}) \cos L \cos B + (y_T - y_{T,ин}) \sin L \cos B + \\ + (z_T - z_{T,ин}) \sin B]. \end{aligned}$$

Формулы для расчета частных производных от других измеряемых функций могут быть получены аналогичным образом на основе использования зависимостей типа (8.11).

Таким образом, изложенная методика позволяет составить полный алгоритм для проведения исследований влияния погрешностей геодезической привязки измерительных средств на точность прогнозирования движения ЛА по результатам траекторных измерений. Эта методика позволяет также решать задачи по обоснованию допустимых ошибок геодезической привязки измерительных средств при заданной точности определения параметров траектории ЛА.

10.4. Влияние ошибок в расчетных значениях сил, действующих на ИСЗ в полете, на точность прогнозирования движения ИСЗ по результатам измерений

На движение ИСЗ действует целый ряд возмущающих факторов, важнейшими из которых являются сопротивление атмосферы, несферичность Земли, притяжение Луны и Солнца, световое давление. Однако наибольшие возмущения в движении близких спутников обусловлены сопротивлением атмосферы и сжатием Земли (второй зональной гармоникой C_{20} потенциала притяжения Земли). Поэтому рассмотрим влияние этих возмущений на движение ИСЗ и возможности уточнения параметров атмосферы и гравитационного поля Земли по наблюдениям за движением спутников.

Плотность атмосферы быстро уменьшается с увеличением высоты над поверхностью Земли. Поэтому спутник, движущийся по эллиптической орбите, испытывает эффект торможения главным образом на небольшом участке орбиты, который расположен ближе всего к Земле. Следовательно, в первом приближении воздействие атмосферы сводится к торможению спутника всякий раз при прохождении им перигея. Вследствие этого высота перигея остается почти постоянной, а высота апогея уменьшается, т. е. каждый последующий апогей менее удален от Земли, чем предыдущий. Орбита спутника все более приближается к круговой (рис. 10.3). При этом монотонно уменьшается большая полуось a и эксцентриситет e орбиты, а следовательно, и период обращения спутника, связанный с величиной большой полуоси зависимостью

$$T_{\pi} = 2\pi \sqrt{a^3/\mu}.$$

Прогнозирование движения ИСЗ обычно осуществляется на основе статистической обработки результатов измерений параметров его движения, полученных за время, равное нескольким периодам обращения спутника по орбите, которые позволяют определить параметры орбиты и скорость изменения периода D . Затем эти величины прогнозируются на n оборотов вперед, для того чтобы предсказать время n -го экваториального пересечения при движении спутника из южного в северное полушарие. При прогнозировании скорость изменения периода

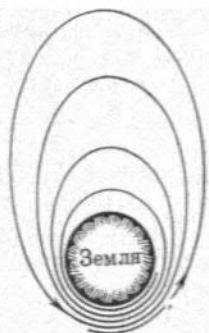


Рис. 10.3.

D обычно предполагается постоянной. При этом если пренебречь всеми возмущениями, кроме лобового сопротивления, то спутник пересечет плоскость экватора на n -м витке через интервал времени

$$\Delta T_n \approx nT_0 + (n^2/2)D,$$

где T_0 — начальный период.

Однако действительная скорость изменения периода колеблется около найденной из измерений оценки D скорости изменения периода и эти флюктуации вызывают ошибки в ΔT_n . Задача заключается в определении среднего квадратического отклонения величины ΔT_n за счет флюктуаций ускорения ИСЗ, вызываемого действием силы лобового сопротивления.

Анализ характера изменения параметров атмосферы во времени показывает, что флюктуации плотности воздуха имеют синусоидальную составляющую с 27-дневным периодом и случайную составляющую. Поэтому ускорение силы лобового сопротивления также целесообразно разложить на синусоидальную и случайную составляющие.

Функция распределения случайных флюктуаций зависит от высоты перигея, эксцентриситета, местного времени прохождения спутником перигея, положения Солнца и других факторов и в настоящее время неизвестна. Поэтому ошибку предсказанного времени экваториального пересечения, вызванную случайными флюк-

туациями плотности атмосферы, определим для двух различных случаев, которые определяются физическими границами задачи.

На верхней границе случайные флюктуации лобового сопротивления предполагаются независимыми от оборота к обороту. На нижней границе предполагается, что флюктуации постоянны на каждом интервале сглаживания длиной k оборотов, но случайным образом изменяются от интервала к интервалу.

Рассмотрим, как могут быть определены ошибки орбитального прогнозирования, вызванные случайными флюктуациями для двух указанных случаев.

Предположим, что времена экваториального пересечения прогнозируются при допущении постоянства скорости изменения периода, однако существуют случайные флюктуации относительно осредненного изменения периода. Обозначим эти случайные флюктуации через $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Тогда после n оборотов ошибка предсказанного времени

$$\delta T_n = n\rho_1 + (n-1)\rho_2 + \dots + \rho_n. \quad (10.9)$$

Если случайные величины ρ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) независимы и характеризуются средним квадратическим отклонением $\sigma_{\rho_j} = \sigma_\rho$, то среднее квадратическое отклонение случайной величины δT_n выразится так:

$$\sigma_{\delta T_n} = \sigma_\rho \sqrt{\sum_{\mu=1}^n \mu^2} = \sigma_\rho \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}. \quad (10.10)$$

Приняв допущение о том, что флюктуации лобового сопротивления постоянны на интервале сглаживания длиной k оборотов, но случайны от интервала к интервалу, имеем

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1 &= \bar{\rho}_2 = \dots = \bar{\rho}_q = \bar{\rho}_A; \\ \bar{\rho}_{q+1} &= \bar{\rho}_{q+2} = \dots = \bar{\rho}_{q+k} = \bar{\rho}_B; \\ \bar{\rho}_{q+k+1} &= \bar{\rho}_{q+k+2} = \dots = \bar{\rho}_{q+2k} = \bar{\rho}_C \end{aligned}$$

и т. д.

Возможные значения q лежат в интервале от 1 до k . При отсутствии конкретных данных всем значениям q

приписываются равные веса. Когда $j=1$, $\bar{\rho}_j = \bar{\rho}_A$; когда $j=2$, $\bar{\rho}_j = \bar{\rho}_A$, если $2 \leq q \leq k$, и $\bar{\rho}_j = \bar{\rho}_B$, если $q=1$. Когда $j=3$, $\bar{\rho}_j = \bar{\rho}_A$, если $3 \leq q \leq k$, и $\bar{\rho}_j = \bar{\rho}_B$, если $q=1$ или 2 и т. д. Равное взвешивание k величин q может быть выполнено путем осреднения по множеству возможных значений:

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_1 &= \bar{\rho}_A; \\ \bar{\rho}_2 &= \frac{(k-1)\bar{\rho}_A + \bar{\rho}_B}{k}; \\ \bar{\rho}_3 &= \frac{(k-2)\bar{\rho}_A + 2\bar{\rho}_B}{k}\end{aligned}$$

и т. д.

Ошибку отсчета времени, осредненную по множеству возможных значений q , обозначим $\delta \bar{T}_n$. Она находится подстановкой величин $\bar{\rho}_j$ в уравнение (10.9).

Окончательные выражения для среднего квадратического отклонения ошибки прогнозирования времени экваториального пересечения в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{\delta \bar{T}_n} &= \frac{n(n+1)\sigma_p}{6k} [9k^2 - 6k(n-1) + 2(n-1)^2]^{1/2} \quad \text{при } n < k, \\ \sigma_{\delta \bar{T}_n} &= \frac{\sigma_p}{6k} \{q + k^2(k+1)^2(3n-k+1)^2 + \xi^2(\xi-1)^2 \times \\ &\times (\xi+1)^2 + [2k(k^2-1) + v(1+6k\xi - v^2)]^{1/2}\} \quad \text{при } n \geq k,\end{aligned}\tag{10.11}$$

где $\xi = n - \mu k$, $v = \xi + k$; $q = 0$, если $n < 2k$; $q = 36k^4 \times \sum_{m=1}^{\mu-1} (n - mk)^2$, если $n \geq 2k$; μ — наибольшее целое число, для которого $n - \mu k > 0$; σ_p — среднее квадратическое отклонение среднего значения k независимых наблюдений случайных флуктуаций ошибок прогнозирования времени экваториального пересечения.

Если взять пределы выражений (10.10) и (10.11) при $n \rightarrow \infty$, то получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta T_n} = \sigma_p \sqrt{n^3/3} \quad (10.12)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\delta \bar{T}_n} = \sigma_p \sqrt{k} \sqrt{n^3/3}. \quad (10.13)$$

Таким образом, выражения для независимых и коррелированных ошибок имеют одну и ту же асимптотическую форму. Асимптотическая форма представляет собой удобную форму аппроксимации среднего квадратического отклонения ошибок прогнозирования времени экваториального пересечения, вносимых случайными флюктуациями плотности атмосферы.

Из сравнения зависимостей (10.12) и (10.13) имеем $\sigma_p = \sqrt{k} \sigma_{-p}$, что соответствует положению теории ошибок, согласно которому среднее квадратическое отклонение среднего значения k независимых наблюдений равно среднему квадратическому отклонению одного наблюдения, разделенному на корень квадратный из k .

На основе анализа флюктуаций ускорений, испытываемых спутником за счет изменения параметров атмосферы при движении по орбитам, имеющим высоты перигея от 220 до 650 км, в работе [84] установлено, что среднее квадратическое отклонение σ_{-p} (в минутах за оборот), вычисленное по данным наблюдений, сглаженных на интервалах 25 оборотов, выражается эмпирическим соотношением

$$\sigma_{-p} = 2,2 \cdot 10^{-3} h_n |\hat{D}|,$$

где h_n — высота перигея, км; \hat{D} — сглаженная скорость изменения периода обращения спутника, мин/оборот.

В этом случае выражение для среднего квадратического отклонения ошибок прогнозирования времени экваториального пересечения

$$\sigma_{\Delta T_n} = 11 \cdot 10^{-3} h_n |\hat{D}| \sqrt{n^3/3} \quad (10.14)$$

справедливо между двумя границами случайных флюктуаций, установленными выше, при больших n .

Вклад синусоидального колебания лобового сопротивления в ошибку прогнозирования на n оборотов времени экваториального пересечения исследован в работе [84], где получено следующее выражение для среднего квадратического отклонения ошибки прогнозирования:

$$\sigma_{\Delta T_n} = \frac{A}{m^2 \sqrt{2}} \left\{ \left[1 - \cos(mn) - \frac{(mn)^2}{2} \right]^2 + [mn - \sin(mn)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ [мин]}, \quad (10.15)$$

где $m = \frac{2\pi}{27} \frac{T_n}{1440}$; T_n — период, мин; $A = 1,85h_n |\hat{D}| 10^{-2}$.

Если принять, что начальные условия движения ИСЗ известны точно, то ошибку прогнозирования времени n -го экваториального пересечения можно характеризовать средним квадратическим отклонением

$$\sigma_{\Delta T_n}^* = \sqrt{\sigma_{\Delta T_n}^2 + \sigma_{\Delta T_n}^2}. \quad (10.16)$$

В действительности же начальные условия движения и скорость изменения периода обращения спутника определяются на основе статистической обработки данных, содержащих ошибки измерений.

Для упрощения решения задачи примем, что измерения равномерно распределены на интервале сглаживания. Пусть производится M независимых измерений на интервале сглаживания длиной i оборотов. Допустим, что существуют три независимых источника ошибок при расчете периода и скорости изменения периода: 27-дневные синусоидальные колебания скорости изменения периода, случайные флуктуации скорости изменения периода, независимые для отдельных оборотов, и ошибки измерений параметров движения ИСЗ. Ошибку прогнозирования времени экваториального пересечения представим как функцию числа оборотов n после начального момента, выбираемого в центре интервала сглаживания.

Ниже приводятся результаты, полученные в [84].

Вклад сглаженного синусоидального колебания лобового сопротивления в среднее квадратическое отклонение времени экваториального пересечения при прогнози-

ровании на n витков от начального момента определяется выражением

$$\sigma_1(n) = \frac{A}{m^2 \sqrt{2}} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \text{ [мин]}, \quad (10.17)$$

где

$$\alpha = \cos(mn) - \frac{2}{im} \sin\left(\frac{im}{2}\right) + \frac{64}{i^3 m} \sin\left(\frac{im}{4}\right) \times \\ \times \left[1 - \cos\left(\frac{im}{4}\right)\right] \left[n^2 - i \frac{(i+2)}{12}\right];$$

$$\beta = \sin(mn) - mn + 8n [i(i+2)m]^{-1} \left[\cos\left(\frac{im}{2}\right) - \right. \\ \left. - 1 + \frac{i^2 m^2}{8} \right].$$

В случае, когда интервал сглаживания измерений i приближается к нулю, уравнение (10.17) аппроксимирует уравнение (10.15) для синусоидальной ошибки без сглаживания.

