Р. КУК

БЕСКОНЕЧНЫЕ МАТРИЦЫ И ПРОСТРАНСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

INFINITE MATRICES AND SEQUENCE SPACES

BY

RICHARD G. COOKE

LONDON 1950

Р. КУК

БЕСКОНЕЧНЫЕ МАТРИЦЫ И ПРОСТРАНСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Перевод с английского
И. И. ВОЛКОВА

Под редакцией
П. Л. УЛЬЯНОВА

Обзорная статья
И. И. ВОЛКОВА и П. Л. УЛЬЯНОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

АННОТАЦИЯ

В книге излагаются основные факты из теории бесконечных матриц. Указаны связи теории бесконечных матриц с теорией функций, алгеброй, топологией, математической физикой. Основное внимание уделено применению бесконечных матриц к суммированию расходящихся рядов и последовательностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА И ПЕРЕВОДЧИКА

Настоящая книга, предлагаемая вниманию советского читателя, написана английским математиком Р. Г. Куком.

Основное содержание книги посвящено изложению некоторых фактов из теории бесконечных матриц, суммирования рядов и последовательностей и теории гильбертовых матриц.

Наибольшее внимание уделено общим вопросам суммирования рядов и последовательностей с помощью бесконечных матриц.

Следует отметить, что в 1951 г. у нас была издана книга Г. Харди «Расходящиеся ряды», в которой весьма обстоятельно дано изложение многих конкретных методов суммирования. В этой же книге помещена обзорная статья С. Б. Стечкина, относящаяся к методам суммирования Бернштейна — Рогозинского.

Что касается вопросов, относящихся к общей теории суммирования, то монография Кука является, насколько это нам известно, первой попыткой систематического современного изложения этой теории. В силу этого настоящая книга будет весьма полезной тому, кто заинтересуется общей теорией суммирования рядов и последовательностей.

Само собой разумеется, что читатель сможет здесь также найти ряд сведений из теории бесконечных матриц.

В ряде мест редактором, иногда переводчиком, сделаны подстрочные примечания, которые поясняют изложение автора или же исправляют некоторые неточности доказательств.

В конце книги приложена наша обзорная статья «О некоторых новых результатах по общей теории суммирования рядов и последовательностей». Объем статьи не позволил нам изложить все то, что хотелось бы изложить. О том, какие вопросы рассматриваются в обзорной статье, можно судить по оглавлению. И. И. Волковым написаны §§ 1—4 обзорной статьи, а П. Л. Ульяновым — §§ 5—10.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Несмотря на большое количество работ по теории матриц, до настоящего времени ни на одном языке нет книги, посвященной теории бесконечных матриц в целом. Такое положение создает известные трудности для лиц, желающих ознакомиться с каким-либо вопросом теории бесконечных матриц, так как при этом приходится собирать и объединять разрозненную литературу или же обращаться к научным работникам в данной отрасли. Поэтому желательно дать обзор результатов, относящихся к свойствам бесконечных матриц и их применению, известных к настоящему времени.

В данной книге рассматривается применение бесконечных матриц главным образом к суммированию расходящихся рядов и последовательностей. Этим вопросам посвящены все главы книги, начиная с четвертой; первые три главы предназначены для ознакомления читателя с аппаратом бесконечных матриц.

Я надеюсь написать второй том, в котором будут рассмотрены функциональные и абстрактные гильбертовы пространства, применение бесконечных матриц в квантовой механике, линейные операторы и математическая теория спектра, разработанная Нейманом и другими авторами. Второй том явится естественным продолжением настоящей книги и будет иметь целью рассмотреть другие важные вопросы применения теории бесконечных матриц, подробно не затронутые в данной книге.

Я старался избежать, насколько это возможно, рассмотрения отдельных свойств специальных матриц. Так, различные матрицы, хорошо известные в теории суммирования, например матрицы Эйлера — Кноппа, Хаусдорфа, Валле-Пуссена и др., только упоминаются в тексте или же просто содержатся в приложении и библиографии. Наоборот, главное внимание в этой книге будет сосредоточено на изучении бесконечных матриц в целом или некоторых классов их. В этом имеется некоторая аналогия с теорией функций: мы имеем общую теорию для широкого класса функций и теорию специальных функций — гамма-функций, дзета-функций, функций Бесселя, эллиптических функций, гипергеометрических функций, функций Матье и т. д. Изучивший общую теорию бесконечных матриц без затруднений может читать работы по специальным матрицам.

Необходимо учитывать, что дисциплина, являющаяся предметом данной книги, находится только в своем становлении: все изложенные здесь результаты получены за последние 37 лет, а многие из них совсем недавно. Поэтому нельзя надеяться на полное единство изложенной теории, как это сделано, например, в теории функций действительного или комплексного переменного или в теории чисел; многие вопросы будут рассмотрены изолированно и разобщенно. С другой стороны, ясно, что эта дисциплина охватывает большой и важный раздел математики. Создание связующего звена между отдельными разделами математики всегда представляет большой интерес. Как мы увидим, теория бесконечных матриц связана с теорией функций (см., в частности, гл. 8), с современной алгеброй (см. § 3.5), с топологией (см. гл. 9 и 10; более отчетливо это проявится во втором томе), с математической физикой (в вопросах, относящихся к квантовой механике и спектральной теории).

Наибольшие трудности, которые возникают в любом разделе современного анализа, происходят от двойных предельных переходов. Трудно себе представить какой-либо раздел математики, который давал бы лучшие основы для изучения таких процессов, чем бесконечные матрицы и пространства последовательностей.

Поскольку эта дисциплина является совершенно новой, она богата интересными научными проблемами. Мы надеемся, что настоящая книга будет способствовать исследованию в данной области.

В конце каждой главы даны примеры, включающие многие интересные результаты. Некоторые из этих результатов были опубликованы после того, как книга была сдана в печать, так что оказалось невозможным включить их в основной текст.

Мне удалось привлечь внимание нескольких моих коллег к рукописи настоящей книги или к отдельным ее частям; многие оригинальные теоремы, представленные различными авторами, публикуются здесь впервые.

Прежде всего я должен сердечно поблагодарить проф. Динса, привившего мне интерес к этому предмету несколько лет назад. Проф. Динс прочитал всю рукопись, сделал много ценных замечаний. Ему принадлежат первоначальная разработка вопросов об обращениях и гранях матриц (§§ 2.2, 2.3) и введение в теорию билинейных форм в § 9.4. Моя зависимость от главы XII его книги «The Taylor Series» (Оксфорд, 1931) является очевидной.

Я благодарю д-ра Аллена, который предоставил мне многие материалы для главы 10 настоящей книги до опубликования некоторых из них, а также новые результаты о гранях матриц и замечания о ядрах последовательностей. Кроме того, я должен поблагодарить д-ра Аллена за чтение корректур этой книги.

Я благодарю проф. Тернбулла, прочитавшего рукопись и сделавшего много полезных замечаний, особенно в части, относящейся к матричным обозначениям.

М-р Ле-Бо сделал ценные замечания по расположению материала в главах 1, 2 и 9 и проявил большой интерес к остальной части книги; ему также принадлежит первоначальное доказательство теоремы (**9.4**, III) (II) о билинейных формах.

Д-р Купер сделал несколько полезных замечаний.

Я благодарю проф. Жулиа и Готье-Вилляра (Париж) за позволение использовать в § 9.3 настоящей книги некоторые доказательства, приведенные в книге проф. Жюлиа «Theories Quantiques», часть II.

Кроме того, я благодарю за представленные доказательства теорем д-ра Робинсона — теоремы (**6.4**, II), (**6.5**, I) и (**6.5**, II) о ядрах последовательностей, д-ра О. Тауски — теоремы § 3.5, д-ра Хенстока — теоремы (**4.2**, I) и (**8.3**, II); д-ра Вермса — теорема (**5.6**, II). Оригинальные примеры представили д-р Аллен, проф. Динс, д-р Вермс, д-р Робинсон, м-р Мелвин-Мелвин, д-р Роджерс, м-р Оуэн и м-с М. Барнетт.

В заключение я хочу выразить свою признательность м-ру Макмиллану за его участие в создании этой книги и м-ру Мак-Лехоузу за его высокое печатное мастерство.

Беркбекский колледж,
Лондонский университет

Р. Кук

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Каждая глава делится на параграфы, которые имеют двойную нумерацию. Например, § 4.5 обозначает § 5 главы 4.

Теоремы имеют тройную нумерацию. Например, (**8.2**, IV) обозначает теорему IV § 8.2. Номера в квадратных скобках после фамилии автора указывают ссылку на библиографию в конце книги.

ГЛАВА 1

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Различие между теориями конечных и бесконечных матриц

Бесконечной матрицей называется двойная таблица $A=(a_{ij})$ $(i, j=1, 2, \ldots)$ действительных или комплексных чисел a_{ij}. Первый индекс i указывает номер строки, второй индекс j — номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Сложение и умножение бесконечных матриц определяются соотношениями:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}), \quad \lambda A=(\lambda a_{ij}), \quad AB=\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}b_{kj}\right),$$

где λ — любое действительное или комплексное число (скаляр). Таким образом, если $AB=(c_{ij})$, то

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}b_{kj}$$

только в том случае, когда эта сумма существует.

Нетрудно убедиться, что операции над бесконечными матрицами существенно отличаются от операций над конечными матрицами. Для этого имеются некоторые основания:

(I) В теории конечных матриц основную роль играют определители; в теории бесконечных матриц их роль в значительной степени теряется.

(II) В теории бесконечных матриц часто встречаются проблемы существования, которые не имеют аналога в теории конечных матриц. Например, если даны две бесконечные матрицы A и B, то их произведение AB может не существовать, так как ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}b_{kj}$$

могут расходиться для всех или некоторых значений i и j.

В то время как теория конечных матриц является частью алгебры, теория бесконечных матриц составляет раздел анализа. Это само по себе говорит о различном содержании этих двух дисциплин; можно надеяться (как и есть на самом деле), что теория бесконечных матриц будет иметь тесную связь с общей теорией функций.

(III) Для конечных квадратных матриц n-го порядка установлено большое количество теорем. Казалось бы, можно ожидать, что, устремляя в этих теоремах n к ∞, мы получим соответствующие теоремы для бесконечных матриц. Однако, принимая во внимание препятствия, связанные со сходимостью рядов, и другие, это удается сделать лишь в исключительных случаях (см. Тернбулл [2], [3], где некоторые результаты получены таким путем, а также Гёрр [1]).

(IV) Вообще, как мы увидим, типы проблем, решаемых при помощи бесконечных матриц, имеют совершенно другой характер, чем проблемы, решаемые с помощью конечных матриц.

1.2. Некоторые вопросы, связанные с применением бесконечных матриц

В качестве иллюстрации к § 1.1 (IV) рассмотрим несколько задач, при решении которых встречаются бесконечные матрицы.

(a) Пусть дана бесконечная система линейных уравнений с бесконечным множеством неизвестных $x_1, x_2, \ldots$, например

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = y_i. \tag{1.21}$$

Коэффициенты a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots)$, расположенные в виде двойной таблицы, образуют бесконечную матрицу. Если мы положим $x_{k1} = x_k$, $x_{kj} = 0$ для $j > 1$, $y_{i1} = y_i$, $y_{ij} = 0$ для $j > 1$, то система (1.21) может быть записана в матричной форме $AX = Y$ с условием, что мы рассматриваем только те решения X последнего уравнения, в котором все элементы, кроме расположенных в первом столбце, равны нулю.

Предположим, что все элементы в p-й строке матрицы B равны нулю, кроме элемента b_{pq}, который равен 1; тогда p-я строка матрицы BC будет такой же, как q-я строка матрицы C. Аналогично, если все элементы q-го столбца матрицы C равны нулю, кроме элемента c_{pq}, который равен 1, то q-й столбец матрицы BC будет таким же, как p-й столбец матрицы B. Следовательно, если через I обозначить матрицу, в которой все элементы, расположенные на *главной диагонали* $(a_{ii}, i = 1, 2, \ldots)$, равны 1, а все другие элементы равны нулю, то $IA = AI = A$. Матрица I называется *единичной матрицей*; элементы ее обозначаются символом δ_{ij}, так что

$$\delta_{ij} = 0, \quad \text{если } j \neq i, \quad \delta_{ii} = 1.$$

Предположим теперь, что существует матрица ${}^{-1}A$ такая, что ${}^{-1}AA = I$. В этом случае матрицу ${}^{-1}A$ называют *левосторонней об-*

ратной к матрице A. Если *при наличии определенных условий* мы умножим слева обе части уравнения $AX = Y$ на матрицу ${}^{-1}A$, то получим решение этого уравнения в виде $X = {}^{-1}AY$ (см. § 3.2). Этот пример указывает на необходимость рассмотрения матриц, обратных к данным бесконечным матрицам (см. гл. 2), которые также будут встречаться и по другому поводу. С обращением матриц также связаны вопросы, близкие к решению линейных уравнений в бесконечных матрицах более общего типа. Такие вопросы будут рассмотрены в гл. 3.

(б) Весьма важное применение бесконечные матрицы имеют в теории суммирования расходящихся последовательностей и рядов; эти вопросы с различных точек зрения будут рассмотрены в гл. 4—10.

Наиболее простым примером применения бесконечных матриц к суммированию расходящихся последовательностей является метод средних арифметических для последовательностей z_n, т. е. преобразование вида

$$z'_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} z_k. \tag{1.22}$$

Этот пример является частным случаем более общего преобразования последовательности z_n в последовательность z'_n с помощью бесконечной матрицы (a_{nk}), а именно:

$$z'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k. \tag{1.23}$$

Сравнивая (1.22) и (1.23), мы видим, что суммирование средними арифметическими равносильно преобразованию с помощью бесконечной матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}, \tag{1.24}$$

т. е. матрицы (a_{nk}), где $a_{nk} = \frac{1}{n}$ при $1 \leqslant k \leqslant n$ и $a_{nk} = 0$ при $k > n$.

В § 4.1 будут даны необходимые и достаточные условия того, чтобы преобразование, совершаемое с помощью матрицы (a_{nk}), переводило *всякую* последовательность z_n, сходящуюся к z при $n \to \infty$, в последовательность z'_n, сходящуюся к z', причем в общем случае

$z \neq z'$. Эти условия следующие:

(а)' $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant M$ *для любого* $n > n_0$,

(б)' $\lim_{n \to \infty} a_{nk} = \alpha_k$ *для любого фиксированного* k,

(в)' $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = A_n \to \alpha$ *при* $n \to \infty$.

Матрица (a_{nk}), удовлетворяющая этим условиям, называется *матрицей Кожима* или *K-матрицей*, а числа α_k и α называются *характеристическими числами* матрицы. Если, кроме того, $z' = z$, т. е. предел преобразованной последовательности z'_n при $n \to \infty$ совпадает с пределом первоначальной последовательности z_n, то $\alpha_k = 0$, $\alpha = 1$. В этом случае K-матрица называется *матрицей Теплица* или *T-матрицей*. Таким образом, матрица (1.24) является T-матрицей; все T-матрицы обладают свойством регулярности, т. е. всякая сходящаяся последовательность преобразуется такой матрицей опять в сходящуюся, причем *предел остается тот же*. T-матрицы и K-матрицы будут обычно применяться для преобразования *расходящихся* последовательностей в *сходящиеся*. Перенесение полученных при этом результатов на *ряды* (вместо последовательностей) не представляет больших затруднений.

После доказательства упомянутых выше основных теорем будут приведены связанные с ними многочисленные результаты (см. гл. 4—10).

Другое важное применение бесконечные матрицы имеют в теории Гейзенберга — Дирака, относящейся к квантовой механике (Френкель [1], т. II, гл. III; Кембл [1], гл. X и далее, Бертуисл [1], 64, 88, 101, 134, 264). Здесь основные проблемы заключаются в решении двух линейных уравнений, элементами которых являются бесконечные матрицы: (I) $AX - XA = I$, где A — данная матрица, а I — единичная матрица; это так называемое уравнение «квантования»; (II) $AX - XD = 0$, где A — данная матрица, а D — *диагональная матрица*, т. е. матрица, все элементы которой равны нулю, кроме элементов d_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, расположенных на главной диагонали. Эти уравнения будут рассмотрены в гл. 3. Метод Шредингера решения задач квантовой механики с помощью данных им уравнений связан с теорией спектра (Нейман [1], Стоун [1], Купер [1], [2]). Для этой цели необходимы сведения о пространствах Гильберта, введение в которые дано в гл. 9.

1.3. Некоторые основные определения

Читателю хорошо знакомо понятие конечной прямоугольной матрицы из m строк и n столбцов, т. е. порядка $m \times n$. Матрица, состоящая только из одной строки: $m = 1$, называется *вектор-стро-*

кой и обозначается $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ или $x = [x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Матрица, состоящая только из одного столбца: $n = 1$, называется *вектор-столбцом* и обозначается $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ или $x = \{x_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$; такое обозначение вектор-столбца мы считаем более удобным, чем обозначение

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Термины вектор-строка, вектор-столбец и принятые здесь их обозначения введены Тернбуллом (Тернбулл [1], 6, 149; [2], 107).

Система уравнений (1.21) в *матричном обозначении* может быть записана в виде $Ax = y$, где A — бесконечная матрица (a_{ij}), а x и y — вектор-столбцы с бесконечным множеством элементов: $x = \{x_j\}$, $y = \{y_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Вектор-столбец с бесконечным множеством элементов мы будем называть *матрицей порядка* $\infty \times 1$ и соответственно вектор-строку с бесконечным множеством элементов *матрицей порядка* $1 \times \infty$.

Таким образом, *матрица* $\times$ *вектор-столбец* $=$ *вектор-столбец*, если произведение в левой части этого равенства существует.

Матрица, полученная из матрицы A взаимной перестановкой строк и столбцов, называется матрицей, *транспонированной* к A, и обозначается через A', так что для элементов матрицы A' имеет место равенство $a'_{ij} = a_{ji}$.

Таким образом, если x — вектор-строка, то x' — вектор-столбец, и *наоборот*. Аналогично, если x — вектор-строка, то $A'x'$ — вектор-столбец, а если x — вектор-столбец, то $x'A'$ — вектор-строка.

Матрица, у которой все элементы равны нулю, т. е. $a_{ij} = 0$ для всех i и j, называется *нуль-матрицей* и обозначается 0: очевидно, что $0A = A0 = 0$. Однако если $AB = 0$, *то отсюда еще не следует, что A или B обязательно будут нуль-матрицами*. Это даже неверно для таких простейших типов матриц, как диагональные матрицы D, Δ.

Положим, например, в матрице $D \equiv (d_i)$ $d_i = 0$ при i четном и $d_i \neq 0$ при i нечетном и в матрице $\Delta \equiv (\delta_i)$ $\delta_i = 0$ при i нечетном и $\delta_i \neq 0$ при i четном. В соответствии с правилом умножения двух матриц получаем $(d_i)(\delta_i) = (d_i\delta_i)$, так что *произведение двух диагональных матриц является диагональной матрицей*. В нашем случае мы имеем $D\Delta = (d_i\delta_i) = 0$, хотя ни D, ни Δ не являются нуль-матрицами.

Всюду в этой книге I будет обозначать единичную матрицу. Диагональная матрица λI, где λ — скаляр, называется *скалярной* *матрицей*; все ее элементы, расположенные на главной диагонали, равны λ.

Если каждая строка матрицы A содержит только конечное число отличных от нуля элементов, то A называется *матрицей с конечными строками*; если аналогичное свойство имеет место по отношению к столбцам, то A называется *матрицей с конечными столбцами*. Таким образом, если A — матрица с конечными строками, то $a_{ij}=0$ для $j \geqslant q_i$, где q_i — некоторая функция от i. Если $a_{ij}=0$ для $j \geqslant q$, где q не зависит от i, то A называется матрицей, *ограниченной по строкам*. Аналогично если A — матрица с конечными столбцами, то $a_{ij}=0$ для $i \geqslant r_j$; если же $a_{ij}=0$ при $i \geqslant r$, где r не зависит от j, то A называется матрицей, *ограниченной по столбцам*. Если $a_{ij}=0$ при $j > i$, то A называется *нижней треугольной* (или просто треугольной) матрицей; если же $a_{ij}=0$ при $j < i$, то A называется *верхней треугольной* матрицей. Таким образом, нижняя треугольная матрица является матрицей с конечными строками, хотя в общем случае и не является матрицей, ограниченной по строкам, а верхняя треугольная матрица является матрицей с конечными столбцами, хотя не обязательно ограниченной по столбцам. Матрица (1.24) средних арифметических является примером нижней треугольной матрицы.

Матрица A называется *симметричной*, если $a_{ij}=a_{ji}$, и *кососимметричной*, если $a_{ij}=-a_{ji}$ для всех i и j.

Матрица $\overline{A} \equiv (\overline{a_{ij}})$ называется *комплексно сопряженной* матрице A, если $\overline{a_{ij}}$ комплексно сопряжено числу a_{ij}.

Матрица, транспонированная и комплексно сопряженная к A, обозначается через A^*, так что $A^* \equiv \overline{A}'$. Такая матрица коротко называется *сопряженной* к A.

Матрица A называется *эрмитовой*, если $A^*=A$, и *косоэрмитовой*, если $A^*=-A$.

Из приведенных выше определений мы видим, что

$$\overline{\overline{A}}=A, \quad A''=A, \quad A^{**}=A, \quad \overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B},$$
$$(AB)'=B'A', \quad (AB)^*=B^*A^*,$$

причем эти равенства надо понимать в том смысле, что если существует одна часть какого-либо равенства, то существует и другая и они равны между собой. Первые три равенства очевидны; четвертое следует из того факта, что ряды $\sum c_k$ и $\sum \overline{c_k}$ оба одновременно сходятся или расходятся. Пятое равенство устанавливает, что *транспонированное произведение двух матриц равно произведению транспонированных матриц, перемноженных в обратном порядке*. Доказательство этого факта вытекает из следующих равенств:

$$(AB)'_{ij}=(AB)_{ji}=\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}b_{ki}=\sum_{k=1}^{\infty} b'_{ik}a'_{kj}=(B'A')_{ij},$$

где $(AB)_{ij}$ означает элемент произведения матриц AB, расположенный в строке с номером i и в столбце с номером j.

Шестое равенство доказывается аналогично.

Эрмитова матрица, состоящая только из действительных элементов, является действительной симметричной матрицей; косоэрмитова матрица, состоящая только из действительных элементов, является действительной кососимметричной матрицей. Отсюда следует, что все теоремы об эрмитовых матрицах включают как частный случай теоремы о действительных симметричных матрицах.

Если $AB = I$, то B называется *правосторонней* (*п. с.*) *обратной для* A и обозначается A^{-1}, а A называется *левосторонней* (*л. с.*) *обратной для* B и обозначается ${}^{-1}B$. Если A и B — обе отличные от 0 матрицы и $AB = 0$, то B называется *правосторонним* (*п. с.*) *нуль-делителем* A и обозначается A^0, а A называется *левосторонним* (*л. с.*) *нуль-делителем* B и обозначается ${}^0B$.

Сумма ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ii}$ в случае его сходимости называется *следом* матрицы A и обозначается через $\operatorname{Sp} A$. О применении следов матриц в квантовой теории излучения см. Хейтлер [1], 87, 151, 183, а в вопросах, связанных с математической теорией механики атома, — Нейман [1], 93—101.

1.4. Несколько характерных свойств бесконечных матриц

Так как произведение двух диагональных матриц (d_i) и (δ_i) является диагональной матрицей $(d_i\delta_i)$, то мы имеем $(d_i)(\delta_i) = (\delta_i)(d_i)$, откуда следует, что *умножение диагональных матриц коммутативно*. Таким образом, диагональные матрицы дают пример класса матриц, удовлетворяющих коммутативному закону. *В общем же случае произведение двух матриц не является коммутативным*, так как $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}b_{kj}$ может оказаться не равной $\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}a_{kj}$ для каждого i и j даже при условии, что оба ряда сходятся при всех i и j. Более того, *AB может не существовать*, хотя BA и существует. Например, если $b_{ij} = 0$ при $j > 1$, то $BA = (b_{i1}a_{1j})$ существует при произвольных b_{i1} и A; что касается AB, то $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}b_{kj} = 0$ при $j > 1$ и равно $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}b_{k1}$, когда $j = 1$ ($i = 1, 2, \ldots$). Отсюда следует, что AB не существует, если последние ряды расходятся.

Сумма двух матриц всегда существует и

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Дистрибутивный закон

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)A = BA + CA$$

имеет место в том смысле, что если AB и AC существуют, то существует и $A(B+C)$, равное $AB+AC$. Но $A(B+C)$ может существовать, в то время как AB и AC не существуют. Например, такой случай имеет место для матриц (a_{ij}), (b_{ij}) и (c_{ij}), где $a_{ij}=1$ для любого i и j, $b_{ij}=d_i+1$, $c_{ij}=d_i-1$ для любого j и ряд $\sum d_i$ сходится.

Из сделанных выше замечаний о диагональных матрицах следует, что *произведение любого конечного числа диагональных матриц является ассоциативным.* Например, если $(d_i^{(1)})$, $(d_i^{(2)})$, $(d_i^{(3)})$ — три произвольные диагональные матрицы и произведение $(d_i^{(1)})(d_i^{(2)})\times(d_i^{(3)})$ рассматривается в том смысле, что сначала находится произведение $(d_i^{(1)})(d_i^{(2)})$, а затем этот результат умножается на $(d_i^{(3)})$, то мы будем иметь:

$$(d_i^{(1)})(d_i^{(2)})\times(d_i^{(3)}) = (d_i^{(1)}d_i^{(2)}d_i^{(3)}) = (d_i^{(1)})\times(d_i^{(2)})(d_i^{(3)}).$$

Обобщим эти результаты на нижние треугольные матрицы.

Если (a_{ij}) и (b_{ij}) — две нижние треугольные матрицы, то $(a_{ij})(b_{ij}) = (e_{ij})$, где

$$e_{ij} = \sum_{k=j}^{i} a_{ik}b_{kj} \qquad (i \geqslant j)$$

и

$$e_{ij} = 0 \qquad (i < j).$$

Следовательно, *произведение двух нижних треугольных матриц является опять нижней треугольной матрицей.*

Далее, если (c_{ij}) — третья нижняя треугольная матрица, то мы имеем:

$$(a_{ij})(b_{ij})(c_{ij}) = (f_{ij}),$$

где

$$f_{ij} = \sum\sum a_{ip}b_{pq}c_{qj},$$

и суммирование распространяется на все значения p и q, для которых $i \geqslant p \geqslant q \geqslant j$. Отсюда получаем:

$$(a_{ij})(b_{ij})\times(c_{ij}) = (a_{ij})\times(b_{ij})(c_{ij}),$$

т. е. *умножение нижних треугольных матриц ассоциативно.*

Относительно других примеров ассоциативных матриц см. (**2.3**, III).

В общем же случае умножение бесконечных матриц не ассоциативно. Например, если $a_{ij}=1$, $c_{ij}=1$ для любого i и j и если

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{ij}\right) \neq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\right), \tag{1.41}$$

то $(AB)C \neq A(BC)$, ибо $(AB)C$ и $A(BC)$ равны соответственно левой и правой частям (1.41). В качестве примера матрицы, удовлетворяющей условию (1.41), можно взять матрицу (b_{ij}), где

$$b_{ij} = \frac{(i-j)}{2^{i+j-2}} \frac{(i+j-3)!}{(i-1)!\,(j-1)!} \qquad (i > 1,\ j > 1),$$

$$b_{i1} = 2^{-(i-1)} \quad (i > 1), \quad b_{1j} = -2^{-(j-1)} \quad (j > 1), \quad b_{11} = 0.$$

Легко показать, что в этом случае

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{ij}\right) = 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\right) = -1.$$

Мы будем говорить, что *произведение бесконечных матриц ассоциативно, если*: (а) *при любой группировке входящих в него множителей без изменения их порядка произведение всегда существует*; (б) *все получающиеся таким образом произведения равны между собой.*

Если множество S бесконечных матриц удовлетворяет условиям: (а) *S содержит скалярные матрицы*; (б) *любое произведение конечного числа матриц из S существует и является ассоциативным*; (в) *S замкнуто по отношению к конечным суммам и конечным произведениям* (*т. е. сумма любого конечного числа и произведение любого конечного числа матриц, принадлежащих S, принадлежат S*), *то такое множество называется ассоциативным полем* *).

Диагональные матрицы, матрицы с конечными строками и матрицы с конечными столбцами образуют ассоциативные поля.

В самоассоциативном поле может быть определена по индукции целая положительная степень матрицы A:

$$A^2 = AA, \ A^3 = AA^2 = A^2A, \ \ldots, \ A^n = AA^{n-1} = A^{n-1}A.$$

Если $A^2 = A \neq 0$, то матрица A называется *идемпотентной*.

Если r — наименьшее положительное целое число, такое, что $A^r = 0$ $(A \neq 0)$, то матрица A называется *нильпотентной с индексом r*.

Таким образом, матрица I является идемпотентной; матрица A, в которой a_{21} — единственный отличный от нуля элемент, является нильпотентной с индексом 2. Менее тривиальные примеры идемпотентных и нильпотентных матриц приведены в конце главы (см. примеры 1, 9—12 к гл. 1, а также Гёрр [1]).

Если $UU^* = U^*U = I$, то U называется *унитарной* матрицей.

Если $AA' = A'A = I$, то A называется *ортогональной* матрицей.

---

*) См. сноску на стр. 39.

Очевидно, что действительная ортогональная матрица является действительной унитарной матрицей и наоборот, однако комплексная ортогональная матрица может не быть унитарной.

Если A и B — ортогональные матрицы, а произведения $AB(AB)'$ и $(AB)'AB$ существуют и ассоциативны), то AB также является ортогональной.* Действительно, из данных условий, принимая во внимание, что $(AB)' = B'A'$, получаем:

$$AB(AB)' = ABB'A' = AA' = I$$

и

$$(AB)'AB = B'A'AB = B'B = I,$$

откуда и следует требуемый результат.

Если A — симметричная и ортогональная, то $A^2 = I$. В самом деле, в этом случае $A = A'$ и $AA' = I$.

1.5. Некоторые специальные матрицы

(I) Пусть строки матрицы P в их естественном порядке являются p-й, q-й, ... строками единичной матрицы I, где $p, q, \ldots$ — переставленная последовательность чисел 1, 2, ... Тогда строки матрицы PA в их естественном порядке будут соответственно p-й, q-й, ... строками матрицы A, т. е. PA получается из A перестановкой порядка ее строк. Матрицу P мы назовем *пермутатором*.

Если в i-й строке матрицы P единица расположена в k_i-м столбце, т. е. $p_{i, k_i} = 1$, а все остальные элементы этой строки равны нулю, то PA получается из A перестановкой ее строк в порядок $k_1, k_2, k_3, \ldots$, где $k_1, k_2, k_3, \ldots$ — переставленная последовательность чисел 1, 2, 3, ...

Если вместо произведения PA рассмотреть AP, то действие матрицы P в этом случае сведется к перестановке столбцов в матрице A.

(II) Пусть $S \equiv (s_{ij})$ — матрица, где $s_{11} = 1$, $s_{i, i+1} = 1$ $(i \geqslant 2)$, а все остальные элементы равны нулю. *Тогда матрица SA представляет собой матрицу A без ее второй строки, а AS' является матрицей A без ее второго столбца.* Действительно, если обозначить элементы матрицы SA через $\gamma_{ij}^{(1)}$, а элементы матрицы AS' через $\gamma_{ij}^{(2)}$, то будем иметь:

$$\gamma_{ij}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} s_{ik} a_{kj} = \begin{cases} a_{1j} & (i = 1), \\ a_{i+1,\, j} & (i \geqslant 2); \end{cases}$$

$$\gamma_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} s'_{kj} = \begin{cases} a_{i1} & (j = 1), \\ a_{i,\, j+1} & (j \geqslant 2), \end{cases}$$

откуда и следует требуемый результат.

---

*) Здесь так же, как и в ряде других мест, в действительности предполагается ассоциативность не тройного произведения, а произведения всех участвующих сомножителей. (*Прим. ред.*)

Матрица такого типа, как S, называется *селектором*. Вообще если S — матрица, полученная из единичной матрицы вычеркиванием из нее p-й, q-й, r-й, ... строк, то матрица SA получается из A вычеркиванием строк с этими же номерами.

Только что сказанное может быть обобщено следующим образом. Пусть $f(i)$ — однозначная, строго возрастающая функция натурального аргумента i, принимающая целые положительные значения. Если

$$s_{i,\,f(i)} = 1 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots),$$

а все остальные элементы матрицы S равны нулю, то S называется *селектором для строк*. В этом случае *SA получается из A вычеркиванием всех строк A с номерами, не являющимися значениями функции $f(i)$.*

В случае, если $s_{f(j),\,j} = 1$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots)$, а все остальные элементы матрицы S равны нулю, то S называется *селектором для столбцов*. В этом случае *AS получается из A вычеркиванием всех столбцов A с номерами, не совпадающими со значениями функции $f(j)$.*

Найдем матрицу S, удаляющую строки с номерами j_r $(r = 1,\ 2,\ \ldots)$ из матрицы A.

Согласно требованию элементы матрицы S должны удовлетворять условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_{ik} a_{kj} = \gamma_{ij},$$

где

$$\gamma_{ij} = a_{ij} \qquad (1 \leqslant i < j_1),$$
$$\gamma_{ij} = a_{i+p,\,j} \qquad (j_p - p + 1 \leqslant i < j_{p+1} - p) \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда следует, что $s_{ii} = 1$, $s_{ij} = 0$ $(j \neq i)$, когда $1 \leqslant i < j_1$, и $s_{i,\,i+p} = 1$, $s_{ij} = 0$ $(j \neq i + p)$, когда $j_p - p + 1 \leqslant i < j_{p+1} - p$ $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$.

(III) Матрица C называется *комбинатором*, если все ее отличные от нуля элементы расположены на главной диагонали и имеется только один отличный от нуля элемент, не лежащий на главной диагонали.

Если в C все элементы, лежащие на главной диагонали, равны 1 *и элемент c_{mn} равен r, то матрица CA получается из A добавлением ко всем элементам m-й строки соответствующих элементов n-й строки, умноженных на r.* В самом деле, элементы матрицы CA в этом случае будут:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} a_{kj} = \begin{cases} a_{ij} & (i \neq m), \\ a_{mj} + r a_{nj} & (i = m). \end{cases}$$

Понятие комбинатора может быть обобщено. Заменим в единичной матрице все элементы r-й строки соответственно числами c_1, c_2, ... Мы получим *комбинатор* C (*для строк*) в том смысле, что все строки матрицы CA будут такими же, как и в матрице A, за исключением r-й строки, элементы которой будут соответственно равны суммам

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_{ij} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.51}$$

Числа c_i в этом построении выбираются достаточно малыми, чтобы ряды в (1.51) абсолютно сходились. В этом случае все суммы существуют и не зависят от порядка слагаемых.

Обозначая сумму в (1.51) через e_j, мы будем иметь (в матричном обозначении) $cA = e$, где

$$c = [c_1,\ c_2,\ \ldots],\quad e = [e_1,\ e_2,\ \ldots];$$

это равенство является частным случаем более общего соотношения: *вектор-строка* $\times$ *матрица* $=$ *вектор-строка*, при условии, что произведение слева существует.

Таким образом, комбинатор C для строк получается из I заменой r-й строки строкой $c = [c_1,\ c_2,\ \ldots]$, при этом матрица CA получается из матрицы A заменой r-й строки на строку cA. Комбинаторные матрицы употребляются, в частности, для образования нулевой строки в матрице A при наличии линейной однородной зависимости между строками, скажем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_{ij} = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если матрица C образована из матрицы I заменой всех элементов в r-м столбце соответственно числами $c_1, c_2, \ldots$, то она называется *комбинатором для столбцов*. В этом случае матрица AC отличается от A тем, что элементы ее в r-м столбце заменены соответственно суммами

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} c_j \qquad (i = 1,\ 2, \ldots).$$

1.6. Структура матриц

Из определения суммы матриц и произведения на число вытекает, что

$$A + \lambda I = (a_{ij} + \lambda\, \delta_{ij}).$$

Отсюда следует, что λ прибавляется только к каждому диагональному элементу матрицы A, так что

$$(A+\lambda I)_{ij}=a_{ij} \qquad (i \neq j),$$
$$(A+\lambda I)_{jj}=a_{jj}+\lambda.$$

Принимая во внимание, что целая положительная степень матрицы уже была определена, можно определить полином $f(A)$ от матрицы A в самоассоциативном поле. В теории конечных матриц важную роль играют *характеристические корни* матрицы. Пусть (a_{ij}) — квадратная матрица и $\det(A)$ — ее определитель*). Тогда характеристическим корнем матрицы A называется корень уравнения $\det(\lambda I - A)=0$, которое представляет собой уравнение n-й степени относительно λ, а именно:

$$f(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} & \dots & -a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \dots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* для матрицы A, а функция $f(\lambda)$ — *характеристической функцией* матрицы A.

В этом направлении имеется классическая теорема Гамильтона — Кэли, утверждающая, что *всякая конечная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, т. е.* $f(A)=0$. Справедливо также утверждение, что всякая конечная матрица удовлетворяет уравнению $\Phi(A)=0$ более низкой степени, где $\Phi(A)$ — делитель многочлена $f(A)$ или совпадает с $f(A)$; в случае скалярной матрицы оно может быть сведено к уравнению первой степени (см. Жюлиа [1], ч. I, 81; Веддерберн [1], 23; полностью теорема по существу доказана Жорданом; см. Жордан [1], 114).

Известна еще классическая теорема о структуре конечной матрицы A, заключающаяся в том, что если характеристические корни матрицы A различные, то A может быть выражена через эти корни и определенные идемпотентные матрицы, связанные с A.

Эта теорема обобщается на случай кратных корней характеристического уравнения. В этом случае матрица A может быть выражена через корни характеристического уравнения и основные идемпотентные и нильпотентные элементы A, соответствующие корням характеристического уравнения (см. Веддерберн [1], 25—30).

Эти результаты желательно обобщить, где это возможно, на бесконечные матрицы. Единственной попыткой, предпринятой до

*) Мы обозначаем определитель матрицы A символом $\det(A)$ (см. Жюлиа [1], часть I, 61) вместо обычно распространенного обозначения $|a_{ij}|$ или $|A|$ во избежание путаницы с обозначением граней матриц (см. § 2.3).

настоящего времени в этом направлении, является проведенное Гёрром [1] непосредственное обобщение некоторых результатов для конечных матриц на класс бесконечных нижних треугольных матриц, причем им рассматриваются матрицы, для которых ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|a_{ii}|}$ сходятся.

Первым и, возможно, наиболее серьезным затруднением, которое встречается при попытке обобщить структурные теоремы на общие бесконечные матрицы, является вопрос, связанный с понятием, соответствующим понятию характеристического корня для конечных матриц. Можно было бы определить характеристический корень бесконечной матрицы A как некоторый скаляр λ, для которого $Ax = \lambda x$, где вектор-столбец $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ отличен от нуля, но это ведет к рассмотрению вопросов теории спектра (см. Нейман [1], Стоун [1]), предмет которой не так прост.

В случае нижних треугольных матриц A характеристические корни λ_i могут быть определены равенствами $\lambda_i = a_{ii}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, так как $\det(\lambda I - A)$ в этом случае равен нулю, каков бы ни был порядок определителя.

1.7. Показательная функция от бесконечной нижней треугольной матрицы

Выше мы установили понятие многочлена от бесконечной матрицы в самоассоциативном поле. Для соответствующим образом подобранных классов бесконечных матриц можно определить функцию от матрицы, более общую, чем многочлен, например показательную функцию.

Хорошо известно, что показательная функция $E(z) \equiv e^z$ не имеет нулей в комплексной плоскости z. Этот результат был значительно обобщен Динсом [3]. Им показано, что *показательная функция не имеет нулей в линейных ассоциативных алгебрах с конечным базисом и не имеет самоассоциативных нулей в конечных неассоциативных линейных алгебрах.*

Сейчас мы докажем следующую теорему, также принадлежащую Динсу:

(**1.7**, I) *От всякой нижней треугольной матрицы существует показательная функция; все ее значения являются нижними треугольными матрицами, и в поле нижних треугольных матриц она выпускает все нильпотентные значения.*

(I) Так как нижние треугольные матрицы образуют ассоциативное поле и, в частности, являются самоассоциативными, показательная функция может быть определена как

$$E(A) = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots,$$

где матричные элементы $\{E(A)\}_{ij}$ определяются равенством

$$\{E(A)\}_{ij}=\delta_{ij}+a_{ij}+\frac{1}{2!}\sum_{k=j}^{i}a_{ik}a_{kj}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\sum_{k}a_{ik}\sum_{l}a_{kl}\ldots\sum_{q}a_{pq}a_{qj}+\ldots$$

Пусть b — наибольшее значение модуля из множества модулей всех элементов, расположенных в первых i строках матрицы A; тогда

$$|\{E(A)\}_{ij}|\leqslant 1+\frac{b}{1!}+\frac{ib^2}{2!}+\ldots+\frac{i^k b^{k+1}}{(k+1)!}+\ldots\leqslant e^{ib}.$$

Отсюда следует, что $E(A)$ имеет вполне определенное значение в поле нижних треугольных матриц.

(II) При умножении $E(A)$ и $E(B)$ по правилу Коши однородные члены n-го порядка относительно A и B в полученном произведении имеют вид

$$\frac{A^n}{n!}+\frac{A^{n-1}B}{1!(n-1)!}+\frac{A^{n-2}B^2}{2!(n-2)!}+\ldots+\frac{B^n}{n!}.$$

В ассоциативном поле и при условии, что A и B коммутативны (т. е. $AB=BA$), это выражение равно $\frac{(A+B)^n}{n!}$.

(III) Из (II) следует, что $E(A+B)=E(A)E(B)$, когда $AB=BA$; из определения же функции $E(A)$ имеем $E(0)=I$. Полагая $B=-A$ и учитывая, что $E(-A)$ также является элементом из поля нижних треугольных матриц, из предыдущих равенств получаем:

$$I=E(0)=E(A)E(-A).$$

Это показывает, что функция $E(A)$ не может обращаться в нуль.

Положим теперь $E(A)=X$, так что $E(nA)=X^n$, где n — целое положительное число. В силу того, что $E(nA)$ не может обращаться в нуль, $E(A)$ не может принимать значение X, для которого $X^n=0$. Таким образом, $E(A)$ выпускает все нильпотентные значения в поле нижних треугольных матриц (о распространении на K_r- и K_c-матрицы см. пример 18 к гл. 2, на матрицы Гильберта — пример 4 к гл. 9).

1.8. Полунепрерывные и непрерывные матрицы

Часто бывает удобно пользоваться оператором, полученным заменой целых положительных n в бесконечной матрице (a_{nk}) непрерывной положительной переменной величиной, скажем ω. В этом случае вместо $a_{\omega k}$ мы обычно будем употреблять символ $a_k(\omega)$ (см. § 4.1 и далее). Если оба целых положительных числа n и k одновременно заменяются непрерывными положительными переменными, скажем x и y, то мы будем употреблять запись $a(x, y)$ вместо a_{xy}. Последний оператор часто рассматривают как *«непрерывную матрицу»*, хотя он не является в строгом смысле матрицей. Этот оператор употребляется в квантовой теории и математической статистике (см. об этом также § 3.5).

Оператор типа $a_k(\omega)$ может быть назван *«полунепрерывной матрицей»*. При этой терминологии обычную матрицу a_{nk} естественно называть *«дискретной матрицей»*. Последний термин мы будем употреблять только в исключительных случаях, когда необходимо установить различие между a_{nk} и $a_k(\omega)$, например в (**5.4**, III), (**5.5**, III), (**5.5**, IV). Во всех остальных случаях «дискретная матрица» будет называться просто «матрицей».

Примеры к главе 1

1. Показать, что действительная диагональная матрица является идемпотентной тогда и только тогда, когда все ее элементы 0 или 1, причем хотя бы один отличен от нуля.

2. Доказать, что нижняя треугольная матрица будет ортогональной тогда и только тогда, когда она диагональна с элементами ± 1.

3. Показать, что если все элементы на главной диагонали нижней треугольной матрицы A равны 0, то первые k диагоналей матрицы A^k состоят полностью из нулевых элементов.

4. Доказать, что если $(U-I)A=0$, где A и U — нижние треугольные матрицы, и $a_{ii} \neq 0$ для любого i, то U является единичной матрицей.

5. Доказать, что если A' является транспонированной матрицей какой-либо матрицы A, а AA' и $A'A$ существуют, то AA' и $A'A$ являются симметричными.

6. Доказать, что для всякой матрицы A, для которой существуют AA^* и A^*A, оба эти произведения AA^* и A^*A являются эрмитовыми матрицами.

7. Доказать, что любое конечное произведение пермутаторов на произвольно данную матрицу ассоциативно, если A встречается в этом произведении только один раз.

8. Доказать, что всякое конечное произведение пермутаторов и двух данных матриц ассоциативно, если: (I) A и B встречаются в произведении только по одному разу; (II) A предшествует B и (III) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{r_k, j}$ абсолютно сходится, где $r_1, r_2, \ldots$ — любая перестановка чисел 1, 2, 3, ... и r_k различные для различных значений k.

9. В матрице A все отличные от нуля элементы находятся только в одной строке (столбце). Доказать, что A является идемпотентной тогда и только тогда, когда элемент, лежащий на пересечении главной диагонали с этой строкой (столбцом), равен 1. Показать также, что A будет нильпотентной с индексом 2 тогда и только тогда, когда этот элемент равен нулю.

10. Доказать, что конечная матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где b и c не равны одновременно нулю, является идемпотентной тогда и только тогда, когда: (I) $a+d=1$; (II) $ad-bc=0$.

11. Если

$$A \equiv \begin{pmatrix} a & b & a_{13} & a_{14} \dots \\ c & d & a_{23} & a_{24} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где все строки после второй состоят исключительно из нулей и $bc \neq 0$, то доказать, что A будет идемпотентной тогда и только тогда, когда: (I) $a+d=0$; (II) элементы первой строки находятся в постоянном отношении с соответствующими элементами второй строки.

12. Если матрица A в примере 11 такая, что $bd \neq 0$, то A является нильпотентной с индексом 2 тогда и только тогда, когда: (I) $a+d=0$; (II) элементы первой строки находятся в постоянном отношении с соответствующими элементами второй строки.

13. Доказать, что если X — какая-либо диагональная матрица, а $E(X)$ — показательная функция, то $E(X) = I$ тогда и только тогда, когда элементы, лежащие на главной диагонали матрицы X, кратны $2\pi i$.

14. Показать, что если X — действительная нижняя треугольная матрица, то $E(X) = I$ тогда и только тогда, когда X — нуль-матрица.

15 *). Пусть $x_{nk} = 0$ $(k \neq k_n)$, $x_{nk} = a_n$ $(k = k_n)$ и $x_{k_n,\, k} = 0$ $(k \neq n)$, $x_{k_n,\, k} = \dfrac{1}{a_n}$ $(k = n)$, где $a_n \neq 0$. В этом случае $X^2 = I$, так что, давая a_n $(n = 1, 2, \dots)$ все возможные не нулевые значения, мы получим все возможные значения квадратного корня из I, в которых один и только один отличный от нуля элемент находится в каждой строке и каждом столбце **).

16. Уравнение $Y^2 = D$, где D — диагональная матрица, имеет класс решений, определенных равенствами

$$y_{n,\, k_n} = a_n \neq 0, \quad y_{k_n,\, n} = \frac{d_{nn}}{a_n} \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

а все другие элементы Y равны нулю. В частности, когда $D = -I$, мы получаем $Y = J$, где

$$j_{n,\, k_n} = a_n \neq 0, \quad j_{k_n,\, n} = -\frac{1}{a_n} \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

а все остальные элементы J равны нулю. В специальном случае, когда $a_n = i$, J может быть обращена в скалярную матрицу iI; в общем случае $J = iX$, где X — квадратный корень из I.

17. Пусть $Z = xA + yB$, где x и y — действительные постоянные числа, $A^2 = A$, $B^2 = -A$, $AB = BA = B$ (что такие матрицы существуют, показывает пример: $A = I$, $B = J$, где $J^2 = -I$). Тогда $Z \equiv Z(z)$, где $z = x + iy$, называется матрицей Арганда.

Показать, что $Z(z_1 + z_2) = Z(z_1) + Z(z_2)$, $Z(z_1 z_2) = Z(z_1)\, Z(z_2)$, а также что произведение матриц Арганда ассоциативно и существует полная аналогия между матрицами $Z = xI + yJ$ и векторами $z = x + iy$ в схеме Арганда. Доказать «теорему Муавра» для матриц Арганда, а именно: для любого рационального n имеет место равенство

$$\cos n\varphi \cdot A + \sin n\varphi \cdot B = (\cos \varphi \cdot A + \sin \varphi \cdot B)^n,$$

---

*) Примеры 15—17 даны Мелвин-Мелвином.

**) Предложенная задача поставлена не корректно. Автор считает, что $n = 1, 2, \dots$ и $x_{nk} = 0$ $(k \neq k_n)$, $x_{nk} = a_n$ $(k = k_n)$. В силу этого матрица X уже полностью определена, и поэтому второе условие на $x_{k_n,\, k}$ противоречит первому (достаточно взять, например, $a_n \equiv 2$). Это же замечание относится и к примеру 16. (*Прим. перев. и ред.*)

где $Z^{\frac{p}{q}}$ (p и q — целые положительные) представляет собой матрицу, которая при возведении в степень q дает Z^p; показать также, что

$$\cos\varphi\cdot A+\sin\varphi\cdot B=A-I+E(\varphi B),$$

где E — показательная функция, и, в частности, что

$$\cos\varphi\cdot I+\sin\varphi\cdot J=E(\varphi J).$$

Вывести соотношения:

$$\cos\varphi\cdot I=\frac{1}{2}[E(\varphi J)+E(-\varphi J)],$$

$$\sin\varphi\cdot J=\frac{1}{2}[E(\varphi J)-E(-\varphi J)].$$

ГЛАВА 2
ОБРАЩЕНИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

2.1. Обращения нижних треугольных матриц и некоторые простые результаты для общих матриц

В соответствии с определением, данным в § 1.3, матрица, правосторонняя обратная (п. с. обратная) для матрицы A, является решением X линейного матричного уравнения

$$AX = I, \tag{2.11}$$

а матрица, левосторонняя обратная (л. с. обратная) для A, — решением уравнения

$$XA = I. \tag{2.12}$$

Общая проблема решения уравнений (2.11) и (2.12) включает в себя решение системы бесконечного множества линейных уравнений с бесконечным множеством неизвестных. Однако в некоторых частных случаях можно найти обратную матрицу или установить ее существование, не прибегая к общей теории решения указанных уравнений.

Рассмотрим класс нижних треугольных матриц.

(2.1, I) *Нижняя треугольная матрица A не имеет п. с. обратной, если $a_{ii} = 0$ хотя бы для одного значения i. Если же $a_{ii} \neq 0$ для каждого i, то A имеет единственную п. с. обратную, которая будет нижней треугольной матрицей, и все элементы ее, лежащие на главной диагонали, соответственно равны $\frac{1}{a_{ii}}$.*

Так как A — нижняя треугольная матрица, то (2.11) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{i} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}. \tag{2.13}$$

Когда $i = 1$, мы получаем $a_{11}x_{11} = 1$, $a_{11}x_{1j} = 0$ при $j > 1$.

Если $a_{11} = 0$, то первое уравнение не имеет решения для x_{11}, так что в этом случае X не существует. Если $a_{11} \neq 0$, то

$$x_{11} = \frac{1}{a_{11}}, \quad x_{1j} = 0 \quad \text{для } j > 1.$$

При $i=2$ получаем:

$$a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}=0, \quad a_{22}x_{22}=1, \quad a_{22}x_{2j}=0 \text{ для } j>2.$$

Если $a_{22}=0$, то второе уравнение не имеет решения для x_{22} и, следовательно, X не существует. Если $a_{22}\neq 0$, то из этого уравнения получаем $x_{22}=\frac{1}{a_{22}}$. Так как $x_{11}=\frac{1}{a_{11}}$, то из первого уравнения можно определить x_{21}, а из третьего уравнения следует, что когда $a_{22}\neq 0$, тогда $x_{2j}=0$ для $j>2$.

Продолжая таким путем от строки к строке, мы определим матрицу X, которая будет единственной (см. также § 2.2, замечание (а) после (**2.2**, I)).

Рассмотрим, например, матрицу средних арифметических (см. § 1.2) $a_{ij}=\frac{1}{i}$ $(1\leqslant j\leqslant i)$, $a_{ij}=0$ $(j>i)$. Рассуждая, как и выше, можно показать, что ее единственной п. с. обратной будет матрица с элементами

$$x_{ij}=0 \ (j\neq i,\ j\neq i-1), \quad x_{ii}=i, \ x_{i,i-1}=-(i-1).$$

Нижняя треугольная матрица Эйлера

$$a_{ij}=\frac{(-1)^{j-1}(i-1)!}{(i-j)!\,(j-1)!} \quad (1\leqslant j\leqslant i), \qquad a_{ij}=0 \quad (j>i)$$

является как п. с., так и л. с. обратной для самой себя (Гурвиц и Сильверман [1], 5, Динс [1], 417; см. также § 5.3 настоящей книги).

Действительно, если $j<i$, то

$$\sum_{k=j}^{i} a_{ik}a_{kj}=(-1)^{j-1}\frac{(i-1)!}{(j-1)!}\sum_{k=j}^{i}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(i-k)!\,(k-1)!\,(k-j)!}=$$
$$=\frac{(i-1)!}{(i-j)!\,(j-1)!}\left[1-\frac{(i-j)}{1!}+\frac{(i-j)(i-j-1)}{2!}-\ldots+(-1)^{i-j}\right]=$$
$$=\frac{(i-1)!}{(i-j)!\,(j-1)!}(1-1)^{i-j}=0.$$

При $j>i$ эта сумма, очевидно, равна 0. При $j=i$ сумма $\sum\limits_{k=j}^{i}a_{ik}a_{kj}$ состоит из одного слагаемого, равного 1.

Иногда возможно распространить этот метод на общие матрицы *с конечными строками*. В этом случае (2.11) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{r_i}a_{ik}x_{kj}=\delta_{ij},$$

и во многих случаях мы можем решить эти уравнения, переходя последовательно от одного к другому или от группы к группе.

(**2**,**1**, II) *Если матрица A имеет строку из нулей, то A не имеет п. с. обратной; если A имеет столбец из нулей, то A не имеет л. с. обратной.*

Пусть $a_{nk}=0$ для некоторого фиксированного n и любого $k \geqslant 1$. Тогда равенство $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_{kj}=\delta_{nj}$ при $j=n$ приводит к противоречию $0=1$, откуда и следует, что A^{-1} не существует. Аналогично доказывается случай, когда A имеет столбец из нулей.

(Относительно теорем (**2**.**1**, II) — (**2**.**2**, I), (**2**.**2**, IV), (**2**.**4**, I) и (**2**.**4**, II) см. Динс [2].)

(**2**.**1**, III) *Если элементы какой-либо строки (столбца) в A равны соответствующим элементам другой строки (столбца), умноженным на некоторое число, то A не имеет п. с. (л. с.) обратной.*

Действительно, если $a_{i_1, k}=ca_{i_2, k}$, мы имеем $\delta_{i_1, j}=c\delta_{i_2, j}$, что при $j=i_1$ приводит к противоречию $1=0$. В случае пропорциональности столбцов доказательство проводится аналогично.

2.2. Некоторые общие замечания относительно обращений матриц

Отметим сначала, что если A^{-1} является решением уравнения (2.11), то $A^{-1}+A^0$ также будет решением, и при этом любое решение может быть представлено в такой форме. Отметим также, что в одном и том же ассоциативном поле матрица A не может иметь одновременно п. с. обратной A^{-1} и л. с. нуль-делителя ${}^0A$, а также не может иметь одновременно л. с. обратной ${}^{-1}A$ и п. с. нуль-делителя A^0. В самом деле, $({}^0AA)A^{-1}=0$, но ${}^0A(AA^{-1})={}^0A \neq 0$, и $({}^{-1}AA)A^0=$ $=A^0 \neq 0$, но ${}^{-1}A(AA^0)=0$.

Связь между л. с. и п. с. обратными матрицами выражается следующей теоремой.

(**2**.**2**, I) (I) *Если A^{-1} является единственной п. с. обратной для A и $AA^{-1}\cdot A$ ассоциативно, то A^{-1} является также л. с. обратной для A, и притом единственной, для которой ${}^{-1}AAA^{-1}$ ассоциативно. Если ${}^{-1}A$ — единственная л. с. обратная для A и $A\cdot{}^{-1}AA$ ассоциативно, то ${}^{-1}A$ является также п. с. обратной для A, и притом единственной, для которой ${}^{-1}AAA^{-1}$ ассоциативно* *).

*) Мы всюду будем обозначать через $A^{-1}\cdot B$ произведение A^{-1} на B и через $A\cdot{}^{-1}B$ произведение A на ${}^{-1}B$. Если мы обозначим просто $A^{-1}B$, то невозможно будет установить, к какому из этих двух множителей относится индекс обращения.

(II) *Если A имеет как п. с. обратную A^{-1}, так и л. с. обратную ${}^{-1}A$ и ${}^{-1}AAA^{-1}$ ассоциативно, то ${}^{-1}A = A^{-1}$ и A не имеет другой двусторонней обратной, для которой ${}^{-1}AAA^{-1}$ ассоциативно.*

(I) Если Ω — решение уравнения $AX = B$, то все другие решения имеют вид $\Omega + A^0$. В частности, все решения уравнения $AX = A$ имеют вид $I + A^0$. Если A^{-1} — единственная п. с. обратная для A, то A^0 не существует, ибо $A^{-1} + A^0$ была бы другой п. с. обратной для A. Поэтому $X = I$ является единственным решением уравнения $AX = A$. Если $AA^{-1} \cdot A$ ассоциативно, то $A(A^{-1} \cdot A) = (AA^{-1})A = A$, так что $A^{-1} \cdot A = I$, и, следовательно, A^{-1} является также л. с. обратной для A. Кроме того, если B — л. с. обратная для A, такая, что BAA^{-1} ассоциативно, то мы получаем $B = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = A^{-1}$. Аналогично доказывается второе утверждение из (I).

(II) Из ${}^{-1}AA = I$ и $AA^{-1} = I$ мы имеем:

$$({}^{-1}AA)A^{-1} = A^{-1} \quad \text{и} \quad {}^{-1}A(AA^{-1}) = {}^{-1}A.$$

Отсюда следует, что если ${}^{-1}AAA^{-1}$ ассоциативно, то ${}^{-1}A = A^{-1}$. Зафиксировав, например, A^{-1}, мы видим, что всякая ${}^{-1}A$ (такая, что ${}^{-1}AAA^{-1}$ ассоциативно) оказывается равной этой фиксированной A^{-1}, т. е. ${}^{-1}A$ является единственной в этом ассоциативном поле. Часть (II) теоремы доказана.

Замечания. (а) *Пусть A — нижняя треугольная матрица, для которой $a_{ii} \neq 0$ для всех i, так что согласно* (**2.1**, I) *A имеет единственную п. с. обратную X. Тогда X является также л. с. обратной для A и будет единственной двусторонней обратной для A.*

Действительно, пусть $AX = I$, т. е. $AXA = A$ или $A(XA - I) = 0$. Так как $X = A^{-1}$ — единственная п. с. обратная для A, то A^0 не существует, и поэтому $XA - I = 0$. Отсюда следует, что X является также л. с. обратной для A. Ассоциативность, которой мы пользовались выше, имеет здесь место, так как A и X являются нижними треугольными матрицами, и поэтому в рассматриваемых произведениях матриц фигурируют только *конечные* суммы.

Однако очень важно отметить следующее: *ниоткуда не следует, что X является единственной л. с. обратной для A.*

Например, если единственными отличными от нуля элементами матрицы A являются $a_{i,i-1}$ и a_{ii} для любого i, то равенство $XA = I$ в этом случае имеет вид

$$x_{i,j+1}a_{j+1,j} + x_{ij}a_{jj} = \delta_{ij}. \tag{2.21}$$

Фиксируя i и изменяя j, из этого уравнения можно определить все элементы i-й строки матрицы X при *произвольно* данном ее первом столбце. Таким образом, эта матрица имеет единственную п. с. обратную и бесконечное множество л. с. обратных (см. Динс [2], 261).

(б) Как следует из (**2.2**, I), если в соответствующем ассоциативном поле $\mathcal{F}$ матрица A имеет единственную A^{-1}, то эта A^{-1} является двусторонней обратной для A, единственной в поле $\mathcal{F}$, и если в поле $\mathcal{F}$ матрица A имеет как п. с. обратную A^{-1}, так и л. с. обратную ${}^{-1}A$, то A^{-1} и ${}^{-1}A$ совпадают и образуют единственную (двустороннюю) обратную для A в поле $\mathcal{F}$. Следовательно, в рассмотренном выше примере в замечании (а) одним из решений (2.21) должна быть единственная A^{-1}, но, кроме того, существует бесконечное множество других решений, не принадлежащих к полю $\mathcal{F}$, в котором ${}^{-1}AAA^{-1}$ ассоциативно.

В самом деле, выражения вида $A^{-1}+{}^{0}A$ составляют бесконечное множество других решений и, как мы уже видели, ${}^{0}AAA^{-1}$ не является ассоциативным.

(в) Если условия теоремы (**2.2**, I) не выполняются, то может случиться, что A не имеет A^{-1}, но имеет бесконечное множество ${}^{-1}A$, или не имеет ${}^{-1}A$, но имеет бесконечное множество A^{-1}.

Так, рассмотрим селектор S (§ 1.5 (II)), где

$$s_{11}=1, \quad s_{i,\,i+1}=1 \qquad (i\geqslant 2),$$

а все другие элементы S равны нулю. Так как второй столбец матрицы целиком состоит из нулей, то согласно (**2.1**, II) S не имеет л. с. обратной. Однако S имеет бесконечное множество п. с. обратных.

Действительно, из (2.11) получаем:

$$s_{i,\,i+1}x_{i+1,\,j}=\delta_{ij} \qquad (i\geqslant 2), \quad s_{11}x_{1j}=\delta_{1j},$$

откуда

$$x_{11}=\frac{1}{s_{11}}=1, \quad x_{1j}=0 \qquad (j\geqslant 2)$$

и

$$x_{i+1,\,i}=\frac{1}{s_{i,\,i+1}}=1 \qquad (i\geqslant 2), \quad x_{i+1,\,j}=0 \qquad (j\neq i, \ i\geqslant 2).$$

Таким образом, x_{2j} остается произвольным для любого j. Если x_{2j} положить равным нулю для всякого j, мы получим S', транспонированную для S, как одну из п. с. обратных для S. Следовательно, *все* п. с. обратные для S даются формулой $S'+S^0$, где S^0 — п. с. нуль-делители S.

Аналогично S' имеет бесконечное множество л. с. обратных, но не имеет п. с. обратной; все л. с. обратные для S' даются формулой $S+{}^0S'$, где ${}^0S'$ — л. с. нуль-делители S'.

(г) Матрица может иметь единственную л. с. обратную и единственную п. с. обратную и не иметь л. с. или п. с. нуль-делителей, т. е. матрица может иметь единственную (двустороннюю) обратную не только в ассоциативном поле $\mathcal{F}$, и не иметь других обратных вне поля $\mathcal{F}$ (ср. с замечанием (б); см. также примеры 1 и 3 к гл. 2).

Так, рассмотрим пермутатор P (§ 1.5 (I)), где $p_{ij}=0$ для всех j, кроме $j=r_i$ (r_i пробегает все положительные целые значения, различные для различных i), и $p_{i,r_i}=1$. Тогда, если P' — матрица, транспонированная к P, так что

$$p'_{r_i,\,i}=1, \quad p'_{ki}=0 \qquad (k\neq r_i),$$

то очевидно, что $PP'=I$ и $P'P=I$. Кроме того, P не имеет ни п. с., ни л. с. нуль-делителей. Ассоциативность произведения ${}^{-1}PPP^{-1}$ в этом случае выполняется автоматически, так как все суммы, получающиеся при умножении матриц, конечны.

Подводя итог сказанному выше, мы видим, что бесконечная матрица A может:

(I) *иметь единственную п. с. и л. с. обратную, т. е. существуют обе* ${}^{-1}A$ *и* A^{-1} *такие, что* ${}^{-1}A=A^{-1}$, *и не существуют ни* ${}^{0}A$, *ни* A^{0};

(II) *иметь единственную двустороннюю обратную в поле* $\mathcal{F}$, *в котором* ${}^{-1}AAA^{-1}$ *ассоциативно, и бесконечное множество* ${}^{-1}A$ *или* A^{-1}, *не принадлежащих полю* $\mathcal{F}$;

(III) *не иметь ни л. с., ни п. с. обратной*;

(IV) *не иметь л. с. обратной, но иметь бесконечное множество п. с. обратных*;

(V) *не иметь п. с. обратной, но иметь бесконечное множество л. с. обратных.*

Следующие теоремы, принадлежащие Динсу (публикуемые здесь впервые), показывают, что если при рассмотрении матрицы A ограничиться данным ассоциативным полем, то число этих возможностей уменьшится.

(**2.2**, II) *Если A — матрица данного ассоциативного поля $\mathcal{F}$, то: или* (I) *A имеет единственную двустороннюю обратную в $\mathcal{F}$, или* (II) *A не имеет в поле $\mathcal{F}$ обратной матрицы с одной стороны, а с другой стороны она или также не имеет обратной в поле $\mathcal{F}$, или имеет их бесконечное множество в этом поле.*

Нуль-матрица или диагональная матрица, в которой по крайней мере один из диагональных элементов равен нулю, показывает, что A может не иметь обратной матрицы ни с какой стороны. Также, как мы уже видели, A не может иметь одновременно в поле $\mathcal{F}$ п. с. обратной A^{-1} и л. с. нуль-делителя ${}^{0}A$. Следовательно, когда A^{-1} существует в $\mathcal{F}$, то A имеет или единственную л. с. обратную в $\mathcal{F}$, или не имеет ни одной. Если A имеет как п. с., так и л. с. обратную, каждую в поле $\mathcal{F}$, то $({}^{-1}AA)A^{-1} = A^{-1}$ и ${}^{-1}A(AA^{-1}) = {}^{-1}A$, которые показывают, что ${}^{-1}A = A^{-1}$. В этом случае как ${}^{-1}A$, так и A^{-1} являются единственными в $\mathcal{F}$, так как из рассуждений, проведенных ранее, следует, что всякая ${}^{-1}A$ равна любой фиксированной A^{-1}.

Покажем, наконец, что когда A не имеет п. с. обратной в поле $\mathcal{F}$, но имеет л. с. обратную в $\mathcal{F}$, то A имеет бесконечное множество л. с. обратных в $\mathcal{F}$. Предположим, что $AX = I$ не имеет решения в $\mathcal{F}$, а решением $YA = I$ в $\mathcal{F}$ является Y. Отсюда следует, что для всякого X из $\mathcal{F}$ мы имеем $AX = I + Z$, где $Z \neq 0$ и принадлежит $\mathcal{F}$. В частности, $AY = I + Z$, и следовательно, из $YA = I$ с учетом ассоциативности мы имеем $A = A + ZA$, т. е. $ZA = 0$. Следовательно, формула $Y + cZ$ при различных значениях постоянной c дает все различные л. с. обратные для A в поле $\mathcal{F}$.

Теорема доказана.

(**2.2**, III) *Если A и B имеют п. с. обратные такие, что $ABB^{-1} \cdot A^{-1}$ ассоциативно, то $B^{-1} \cdot A^{-1}$ является п. с. обратной для AB. Если существует л. с. обратная для A и п. с. обратная для AB такие, что ${}^{-1}AAB(AB)^{-1} \cdot A$ ассоциативно, то $(AB)^{-1} \cdot A$ является п. с. обратной для B.* Из условий имеем:

$$(AB)B^{-1} \cdot A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I,$$

что и доказывает первое утверждение.

Для доказательства второй части теоремы умножим $AB(AB)^{-1} = I$ на ${}^{-1}A$ слева и на A справа; тогда получим $B[(AB)^{-1} \cdot A] = I$, откуда следует, что $(AB)^{-1} \cdot A$ является п. с. обратной для B.

Следствие. *Если A и B имеют л. с. обратные такие, что ${}^{-1}B \cdot {}^{-1}AAB$ ассоциативно, то ${}^{-1}B \cdot {}^{-1}A$ является л. с. обратной для AB.*

Справедливо также утверждение, что если A и B принадлежат к одному и тому же ассоциативному полю $\mathcal{F}$, а A^{-1} и B^{-1} — единственные п. с. обратные в $\mathcal{F}$, то $B^{-1} \cdot A^{-1}$ является *единственной* п. с. обратной для AB в $\mathcal{F}$. Действительно, в этом случае A^{-1} и B^{-1} являются также л. с. обратными согласно (**2.2**, I), а из $(AB)X = I$ вытекает, что $X = {}^{-1}B \cdot {}^{-1}A$.

(**2.2**, IV) *Если существуют A^{-1} и $(I + BA^{-1})^{-1}$, а*

$$(A + B)A^{-1} \cdot (I + BA^{-1})^{-1}$$

ассоциативно, то $A^{-1}(I + BA^{-1})^{-1}$ является п. с. обратной для $A + B$. Если существуют ${}^{-1}A$ и ${}^{-1}(I + {}^{-1}AB)$, а

$${}^{-1}(I + {}^{-1}AB) \cdot {}^{-1}A(A + B)$$

ассоциативно, то ${}^{-1}(I+{}^{-1}AB)\cdot{}^{-1}A$ *является л. с. обратной для* $A+B$. *В этих утверждениях* A *и* B *можно поменять местами.*

Из условий теоремы имеем:

$$(A+B)A^{-1}\cdot(I+BA^{-1})^{-1}=(I+BA^{-1})(I+BA^{-1})^{-1}=I$$

и

$${}^{-1}(I+{}^{-1}AB)\cdot{}^{-1}A(A+B)={}^{-1}(I+{}^{-1}AB)(I+{}^{-1}AB)=I,$$

откуда и следует требуемый результат.

Заметим, что если A^{-1}, B^{-1}, $(I+AB^{-1})^{-1}$ и $(I+BA^{-1})^{-1}$ являются двусторонними обратными в ассоциативном поле $\mathcal{F}$, содержащем A и B, то

$$B^{-1}\cdot(I+AB^{-1})^{-1}=A^{-1}\cdot(I+BA^{-1})^{-1}. \tag{2.22}$$

Действительно, так как

$$(I+AB^{-1})B=A+B=(I+BA^{-1})A,$$

то, умножая это равенство справа на B^{-1}, мы получим: $I+AB^{-1}=(I+BA^{-1})AB^{-1}$, или $(I+BA^{-1})^{-1}\cdot(I+AB^{-1})=AB^{-1}$, или $A^{-1}(I+BA^{-1})^{-1}\cdot(I+AB^{-1})=B^{-1}$, откуда и следует (2.22).