Вклад сглаженных случайных флюктуаций в среднюю квадратическую ошибку прогнозирования времени экваториального пересечения выражается зависимостью

$$\sigma_2(n) = 5\sigma_p \left\{ \frac{N^3}{3} + \frac{i^3}{32} \left[\frac{4}{5} \left(\frac{N}{i}\right)^4 - \right. \right. \\ \left. \left. - 16 \left(\frac{N}{i}\right)^3 + \left(\frac{N}{i}\right)^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad N \geq i/2 \gg 1.$$

Вклад сглаженных ошибок измерений в среднюю квадратическую ошибку прогнозирования времени экваториального пересечения определяется выражением

$$\sigma_3(n) = \sigma_0 \frac{1}{i^2 \sqrt{N}} \left\{ i^4 \left[\frac{N}{N+2} + \frac{16}{9} \frac{(N+2)^2}{N^2} \right] + 256n^4 + \right. \\ \left. + 32ni \left[\frac{i^2}{3N} - \frac{4n^2}{N+2} \right] + 16(ni)^2 \left[\frac{N}{N+2} - \frac{8}{3} \frac{N+2}{N} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2N}{(N+2)^2} \right] \right\}^{1/2},$$

где предполагается, что все измерения имеют одно и то же среднее квадратическое отклонение σ_0 , выраженное через экваториальную ошибку времени в минутах.

Принимая, что ошибки измерений, синусоидальные ошибки и случайные ошибки независимы, можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{\Delta T_n} = \sqrt{\sigma_1^2(n) + \sigma_2^2(n) + \sigma_3^2(n)}, \quad (10.18)$$

где $\sigma_{\Delta T_n}$ — среднее квадратическое отклонение (в минутах) прогнозированного времени n -го экваториального пересечения после начального момента в случае, когда элементы орбиты и скорость изменения периода получают статистической обработкой измерений.

На рис. 10.4 дано сравнение результатов, полученных по формуле (10.18), со средними квадратическими отклонениями ошибок действительного прогнозирования на одну—две недели (Δ — теоретическая ошибка, \circ — действительная). Наклонная линия на рисунке соответствует ошибкам прогнозирования, когда доминирующую роль играют флюктуации лобового сопротивления. Горизонтальная линия соответствует случаю, когда преобладают ошибки измерений. Прогнозы, основанные на измерениях различного типа, точности и количества, характеризуются различными горизонтальными линиями.

Рассмотрим влияние ошибок в задании гравитационного поля Земли на точность определения движения ИСЗ.

Определение значений констант, характеризующих гравитационное поле Земли, а также вероятностных характеристик ошибок значений этих констант является одной из основных задач гравиметрии и теории фигуры Земли. Появление искусственных спутников Земли позволило существенно уточнить гравитационное поле Земли. Это объясняется тем, что параметры, характеризующие гравитационное поле Земли, могут быть включены в число неизвестных величин q_1, q_2, \dots, q_n и уточняться наряду с параметрами траектории на основе статистической обработки результатов измерений параметров движения ИСЗ, движущихся по высоким орбитам ($2500 > h > 1000$) км. В диапазоне этих высот обеспечивается высокая точность измерений, сравнительно слабо сказывается на движении ИСЗ сопротивление атмосферы и в то же время достаточно велико влияние неоднородностей гравитационного поля на параметры орбиты спутника.

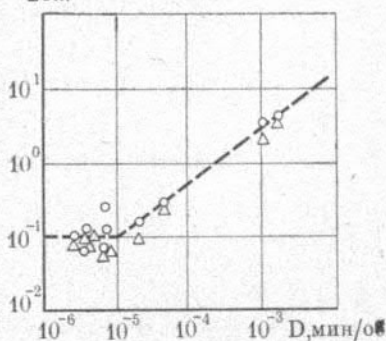
$\sigma_{\Delta T, \text{мин}}$ 

Рис. 10.4.

Наибольшее значение в формуле (7.34), определяющей потенциал притяжения Земли, имеет коэффициент C_{20} , обусловленный полярным сжатием Земли. Его численное значение имеет порядок 10^{-3} , в отличие от всех последующих коэффициентов, имеющих порядок 10^{-6} и менее.

Особенности гравитационного поля, обусловленные сжатием Земли, приводят в основном к изменению двух элементов орбиты: долготы восходящего узла Ω и аргумента перигея ω , т. е. угла между восходящим узлом и перигеем, отсчитываемого вдоль орбиты в направлении движения спутника.

Плоскость орбиты вращается вокруг оси Земли в направлении, противоположном движению спутника, так что при наклонении орбиты $i < 90^\circ$ долгота восходящего узла Ω непрерывно уменьшается, а перигей перемещается по орбите навстречу спутнику. Скорость изменения долготы восходящего узла определяется зависимостями (7.54) или приближенной формулой

$$\dot{\Omega} \approx \frac{3}{2} C_{20} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \left(\frac{a_3}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1-e^2)^2}, \quad (10.19)$$

где a_3 — экваториальный радиус Земли.

Большая ось орбиты вращается, оставаясь в орбитальной плоскости, так что аргумент перигея ω изменяется со скоростью

$$\dot{\omega} \approx -\frac{3}{4} C_{20} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \left(\frac{a_3}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2}. \quad (10.20)$$

Вековое движение узла достигает максимума при $i=0^\circ, 180^\circ$ (экваториальные орбиты) и обращается в нуль при $i=90^\circ$ (полярные орбиты), а вековое движение перигея достигает максимума при $i=0^\circ, 180^\circ$ и обращается в нуль при $i=63^\circ 26'$ (случай критического наклоения орбиты).

Использование зависимостей (10.19), (10.20) при статистической обработке результатов траекторных измерений позволило определить коэффициент C_{20} с относительной ошибкой до 0,01%, тогда как до появления ИСЗ относительная ошибка определения этого коэффициента по наземным измерениям составляла величину порядка 0,1%.

На основе анализа вековых и долгопериодических изменений элементов орбиты спутников систематически проводится уточнение и других коэффициентов, характеризующих гравитационное поле Земли. Подробно эти вопросы рассматриваются в работах [47, 57, 72, 85].

При расчете движения искусственных спутников Земли потенциал притяжения Земли обычно представляют в виде разложения в ряд по сферическим функциям (7.34). Полное представление гравитационного потенциала требует при этом бесконечного количества членов в разложении (7.34). При практическом использовании это разложение ограничивают конечным числом членов, которое считают «достаточным». В этом случае ошибки в расчетных значениях параметров движения ИСЗ из-за неточного задания силы притяжения Земли определяются неучетом отброшенных членов разложения силы притяжения, а также ошибками в значениях используемых констант.

В работе [85] приведены результаты исследования влияния на точность расчета движения ИСЗ неучитываемой части гравитационного потенциала. Исследования выполнены с помощью теории линейной оценки, примененной к результатам гравиметрических расчетов Каула [117, 118], экстраполированным до высот полета спутников для класса полярных и первоначально круговых орбит. Наклонение орбиты выбрано равным 90° , поскольку в этом случае влияние несферичности и аномалий силы притяжения Земли является наиболее значительным.

В табл. 10.1 приведены значения средних квадратических отклонений ошибок прогнозирования на одни сут-

Значения n , учиты- ваемые в (7.34)	Компонента, км		
	радиальная	боковая	продольная
4	1,07	0,57	44,4
6	0,26	0,24	2,0
12	0,157	0,139	1,13

ки вперед положения ИСЗ, движущегося по полярной орбите с высотой 185 км, при использовании для расчета движения неполных моделей гравитационного поля Земли.

Анализ приведенных данных показывает, что для получения достоверных оценок параметров движения ИСЗ необходимо тщательное изучение всех факторов, определяющих движение и измерения параметров движения. Только совместный учет всех этих факторов, и в первую очередь ошибок траекторных измерений, погрешностей геодезической привязки измерительных средств к общему земному эллипсоиду, возмущений атмосферы и ошибок задания гравитационного поля Земли, позволит правильно выбирать математическую модель движения ЛА и модель измерений, получать достоверные значения характеристик точности оценивания движения ЛА по результатам траекторных измерений и обосновывать рациональные требования к точностным характеристикам вновь разрабатываемых радиотехнических траекторных измерительных средств.

11

ОСНОВЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

11.1. Постановка задачи

Целью выполнения радиотехнических траекторных измерений является определение действительного движения ЛА. Поэтому проектирование и эксплуатация измерительных средств, разработка структуры и принципов работы измерительного комплекса должны прово-

даться с точки зрения оптимизации решения этой задачи.

На стадии проектирования измерительных средств и разработки структуры измерительного комплекса:

- устанавливается класс траекторий ЛА, параметры движения которых будут измеряться;

- изучается характер изменения измеряемых параметров при движении ЛА по траектории;

- исследуются основные факторы, определяющие точность измерения параметров движения, и находится функциональная зависимость измеряемых параметров от этих факторов;

- устанавливается требуемый состав измеряемых параметров и требуемая точность измерений на основе оценки влияния ошибок измерений на точность определения движения ЛА по результатам радиотехнических траекторных измерений;

- разрабатывается при необходимости алгоритм раскрытия неоднозначности отсчета измеряемой величины и т. д.

Кроме того, при организации измерительного комплекса определяются:

- состав средств, включаемых в измерительный комплекс;

- места оптимального расположения измерительных средств комплекса;

- требования к точности геодезической привязки измерительных средств на поверхности Земли;

- требования к точности привязки измерений к единому времени и др.

Для успешного функционирования измерительного комплекса необходимо решение следующих задач:

- определение интервалов времени и зон радиовидимости обслуживаемых ЛА измерительными средствами комплекса;

- распределение измерительных средств для наблюдения за ЛА;

- расчет целеуказаний измерительным средствам;
- установление оптимальной продолжительности сеанса связи с ЛА;

- определение оптимального расположения измеряемых интервалов на траектории, периода осреднения и темпа выдачи измерительной информации;

- выбор моделей движения ЛА, используемых при

обработке измерений и на этапе прогнозирования движения ЛА;

— выбор метода решения уравнений движения ЛА;

— оценивание вероятностных характеристик ошибок измерений по экспериментальным данным.

Перечисленный перечень вопросов, исследуемых при создании и в процессе работы измерительного комплекса, является, естественно, неполным и содержит лишь некоторые из тех задач, которые можно решить только на основе широкого использования теории проектирования и эксплуатации измерительных средств, баллистики ЛА, технической кибернетики, математической статистики, вычислительной математики и теории оптимального эксперимента.

Разработке теории планирования эксперимента в последние годы уделяется много внимания. Существенный вклад в развитие этого нового научного направления вносят работы, выполненные в лаборатории статистических методов МГУ, руководимой докт. техн. наук, проф. В. В. Налимовым. Результаты исследований В. В. Налимова, В. В. Федорова, Н. П. Клепикова, С. Н. Соколова и др. обобщены в работах [1, 19, 86—91]. Ряд интересных книг по данной тематике выпущен за рубежом [92—95, 119, 120].

Усиление внимания к оптимальному планированию эксперимента обусловлено тем, что исследования в самых различных областях науки и техники требуют постановки сложного и дорогостоящего эксперимента. Поэтому проблема получения наибольшего количества информации об изучаемом процессе при ограниченных затратах средств и времени является в настоящее время весьма актуальной.

Ранее аппарат математической статистики использовался лишь для обработки результатов наблюдений при заданном способе проведения эксперимента. Теперь же требуется широкое применение математических методов для оптимальной организации эксперимента с учетом особенностей той конкретной задачи, которую необходимо решить.

Для оптимизации процесса определения движения ЛА по результатам радиотехнических траекторных измерений необходимо выбрать математическую модель движения ЛА, состав измеряемых функций и программу измерений, а также метод статистической обработки

измерений, обеспечивающие требуемую точность и надежность определения движения ЛА при минимальных затратах времени и средств.

Использование математической теории планирования эксперимента позволяет разработать стройную логическую схему и выработать оптимальные условия для решения всех перечисленных этапов задачи определения движения ЛА по результатам траекторных измерений.

11.2. Наблюдаемость

При планировании траекторных измерений для определения движения ЛА в первую очередь должен быть исследован вопрос о существовании решения. Рассмотрим эту задачу с позиций теории наблюдаемости [92, 106].

Если представить ЛА в качестве некоторой динамической системы, поведение которой во времени описывается дифференциальными или аналитическими зависимостями, характеризующимися той или иной степенью неопределенности, а измерения — в качестве выходов этой системы, то может быть поставлена задача определения состояния динамической системы на основе информации о ее выходном сигнале. Отмеченная неопределенность системы может состоять, например, в том, что неизвестно начальное состояние ее (начальные условия движения ЛА), или какие-либо параметры уравнений состояния, либо то и другое.