2.3. Грани матриц

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, мы введем понятие *грани матрицы*. (См. Хелли [1], 61, Динс [2], 256. Данное здесь определение принадлежит Динсу, но несколько отличается от приведенного им в [2].)

Рассмотрим сначала пример. Положим

$$M_i=\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|,\quad N_j=\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|,$$

когда ряды сходятся. Точная верхняя грань чисел M_i, если она конечна, называется K_r-*гранью* матрицы A; точная верхняя грань чисел N_j, когда она конечна, называется K_c-*гранью* A *).

Пусть $|A|$ и $|B|$ обозначают соответственно K_r-грани матриц A и B. Тогда очевидно, что

$$|A+B|\leqslant|A|+|B|$$

и

$$|AB|=\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}b_{kj}\right|\leqslant\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}||b_{kj}|\leqslant|A||B|.$$

*) См. определение K-матриц, данное в § 1.2. Индексы r и c являются начальными буквами соответственно строки (row) и столбца (column).

Кроме того, если c — любое действительное или комплексное число, то $|cA| = |c|\,|A|$; K_r-грань единичной матрицы I, очевидно, равна 1, т. е. $|I| = 1$. Так же очевидно, что для K_r-грани матрицы A справедливо неравенство $|a_{ij}| \leqslant |A|$.

Легко видеть, что K_c-грань также обладает всеми этими свойствами. Практически и все другие встречающиеся грани, определенные для специальных классов матриц, обладают свойствами, перечисленными для K_r-граней. Чтобы дать общее определение грани, нужно указать такую операцию, которая относила бы каждой матрице A из данного класса в качестве ее грани некоторое неотрицательное число $|A|$. До настоящего времени не найдено такой операции, при помощи которой можно было бы определить конечную грань для всякой матрицы и которая удовлетворяла бы всем указанным ниже требованиям как неотъемлемым свойствам грани. Несколько находящихся в употреблении частных определений относятся только к ограниченным, частично перекрывающимся классам матриц. Каждой данной операции соответствует класс матриц, для которого указанная операция имеет смысл. Применением этой операции определяется грань в соответствующем классе.

Если класс матриц $\mathcal{F}$ *содержит скалярные матрицы и замкнут по отношению к конечным суммам и конечным произведениям матриц, то мы будем говорить, что* $\mathcal{F}$ *является полем* *). *Мы предположим, что грань* $|A|$ *в поле* $\mathcal{F}$ *удовлетворяет следующим условиям* (*когда* A *и* B *принадлежат полю* $\mathcal{F}$, c — *любое число и* I — *единичная матрица*):

(I) $$|cA| = |c|\,|A|, \quad |I| = 1;$$

(II) $$|A+B| \leqslant |A| + |B|;$$

(III) $$|AB| \leqslant |A|\,|B|;$$

(IV) $$|a_{ij}| \leqslant |A|.$$

---

*) Нужно заметить, что так определенное *поле* для бесконечных матриц не является «полем» в том смысле, в каком этот термин употребляется в современной алгебре, потому что оно может не иметь *обратного* элемента (обратной матрицы) (см. § 3.5 и Альберт [1], 27). Однако, несмотря на это, термин «*поле*» является наиболее подходящим для употребления.

Можно было бы использовать термин «*кольцо*». Однако Кёте и Теплиц [1] в своем определении *кольца бесконечных матриц* требуют: чтобы (а) для любых двух матриц из кольца ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ni} b_{ik}|$$

сходились для любых n и k; (б) для любых трех матриц A, B и C из кольца выполнялся ассоциативный закон $A(BC) = (AB)C$.

Условие (а), являющееся существенным при доказательстве теорем Кёте и Теплица [1] и Вебера [1], может оказаться весьма стеснительным для более общих целей. Кроме того, мы будем часто пользоваться «полями» матриц, которые *не являются ассоциативными*, так что условие (б) тоже может быть стеснительным.

По определению *поля*, $A+B$ и AB также принадлежат полю $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ — ассоциативное поле, то грань называется *ассоциативной*.

Пусть имеется бесконечная последовательность матриц $B_1, B_2, \ldots$, принадлежащих $\mathcal{F}$. Мы скажем, что $B_n \to B$, если $(B_n)_{ij}$ имеет пределом B_{ij} при $n \to \infty$ для любого i и j. Такая сходимость является примером так называемой *координатной сходимости* (см. § 10.2).

Пусть $B_n \to B$ и $|B_n| < M$ для любого n, где M — положительное число. Тогда если B принадлежит полю $\mathcal{F}$ и $|B| \leqslant M$, то грань называется *полузамкнутой* относительно поля $\mathcal{F}$. Это определение и следующая теорема (**2.3**, I) принадлежат П. Динсу.

(**2.3**, I) *Если*: (I) $A_1, A_2, \ldots$ *принадлежат полю* $\mathcal{F}$ *и грань является полузамкнутой относительно этого поля*; (II) *ряд* $\sum\limits_p |c_p|\,|A_p|$ *сходится, где* $c_1, c_2, \ldots$ — *некоторые постоянные* *), *то* $\sum\limits_{p=1}^{\infty} c_p A_p$ *существует и принадлежит* $\mathcal{F}$ *и, кроме того*, $\left|\sum\limits_{p=1}^{\infty} c_p A_p\right| \leqslant \sum\limits_{p=1}^{\infty} |c_p|\,|A_p|$.

Действительно, $B_n \equiv \sum\limits_{p=1}^{n} c_p A_p$ принадлежит полю $\mathcal{F}$, и по свойству (IV) граней имеем:

$$|(B_n)_{ij}| \leqslant \sum_{p=1}^{n} |c_p|\,|(A_p)_{ij}| < \sum_{p=1}^{\infty} |c_p|\,|A_p| = q.$$

Отсюда следует, что $\sum\limits_p c_p (A_p)_{ij}$ абсолютно сходится для любых i и j и, значит, B_n стремится к пределу B. Так как

$$|B_n| \leqslant \sum_{p=1}^{n} |c_n|\,|A_p| < q,$$

а по условию теоремы грань полузамкнута относительно поля $\mathcal{F}$, то получаем, что B принадлежит полю $\mathcal{F}$ и $|B| \leqslant q$, что и доказывает теорему.

При определении граней матриц можно, конечно, потребовать, чтобы они удовлетворяли дополнительно к упомянутым еще и другим требованиям. Например, часто оказывается полезным следующее требование **):

(V) *если* $|b_{ij}| \leqslant |a_{ij}|$ *для любого* i *и* j *и* A *принадлежит полю* $\mathcal{F}$, *то* B *принадлежит* $\mathcal{F}$ *и* $|B| \leqslant |A|$. Такие грани будут называться *нормальными*. Грани K_r и K_c, очевидно, являются нормальными.

*) См. примеры 18, 19 к гл. 2.
) См., например, (2.3**, II).

Если в дополнение к условиям (I) — (IV) грань обладает свойством:

(VI) $|D| = \hat{d}$ *для любой диагональной матрицы* $D \equiv (d_i)$, *где* $\hat{d}$ — *конечная точная верхняя грань чисел* $|d_i|$, *то грань называется регулярной* *). Таким образом, если $\hat{d}$ конечно, то всякая регулярная грань соответствующей диагональной матрицы D в точности равна $\hat{d}$. Например, K_r- и K_c-грани, очевидно, регулярны.

Мы будем рассматривать требования (I) — (IV) как неотъемлемые свойства граней, без которых никакое определение грани не может быть принято; если грань является нормальной или если предполагается выполненным какое-либо другое дополнительное свойство, то это будет дополнительно оговорено.

Следующий результат принадлежит Аллену.

(**2.3**, II) *Если грань нормальная, то ее поле* $\mathcal{F}$ *содержит все ограниченные диагональные матрицы и грань является регулярной.*

Пусть $D = (d_i)$ — диагональная матрица, элементы которой d_i ограничены, и $\hat{d}$ — точная верхняя грань чисел $|d_i|$. Тогда D принадлежит $\mathcal{F}$, ибо скалярная матрица $(\hat{d})$ принадлежит $\mathcal{F}$, что следует из свойства (I), а так как грань нормальная, то и (d_i) принадлежит $\mathcal{F}$. По свойству (IV), $|d_i| \leqslant |D|$ и, значит, $\hat{d} \leqslant |D|$. С другой стороны, если $S \equiv (\hat{d})$, то из свойства (V) следует, что $|D| \leqslant |S|$, а так как, по свойству (I), $|S| = \hat{d}$, то $|D| \leqslant \hat{d}$. Из полученных неравенств окончательно получаем $|D| = \hat{d}$.

Приведем пример, принадлежащий также Аллену, который показывает, что *предел граней бесконечной последовательности матриц не обязательно равен грани предельной матрицы* (предполагается, что пределы существуют) **).

Пусть $D^{(n)}$ — диагональная матрица, в которой $d_n^{(n)} = 1$, а все остальные элементы равны нулю. Поле с *любой* гранью содержит I, и если мы предположим, что грань *нормальная*, то поле будет содержать $D^{(n)}$. Дальше, по свойству (IV), $|D^{(n)}| \geqslant 1$, но, согласно (V), $|D^{(n)}| \leqslant |I| = 1$; следовательно, $|D^{(n)}| = 1$ для любого n, так что $\lim\limits_{n \to \infty} |D^{(n)}| = 1$. Но $\lim\limits_{n \to \infty} D^{(n)} = 0$ ***), и поэтому $\left|\lim\limits_{n \to \infty} D^{(n)}\right| = 0$.

Таким образом, последовательность $|D^{(n)}|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится, причем $D^{(n)}$ и предельная матрица 0 принадлежат полю с любой

---

*) Динс [2], 256. Второе условие, данное Динсом, используется здесь как определение, а его первое условие сейчас берется как свойство (IV) общего определения граней.

**) Если потребовать непрерывность для граней, то мы должны исключить из рассмотрения большинство определений граней.

***) Здесь снова пример координатной сходимости.

нормальной гранью, а в то же время предел граней не равен грани предельной матрицы.

Пусть $\overset{+}{A}$ обозначает $(|a_{nk}|)$. Если A принадлежит полю $\mathscr{F}$ (с комплексными элементами), то мы имеем $|\overset{+}{a}_{nk}| = |a_{nk}|$; таким образом, если грань нормальная, то и $\overset{+}{A}$ принадлежит $\mathscr{F}$, а так как $|A| \leqslant |\overset{+}{A}|$ и $|\overset{+}{A}| \leqslant |A|$, то $|A| = |\overset{+}{A}|$. Следовательно, если грань нормальная, то мы без ограничения общности можем рассматривать $\overset{+}{A}$ вместо A *).

(**2.3**, III) *Поле* $\mathscr{F}$ *с любой нормальной гранью ассоциативно* **).

Если A, B и C принадлежат $\mathscr{F}$, то $\mathscr{F}$ принадлежат также $\overset{+}{A}$, $\overset{+}{B}$ и $\overset{+}{C}$ и выполняется соотношение $\overset{+}{A}(\overset{+}{B}\overset{+}{C}) = (\overset{+}{A}\overset{+}{B})\overset{+}{C}$. Но $(\overset{+}{A}(\overset{+}{B}\overset{+}{C}))_{nk} \equiv \equiv \sum\limits_i |a_{ni}| \sum\limits_j |b_{ij}|\,|c_{jk}|$ сходится для любых n и k, т. е. $\sum\limits_i a_{ni} \sum\limits_j b_{ij}c_{jk}$ сходится абсолютно, и значит, мы можем переменить порядок суммирования. Следовательно, $A(BC) = (AB)C$, что и требовалось доказать.

В качестве другого примера грани ***) может служить нижняя грань $P(A)$ чисел M, удовлетворяющих неравенству

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i a_{ij} y_j \right| \leqslant M, \quad \text{где} \quad \sum_i |x_i|^2 = 1, \quad \sum_i |y_i|^2 = 1.$$

$P(A)$ называется *гранью Гильберта* или *H-гранью H-матрицы A*. В дальнейшем мы увидим (см. § 9.5, непосредственно перед (**9.5**, III)), что H-грань является нормальной ****).

Матрицы, обладающие конечными K_r- или K_c-гранями, будут называться соответственно *K_r- и K_c-матрицами*; как следует из (**2.3**, III), *K_r- и K_c-матрицы образуют ассоциативные поля.*

2.4. Две общие теоремы об обратных матрицах

Возвратимся снова к вопросу об обращении матриц, а именно к случаю, когда матрица не имеет формы, приводящей к простым уравнениям для определения элементов обратной матрицы. Мы ограничимся в этом параграфе рассмотрением полей с полузамкнутой ассоциативной гранью.

---

*) Это замечание принадлежит Аллену.

**) Поле с любой нормальной гранью в действительности является матричным кольцом (см. Кёте и Теплиц [1], Вебер [1]).

***) Ср. § 9.4.

****) См. пример 20 к гл. 2.

(**2.4**, I) *Если A — матрица из поля $\mathcal{F}$ с полузамкнутой ассоциативной гранью и $|A| < 1$, то матрица, определенная рядом $I + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A^p$, существует и принадлежит $\mathcal{F}$; она является единственной, причем двусторонней обратной для $I + A$ в поле $\mathcal{F}$ и*

$$\frac{1}{1+|A|} \leqslant \left| I + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A^p \right| \leqslant \frac{1}{1-|A|}.$$

Так как $|A^p| \leqslant |A|^p$, из (**2.3**, I) следует, что если B тоже принадлежит $\mathcal{F}$ и ряды

$$\sum_{p=1}^{\infty} |c_p||A|^p = c \quad \text{и} \quad \sum_{p=1}^{\infty} |g_p||B|^p = g$$

сходятся, то

$$C = \sum_{p=1}^{\infty} c_p A^p \quad \text{и} \quad G = \sum_{p=1}^{\infty} g_p B^p$$

являются матрицами из $\mathcal{F}$ такими, что $|C| \leqslant c$, $|G| \leqslant g$. Из свойств граней имеем:

$$|(CG)_{ij}| \leqslant |CG| \leqslant |C||G| \leqslant cg.$$

Следовательно, члены произведения

$$\sum_{p=1}^{\infty} c_p A^p \sum_{q=1}^{\infty} g_q B^q$$

можно группировать произвольным образом без изменения результата. Применяя это к $C = I + A$ и $G = I + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A^p$, мы получим доказательство первых двух утверждений теоремы.

Далее, так как $|A| < 1$, то из (**2.3**, I) следует:

$$(1 - |A|)\,\left|I + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A^p\right| \leqslant (1 - |A|) \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} |A|^p \right) = 1.$$

Отсюда, так как $|A| < 1$, получаем:

$$\left| I + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A^p \right| \leqslant \frac{1}{1-|A|}.$$

Полагая $B = (I + A)^{-1}$, мы получим $I = (I + A) B = B + AB$; поэтому, если учесть свойства (II) и (III) граней, то

$$1 = |B + AB| \leqslant |B| + |AB| \leqslant |B| + |A||B| = (1 + |A|)|B|,$$

и, следовательно *),

$$|B| \geqslant \frac{1}{1+|A|}. \qquad (2.41)$$

Непосредственным обобщением только что доказанной теоремы с учетом (**2.2**, IV) является следующий результат:

(**2.4**, II) *Если матрицы A и B из поля $\mathcal{F}$ с полузамкнутой ассоциативной гранью таковы, что существует п. с. обратная A^{-1} для A и $|BA^{-1}| < 1$, то*

$$A^{-1}\left[I + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p (BA^{-1})^p\right]$$

является п. с. обратной для $A+B$ в $\mathcal{F}$. Если A^{-1} является единственной п. с. обратной для A в $\mathcal{F}$ и $|BA^{-1}| < 1$, то $A^{-1}\left[I + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p (BA^{-1})^p\right]$ будет единственной, причем двусторонней обратной для $A+B$ в $\mathcal{F}$.

Если $d > 0$ — точная нижняя грань $|d_n|$, то диагональная матрица D имеет единственную обратную и всякая регулярная грань матрицы D^{-1} равна $\frac{1}{d}$. Следовательно, если $|B| < d$, то $|BD^{-1}| \leqslant |B|\,|D^{-1}| < 1$ и из (**2.4**, II) следует, что $D+B$ имеет единственную двустороннюю обратную в ассоциативном поле с полузамкнутой регулярной гранью, содержащем D и B. Этот результат (Динс [2], 262) был первоначально доказан для случая, когда B является одновременно K_r- и K_c-матрицей, при помощи теории линейных уравнений с бесконечным множеством неизвестных (Кук [1]). Такой же результат доказан и для случая, когда B является матрицей Гильберта, а D — единичной матрицей (Ф. Рисс [1], 113). Отсюда следует, что если в ассоциативном поле $\mathcal{F}$ с полузамкнутой регулярной гранью для матрицы A выполняется условие $0 < d \leqslant a_{ii} \leqslant d'$ и $|A^{(0)}| < d$, где $A^{(0)}$ получена из A заменой нулями всех элементов, лежащих на главной диагонали, то A имеет единственную, причем двустороннюю обратную в $\mathcal{F}$.

2.5. Теорема Пойа

Теория систем бесконечного множества линейных уравнений с бесконечным множеством неизвестных развивается в различных направлениях (см., например, Ф. Рисс [1]). Следующая теорема, принадлежащая Пойа, по-видимому, не относится к такой теории, однако она дает простые достаточные условия, которые могут быть полезны,

*) Доказательство неравенства (2.41) принадлежит Оллдриджу; оно избегает ограничения $|A| < \frac{1}{2}$, которое требуется в доказательстве (2.41), данном Динсом [2], 262.

чтобы установить в некоторых важных случаях существование л. с. и п. с. обратных для общих бесконечных матриц.

(**2.5**, I) *Пусть дана бесконечная система линейных уравнений*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}u_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{2.51}$$

где $\{b_i\}$ — *произвольная последовательность, а* (a_{ij}) *удовлетворяет условиям*:

(I) *первая строка* a_{1j} *содержит бесконечное множество отличных от нуля элементов*;

(II) $$\lim_{j \to \infty} \frac{|a_{1j}| + |a_{2j}| + \ldots + |a_{i-1,j}|}{|a_{ij}|} = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots).$$

Тогда существует бесконечная последовательность $\{u_j\}$, *удовлетворяющая условиям* (2.51) *и такая, что все ряды в левых частях уравнений* (2.51) *абсолютно сходятся.*

Докажем сначала следующую лемму:

Лемма. *Если* (a_{ij}) *удовлетворяет условиям* (I) *и* (II) *теоремы, то матрица, образованная из первых* n *строк* (a_{ij}) *с удаленными первыми* q *столбцами, имеет ранг* *) n *для любых* n *и* q.

Действительно, если после удаления первых q столбцов ранг матрицы, образованной из первых n строк, оказался бы меньше, чем n, то существовали бы постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$, не все равные нулю и удовлетворяющие условию

$$c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j} + \ldots + c_n a_{nj} = 0$$

при $j > q$. Пусть теперь $j \to \infty$. Тогда из условия (II) получаем $c_n = 0$, затем аналогично $c_{n-1} = c_{n-2} = \ldots = c_2 = 0$ и, наконец, из условия (I) следует, что и $c_1 = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы. Последовательность $\{u_j\}$, удовлетворяющую условиям (2.51), мы будем конструировать от группы к группе, причем n-я группа будет состоять из тех u_j, для которых $q_{n-1} < j \leqslant q_n$, где $1 \leqslant q_1 < q_2 < q_3 < \ldots$ — соответствующим образом подобранная последовательность целых чисел. Первые n групп образуют конечную секцию $u_1, u_2, \ldots, u_{q_n}$ последовательности $\{u_j\}$. Мы начнем с предположения, что первые n групп удовлетворяют n уравнениям, полученным из первых n уравнений (2.51), в которых все u_j, не принадлежащие к первым n группам, заменены нулями. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{q_n} a_{ij}u_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.52}$$

*) О рангах матрицы см., например, Тернбулл [1], 73.

Вычитая подобные уравнения для первых $n-1$ групп ($n \geqslant 2$), получим:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=q_{n-1}+1}^{q_n} a_{ij}u_j = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1) \\ \text{и} \\ &a_{n,\,q_{n-1}+1}u_{q_{n-1}+1} + \ldots + a_{n,\,q_n}u_{q_n} = b'_n, \end{aligned}\right\} \tag{2.53}$$

где

$$b'_n = b_n - a_{n1}u_1 - a_{n2}u_2 - \ldots - a_{n,\,q_{n-1}}u_{q_{n-1}}, \tag{2.54}$$

так что последние уравнения в (2.52) и (2.53) совпадают.

Обозначим для краткости q_{n-1}, q_n и b'_n соответственно через q, q' и b и покажем, что для данных n, q и b и произвольно выбранного малого $\varepsilon > 0$ при выполнении условий теоремы можно подобрать целое число $q' > q$ и числа u_{q+1}, u_{q+2}, $\ldots$, $u_{q'}$ такие, что

(а) $$\sum_{j=q+1}^{q'} a_{ij}u_j = \begin{cases} b & \text{при } i=n, \\ 0 & \text{при } i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1; \end{cases}$$

(б) $$\sum_{j=q+1}^{q'} |a_{ij}u_j| < \varepsilon \quad \text{при} \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Перепишем условие (а), которое есть не что иное, как (2.53), в виде

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=q+1}^{q'-1} a_{ij}u_j = x_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \\ &\text{где} \\ &x_n = b - a_{nq'}u_{q'},\quad x_i = -a_{iq'}u_{q'} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \end{aligned}\right\} \tag{2.55}$$

Согласно лемме существует n целых чисел k_1, k_2, $\ldots$, k_n, где $q < k_1 < k_2 < \ldots < k_n$, таких, что определитель системы

$$\sum_{r=1}^{n} a_{i,\,k_r}u_{k_r} = x_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{2.56}$$

(считаем неизвестными u_{k_1}, $\ldots$, u_{k_n}) отличен от нуля. Если рассматривать x_i как независимые переменные, то u_{k_r} будут однородными линейными функциями от этих переменных. Следовательно, можно указать такое $\delta > 0$, что

$$\sum_{r=1}^{n} |a_{i,\,k_r}u_{k_r}| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{когда } |x_\nu| < \delta \qquad (i,\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2.57}$$

Согласно условию (II) теоремы для этого δ мы можем подобрать $q' > k_n$ такое, что

$$\left| \frac{b a_{iq'}}{a_{nq'}} \right| < \min\left(\delta, \frac{1}{2}\varepsilon\right) \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.58}$$

Определив δ и q', мы положим

$$u_j = 0 \quad \text{для} \quad q < j < q', \quad j \neq k_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.59}$$

и таким образом, уравнение (2.56) будет совпадать с (2.55). Кроме того, положим $x_n = 0$. Тогда, согласно (2.55), мы будем иметь:

$$u_{q'} = \frac{b}{a_{nq'}}, \quad x_i = -\frac{b a_{iq'}}{a_{nq'}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Из уравнений (2.56) мы можем найти $u_{k_1}, \ldots, u_{k_n}$, которые также будут удовлетворять уравнениям (2.55), т. е. условию (а). Принимая во внимание условие (2.58) и указанные выше значения для x_i, мы имеем $|x_i| < \delta$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, так что имеют место неравенства (2.57). Кроме того, при этих значениях из (2.58) следует, что $|a_{iq'}u_{q'}| < \frac{1}{2}\varepsilon$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Следовательно, учитывая (2.57) и (2.59), мы видим, что условие (б) также удовлетворяется.

Теперь мы будем строить решение u_j от группы к группе. Для $n = 1$ первая строка из (a_{ij}) содержит бесконечное множество отличных от нуля элементов. Один из них, например первый, возьмем в качестве a_{1,q_1}. Таким образом, q_1 определено. Положим теперь

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_{q_1-1} = 0, \quad u_{q_1} = \frac{b_1}{a_{1,q_1}},$$

так что условие (2.52) удовлетворяется для $n = 1$. Пусть уже определены $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ и $u_1, u_2, \ldots, u_{q_{n-1}}$ для $n \geqslant 2$. Определим, как и выше, q_n и $u_{q_{n-1}+1}, \ldots, u_{q_n}$ (n-ю группу) так, чтобы они удовлетворяли условиям (2.53) (b'_n, согласно (2.54), уже определено при помощи первых $n-1$ групп) и условию

$$\sum_{j=q_{n-1}+1}^{q_n} |a_{ij}u_j| < 2^{-n} \qquad (1 \leqslant i < n).$$

Так как условие (2.52) выполняется для $n = 1$, а (2.53) выполняется для $n = 2, 3, \ldots$, то отсюда следует, что (2.52) удовлетворяется для $n = 1, 2, 3, \ldots$ Последнее неравенство также показывает, что ряды в левых частях (2.51) абсолютно сходятся для фиксированного i, $i < n$. Для $n \geqslant i$ условия (2.52) показывают, что частичная сумма s_{q_n} ряда с номером i из (2.51) равна b_i. Следовательно, бесконечное множество частичных сумм абсолютно сходящегося ряда $a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \ldots$ имеет значение b_i, которое в силу этого и будет суммой ряда.

Теорема доказана.

Следствие. *В условиях теоремы* (**2.5**, I) *система уравнений* (2.51) *имеет бесконечное множество линейно независимых решений.*

Действительно, если L_n — решение, в котором $u_1 = u_2 = \ldots = u_{n-1} = 0$, а $u_n \neq 0$ (оно может быть получено отбрасыванием в системе первых $n-1$ столбцов), то $L_1, L_2, \ldots$ линейно независимы и все они будут решениями системы (2.51) *).

Применение к обращениям матриц. Заменяя в (2.51) u_j на u_{jk}, а b_i на δ_{ik}, мы видим, что решения u_{jk} ($k = 1, 2, \ldots$) будут элементами п. с. обратной матрицы для (a_{ij}). Для получения л. с. обратной мы должны решить систему $\sum\limits_{j=1}^{\infty} u_{kj}a_{ji} = \delta_{ki}$, которую можно записать в виде $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a'_{ij}u'_{jk} = \delta_{ik}$, где (a'_{ij}) является транспонированной для (a_{ij}). Эта система может быть решена при помощи теоремы (**2.5**, I) с заменой в ней a_{ij} на a'_{ij} всякий раз, когда выполняются соответствующие условия.

В качестве примера рассмотрим *матрицу Миттаг-Леффлера* (см. § 4.3 (IV) и §§ 8.1—8.3), элементы которой

$$a_{ij} = \frac{g(j+1)\, i^{j+1}}{E(i)},$$

где $E(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} g(j)\, z^j$ — целая функция.

Мы будем предполагать, что $g(j) > 0$ *для любого* j **).

Мы имеем:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{i-1,j}}{a_{ij}} = \lim_{j\to\infty} \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{j+1} \frac{E(i)}{E(i-1)} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots),$$

так что условие (II) теоремы (**2.5**, I) удовлетворяется. Так как условие (I) также выполняется, то отсюда следует, что *все эти матрицы имеют бесконечное множество линейно независимых п. с. обратных.*

Дальше,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a'_{i-1,j}}{a'_{ij}} = \lim_{j\to\infty} \frac{a_{j,\,i-1}}{a_{ji}} = \frac{g(i)}{g(i+1)} \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} = 0,$$

*) Здесь предполагается, что не все b_i равны нулю; если все $b_i = 0$, то метод Пойа приводит только к тривиальному решению. Однако следствие справедливо и в этом случае, ибо разность двух независимых решений системы (2.51), когда не все b_i равны нулю, будет решением этой системы, когда все b_i равны нулю.

) Ср. § 4.3 (IV) и замечание к (2.1**, II).

так что выполняется условие (II) теоремы (**2.5**, I) с заменой a_{ij} на a'_{ij}. Принимая во внимание, что первый *столбец* матрицы (a_{ij}) содержит бесконечное множество отличных от нуля элементов, мы получим, что *матрица Миттаг-Леффлера имеет также бесконечное множество линейно независимых л. с. обратных. В частности, матрица Бореля* (§ 4.3, пример (III)), *матрица Линделёфа* (§ 8.2, пример (I)) *и матрицы, образованные из функции Миттаг-Леффлера* $E_\alpha(z)$ (§ 8.3, примеры (III) и (IV)), *являющиеся частными случаями матрицы Миттаг-Леффлера, имеют бесконечное множество как п. с., так и л. с. обратных.*

Легко также видеть, что *матрица Абеля* $a_{ij} = \dfrac{i^j}{(i+1)^{j+1}}$ *имеет бесконечное множество линейно независимых п. с. обратных.*

О некоторых результатах, относящихся к обращению матриц *Гильберта*, см. (**9.6**, V) и (**9.6**, VI).

О дальнейших предложениях об обращении бесконечных матриц см. примеры 1, 2, 7, 8 к гл. 7, теорему (**7.6**, III), примеры 8 и 9 к гл. 8 и пример 18 к гл. 5.

Примеры к главе 2

1. Провести доказательство утверждения в § 2.1 относительно п. с. обратной матрицы средних арифметических. Показать, что в этом случае п. с. обратная является и л. с. обратной и что эта л. с. обратная является также единственной.

2. Матрица A определена следующим образом: $a_{11} = a_{21} = a_{12} = 1$, $a_{ii} = a_{i+1,\,i} = 1$ для $i > 1$, а все другие элементы равны нулю. Показать, что A не имеет п. с. обратной, но имеет бесконечное множество л. с. обратных.

3. Доказать, что комбинатор C (§ 1.5 (III)), в котором все отличные от нуля элементы расположены на главной диагонали, а вне ее расположен только один отличный от нуля элемент c_{mn}, не имеет ни левых, ни правых нуль-делителей и имеет единственную двустороннюю обратную матрицу (x_{ij}):

$$x_{ij} = 0 \qquad (i \neq n, \quad j \neq n, \quad i \neq j), \quad x_{ii} = \frac{1}{c_{ii}},$$

$$x_{mj} = 0 \qquad (j \neq m, \quad j \neq n), \quad x_{in} = 0 \qquad (i \neq m, \quad j \neq n), \quad x_{mn} = -\frac{c_{mn}}{c_{mm}c_{nn}}.$$

Показать, что для ${}^{-1}CCC^{-1}$ автоматически выполняется ассоциативный закон.

4. Если A имеет п. с. обратную A^{-1} и если P — пермутатор, то показать, что $(PA)(A^{-1} \cdot P^{-1}) = I$ и $(AP)(P^{-1} \cdot A^{-1}) = I$ всегда, когда произведения в левой части написанных равенств ассоциативны. Показать также, что если B — матрица, для которой $(PA)B = I$, где произведение в левой части равенства ассоциативно, то $A(BP) = I$.

5. Если S — общий селектор для строк (§ 1.5 (II)) и $f(i) \neq i$, т. е. $S \neq I$, то показать, что S не имеет л. с. обратной, но имеет бесконечное множество п. с. обратных, благодаря тому что элементами тех строк, номера которых не совпадают со значениями $f(i)$ ни для какого i, могут быть произвольные числа. Если эти произвольные числа взять все равными нулю, то соответствующая п. с. обратная будет селектором для столбцов; обозначим ее через S^{-1}. Показать, что если A имеет п. с. обратную A^{-1}, то $A^{-1}\cdot S^{-1}$ будет п. с. обратной для SA.

6. Доказать, что общий комбинатор для строк C (§ 1.5 (III)) имеет только одну п. с. обратную, а именно матрицу C^{-1}, которая получается из единичной матрицы, если в последней элементы r-й строки заменить числами e_{rk}:

$$e_{rk}=-\frac{c_k}{c_r} \qquad (k\neq r), \quad e_{rr}=\frac{1}{c_r} \qquad (k=r).$$

7. Если A, Ω и ${}^{-1}\Omega=\Omega^{-1}$ принадлежат к одному и тому же ассоциативному полю $\mathcal{F}$, то $\Omega^{-1}\cdot A\Omega$ называется *Ω-трансформацией* A в $\mathcal{F}$. Эта трансформация имеет важное значение в квантовой механике. Доказать, что если Ω ортогональная, то $\Omega^{-1}\cdot A\Omega$ симметричная при условии, что A симметричная, и кососимметричная, если A кососимметричная.

8. Если A имеет п. с. обратную A^{-1}, то показать, что транспонированная к A^{-1} является п. с. обратной для A' (т. е. для матрицы, транспонированной к A) в поле, в котором $(A^{-1})'\,A'\,(A')^{-1}$ ассоциативно.

9. Доказать, что если A имеет п. с. обратную A^{-1} и если A_1 — матрица, полученная из A изменением порядка некоторых ее строк, то соответствующая перестановка порядка столбцов в A^{-1} приводит к п. с. обратной A_1^{-1} для A_1. Показать также, что если A имеет п. с. нуль-делитель A^0, то полученная таким же путем матрица будет п. с. нуль-делителем A_1^0 для A_1.

Доказать аналогичные результаты для л. с. обратных и л. с. нуль-делителей *).

10. Доказать, что если A имеет п. с. обратную A^{-1}, то комплексно сопряженная к A^{-1} будет п. с. обратной для $\bar{A}$ ($\bar{A}$ — комплексно сопряженная к A); показать также, что $(A^{-1})^*$ будет л. с. обратной для A^*, где A^* — матрица, сопряженная к A.

11. Обобщить первую часть (2.2, III) на произведение трех и более матриц, т. е. найти достаточные условия, при которых $(ABC)^{-1}=C^{-1}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$ и т. д.

12. Показать, что след конечной квадратной матрицы A является инвариантным к преобразованию вида $B=\Omega^{-1}\cdot A\Omega$, где Ω — конечная квадратная матрица. Найти достаточные условия, чтобы этот результат был верен для случая, когда A и Ω — бесконечные матрицы.

13. Бесконечная матрица называется *крест-матрицей*, если существует такое положительное целое число r, что $a_{ij}=0$, когда одновременно $i>r$ и $j>r$. Показать, что крест-матрица не имеет ни п. с., ни л. с. обратных **).

14. Доказать, что если A имеет п. с. обратную X и X, X', A и A' принадлежат к одному и тому же ассоциативному полю $\mathcal{F}$, то: (I) если A симметричная, то и X симметричная; (II) если A кососимметричная, то и X кососимметричная. Показать, что в обоих случаях X является единственной обратной для A в $\mathcal{F}$.

15. Пусть L — поле нижних треугольных матриц, x принадлежит полю L и $E(x)$ — показательная функция. Доказать, что $E(x)$ имеет единственную двустороннюю обратную в L и что I — ее единственное идемпотентное значение.

---

*) См. Динс [2], 258. Простое доказательство может быть получено, если записать $A_1=PA$, где P — соответствующим образом подобранный пермутатор.

**) См. Динс [2], 260.

16. Конечная квадратная матрица вида

$$C \equiv \begin{pmatrix} b_0 & c_1 & 0 & 0 & 0\ldots \\ d_1 & b_1 & c_2 & 0 & 0\ldots \\ 0 & d_2 & b_2 & c_3 & 0\ldots \\ 0 & 0 & d_3 & b_3 & c_4\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{pmatrix}$$

называется *континуантом*. Показать, что если f — первый элемент в матрице C^{-1} (т. е. c_{11}^{-1}), то

$$f = \cfrac{1}{b - \cfrac{c_1 d_1}{b_1 - \cfrac{c_2 d_2}{b_2 - \cdots - \cfrac{c_n d_n}{b_n}}}},$$

где $n+1$ — порядок матрицы C.

Исследовать возможность обобщения этого результата на бесконечные континуанты.

17 *). Пусть:

(I) H — матрица, имеющая л. с. обратную ${}^{-1}H$;

(II) A — матрица, удовлетворяющая условию $A^2 = (H+I)A$;

(III) ${}^{-1}HHA$ и ${}^{-1}HAA$ ассоциативны.

Доказать, что ${}^{-1}HA - I$ является л. с. обратной для $A - I$. Рассмотреть частные случаи, когда: (а) $A = UF$ и $UFU = (H+I)U$; (б) $A \equiv (b_i c_j)$ — матрица «парных произведений» (т. е. $a_{ij} = b_i c_j$), $\sum_{i=1}^{\infty} b_i c_i = \lambda + 1$ $(\lambda \neq 0)$, а H — скалярная матрица λI.

18. Применяя (**2.3**, I), показать, что:

(I) K_r- или K_c-грани полузамкнуты относительно всего поля K_r- или K_c-матриц соответственно;

(II) теорема (**1.7**, I) о показательной функции справедлива, если в ней нижние треугольные матрицы заменить K_r- или K_c-матрицами.

19 **). Пусть $A^{(m)}$ — матрица K_r с конечными строками, для которой $a_{1m}^{(m)} = \frac{1}{m^2}$, а все другие элементы равны нулю, и пусть $\mathcal{F}$ — поле K_r-матриц с *конечными строками*. Показать, что $B_n \equiv \sum_{m=1}^{n} A^{(m)}$ имеет пределом матрицу B, которая является K_r-матрицей, но не с конечными строками, так что K_r-грань не будет полузамкнутой относительно поля $\mathcal{F}$.

20. Доказать, что грань Гильберта полузамкнута относительно всего поля H-матриц, но не относительно поля H-матриц с конечными строками.

---

*) Пример дан Роджерсом; см. пример 14 к гл. 3.

**) Пример принадлежит Хенстоку.

ГЛАВА 3

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦАХ

3.1. Введение

Во второй главе нами были рассмотрены два простых примера линейных уравнений в бесконечных матрицах, а именно $AX = I$ и $XA = I$. В настоящей главе будут рассмотрены дальнейшие примеры таких уравнений, в частности два уравнения, имеющие особенно важное значение в квантовой механике, а именно: $AX - XD = 0$ и $AX - XA = I$, где D — диагональная матрица, а A — данная бесконечная матрица. Первое из этих уравнений $AX - XD = 0$ имеет важное значение в вопросах эквивалентности матриц, которые будут рассмотрены в гл. 5. Мы ограничимся здесь рассмотрением случаев, не требующих применения теории решения бесконечного множества уравнений с бесконечным числом неизвестных.

3.2. Уравнения $AX = B$, $XA = B$

Эти уравнения встречаются наиболее часто. Для них очевидны следующие два результата:

(3.2, I) *Если A имеет п. с. обратную A^{-1}, то $X = A^{-1} \cdot B$ является решением уравнения $AX = B$ при условии, что $AA^{-1} \cdot B$ ассоциативно. Если A^{-1} единственная в таком ассоциативном поле $\mathcal{F}$, то $A^{-1} \cdot B$ будет единственным решением уравнения $AX = B$ в $\mathcal{F}$.*

(3.2, II) *Если A имеет л. с. обратную ${}^{-1}A$, то $X = B \cdot {}^{-1}A$ является решением уравнения $XA = B$ при условии, что $B \cdot {}^{-1}AA$ ассоциативно. Если ${}^{-1}A$ — единственная в таком ассоциативном поле $\mathcal{F}$, то $B \cdot {}^{-1}A$ будет единственным решением уравнения $XA = B$* в $\mathcal{F}$.

Отметим, что если Ω является решением уравнения $AX = B$, то все другие решения имеют вид $\Omega + A^0$; аналогично если Ω — решение уравнения $XA = B$, то все другие решения имеют вид $\Omega + {}^0A$.

В том случае, когда A и B — *конечные* квадратные матрицы одного порядка, произведение $AA^{-1} \cdot B$ автоматически является ассоциативным и решение $X = A^{-1} \cdot B$ уравнения $AX = B$ эквивалентно применению правила Крамера для детерминантов. Если же A и B — *бесконечные* матрицы, то (**3.2**, I) дает предельную форму правила Крамера при стремлении порядка определителя к бесконечности.

Рассмотрим теперь систему уравнений (Динс [2], 263)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = b_i. \tag{3.21}$$

Если положить $x_{k1} = x_k$, $x_{kj} = 0$ для $j > 1$, $b_{i1} = b_i$, $b_{ij} = 0$ для $j > 1$, то система (3.21) может быть записана в виде $AX = B$, причем рассматриваются только те решения этого матричного уравнения, в которых все элементы, отличные от элементов первого столбца, равны нулю (см. § 1.2).

В условиях теоремы (**3.2**,I) матрица $A^{-1} \cdot B$ будет решением, так как все элементы ее, кроме расположенных в первом столбце, равны нулю. Это решение единственно в поле $\mathcal{F}$, в котором $AA^{-1} \cdot B$ ассоциативно, если A^{-1} единственная обратная в $\mathcal{F}$. Например, если A является K_r-матрицей с K_r-обратной A^{-1}, а $\{b_n\}$ ограниченная, то $A^{-1} \cdot B$ существует и $x_k = (A^{-1} \cdot B)_{k1}$ является решением системы (3.21), причем $\{x_k\}$ будет ограниченной.

Действительно,

$$(A^{-1} \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{-1} b_{kj} = 0 \qquad (j > 1)$$

и

$$\left|(A^{-1} \cdot B)_{i1}\right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{-1} b_k \right| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}^{-1}| \leqslant M'$$

для любого i, где $|b_k| \leqslant M$ для всякого k.

Если A является K_c-матрицей с K_c-обратной A^{-1} и если $\sum |b_n|$ сходится, то $x_k = (A^{-1} \cdot B)_{k1}$ будет решением системы (3.21) таким, что ряд $\sum |x_k|$ сходится. Действительно, в приведенном выше выражении для $(A^{-1} \cdot B)_{ij}$ мы имеем $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik}^{-1}| \leqslant N$ для любого k, так что $|a_{ik}^{-1}| \leqslant N$ для любых i и k, а поэтому

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{-1} b_k \right| \leqslant N \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < N'$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ik}^{-1}||b_k| \leqslant N\sum_{k=1}^{\infty}|b_k| \leqslant N'.$$

Изменение порядка суммирования в двойном ряду в последней строке возможно в силу абсолютной сходимости.

3.3. Трансформация бесконечных матриц в диагональные матрицы

Рассмотрим уравнение $AX-XD=0$, упомянутое в § 3.1, где A — данная (бесконечная) матрица, а D — диагональная.

В общем случае мы будем требовать, чтобы решение X уравнения

$$AX-XD=0 \tag{3.31}$$

имело *единственную двустороннюю обратную* X^{-1} в поле $\mathcal{F}$, в котором ${}^{-1}XXX^{-1}$ ассоциативно. Так, в квантовой механике основной проблемой является нахождение при данной матрице A матриц X и D таких, чтобы выполнялось равенство

$$A=XDX^{-1}. \tag{3.32}$$

(Френкель [1], т. II, гл. III и IV; Бертуисл [1], гл. XI, 100—102.) В то же время в вопросах эквивалентности обобщенных пределов (§ 5.3) важно уметь находить X и D такие, чтобы D было X-трансформацией A (см. пример 7 к гл. 2), т. е.

$$X^{-1}\cdot AX=D. \tag{3.33}$$

Уравнения (3.31)—(3.33) эквивалентны, если X^{-1} является единственной двусторонней обратной для X в $\mathcal{F}$ при условии, что все входящие в эти уравнения произведения существуют и для них выполняется ассоциативный закон.

Если A — *нижняя треугольная матрица*, то задача решения уравнения (3.31) является простой. Это показывает следующая теорема:

(**3.3**, I) *Если в нижней треугольной матрице A все элементы a_{ii} различны, то существует такая нижняя треугольная матрица X, что $AX-XD=0$, где $d_i=a_{ii}$, а все диагональные элементы x_{kk} в X произвольны.*

В нашем случае уравнение $AX-XD=0$ равносильно системе уравнений

$$\sum_{k=j}^{i} a_{ik}x_{kj}=x_{ij}d_j. \tag{3.34}$$

Для $j=i$ $a_{ii}x_{ii}=x_{ii}d_i$, так что $d_i=a_{ii}$ удовлетворяет этому уравнению при произвольном значении x_{ii}; если $x_{ii}\neq 0$, то a_{ii} является единственно возможным значением для d_i. Мы предположим, что

$d_i = a_{ii}$, а x_{ii} — произвольно заданные числа. Тогда из (3.34) при $i = 2$, $j = 1$ получаем $a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = x_{21}d_1$; так как $d_1 = a_{11} \neq a_{22}$, то для x_{21} получаем:

$$x_{21} = \frac{a_{21}x_{11}}{a_{11} - a_{22}},$$

где x_{11} произвольно. Дальше, для $i = 3$, $j = 2$ мы имеем $a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} = x_{32}d_2$, откуда

$$x_{32} = \frac{a_{32}x_{22}}{a_{22} - a_{33}},$$

где $a_{22} \neq a_{33}$; при $i = 3$, $j = 1$ получаем:

$$a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = x_{31}d_1.$$

Отсюда определяется x_{31}, так как x_{21} уже определено и $a_{11} \neq a_{33}$. Таким образом, все элементы X могут быть определены один за другим, причем в выражение для них войдут произвольно выбранные элементы x_{kk}.

Если мы перейдем от нижней треугольной матрицы к общей бесконечной матрице A, то уравнение $AX - XD = 0$ в этом случае равносильно системе

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_{kj} = x_{ij}d_j,$$

которая содержит бесконечное множество *однородных* линейных уравнений с бесконечным множеством неизвестных. Нахождение *нетривиального* решения такой системы (т. е. для которого не все элементы из X равны нулю) представляет значительные трудности (см., например, Ф. Рисс [1], 63).

Однако можно построить некоторые классы бесконечных матриц A, которые могут быть трансформированы в диагональные посредством матрицы X, имеющей единственную двустороннюю обратную. Такое построение можно провести на основании следующего замечания (Кук [2]).

Рассмотрим уравнение $BX - XD = D$, где B — данная бесконечная матрица, а D — диагональная. Предположим, что существует решение X этого уравнения и что существует другая матрица C такая, что $CX = D$. Вычитая это уравнение из уравнения $BX - XD = D$, мы получим $AX - XD = 0$, где $A = B - C$. Уравнение $CX = D$ удовлетворяется матрицей $C = D \cdot {}^{-1}X$, так что предположение о существовании C эквивалентно предположению, что существует ${}^{-1}X$.

Приведем три теоремы, при доказательстве которых используется это замечание. Первая из них будет доказана, доказательство двух других (проводится аналогично первому) предоставляется читателю (см. примеры 1 и 2 к гл. 3; о некоторых дальнейших результатах, касающихся уравнения $AX - XD = 0$, см. примеры 4, 8, 9, 12—15 к гл. 3).

(**3.3**, II) *Пусть* f_i, g_i, h_i — *данные числа, такие, что:* (I) $S \equiv \sum_{i=1}^{\infty} f_i g_i$ *сходится*; (II) *ряд* $\Delta \equiv \sum_{i=1}^{\infty} f_i h_i$, *где* $f_i \neq 0$ *и* $h_i \neq 0$ *для любого* i, *сходится и* $\Delta \neq 1$. *Тогда бесконечная матрица* A, *элементы которой определяются соотношениями*:

$$\left.\begin{aligned} a_{ni} &= -f_n\left(g_i + \frac{h_i d_n}{\Delta - 1}\right) \qquad (i \neq n), \\ a_{nn} &= -f_n\left(g_n + \frac{h_n d_n}{\Delta - 1}\right) + d, \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

трансформируется матрицей X *с элементами*

$$x_{ik} = f_i h_k \qquad (i \neq k), \quad x_{kk} = f_k h_k - 1$$

в диагональную матрицу D, *элементы которой*

$$d_k = \frac{g_k}{h_k} - S.$$

Кроме того, X *обладает обратной* X^{-1} (*единственной в поле, в котором* ${}^{-1}XXX^{-1}$ *ассоциативно*), *имеющей своими элементами*

$$x_{ni}^{-1} = \frac{f_n h_i}{\Delta - 1} \qquad (i \neq n), \quad x_{nn}^{-1} = \frac{f_n h_n}{\Delta - 1} - 1$$

при условии, что $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i h_i|$ *сходится.*

Уравнение $BX - XD = D$ может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni} x_{ik} - x_{nk} d_k = \begin{cases} d_n & (k = n), \\ 0 & (k \neq n). \end{cases}$$

Положим $x_{ik} = y_{ik}$ $(i \neq k)$, $x_{kk} = y_{kk} - 1$; тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni} y_{ik} - b_{nk} - y_{nk} d_k = 0.$$

Пусть теперь $b_{ni} = -f_n g_i$, $y_{ik} = f_i h_k$; тогда $-f_n h_k \sum_{i=1}^{\infty} f_i g_i + f_n g_k - f_n h_k d_k = 0$. Таким образом, $d_k = \frac{g_k}{h_k} - S$ и элементы X определяются равенствами

$$x_{ik} = f_i h_k \qquad (i \neq k), \quad x_{kk} = f_k h_k - 1.$$

Теперь мы найдем матрицу C, удовлетворяющую уравнению $CX = D$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{ni} x_{ik} = \begin{cases} d_n & (k = n), \\ 0 & (k \neq n). \end{cases}$$

Положим $c_{ni} = z_{ni}$ $(i \neq n)$, $c_{nn} = z_{nn} - d_n$; тогда

$$h_k \sum_{i=1}^{\infty} z_{ni} f_i - z_{nk} - d_n f_n h_k = 0.$$

Запишем z_{ni} в виде $z_{ni} = h_i \theta_n$; тогда $\theta_n \sum_{i=1}^{\infty} f_i h_i - \theta_n - d_n f_n = 0$, откуда, учитывая, что по условию $\Delta \neq 1$, получаем $\theta_n = \frac{d_n f_n}{\Delta - 1}$. Поэтому

$$c_{ni} = \frac{d_n f_n h_i}{\Delta - 1} \qquad (i \neq n), \quad c_{nn} = \frac{d_n f_n h_n}{\Delta - 1} - d_n$$

и, следовательно, $A \equiv B - C$ определяется равенствами (3.35).

Сейчас мы докажем, что X имеет единственную двустороннюю обратную в поле, в котором ${}^{-1}XXX^{-1}$ ассоциативно; л. с. обратная, если она существует, определяется из соотношений

$$\sum_{i=1}^{\infty} {}^{-1}x_{ni} y_{ik} - {}^{-1}x_{nk} = \delta_{nk}.$$

Положим ${}^{-1}x_{ni} = u_{ni}$ $(i \neq n)$, ${}^{-1}x_{nn} = u_{nn} - 1$; тогда

$$h_k \sum_{i=1}^{\infty} u_{ni} f_i - u_{nk} - f_n h_k = 0.$$

Полагая $u_{ni} = \Psi_n h_i$, получаем:

$$\Psi_n \sum_{i=1}^{\infty} f_i h_i - \Psi_n - f_n = 0, \quad \text{или} \quad \Psi_n = \frac{f_n}{\Delta - 1}.$$

Таким образом,

$${}^{-1}x_{ni} = \frac{f_n h_i}{\Delta - 1} \qquad (i \neq n), \quad {}^{-1}x_{nn} = \frac{f_n h_n}{\Delta - 1} - 1;$$

п. с. обратная, если она существует, определяется из уравнений

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_{ni} x_{ik}^{-1} - x_{nk}^{-1} = \delta_{nk}.$$

Положив $x_{ik}^{-1} = v_{ik}$ $(i \neq k)$, $x_{kk}^{-1} = v_{kk} - 1$, получим:

$$f_n \sum_{i=1}^{\infty} h_i v_{ik} - f_n h_k - v_{nk} = 0.$$

Запишем v_{ik} в виде $v_{ik} = \lambda_k f_i$; тогда $\lambda_k = \frac{h_k}{\Delta - 1}$. Таким образом, $x_{ik}^{-1} = {}^{-1}x_{ik}$. Но ${}^{-1}XXX^{-1}$ ассоциативно, если сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| {}^{-1}x_{ni} x_{ij} x_{jk}^{-1} \right|.$$

В нашем случае этот ряд сходится, если сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|f_n h_i f_i h_j f_j h_k| \equiv |f_n h_k| \left(\sum_{i=1}^{\infty}|f_i h_i|\right)^2.$$

Последний же ряд сходится по условию. Теорема доказана. В этой теореме матрица B имеет форму $F_n G_i$, т. е. ее элементами b_{ni} являются парные произведения $f_n g_i$; в следующих двух теоремах такое ограничение на B не накладывается.

(**3.3**, III) *Пусть d_i — данные числа, а y_{ni} — бесконечная матрица, удовлетворяющая условиям*:

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_{ni} d_i y_{ik} = 0, \tag{3.36}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_{ni} y_{ik} = 0. \tag{3.37}$$

Тогда бесконечная матрица $A \equiv (a_{ni})$, где

$$a_{ni} = y_{ni}(d_n - d_i) \qquad (i \neq n), \quad a_{nn} = d_n,$$

трансформируется матрицей $X \equiv (x_{ik})$, где

$$x_{ik} = y_{ik} \qquad (i \neq k), \quad x_{kk} = y_{kk} - 1,$$

в данную диагональную матрицу $D \equiv (d_k)$.

Кроме того, X имеет двустороннюю обратную X^{-1}, единственную в поле, в котором ${}^{-1}XXX^{-1}$ ассоциативно, и определяемую равенствами

$$x_{ik}^{-1} = -y_{ik} \qquad (i \neq k), \quad x_{kk}^{-1} = -y_{kk} - 1$$

при условии, что двойной ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} y_{ni} y_{ik} y_{kh}$$

абсолютно сходится.

Очевидно, что уравнения (3.36) и (3.37) тесно связаны с теорией нуль-рядов. В частности, мы можем в теореме положить

$$d_k = \frac{1}{k^2} \text{ и } y_{ni} = \frac{(-1)^i n^2 i^2 J_\nu\left\{x\sqrt{n^2+i^2}\right\}}{\left\{\frac{1}{2}x\sqrt{n^2+i^2}\right\}^\nu} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

где J_ν — функция Бесселя порядка ν. Тогда условия (3.36) и (3.37) удовлетворяются при $\nu > \frac{3}{2}$ (Фокс [1], 484). Кроме того, ${}^{-1}X = X^{-1}$ является единственной, если $\nu > \frac{17}{6}$, как это видно из асимптотического представления функции Бесселя (Ватсон [1], 199).

(**3.3**, IV) *Пусть e_i, f_i — данные числа и пусть (u_{ni}) — бесконечная матрица, которая удовлетворяет условиям*

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_{ni} e_i u_{ik} = u_{nk} \sum_{i=1}^{\infty} u_{ii} e_i \tag{3.38}$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_{ni} f_i u_{ik} = u_{nk} \sum_{i=1}^{\infty} u_{ii} f_i, \tag{3.39}$$

где ряды в левых частях сходятся при любых n и k. Кроме того, сходятся ряды

$$S \equiv \sum_{i=1}^{\infty} u_{ii} e_i, \quad \Delta \equiv \sum_{i=1}^{\infty} u_{ii} f_i$$

и $\Delta \neq 1$. Тогда бесконечная матрица $A \equiv (a_{ni})$, где

$$a_{ni} = u_{ni}\left(e_i - \frac{f_i d_n}{\Delta - 1}\right) \quad (i \neq n), \quad a_{nn} = u_{nn}\left(e_n - \frac{f_n d_n}{\Delta - 1}\right) + d_n,$$

трансформируется матрицей $X \equiv (x_{ik})$, где

$$x_{ik} = u_{ik} f_k \quad (i \neq k), \quad x_{kk} = u_{kk} f_k - 1,$$

в диагональную матрицу D, элементы которой $d_k = S - \frac{e_k}{f_k}$, если $f_k \neq 0$ для любого k.

Кроме того, X обладает двусторонней обратной X^{-1}, единственной в поле, в котором ${}^{-1}XXX^{-1}$ ассоциативно, и определяемой равенствами

$$x_{ik}^{-1} = \frac{u_{ik} f_k}{\Delta - 1} \quad (i \neq k), \quad x_{kk}^{-1} = \frac{u_{kk} f_k}{\Delta - 1} - 1$$

при условии, что двойной ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{ni} f_i u_{ik} f_k u_{kh}$$

абсолютно сходится.

Если обозначить через U матрицу $(u_{ni} e_i)$, то в частном случае, когда $S = 1$, условие (3.38) примет вид $U^2 = U$, т. е. U будет идемпотентной матрицей. Если U имеет п. с. обратную и $U^2 U^{-1}$ ассоциативно, то $U = I$ (где I — единичная матрица) является единственным решением уравнения $U^2 = U$. Если же U не имеет обратной, то это уравнение имеет бесчисленное множество решений. Например, если U — матрица «парных произведений» $p_n q_i$, это уравнение имеет вид

$$p_n q_k \sum_{i=1}^{\infty} p_i q_i = p_n q_k$$

и ему удовлетворяют любые последовательности $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$, для которых

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i q_i = 1.$$

В общем случае, когда S не ограничивается этим условием, уравнение (3.38) удовлетворяется любыми p_i и q_i, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i q_i$ сходится к S. Из этого можно заметить, что (**3.3**, II) включается в (**3.3**, IV), так как (3.39) также удовлетворяется любой матрицей «парных произведений».

Сейчас мы приведем теорему, исходный пункт доказательства которой несколько иной, чем в рассмотренных выше теоремах. Вместо уравнения $BX-XD=D$ мы будем исходить из уравнения $BX-XD=I$. Предположим, что для данных B и D оно имеет решение X, которое обладает единственной двусторонней обратной X^{-1}, так что $X^{-1}\cdot X=I$. Вычитая это выражение из уравнения, получим $AX-XD=0$, где $A=B-X^{-1}$. Это замечание используется при доказательстве следующей теоремы.

(**3.3**, V) *Пусть* $d_k \neq 0$, $h_k \neq 0$, f_k *и* g_k *таковы, что сходятся ряды* $\sum_{i=1}^{\infty} f_i g_i \equiv \Delta$ *и* $\sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i h_i \equiv S \neq 1$, *причем последний ряд сходится абсолютно. Тогда бесконечная матрица* A, *элементы которой*

$$a_{ni} = -f_n\left(g_i + \frac{h_i d_i d_n}{S-1}\right) \quad (i \neq n), \quad a_{nn} = -f_n\left(g_n + \frac{h_n d_n^2}{S-1}\right) + d_n,$$

трансформируется матрицей $X \equiv (x_{ik})$, *где* $x_{ik} = f_i h_k$ $(i \neq k)$, $x_{kk} = f_k h_k - \frac{1}{d_k}$, *в одну из диагональных матриц, определяемых равенствами*

$$d_k = \frac{1}{2}\left[-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \frac{4g_k}{h_k}}\right].$$

Кроме того, при заданных условиях X *имеет единственную двустороннюю обратную* $X^{-1} \equiv \left(x_{ni}^{-1}\right)$ *в поле, в котором* ${}^{-1}XXX^{-1}$ *ассоциативно; при этом*

$$x_{ni}^{-1} = \frac{d_i d_n h_i f_n}{S-1} \quad (i \neq n), \quad x_{nn}^{-1} = \frac{d_n^2 h_n f_n}{S-1} - d_n.$$

Доказательство этой теоремы проводится таким же путем, как и в (**3.3**, II), и предоставляется читателю (см. пример 3 к гл. 3).

Примеры к теореме (**3.3**, V)

(I) $$f_n=e^{-n},\quad g_i=-\frac{1}{i!},$$
$$h_k=\frac{8e^k}{k!},\quad d_k=\frac{1}{2}\left[e^{\frac{1}{e}}-1\pm\sqrt{\left(e^{\frac{1}{e}}-1\right)^2-\frac{1}{2}e^{-k}}\right].$$

(II) $$f_n=\frac{1}{n!},\quad g_i=\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2i}}{\Gamma(\nu+i+1)},$$
$$h_k=\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)},$$
$$d_k=\frac{1}{2}\left[\rho_\nu-I_\nu(z)\pm\sqrt{(\rho_\nu-I_\nu(z))^2+4\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2k}}\right],$$
$$\operatorname{Re}(\nu)>-1,$$

где $\rho_\nu=\dfrac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$ и $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя (Ватсон [1], 77).

(III) $$f_n=e^n,\quad g_i=-\frac{1}{i!},\quad h_k=-\frac{e^{-k}}{k!},$$
$$d_k=\frac{1}{2}\left[e^e-1\pm\sqrt{(e^e-1)^2+4e^k}\right].$$

Пример (III) является интересным в том смысле, что здесь d_k не ограничены и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{ni}$ расходится; он показывает, что сходимость $\sum a_{ni}$ по столбцам и ограниченность d_k не являются необходимыми для трансформации A в D.

3.4. Уравнение $AX-XB=C$ и уравнение «квантования» $AX-XA=I$

В этом параграфе мы рассмотрим уравнение $AX-XB=C$ и как частный случай уравнение «квантования» $AX-XA=I$, встречающееся в теории Гейзенберга — Дирака механики атома.

(**3.4**, I) *Пусть* $A=D+A^{(0)}$, $B=\Theta+B^{(0)}$, $C=\Gamma+C^{(0)}$, *где* D, Θ, Γ — *диагональные матрицы* $d_n=a_{nn}$, $\theta_n=b_{nn}$, $\gamma_n=c_{nn}$, *и предположим, что*: (I) $|d_n-\theta_k|\geqslant d>0$ *для любых* n *и* k *и* (II) $|C|$ *существует, а* $|A^{(0)}|+|B^{(0)}|=e<d$, *где грань в каждом случае берется регулярной и полузамкнутой* (§ 2.3 (VI)).

Тогда $X=\Delta+\sum\limits_{s=1}^{\infty}X^{(s)}$ *является решением уравнения* $AX-XB=C$, *где диагональная матрица* Δ *и матрицы* $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ...

определяются последовательно из уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} (D-\Theta)\Delta=\Gamma, \\ DX^{(1)}-X^{(1)}\Theta=C^{(0)}+\Delta B^{(0)}-A^{(0)}\Delta, \\ DX^{(2)}-X^{(2)}\Theta=X^{(1)}B^{(0)}-A^{(0)}X^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ DX^{(s+1)}-X^{(s+1)}\Theta=X^{(s)}B^{(0)}-A^{(0)}X^{(s)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (3.41)$$

Кроме того,

$$|X| \leqslant \frac{|\Gamma|+|C^{(0)}|}{d-e} \quad (3.42)$$

(Динс [2], 265).

Первое из уравнений (3.41) дает $\delta_n=\frac{\gamma_n}{d_n-\theta_n}$, где $\Delta=(\delta_n)$. Из второго уравнения получаем:

$$x_{nk}^{(1)}=\frac{c_{nk}^{(0)}+\delta_n b_{nk}^{(0)}-a_{nk}^{(0)}\delta_k}{d_n-\theta_k},$$

так что в соответствии со свойством грани $|AB| \leqslant |A|\,|B|$, и принимая во внимание ее регулярность, будем иметь *):

$$|X^{(1)}| \leqslant \frac{|C^{(0)}|+|\Delta|e}{d}.$$

Из общего уравнения (3.41) следует:

$$x_{nk}^{(s+1)}=\frac{1}{d_n-\theta_k}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ni}^{(s)} b_{ik}^{(0)}-\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}^{(0)} x_{ik}^{(s)}\right), \quad (3.43)$$

так что

$$|X^{(s+1)}| \leqslant |X^{(s)}|\frac{e}{d} \leqslant |X^{(s-1)}|\left(\frac{e}{d}\right)^2 \leqslant \ldots \leqslant |X^{(1)}|\left(\frac{e}{d}\right)^s,$$

причем опять использовано свойство грани $|AB| \leqslant |A|\,|B|$. Принимая это во внимание, из (3.43) получим:

$$|X^{(s+1)}| \leqslant \frac{|C^{(0)}|}{d}\left(\frac{e}{d}\right)^s+|\Delta|\left(\frac{e}{d}\right)^{s+1}.$$

Так как по условию грань полузамкнута, то, следовательно,

$$|X| \leqslant |\Delta|+\sum_{s=1}^{\infty}|X^{(s)}| \leqslant \frac{|C^{(0)}|}{d-e}+|\Delta|\,\frac{d}{d-e};$$

*) Для вывода этого неравенства нужна, по всей видимости, нормальность грани. (*Прим. ред.*)

из первого же уравнения (3.41) мы имеем $|\Delta| \leqslant |\Gamma| d^{-1}$, так что

$$|X| \leqslant \frac{|\Gamma| + |C^{(0)}|}{d-e},$$

и неравенство (3.42) доказано.

Складывая уравнения (3.41), мы получим:

$$A\left(\Delta + \sum_{s=1}^{\infty} X^{(s)}\right) - \left(\Delta + \sum_{s=1}^{\infty} X^{(s)}\right) B = C,$$

так что $X = \Delta + \sum\limits_{s=1}^{\infty} X^{(s)}$ является решением уравнения $AX - XB = C$ при выполнении условий теоремы.

Теорема доказана.

Если $\Gamma = 0$, первое уравнение (3.41) дает $\Delta = 0$ при условии, что $D \neq \Theta$ *).

Если $C = 0$ (т. е. уравнение однородное), то этот метод приводит только к тривиальному решению $X = 0$ при $D \neq \Theta$; если же $D = \Theta$ и $C = 0$, то первое уравнение в (3.41) удовлетворяется при всяком Δ. При этом частный случай, когда $B^{(0)} = 0$, соответствует уравнению $AX - XD = 0$. Теорема (**3.4**, I) в этом случае неприменима, так как $|d_n - \theta_k| = 0$ при $k = n$, т. е. $d = 0$.

Обращаясь теперь к уравнению $AX - XA = I$, мы отметим, что метод, примененный в доказательстве (**3.4**, I), также неприменим и к этому случаю, так как мы имеем $A^{(0)} = B^{(0)}$, $D = \Theta$, $\Gamma = I$, $C^{(0)} = 0$ и, значит, $d = 0$.

Если A — нижняя треугольная матрица, то уравнение $AX - XA = I$ не имеет решения, которое являлось бы нижней треугольной матрицей. В самом деле, уравнение в этом случае может быть записано в виде

$$\sum_{i=k}^{n} (a_{ni} x_{ik} - x_{ni} a_{ik}) = \delta_{nk},$$

и при $k = n$ оно приводит к противоречию $a_{nn} x_{nn} - x_{nn} a_{nn} = 1$.

Если A — общая матрица, то уравнение $AX - XA = I$ не имеет решения, которое являлось бы диагональной матрицей. Действительно, если $X = (d_n)$, то уравнение обращается в $a_{nk} d_k - d_n a_{nk} = \delta_{nk}$, которое противоречиво при $k = n$.

---

*) Утверждение не точно, ибо первое уравнение в (3.41) для диагональных матриц дает $(d_n - \theta_n)\delta_n = \gamma_n$. Поэтому если $\Gamma = 0$, то $(d_n - \theta_n)\delta_n = 0$. Стало быть, если $D \neq \Theta$, но хотя бы для одного номера n_0 справедливо $d_{n_0} = \theta_{n_0}$, то в качестве δ_{n_0} мы можем брать любое число, и поэтому уравнение $(D - \Theta)\Delta = 0$ будет иметь бесконечно много различных решений по Δ, хотя и $D \neq \Theta$. Единственным решением уравнения $(D - \Theta)\Delta = 0$ будет $\Delta = 0$ лишь в случае, если $d_n = \theta_n$ при всех n. (*Прим. ред.*)

В частных случаях уравнение может быть решено шаг за шагом. Например, если единственные отличные от нуля элементы A суть $a_{n,\,n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, то мы имеем:

$$a_{n,\,n+1}x_{n+1,\,1}=\delta_{n1} \quad \text{и} \quad a_{n,\,n+1}x_{n+1,\,k}-x_{n,\,k-1}a_{k-1,\,k}=\delta_{nk} \qquad (k>1).$$

Таким образом, первая строка матрицы X остается произвольной; другие элементы k-го столбца $(k>1)$ определяются из равенств:

$$x_{ik}=\frac{x_{i-1,\,k-1}a_{k-1,\,k}}{a_{i-1,\,i}} \qquad (2\leqslant i\leqslant k-1),$$

$$x_{kk}=x_{k-1,\,k-1}=\ \ldots\ =x_{11}, \quad x_{k+1,\,k}=\frac{k}{a_{k,\,k+1}},$$

а так как $x_{n1}=0$ для $n>2$, то получаем $x_{k+j,\,k}=0$ $(j>1)$. Эти формулы определяют элементы k-го столбца через элементы $(k-1)$-го столбца для $k>1$; для $k=1$ мы имеем $x_{21}=\dfrac{1}{a_{12}}$, $x_{n1}=0$ при $n>2$ (Динс [2], 266).

Мы сейчас дадим некоторые решения уравнения $AX-XA=I$ для специально построенного класса матриц A, у которых первый столбец a_{n1} и диагональ $a_{n-1,\,n}$ произвольны, причем $a_{n-1,\,n}\neq 0$ (Кук [3]).

(**3.4**, II) *Пусть* $A\equiv(a_{ni})$ *удовлетворяет условиям*:

(I) $ia_{n,\,i+1}a_{n-1,\,n}-(n-1)\,a_{n-1,\,i}\;a_{i,\,i+1}=0$ *для* $i\neq n,\ i\geqslant 1,\ n\geqslant 2$;

(II) $a_{1i}=0$ *для* $i\geqslant 3$,

где a_{n1} *и* $a_{n-1,\,n}$ *выбраны произвольно, причем* $a_{n-1,\,n}\neq 0$ *для любого* n.

Тогда решением уравнения $AX-XA=I$ *является матрица, элементы которой*

$$x_{ik}=a_{ik} \qquad (i\neq k+1), \quad x_{k+1,\,k}=a_{k+1,\,k}+\frac{k}{a_{k,\,k+1}}.$$

Уравнение в нашем случае имеет вид

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_{ni}x_{ik}-x_{ni}a_{ik})=\delta_{nk}. \tag{3.44}$$

(а) Пусть $k\neq n,\ k\geqslant 1,\ n\geqslant 2$. Тогда при наших значениях a_{ni} и x_{ik} уравнение (3.44) обращается в

$$\frac{k}{a_{k,\,k+1}}\,a_{n,\,k+1}-\frac{n-1}{a_{n-1,\,n}}\,a_{n-1,\,k}=0,$$

откуда

$$ka_{n,\,k+1}a_{n-1,\,n}-(n-1)\,a_{n-1,\,k}a_{k,\,k+1}=0,$$

что совпадает с условием (I).

(б) Пусть $k=n\geqslant 2$. Тогда (3.44) обращается в тождество $n-(n-1)=1$.
(в) Пусть $n=1$, $k\geqslant 1$. Тогда (3.44) дает

$$\frac{k}{a_{k,\,k+1}}\,a_{1,\,k+1}=\delta_{1k}.$$

При $k=1$ это равенство обращается в тождество, при $k\neq 1$ оно дает $a_{1,\,k+1}=0$ для любого $k\geqslant 2$ или $a_{1k}=0$ для $k\geqslant 3$, что представляет собой условие (II). Теорема доказана.