В исследуемой задаче определения движения ЛА по измерениям, выдаваемым траекторными измерительными средствами, наиболее характерным является оценивание начальных условий движения. При этом необходимым условием решения данной задачи является возможность получения вектора начального состояния динамической системы по ее выходному сигналу.

Напомним, что возможность восстановления начального состояния динамической системы по некоторой измерительной информации о выходном сигнале системы принято называть наблюдаемостью динамической системы.

Методика оценивания наблюдаемости динамической системы детально отработана для линейных стационарных и нестационарных систем [92, 106].

Рассмотрим детерминированную динамическую систему, описываемую системой линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{F}(t) \mathbf{X}(t), \\ \mathbf{Z}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t),\end{aligned}\quad (11.1)$$

где $\mathbf{X}(t)$ — n -мерный вектор состояния системы (его компоненты x_1, x_2, \dots, x_n — фазовые координаты системы); $\mathbf{Z}(t)$ — N -мерный вектор, элементы которого являются линейными комбинациями фазовых координат; $\mathbf{F}(t)$ — матрица размером $n \times n$; $\mathbf{A}(t)$ — матрица размером $N \times n$. Элементы матриц $\mathbf{F}(t)$ и $\mathbf{A}(t)$ являются непрерывными действительными функциями времени.

Примем, что компоненты вектора $\mathbf{Z}(t)$, рассматриваемого как выходной сигнал системы, измерены на интервале времени $t_0 \leq t \leq T$. Требуется определить начальное значение $\mathbf{X}(t_0)$ по измерениям вектора-функции $\mathbf{Z}(t)$.

Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что решения этих уравнений выражаются через фундаментальную матрицу решений:

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{X}(t_0), \quad (11.2)$$

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{X}(t_0). \quad (11.3)$$

Умножая левую и правую части равенства (11.3) слева на матрицу $\Phi^T(t, t_0) \mathbf{A}^T(t)$ и интегрируя по t в пределах от t_0 до T , получаем

$$\int_{t_0}^T \Phi^T(t, t_0) \mathbf{A}^T(t) \mathbf{Z}(t) dt = \left\{ \int_{t_0}^T \Phi^T(t, t_0) \mathbf{A}^T(t) \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) dt \right\} \mathbf{X}(t_0). \quad (11.4)$$

Обозначив

$$\mathbf{M}(t_0, T) = \int_{t_0}^T \Phi^T(t, t_0) \mathbf{A}^T(t) \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) dt,$$

$$\boldsymbol{\eta}(t_0, T) = \int_{t_0}^T \Phi^T(t, t_0) \mathbf{A}^T(t) \mathbf{Z}(t) dt,$$

зависимость (11.4) перепишем в виде

$$\mathbf{M}(t_0, T) \mathbf{X}(t_0) = \boldsymbol{\eta}(t_0, T). \quad (11.5)$$

Если ранг матрицы $\mathbf{M}(t_0, T)$ равен n , т. е. матрица $\mathbf{M}(t_0, T)$ неособенная, то существует обратная матрица $\mathbf{M}^{-1}(t_0, T)$, и тогда уравнение (11.6) может быть решено относительно $\mathbf{X}(t_0)$:

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{M}^{-1}(t_0, T) \boldsymbol{\eta}(t_0, T). \quad (11.6)$$

Таким образом, система (11.1) наблюдаемая на отрезке $[t_0, T]$, если ранг матрицы $\mathbf{M}(t_0, T)$ равен n .

Методика определения наблюдаемости нелинейных динамических систем в настоящее время еще только разрабатывается. Рассмотрим, следуя в основном [96, 107], один из возможных путей решения этой задачи. Пусть поведение детерминированной динамической системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{U}), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \\ \mathbf{Z}(t) &= \boldsymbol{\Psi}(t, \mathbf{X}), \end{aligned} \quad (11.7)$$

где $\mathbf{X}(t)$ — n -мерный вектор состояния системы; \mathbf{U} — l -мерный вектор управляющих воздействий; \mathbf{Z} — m -мерный наблюдаемый вектор выходного сигнала системы; t — время.

Примем, что множество $\bar{\mathbf{X}} = \{\mathbf{X}\} \in \mathbf{R}^n$ — область всех физически возможных состояний системы в n -мерном пространстве \mathbf{R}^n ; множество $\bar{\mathbf{X}}_0 = \{\mathbf{X}_0\}$ — область возможных начальных состояний системы; $\bar{\mathbf{U}} = \{\mathbf{U}\} \in \mathbf{R}^l$ — множество допустимых управляющих воздействий; $\bar{\mathbf{Z}} = \{\mathbf{Z}\} \in \mathbf{R}^m$ — множество функций выхода, представляющее собой отображение множества $\bar{\mathbf{X}}$ в пространство \mathbf{R}^m . Управление $U(t)$ предполагаем известной функцией времени.

Условие, при котором измерение функции выхода системы \mathbf{Z} на некотором отрезке времени $t \in T$ обеспечивает получение всей информации, необходимой для однозначного определения вектора состояния \mathbf{X} системы, называется условием наблюдаемости.

Для проверки выполнимости условий наблюдаемости должен быть построен некоторый критерий, с помощью которого по известным уравнениям вида (11.7) может быть решен вопрос о наблюдаемости или ненаблюдаемости системы в смысле данного выше определения.

Условимся рассматривать только такие функции выхода динамической системы, значения которых однознач-

но определяются текущим вектором \mathbf{X} и моментом времени t . Отметим, что в стохастической модели движения это условие невыполнимо из-за случайности функции выхода. Обычно предполагается, что правые части уравнений (11.7) удовлетворяют условиям существования и единственности решений уравнений, чем обеспечивается взаимно-однозначное соответствие областей $\bar{\mathbf{X}}$ и $\bar{\mathbf{X}}_0$. При этом условия наблюдаемости системы в области $\bar{\mathbf{X}}$ и $\bar{\mathbf{X}}_0$ эквивалентны.

Установим условия взаимно-однозначного соответствия между множеством $\bar{\mathbf{X}}_0$ векторов начального состояния \mathbf{X}_0 и множеством $\bar{\mathbf{Z}}$ функций выхода $\mathbf{Z}(t)$.

Выберем произвольный вектор $\mathbf{X}_0 \in \bar{\mathbf{X}}_0$ и рассмотрим k -ю составляющую $z_k(t) = \psi_k[t, \mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)]$ вектора-функции выходного сигнала $\mathbf{Z}(t)$. Вектор \mathbf{X}_0 определяет единственную функцию $z_k(t)$. На отрезке T выберем n различных моментов времени $t_j, j=1, 2, \dots, n$ ($t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t_a$), и назовем набор n различных моментов времени $t_j \in T$ программой измерений функции $Z(t)$ на отрезке T .

В работе [107] показано, что динамическая система (11.7) локально наблюдаема в области $\bar{\mathbf{X}} \times T$ при заданной программе измерений функции $z_k(t)$ в том и только в том случае, если выполняется условие

$$\text{ранг } \mathbf{A}_k = n, \quad (11.8)$$

где \mathbf{A}_k — матрица частных производных, определяемая выражением

$$\mathbf{A}_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_k(t_1)}{\partial x_{1,0}} & \dots & \frac{\partial \psi_k(t_1)}{\partial x_{n,0}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_k(t_n)}{\partial x_{1,0}} & \dots & \frac{\partial \psi_k(t_n)}{\partial x_{n,0}} \end{vmatrix}.$$

Термин «локальная наблюдаемость» в данном случае указывает на то, что при выполнении условия (11.8) система наблюдаема лишь в некоторой достаточно малой окрестности точки \mathbf{X}_0 на вполне определенном, задаваемом программой измерений множестве точек $\{t_j\} \in T$.

Если теперь составить матрицу \mathbf{A} , объединив все матрицы \mathbf{A}_k для $k=1, 2, \dots, m$, т. е. все частные производные от измеряемых функций по компонентам вектора — начального состояния системы, то условие локальной наблюдаемости системы в области $\bar{\mathbf{X}} \times T$ при заданной

программе измерений вектора-функции $Z(t)$ состоит в том, чтобы ранг

$$A = n. \quad (11.9)$$

Таким образом, задача исследования наблюдаемости динамической системы (11.7) в области X_0 сводится к задаче определения ранга матрицы частных производных измеряемых функций по вектору начального состояния системы.

Рассмотрим применение сформулированного критерия наблюдаемости динамической системы для выбора радиотехнических траекторных измерительных средств и мест их расположения для определения параметров орбиты искусственного спутника Земли. Примем, что в качестве параметров орбиты q_1, q_2, \dots, q_6 используются величины

$$q_1 = p; \quad q_2 = e; \quad q_3 = \omega; \quad q_4 = i; \quad q_5 = \Omega; \quad q_6 = M, \quad (11.10)$$

где p — фокальный параметр орбиты; e — эксцентриситет орбиты; ω — аргумент перигея; i — наклонение орбиты; Ω — долгота восходящего узла; M — средняя аномалия.

Для упрощения выкладок условимся, что движение ИСЗ на участке одного сеанса наблюдения можно считать кеплеровым (см. § 7.2). Тогда текущие параметры движения спутника в геоцентрической абсолютной системе координат можно определить с помощью зависимостей (7.29). Частные производные от измеряемых функций по параметрам орбиты q_j ($j=1, 2, \dots, 6$) могут быть вычислены по формулам

$$a_{ij} = \frac{\partial z_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^6 \frac{\partial z_i}{\partial p_{ki}} \frac{\partial p_{ki}}{\partial q_j}, \quad (11.11)$$

где p_{ki} — текущие параметры движения ИСЗ;

$$\begin{aligned} p_{1i} &= x_{ra,i}; & p_{2i} &= y_{ra,i}; & p_{3i} &= z_{ra,i}; \\ p_{4i} &= V_{x_{ra,i}}; & p_{5i} &= V_{y_{ra,i}}; & p_{6i} &= V_{z_{ra,i}}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Введем фундаментальную матрицу

$$G = \|g_{kj}\|, \quad g_{kj} = \frac{\partial p_{ki}}{\partial q_j}, \quad k, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (11.13)$$

и матрицу градиентов

$$R = \|r_{ik}\|, \quad r_{ik} = \frac{\partial z_i}{\partial p_{ki}}, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad k_j = 1, 2, \dots, 6. \quad (11.14)$$

Тогда

$$A = RG. \quad (11.15)$$

Из выражений (11.11) — (11.15) следует, что для измерительного комплекса любого состава фундаментальная матрица G является общей и ее свойства определяют общие свойства решений системы уравнений (11.15). Градиентная матрица соответствует выбранной структуре измерительного комплекса и ее свойства характеризуют свойства решений, определяемые видом измеряемых функций. Элементы градиентной матрицы R могут быть получены дифференцированием измеряемых функций по текущим параметрам движения.

Определим элементы фундаментальной матрицы G . Наиболее простые зависимости для расчета элементов матрицы G получаются при использовании так называемой вспомогательной геоцентрической абсолютной системы координат $AX_B Y_B Z_B$, которая получается при повороте системы координат $AX_{гa} Y_{гa} Z_{гa}$ вокруг оси $AZ_{гa}$ на угол Ω так, чтобы ось AX_B проходила через восходящий узел орбиты.