Исследуем структуру матрицы a_{ni}, которая удовлетворяет условиям (I) и (II) теоремы (**3.4**, II). Полагая в условии (I) поочередно $n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$, мы получим, согласно условию (II), $a_{ni}=0$ для $i\geqslant n+2$. Полагая теперь в (I) $i=n-1$, получим $a_{nn}=a_{n-1,\,n-1}$ $(n\geqslant 2)$, т. е. $a_{nn}=a_{11}$, так что все элементы, расположенные на главной диагонали, одинаковы. Положим теперь в условии (I) поочередно $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$; $i=1$ дает

$$a_{n2}a_{n-1,\,n}=(n-1)\,a_{n-1,\,1}a_{12}\qquad (n\geqslant 2).$$

Элементы $a_{n-1,\,1}$ произвольны так же, как $a_{n-1,\,n}$, причем последние подчинены лишь условию $a_{n-1,\,n}\neq 0$ для любого n. Введем обозначение $a_{n-1,\,n}\equiv\theta_{n-1}$; тогда

$$a_{n2}=\mu_n\theta_1,\quad \text{где}\quad \mu_n\equiv\frac{(n-1)\,a_{n-1,\,1}}{\theta_{n-1}}.$$

Аналогично

$$a_{n3}=\frac{n-1}{2!}\,\frac{\theta_1\theta_2}{\theta_{n-1}}\,\mu_{n-1}\qquad (n\geqslant 3)$$

и

$$a_{ni}=\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-i+2)}{(i-1)\,!}\,\frac{\theta_1\theta_2\cdots\theta_{i-1}}{\theta_{n-1}\theta_{n-2}\cdots\theta_{n-i+2}}\,\mu_{n-i+2}$$

для $2\leqslant i\leqslant n-1$. Из этой формулы также получаем $a_{nn}=a_{11}$, что мы уже показали другим способом *). Таким образом, все элементы a_{ni} определяются через произвольные элементы a_{n1} и $a_{n-1,\,n}$.

В качестве примера положим $a_{n-1,\,n}=a_{n,\,n-1}=\sqrt{n-1}$, а все другие элементы $a_{ij}=0$. Тогда условия (I) и (II) удовлетворяются, и поэтому решением уравнения является матрица (x_{ij}), где

$$x_{k-1,\,k}=\sqrt{k-1},\qquad x_{k+1,\,k}=2\sqrt{k},$$

а все другие $x_{ij}=0$.

Как видим, уравнение $AX-XA=I$ не имеет решения, являющегося диагональной матрицей. Отсюда следует, что оно не имеет

---

*) В формуле для a_{ni} можно брать i не только в пределах $2\leqslant i\leqslant n-1$, но и в пределах $2\leqslant i\leqslant n$. Поэтому, беря $i=n$, мы получаем равенство $a_{nn}=\theta_1\mu_2=a_{11}$. (*Прим. ред.*)

решений в некотором ассоциативном поле, которое является трансформацией диагональных матриц (Динс [2], 266). Действительно, если $X = \Omega^{-1} \cdot D\Omega$ является таким решением, то мы имеем:

$$A\Omega^{-1} \cdot D\Omega - \Omega^{-1} \cdot D\Omega A = I,$$

и, умножая это равенство слева на Ω, а справа на Ω^{-1}, мы получим $\Omega A \Omega^{-1} \cdot D - D\Omega A \Omega^{-1} = I$, предполагая, что ассоциативность имеет место. Но в таком случае D будет решением уравнения $BX - XB = I$, где $B = \Omega A \Omega^{-1}$, что невозможно (см. также примеры 5—7, 10 и 11 к гл. 3).

3.5. «Алгебраическая» теорема для уравнения $AX - XA = I$

В заключение мы приведем теорему О. Тауски *) о несуществовании решений уравнения $AX - XA = I$ при некоторых определенных условиях. Эта теорема доказывается в терминах «групп» и «колец», употребляющихся в современной алгебре (см., например, Альберт [1], гл. 1). Поэтому мы сначала дадим краткое описание употребляющихся в доказательстве теоремы понятий.

Непустое множество G элементов, a, b, c, ... образует *группу* относительно операции O, если каждой паре (a, b) элементов из G, взятых в определенном порядке, посредством этой операции ставится в соответствие определенный элемент c из G, обозначаемый aOb. Кроме того, выполняются условия: (I) в G имеет место ассоциативный закон, т. е. $aO(bOc) = (aOb)Oc$ для любых a, b и c из G; (II) для любых a и b из G существуют решения x и y уравнений $aOx = b$, $yOa = b$, также принадлежащие G.

Для удобства символ операции O часто обозначается знаками $(\times)$ или $(+)$. Таким образом, вместо $aOb = c$, когда $a \in G$, $b \in G$ ($a \in G$ означает, что a принадлежит G), мы будем писать $ab = c \in G$ или $a + b = c \in G$.

Из (II) следует (см. Альберт [1], 8—9), что G содержит нейтральный элемент, который обозначается 1, когда O означает $(\times)$, и 0 (нуль), если O есть $(+)$, так что $a = a1 = 1a$ и $a + 0 = 0 + a = a$ соответственно; каждый элемент из G имеет обратный, обозначаемый через a^{-1}, когда O является $(\times)$, и $-a$, когда O есть $(+)$, так что $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ и $a - a = -a + a = 0$ в зависимости от операции.

Операция O не обязательно коммутативна, однако для любой группы справедливы следующие соотношения:

$$\text{если } ab = 1, \text{ то } ba = 1, \text{ и если } a + b = 0, \text{ то и } b + a = 0. \tag{3.51}$$

Так, действительные числа, исключая нуль, образуют группу, когда O является обычным умножением; действительные числа с включенным

---

*) Публикуется здесь впервые.

нулем образуют группу, когда O является обычным сложением. Аналогичный результат имеет место и для комплексных чисел.

Кольцо R представляет коммутативную группу относительно сложения, замкнутую по отношению ко второй операции, называемой умножением ($\times$). Обе операции ассоциативны, и, кроме того, имеет место дистрибутивный закон:

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (b+c)a = ba + ca$$

для любых a, b и c из R.

Кольцо не обязательно содержит единичный элемент относительно ($\times$), а если даже и содержит, то не обязано иметь обратный элемент относительно ($\times$) для каждого элемента из R. В случае, когда имеется единичный элемент по отношению к ($\times$) и каждый элемент, отличный от 0 (нейтрального элемента по отношению к сложению), имеет обратный по отношению ($\times$), кольцо называется *полем* (см. сноску на стр. 39). Например, множество всех целых четных чисел образует кольцо, а множество всех действительных или комплексных чисел образует поле.

Групповым кольцом G_C группы G мы будем называть кольцо, состоящее из множества всех формальных конечных сумм $\sum_i r_i g_i$, где коэффициенты r_i — элементы кольца, в качестве которого мы здесь возьмем кольцо C комплексных чисел, а $g_i \in G$. Операции в кольце определяются равенствами:

$$\sum_i r_i g_i + \sum_i s_i g_i = \sum_i (r_i + s_i) g_i,$$

$$\sum_i r_i g_i \times \sum_i s_i g_i = \sum_i \sum_j r_i s_j g_i g_j.$$

Единичный элемент группы отождествляется с комплексным числом 1.

Две группы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие, которое сохраняется при групповой операции, т. е. если a_1 соответствует a_2, а b_1 соответствует b_2, то $a_1 b_1$ соответствует $a_2 b_2$.

В частности, группа, элементами которой являются матрицы (с комплексными числами) с обычным матричным умножением в качестве групповой операции, изоморфная группе G, называется *точным представлением* группы G. Точное представление любой группы в терминах бесконечных матриц может быть получено следующим путем. Предположим, что элементы группы могут быть перенумерованы, например $g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots$ Мы отнесем каждому элементу группы g_n матрицу $\gamma^{(n)}$, определяемую равенствами:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{ij}^{(n)} &= 1, \quad \text{если} \quad g_n g_i = g_j; \\ \gamma_{ij}^{(n)} &= 0, \quad \text{если} \quad g_n g_i \neq g_j. \end{aligned}\right\} \qquad (3.52)$$

Например, бесконечная циклическая группа $g_0 = 1$, $g_n = T^n$ с образующим элементом T может быть представлена множеством матриц, у которых все элементы, расположенные по линии, параллельной главной диагонали, равны 1. Эта идея может быть применена для получения точных представлений произвольной группы в терминах «обобщенных» (непрерывных) бесконечных матриц, когда множество «строк» и «столбцов» нельзя перенумеровать.

Таким образом, при упомянутом выше представлении в каждой строке и каждом столбце матрицы $\gamma^{(n)}$ имеется лишь единственный отличный от нуля элемент, который равен 1. Поэтому здесь не возникают трудности, связанные со сходимостью рядов, которые получаются при умножении двух матриц. Доказательство изоморфизма проводится непосредственно. Это представление называется *регулярным представлением* группы G.

Изоморфизм двух *колец* определяется так же, как и для групп, и аналогично определяется *точное представление кольца.*

Матрицы, определенные равенствами (3.52), очевидно, обладают тем свойством, что любое конечное множество их является линейно независимым по отношению к комплексным числам. Следовательно, конечные суммы матриц $\sum z_n \gamma^{(n)}$, где z_n — комплексные числа, образуют множество матриц, являющееся точным представлением группового кольца G_C с комплексными коэффициентами. Такое представление называется *регулярным представлением группового кольца* G_C.

(3.5, I) *Уравнение $AX - XA = I$ не имеет решения для матриц A и X, принадлежащих регулярному представлению какого-либо группового кольца.*

Действительно, предположим, что для некоторых матриц A и X, принадлежащих регулярному представлению группового кольца, имеет место равенство $AX - XA = I$. Матрицы A, X и I будут отождествляться с соответствующими элементами абстрактного группового кольца.

Пусть

$$A = \sum_i a_i g_i, \quad X = \sum_i x_i g_i,$$

где $g_i \in G$, а a_i и x_i — комплексные числа.

Тогда

$$AX = \sum_i \sum_k a_i x_k g_i g_k = \sum_j b_j g_j,$$

$$XA = \sum_i \sum_k a_i x_k g_k g_i = \sum_j c_j g_j.$$

Если теперь $AX - XA = I$, то по крайней мере одно из g_i равно 1, скажем, $g_j = g_i g_k = 1$. В этом случае, согласно условию (3.51), мы также имеем $g_k g_i = 1$. Дальше, коэффициент при $g_i g_k$ в XA такой же, что и коэффициент при $g_k g_i$ в AX, и каждый равен $a_i x_k$. Это справедливо для всех произведений $g_i g_k = g_j = 1$, так что коэффициент при 1 в $AX - XA$ необходимо равен нулю. Полученное противоречие доказывает теорему.

Примеры к главе 3

1. Доказать (**3.3**, III).
2. Доказать (**3.3**, IV).
3. Доказать (**3.3**, V).
4. Показать, что условия теоремы (**3.3**, V) выполняются, когда f_n, g_i, h_k и d_k определяются равенствами:

$$f_n = \frac{1}{n!}, \quad g_i = \frac{(-1)^{i+1}\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2i}}{\Gamma(i+\nu+1)}, \quad h_k = \frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)},$$

$$d_k = \frac{1}{2}\left[J_\nu(z) - \rho_\nu \pm \sqrt{(\rho_\nu - J_\nu(z))^2 - 4(-1)^k\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2k}}\right],$$

$$\operatorname{Re}(\nu) > -1,$$

где $\rho_\nu = \dfrac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$, а J_ν — функция Бесселя порядка ν.

5. $A = (a_{ij})$ определяется следующим образом:

$$a_{k,\,k+i} = 0 \quad (i > 1), \quad a_{k,\,k+1} = k, \quad a_{kk} = a_0,$$

$$a_{k,\,k-1} = a_1 \quad (k > 1), \quad a_{k,\,k-i} = a_i \quad (k > i).$$

В A заменим a_1 на $a_1 + 1$. Доказать, что эта новая матрица является решением уравнения $AX - XA = I$.

6. Показать, что если $a_{n-1,\,n} \neq 0$ ($n = 2, 3, 4, \ldots$), а все другие элементы $a_{ij} = 0$, то условия теоремы (**3.4**, II) выполняются и, следовательно, матрица (x_{ij}), где $x_{n-1,\,n} = a_{n-1,\,n}$, $x_{n+1,\,n} = \dfrac{n}{a_{n,\,n+1}}$, а все остальные $x_{ij} = 0$, является в этом случае решением уравнения $AX - XA = I$. Сравнить с аналогичным примером, приведенным непосредственно перед (**3.4**, II).

7. Доказать методом индукции, что если Ω удовлетворяет уравнению $AX - XA = I$ и A и Ω принадлежат к одному и тому же ассоциативному полю, то Ω также удовлетворяет уравнению $AX^n - X^nA = nX^{n-1}$ при любом целом положительном n.

8 *). Если X — нетривиальное решение уравнения $AX - XD = 0$ (§ 3.3) и E — какая-нибудь диагональная матрица, то показать, что XE является другим таким решением. Однако EX, вообще говоря, не является решением.

9. Показать, что результат, доказанный в (**3.3**, II) относительно обратной матрицы X^{-1}, где X — решение уравнения $AX - XD = 0$, может быть получен как предельный случай правила Крамера, т. е. как решение системы

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ni} y_{ik}^{(m)} = \delta_{nk} \qquad (n = 1, 2, \ldots, m)$$

*) Этот пример дан Вермсом. Ср. с примером 13, являющимся незначительным обобщением данного.

для $y_{ik}^{(m)}$ по правилу Крамера, где в полученном результате $m \to \infty$ (при фиксированных i и k). Проверить тем самым, что $\lim\limits_{m \to \infty} y_{ik}^{(m)} = x_{ik}^{-1}$, как это дано в (**3.3**, II) *).

10 **). Доказать, что когда $AX - XA = I$ имеет решение X_1, тогда (I) если A — симметричная матрица, то уравнение имеет кососимметричное решение, являющееся кососимметричной компонентой $\frac{1}{2}(X_1 - X_1')$ матрицы X_1, в то время как симметричная компонента $\frac{1}{2}(X_1 + X_1')$ матрицы X_1 коммутативна с A; (II) если A кососимметричная, то уравнение имеет симметричное решение, которое является симметричной компонентой матрицы X_1, в то время как кососимметричная компонента матрицы X_1 коммутативна с A; (III) если A — действительная матрица, то $X = \operatorname{Re}(X_1)$ является решением, а $Y = \operatorname{Im}(X_1)$ коммутативна с A; (IV) если A чисто мнимая, то $X = \operatorname{Im}(X_1)$ является решением, а $Y = \operatorname{Re}(X_1)$ коммутативна с A.

В случае (I) классом решений являются матрицы

$$X = \frac{1}{2}(X_1 - X_1') + \zeta B(X_1 + X_1'),$$

где B — любая матрица, коммутативная с A, если A, X_1, X_1' и B принадлежат ассоциативному полю $\mathcal{F}$.

В случае (II) классом решений являются матрицы $X = \frac{1}{2}(X_1 + X_1') + \zeta B(X_1 - X_1')$, где B коммутативна с A и матрицы A, X_1, X_1', B принадлежат ассоциативному полю $\mathcal{F}$; в обоих случаях множитель ζ — произвольная постоянная.

В случае (III), если X_1 — действительная матрица, то $X = X_1 + \zeta Y$ является решением тогда и только тогда, когда Y коммутативна с A.

В утверждениях примера термины «симметричная» и «кососимметричная» могут быть заменены соответственно на «эрмитова» и «косоэрмитова».

11. Показать, что в следующих случаях уравнение $AX - XA = I$ не имеет решения ***):

(I) n-я строка и n-й столбец матрицы A состоят исключительно из нулевых элементов;

(II) A — идемпотентная матрица и A и X принадлежат ассоциативному полю $\mathcal{F}$;

(III) A — ортогональная и симметричная (или кососимметричная) и A и X принадлежат полю $\mathcal{F}$;

(IV) A — нильпотентная матрица порядка $r > 1$ и A и X принадлежат полю $\mathcal{F}$.

Кроме того, показать, что:

(V) если A симметричная, то уравнение не имеет симметричного решения;

(VI) если A кососимметричная, то уравнение не имеет кососимметричного решения;

(VII) если A эрмитова или косоэрмитова, то уравнение не имеет решения, являющегося соответственно эрмитовой или косоэрмитовой матрицей.

---

*) Этот метод, как и следовало ожидать, является более длинным по сравнению с данным в (**3.3**, II), но он представляет интерес, показывая, что матрицы, обратные для бесконечных матриц, можно получить путем предельного перехода в правиле Крамера.

**) Примеры 10 и 11 принадлежат Мелвин-Мелвину.

***) Для двух первых случаев см. основной текст перед (**3.4**, II).

12 *). Предположим, что D, E, F, G, H, K, L — диагональные матрицы, U — общая матрица и существует ${}^{-1}L = L^{-1}$. Если:

(I) $UEU = UG$,

(II) $UFU = HU$,

(III) $FD = GF - E$,

(IV) $K(H - I) = I$ (I — единичная матрица),

(V) $A = UE - DKUF + D$,

(VI) $X = UFL - L$,

(VII) ${}^{-1}X = L^{-1} \cdot KUF - L^{-1}$,

то показать, что $AX - XD = 0$ и ${}^{-1}XX = I$.

Дальше, если

(VIII) $HUKF = UKHF$ и

(IX) $L^{-1} \cdot UKF = L^{-1} \cdot KUF$,

то показать, что $X \cdot {}^{-1}X = I$.

Доказать, что (**3.3**, III), (**3.3**, IV) и (**3.3**, V) являются частными случаями сформулированной в этой задаче теоремы.

13. Пусть:

(I) A, X и D, где D — диагональная матрица, удовлетворяют уравнению $AX - XD = 0$;

(II) L — матрица, коммутативная с D **);

(III) AXL, XDL, XLD ассоциативны;

(IV) $Y = XL$.

Показать, что $AY - YD = 0$.

14. Пусть:

(I) X — матрица, имеющая л. с. обратную ${}^{-1}X$;

(II) B — общая матрица и D — диагональная матрица;

(III) $XD \cdot {}^{-1}XX$ и $BX \cdot {}^{-1}XX$ ассоциативны;

(IV) A определяется равенством $A = XD \cdot {}^{-1}X + B(X \cdot {}^{-1}X - I)$.

Показать, что $AX - XD = 0$ (применить (**2.2**, II) и пример 17 к гл. 2).

15. Предположим, что:

(I) D — диагональная матрица;

(II) E, F, G, H — матрицы (относительно простые) и U — общая матрица;

(III) $UEU = UG$;

(IV) $UFU = HU$;

(V) $FD = GF - E$;

(VI) $K(H - I) = I$;

(VII) $KUFUF (= KHUF)$, KUF и $UEUF (= UGF)$ ассоциативны;

(VIII) A определяется равенством $A = UE - DKUF + D$;

(IX) X определяется равенством $X = UF - I$;

(X) ${}^{-1}X = KUF - I$ по определению.

Доказать, что ${}^{-1}XX = I$ и что $AX - XD = 0$. Если, кроме того, $UFDKUF$, $UEKUF$ и $UEUFKUF (= UGFKUF)$ ассоциативны, то показать, что

$$A = XD \cdot {}^{-1}X + UE(I - X \cdot {}^{-1}X).$$

---

*) Примеры 12—15 даны Роджерсом.

) Если $D \equiv d_n$ удовлетворяет условию $d_n \neq d_k$, когда $n \neq k$, то L должна быть диагональной; см. (5.3**, I).

ГЛАВА 4

РАСХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

4.1. Основные теоремы Кожима—Шура и Сильвермана—Теплица

В настоящей главе мы рассмотрим одно из наиболее важных приложений бесконечных матриц, приводящее к обобщению понятия предела с применением его к расходящимся последовательностям и рядам.

Пусть $s_n(x)$ — частичная сумма ряда, который сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Рассмотрим новую последовательность

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k(x), \tag{4.11}$$

т. е. последовательность, полученную в результате преобразования последовательности $\{s_n(x)\}$ матрицей $A = (a_{nk})$. *Мы будем предполагать, что при фиксированном* x *все ряды* (4.11) *сходятся для* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *или во всяком случае для любого* $n > n_0$. Тогда может случиться, что $\sigma_n(x)$ стремится к пределу, когда $n \to \infty$ для любого или некоторых значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > 1$, т. е. для одного или некоторых значений x, для которых $\{s_n(x)\}$ не имеет предела. Если такой случай имеет место, то мы получаем искусственный метод, позволяющий приписывать расходящейся последовательности $\{s_n(x)\}$ определенный предел. Обычно встречающиеся методы обладают также свойством *регулярности*, т. е. если мы возьмем значение x, удовлетворяющее неравенству $|x| < 1$, так что $s_n(x)$ стремится к пределу $s(x)$ при $n \to \infty$, то $\sigma_n(x)$ должна сходиться к тому же самому значению $s(x)$ или же, если сходится к другому значению, должно быть известно соотношение между $s(x)$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n(x)$.

Некоторые примеры таких матриц и их индивидуальные свойства были известны раньше, чем были открыты свойства класса матриц, удовлетворяющих этим требованиям. В частности, это относится к средним арифметическим, средним Чезаро и матрицам Бореля (см. § 4.3).

Заменяя $\{s_n(x)\}$ общей последовательностью $\{z_n\}$, *мы предположим, что в выражении*

$$z'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k \tag{4.12}$$

все ряды справа при $n > n_0$ сходятся. В этом случае мы будем говорить, что к последовательности $\{z_n\}$ *применимо* преобразование A, а последовательность $\{z'_n\}$ будем называть *A-преобразованием* последовательности $\{z_n\}$.

Если (I) $z'_n \to z$ всякий раз, когда $z_n \to z$, и (II) преобразованная последовательность $\{z'_n\}$ сходится для некоторой расходящейся последовательности $\{z_n\}$, то мы будем приписывать этой расходящейся последовательности $\{z_n\}$ предел последовательности $\{z'_n\}$ в качестве ее *обобщенного предела* и называть его *пределом* $\{z_n\}$, *полученным при помощи A-преобразования*, или, более кратко, *A-пределом* (A-$\lim z_n$) *).

Приведенные выше рассуждения сразу наводят на мысль поставить две задачи:

(I) определить множество K таких матриц, чтобы при соответствующих преобразованиях сходимость последовательностей не нарушалась;

(II) определить такой подкласс матриц класса K, который не изменяет величину предела всякой сходящейся последовательности.

Решение обеих задач будет дано теоремами (**4.1**, I) и (**4.1**, II), которые имеют весьма важное значение. Теорема (**4.1**, I) была первоначально доказана Кожима [1] для нижних треугольных матриц и затем обобщена Шуром [1] на общие бесконечные матрицы. Достаточность условий теоремы (**4.1**, II) была первоначально установлена для нижних треугольных матриц Сильверманом [1]. Необходимость и достаточность условий были затем доказаны для матриц с конечными строками Теплицем [1], и наконец, во всей полноте для общих бесконечных матриц теорема была опубликована Шуром [1]. Однако, как мы увидим, теорема (**4.1**, II), несмотря на ее важность, является только частным случаем теоремы (**4.1**, I).

Обе теоремы были несколько обобщены Динсом ([1], 385, 399) на полунепрерывные матрицы $a_{\omega, k} \equiv a_k(\omega)$, где ω — непрерывная действительная положительная переменная. (Из ранней истории суммирования расходящихся последовательностей см. Смэйл [1], [3]; Гурвиц [1]; Форд [1], [2]; Сильверман [1]; Кармайкл [1]; Мур [1], [2]; обобщения на матрицы $a_k(\omega)$ вместо a_{nk} см. Тамаркин [1]; Агнью [9], 726—727; Роджерс [1], [2].)

---

*) В этом случае также говорят, что последовательность $\{z_n\}$ суммируется матрицей A. (*Прим. перев.*)

(4.1, I) *Теорема Кожима — Шура. Для того, чтобы*

$$z'(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\omega)\,z_k \qquad (\omega>\omega_0)$$

стремилась к конечному пределу при $\omega\to\infty$ *всякий раз, когда* $\{z_k\}$ *сходится, необходимо и достаточно, чтобы*

(α) $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(\omega)|\leqslant M$ *независимо от* $\omega>\omega_0$;

(β) $\lim_{\omega\to\infty}a_k(\omega)=\alpha_k$ *для любого фиксированного* k;

(γ) $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\omega)=A(\omega)\to\alpha$ *при* $\omega\to\infty$.

Кроме того, если при этих условиях $z_k\to z$, *то*

(δ) $$\lim_{\omega\to\infty}z'(\omega)=\alpha z+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(z_k-z).$$

(I) Докажем сначала достаточность условий. Согласно условию (α) $\sum_{k=1}^{p}|a_k(\omega)|\leqslant M$ для любого $\omega>\omega_0$; следовательно, по условию (β) $\sum_{k=1}^{p}|\alpha_k|\leqslant M$, так что ряд $\sum\alpha_k$ абсолютно сходится.

Если $z_k\to z$, мы можем положить $z_k=z+\varepsilon_k$, где $\varepsilon_k\to 0$. Таким образом, для всякого $\varepsilon>0$ найдется число p такое, что $|\varepsilon_k|<\frac{\varepsilon}{3M}$ для $k>p$, и число q такое, что

$$\Big|\sum_{k=1}^{p}\{a_k(\omega)-\alpha_k\}\,\varepsilon_k\Big|<\frac{1}{3}\varepsilon \text{ для } \omega>q.$$

Следовательно,

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k(\omega)-\alpha_k\}\,\varepsilon_k\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\Big|\sum_{k=1}^{p}\{a_k(\omega)-\alpha_k\}\,\varepsilon_k\Big|+\sum_{k=p+1}^{\infty}\{|a_k(\omega)|+|\alpha_k|\}\,|\varepsilon_k|<$$
$$<\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{2M}{3M}\varepsilon=\varepsilon \text{ для } \omega>q.$$

Это доказывает, что

$$\lim_{\omega\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\omega)\,\varepsilon_k=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\,\varepsilon_k. \tag{4.13}$$

Мы имеем:

$$z'(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) z_k = A(\omega) z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) \varepsilon_k;$$

следовательно, из условия (γ) и (4.13) получаем:

$$\lim_{\omega \to \infty} z'(\omega) = \alpha z + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varepsilon_k = \alpha z + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (z_k - z),$$

а это есть утверждение (δ). Достаточность условий доказана.

(II) Докажем, что условия теоремы необходимы. Возьмем последовательность $z_k = 0\,(k \neq p)$, $z_p = 1$; очевидно, $z_k \to 0$ и $z'(\omega) = a_p(\omega)$. Таким образом, чтобы $z'(\omega)$ могло стремиться к пределу, когда $\omega \to \infty$, необходимо, чтобы выполнялось условие (β).

Возьмем теперь последовательность $z_k = 1$ для всех k. Тогда $z_k \to 1$, $z'(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) = A(\omega)$. Следовательно, $A(\omega)$ должно стремиться к пределу при $\omega \to \infty$, т. е. условие (γ) необходимо.

Остается доказать необходимость *) условия (α) (см. также § 10.9). Отметим сначала, что если ряд $\sum |u_k|$ расходится, то существует последовательность $\{z_k\}$, $z_k \to 0$, такая, что $\left|\sum_{k=1}^{n} u_k z_k\right| \to \infty$ при $n \to \infty$. Действительно, записав $u_k = |u_k| e^{i\varphi_k}$ и выбрав $r > 1$, мы определим p_0 из условия $\sum_{k=1}^{p_0} |u_k| > r$, затем определим p_1 из условия $\sum_{k=p_0+1}^{p_1} |u_k| > r^2$, затем p_2 из условия $\sum_{k=p_1+1}^{p_2} |u_k| > r^3$ и т. д.

Положим $z_k = e^{-i\varphi_k}$ для $1 \leqslant k \leqslant p_0$, $z_k = \frac{e^{-i\varphi_k}}{r}$ для $p_0 < k \leqslant p_1$, $z_k = \frac{e^{-i\varphi_k}}{r^2}$ для $p_1 < k \leqslant p_2$ и т. д. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k z_k = \sum_{k=1}^{p_0} |u_k| + \frac{1}{r} \sum_{k=p_0+1}^{p_1} |u_k| + \frac{1}{r^2} \sum_{k=p_1+1}^{p_2} |u_k| + \ldots >$$
$$> r + r + r + \ldots = \infty,$$

что и доказывает упомянутое выше утверждение.

Отсюда следует, что ряд $A_1(\omega) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\omega)|$ должен сходиться для всякого фиксированного $\omega > \omega_0$, в противном случае найдется

---

*) Доказательство необходимости **условия (α) является главной частью** теоремы (4.1, I). (*Прим. ред.*)

последовательность $\{z_k\}$, $z_k \to 0$, такая, что $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(\omega) z_k\right| \to \infty$ при $n \to \infty$, что противоречит предположению, что A применимо для любой сходящейся последовательности. Предположим теперь, что условие (α) не выполняется. Тогда $\overline{\lim\limits_{\omega \to \infty}} A_1(\omega) = \infty$, и если мы положим $a_k(\omega) = b_k(\omega) + ic_k(\omega)$, где $b_k(\omega)$ и $c_k(\omega)$ действительные, то найдется последовательность $\{v_n\}$, для которой одна из сумм

$$\sum_k |b_k(v_n)|, \quad \sum_k |c_k(v_n)|$$

или обе стремятся к ∞. Обозначим $b_k(v_n) \equiv s_{nk}$ и предположим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |s_{nk}| \equiv S_n \to \infty. \tag{4.14}$$

Построим действительную последовательность $\{x_k\}$, $x_k \to 0$, $|x_k| \leqslant 1$ для любого k, обладающую тем свойством, что $x'_n = \sum_{k=1}^{\infty} s_{nk} x_k$ имеет подпоследовательность, стремящуюся к ∞. Это и будет доказывать необходимость условия (α).

По условию (β), при фиксированном p последовательность

$$\sum_{k=1}^{p} |s_{nk}| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

имеет наибольший член C_p, зависящий от p. Условие (4.14) показывает, что можно подобрать n и q, скажем n_1 и q_1, такие, что

$$\sum_{k=1}^{q_1} |s_{n_1, k}| > r^2$$

для фиксированного $r > 1$.

Зафиксировав n_1, подберем теперь по заданному $\varepsilon > 0$ число $p_1 \geqslant q_1$ такое, что

$$\sum_{k=p_1+1}^{\infty} |s_{n_1, k}| < \varepsilon. \tag{4.15}$$

Это возможно, так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |s_{nk}|$ сходится. Вводя в рассмотрение функцию

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

и полагая $x_k = \frac{1}{r} \operatorname{sgn}(s_{n_1, k})$ для $1 \leqslant k \leqslant p_1$, мы получим:

$$x'_{n_1} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{p_1} |s_{n_1, k}| + \sum_{k=p_1+1}^{\infty} s_{n_1, k} x_k,$$

а так как $|x_k| \leqslant 1$ для любого k, то из (4.15) следует:

$$|x'_{n_1}| > r - \varepsilon.$$

Определим теперь числа $n_2 > n_1$ и $q_2 > p_1$ так, чтобы

$$\frac{1}{r^2} \sum_{k=p_1+1}^{q_2} |s_{n_2, k}| > C_{p_1} + r^2, \tag{4.16}$$

и, фиксируя n_2, найдем $p_2 > q_2$ такое, что

$$\sum_{k=p_2+1}^{\infty} |s_{n_2, k}| \leqslant \varepsilon. \tag{4.17}$$

Тогда, положив $x_k = \frac{1}{r^2} \operatorname{sgn}(s_{n_2, k})$ для $p_1 < k \leqslant p_2$, мы будем иметь:

$$x'_{n_2} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{p_1} s_{n_2, k} \operatorname{sgn}(s_{n_1, k}) + \frac{1}{r^2} \sum_{k=p_1+1}^{p_2} |s_{n_2, k}| + \sum_{k=p_2+1}^{\infty} s_{n_2, k} x_k.$$

Так как $|x_k| \leqslant 1$ для любого k, то из условий (4.16) и (4.17) получим:

$$|x'_{n_2}| > r^2 - \varepsilon.$$

Продолжая таким путем построения, мы определим последовательность $\{x_k\}$, $x_k \to 0$, такую, что $x'_n \to \infty$ по некоторой подпоследовательности значений n, т. е. получим противоречие. Таким образом, условие (α) необходимо. Теорема доказана.

Если $z = 0$, *то условие* (γ) *излишне*. Это непосредственно видно из проведенного доказательства.

В случае, когда действительная положительная переменная (ω) заменяется целым положительным n, теорема формулируется следующим образом:

Для того чтобы

$$z'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k \tag{4.18}$$

стремилась к конечному пределу при $n \to \infty$ всякий раз, когда $\{z_k\}$ сходится, необходимо и достаточно, чтобы

$(\alpha)'$ $$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant M \quad \text{для любого } n > n_0;$$

$(\beta)'$ $$\lim_{n \to \infty} a_{nk} = \alpha_k \quad \text{для любого фиксированного } k;$$

$(\gamma)'$ $$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = A_n \to \alpha \quad \text{при } n \to \infty.$$

Кроме того, при этих условиях, если $z_k \to z$, то

$(\delta)'$ $$z' = \lim_{n \to \infty} z'_n = \alpha z + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (z_k - z).$$

Как уже говорилось в § 1.2, матрица, удовлетворяющая условиям $(\alpha)'$ — $(\gamma)'$, называется *K-матрицей*, а α_k и α — ее *характеристическими числами*; подобная терминология употребляется и для матриц, удовлетворяющих условиям (α) — (γ). Матрица, удовлетворяющая условиям $(\alpha)'$ или (α), называется K_r-матрицей (см. конец § 2.3).

Как было уточнено Агнью ([9], 726—727), условие $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\omega)| \leqslant M$ *независимо от* $\omega > 0$ (вместо $\omega > \omega_0$ в условии (α) теоремы (**4.1**, I)) *не является необходимым для справедливости* (**4.1**, I). Положим

$$a_0(\omega) = \frac{1}{\omega}, \quad a_{[\omega]}(\omega) = 1, \quad a_k(\omega) = 0 \ (k \neq 0, \quad k \neq [\omega]),$$

где $[\omega]$ — целая часть ω; тогда

$$z'(\omega) = \frac{1}{\omega} z_0 + z_{[\omega]} \quad (\omega > 0), \quad z'(\omega) = z_0 \quad (\omega = 0)$$

являются T-преобразованием *), для которого упомянутое выше условие (т. е. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\omega)| < M$ независимо от $\omega > 0$) не выполняется. Однако всегда существует положительная константа ω_0, зависящая от матрицы $(a_k(\omega))$, так что условие (α) является необходимым для справедливости (**4.1**, I). Эта трудность не возникает в случае условия $(\alpha)'$, где ω заменено целым положительным n. Агнью отмечает (Агнью [9], 726), что два условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\omega)| < \infty \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{\omega \to \infty}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\omega)| = M < \infty \ (\omega > 0)$$

являются необходимыми (вместо условия (α) в (**4.1**, I) с $\omega > \omega_0$).

*) О T-преобразованиях см. конец этого параграфа. Отметим, что здесь включается член с $k = 0$ (см. конец § 4.3 (II)).

(**4.1**, II) *Теорема Сильвермана — Теплица. Для того чтобы*

$$z'(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega)\,z_k$$

стремилась к конечному пределу z при $\omega\to\infty$ всякий раз, когда $z_k\to z$, необходимо и достаточно, чтобы:

(а) $$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(\omega)|\leqslant M \text{ для любого } \omega>\omega_0;$$

(б) $$\lim_{\omega\to\infty} a_k(\omega)=0 \text{ для любого фиксированного } k;$$

(в) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega)=A(\omega)\to 1 \text{ при } \omega\to\infty.$$

Полагая в (**4.1**, I) $\alpha_k=0$ и $\alpha=1$, мы сразу видим, что условия (а)—(в) являются достаточными. Необходимость условий (а) и (в) доказывается точно таким же путем, как и необходимость условий (α) и (γ) в (**4.1**, I). Если $\alpha_k\neq 0$ для какого-либо частного значения k, то для последовательности $z_n=0$ ($n\neq k$), $z_k=1$, которая стремится к нулю, имеем, согласно утверждению (δ) теоремы (**4.1**, I), $\lim z'(\omega)=\alpha_k\neq 0$, так что $z'(\omega)$ не стремится к нулю. Следовательно, условие (б) является необходимым. Теорема доказана.