При использовании введенной вспомогательной системы координат формулы для расчета искоемых частных производных имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_B}{\partial p} &= \frac{\cos u}{1 + e \cos \vartheta}; & \frac{\partial y_B}{\partial p} &= \frac{\cos i \sin u}{1 + e \cos \vartheta}; \\ \frac{\partial z_B}{\partial p} &= \frac{\sin i \sin u}{1 + e \cos \vartheta}; \\ \frac{\partial V_{x_B}}{\partial p} &= \frac{1}{2p} (C_{12} \sin u - eC_7 \cos u); \\ \frac{\partial V_{y_B}}{\partial p} &= -\frac{\cos i}{2p} (C_{12} \cos u + eC_7 \sin u); \\ \frac{\partial V_{z_B}}{\partial p} &= -\frac{\sin i}{2p} (C_{12} \cos u + eC_7 \sin u); \\ \frac{\partial x_B}{\partial e} &= r (C_8 \cos u - C_9 \sin u); & \frac{\partial y_B}{\partial e} &= r (C_8 \sin u + \\ & & & + C_9 \cos u) \cos i; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z_B}{\partial e} = r(C_6 \sin u + C_5 \cos u) \sin i;$$

$$\frac{\partial V_{x,B}}{\partial e} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [(\sin \vartheta - C_5) \cos u - \cos \vartheta \sin u];$$

$$\frac{\partial V_{y,B}}{\partial e} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [(\sin \vartheta - C_5) \sin u + \cos \vartheta \cos u] \cos i;$$

$$\frac{\partial V_{z,B}}{\partial e} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [(\sin \vartheta - C_5) \sin u + \cos \vartheta \cos u] \sin i;$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial \omega} = -r \sin u; \quad \frac{\partial y_B}{\partial \omega} = r \cos i \cos u; \quad \frac{\partial z_B}{\partial \omega} = r \sin i \cos u;$$

$$\frac{\partial V_{x,B}}{\partial \omega} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} [(1 + e \cos \vartheta) \cos u + e \sin \vartheta \sin u];$$

$$\frac{\partial V_{y,B}}{\partial \omega} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} [(1 + e \cos \vartheta) \sin u - e \sin \vartheta \cos u] \cos i;$$

$$\frac{\partial V_{z,B}}{\partial \omega} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} [(1 + e \cos \vartheta) \sin u - e \sin \vartheta \cos u] \sin i;$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial i} = 0; \quad \frac{\partial y_B}{\partial i} = -r \sin i \sin u; \quad \frac{\partial z_B}{\partial i} = r \cos i \sin u;$$

$$\frac{\partial V_{x,B}}{\partial i} = 0; \quad \frac{\partial V_{y,B}}{\partial i} = -(eC_7 \sin u + C_{12} \cos u) \sin i; \quad (11.16)$$

$$\frac{\partial V_{z,B}}{\partial i} = (eC_7 \sin u + C_{12} \cos u) \cos i;$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial \Omega} = -r \cos i \sin u; \quad \frac{\partial y_B}{\partial \Omega} = r \cos u; \quad \frac{\partial z_B}{\partial \Omega} = 0; \quad \frac{\partial V_{x,B}}{\partial \Omega} = 0;$$

$$\frac{\partial V_{y,B}}{\partial \Omega} = -(eC_7 \sin u + C_{12} \cos u) \cos i;$$

$$\frac{\partial V_{z,B}}{\partial \Omega} = eC_7 \cos u - C_{12} \sin u;$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial M} = rC_{13} (C_4 \cos u - \sin u); \quad \frac{\partial y_B}{\partial M} = rC_{13} (C_4 \sin u + \cos u) \cos i;$$

$$\frac{\partial z_B}{\partial M} = rC_{13} (C_4 \sin u + \cos u) \sin i;$$

$$\frac{\partial V_{x,B}}{\partial M} = -C_{13} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos u;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{y, \text{в}}}{\partial M} &= -C_{13} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos i \sin u; & \frac{\partial V_{z, \text{в}}}{\partial M} &= \\ &= -C_{13} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin i \sin u. \end{aligned}$$

Для сокращения записей в (11.16) использованы обозначения

$$\begin{aligned} C_1 &= \cos \Omega \sin u + \sin \Omega \cos i \cos u; \\ C_2 &= \sin \Omega \sin u - \cos \Omega \cos i \cos u; \\ C_3 &= \sin i \cos u; & C_4 &= \frac{e \sin \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)}; \\ C_5 &= 2 \sin M + \frac{5}{2} e \sin 2M + \frac{e^2}{4} (13 \sin 3M - 3 \sin M); \\ C_6 &= C_4 C_5 - \frac{\cos \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)}; & C_7 &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \vartheta; \\ C_8 &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos \vartheta; \end{aligned} \tag{11.17}$$

$$\begin{aligned} C_9 &= \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \cos i \sin u; \\ C_{10} &= \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \cos i \sin u; \\ C_{11} &= \sin i \sin u; & C_{12} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta); \\ C_{13} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial M} = 1 + 2e \cos M + \frac{5}{2} e^2 \cos 2M + \\ &+ \frac{e^3}{4} (13 \cos 3M - \cos M). \end{aligned}$$

Из (11.16) — (11.17) следует, что изохронные частные производные представляют собой периодические функции времени, основная гармоника которых имеет период T_0 , равный времени обращения спутника вокруг Земли.

Продолжительность сеанса наблюдения за ИСЗ с одного измерительного пункта составляет небольшую часть периода T_0 . Поэтому приближенно можно считать, что изохронные производные остаются на этом интервале постоянными, т. е.

$$\frac{\partial p_{ki}}{\partial q_j} \approx \frac{\partial p_k}{\partial q_j}, \quad k, j = 1, 2, \dots, 6; \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{11.18}$$

где $N = nt$ — общее количество измерений.

Тогда частные производные от измеряемых функций z по параметрам траектории q , определяемые зависимостями (11.11), для рассматриваемого случая могут быть найдены по формулам

$$a_{ij} = \frac{\partial z_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^6 \frac{\partial z_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_j}, \quad (11.19)$$

$i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, 6$,

где производные $\partial p_h / \partial q_j$ рассчитываются по зависимостям (11.16) — (11.17), а $\partial z_i / \partial p_h$ — дифференцированием выражений для измеряемых функций по текущим параметрам движения $x_B, y_B, z_B, V_{x,B}, V_{y,B}, V_{z,B}$.

В случае, если измеряются только координатные параметры движения ЛА, частные производные измеряемых функций по параметрам траектории, определяемые зависимостями (11.16) — (11.19), могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned} a_{i_1} &= \frac{\partial z_i}{\partial p} = \frac{\partial z_i}{\partial x_B} \frac{r}{p} \cos u + \frac{\partial z_i}{\partial y_B} \frac{r}{p} \cos i \sin u + \\ &\quad + \frac{\partial z_i}{\partial z_B} \frac{r}{p} \sin i \sin u; \\ a_{i_2} &= \frac{\partial z_i}{\partial e} = \frac{\partial z_i}{\partial x_a} r (C_6 \cos u - C_5 \sin u) + \frac{\partial z_i}{\partial y_a} r (C_6 \sin u + \\ &\quad + C_5 \cos u) \cos i + \frac{\partial z_i}{\partial z_a} r (C_6 \sin u + C_5 \cos u) \sin i; \\ a_{i_3} &= \frac{\partial z_i}{\partial \omega} = -\frac{\partial z_i}{\partial x} r \sin u + \frac{\partial z_i}{\partial y_B} r \cos i \cos u + \\ &\quad + \frac{\partial z_i}{\partial z_B} r \sin i \cos u; \end{aligned} \quad (11.20)$$

$$a_{i_4} = \frac{\partial z_i}{\partial i} = -\frac{\partial z_i}{\partial y_a} r \sin i \sin u + \frac{\partial z_i}{\partial z_a} r \cos i \sin u;$$

$$a_{i_5} = \frac{\partial z_i}{\partial \Omega} = -\frac{\partial z_i}{\partial x_B} r \cos i \sin u + \frac{\partial z_i}{\partial y_a} r \cos u;$$

$$\begin{aligned} a_{i_6} &= \frac{\partial z_i}{\partial M} = \frac{\partial z_i}{\partial x_a} r C_{13} (C_4 \cos u - \sin u) + \frac{\partial z_i}{\partial y_a} r C_{13} \times \\ &\quad \times (C_4 \sin u + \cos u) \cos i + \frac{\partial z_i}{\partial z_B} r C_{13} (C_4 \sin u + \cos u) \sin i. \end{aligned}$$

Для случая использования измерений скоростных параметров движения частные производные измеряемых функций по параметрам траектории определяются зависимостями

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i1} &= \frac{\partial z_i}{\partial p} = \frac{\partial z_i}{\partial V_{x,b}} \frac{1}{2p} (C_{12} \sin u - eC_7 \cos u) - \\ &- \frac{\partial z_i}{\partial V_{y,b}} \frac{\cos i}{2p} (C_{12} \cos u + eC_7 \sin u) - \\ &- \frac{\partial z_i}{\partial V_{z,b}} \frac{\sin i}{2p} (C_{12} \cos u + eC_7 \sin u) + a_{i1}; \\ \bar{a}_{i2} &= \frac{\partial z_i}{\partial e} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left\{ \frac{\partial z_i}{\partial V_{x,b}} [(\sin \vartheta - C_3) \cos u - \cos \vartheta \sin u] + \right. \\ &+ \left(\frac{\partial z_i}{\partial V_{y,b}} \cos i + \frac{\partial z_i}{\partial V_{z,b}} \sin i \right) [(\sin \vartheta - C_3) \sin u + \\ &\quad \left. + \cos \vartheta \cos u] \right\} + a_{i2}; \quad (11.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i3} &= \frac{\partial z_i}{\partial \omega} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \left[\frac{\partial z_i}{\partial V_{x,b}} \left(\frac{r}{p} \cos u + e \sin \vartheta \sin u \right) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial z_i}{\partial V_{y,b}} \cos i + \frac{\partial z_i}{\partial V_{z,b}} \sin i \right) \left(\frac{r}{p} \sin u - e \sin \vartheta \cos u \right) \right] + a_{i3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i4} &= \frac{\partial z_i}{\partial i} = \left(-\frac{\partial z_i}{\partial V_{y,b}} \sin i + \frac{\partial z_i}{\partial V_{z,b}} \cos i \right) (eC_7 \sin u + \\ &\quad + C_{12} \cos u) + a_{i4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i5} &= \frac{\partial z_i}{\partial \Omega} = -\frac{\partial z_i}{\partial V_{x,b}} (eC_7 \sin u + C_{12} \cos u) \cos i + \\ &\quad + \frac{\partial z_i}{\partial V_{y,b}} (eC_7 \cos u - C_{12} \sin u) + a_{i5}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i6} &= \frac{\partial z_i}{\partial M} = -C_{12} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\frac{\partial z_i}{\partial V_{x,b}} \cos u + \frac{\partial z_i}{\partial V_{y,b}} \cos i \sin u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial z_i}{\partial V_{z,b}} \sin i \sin u \right) + a_{i6}. \end{aligned}$$

На основе качественного исследования структуры матрицы **A** можно проанализировать возможность определения параметров орбиты (11.10) при различных вариантах взаимного расположения орбиты ИСЗ и измерительного пункта, оснащенного средствами измерения координатных и скоростных параметров движения ИСЗ.

11.2.1. Анализ использования измерений координатных параметров движения ИСЗ для определения параметров орбиты

Рассмотрим, как расположение измерительных средств сказывается на решении задачи определения орбиты ИСЗ.

1. Середина наблюдаемого участка орбиты расположена над экватором ($u=0$ или $u=\pi$).

В этом случае из (11.20) имеем $a_{i4} = \partial z_i / \partial i \approx 0$, что приводит к тому, что в матрице **A** близки к нулю элементы строки и столбца, содержащие частные производные a_{i4} , следовательно, матрица **A** близка к особенной.

2. Середина наблюдаемого участка орбиты расположена в районах, где $u \approx \pi/2$ или $u \approx 3\pi/2$. Тогда

$$a_{i5} = \frac{\partial z_i}{\partial \Omega} \approx -\frac{\partial z_i}{\partial x_B} r \cos i.$$

Для орбит, близких к полярным ($i \approx \pi/2$), матрица **A** становится особенной вследствие близости к нулю элементов строки и столбца, содержащих производные a_{i5} .

3. Середина наблюдаемого участка орбиты расположена в районе перигея ($\vartheta = M \approx 0$) или апогея ($\vartheta = M \approx \pi$). При этом $C_4 = 0$ и

$$\begin{aligned} a_{i3} &= \frac{\partial z_i}{\partial \omega} = -\frac{\partial z_i}{\partial x_B} r \sin u + \frac{\partial z_i}{\partial y_B} r \cos i \cos u + \\ &\quad + \frac{\partial z_i}{\partial z_B} r \sin i \cos u; \\ a_{i6} &= \frac{\partial z_i}{\partial M} = -\frac{\partial z_i}{\partial x_B} C_{13} r \sin u + \frac{\partial z_i}{\partial y_B} C_{11} r \cos i \cos u + \\ &\quad + \frac{\partial z_i}{\partial z_B} C_{13} r \sin i \cos u. \end{aligned}$$

Отсюда $a_{i6} = C_{13} a_{i3}$ и, следовательно, строки и столбцы матрицы **A**, содержащие производные по средней аномалии M и аргументу перигея ω , пропорциональны, а матрица **A** — особенная.

4. Для орбит, близких к круговым, понятие перигея теряет смысл. Параметры ω и M сливаются. В самом деле, при $e \approx 0$ $C_{13} \approx 1$, $C_4 \approx 0$.

Тогда $a_{i6} \approx a_{i3}$, что приводит к плохой обусловленности матрицы **A**.

5. Орбита полярная ($i = \pi/2$). При этом

$$a_{i4} = \frac{\partial z_i}{\partial i} = -\frac{\partial z_i}{\partial y_A} r \sin u; \quad a_{i5} = \frac{\partial z_i}{\partial \Omega} = \frac{\partial z_i}{\partial y_A} r \cos u.$$

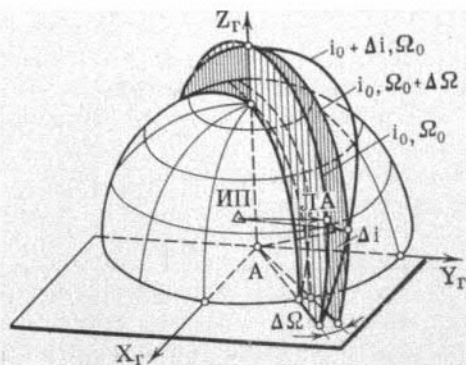


Рис. 41.1.

Если середина наблюдаемого участка орбиты расположена в районе, где $u = (2n+1)\pi/4$, $n=0, 1, \dots$, то

$$|\sin u| = |\cos u| \text{ и } |a_{i4}| = |a_{i5}|.$$

Матрица \mathbf{A} получается плохо обусловленной, а определение поправок к параметрам орбиты оказывается практически невозможным.

Рассмотренный случай образования особенной матрицы \mathbf{A} можно пояснить следующим образом. Примем, что производится измерение наклонной дальности D . В этом случае (рис. 11.1) изменение наклонной дальности на наблюдаемом участке примерно одинаково как для орбиты, несколько отличающейся от полярной орбиты (i_0, Ω_0) по долготе восходящего узла ($i_1 = i_0, \Omega_1 = \Omega_0 + \Delta\Omega$), так и для орбиты, отличающейся от той же полярной орбиты по наклонению ($i_2 = i_0 + \Delta i, \Omega_2 = \Omega_0$).

При расположении измерительного пункта (ИП) на полюсе

$$\varphi_0 = u_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_{i5} = \frac{\partial z_1}{\partial \Omega} = \frac{y_B - y_{B, \text{ИП}}}{D} r \cos u = 0,$$

а абсолютная величина

$$a_{i4} = \frac{\partial z_1}{\partial i} = \dots = \frac{y_B - y_{B, \text{ИП}}}{D} r$$

(y_B, y_{B0} — координаты соответственно центра масс ИСЗ

и точки стояния измерительного средства) достигает своего максимального значения.

При расположении измерительного пункта на экваторе $\varphi_0 = u_0 = 0$, наоборот, $a_{i4} = \partial z_i / \partial i = 0$, а величина $a_{i5} = (y_B - y_{B, \text{шт}}) r / D$ достигает максимального значения. Это говорит о том, что характер изменения измеряемого параметра D при изменении параметров орбиты Ω и i зависит от взаимного расположения измерительного пункта и орбиты. Следовательно, и возможность определения параметров орбиты Ω и i зависит от этих факторов.

Если совместно обрабатывать результаты измерений наклонной дальности, полученные от экваториального и полюсного измерительных пунктов, то результирующая матрица \mathbf{A} уже не будет особенной, и это может дать возможность определения искомым параметров орбиты, так как наблюдения экваториального измерительного пункта обеспечивают возможность определения долготы восходящего узла орбиты Ω , а измерения высокоширотного пункта создают условия для определения наклона орбиты i .

11.2.2. Анализ использования измерений координатных и скоростных параметров движения ИСЗ для определения параметров орбиты

Примем, что измеряются координаты положения ИСЗ: наклонная дальность D , направляющие косинусы $\cos \theta_x$ и $\cos \theta_z$ между направлением на спутник и соответствующими осями OX_n и OZ_n измерительной системы координат, а также производные по времени от этих функций, т. е. радиальная скорость \dot{D} и скорости изменения направляющих косинусов $\cos \theta_x$ и $\cos \theta_z$. Измеряемые параметры положения ИСЗ выражаются через координаты измерительного пункта и спутника во вспомогательной геоцентрической абсолютной системе координат $Ax_B y_B z_B$ следующим образом:

$$D = \sqrt{(x_B - x_{B, \text{шт}})^2 + (y_B - y_{B, \text{шт}})^2 + (z_B - z_{B, \text{шт}})^2};$$

$$\cos \theta_x = [- (x_B - x_{B, \text{шт}}) \sin \phi_n \cos \nu - (y_B - y_{B, \text{шт}}) \sin \phi_n \sin \nu + (z_B - z_{B, \text{шт}}) \cos \phi_n] / D;$$

$$\cos \theta_z = [- (x_B - x_{B, \text{шт}}) \sin \nu + (y_B - y_{B, \text{шт}}) \cos \nu] / D,$$

где x_B, y_B, z_B — текущие координаты ИСЗ; $x_{B, \text{шт}}, y_{B, \text{шт}}, z_{B, \text{шт}}$ — координаты измерительного пункта.

$z_{в,ин}$ — координаты измерительного пункта, определяемые зависимостями

$$\begin{aligned}x_{в,ин} &= R_{и} \cos \psi_{и} \cos \nu, & y_{в,ин} &= R_{и} \cos \psi_{и} \sin \nu, & (11.23) \\z_{в,ин} &= R_{и} \sin \psi_{и}, & \nu &= S + \Lambda_{и} - \Omega.\end{aligned}$$

Дифференцируя зависимости (11.22) по времени, получаем

$$\begin{aligned}\dot{D} &= [(x_{в} - x_{в,ин})(V_{x,в} + y_{в,ин}\Omega_3) + (y_{в} - y_{в,ин})(V_{y,в} - \\ &\quad - x_{в,ин}\Omega_3) + (z_{в} - z_{в,ин})V_{z,в}]/D; & (11.24)\end{aligned}$$

$$\cos \theta_x = \frac{\dot{x}_в D - D \dot{x}_в}{D^2}, \quad \cos \theta_z = \frac{\dot{z}_в D - D \dot{z}_в}{D^2}, \quad (11.25)$$

где

$$\begin{aligned}\dot{x}_в &= -(V_{x,в} + y_{в,ин}\Omega_3) \sin \psi_{и} \cos \nu + (x_{в} - x_{в,ин}) \times \\ &\quad \times \Omega_3 \sin \psi_{и} \sin \nu - (V_{y,в} - x_{в,ин}\Omega_3) \sin \psi_{и} \sin \nu - \\ &\quad - (y_{в} - y_{в,ин}) \Omega_3 \sin \psi_{и} \cos \nu + V_{z,в} \cos \psi_{и};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_в &= -(V_{x,в} + y_{в,ин}\Omega_3) \sin \nu - (x_{в} - x_{в,ин}) \Omega_3 \cos \nu + \\ &\quad + (V_{y,в} - x_{в,ин}\Omega_3) \cos \nu - (y_{в} - y_{в,ин}) \Omega_3 \sin \nu.\end{aligned}$$

Для исследования влияния взаимного расположения измерительного пункта и орбиты проанализируем частные производные скоростных измеряемых функций по параметрам орбиты, определяемые зависимостями (11.21).

1. Середина наблюдаемого участка орбиты расположена над экватором ($u \approx 0$). В этом случае $a_{i4} \approx 0$ и из (11.21) получаем

$$\bar{a}_{i4} \approx C_{i2} \left(- \frac{\partial z_i}{\partial V_{y,в}} \sin i + \frac{\partial z_i}{\partial V_{z,в}} \cos i \right).$$

Отсюда следует, что если $\partial z_i / \partial V_{y,в} \neq 0$ и $\partial z_i / \partial V_{z,в} \neq 0$, то ни при каких значениях наклона орбиты i производная \bar{a}_{i4} в нуль не обращается. Однако эта производная может быть близкой к нулю вследствие малости производных $\partial z_i / \partial V_{y,в}$ и $\partial z_i / \partial V_{z,в}$. Так, например, при использовании координатных функций D , $\cos \theta_x$, $\cos \theta_z$ и радиальной скорости \dot{D} значения производных

$$\frac{\partial \dot{D}}{\partial V_{y,в}} = \frac{y_{в} - y_{в,ин}}{D}; \quad \frac{\partial \dot{D}}{\partial V_{z,в}} = \frac{z_{в} - z_{в,ин}}{D}$$

близки к нулю для экваториального измерительного пункта ($y_{в} \approx y_{в, \text{ип}}$, $z_{в} \approx z_{в, \text{ип}}$). Следовательно, $\bar{a}_{i4} \approx 0$ и матрица \mathbf{A} будет плохо обусловленной.

Если же использовать еще и измерения скорости изменения направляющих косинусов $\cos \theta_x$ и $\cos \theta_z$, то, как видно из (11.25), производные $\frac{\partial \cos \theta_x}{\partial V_{z, в}}$, $\frac{\partial \cos \theta_z}{\partial V_{z, в}}$ отличны от нуля, что приводит к неособенности матрицы \mathbf{A} .

2. Середина наблюдаемого участка орбиты расположена в районе, где $u = \pi/2$. При этом для орбит, близких к полярным ($i \approx \pi/2$), производные $a_{i5} \approx 0$ и $\partial \dot{D} / \partial V_{y, в} \approx 0$, так как $y_{в} \approx y_{в, \text{ип}} \approx 0$, что следует из формул (7.29), (11.23) при $\psi_{и} \approx u \approx \pi/2$.

Отсюда получаем, что при использовании измерений координатных функций и радиальной скорости матрица \mathbf{A} для рассматриваемого случая является плохо обусловленной. Аналогичным образом может быть проведен анализ эффективности использования измерительных средств различного состава и расположения относительно орбиты.

Рассмотрение характерных вариантов взаимного расположения орбиты и измерительного пункта, оснащенного различными измерительными средствами, можно было бы продолжить, но уже и на основе проведенного качественного анализа свойств матрицы \mathbf{A} для приведенных выше примеров можно сделать некоторые общие выводы.

При использовании измерений одного из координатных параметров D , $\cos \theta_x$, $\cos \theta_z$, γ , α и т. п., полученных в течение одного сеанса наблюдения, для рассмотренных выше типовых и близких к ним схем взаимного расположения орбиты и измерительного средства матрица \mathbf{A} оказывается практически особенной. Причиной этому может быть или одинаковое изменение измеряемого параметра для орбит, различающихся некоторыми параметрами, или отсутствие изменения измеряемого параметра при изменении того или иного параметра орбиты. Возможность определения параметров орбиты по измерениям одного параметра на одном сеансе наблюдения существенно зависит от взаимного расположения орбиты и измерительного средства.

Эффективным средством обеспечения возможности определения параметров орбиты является объединение измерений одного и того же параметра, полученных

с двух или более измерительных пунктов, местоположение которых выбрано соответствующим образом. Также целесообразно оснащение измерительного пункта траекторными средствами, измеряющими координатные и скоростные параметры движения ИСЗ.

11.3. Критерии оптимальности планирования процесса определения движения по результатам измерений

В предыдущем параграфе рассмотрена методика качественного исследования влияния состава измеряемых функций, взаимного расположения измерительных средств и траектории ЛА на решение задачи определения движения ЛА по результатам измерений. Использование этой методики позволяет выработать некоторые практически важные рекомендации для организации измерительного комплекса и планирования его работы.

Основные положения рассмотренной методики могут быть использованы и при разработке количественных критериев, позволяющих оценивать влияние состава и расположения измерительных средств, количества и точности измерений, модели движения ЛА и других факторов на эффективность решения задачи определения движения ЛА по результатам измерений. Оценка влияния перечисленных факторов на точность определения движения ЛА является одной из основных задач, которые должны быть исследованы при планировании работы траекторных измерительных средств. Для решения этой задачи может быть использован математический аппарат планирования эксперимента.

Критерии оптимальности решения задачи в теории планирования эксперимента являются более общими, чем рассмотренные ранее в гл. 2 и 3 критерии оптимальности в теории оценивания. Если в теории оценивания эффективность решения задачи определения движения ЛА по наблюдениям за его полетом определяется только выбором метода статистической обработки результатов измерений, то в теории планирования эксперимента эффективность решения, кроме того, зависит от выбранной модели движения ЛА, от состава и программы измерений, от взаимного расположения измерительных средств, наблюдаемого участка траектории и других

факторов. Совокупность перечисленных факторов определяет условия проведения эксперимента. Решение задачи определения и анализа движения ЛА по результатам траекторных измерений состоит из ряда этапов, основными из которых являются: составление модели движения ЛА, разработка программы измерений, выбор статистического метода обработки измерительной информации.

Наиболее естественным является оптимальное планирование каждого из перечисленных этапов с точки зрения единого критерия. При решении задачи определения движения ЛА по результатам измерений в качестве такого критерия часто принимают какую-либо характеристику точности оценивания вектора параметров модели $\mathbf{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ или вектора положения ЛА в заданный момент времени.