Если $z=0$, то условие (в) *излишне.*

В том случае, когда ω заменено целым положительным числом n, теорема (**4.1**, II) формулируется следующим образом:

Для того чтобы $z'_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}z_k$ стремилась к z при $n\to\infty$ всякий раз, когда $z_k\to z$, необходимо и достаточно, чтобы:

(а)′ $$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\leqslant M \text{ для любого } n>n_0;$$

(б)′ $$\lim_{n\to\infty} a_{nk}=0 \text{ для любого фиксированного } k;$$

(в)′ $$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\equiv A_n\to 1 \text{ при } n\to\infty.$$

Как было сказано в § 1.2, матрица, удовлетворяющая условиям (а)′—(в)′ или (а)—(в), называется *T-матрицей.*

Преобразование последовательности при помощи T-матрицы часто называют *регулярным преобразованием* (особенно это принято американскими авторами). Мы будем называть его просто *T-преобразованием* *).

---

*) Термин «регулярный» иногда употребляется в другом смысле. См. сноску на стр. 137.

4.2. Аналоги для рядов; β- и γ-матрицы

В этом параграфе мы рассмотрим аналоги теорем (**4.1**, I) и (**4.1**, II) для рядов.

Возьмем преобразование

$$\gamma(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k$$

ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$; здесь также требуется, чтобы преобразование не нарушало сходимость и его сумма оставалась без изменения или же должно быть известным соотношение между суммами первоначального и преобразованного рядов.

Мы будем предполагать, что $\gamma(\omega)$ *существует для любого* $\omega > \omega_0$.

Теорема (**4.2**, I), доказанная Бозанкет (см. Динс [1], 394), является аналогом (**4.1**, I); ее доказательство основано на леммах Абеля и Адамара. Приведенное здесь доказательство основано на лемме Хенстока, которому также принадлежит модификация доказательства необходимости условия A теоремы (**4.2**, I).

Теорема (**4.2**, II) является аналогом теоремы (**4.1**, II). Достаточность условий (**4.2**, II) первоначально была доказана для нижних треугольных матриц Бором [1] (см. Агнью [16], 251—252) и затем для общих матриц Кармайклом [1] и Перроном [1]. Необходимость условий, а также полное доказательство теоремы было впервые опубликовано Ханом [2] и Такенака [1], и независимо от них доказательство необходимости условий было дано Бозанкет (см. Динс [1], 396) *).

(**4.2**, I) *Для того чтобы*

$$\gamma(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k \quad (\omega > \omega_0)$$

стремилась к конечному пределу при $\omega \to \infty$ *всякий раз, когда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = s$ *сходится, необходимо и достаточно, чтобы*:

(А) $\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} |g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)| \leqslant M$ *для любого* $\omega > \omega_0$;

(Б) $\quad \lim\limits_{\omega \to \infty} g_k(\omega) = \beta_k$ *для любого фиксированного* k;

---

*) В связи с теоремами (**4.1**, I), (**4.1**, II), (**4.2**, I), (**4.2**, II) интересно сравнить даты различных работ, упомянутых в тексте.

кроме того, при этих условиях

$$\text{(В)}\qquad \lim_{\omega\to\infty} \gamma(\omega) = \beta_1 s + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \beta_{k+1})(s_k - s),$$

где $s_k = \sum_{r=1}^{k} c_r$, *и существование одной из частей равенства* (В) *влечет существование другой.*

Лемма. *Если* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k$ *сходится для каждого фиксированного* $\omega > \omega_0$ *при любом сходящемся ряде* $\sum c_k$, *то* $|g_k(\omega)|$ *ограничены при* $k\to\infty$ *для каждого фиксированного* $\omega > \omega_0$.

Предположим, что это не так. Тогда существует последовательность $\{k_r\}$ такая, что $|g_{k_r}(\omega)| > r^2$ $(r = 1, 2, \ldots)$ для некоторого фиксированного $\omega > \omega_0$. Пусть

$$c_k = 0 \qquad (k \neq k_r), \quad c_{k_r} = \frac{\operatorname{sgn}\{g_{k_r}(\omega)\}}{r^2} \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

где для комплексного *) числа z

$$\operatorname{sgn}(z) = \frac{|z|}{z} \qquad (z \neq 0), \quad \operatorname{sgn}(0) = 0.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|g_{k_r}(\omega)|}{r^2} = \infty.$$

Мы получили противоречие, что и доказывает лемму.

Доказательство теоремы. Докажем сначала достаточность условий **).

Из леммы, условия (А) и из $s_k \to s$ следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k = s g_1(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \{g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\}(s_k - s) \tag{4.21}$$

для любого фиксированного $\omega > \omega_0$.

---

*) Если z — действительное число, то это обозначение совпадает с обозначением $\operatorname{sgn}(x)$, данным на стр. 76.

**) Полезно заметить, что из условий (А) и (Б) вытекает, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k - \beta_{k+1}| \leqslant M$. (*Прим. ред.*)

Выберем число p таким, что $|s_k - s| < \frac{\varepsilon}{M}$ для $k > p$ $(\varepsilon > 0)$, и запишем (4.21) в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k = s g_1(\omega) +$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{p} + \sum_{k=p+1}^{\infty}\right) \{g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\}(s_k - s) = s g_1(\omega) + \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Тогда по условию (Б)

$$\Sigma_1 \to \sum_{k=1}^{p} (\beta_k - \beta_{k+1})(s_k - s),$$

когда $\omega \to \infty$, а по условию (А)

$$|\Sigma_2| < \varepsilon \text{ для любого } \omega > \omega_0,$$

так как

$$|s_k - s| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ для } k > p.$$

Согласно условию (Б) $\lim\limits_{\omega \to \infty} g_1(\omega) = \beta_1$, и таким образом, мы получаем:

$$\lim_{\omega \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k = \beta_1 s + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \beta_{k+1})(s_k - s).$$

Достаточность условий доказана.

Докажем теперь необходимость. Предположим, что $\gamma(\omega)$ стремится к пределу, как только ряд $\sum c_k$ сходится. Тогда, положив $c_k = 0$ $(k \neq q)$, $c_q = 1$, мы получим $\gamma(\omega) = g_q(\omega)$; следовательно, условие (Б) необходимо.

Далее мы имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(\omega) c_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} g_k(\omega)(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} g_k(\omega)\{(s_k - s) - (s_{k-1} - s)\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \{g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\}(s_k - s) + s g_1(\omega) + (s_n - s) g_n(\omega)\,^{*)}.$$

Но, согласно лемме, $|g_n(\omega)| \leqslant G$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного $\omega > \omega_0$; таким образом,

$$|(s_n - s) g_n(\omega)| \leqslant G\,|s_n - s| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

*) Здесь предполагается, что $s = 0$ (*Прим. ред.*)

По предположению, $\sum_{k=1}^{n} g_k(\omega)\, c_k$ стремится к пределу $\gamma(\omega)$ при $n \to \infty$, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \{g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\}(s_k - s) + s g_1(\omega) \to \gamma(\omega) \quad \text{при } n \to \infty \tag{4.22}$$

для всех $\{s_k\}$ таких, что $s_k \to s$, и для любого фиксированного $\omega > \omega_0$.

Кроме того, по предположению:

$$\lim_{\omega \to \infty} \gamma(\omega) \text{ существует.} \tag{4.23}$$

Следовательно, из (**4.1**, I) и условий (4.22) и (4.23) вытекает, что условие (А) необходимо, так как $s g_1(\omega) \to s\beta_1$ при $\omega \to \infty$ по условию (Б) *).

Теорема доказана.

(**4.2**, II) *Для того чтобы*

$$\gamma(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega)\, c_k \qquad (\omega > \omega_0)$$

сходилась к конечному пределу s *при* $\omega \to \infty$ *всякий раз, когда* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = s$, *необходимо и достаточно, чтобы*:

(А)′ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)| \leqslant M$ *для любого* $\omega > \omega_0$;

(Б)′ $\quad \lim_{\omega \to \infty} g_k(\omega) = 1$ *для любого фиксированного* k.

Согласно (**4.2**, I) эти условия являются достаточными. Они также являются и необходимыми. Действительно, если $\beta_k - \beta_{k+1} \neq 0$ для какого-либо значения k, то числа

$$c_i = 0 \quad (i < k), \quad c_k = e, \; c_{k+1} = -e, \quad c_{k+i} = 0 \quad (i > 1)$$

образуют ряд, сумма которого 0, но

$$\lim_{\omega \to \infty} \gamma(\omega) = e(\beta_k - \beta_{k+1}) \neq 0;$$

следовательно, необходимо, чтобы $\beta_k - \beta_{k+1} = 0$ для любого k. Поэтому, по условию (В) теоремы (**4.2**, I), мы имеем $\lim_{\omega \to \infty} \gamma(\omega) = \beta_1 s$, следовательно, необходимо $\beta_1 = 1$ и, значит, $\beta_k = 1$ для любого k.

*) Теорема Кожима — Шура (**4.1**, I) является, таким образом, основной из теорем, которые служат отправным пунктом при суммировании последовательностей и рядов.

Таким образом, условие (Б)′ является необходимым *). Доказательство необходимости условия (А)′ $\equiv$ (А) проводится в точности так же, как и в (**4.2**, I). Отметим, что условие (А)′ $\equiv$ (А) удовлетворяется, если $0 \leqslant g_{k+1}(\omega) \leqslant g_k(\omega) \leqslant 1$ (см. Перрон [1]).

Если ω принимает только целые значения n, мы положим $g_k(n) = g_{nk}$, и (**4.2**, I) и (**4.2**, II) остаются справедливыми и в этом случае.

Матрицу $(g_k(\omega))$, удовлетворяющую условиям (А) и (Б), назовем β-*матрицей*; матрицу $(g_k(\omega))$, удовлетворяющую условиям (А)′ и (Б)′, назовем γ-*матрицей*.

4.3. Примеры T- и γ-матриц

(I) *Средние арифметические*. Нижняя треугольная матрица средних арифметических представляет собой матрицу с элементами

$$a_{nk} = \frac{1}{n} \quad (k \leqslant n), \quad a_{nk} = 0 \quad (k > n) \text{ (см. § 2.1).}$$

Очевидно, что условия теоремы (**4.1**, II) выполняются, если положить $\omega = n$.

(II) *Средние Чезаро*. Нижняя треугольная матрица средних Чезаро любого действительного порядка r $(r \neq -1, -2, -3, \ldots)$ определяется следующим образом:

$$a_{nk} = \frac{A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r} \quad (0 \leqslant k \leqslant n), \quad a_{nk} = 0 \quad (k > n),$$

где

$$A_n^r = \frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+n)}{n!} \quad (n \geqslant 1), \quad A_0^r = 1.$$

Мы имеем:

$$(1-z)^{-(p+1)}(1-z)^{-(r+1)} \equiv (1-z)^{-(p+r+2)}, \tag{4.31}$$

и если $|z| < 1$, то

$$(1-z)^{-(r+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+n)}{n!} z^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n^r z^n.$$

Приравнивая коэффициенты при z^n в (4.31), получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^p A_k^r = A_n^{p+r+1}.$$

*) Необходимость условия (Б)′ легко выводится без ссылки на (**4.2**, I). В самом деле, взяв ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = 1 = s$, где $c_i = 0$ при $i \neq k$ и $c_k = 1$, мы получим, что $\gamma(\omega) = c_k g_k(\omega) = g_k(\omega)$ обязательно стремится к $s = 1$, т. е. необходимо $\beta_k = 1$ при каждом k. (*Прим. ред.*)

Так как $A_k^0 = 1$, то, полагая $r = 0$ и заменяя p через $r - 1$, при $r \geqslant 0$ будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r} = 1. \tag{4.32}$$

Равенство $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{nk} = 1$ остается верным и для $-1 < r < 0$, но $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_{nk}| \neq 1$; более того, условие (a)′ теоремы (**4.1**, II) не выполняется, так что (a_{nk}) не является T-матрицей (и даже K_r-матрицей), когда $-1 < r < 0$.

Кроме того,

$$\frac{A_n^r}{n^r} = \frac{\Gamma(r+n+1)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(n+1)\,n^r} \sim \frac{e^{-r-n-1}(r+n+1)^{r+n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(r+1)\,e^{-n-1}(n+1)^{n+\frac{1}{2}}\,n^r}$$

согласно асимптотической формуле для $\Gamma(x)$ (см., например, Динс [1], 140); таким образом,

$$\frac{A_n^r}{n^r} \sim \frac{e^{-r}}{\Gamma(r+1)} \cdot \frac{(n+1)^{r+n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{r}{n+1}\right)^{r+n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}\,n^r},$$

т. е.

$$\frac{A_n^r}{n^r} \sim \frac{1}{\Gamma(r+1)},$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n-k}^{r-1}}{A_n^r} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-k)^{r-1}}{\Gamma(r)} \cdot \frac{\Gamma(r+1)}{n^r} = 0 \tag{4.33}$$

для любого фиксированного k.

Из (4.32) и (4.33) следует, что условия теоремы (**4.1**, II) удовлетворяются, если положить $\omega = n$, при условии, что $r \geqslant 0$, так что средние Чезаро любого порядка $r \geqslant 0$ являются T-матрицами.

Заметим, что матрица средних Чезаро порядка r может быть также записана в виде

$$a_{nk} = \frac{r \cdot n!\,\Gamma(r+n-k)}{(n-k)!\,\Gamma(r+n+1)} \quad (0 \leqslant k \leqslant n), \quad a_{nk} = 0 \quad (k > n).$$

Во многих примерах (включая средние Чезаро) k изменяется от 0 вместо 1, так что в этом случае дополнительно имеются элементы $a_{0,0}, a_{1,0}, a_{2,0}, \ldots$

(III) *Матрица Бореля.* Общей (или «квадратной») матрицей Бореля называется матрица, элементы которой определяются равенством

$$a_k(\omega)=\frac{e\quad\omega^k}{k!}\cdot$$

Здесь

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k(\omega)|=e^{-\omega}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega^k}{k!}=1$$

для любого $\omega>0$ *) и

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{e^{-\omega}\omega^k}{k!}=0$$

для любого фиксированного k.

Таким образом, матрица Бореля является T-матрицей. В частности, мы можем взять $\omega=n$, где n целое положительное.

Как уже говорилось в предисловии, изучение частных свойств отдельных матриц не входит в задачу настоящей книги; по этим вопросам, особенно по матрицам средних арифметических, матрицам Чезаро и матрицам Бореля, имеется обширная и легко доступная литература (см., например, Гобсон [1], т. II, 40—43, 65—98, 384—388, 557—573 и т. д.; Когбетлянц [1]; Борель [1]). Мы только отметим как хорошо известный факт, что упомянутые выше три T-матрицы применяются к преобразованию некоторых важных типов расходящихся последовательностей в сходящиеся. Так, средние арифметические и средние Чезаро применяются к последовательностям частичных сумм расходящихся рядов Фурье **) (и других рядов) (см., например, Гобсон [1], т. II, 557—573 и далее), матрицы Бореля применяются к последовательностям частичных сумм рядов Тэйлора внутри многоугольника суммируемости, т. е. внутри области, которая включает круг сходимости ряда и в общем случае больше его (см. Борель [1], гл. IV).

(IV) *Матрицы Миттаг-Леффлера****). Возьмем *целую функцию* от ω:

$$E(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty} g(k)\,\omega^k,$$

*) Мы можем здесь взять $\omega_0=0$.

**) Методы суммирования применяются не только к *расходящимся* рядам Фурье, но и к рядам Фурье, о сходимости или расходимости которых мы ничего не можем сказать. Так, например, до сих пор неизвестно, существует ли непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится на множестве положительной меры. Но мы можем утверждать, что ряды Фурье от непрерывных функций всюду суммируются методом средних арифметических. (*Прим. ред.*)

***) См. § 2.5.

где $g(k) \geqslant 0$ для любого k, и рассмотрим матрицу

$$a_k(\omega) = \frac{g(k+1)\,\omega^{k+1}}{E(\omega)}.$$

Условия (а) и (в) теоремы (**4.1**, II), очевидно, выполняются *). Условие (б) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{\omega^{k+1}}{E(\omega)} = 0.$$

Последнее условие, очевидно, выполняется, если в дополнение к тому, что $g(k) \geqslant 0$ для всякого k, предположить, что $g(k) > 0$ для бесконечного множества значений k.

Эти матрицы играют важную роль в проблеме «эффективности» матриц по отношению к рядам Тэйлора (см. гл. 8, а также Миттаг-Леффлер [1]).

Если $g(k) = \frac{1}{k!}$, то $E(\omega) = e^{\omega}$ и матрица Миттаг-Леффлера обращается в матрицу Бореля.

Если $g(k) = 0$, когда $k \neq mr$, и $g(k) = \frac{1}{m!}$, когда $k = mr$ (r целое положительное, $m = 1, 2, \ldots$), то $E(\omega) = e^{\omega^r}$ и получающаяся при этом матрица известна как *обобщенная экспоненциальная матрица Бореля*. Несколько других специальных случаев будет рассмотрено в гл. 8.

(V) *Функциональная матрица Бесселя*. Эта матрица имеет вид $a_k(\omega) = 2J^2_{k+\nu}(\omega)$, где ν — какое-либо действительное число; применяя обычные формулы из теории функций Бесселя, можно показать, что она является T-матрицей (см. Кук [4] и [5]).

Последовательность, сходящаяся после преобразования посредством такой матрицы, называется (J, ν)-суммируемой (см. примеры 15—17 к гл. 4).

(VI) Экспоненциальный метод Бореля может применяться также к преобразованию *рядов*. Рассмотрим выражение

$$g_k(\omega) = \frac{1}{k!} \int_0^{\omega} e^{-t} t^k \, dt.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$g_k(\omega) = \frac{e^{-\omega}\omega^{k+1}}{(k+1)!} + g_{k+1}(\omega),$$

*) Здесь нужно предполагать, что хотя бы для одного $k_0 > 0$ справедливо $g(k_0) > 0$, так как иначе $a_k(\omega)$ не удовлетворяют условию (в) теоремы (**4.1**, II) или же $a_k(\omega)$ не имеет смысла. (*Прим. ред.*)

так что выполняется условие (А)′ теоремы (**4.2**, II). Условие (Б)′ этой теоремы также удовлетворяется, так как

$$\int_0^\infty e^{-t} t^k \, dt = k!$$

Таким образом, $g_k(\omega)$ является γ-матрицей.

Можно показать, что если

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \quad s(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n \omega^n}{n!},$$

$$B(\omega) = e^{-\omega} s(\omega), \quad u(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\omega^n}{n!},$$

то

$$\int_0^\infty e^{-x} u'(x) \, dx = -c_0 + \int_0^\infty e^{-x} u(x) \, dx$$

при условии, что интеграл слева существует. (Доказательство легко может быть проведено, и мы его опускаем; см. Динс [1], 401—403.)

Мы, таким образом, получаем *интеграл Бореля*

$$\lim_{\omega \to \infty} B(\omega) = \int_0^\infty e^{-x} u(x) \, dx.$$

Этот интеграл, напоминающий выражение для матрицы Бореля, суммирует ряд Тэйлора внутри многоугольника суммируемости. Однако может случиться, что $B(\omega)$ не стремится к пределу. Например, если

$$u(x) = e^x \cos(x^2),$$

то интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x} u(x) \, dx = \int_0^\infty \cos(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \, dt$$

существует, но

$$B(\omega) = c_0 + \int_0^\omega e^{-x} u'(x) \, dx = f(x) + f'(\omega),$$

где

$$f(\omega) = \int_0^\omega e^{-x} u(x) \, dx,$$

т. е.

$$B(\omega)=\int_0^\omega \cos(x^2)\,dx+\cos(\omega^2),$$

и отсюда следует, что $B(\omega)$ не имеет предела при $\omega\to\infty$.

Таким образом, интегральный метод Бореля является более общим, чем матричный метод Бореля.

Если интеграл Бореля сходится к s, то мы будем говорить, что ряд $\sum c_k$ *суммируем* (B) *к* s.

Борелю принадлежит также и следующее определение суммирования: ряд $\sum c_k$ называется *абсолютно суммируемым* (B), если все интегралы

$$\int_A^\infty e^{-x}\left|\frac{d^r u(x)}{dx}\right|dx \qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{4.34}$$

(где A — положительная константа) существуют. В случае $r=0$ выражение (4.34) показывает, что ряд, абсолютно суммируемый (B), будет суммируемым (B); в случае $r=1$ получаем, что ряд, абсолютно суммируемый (B), суммируем матрицей Бореля.

(VII) *Средние Рисса.* Если $r>0$, то матрица

$$a_k(\omega)=\left(1-\frac{k}{\omega}\right)^r-\left(1-\frac{k+1}{\omega}\right)^r \qquad (k+1<\omega),$$
$$a_k(\omega)=0 \qquad (k+1\geqslant\omega)$$

является T-матрицей; матрица

$$g_k(\omega)=\left(1-\frac{k}{\omega}\right)^r \qquad (k+1<\omega),$$
$$g_k(\omega)=0 \qquad (k+1\geqslant\omega)$$

является γ-матрицей. Действительно,

$$\left(1-\frac{k}{\omega}\right)^r-\left(1-\frac{k+1}{\omega}\right)^r>0, \quad \text{когда} \quad k+1<\omega,$$

следовательно,

$$\sum_{k+1<\omega}\left|\left(1-\frac{k}{\omega}\right)^r-\left(1-\frac{k+1}{\omega}\right)^r\right|=$$
$$=\sum_{k+1<\omega}\left\{\left(1-\frac{k}{\omega}\right)^r-\left(1-\frac{k+1}{\omega}\right)^r\right\}=\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^r-\left(1-\frac{n}{\omega}\right)^r,$$

где $n=[\omega]$ — целая часть от ω.

Таким образом, когда $r>0$, тогда

$$\sum_{k+1<\omega}|a_k(\omega)|\leqslant 1$$

для любого $\omega > \omega_0$ и

$$\lim_{\omega\to\infty} \sum_{k+1<\omega} a_k(\omega) = 1.$$

Кроме того, $\lim\limits_{\omega\to\infty} a_k(\omega) = 0$ для любого фиксированного k. Следовательно, $(a_k(\omega))$ является T-матрицей. Также легко видеть, что при $r > 0$ $(g_k(\omega))$ является γ-матрицей.

Эти (равносильные) матрицы приводят к методу суммирования средними Рисса, важному в теории рядов Дирихле (см. Харди и и Рисс [1]).

(VIII) *Преобразование Абеля.* Возьмем $g_k(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^k$, которая, очевидно, является γ-матрицей; тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(\omega)\, c_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad \text{где} \quad t = \frac{\omega}{\omega+1},$$

так что $t \to 1$ при $\omega \to \infty$. Таким образом, обобщенный предел в этом случае равен $\lim\limits_{t\to 1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ для $0 < t < 1$, и он существует всякий раз, когда функция $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ имеет предельное значение при $z \to 1-0$ вдоль действительной оси. Если $\sum c_k$ сходится, то вышеуказанное преобразование в этом частном случае сводится к применению хорошо известной теоремы Абеля о степенных рядах. По этой причине рассматриваемое здесь преобразование рядов называется преобразованием Абеля. (Обобщение этих преобразований см. Сильверман и Тамаркин [1].)

(IX) *Матрица Вороного* *). Матрица Вороного представляет собой нижнюю треугольную матрицу с элементами

$$a_{nk} = \frac{p_{n-k}}{P_n}, \qquad P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n \qquad (0 \leqslant k \leqslant n),$$
$$a_{nk} = 0 \qquad (k > n),$$

где $\{p_l\}$ — любая последовательность положительных чисел, подчиненная одному условию $\frac{p_n}{P_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Матрица Вороного, очевидно, является T-матрицей, причем $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1$ (см. Хилл [3], Пиранян [2], Сильверман и Сас [1]).

*) Автор называет эту матрицу матрицей Нерлунда, что не совсем правильно, так как на 18 лет ранее Нерлунда такие матрицы рассматривались Вороным. Поэтому в переводе эта матрица будет называться матрицей Вороного. (*Прим. ред.*)

4.4. Некоторые свойства T- и γ-матриц. Теорема Штейнгауза

Матрица (a_{nk}) называется *положительной* *), если все ее элементы положительны; в случае полунепрерывной матрицы $(a_k(\omega))$ $a_k(\omega) > 0$ для $k = 1, 2, \ldots$ и для всех $\omega > \omega_0$.

(**4.4**, I) *Пусть* $z_k = x_k + iy_k$ (x_k *и* y_k *действительные*) *при* $k > k_0$, *лежат внутри угла* $\alpha < \pi$ *комплексной плоскости с вершиной в начале координат и пусть* $\lim\limits_{k\to\infty} |z_k| = \infty$. *Если положительная* T-*матрица* $(a_k(\omega))$ *преобразует* z_k *в* $z'(\omega)$, *то* $\lim\limits_{\omega\to\infty} |z'(\omega)| = \infty$.

(I) Пусть $z_k = x_k$ — действительные числа при любом k и пусть $x_k \geqslant 0$ при $k > k_0$. По предположению, $A(\omega) \equiv \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) \to 1$ при $\omega \to \infty$, так что $A(\omega) > \theta$ для $\omega > \omega_0$, где $0 < \theta < 1$. Каждому данному сколь угодно большому положительному числу n соответствует число p такое, что $x_k > \frac{n}{\theta}$ при $k > p$. Положив $x_k = \frac{n}{\theta} + \eta_k$, мы получим $\eta_k > 0$ для $k > p$ и

$$x'(\omega) = \frac{n}{\theta} A(\omega) + \sum_{k=1}^{p} a_k(\omega)\,\eta_k + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k(\omega)\,\eta_k.$$

Все члены в последней сумме положительны, и кроме того, мы имеем $\lim\limits_{\omega\to\infty} a_k(\omega) = 0$ для любого фиксированного k и $A(\omega) > \theta$ для $\omega > \omega_0$. Следовательно, все предельные точки $x'(\omega)$ при $\omega \to \infty$ лежат на действительной оси и имеют абсциссы большие, чем n. Но так как n — произвольно выбранное число, то $+\infty$ является единственной предельной точкой.

В случае, когда $x_k < 0$ для $k > k_0$, доказательство проводится аналогично.

Для действительных последовательностей теорема доказана.

(II) Когда $\{z_k\}$ — комплексная последовательность, то, умножая все ее члены на подходяще выбранное число $e^{i\varphi}$, мы можем добиться такого положения, что положительная часть действительной оси станет биссектрисой угла α. Тогда будем иметь $x_k \geqslant 0$ для $k > k_0$ и $x_k \to \infty$, а в таком случае из (I) следует, что $x'(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(\omega)\, x_k \to \infty$ вместе с ω и, таким образом, $|z'(\omega)| \to \infty$ вместе с ω.

---

*) В литературе чаще всего под *положительными* матрицами понимают такие, все элементы которых *неотрицательны*. Это определение более удобно, так как ему удовлетворяют многие классические методы суммирования, например метод средних арифметических, методы Вороного и др. Сам же автор недостаточно точно придерживается данного им определения (см., например, теорему (**4.4**, IV)). (*Прим. ред.*)

(Эта теорема была установлена для действительных последовательностей Шуром [1] и обобщена на комплексные последовательности Динсом [1], 390. См. также Гурвиц [2].)

Мы показали также, что *расходимость действительной последовательности* $k+\infty$ *или* $-\infty$ *не нарушается действительным положительным* T*-преобразованием.* Это утверждение не верно для K-преобразований, как видно из следующего примера: $a_{nk}=\frac{1}{k^3}$ (все строки этой положительной K-матрицы одинаковы), $z_k=k$; в этом случае мы имеем $z'_n=\frac{\pi^2}{6}$ для любого n, так что $\{z'_n\}$ является сходящейся последовательностью.

Аналогом (**4.4**, I) для γ-матриц является следующая теорема:

(**4.4**, II) *Пусть* $c_k=a_k+ib_k$ (a_k *и* b_k — *действительные числа*) *при* $k>k_0$ *лежат в углу* $\alpha<\pi$ *комплексной плоскости с вершиной в начале координат и пусть*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{k}c_n\right|=\infty.$$

Если положительная γ*-матрица* $(g_k(\omega))$ *преобразует*

$$\sum c_k \quad \text{в} \quad \gamma(\omega), \quad \text{то} \quad \lim_{\omega\to\infty}|\gamma(\omega)|=\infty.$$

(I) Если c_k действительные и $c_k\geqslant 0$ для $k>k_0$, то для $p>k_0$ вторая сумма в правой части равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(\omega)\,c_k=\sum_{k=1}^{p}g_k(\omega)\,c_k+\sum_{k=p+1}^{\infty}g_k(\omega)\,c_k$$

неотрицательна, а предел первой суммы (справа) при $\omega\to\infty$ равен $\sum_{k=1}^{p}c_k=s_p$. Таким образом, все предельные точки суммы в левой части написанного равенства (при $\omega\to\infty$) действительны и имеют абсциссы не меньшие, чем s_p. Но так как, по предположению, $\lim_{k\to\infty}|s_k|=\infty$, то отсюда и следует требуемый результат. Аналогично доказывается случай, когда $c_k<0$ для $k>k_0$.

(II) Если c_k комплексные, то, умножая их на соответствующим образом подобранное число $e^{i\varphi}$, мы можем расположить оси так, чтобы положительная часть действительной оси являлась биссектрисой угла α. Поэтому $a_k\geqslant 0$ для $k>k_0$, где $a_k=\operatorname{Re}(c_k)$. Тогда, если $\theta_k=\arg(c_k)$, мы имеем $-\frac{1}{2}\alpha<\theta_k<\frac{1}{2}\alpha$, так что при $k>k_0$ найдем $a_k=|c_k|\cos\theta_k>|c_k|\cos\frac{1}{2}\alpha$; следовательно,

$$\sum_{n=1}^{k}a_n>\cos\frac{1}{2}\alpha\sum_{n=1}^{k}|c_n| \qquad \left(0<\frac{1}{2}\alpha<\frac{1}{2}\pi\right),$$

и, используя условия теоремы, получаем:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = +\infty.$$

Отсюда, согласно п. (I), получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) a_k \to +\infty$$

и, значит,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k \right| \to \infty,$$

когда $\omega \to \infty$.

Следующий важный результат принадлежит Штейнгаузу [1] (ср. (**10.7**, VI), (**4.5**, I), (**4.5**, III), (**4.5**, IV) и (**4.5**, VI) с (**4.4**, III)):

(**4.4**, III) *Для любой данной действительной T-матрицы A существует ограниченная последовательность, не имеющая A-предела* *).

Пусть (a_{nk}) — действительная T-матрица и $\{z_k\}$ — последовательность такая, что $0 \leqslant z_k \leqslant 1$ для любого k; (а)′ — (в)′ будут обозначать соответствующие условия теоремы (**4.1**, II).

Выберем n_1, согласно условию (в)′, такое, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_1, k} > \frac{3}{4}$, и затем, используя условие (*а*)′, выберем m_1 такое, что

$$\sum_{k=m_1+1}^{\infty} |a_{n_1, k}| < \frac{1}{24}.$$

Тогда, если $z_k = 1$ для $1 \leqslant k \leqslant m_1$, мы имеем:

$$z'_{n_1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_1, k} z_k \geqslant \sum_{k=1}^{m_1} a_{n_1, k} - \sum_{k=m_1+1}^{\infty} |a_{n_1, k}| > \frac{2}{3}.$$

Выберем теперь $n_2 > n_1$ такое, что $\sum\limits_{k=1}^{m_1} |a_{n_2, k}| < \frac{1}{6}$, что возможно в силу (б)′, и затем выберем $m_2 > m_1$ такое, что $\sum\limits_{k=m_2+1}^{\infty} |a_{n_2, k}| < \frac{1}{6}$, что по условию (а)′ также возможно.

*) Как будет видно из доказательства, в качестве такой последовательности может быть найдена последовательность, состоящая из одних нулей и единиц. (*Прим. ред.*)

Тогда, если $z_k=0$ для $m_1<k\leqslant m_2$, мы получим:

$$z'_{n_2}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_2,\,k}z_k\leqslant\sum_{k=1}^{m_1}|a_{n_2,\,k}|+\sum_{k=m_2+1}^{\infty}|a_{n_2,\,k}|<\frac{1}{3}.$$

Выберем теперь $n_3>n_2$ такое, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n_3,\,k}>\frac{3}{4}$, это возможно по условию (в)′, и $\sum\limits_{k=1}^{m_2}|a_{n_3,\,k}|<\frac{1}{24}$, это возможно по условию (б)′; затем выберем $m_3>m_2$ так, чтобы $\sum\limits_{k=m_3+1}^{\infty}|a_{n_3,\,k}|<\frac{1}{48}$, это возможно по условию (а)′.

Тогда, если $z_k=1$ для $m_2<k\leqslant m$, мы будем иметь:

$$z'_{n_3}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_3,\,k}z_k\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_3,\,k}-\sum_{k=m_1+1}^{m_2}|a_{n_3,\,k}|-2\sum_{k=m_3+1}^{\infty}|a_{n_3,\,k}|>\frac{2}{3}.$$

Продолжая построения таким путем, найдем последовательность $\{z_k\}$, все элементы которой 0 или 1, и $\{z_b\}$ не стремится ни к какому пределу. Теорема доказана.

Следствие. *Теорема справедлива для любой комплексной T-матрицы* (см. пример 7 к гл. 4, а также (**4.6**, I) как аналог (**4.4**, III) для γ-матриц).

(**4.4**, IV) *Любая конечная или бесконечная предельная точка последовательности $\{z_k\}$ является обобщенным пределом $\{z_k\}$ для некоторой положительной T-матрицы* (Динс [1], 390, (IV)).

(I) Если z — конечная предельная точка последовательности $\{z_k\}$, то найдется подпоследовательность $z_{m_k}\to z$. Возьмем положительную T-матрицу (a_{nk}), определенную следующим образом:

$$a_{n,\,m_k}=1 \quad \text{для} \quad m_k\leqslant n<m_{k+1} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$
$$a_{nk}=0 \quad \text{в других случаях.}$$

Тогда для $m_k\leqslant n<m_{k+1}$ получим:

$$z'_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}z_k=z_{m_k}.$$

Следовательно, при $k\to\infty$ мы будем иметь $z'_n\to z$.

(II) Если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,|z|=\infty$, мы выберем подпоследовательность $\{z_{m_k}\}$ такую, что $|z_{m_k}|\to\infty$ и $\arg(z_{m_k})\to\varphi$, где φ — *«направление плотности»* для $\{z_k\}$, т. е. направление, образующее с положительным направлением действительной оси такой угол φ, что для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ угол $(\varphi - \varepsilon, \varphi + \varepsilon)$ содержит бесконечно много элементов z_k (см. Динс [1], 83). Обозначим эту подпоследовательность через $\{\zeta_k\}$, так что $|\zeta_k| \to \infty$ и $\arg \zeta_k \to \varphi$; тогда, согласно (**4.4**, I), матрица, построенная в п. (I) настоящей теоремы, преобразует как $\{\zeta_k\}$, так и $\{z_k\}$ в $\{z'_n\}$, где $|z'_n| \to \infty$.

Аналогичная теорема для рядов доказана Бозанкетом (см. Динс [1], 397, (IV)) и заключается в следующем:

(**4.4**, V) *Любая конечная или бесконечная предельная точка множества частичных сумм ряда $\sum c_k$ является обобщенной суммой этого ряда для некоторой положительной γ-матрицы.*

Если s — конечная предельная точка сумм $s_k = \sum_{n=1}^{k} c_n$, то найдется подпоследовательность $\{s_{m_k}\}$, $s_{m_k} \to s$; если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |s_k| = \infty$, то найдется подпоследовательность $\{s_{m_k}\}$ такая, что $|s_{m_k}| \to \infty$ и $\arg s_{m_k} \to \varphi$ для некоторого действительного значения φ. В обоих случаях γ-матрица $g_{nk} = 1$ для $1 \leqslant k \leqslant m_n$, $g_{nk} = 0$ для $k > m_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ преобразует $\sum c_k$ в $\sum_{k=1}^{\infty} g_{nk} c_k = s_{m_n}$, что и доказывает теорему.

Для действительных последовательностей имеет место следующий результат:

(**4.4**, VI) *Любое число x, заключенное между верхним и нижним пределами U и L действительной последовательности $\{x_k\}$, является обобщенным пределом этой последовательности для некоторой положительной T-матрицы* *).

(I) Предположим, что U и L конечны **). Выделим из $\{x_k\}$ две подпоследовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ такие, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U - a_k| = a, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |L - b_k| = b$$

сходятся. Полагая $a_k = U + \varepsilon_k$, $b_k = L + \eta_k$, $U - x = p$, $x - L = q$ и принимая во внимание, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (q\varepsilon_k + p\eta_k) \right| \leqslant aq + bp, \quad \text{а} \quad \frac{q}{n(p+q)} \quad \text{и} \quad \frac{p}{n(p+q)}$$

---

*) См., Динс [1], 391; приведенное здесь доказательство случаев (II), (III) и (IV) принадлежит Вермсу.

**) Здесь предполагается, что $U \neq L$. В противном случае утверждение очевидно. (*Прим. ред.*)

стремятся к нулю при $n \to \infty$, мы получим:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} q a_k + \sum_{k=1}^{n} p b_k}{n(p+q)} = x + \frac{\sum_{k=1}^{n} q \varepsilon_k + \sum_{k=1}^{n} p \eta_k}{n(p+q)} \to x \tag{4.41}$$

при $n \to \infty$.

Построим теперь строку с номером n матрицы (a_{nk}). Положим $a_{nk} = 0$, если x_k не равно ни одному из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ или $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $a_{nk} = \frac{q}{n(p+q)}$, если x_k равно хотя бы одному из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $a_{nk} = \frac{p}{n(p+q)}$, если x_k равно хотя бы одному из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ для любого n и $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ для любого фиксированного k; следовательно, (a_{nk}) является положительной T-матрицей и теорема для случая конечных U и L следует из (4.41).

(II) Предположим, что $U = +\infty$, а L конечно. Выберем из $\{x_k\}$ подпоследовательность $\{u_k\}$ такую, что $x < u_1 < u_2 < \ldots$, где $u_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, и подпоследовательность $\{b_k\}$ из $\{x_k\}$ такую, что $x > b_k$, $b_k \to L$ и $b_k - L = \varepsilon_k$, где

$$|\varepsilon_k| \leqslant \frac{\theta^k}{u_k - x} \qquad (0 < \theta < 1). \tag{4.42}$$

Положив $u_k - x = p_k$, $x - L = q$, мы получим:

$$\sum_{k=1}^{n} q u_k + \sum_{k=1}^{n} p_k b_k = \sum_{k=1}^{n} \{q(x + p_k) + p_k(x - q + \varepsilon_k)\} =$$
$$= x\left(nq + \sum_{k=1}^{n} p_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k p_k.$$

Из (4.42) следует:

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k p_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \theta^k \leqslant M \text{ для любого } n,$$

следовательно, при $n \to \infty$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} q u_k + \sum_{k=1}^{n} p_k b_k}{nq + \sum_{k=1}^{n} p_k} \to x. \tag{4.43}$$

Определим теперь (a_{nk}), положив $a_{nk}=\dfrac{q}{nq+\sum\limits_{k=1}^{n}p_k}$, если x_k содержится в $\{u_\nu\}$, где $1\leqslant\nu\leqslant n$; $a_{nk}=\dfrac{p_k}{nq+\sum\limits_{k=1}^{n}p_k}$, если x_k содержится в $\{b_\nu\}$, где $1\leqslant\nu\leqslant n$; $a_{nk}=0$ во всех других случаях *). Тогда (a_{nk}) — положительная T-матрица, и условие (4.43) доказывает теорему в случае, когда $U=+\infty$, а L — конечное.

(III) В случае, когда U конечно, а $L=-\infty$, доказательство проводится так же, как и в (II).

(IV) Если $U=+\infty$ и $L=-\infty$, мы выберем из $\{x_k\}$ подпоследовательности $x<u_1<u_2<\ldots<u_k<\ldots$ и $x>v_1>v_2>\ldots\ldots>v_k>\ldots$ такие, что $u_k\to+\infty$, $v_k\to-\infty$ при $k\to\infty$. Положив $u_k-x=p_k$, $x-v_k=q_k$, мы получим:

$$\sum_{k=1}^{n}q_ku_k+\sum_{k=1}^{n}p_kv_k=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{q_k(p_k+x)+p_k(x-q_k)\}=x\sum_{k=1}^{n}(p_k+q_k). \tag{4.44}$$

Определим матрицу (a_{nk}), положив $a_{nk}=\dfrac{q_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}(p_k+q_k)}$, если x_k содержится в $\{u_\nu\}$ $(1\leqslant\nu\leqslant n)$; $a_{nk}=\dfrac{p_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}(p_k+q_k)}$, если x_k содержится в $\{v_\nu\}$ $(1\leqslant\nu\leqslant n)$; $a_{nk}=0$ в других случаях. Тогда (a_{nk}) является положительной T-матрицей и равенство (4.44) доказывает теорему в этом случае.

Аналогичная теорема для рядов, приведенная ниже, доказана Перроном [1].

(4.4, VII) *Любое число s, заключенное между верхним и нижним пределами U и L частичных сумм s_k ряда $\sum c_k$ с действительными членами, является обобщенной суммой этого ряда для некоторой положительной γ-матрицы.*

---

*) Выбор a_{nk} для случая $x_k\in\{b_\nu\}$ сделан не точно, так как индекс k, для которого $x_k\in\{b_\nu\}$ с $\nu\leqslant n$, может быть больше n. Правильно можно сделать так: если x_k совпадает с $b_i\in\{b_\nu\}$, где $1\leqslant\nu\leqslant n$, то полагаем $a_{nk}=\dfrac{p_i}{nq+\sum\limits_{k=1}^{n}p_k}$. Это же самое замечание справедливо и для случая (IV). (*Прим. ред.*)

(I) Предположим, что U и L конечны. Возьмем последовательности чисел k_n и $m_n > k_n$ такие, что $s_{k_n} \to L$, $s_{m_n} \to U$, и определим γ-матрицу следующим образом: $g_{nk} = 1$ для $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $g_{nk} = \frac{p}{p+q}$ для $k_n < k \leqslant m_n$, $g_{nk} = 0$ для $k > m_n$, где $p = s - L$, $q = U - s$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_{nk}c_k = s_{k_n} + \frac{p}{p+q}(s_{m_n} - s_{k_n}) = \frac{qs_{k_n} + ps_{m_n}}{p+q} \to \frac{qL + pU}{p+q},$$

т. е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_{nk}c_k \to s$, когда $n \to \infty$.

(II) Если $U = +\infty$, $L = -\infty$ (один или оба), то доказательство может быть сведено к соответствующим случаям теоремы (**4.4**, VI) (см. пример 8 к гл. 4).

4.5. Некоторые теоремы Агнью

В теоремах этого параграфа, принадлежащих Агнью [2], рассматриваются две последовательности (обладающие различными свойствами) и в каждом случае определяется T-матрица, преобразующая одну последовательность в другую.

(**4.5**, I) *Для каждой расходящейся ограниченной последовательности $\{s_n\}$ и для каждой ограниченной последовательности $\{\sigma_n\}$ существует соответствующая общая (квадратная) T-матрица, которая преобразует $\{s_n\}$ в $\{\sigma_n\}$.*

Любая ограниченная расходящаяся последовательность $\{s_n\}$ должна иметь по крайней мере две различные предельные точки, скажем z_1 и z_2. Выберем последовательность индексов $\mu_1 < \nu_1 < \mu_2 < \nu_2 < \mu_3 < < \nu_3 < \ldots$ такую, что $s_{\mu_n} \to z_1$, $s_{\nu_n} \to z_2$, $s_{\mu_n} \neq s_{\nu_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда преобразование

$$x'_n = \frac{s_{\nu_n} - \sigma_n}{s_{\nu_n} - s_{\mu_n}} x_{\mu_n} + \frac{\sigma_n - s_{\mu_n}}{s_{\nu_n} - s_{\mu_n}} x_{\nu_n} \tag{4.51}$$

переводит $\{s_n\}$ в $\{\sigma_n\}$.

Матрица преобразования (4.51) является T-матрицей. Действительно, условия (б)′ и (в)′ теоремы (**4.1**, II), очевидно, выполняются; (а)′ выполняется в силу того, что $\{\sigma_n\}$ ограниченная и $s_{\mu_n} \neq s_{\nu_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *). Теорема доказана.

Нижняя треугольная матрица может не обладать таким свойством; это видно, если положить $s_1 = 0$, $\sigma_1 \neq 0$.

*) Здесь полезно заметить, что условие (а)′ выполнено не в силу того, что $s_{\mu_n} \neq s_{\nu_n}$, а в силу того, что различные последовательности s_{μ_n} и s_{ν_n} сходятся к разным пределам. (*Прим. ред.*)

(**4.5**, II) *Для каждой расходящейся ограниченной последовательности* $\{s_n\}$ *и любого ограниченного замкнутого множества* A *комплексной плоскости существует соответствующая общая (квадратная) Т-матрица, которая преобразует* $\{s_n\}$ *в последовательность, множество предельных точек которой совпадает с* A.

Так как A замкнуто, то в нем существует счетное подмножество B: $b_1, b_2, b_3, \ldots$, такое, что множество B^0, состоящее из всех точек B и всех его предельных точек, совпадает с A *). Пусть $\{\sigma_n\}$ — последовательность, состоящая из элементов

$$b_1;\quad b_1, b_2;\quad b_1, b_2, b_3;\quad \ldots;\quad b_1, b_2, \ldots, b_n;\quad b_1, \ldots,$$

т. е. $\sigma_1 = b_1$, $\sigma_2 = b_1$, $\sigma_3 = b_2$, $\sigma_4 = b_1$, $\sigma_5 = b_2$, $\sigma_6 = b_3, \ldots$ Тогда множество предельных точек последовательности $\{\sigma_n\}$ совпадает с B^0 и, следовательно, совпадает с A. Применяя теперь (**4.5**, I), получим требуемый результат.

Следствие. *Теорема справедлива для нижних треугольных матриц.*

Действительно, преобразование

$$x'_k = 0 \qquad (1 \leqslant k < \nu_1),$$

$$x'_k = \frac{s_{\nu_n} - \sigma_n}{s_{\nu_n} - s_{\mu_n}} x_{\mu_n} + \frac{\sigma_n - s_{\mu_n}}{s_{\nu_n} - s_{\mu_n}} x_{\nu_n} \qquad (\nu_n \leqslant k < \nu_{n+1})$$

похоже на (4.51), однако матрица его является уже треугольной T-матрицей; при этом $\{s_n\}$ преобразуется в последовательность, состоящую из нулей в начале последовательности и элементов из $\{\sigma_n\}$ с повторениями.

Если $\{s_n\}$ и A действительные, то указанное выше преобразование также будет действительным.

Если в качестве замкнутого множества A взять одну точку σ, то мы получим следующую теорему:

(**4.5**, III) *Для каждой ограниченной расходящейся последовательности* $\{s_n\}$ *и любого комплексного числа* σ *существует соответствующая квадратная или треугольная Т-матрица, которая преобразует* $\{s_n\}$ *в последовательность, сходящуюся к* σ.

В последних трех теоремах матрицы не могут быть всегда действительными; действительные матрицы преобразуют действительные последовательности обязательно в действительные, тогда как $\{\sigma_n\}$ может не быть действительной.

(**4.5**, IV) *Для каждой ограниченной последовательности* $\{s_n\}$, *которая имеет в комплексной плоскости по крайней мере три различные предельные точки, не лежащие на одной прямой,*

---

*) Это равносильно утверждению, что комплексная плоскость и любое ее ограниченное замкнутое множество *сепарабельны* (см. стр. 267).

и для каждой ограниченной последовательности $\{\sigma_n\}$ *существует действительная квадратная T-матрица, которая преобразует* $\{s_n\}$ *в* $\{\sigma_n\}$.

Пусть z_1, z_2, z_3 — три различные предельные точки, не лежащие на одной прямой. Выберем последовательность индексов

$$\gamma_1 < \delta_1 < \varepsilon_1 < \gamma_2 < \delta_2 < \varepsilon_2 < \gamma_3 < \delta_3 < \varepsilon_3 < \ldots$$

такую, что $s_{\gamma_n} \to z_1$, $s_{\delta_n} \to z_2$, $s_{\varepsilon_n} \to z_3$ и при любом n точки s_{γ_n}, $s_{\delta n}$ и s_{ε_n} не лежат на одной прямой. Для каждого n в треугольнике с вершинами s_{γ_n}, s_{δ_n}, s_{ε_n} выберем одну из вершин (скажем, s_{γ_n}) такую, что прямая, соединяющая s_{γ_n} с σ_n, пересекает противоположную сторону $s_{\delta_n}s_{\varepsilon_n}$ в точке y_n, лежащей на сегменте, соединяющем вершины s_{δ_n} и s_{ε_n}.

Пусть α_n и β_n таковы, что

$$y_n = \alpha_n s_{\delta_n} + (1 - \alpha_n) s_{\varepsilon_n} \quad \text{и} \quad \sigma_n = (1 - \beta_n) s_{\gamma_n} + \beta_n y_n.$$

Тогда действительное преобразование

$$x'_n = (1 - \beta_n) x_{\gamma_n} + \alpha_n \beta_n x_{\delta_n} + \beta_n (1 - \alpha_n) x_{\varepsilon_n} \tag{4.52}$$

переводит $\{s_n\}$ в $\{\sigma_n\}$.

Матрица преобразования (4.52), очевидно, удовлетворяет условиям (б)$'$ и (в)$'$ теоремы (**4.1**, II).

Из расположения точек y_n, s_{δ_n}, s_{ε_n} и соотношения, определяющего α_n, следует, что $0 < \alpha_n \leqslant 1$. Так как s_{γ_n}, s_{δ_n}, s_{ε_n} приближаются к трем различным точкам, а $\{\sigma_n\}$ по предположению ограничена, то из соотношения, определяющего β_n, вытекает, что последовательность $\{\beta_n\}$ ограничена. Таким образом, матрица преобразования (4.52) удовлетворяет условию (а)$'$ теоремы (**4.1**, II) и, следовательно, является T-матрицей.

Используя предыдущую теорему и метод доказательства (**4.5**, II), получаем следующую теорему:

(**4.5**, V) *Для каждой ограниченной расходящейся последовательности* $\{s_n\}$, *имеющей в комплексной плоскости по крайней мере три различные предельные точки, не лежащие на одной прямой, и для каждого ограниченного замкнутого множества A комплексной плоскости существует действительная квадратная или треугольная T-матрица, которая преобразует последовательность* $\{s_n\}$ *в последовательность, имеющую A множеством своих предельных точек.*

Как и в (**4.5**, III), множество A может состоять только из одной точки σ.

4.6. Некоторые общие свойства K-, T-, β- и γ-матриц

(Динс [1], 399, 406—409)

(**4.6**, I) *Сумма и произведение двух K-матриц существуют и являются K-матрицами. K-матрицы образуют алгебру, в которой сложение ассоциативно и коммутативно, а умножение дистрибутивно и ассоциативно, но в общем случае не коммутативно.*

Утверждения относительно сложения очевидны, и мы видели (§ 1.4), что умножение подчиняется дистрибутивному закону в том смысле, что если AC и BC существуют, то $AC+BC=(A+B)C$.

Докажем, что произведение двух K-матриц A и B является K-матрицей.

Так как A и B суть K-матрицы, то $z'_i=\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}z_k$ стремится к пределу z' при $n\to\infty$ и $z''_n=\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni}z_i$ стремится к пределу z'' при $n\to\infty$, если $\{z_k\}$ — сходящаяся последовательность. Кроме того, если M и N являются K_r-гранями (§ 2.3) матриц A и B, то

$$|z''_n|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|b_{ni}|\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}||z_k|\leqslant NMg,$$

где g — какое-либо число, не меньшее, чем любое из чисел $|z_k|$. Следовательно, в двойном ряде $\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}z_k$ мы можем переменить порядок суммирования без нарушения сходимости и изменения суммы. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni}a_{ik}\right)z_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}z_k=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni}z'_i=\lim_{n\to\infty} z''_n=z''. \qquad (4.61)$$

Так как это имеет место для *любой* сходящейся последовательности $\{z_k\}$, то матрица

$$c_{nk}=\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni}a_{ik}$$

преобразует любую сходящуюся последовательность опять в сходящуюся. Следовательно, по теореме (**4.1**, I), (c_{nk}) является K-матрицей и

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|\leqslant MN$$

для любого n, т. е. ее K_r-грань не превышает MN.

Для того чтобы доказать, что умножение K-матриц ассоциативно, мы должны показать, что если A, B и C — какие-либо три K-матрицы, то

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}b_{ij}\right)c_{jk} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}c_{jk}. \tag{4.62}$$

Мы имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ni}|\,|b_{ij}|\,|c_{jk}| \leqslant M_3\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ni}|\,|b_{ij}| \leqslant$$

$$\leqslant M_2M_3\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ni}| \leqslant M_1M_2M_3,$$

где M_1, M_2, M_3 суть K_r-грани соответственно матриц A, B и C. Отсюда следует, что изменение порядка суммирования в (4.62) оправдано.

Наконец, как мы видели (§ 1.4), бесконечные матрицы (в общем случае) не коммутативны; нетрудно построить пример двух K-матриц, которые не являются коммутативными.

(**4.6**, II) *Произведение двух T-матриц всегда существует и является T-матрицей; их умножение ассоциативно, однако T-матрицы не образуют алгебру.*

В обозначениях (**4.6**, I), если A и B являются T-матрицами, то z'_i и z''_n оба стремятся к $z = \lim\limits_{k\to\infty} z_k$, т. е. $z'' = z$. Следовательно, согласно (4.61), произведение матриц $C = BA$ есть также T-матрица.

Доказательство ассоциативности умножения T-матриц производится так же, как и доказательство этого факта в (**4.6**, I) для K-матриц. Сумма же двух T-матриц не является T-матрицей, так как она не удовлетворяет условию (в)$'$ теоремы (**4.1**, II) и, таким образом, T-матрицы не образуют алгебру.

(**4.6**, III) *Если при любом r $\left(a_{nk}^{(r)}\right)$ является K-матрицей с K_r-гранью M_r и характеристическими числами $\alpha_k^{(r)}$ и $\alpha^{(r)}$ и если ряд $\sum\limits_{r=1}^{\infty}|c_r|\,M_r = b$ сходится, то $C\sum\limits_{r=1}^{\infty}c_ra_{nk}^{(r)}$ будет K-матрицей с характеристическими числами $\sum\limits_{r=1}^{\infty}c_r\alpha_k^{(r)}$ и $\sum\limits_{r=1}^{\infty}c_r\alpha^{(r)}$ и ее K_r-грань не превосходит b.*

Положив $A_n^{(r)} \equiv \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(r)}$, мы имеем:

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk}^{(r)} = \alpha_k^{(r)}, \qquad \lim_{n\to\infty} A_n^{(r)} = \alpha^{(r)}.$$

Так как $|a_{nk}^{(r)}| \leqslant M_r$ и ряд $\sum_{r=1}^{\infty} |c_r| M_r = b$ сходится, то ряды $\sum_{r=1}^{\infty} c_r a_{nk}^{(r)} = c_{nk}$ сходятся при любых n и k, так что матрица $C = (c_{nk})$ существует. Кроме того, так как

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |c_r| \, |a_{nk}^{(r)}| \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} |c_r| M_r = b,$$

мы видим, что

$$A_n \equiv \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} c_r a_{nk}^{(r)} = \sum_{r=1}^{\infty} c_r A_n^{(r)}.$$

Докажем, что A_n и c_{nk} стремятся к определенным пределам, когда $n \to \infty$.

Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число p такое, что

$$\sum_{r=p+1}^{\infty} |c_r| M_r < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Поэтому из неравенства $|A_n^{(r)}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^{(r)}| \leqslant M_r$ следует:

$$\left| \sum_{r=p+1}^{\infty} c_r A_n^{(r)} \right| \leqslant \sum_{r=p+1}^{\infty} |c_r| M_r < \frac{1}{2} \varepsilon \tag{4.63}$$

для любого n, а так как $|\alpha^{(r)}| \leqslant M_r$, то и

$$\left| \sum_{r=p+1}^{\infty} c_r \alpha^{(r)} \right| < \frac{1}{2} \varepsilon. \tag{4.64}$$

Таким образом, $\sum_{r=1}^{\infty} c_r \alpha^{(r)}$ является определенным числом и

$$\sum_{r=1}^{\infty} c_r A_n^{(r)} - \sum_{r=1}^{\infty} c_r \alpha^{(r)} = \sum_{r=1}^{p} c_r \{A_n^{(r)} - \alpha^{(r)}\} + \sum_{r=p+1}^{\infty} c_r A_n^{(r)} - \sum_{r=p+1}^{\infty} c_r \alpha^{(r)},$$

поэтому, согласно (4.63) и (4.64),

$$\left| \sum_{r=1}^{\infty} c_r A_n^{(r)} - \sum_{r=1}^{\infty} c_r \alpha^{(r)} \right| < \left| \sum_{r=1}^{p} c_r \{A_n^{(r)} - \alpha^{(r)}\} \right| + \varepsilon.$$

Когда $n \to \infty$, сумма в правой части стремится к нулю, так что все предельные числа в левой части меньше (по модулю), чем ε. Так как ε произвольно, то мы получаем:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{\infty} c_r A_n^{(r)} = \sum_{r=1}^{\infty} c_r \alpha^{(r)}.$$

Аналогично

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{\infty} c_r a_{nk}^{(r)} = \sum_{r=1}^{\infty} c_r \alpha_k^{(r)},$$

ибо $|a_{nk}^{(r)}| \leqslant M_r$, и потому предыдущее доказательство можно провести без изменения.

Таким образом, мы доказали, что

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \sum_{r=1}^{\infty} c_r \alpha^{(r)}, \quad \lim_{n\to\infty} c_{nk} = \sum_{r=1}^{\infty} c_r \alpha_k^{(r)}$$

и также то, что $C=(c_{nk})$ является K-матрицей, причем K_r-грань не превосходит b. Теорема доказана.

(**4.6**, IV) *Если для любого* r $(a_{nk}^{(r)})$ *является* T-*матрицей с* K_r-*гранью* M_r *и если ряд* $\sum_{r=1}^{\infty} |c_r| M_r = b$ *сходится и* $\sum_{r=1}^{\infty} c_r = 1$, *то* $\sum_{r=1}^{\infty} c_r a_{nk}^{(r)}$ *является* T-*матрицей и ее* K_r-*грань не превосходит* b.

Доказательство этой теоремы сводится к доказательству теоремы (**4.6**, III), где $\alpha_k^{(r)} = 0$ и $\alpha^{(r)} = 1$, причем для того, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ был равен 1, необходимо учесть дополнительное условие $\sum_{r=1}^{\infty} c_r = 1$.

Результаты последних четырех теорем легко могут быть распространены на случай, когда n заменено непрерывной положительной переменной ω.

Так как сумма бесконечного ряда $\sum c_k$ есть, по определению, предел s последовательности частичных сумм $s_k = c_1 + c_2 + \ldots + c_k$, то возникает вопрос, могут ли и при каких условиях обобщенная сумма $\lim\limits_{\omega\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k$ ряда $\sum c_k$ и обобщенный предел $\lim\limits_{\omega\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) s_k$ частичных сумм s_k быть равными между собой.

Следующие две теоремы отвечают на этот вопрос.

(**4.6**, V) *Всякой* K-*матрице* $(a_k(\omega))$ *соответствует* β-*матрица* $g_k(\omega) = \sum_{p=k}^{\infty} a_p(\omega)$ *такая, что* K-$\lim s_k$ *последовательности* $s_k = \sum_{p=1}^{k} c_p$ *равен* β-*сумме ряда* $\sum c_k$ *при условии, что частичные суммы* s_k *ограничены. Если* $(a_k(\omega))$ — T-*матрица, то* $(g_k(\omega))$ *будет* γ-*матрицей.*

Положив $s_0 = 0$, мы будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) s_k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k(\omega) s_k =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \{g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\} s_k =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{m} g_k(\omega)(s_k - s_{k-1}) - g_{m+1}(\omega) s_m \right] =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k$$

при условии, что $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(\omega) s_{k-1} = 0$. Но из сходимости $A(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(\omega)$ следует, что $g_k(\omega) \to 0$, когда $k \to \infty$. Следовательно, если $\{s_k\}$ ограничена, то мы имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) s_k = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k.$$

Кроме того, $g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega) = a_k(\omega)$, поэтому условие (А) теоремы (**4.2**, I) следует из условия (α) теоремы (**4.1**, I). Далее,

$$\lim_{\omega\to\infty} g_k(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} [A(\omega) - a_1(\omega) - a_2(\omega) - \ldots - a_{k-1}(\omega)] =$$
$$= \alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_{k-1},$$

где α и α_k — характеристические числа $(a_k(\omega))$, так что условие (Б) теоремы (**4.2**, I) выполняется и, таким образом, $g_k(\omega) = \sum\limits_{p=k}^{\infty} a_p(\omega)$ является β-матрицей.

Если $(a_k(\omega))$ — T-матрица, то $\alpha_k = 0$ для любого k и $\alpha = 1$, так что $\lim\limits_{\omega\to\infty} g_k(\omega) = 1$ и, таким образом, $(g_k(\omega))$ является γ-матрицей.

(**4.6**, VI) *Пусть* $(g_k(\omega))$ — β-*матрица*; *тогда, чтобы матрица* $a_k(\omega) \equiv g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)$ *могла быть* K-*матрицей, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел функции* $g(\omega) = \lim\limits_{k\to\infty} g_k(\omega)$ *при* $\omega \to \infty$.

Из соотношения $a_k(\omega) = g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)$ мы видим, что условия (α) и (β) теоремы (**4.1**, I) следуют из условий (А) и (Б) теоремы (**4.2**, I) с $\alpha_k = \beta_k - \beta_{k+1}$. Из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\} = \lim_{k\to\infty} \{g_1(\omega) - g_k(\omega)\}$$

следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(\omega)$ существует и, таким образом,

$$A(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \{g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\} = g_1(\omega) - g(\omega). \qquad (4.65)$$

Согласно условию (Б) теоремы (**4.2**, I) $g_1(\omega)\to\beta_1$, следовательно, $A(\omega)$ стремится к пределу тогда и только тогда, когда $g(\omega)$ стремится к пределу при $\omega\to\infty$. Это не следует из условий (А) и (Б) теоремы (**4.2**, I), которые только показывают, что $g(\omega)$ ограничена для $\omega>\omega_0$. Теорема доказана.

Следствие*). *Если в теореме* (**4.6**, VI) β-*матрица является* γ-*матрицей, то, для того чтобы* $(a_k(\omega))$ *была* T-*матрицей, необходимо и достаточно условие*

$$\lim_{\omega\to\infty} g(\omega)=\lim_{\omega\to\infty}\lim_{k\to\infty} g_k(\omega)=0.$$

Действительно, в этом случае мы имеем $\beta_1=1$, и результат вытекает из (4.65). Из последних двух теорем получаем, что соотношения

$$g_k(\omega)=\sum_{p=k}^{\infty}a_p(\omega) \quad \text{и} \quad a_k(\omega)=g_k(\omega)-g_{k+1}(\omega)$$

не обязательно эквивалентны: второе следует из первого, но не наоборот. Например, матрица G, элементы которой определены равенствами:

$$g_{2n-1,k}=1 \quad (1\leqslant k\leqslant 2n-1), \quad g_{2n-1,k}=0 \quad (k>2n-1),$$
$$g_{2n,k}=1 \quad (1\leqslant k\leqslant 2n), \quad g_{2n,k}=\frac{1}{2} \quad (k>2n),$$

является γ-матрицей. Однако матрица A, образованная из нее при помощи второго из упомянутых выше соотношений, т. е. $a_{nk}=g_{nk}-g_{n,k+1}$, не есть даже K-матрица, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{nk}$ не существует. Здесь $\lim\limits_{k\to\infty}g_{nk}$ не стремится ни к какому пределу при $n\to\infty$.

Теорема показывает, что в известном смысле обобщенные суммы являются более общими, чем обобщенные пределы. Всякому K-преобразованию последовательности соответствует β-преобразование ряда, но обратное не всегда верно. Так, существуют γ-преобразования, не обладающие соответствующими T-преобразованиями. Возникает вопрос, существуют ли γ-матрицы, эффективные для всех рядов с ограниченными частными суммами. По теореме (**4.4**, III), γ-матрицы, определяемые так, как это сделано в (**4.6**, V), не могут быть эффективными для всех таких рядов, так как существует взаимно-однозначное соответствие между эффективностью или неэффективностью такой γ-матрицы для ряда и соответствующей T-матрицы $(a_k(\omega))$ для последовательности частичных сумм этого ряда.

*) Следствие и приведенный ниже пример принадлежат Вермсу.

В общем случае этот вопрос был рассмотрен Нигамом [2], который доказал следующую теорему *):

Для того чтобы γ-матрица $g_k(\omega)$ была эффективна для всех расходящихся рядов с ограниченными частичными суммами, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{k \to \infty} g_k(\omega) = 0 \quad (\omega \text{ фиксировано}) \tag{4.66}$$

и

$$\lim_{\omega \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} | g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega) | = 0. \tag{4.67}$$

Легко видеть, что (4.66) и *условие* (Б)$'$ *теоремы* (**4.2**, II) *вместе противоречат* (4.67), т. е. класс γ-матриц, удовлетворяющих (4.66) и (4.67), пуст. Таким образом, доказательство Нигама фактически показывает, что не существует γ-матриц, эффективных для всех рядов с ограниченными частичными суммами. Следовательно, мы получаем такую теорему типа теоремы Штейнгауза для γ-матриц:

(**4.6**, VII) *Для любой данной γ-матрицы G всегда существует ряд с ограниченными частичными суммами, который не суммируется этим методом.*

4.7. Теорема об ограниченных расходящихся последовательностях

(Теорема впервые была доказана А. Л. Брудно [1], 236, теорема 11; приведенное здесь доказательство принадлежит Эрдешу и Розенблюму [1].)

(**4.7**, I) *Пусть $\{x_n\}$ — расходящаяся ограниченная последовательность. Предположим, что $\{y_n\}$ суммируема любой T-матрицей, которая суммирует $\{x_n\}$. Тогда $\{y_n\}$ представима в виде $\{cx_n + a_n\}$, где $\{a_n\}$ сходится.*

Пусть $\{x_{k_n}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — какая-нибудь сходящаяся подпоследовательность из $\{x_n\}$. Тогда $\{x_n\}$ суммируется матрицей (a_{nk}), где $a_{nk_n} = 1$, $a_{nk} = 0$ $(k \neq k_n)$, и следовательно, $\{y_{k_n}\}$ также сходится.

Пусть $\{k'_n\}$ и $\{k''_n\}$ — последовательности целых чисел такие, что $k'_n \neq k''_n$ для всех n и

$$\lim_{n \to \infty} x_{k'_n} = A, \quad \lim_{n \to \infty} x_{k''_n} = B, \quad A \neq B;$$

в дальнейшем $\{k'_n\}$ и $\{k''_n\}$ будут считаться фиксированными. Тогда $\{y_{k'_n}\}$ и $\{y_{k''_n}\}$ также сходятся к α и β соответственно. Пусть $\{x_{k_n}\}$ —

*) В формулировке теоремы под матрицей $g_k(\omega)$ следует понимать общую матрицу, которая применяется к рядам (см. § 4.2). (*Прим. перев. и ред.*)

произвольная подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к C; если $\{x_n\}$ имеет только две различные предельные точки, то C будет совпадать с A или B.

Определим λ и μ из уравнений: $\lambda+\mu=1$, $\lambda A+\mu B=C$. Тогда матрица (b_{nk}), определенная условиями: $b_{n,k'_n}=\lambda$ (n — четное), $b_{n,k''_n}=\mu$ (n — четное), $b_{n,k_n}=1$ (n — нечетное), $b_{nk}=0$ для всех остальных значений k, суммирует $\{x_n\}$ к значению C и является T-матрицей. Следовательно, она также суммирует $\{y_n\}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} y_{k_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\lambda y_{k'_n}+\mu y_{k''_n}\right\}=\lambda\alpha+\mu\beta,$$

где n — нечетное в первом пределе и четное во втором.

Далее, λ и μ зависят только от C и не зависят от частной подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$, сходящейся к C; следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n}$ также зависит только от C и является фактически линейной функцией от C.

Определим постоянные m и a из уравнений

$$\alpha=mA+a,\quad \beta=mB+a.$$

Пусть $\{\vartheta_n\}$ — произвольная последовательность целых положительных чисел и пусть $\{k'''_n\}$ — подпоследовательность последовательности $\{\vartheta_n\}$ такая, что $\{x_{k'''_n}\}$ сходится, скажем, к C. Определим λ и μ, как и выше. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left\{y_{k'''_n}-mx_{k'''_n}\right\}=\lambda\alpha+\mu\beta-mC=$$
$$=\lambda(mA+a)+\mu(mB+a)-Cm=a.$$

Таким образом, любая подпоследовательность последовательности $\{y_n-mx_n\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к a, что и доказывает теорему.

Следствие. *Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — ограниченные расходящиеся последовательности и $\{y_n\}$ суммируема любой T-матрицей, которая суммирует $\{x_n\}$, то $\{x_n\}$ суммируема любой T-матрицей, которая суммирует $\{y_n\}$.*

4.8. Теорема Качмажа об ортогональных рядах

Следующая теорема, принадлежащая Качмажу [1], дает интересное применение T-матриц в теории ортогональных рядов; она является обобщением теоремы Колмогорова [1] для рядов Фурье*).

*) В теореме Колмогорова речь идет о рядах Фурье по тригонометрической системе. (*Прим. ред.*)

Система функций $\varphi_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ называется *ортогональной на* (a, b), если

$$\int_a^b \varphi_m(t)\varphi_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \lambda & (m = n), \end{cases}$$

где λ—постоянная *); система называется *ортонормальной на* (a, b), если $\lambda = 1$, т. е.

$$\int_a^b \varphi_m(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \delta_{mn}.$$

(**4.8**, I) *Пусть ряд* $\sum a_n^2$ *(a_n—действительные числа) сходится и* $\varphi_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — *действительные функции, ортонормальные на* $(0, 1)$. *Тогда если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(t)$ *суммируем почти всюду на* $(0, 1)$ *действительной* T*-матрицей* (b_{nk}), *то существует последовательность индексов* $\{n_i\}$, *зависящая только от матрицы* (b_{nk}), *такая, что последовательность*

$$s_{n_i}(t) = \sum_{k=1}^{n_i} a_k\varphi_k(t)$$

сходится почти всюду на $(0, 1)$.