После выполнения измерений вся информация о векторе \mathbf{Q} заключена в плотности вероятностей его оценки $p_W(\hat{\mathbf{Q}})$, которая в общем случае зависит от условий проведения эксперимента. Поэтому в качестве критерия оптимальности эксперимента целесообразно выбрать плотность вероятности нахождения оценки в заданных пределах $p_W(\hat{\mathbf{Q}}) = p(|\hat{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q}| < \epsilon)$.

План эксперимента $\tilde{W} \in \{W\}$, для которого

$$p_{\tilde{W}}(\hat{\mathbf{Q}}) = \max_{\{W\}} p_W(\hat{\mathbf{Q}}),$$

является оптимальным по вероятности.

Если вероятности векторов оценок $p_W(\hat{\mathbf{Q}})$ принадлежат нормальному распределению, то точность вектора оценок $\hat{\mathbf{Q}}$ полностью характеризуется математическим ожиданием $M(\hat{\mathbf{Q}})$ и корреляционной матрицей $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{Q}}} = \|\|K_{jk}(W)\|\|$, элементы которой зависят от плана эксперимента. Однако непосредственное использование матрицы $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{Q}}}$ в качестве критерия оптимальности эксперимента затруднительно, так как при оценивании n параметров модели по результатам радиотехнических траекторных измерений матрица $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{Q}}}$ состоит из $(n \times n)$ элементов ($n \geq 6$). Поэтому в качестве критерия оптимальности экс-

перимента обычно используют различные скалярные характеристики матрицы $K_{\hat{Q}}$.

В теории планирования эксперимента используются следующие понятия оптимальности плана.

А-оптимальность. План называется А-оптимальным, если корреляционная матрица $K_{\hat{Q}}$ имеет минимальный след

$$\min_{\{W\}} \text{Sp} K_{\hat{Q}}. \quad (11.26)$$

Этот план минимизирует сумму дисперсий оценок параметров (величину диагонали прямоугольного параллелепипеда, описанного около корреляционного эллипсоида).

Д-оптимальность. План называется Д-оптимальным, если ему соответствует корреляционная матрица $K_{\hat{Q}}$ с наименьшим значением определителя

$$\min_{\{W\}} \det K_{\hat{Q}}. \quad (11.27)$$

Этот план минимизирует обобщенную дисперсию оценок искомых параметров Q , или объем корреляционного эллипсоида.

Е-оптимальность. План называется Е-оптимальным, если максимальное характеристическое число соответствующей ему корреляционной матрицы минимально

$$\min_{\{W\}} \lambda_{\max}(K_{\hat{Q}}). \quad (11.28)$$

Этот план минимизирует максимальную ось корреляционного эллипсоида.

При планировании процесса определения движения ЛА по результатам наблюдений за его полетом с помощью радиотехнических траекторных измерительных средств в качестве критерия оптимальности плана эксперимента наиболее часто используют величину

$$d(\hat{Q}) = J^T K_{\hat{Q}} J, \quad (11.29)$$

где J — некоторый наперед заданный вектор, размерность которого равна размерности искомого вектора Q .

В качестве вектора J обычно принимают вектор част-

ных производных от положения ЛА на траектории или от времени прохождения летательным аппаратом некоторой точки на траектории по искомым параметрам Q . В этом случае величина $d(\hat{Q})$ представляет собой дисперсию соответствующей оценки координаты или времени.

Использование критерия (11.29) позволяет учитывать влияние на точность решения задачи каждого из оцениваемых параметров q_r ($r=1, 2, \dots, n$) с соответствующим «весом». В выражении (11.29) корреляционная матрица оцениваемых параметров K_Q характеризует модель и программу измерений, а также способ статистической обработки результатов измерений, а матрица J характеризует модель движения ЛА. Условия проведения эксперимента подбирают так, чтобы минимизировать величину $d(\hat{Q})$.

Рассмотрим некоторые основные положения, которые необходимо иметь в виду при оптимизации процесса определения движения ЛА по измерительной информации. Существенно важным является вопрос о том, какие параметры должны оцениваться по результатам измерений. Ранее указывалось, что в число оцениваемых параметров могут быть включены начальные условия движения, баллистический коэффициент аэродинамической силы лобового сопротивления, действующей на ЛА в полете, некоторые параметры атмосферы, коэффициенты гравитационного потенциала, систематические ошибки измерений и другие параметры. Однако при решении каждой конкретной практической задачи определения движения ЛА по результатам измерений нужно знать, какие из перечисленных параметров являются существенными в данной задаче и должны быть оценены, а влияние каких параметров на точность решения пренебрежимо мало и, следовательно, оценивание их нецелесообразно.

Предположим, что о векторе оцениваемых параметров Q имеется априорная информация вида $Q \in N[M(Q), K_Q]$ или $q_{r\text{мин}} \leq q_r \leq q_{r\text{макс}}$, $r=1, 2, \dots, n$.

Влияние каждого параметра на величину критерия оптимальности плана эксперимента $d(Q)$ в первом приближении определяется значением производной

$\partial d(\mathbf{Q})/\partial q_r$ и мерой разброса возможных значений этого параметра, характеризуемой средним квадратическим отклонением $\sigma_{q,r}$ или разностью $q_{r\text{макс}} - q_{r\text{мин}}$.

Поэтому в качестве показателей влияния можно выбрать соответственно величины

$$d_r = \frac{\partial d(\mathbf{Q})}{\partial q_r} \sigma_r$$

$$\text{или } d'_r = \frac{\partial d(\mathbf{Q})}{\partial q_r} (q_{r\text{макс}} - q_{r\text{мин}}), \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Разброс величин $d(\mathbf{Q})$ относительно номинального значения в первом приближении может быть охарактеризован дисперсией $\sigma_d^2 = \sum_{r=1}^n d_r^2$ или максимальным размахом

$\Delta_d = \sum_{r=1}^n |d'_r|$, а относительное влияние каждого параметра — коэффициентом $\gamma_r = d_r/\sigma_d$ или $\gamma'_r = |d'_r|/\Delta_d$.

Если, исходя из требуемой точности решения задачи, задаться малой положительной величиной ϵ , то все параметры q_r , которые удовлетворяют условию $\gamma_r > \epsilon$ или $\gamma'_r > \epsilon$, $r = 1, 2, \dots, n$, следует считать существенными и включать в число оцениваемых параметров.

Вопросам оптимальной организации процесса измерений при проведении экспериментов в настоящее время уделяется много внимания. Опубликован ряд работ [96—105], в которых делаются попытки разработать методы оптимального проведения измерений при слежении за движением ЛА. Интересный подход к решению задачи оптимального управления процессом измерений изложен в работах [98, 99]. Рассмотрим основные положения указанных работ применительно к задаче определения движения ЛА по результатам траекторных измерений.

При последовательном оценивании параметров движения ЛА по результатам траекторных измерений методом, изложенным в гл. 4, используется алгоритм фильтра Калмана. Уравнения (4.22) и (4.23) этого фильтра позволяют находить оценку максимального правдоподобия вектора состояния динамической системы $\hat{\mathbf{X}}(t)$ и корреляционную матрицу этой оценки $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}}(t)$. На основе использования уравнения (4.23) рассмотрим задачу

оптимизации процесса наблюдения для динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями (4.1), где матрицы $F(t)$, $A(t)$, $K_W(t)$, $K_H(t)$ соответственно размера $n \times n$, $m \times n$, $n \times n$, $N \times N$ предполагаются известными. Введем обозначение

$$P(t) = A^T(t) K_H^{-1}(t) A(t) \quad (11.30)$$

и перепишем уравнение (4.23) в виде

$$\begin{aligned} dK_{\hat{x}}(t)/dt = & F(t) K_{\hat{x}}(t) + K_{\hat{x}}(t) F^T(t) - K_{\hat{x}}(t) P(t) \times \\ & \times K_{\hat{x}}(t) + K_W(t), \\ K_{\hat{x}}(t_0) = & K_{\hat{x}0}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Матрица $P(t)$ имеет размер $n \times n$ и, как матрицы $K_W(t)$, $K_H(t)$, $K_{\hat{x}}(t)$, обладает свойствами симметрии и положительной определенности. Она характеризует процесс измерений ($P(t) = 0$, если в момент времени t измерения не производятся). Матрица $P(t)$ зависит от того, сколько и какие функции измеряются (это определяется матрицей $A(t)$) и с какими ошибками они измеряются (это характеризуется матрицей $K_H(t)$). Матрица $K_W(t)$ характеризует возмущения, действующие на систему.

Если в процессе измерений можно изменять выбор измеряемых функций или точность их измерений, то матрица $P(t)$ в уравнении (11.31) может рассматриваться как управляющая функция. Роль фазовых координат в системе (11.31) играют элементы корреляционной функции $K_{\hat{x}}(t)$. Число различных элементов в силу симметрии матрицы $K_{\hat{x}}(t)$ равно $n(n+1)/2$.

На управляющую функцию $P(t)$ могут быть наложены ограничения:

$$P(t) \in \bar{P}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_N, \quad (11.32)$$

где $\bar{P}(t)$ — замкнутое множество матриц, характеризующее возможности измерений.

Введем в рассмотрение функционал

$$J_0 = \int_{t_0}^{t_N} f[P(t), t] dt, \quad (11.33)$$

где скалярная функция f определена при всех $t \in [t_0, t_N]$ и $\mathbf{P}(t) \in \mathbf{P}(\bar{t})$. Функционал J_0 характеризует стоимость или длительность процесса измерений, а функция f есть стоимость измерений в единицу времени.

Пусть, например, в любой момент времени можно либо вести измерения фиксированным способом (с матрицей \mathbf{P}_0), либо вообще не производить измерений. Тогда множество $\bar{\mathbf{P}}$ при любом t состоит из двух матриц: \mathbf{P}_0 и $\mathbf{0}$. Если принять в (11.33) $f(\mathbf{P}_0, t) = 1$, $f(\mathbf{0}, t) = 0$, то функционал J_0 будет равен длительности наблюдения.

Процесс измерений обычно ведется для получения с заданной или с минимальной дисперсией значений некоторых функций от фазовых координат системы (параметров движения ЛА) в определенные моменты времени. Пусть t_1, t_2, \dots, t_l — заданные моменты времени в интервале $[t_0, t_N]$, а y_1, y_2, \dots, y_l — скалярные параметры, интересующие исследователя в эти моменты времени. Ограничиваясь, как и в системе (4.1), линейным приближением в окрестности некоторой номинальной траектории, положим параметры линейными функциями фазовых координат

$$y_i = \mathbf{J}_i^T \mathbf{X}(t_i), \quad (11.34)$$

где \mathbf{J}_i — n -мерный ненулевой вектор (см. пояснения к формуле (11.29)).

Тогда в соответствии с теоремой 1.1 можем записать выражение для дисперсии величины y_i :

$$D_i = \mathbf{J}_i^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}}(t_i) \mathbf{J}_i = \sum_{j,k=1}^n K_{jk}(t_i) r_j(t_i) r_k(t_i), \quad (11.35)$$

где $K_{jk}(t_i)$ — элементы матрицы $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}}$; $r_j(t_i), r_k(t_i)$ — компоненты заданного вектора \mathbf{J}_i в фиксированный момент времени t_i , причем $t_0 \leq t_i \leq t_N$.

Теперь можно поставить различные задачи об оптимизации измерений. Можно поставить задачу об определении управления $\mathbf{P}(t)$, удовлетворяющего при всех $t \in [t_0, t_N]$ ограничениям (11.32) и минимизирующего функционал (11.33) при условии, что функционалы (11.35) принимают заданные значения. Фазовые координаты $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{X}}}(t)$ определяются уравнениями (11.31). Поставленная задача является обычной задачей оптимального управления с интегральным функционалом, ограниче-

нием на управление и линейными многоточечными крайними условиями. Число фазовых координат и управляющих функций, т. е. число элементов матриц $K_{\bar{x}}$ и P , равно n^2 , но в силу симметрии этих матриц можно рассматривать лишь $n(n+1)/2$ их компонент.

Вместо минимизации функционала J_0 (стоимости наблюдения) можно потребовать минимума одного из функционалов D_i из (11.35), т. е. минимизировать дисперсию ошибки определения одного из параметров (11.34). Остальные функционалы (11.35), а также функционал (11.33) при этом могут быть заданы.

Можно поставить задачу об оптимальном выборе моментов времени t_i из интервала $[t_0, t_N]$ с тем, чтобы добиться минимума одного из функционалов вида (11.35) (возможно, при заданных значениях других функционалов). Существуют и другие постановки задачи об оптимизации процесса измерений.

Решение поставленных выше задач можно упростить, если нелинейную систему (11.31) свести к линейной путем замены переменных $K_{\bar{x}} = B^{-1}$. Дифференцируя тождество $K_{\bar{x}} B^{-1} = E$ (E — единичная матрица), получаем

$$\frac{dB}{dt} = -B \frac{dK_{\bar{x}}}{dt} B. \quad (11.36)$$

Подставив в (11.36) зависимость (11.31), имеем

$$\frac{dB}{dt} = -BF - F^T B + P - BK_{\bar{x}} B, \quad B(t_0) = K_{\bar{x}0}^{-1}, \quad (11.37)$$

где подразумевается, что все матрицы являются функциями времени.

Теория оптимального планирования эксперимента и методы использования ее для определения движения ЛА по результатам радиотехнических траекторных измерений в последние годы бурно развиваются. Применение этих методов позволяет правильно записывать модель движения ЛА, выбирать состав измеряемых параметров, оптимальное расположение измерительных средств, устанавливать необходимое количество и моменты измерений и обосновывать требуемую точность работы проектируемых измерительных средств по заданным значениям допустимых отклонений в параметрах траектории или в параметрах прогнозируемого движения ЛА.

НИЖНИЕ γ_1 И ВЕРХНИЕ γ_2 ГРАНИЦЫ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО
ИНТЕРВАЛА $\hat{\gamma}_1 \hat{\sigma} < \sigma < \hat{\gamma}_2 \hat{\sigma}$

Таблица П.1

n	P					
	0,99		0,95		0,90	
	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
1	0,356	159	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,666	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,765	1,444	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,769	1,429	0,802	1,346
22	0,717	1,595	0,773	1,416	0,805	1,335
23	0,722	1,576	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,791	1,361	0,820	1,293
28	0,741	1,499	0,794	1,352	0,823	1,286
29	0,744	1,487	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,878	1,161	0,897	1,133

1. **Налимов В. В.** Теория эксперимента. М., «Наука», 1971.
2. **Линник Ю. В.** Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
3. **Шор Я. Б., Кузьмин Ф. И.** Таблицы для анализа и контроля надежности. М., «Сов. радио», 1968.
4. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965.
5. **Леман Э. Л.** Проверка статистических гипотез. Пер. с англ., М. «Наука», 1964.
6. **Линник Ю. В.** Статистические задачи с мешающими параметрами. М., «Наука», 1966.
7. **Мудров В. И., Кушко В. Л., Михайлов В. И., Осовицкий Е. М.** Некоторые эксперименты по использованию метода наименьших модулей в задачах обработки орбитальной информации.— «Космические исследования», 1968, т. 6, вып. 4.
8. **Демидович Б. П., Марон И. А.** Основы вычислительной математики. М., «Физматгиз», 1960.
9. **Резников Б. А.** О двух матричных формах оценок параметров движения космических аппаратов.— «Космические исследования», 1966, т. 4, вып. 1.
10. **Аким Э. Л., Энеев Т. М.** Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений.— «Космические исследования», 1963, т. 1, вып. 1.
11. **Ван дер Варден.** Математическая статистика. Пер. с англ., М. ИЛ, 1960.
12. **Ли Р.** Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. Пер. с англ., М. «Наука», 1966.
13. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы и их применение. Пер. с англ., М., «Наука», 1968.
14. **Яноши Л.** Теория и практика обработки результатов измерений. Пер. с англ., М., «Мир», 1968.
15. **Лидов М. Л.** К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов.— «Космические исследования», 1964, т. 2, вып. 5.
16. **Андерсон Т.** Введение в многомерный статистический анализ. Пер. с англ., М., Физматгиз, 1963.
17. **Крамер Г.** Математические методы статистики. Пер. с англ., М., «Мир», 1975.
18. **Сысоев Л. П.** Оценки параметров, обнаружение и различение сигналов. М., «Наука», 1969.

19. Клепиков Н. П., Соколов С. Н. Анализ и планирование экспериментов методом максимального правдоподобия. М., «Наука», 1964.
20. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. В 2-х книгах. М., «Сов. радио», 1966, 1968.
21. Остром К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления. Пер. с англ., М., «Мир», 1973.
22. Локи М. Оптимизация стохастических систем. Пер. с англ., М., «Наука», 1971.
23. Раух Г., Танг Ф., Стрибел К. Оценка линейных динамических систем по методу максимального правдоподобия. Пер. с англ.— «Ракетная техника и космонавтика», 1965, № 8.
24. Рябова — Орешкова А. П. Об устойчивости фильтров Калмана. — «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1970, № 5.
25. Шли Ф., Стэндиш К., Тода Н. Расходимость фильтрации по методу Калмана. Пер. с англ.— «Ракетная техника и космонавтика», 1967, № 6.
26. Беллантиони Д., Додж К. Новый метод фильтрации Калмана—Шмидта. Пер. с англ.— «Ракетная техника и космонавтика», 1967, № 7.
27. Бирман Г. Распространение ковариации посредством ее собственных значений и собственных векторов. Пер. с англ.— «Ракетная техника и космонавтика», 1970, № 5.
28. Богуславский И. А. Методы навигации и управления по неполной статистической информации. М., «Машиностроение», 1970.
29. Романовский В. И. Математическая статистика. Кн. 2. Оперативные методы математической статистики. Ташкент, изд-во АН Уз. ССР, 1963.
30. Боганик Г. Н. Об установлении порядка уравнения параболической регрессии. — «Теория вероятностей и ее применения», 1967, т. 12, вып. 4.
31. Боганик Г. Н. Сглаживание геофизических наблюдений путем параболической аппроксимации по методу наименьших квадратов. Канд. дис. Моск. геолого-разведочный ин-т, 1968.
32. Большев Л. Н. Асимптотические преобразования. «Теория вероятностей и ее применения», 1963, т. 8, вып. 2.
33. Чернов Г., Мозес Л. Элементарная теория статистических решений, М., «Сов. радио», 1971.
34. Хазен Э. М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М., «Сов. радио», 1968.
35. Виленкин С. Я. Статистические методы исследования стационарных процессов и систем автоматического регулирования. М., «Сов. радио», 1967.
36. Эльясберг П. Е. Определение движения по результатам измерений. М., «Наука», 1976.
37. Брыков А. В. Оценка влияния корреляции между измерениями на точность результатов обработки. — В кн.: Искусственные спутники Земли, вып. 16, М., изд-во АН СССР, 1963.
38. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1969.
39. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
40. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. Кн. 1. М., «Сов. радио», 1963.

41. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2, М., «Наука», 1967.
42. Росин М. Ф. Статистическая динамика и теория эффективности систем управления. М., «Машиностроение», 1970.
43. Клоков Ю. Л., Журавлев Л. В. Метод оценки условного времени затухания корреляционных функций некоторого класса случайных процессов. — «Автоматика и телемеханика», 1965, № 10.
44. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М., «Сов. радио», 1966.
45. Романенко А. Ф., Сергеев Г. А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. М., «Сов. радио», 1968.
46. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. Пер. с англ., М., «Наука», 1965.
47. Каула В. М. Космическая геодезия. Пер. с англ., М., «Недра», 1966.
48. Кондратьев К. Я. Метеорологические исследования с помощью ракет и спутников. М., Гидрометеиздат, 1962.
49. Прикладные задачи космической баллистики. Сб. статей под ред. П. Е. Эльясберга. М., «Наука», 1973.
50. Кинг-Хили Д. Теория орбит искусственных спутников в атмосфере. Пер. с англ., М., «Мир», 1966.
51. Точность измерения параметров движения космических аппаратов радиотехническими методами. Под ред. С. Д. Сильвестрова, М., «Сов. радио», 1970. Авт.: С. Д. Сильвестров, В. М. Лазарев, А. И. Корниенко, М. И. Паншин.
52. Пугачев В. Н. Комбинированные методы определения вероятностных характеристик. М., «Сов. радио», 1973.
53. Астрономический ежегодник СССР на 1975 г. М.—Л., «Наука», 1972.
54. Закатов П. С. Курс высшей геодезии. Сферическая геодезия, теоретическая геодезия и основы гравиметрии. М., «Недра», 1964.
55. Погорелов Д. А. Теория кеплеровых движений летательных аппаратов. М., Физматгиз, 1961.
56. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., «Наука», 1968.
57. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., «Наука», 1965.
58. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Физматгиз, 1963.
59. Жонголович И. Д. Потенциал земного притяжения. — Бюл. ин-та теорет. астрономии АН СССР, 1957, т. 6, № 8 (81).
60. Стандартная Земля. Геодезические параметры Земли на 1966 г. Под ред. К. Лунквиста и Г. Вейса. Пер. с англ. М., «Мир», 1969.
61. Движение искусственных спутников в гравитационном поле Земли. Под ред. Н. Н. Моисеева. М., изд-во Вычислит. центра АН СССР, 1967. Авт.: Ю. Г. Евтушенко, И. А. Крылов, Р. Ф. Мержанова, Г. В. Самойлович.
62. Лидов М. Л. Определение плотности атмосферы по наблюдаемому торможению первых искусственных спутников Земли. — В кн.: Искусственные спутники Земли, вып. 1. М., изд-во АН СССР, 1958.

63. **Основы** теории полета космических аппаратов. Под ред. Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравова. М., «Машиностроение», 1972.
64. **Колегов Г. А.** Вариации плотности верхней атмосферы по данным об изменении периодов обращения искусственных спутников Земли. — В кн.: Искусственные спутники Земли, вып. 4. М., изд-во АН СССР, 1960.
65. **Поляхова Е. Н.** Световое давление и движение спутника Земли. — «Бюл. ин-та теорет. астрономии АН СССР», 1963, т. 9, № 1.
66. **Марьямов А. Г., Ястребов В. Д.** Система цилиндрических координат для описания движения искусственных спутников. — «Космические исследования», 1966, т. 4, вып. 5.
67. **Кислик М. Д.** Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. — В кн.: Искусственные спутники Земли, вып. 4, М., изд-во АН СССР, 1960.
68. **Березин И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений. Т. II, М., Физматгиз, 1959.
69. **Охоцимский Д. Е., Энесь Г. М., Таратынова Г. П.** Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты. — Успехи физическ. наук, 1957, т. 13, вып. 1.
70. **Таратынова Г. П.** О движении искусственного спутника в нецентральной поле тяготения Земли при наличии сопротивления атмосферы. — «Успехи физич. наук», 1957, т. 13, вып. 1.
71. **Таратынова Г. П.** Методы численного решения уравнений в конечных разностях и их применение к расчетам искусственных спутников Земли. — В кн.: Искусственные спутники Земли. М., изд-во АН СССР, 1960, вып. 4.
72. **Справочное** руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г. Н. Дубошина. М., «Наука», 1976. Авт.: В. К. Абалакин, Е. П. Аксенов, Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов.
73. **Егорова А. В.** Влияние притяжения Луны и Солнца на движение искусственного спутника Земли. — В кн.: Искусственные спутники Земли. М., изд-во АН СССР, 1961, вып. 8.
74. **Михневич В. В.** Вариации плотности атмосферы на высотах более 200 км. — В кн.: Искусственные спутники Земли. М., изд-во АН СССР, 1963, вып. 17.
75. **Яцунский И. М.** Определение условий освещенности и времени пребывания искусственного спутника в тени и на солнце. — В кн.: Искусственные спутники Земли. М., изд-во АН СССР, 1960, вып. 4.
76. **Шебшаевич В. С.** Введение в теорию космической навигации. М., «Сов. радио», 1971.
77. **Раух Г.** Оптимальная оценка траекторий спутника с учетом случайных флюктуаций лобового сопротивления. Пер. с англ. — «Ракетная техника и космонавтика», 1965, № 4.
78. **Тейпли Б., Борн Г.** Последовательная процедура оценки состояния и ковариационной матрицы ошибок наблюдений. Пер. с англ. — «Ракетная техника и космонавтика», 1971, № 2.
79. **Резников Б. А.** Об определении параметров движения космического аппарата при полете с действующим двигателем. — «Космические исследования», 1968, т. 6, вып. 5.

80. Стражева И. В., Мелкумов В. С. Векторно-матричные методы в механике полета. М., «Машиностроение», 1973.
81. Эльясберг П. Е., Ястребов В. Д. Определение плотности верхней атмосферы по результатам наблюдений за полетом третьего искусственного спутника Земли. — В кн.: Искусственные спутники Земли. М., изд-во АН СССР, 1960, вып. 4.
82. Бэттин Р. Наведение в космосе. Пер. с англ. М., «Машиностроение», 1966.
83. Космические траекторные измерения. Радиотехнические методы измерений и математическая обработка данных. Под ред. П. А. Агаджанова, В. Е. Дулевича, А. А. Коростелева. М., «Сов. радио», 1969.
84. Моу К. Вероятностные модели ошибок при прогнозировании орбит искусственных спутников Земли. Пер. с англ. — «Ракетная техника и космонавтика», 1962, № 11.
85. Герстен Р., Гор Р., Холл Н. Статистические свойства возмущений орбиты, порождаемых аномалиями гравитационного поля Земли. Пер. с англ. — «Ракетная техника и космонавтика», 1967, № 10.
86. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов). М., «Наука», 1971.
87. Адлер Ю. П. Введение в планирование эксперимента. М., «Металлургия», 1969.
88. Налимов В. В., Чернова Н. А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М., «Наука», 1965.
89. Новые идеи в планировании эксперимента. Сб. статей под ред. В. В. Налимова. М., «Наука», 1969.
90. Планирование эксперимента. Сб. статей под ред. Г. К. Круга. М., «Наука», 1966.
91. Ашмарин И. П., Васильев Н. Н., Амбросимов В. А. Быстрые методы статистической обработки и планирование экспериментов. ЛГУ, 1971.
92. Калман Р. Об общей теории систем управления. Пер. с англ. В кн.: «Труды I Международного конгресса ИФАК», изд-во АН СССР, т. 2, 1961.
93. Финни Д. Введение в теорию планирования экспериментов. Пер. с англ. М., «Наука», 1970.
94. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. Пер. с англ. М., «Мир», 1969.
95. Хикс Ч. Р. Основные принципы планирования эксперимента. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
96. Космические радиотехнические комплексы. Под ред. С. И. Бычкова. М., «Сов. радио», 1967. Авт.: С. И. Бычков, Д. П. Лукьянов, М. К. Сергеев и др.
97. Рудаков В. М. Об оптимальном выборе моментов навигационных наблюдений. — «Космические исследования», 1969, т. 7, № 3.
98. Черноусько Ф. Л. Об оптимизации процесса наблюдения. — «Прикладная математика и механика», 1969, т. 33, вып. 1.
99. Соляник А. И., Черноусько Ф. Л. Оптимизация процесса наблюдения при случайных возмущениях. — «Прикладная математика и механика», 1969, т. 33, вып. 4.
100. Бахшиян Б. Ц. Оптимальный выбор информации, используемой при определении траектории движения космического аппарата. — «Космические исследования», 1969, т. 7, вып. 3.

101. Назаренко А. И. Некоторые вопросы оптимизации обработки орбитальных измерений искусственных спутников Земли.— «Космические исследования», 1968, т. 6, вып. 5.
102. Олянюк П. В., Романов Л. М., Михайлик В. И. Об особенностях различных систем элементов орбит космических аппаратов.— «Космические исследования», 1971, т. 9, вып. 1.
103. Тумашев Ю. С. О выборе оптимальных параметров измерений.— «Космические исследования», 1968, т. 6, вып. 4.
104. Бажинов И. К., Почукаев В. Н., Сердюков А. И. О выборе измеряемых параметров при определении траектории космического аппарата.— «Космические исследования», 1972, т. 10, вып. 4.
105. Брандин В. Н., Васильев А. А., Худяков С. Т. Основы экспериментальной космической баллистики. М., «Машиностроение», 1974.
106. Костиюковский Ю. М. — Л. О наблюдаемости нелинейных управляемых систем.— «Автоматика и телемеханика», 1968, № 8, 9.
107. Разоренов Г. Н. Наблюдаемость в нелинейных задачах навигации космических аппаратов.— «Космические исследования», 1975, т. 13, вып. 2.
108. Резников Б. А. О параметрической наблюдаемости космических аппаратов.— «Космические исследования», 1968, т. 6, вып. 3.
109. Kalman R. E. New approach to the linear filtering and prediction problems.— «J. Basic Engineering» Trans. ASME, 1960, v. 82, № 1.
110. Kalman R. E., Busy R. S. New results in linear filtering and prediction theory.— «J. Basic Engineering» Trans. ASME, 1961, v. 83, № 1.
111. Butcher J. On Runge—Kutta processes of high order.— «J. Austral. Mathematical Soc.», 1965, v. 4, p. 2.
112. Shanks B. Solution of differential equations by evolutions of functions.— «Mathematics Computer», 1966.
113. Ralston A. Runge—Kutta methods with minimum error bounds.— «Mathematics Computer», 1962.
114. Muhleman, Hudson, Holdridge, Carpenter. Observed Solar pressure Perturbations of «Echo-1»,— «Science», 1960, v. 132, № 3438.
115. Jacchia L. G. A Variable atmospheric density model from satellite accelerations.— «J. Geophys. Res.», 1960.
116. Jacchia L. G. The Temperature above the thermopause.— Special Rep. 1950, Smithsonian astrophysical observatory, April, 1964.
117. Kaula W. M. Statistical and harmonic analysis of gravity.— «J. Geophys. Res.», 1959, v. 64, № 12.
118. Kaula W. M. Determination of the earth's gravitational field.— «Rev. Geophys.», 1, Nov. 1963.
119. Kiefer J. Optimum designs in regression problems.— «Ann. Math. Statist.», 1961, v. 2.
120. Lee B., Marcus L. Foundation of optimal control theory. N. Y., J. Wiley Sons, 1967.
121. CIRA 1972, Berlin Akademie-Verlag, 1972.
122. 1973 Smithsonian Standard Earth III. Ed. by E. M. Gaposhkin, Cambridge SAO, 1973.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгоритм перехода 57
— решения задачи сглаживания 139, 140
- Влияние атмосферы на полет ИСЗ 297
- Выбор степени сглаживающего полинома 132, 133
- Движение ЛА:
кеплерово 202
начальные условия 226
неуправляемое 201
точность определения 329
центра масс 314, 315
- Дисперсия измерения с единичным весом 31
- Измерения аномальные 142, 143
- Интервал доверительный 22
— корреляционный 191, 192
— сглаживания 127
- Критерии сглаживания 134, 135
- Лемма об обращении матриц 51
- Матрица:
весовая 31
вторых начальных моментов 46
корреляционная квазидиагональная 50
корреляционных моментов 43
неособенная 32
особенная 32
симплектическая 319
треугольная 53
- Метод:
вариаций 282
Гаусса—Ньютона 59
конечных разностей 281
максимального правдоподобия, оценка 72, 75
наименьших квадратов, оценка 24, 27, 32
последовательных приближений модифицированный 66
скорейшего спуска модифицированный 63
- Модель движения 8, 9
— динамическая 6, 7
— кинематическая 6, 10
— математическая 5, 6
- Наблюдаемость нелинейных динамических систем 353
- Неравенство Чебышева 17
- Норма вектора 19
- Определение координат ЛА 247
— — численным дифференцированием 254
— орбиты ИСЗ 361
- Оценка:
линейная 29
несмещенная 16
- параметров действительного движения ЛА 327
состояния систем динамических линейных 87—97
— — нелинейных 98—102
состоятельная 16
эффективная 16
- Ошибки:
геодезической привязки 334—336
измерений, вероятностные характеристики 151, 159
— некоррелированные 27
— систематические 40
— случайные 40
сглаживание 127, 128
- Параметр нецентральности 131
- Параметры орбиты 202—203
- Планирование эксперимента оптимальное 350
- Полет ЛА с малой тягой 324
- Полином Чебышева 109, 110
- Потенциал земного притяжения 208
- Прогнозирование движения ИСЗ 338
- Проектирование измерительных средств 349
- Расположение взаимное орбиты и измерительного пункта 364, 365
- Распределение Стьюдента 22, 23
- Сила:
притяжения Луны 211—213
— Солнца 211—213
светового давления 216
сопротивления аэродинамическая 213
тяжести 211
- Система:
динамическая 13
координат 193
— абсолютная 194, 195
— геоцентрическая 194, 195
— — абсолютная цилиндрическая 197
— — — эллиптическая 196
— измерительная 198
— местная 198
— орбитальная 196
— относительная 194
— перигейная 197
нормальных уравнений 28
- Теорема Вейерштрасса 161
- Траектория опорная 323
- Уравнения движения ЛА:
методы решения 226
— — аналитические 227
— — численные 227—229, 231
- Флюктуации лобового сопротивления случайные 340
- Функционирование измерительного комплекса 350
- Эллипсоид Красовского 335

Предисловие	3
1. Основные понятия	5
1.1. Постановка задачи определения движения летательных аппаратов по результатам траекторных измерений	5
1.2. Оценки и их свойства	15
1.3. Оценивание параметров с помощью доверительных интервалов	21
ЧАСТЬ I. МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ	24
2. Оценивание параметров методом наименьших квадратов	24
2.1. Сущность оценивания параметров методом наименьших квадратов	24
2.2. Оценивание параметров при некоррелированных ошибках измерений	26
2.3. Оценивание параметров при коррелированных ошибках измерений	30
2.4. Свойства оценок метода наименьших квадратов	31
2.5. Оценивание величины σ_0^2	38
2.6. Влияние систематических ошибок измерений на точность оценивания параметров. Оценивание систематических ошибок измерений	39
2.7. Оценивание параметров по выборке измерений нарастающего объема	48
2.8. Оценивание параметров при нелинейной зависимости измеряемых функций от искомых параметров	57
2.9. Оценивание параметров по выборке измерений нарастающего объема при нелинейной зависимости измеряемых функций от искомых параметров	67
3. Оценивание параметров методами максимального правдоподобия и максимума апостериорной вероятности	72
3.1. Оценивание параметров методом максимального правдоподобия	72
3.2. Оценивание параметров методом максимума апостериорной вероятности	76

4. Оценивание состояния динамических систем по результатам измерений	87
4.1. Оценивание состояния линейных динамических систем	87
4.2. Оценивание состояния нелинейных динамических систем	98
5. Использование сглаживающих фильтров для предварительной статистической обработки результатов измерений	103
5.1. Постановка задачи построения сглаживающих фильтров	103
5.2. Сглаживание дискретных измерений алгебраическими многочленами	106
5.3. Сглаживание дискретных измерений линейной комбинацией ортогональных полиномов	109
5.4. Особенности сглаживания дискретных коррелированных измерений	118
5.5. Выбор степени полинома, сглаживающего измерения	127
5.6. Исключение из обработки аномальных результатов измерений	142
6. Оценивание вероятностных характеристик ошибок измерений по экспериментальным данным	150
6.1. Ошибки измерений. Задача оценивания вероятностных характеристик ошибок измерений	152
6.2. Определение частной реализации медленноменяющейся составляющей ошибок измерений	161
6.3. Оценивание статистической корреляционной функции быстроменяющихся составляющих ошибок измерений по данным одного сеанса наблюдения	162
6.4. Осреднение корреляционных функций быстроменяющихся составляющих ошибок измерений, полученных по нескольким сеансам наблюдения	170
6.5. Оценивание вероятностных характеристик медленноменяющихся составляющих ошибок измерений по данным нескольких сеансов наблюдения	174
6.6. Аппроксимация статистической корреляционной функции	182
6.7. Определение интервала корреляции	191
ЧАСТЬ II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ	193
7. Уравнения движения летательных аппаратов и методы их интегрирования	193
7.1. Системы координат	193
7.2. Необходимые сведения из теории кеплерова движения	201
7.3. Уравнения возмущенного движения летательного аппарата	207
7.4. Методы решения уравнений движения	226

7.5. Особенности расчета движения ИСЗ на большие интервалы времени	235
8. Определение движения летательных аппаратов на основе кинематической модели движения . . .	246
8.1. Определение параметров движения летательного аппарата по минимально необходимому количеству измерений	247
8.2. Определение составляющих скорости летательного аппарата численным дифференцированием измеренных координат	253
9. Определение движения летательных аппаратов на основе динамической модели движения . . .	265
9.1. Постановка задачи	265
9.2. Оценивание неизвестных параметров математической модели движения летательного аппарата по результатам траекторных измерений	270
9.3. Определение частных производных от измеряемых функций по искомым параметрам	278
9.4. Уточнение влияния атмосферы на движение ИСЗ по результатам траекторных измерений	296
9.5. Последовательное совместное оценивание параметров движения летательного аппарата и корреляционной матрицы ошибок траекторных измерений	303
9.6. Определение управляемого движения ЛА совместной статистической обработкой результатов измерений траекторных средств и инерциальных датчиков . . .	314
10. Оценка точности определения неуправляемого движения ЛА по результатам траекторных измерений	328
10.1. Постановка задачи	328
10.2. Оценка точности определения неуправляемого движения ЛА	329
10.3. Влияние ошибок геодезической привязки измерительных средств на точность определения движения ЛА	334
10.4. Влияние ошибок в расчетных значениях сил, действующих на ИСЗ в полете, на точность прогнозирования движения ИСЗ по результатам измерений	338
11. Основы планирования траекторных измерений	348
11.1. Постановка задачи	348
11.2. Наблюдаемость	351
11.3. Критерии оптимальности планирования процесса определения движения по результатам измерений	366
Приложение	374
Список литературы	375
Предметный указатель	381