Положим **)

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}s_k(t), \quad J_n = \int_0^1 \{s_n(t) - \sigma_n(t)\}^2\,dt.$$

---

*) Приведенное определение не общепринято. Обычно под ортогональной системой на $[a, b]$ понимают систему функций $\{\varphi_n(x)\}$, для которой

$$\int_a^b \varphi_m(t)\,\varphi_n(t)\,dt = 0 \text{ при всех } n \neq m. \text{ (Прим. ред.)}$$

**) По определению суммирования, равенство $\sigma_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}s_k(t)$ нужно понимать в смысле сходимости почти всюду на $[0, 1]$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}s_k(t)$ к функции $\sigma_n(t)$. (*Прим. ред.*)

Тогда *)

$$s_n(t)-\sigma_n(t)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(t)(1-b_{nk}-b_{n,k+1}-b_{n,k+2}-\ldots)-$$
$$-\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\varphi_k(t)(b_{nk}+b_{n,k+1}+b_{n,k+2}+\ldots),$$

и следовательно,

$$J_n=\sum_{k=1}^{n} a_k^2(1-b_{nk}-b_{n,k+1}-\ldots)^2+$$
$$+\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2(b_{nk}+b_{n,k+1}+\ldots)^2.$$

Так как (b_{nk}) — T-матрица, то мы можем записать:

$$1-b_{nk}-b_{n,k+1}-\ldots=b_{n1}+b_{n2}+\ldots+b_{n,k-1}+\varepsilon_n, \quad (4.81)$$

где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, и можно найти последовательность индексов $\{n_i\}$ такую, что:

(I) $$|\varepsilon_{n_i}|\leqslant\frac{1}{i};$$

(II) $$\left|\sum_{k=1}^{r} b_{n_i,k}\right|<\frac{1}{i} \quad \text{для } r\leqslant n_{i-1} \ (n_0=1);$$

(III) $$\left|1-\sum_{k=1}^{r} b_{n_i,k}\right|<\frac{1}{i} \quad \text{для } r\geqslant n_{i+1}.$$

Тогда мы имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} J_{n_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n_i} a_k^2\left(b_{n_i,1}+b_{n_i,2}+\ldots+b_{n_i k-1}+\varepsilon_{n_i}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=n_i+1}^{\infty} a_k^2\left(b_{n_i,k}+b_{n_i,k+1}+b_{n_i,k+2}+\ldots\right)^2\right].$$

---

*) В нижеследующих рассуждениях неявно предполагается, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k(t)\,b_{nk}=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(t)\left(\sum_{i=k}^{\infty} b_{ni}\right)$$

для почти всех $t\in[0, 1]$, т. е. в ряде $\sum_{k=1}^{\infty} s_k(t)\,b_{nk}$ сделана соответствующая разгруппировка членов, которая не всегда возможна. Ввиду этого приводимое доказательство корректно лишь для конечнострочных методов T.

Что касается случая произвольных методов суммирования, то теорема также остается верной, только в приводимом доказательстве функциональные равенства следует понимать в смысле сходимости по норме $L^2(0, 1)$. (*Прим. ред.*)

Используя свойства (I) и (II) последовательности $\{n_i\}$, получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n_{i-1}} a_k^2 (b_{n_i,1}+b_{n_i,2}+\ldots+b_{n_i,k-1}+\varepsilon_{n_i})^2 < \\ < \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left(\frac{2}{i}\right)^2 < K_1' \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < K_1,$$

где K_1 и K_1' — некоторые постоянные, а так как $\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| < M$ для любого n, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} a_k^2 (b_{n_i,1}+b_{n_i,2}+\ldots+b_{n_i,k-1}+\varepsilon_{n_i})^2 \leqslant \\ \leqslant (M+1)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} a_k^2 = (M+1)^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k^2 < K_2.$$

Используя свойства (I) и (III) последовательности $\{n_i\}$ и (4.81), получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=n_{i+1}+1}^{\infty} a_k^2 (b_{n_i,k}+b_{n_i,k+1}+\ldots)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \left(\frac{2}{i}\right)^2 < K_3$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} a_k^2 (b_{n_i,k}+b_{n_i,k+1}+\ldots)^2 \leqslant M^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} a_k^2 \leqslant M^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < K_4,$$

где K_2, K_3, K_4 — положительные постоянные.

Следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} J_{n_i}$ сходится. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} J_{n_i} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{N} \{s_{n_i}(t) - \sigma_{n_i}(t)\}^2\, dt < K$$

для любого N.

Таким образом, $\sum_{i=1}^{\infty} \{s_{n_i}(t) - \sigma_{n_i}(t)\}^2$ сходится почти всюду на $(0, 1)$, так что $s_{n_i}(t) - \sigma_{n_i}(t) \to 0$ при $i \to \infty$ почти всюду на $(0, 1)$.

Но, согласно предположению, $\sigma_{n_i}(t)$ стремится к пределу почти всюду на $(0, 1)$, и следовательно, то же самое имеет место и для $s_{n_i}(t)$, что и доказывает теорему.

Примеры к главе 4

1. Показать, что $g_k(\omega)=\dfrac{\Gamma(kt+1)}{\Gamma(k+1)}$, где $t=\dfrac{\omega}{\omega+1}$, является γ-матрицей. (Эта матрица известна под названием матрицы Ле-Руа; об обобщении ее см. Виньо [1].)

2. Показать, что если

$$g_0(\omega)=1,\ g_k(\omega)=\frac{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+k-1)}{(\omega+r)(\omega+r+1)\ldots(\omega+r+k-1)}\quad (k\geqslant 1),$$

где $r>0$, то $(g_k(\omega))$ является γ-матрицей.

3. Пусть $g(x)$ — действительная возрастающая функция, причем существуют пределы

$$\lim_{x\to 0} g(x)=A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} g(x)=A+1,$$

и пусть $a_k(\omega)=g(\theta_k\omega)-g(\theta_{k+1}\omega)$, где последовательность чисел θ_k монотонно стремится к нулю при $k\to\infty$. Показать, что $(a_k(\omega))$ будет T-матрицей.

4. Пусть $\Omega=\left(a_{nk}^{(1)}\right)$ — положительная матрица, такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{(1)}=1$. Доказать, что сумма элементов любой строки матрицы Ω^n, где n — любое целое положительное число, равна 1.

5. Если T-матрица (a_{nk}) удовлетворяет условию $\lim\limits_{k\to\infty} ka_{nk}=0$ для любого фиксированного n, то показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}=\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk},$$

где $b_{nk}=k(a_{nk}-a_{n,k+1})$. Доказать также, что если

$$\left|\frac{z_1+z_2+\ldots+z_k}{k}\right|<N$$

для любого k, то при тех же условиях на (a_{nk})

$$z_n'=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}z_k=\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}\left(\frac{z_1+z_2+\ldots+z_k}{k}\right),$$

и если дополнительно $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|b_{nk}|<M$ для любого n, то $|z_n'|$ будут ограничены. Дальше, если $\dfrac{z_1+z_2+\ldots+z_k}{k}\to z$, то при тех же условиях на (a_{nk}) и (b_{nk}) последовательность $z_n'\to z$.

Таким образом, когда $A\equiv(a_{nk})$ удовлетворяет указанным условиям, то A «эффективна», по крайней мере, так же, как и матрица средних арифметических *).

*) См. § 8.7 после (8.7, III).

6. Если T-матрица (a_{nk}) удовлетворяет условию $\lim\limits_{k\to\infty} k^2 a_{nk}=0$ для любого фиксированного n, то показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\,(k+1)\,(a_{nk}-2a_{n,\,k+1}+a_{n,\,k+2}).$$

Если, кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2\,|\,a_{nk}-2a_{n,\,k+1}+a_{n,\,k+2}\,|<M$$

для любого n, то показать, что $A\equiv(a_{nk})$ эффективна, по крайней мере, как метод $(C, 2)$, т. е. если положить

$$z_k^{(1)}=\sum_{n=1}^{k} z_n,\quad z_k^{(2)}=\sum_{n=1}^{k} z_n^{(1)} \text{ и если } \frac{2}{k^2}\,z_k^{(2)}\to z,$$

то $z_n'\equiv\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}z_k\to z$; если же $\left\{\dfrac{z_k^{(2)}}{k^2}\right\}$ ограниченная, то и $\{z_n'\}$ ограниченная *).

7 **). Обобщить теорему Штейнгауза (**4.4**, III) на любую комплексную T-матрицу.

(Если $a_{nk}=a_{nk}'+ia_{nk}''$ — T-матрица и

$$A_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}=A_n'+iA_n'',$$

где a_{nk}', a_{nk}'', A_n', A_n'' действительные, то $A_n'\to 1$, $A_n''\to 0$. Легко видеть, что (a_{nk}') является T-матрицей и результат следует из (**4.4**, III).)

8. Провести доказательство (**4.4**, VII) для случаев, когда $U=+\infty$, $L=-\infty$ (один или оба).

9. Иллюстрировать (**4.4**, I), когда $(a_k(\omega))$ — матрица Бореля и

(I) $z_k=k\,[1+i(-1)^k]$; (II) $z_k=k+i\cos kx$ (x фиксировано).

10. Иллюстрировать (**4.5**, IV) и (**4.5**, V), взяв в качестве $\{s_n\}$ последовательности: (I) $e^{\frac{ni\pi}{6}}$; (II) $\cos\dfrac{n\pi}{3}+i\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

---

*) См. § 8.7 после (**8.7**, III).
**) Примеры 7 и 8 даны Вермсом.

11. Показать, что для любого ε, удовлетворяющего условию $0 < \varepsilon < 1$, имеют место соотношения

$$e^{-\omega} \sum_{k=0}^{[\omega(1-\varepsilon)]} \frac{\omega^k}{k!} \to 0,$$

$$e^{-\omega} \sum_{k=[\omega(1+\varepsilon)]}^{\infty} \frac{\omega^k}{k!} \to 0, \text{ когда } \omega \to \infty,$$

и, следовательно, $e^{-\omega} \sum\limits_{k=[\omega(1-\varepsilon)]}^{[\omega(1+\varepsilon)]} \frac{\omega^k}{k!} \to 1$, где $[x]$ — целая часть x.

12 *). Доказать, что последовательность будет сходящейся, если существует T-матрица, которая суммирует все ее подпоследовательности. (Предположим, что данная расходящаяся последовательность $\{s_n\}$ является действительной и ограниченной. Положим

$$s'_n = \frac{s_n - \varliminf\limits_{n\to\infty} s_n}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} s_n - \varliminf\limits_{n\to\infty} s_n},$$

так что $\varliminf\limits_{n\to\infty} s'_n = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} s'_n = 1$. Показать, что $\{s'_n\}$ содержит подпоследовательность $\{s'_{r_n}\}$, которая не суммируется никакой заранее заданной T-матрицей, в противном случае это противоречило бы доказательству (4.4, III).)

13 **). Пусть A — T-матрица и $\{x_n\}$ — ограниченная комплексная последовательность. Доказать, что существует подпоследовательность $\{y_n\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что множество L_Y предельных точек A-преобразования $\{Y_n\}$ последовательности $\{y_n\}$ содержит множество L_X предельных точек $\{x_n\}$.

14 ***). Если A применима к ряду $\sum z_k$, то положим $\alpha_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k$. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится к s, то мы будем называть s *обобщенной суммой ряда* $\sum z_k$, *полученной в результате преобразования ряда в ряд*, и обозначать ее через $A \sum z_k$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k = s,$$

при условии, что двойной ряд сходится.

---

*) Бак [1].

**) Агнью [10]. Результат Агнью является обобщением результата Бака, данного в примере 12.

***) Относительно примеров 14—20 см. Вермс [5].

Если G и A связаны соотношением $g_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}$, то показать, что преобразование ряда в ряд при помощи матрицы A равносильно преобразованию ряда в последовательность при помощи матрицы G. Доказать также, что, для того чтобы преобразование ряда в ряд при помощи A преобразовывало всякий сходящийся ряд в ряд, сходящийся к той же самой сумме, необходимо и достаточно, чтобы G была γ-матрицей. Матрицу A, удовлетворяющую этому условию, назовем *α-матрицей.*

15. Показать, что α-матрица является β-матрицей, где $\beta_k = 0$, т. е. она преобразует всякий сходящийся ряд в нуль-последовательность. Показать также, что для α-матрицы $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ для любого k. Построить пример матрицы A, которая удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} | a_{nk} - a_{n,\,k+1} | \leqslant M$$

для любого n и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ (и следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ для любого фиксированно k), но которая не является α-матрицей, так как соответствующая матрица G, определенная равенством $g_{nk} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}$, не является γ-матрицей.

16. Для того чтобы GA была γ-матрицей для любой γ-матрицы G, необходимо и достаточно, чтобы A была α-матрицей. Доказать.

Отметим, что произведение AG α-матрицы A и γ-матрицы G может и не существовать.

17. Показать, что произведение двух α-матриц существует и является α-матрицей.

18. Если C — α-матрица, все столбцы у которой одинаковы, а A и B — α-матрицы, то доказать, что $C(A - B) = 0$.

19. Для того, чтобы XB была β-матрицей для любой β-матрицы B, необходимо и достаточно, чтобы X была K-матрицей. Доказать.

20. Для того чтобы BX была β-матрицей для любой β-матрицы B, необходимо и достаточно, чтобы Y, где $y_{jk} = x_{1k} + x_{2k} + \ldots + x_{jk}$, была β-матрицей. Доказать.

21 *). Доказать, что расходящаяся последовательность $z_k = \cos k\varphi$, где $\varphi \neq 2m\pi$, m — целое число или нуль, суммируема $(J, 0)$ (§ 4.3 (V)) к значению 0; показать, что это согласуется с суммой $(C, 1)$.

22. Доказать, что расходящаяся последовательность $(-1)^k\left(k + \frac{1}{2}\right)$ не суммируется матрицей $(C, 1)$, суммируется матрицей Бореля к 0 и не суммируется методом $\left(J, \frac{1}{2}\right)$, кроме того случая, когда ω пробегает последовательность $\frac{1}{2}n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; в этом случае последовательность суммируется $\left(J, \frac{1}{2}\right)$ к 0. Таким образом, $2J^2_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$ суммирует последовательность, которая не суммируется $(C, 1)$.

---

*) Относительно примеров 21—23 см. Кук [4].

23. Доказать, что ряд Фурье функции $f(x)$ суммируется $\left(J, \frac{1}{2}\right)$ к значению $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ для любого x, для которого это выражение имеет смысл, и что он суммируем $\left(J, \frac{1}{2}\right)$ к $f(x)$ в любой точке Лебега и, значит, почти всюду.

24 *). Для того чтобы произведение матриц AG могло существовать и быть γ-матрицей для любой γ-матрицы G, необходимо и достаточно, чтобы A была T-матрицей.

25. Показать, что произведение GA γ-матрицы G и T-матрицы A не обязательно будет γ-матрицей и может даже не существовать. Взять в качестве A матрицу средних арифметических, а в качестве G использовать матрицы: (I) $g_{nk}=1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, $g_{nk}=0$ $(k>n)$ и (II) $g_{nk}=1$ для любых n и k.

---

*) Относительно примеров 24 и 25 см. Вермс [1].

ГЛАВА 5

СОВМЕСТНОСТЬ, ВЗАИМНАЯ СОВМЕСТНОСТЬ И АБСОЛЮТНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

5.1. Определения

Положим

$$z_n' = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k, \quad z_n'' = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} z_k, \tag{5.11}$$

где матрицы A и B суть T-матрицы, а $\{z_k\}$ — расходящая последовательность. Если z_n' и z_n'' стремятся к пределам при $n \to \infty$, мы будем говорить, что A и B *сравнимы для* $\{z_k\}$.

Обозначим через $C^*(A, B)$ множество расходящихся последовательностей, для которых A и B сравнимы. Тогда:

(I) если существует последовательность $\{z_k\}$, принадлежащая $C^*(A, B)$, для которой

$$A\text{-}\lim z_n \neq B\text{-}\lim z_n,$$

то A и B называются *несовместными*;

(II) если $A\text{-}\lim z_n = B\text{-}\lim z_n$ для любой последовательности $\{z_n\}$ из $C^*(A, B)$, то A и B называются *совместными*.

Если $C^* \equiv C^*(A, B)$ пусто, то A и B *несравнимы*.

Пусть A^* и B^* обозначают множества расходящихся последовательностей $\{z_n\}$, для которых существуют $A\text{-}\lim z_n$ и $B\text{-}\lim z_n$ соответственно, и предположим, что A и B совместны. Тогда, если C^* непусто, то могут представиться четыре возможности:

(1) A^* и B^* частично совпадают; тогда C^* будет множеством расходящихся последовательностей, которое является общей частью A^* и B^*.

(2) A^* включает B^*, тогда $C^* = B^*$, и мы будем это обозначать $A \supset B$. Таким образом, включение $A \supset B$ означает, что: (а) каждая последовательность, суммируемая B, суммируется A; (б) каждая такая последовательность суммируется A и B к одному и тому же значению.

(3) B^* включает A^*, т. е. $B \supset A$; в этом случае $C^* = A^*$.

(4) A^* и B^* совпадают; в этом случае $C^* = A^* = B^*$. A и B называются *взаимно-совместными* для какого-либо данного класса последовательностей z_k, если всякий раз, когда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}z_k$ стремится к пределу при $n \to \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}z_k$ стремится к тому же пределу, и *наоборот*; это мы будем записывать $A \sim B$.

Мы видим, что в случае (4) имеет место $A \sim B$. Но ни в случае (2), ни в случае (3) в отдельности A и B не являются взаимно-совместными, а будут просто *совместными*. Конечно, если имеют место одновременно случаи (2) и (3), т. е. $A \supset B$ и $B \supset A$, то это совпадает со случаем (4) и тогда A и B будут взаимно-совместными.

Примеры пар взаимно-совместных T-матриц хорошо известны. Например, (C, k) и (H, k), т. е. средние Чезаро и Гёльдера целого положительного порядка k, как известно, взаимно-совместны (Гобсон [1], т. II, 67); то же самое имеет место и для средних Чезаро и Рисса любого положительного порядка r (Гобсон [1], т. II, 90—98; Гобсон употребляет термин «эквивалентные» вместо «взаимно-совместные» (стр. 86); см. также (**5.4**, III) настоящей книги).

С другой стороны, легко построить примеры T-матриц A и B, которые являются несовместными. Например, определим A и B условиями $a_{n,2k-1} = \frac{2k}{n^2}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$:

$$a_{n,2k-1} = 0 \ (k > n), \ a_{n,2k} = 0 \text{ для любых } n \text{ и } k,$$
$$b_{n,2k} = \frac{2k}{n^2} \, (1 \leqslant k \leqslant n), \ b_{n,2k} = 0 \quad (k > n),$$
$$b_{n,2k-1} = 0 \text{ для любых } n \text{ и } k,$$

и пусть $\{z_k\}$ — расходящаяся последовательность

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

Тогда

$$A\text{-}\lim z_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}\right) = 1,$$

но

$$B\text{-}\lim z_n = 0.$$

Очевидно, что A и B будут T-матрицами.

В обозначениях (5.11) матрицы A и B называются *абсолютно эквивалентными* для данного класса последовательностей z_k, если $z'_n - z''_n \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. z'_n и z''_n стремятся в отдельности к одному и тому же значению, или же ни одна из них не стремится к пределу, но их разность стремится к нулю (Кук [6] и [7]).

Ясно, что A и B в этом случае не обязаны быть сравнимыми. Если A и B взаимно-совместны для $\{z_k\}$, то они абсолютно эквивалентны для $\{z_k\}$, но обратное может быть не верно.

5.2. Совместность и коммутативность

Мы рассмотрим сначала *совместность* и покажем, что между совместностью A и B и их коммутативностью существует тесная связь (Динс [1], 412—418).

(**5.2**, I) *Если T-матрицы A и B коммутативны, то A и B совместны, по крайней мере, для ограниченных последовательностей* *).

Действительно, если $A(z_n) = z'_n \to z'$ и $B(z_n) = \bar{z}_n \to \bar{z}$ при $n \to \infty$, то мы имеем $B(z'_n) = z''_n \to z'$ и $A(\bar{z}_n) = \bar{\bar{z}}_n \to \bar{z}$, ибо $\{z'_n\}$ и $\{\bar{z}_n\}$ — сходящиеся последовательности.

Для ограниченных последовательностей

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni} a_{ik} \right) z_k, \tag{5.21}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} b_{ik} \right) z_k. \tag{5.22}$$

Перемена порядка суммирования здесь допустима, так как двойные ряды в обоих случаях абсолютно сходятся для любого n, если A и B суть T-матрицы.

Таким образом,

$$B(z'_n) = (BA)(z_n) \quad \text{и} \quad A(\bar{z}_n) = (AB)(z_n). \tag{5.23}$$

Но так как, по предположению, $AB = BA$, то правые части в (5.21) и (5.22) равны между собой, так что $(BA)(z_n) = (AB)(z_n)$. Следовательно, $B(z'_n) = A(\bar{z}_n)$, т. е. $z''_n = \bar{\bar{z}}_n$, и полагая $n \to \infty$, получим $z' = \bar{z}$. Теорема доказана.

(**5.2**, II) *Если T-матрицы A и B с конечными строками коммутативны, то соответствующие T-пределы совместны всякий раз, когда они существуют.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству (**5.2**, I); перемена порядка суммирования в этом случае допустима для любых $\{z_k\}$, так как все встречавшиеся выше суммы будут конечными.

Мы будем обозначать через (AB) преобразование данной последовательности, совершаемое посредством матрицы, представляющей собой произведение матриц AB, и через $A[B]$ — преобразование A, примененное к последовательности, полученной в результате преобра-

*) Часто бывает желательно рассматривать совместность A и B для *класса* последовательностей, например для ограниченных последовательностей, вместо всего множества последовательностей $C(A, B)$. Относительно некоторых результатов, связанных с материалом этого параграфа, см. примеры 11—15 к гл. 5.

зования данной последовательности матрицей B; таким образом, (5.22) может быть записано в виде

$$A[B(z_n)] = (AB)\,z_n. \tag{5.24}$$

Если A и B имеют бесконечные строки, то равенство (5.24) может и не иметь места для неограниченных последовательностей, так как перемена порядка суммирования может в этом случае привести к различным результатам.

Рассуждения в предыдущих двух теоремах остаются справедливыми, если для $\{z_n\}$ имеет место равенство

$$B[A] = (BA) = (AB) = A[B].$$

Таким образом, получаем следующую теорему:

(**5.2**, III) *Если две коммутативные T-матрицы A и B применяются к $\{z_k\}$, для которой*

$$B[A(z_k)] = (BA)(z_k) \quad \textit{и} \quad A[B(z_k)] = (AB)(z_k),$$

то A и B совместны для $\{z_k\}$.

Опишем метод, позволяющий иногда установить наличие условий (**5.2**, III).

Если A есть K_r-матрица, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|$ сходится и, следовательно, радиус сходимости ρ_n степенного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}z^k$ будет, по крайней мере, 1 для любого n.

Величина $\rho = \varliminf\limits_{n\to\infty} \rho_n$ называется *радиусом круга* (*применения*) K_r-матрицы (a_{nk}) (Динс [1], 409). Очевидно, что $\rho \geqslant 1$. Положим, далее,

$$r = \varliminf_{k\to\infty} \left|\sqrt[k]{z_k}\right|, \qquad R = \varlimsup_{k\to\infty} \left|\sqrt[k]{z_k}\right|. \tag{5.25}$$

Будем говорить, что последовательность $\{z_k\}$ лежит *внутри круга* матрицы A, если $R < \rho$, и *вне круга* матрицы A, если $r > \rho$.

(**5.2**, IV) *K_r-матрица применима ко всякой последовательности, лежащей внутри круга, и неприменима ни к какой последовательности, лежащей вне его.*

Согласно определению (5.25) для любых положительных чисел $\theta < 1$ и $\eta > 1$ можно указать такое p, что при $k > p$ будем иметь:

$$(\theta r)^k < |z_k| < (\eta R)^k. \tag{5.26}$$

Также для любого положительного $\zeta < 1$ найдется число m такое, что при $n > m$ будет выполняться $\rho_n > \zeta\rho$. Если теперь $R < \rho$, то существует $\zeta < 1$, причем ζ так близко к 1, что $R < \zeta\rho$, и аналогично существует $\eta > 1$ такое близкое к 1, что $\eta R < \zeta\rho < \rho_n$ для $n > m$, где m зависит от ζ.

Следовательно, $z = \eta R$ лежит внутри круга сходимости каждого из степенных рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z^k \qquad (n > m),$$

и значит, все степенные ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| (\eta R)^k \qquad (n > m)$$

сходятся. Первая часть теоремы вытекает теперь из неравенства (5.26).

Далее, для любого $\eta' > 1$ найдется бесконечное множество значений n_i $(i = 1, 2, \ldots)$, для которых $\rho_{n_i} < \eta'\rho$. Если $r > \rho$, то существует такое η', что $\eta'\rho < r$, и такое положительное $\theta < 1$, что $\theta r > \eta'\rho$. Следовательно, $z = \theta r$ лежит вне круга сходимости каждого из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_i, k} z^k \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, в каждом из этих рядов имеется бесконечное множество членов, которые при $z = \theta r$ по модулю больше 1. Такое же явление имеет место и для рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_i, k} z_k \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$

это следует из неравенства (5.26). Следовательно, все эти ряды расходятся, откуда и вытекает второе утверждение теоремы.

Последовательность $\{z_k\}$ называется лежащей *внутри круга двух последовательных преобразований* $B[A]$, если $\rho_n = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} z_k|$ находится внутри круга матрицы B, т. е. если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ni}| \rho_i$ сходится для каждого $n \geqslant n_0$ *).

*) Пояснение не корректно, ибо расположение последовательности $\{\rho_n\}$ внутри круга матрицы B и сходимость рядов $\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ni}| \rho_i$ при $n \geqslant n_0$ не эквивалентны. Так, например, если $b_{ni} = \frac{1}{i^2}$ при всех n и $\rho_k = 1$ при всех k, то указанные ряды сходятся и тем не менее последовательность $\{\rho_k\} = \{1\}$ не лежит внутри круга матрицы $B = (b_{ni})$, радиус которого равен 1. (*Прим. ред.*)

(**5.2**, V). *Если* $\{z_k\}$ *находится внутри кругов преобразований* $A[B]$ *и* $B[A]$, *где* A *и* B — *коммутативные* T-*матрицы, то* A- *и* B-*пределы* $\{z_k\}$ *совместны всякий раз, когда они существуют.*

Действительно, так как $\{z_k\}$ находится внутри круга $B[A]$, то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ni}| \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}z_k|$$

сходится для любого $n \geqslant n_0$ и, следовательно,

$$B[A(z_k)] \equiv \sum_{i=1}^{\infty} b_{ni} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni}a_{ik} \right) z_k = (BA)(z_k).$$

Аналогично, так как $\{z_k\}$ находится внутри круга $A[B]$, то

$$A[B(z_k)] = (AB)(z_k).$$

Но, по предположению, $AB = BA$, и следовательно, две последовательности

$$z''_n = B[A(z_k)] \quad \text{и} \quad \overline{\overline{z}}_n = A[B(z_k)]$$

совпадают. Результат следует теперь из (**5.2**, III).

5.3. Коммутативность бесконечных матриц

Теоремы § 5.2 по существу основаны на *коммутативности* двух бесконечных матриц. В этом параграфе будут изложены все те немногочисленные результаты, которые известны по этому вопросу.

(**5.3**, I) *Все диагональные матрицы коммутативны между собой; диагональная матрица с различными элементами* *) *коммутативна только с диагональными матрицами.*

Действительно, если D и D' — две диагональные матрицы, то $DD' = D'D$ приводит к равенству $d_n d'_n = d'_n d_n$, которое, очевидно, справедливо. Если A — какая-нибудь матрица, то $AD = DA$ приводит к равенству $a_{nk}d_k = d_n a_{nk}$ или $a_{nk}(d_k - d_n) = 0$. Если D — диагональная матрица с различными элементами, то $d_k \neq d_n$, когда $k \neq n$, и следовательно, $a_{nk} = 0$ для $k \neq n$, так что A — диагональная матрица.

Вопросы коммутативности матриц связаны с трансформацией данной матрицы A в диагональную матрицу D.

По определению (см. пример 7 к гл. 2), матрица A называется Ω-трансформацией матрицы D в поле F, если $A = \Omega^{-1} \cdot D\Omega$, где D, Ω и ${}^{-1}\Omega = \Omega^{-1}$ принадлежат одному и тому же ассоциативному полю F.

---

*) То есть диагональная матрица, у которой все элементы на главной диагонали различны.

Если B — какая-нибудь матрица, коммутативная с A, то

$$\Omega^{-1}\cdot D\Omega B = B\Omega^{-1}\cdot D\Omega. \tag{5.31}$$

Следующие шаги являются чисто формальными и требуют обоснования. Предположим, что D — диагональная матрица с различными элементами; тогда, умножая обе части равенства (5.31) слева на Ω и справа на Ω^{-1}, получим:

$$D\cdot\Omega B\Omega^{-1} = \Omega B\Omega^{-1}\cdot D.$$

Следовательно, согласно (**5.3**, I), $\Omega B\Omega^{-1} = D_1$ является диагональной матрицей. Это приводит к равенству $\Omega B = D_1\Omega$ или $B = \Omega^{-1}\cdot D_1\Omega$, т. е. B (подобно A) является Ω-трансформацией диагональной матрицы.

Обратно, если $A = \Omega^{-1}\cdot D\Omega$ и $B = \Omega^{-1}\cdot D_1\Omega$, то

$$AB = \Omega^{-1}\cdot D\Omega\Omega^{-1}\cdot D_1\Omega = \Omega^{-1}\cdot DD_1\Omega =$$
$$= \Omega^{-1}\cdot D_1D\Omega = \Omega^{-1}\cdot D_1\Omega\Omega^{-1}\cdot D\Omega = BA.$$

Следовательно (при условии, что проведенные выше формальные преобразования справедливы), если A является Ω-трансформацией диагональной матрицы с различными элементами, то, для того чтобы $AB = BA$, необходимо и достаточно, чтобы B была Ω-трансформацией диагональной матрицы.

Формальные преобразования будут оправданы, если все рассмотренные произведения матриц существуют и для них выполняется ассоциативный закон.

Как известно, произведение двух матриц с конечными строками, K_r-матриц или H-матриц, является соответственно матрицей с конечными строками, K_r-матрицей или H-матрицей. (Доказательство для H-матриц см. (**9.4**, II).)

Следовательно, проведенные выше рассуждения оправданы, если: (а) A, B, Ω, Ω^{-1} — матрицы с конечными строками, ибо в этом случае все встречающиеся при умножении матриц суммы будут конечными, или если (б) A, B, Ω Ω^{-1} суть K_r-матрицы, а D и D_1 ограничены, или если (в) A, B, Ω, Ω^{-1} суть H-матрицы, а D и D_1 ограничены.

Возьмем, например, случай (б). Если $AB = BA = C$, то

$$\left(\Omega AB\Omega^{-1}\right)_{ij} = \left(\Omega C\Omega^{-1}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{ik}c_{km}\omega_{mj}^{-1}$$

и двойной ряд абсолютно сходится при любых i и j, так как Ω, C и Ω^{-1} являются K_r-матрицами. Действительно, так как $|\omega_{mj}^{-1}| \leqslant M'$ для любых m и j, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\omega_{ik}| \sum_{m=1}^{\infty} |c_{km}\omega_{mj}^{-1}| \leqslant M' \sum_{k=1}^{\infty} |\omega_{ik}| \sum_{m=1}^{\infty} |c_{km}| \leqslant MM'M''.$$

Аналогично тройной ряд, соответствующий произведению $\Omega^{-1} \cdot D\Omega\Omega^{-1} \cdot D_1\Omega$, абсолютно сходится, так как D и D_1 ограничены.

Таким образом, мы получаем следующий результат:

(**5.3**, II) *Пусть A — Ω-трансформация ограниченной диагональной матрицы с различными элементами и пусть матрицы A, B, Ω, Ω^{-1} или все с конечными строками, или все K_r-матрицы, или все H-матрицы. Тогда B будет коммутативной с A в том и только в том случае, если B будет Ω-трансформацией диагональной матрицы, которая должна быть ограниченной, если B, Ω и Ω^{-1} — все K_r-матрицы или все H-матрицы.*

Относительно последнего пункта только что сформулированной теоремы отметим, что если B, Ω, Ω^{-1} — все K_r-матрицы или все H-матрицы, то $D_1 = \Omega B \Omega^{-1}$ будет того же типа и, таким образом, необходимо будет ограниченной.

Если A — нижняя треугольная матрица, то проведенные рассуждения упрощаются, ибо в этом случае, согласно (**3.3**, I), A необходимо будет Ω-трансформацией диагональной матрицы D, где $d_n = a_{nn}$ при условии, что a_{nn} различны. Таким образом, мы приходим к следующему результату:

(**5.3**, III) *Пусть A — нижняя треугольная матрица с различными элементами, лежащими на главной диагонали. Тогда*:

(I) *существует нижняя треугольная матрица Ω, такая, что A является Ω-трансформацией диагональной матрицы D, элементы которой $d_n = a_{nn}$;*

(II) *нижняя треугольная матрица B коммутативна с A тогда и только тогда, когда B является Ω-трансформацией диагональной матрицы;*

(III) A-$\lim z_n$ *и* B-$\lim z_n$, *если они существуют, совместны при условии, что A и B суть T-матрицы и B является Ω-трансформацией диагональной матрицы.*

Если A—матрица средних арифметических (1.24), то легко видеть, что равенство $\Omega A = D\Omega$ выполняется в случае, когда Ω — матрица Эйлера (§ 2.1; см. пример 1 к гл. 5), которая является п. с. и л. с. обратной для самой себя.

Следовательно, как частный случай (**5.3**, III) получаем такой результат (Гурвиц и Сильверман [1]):

(**5.3**, IV) *Нижняя треугольная матрица A коммутативна с матрицей M средних арифметических тогда и только тогда,* *когда A является трансформацией диагональной матрицы, совершаемой при помощи матрицы Эйлера или матрицы, полученной заменой всех элементов главной диагонали в матрице Эйлера произвольными числами. Все нижние треугольные T-матрицы, коммутативные с M, совместны.*

В той же работе Гурвица и Сильвермана приведен частный случай теоремы (**4.6**, IV), а именно: *если функция* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *аналитическая внутри и на границе круга* $|z|=1$ *и* $f(1)=1$, *то* $f(M)$ *является T-матрицей.*

Ими также получен следующий результат:

(**5.3**, V) *Если* $f(M)$ — *матрица* (Θ_{ni}), *то числа* Θ_{ni} *определяются через* $f(z)$ *по формуле*

$$\Theta_{ni}=\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-i)!\,(i-1)!}\,f\left(\frac{1}{k}\right).$$

Обобщением этого результата является следующая теорема:

(**5.3**, VI) *Пусть матрица A является Ω^{-1}-трансформацией диагональной матрицы D, такой, что* $0<|d_n|\leqslant 1$, *где*

$$\Omega \text{ и } \Omega^{-1} \text{ являются } K_r\text{-матрицами.} \tag{5.32}$$

Пусть также $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *где ряд* $\sum |c_n|$ *сходится. Тогда матрица* $f(A)\equiv(\Theta_{ni})$ *определяется через* $f(z)$ *по формуле*

$$\Theta_{ni}=\sum_{k=1}^{\infty}\omega_{nk} f(d_k)\,\omega_{ki}^{-1}. \tag{5.33}$$

Мы докажем этот результат сначала для $f(z)\equiv z^r$ (r — целое положительное число), так что $f(A)=A^r$. Обозначим матрицу A^r через $\left(a_{ni}^{(r)}\right)$. Мы должны показать, что в этом случае

$$a_{ni}^{(r)}=\sum_{k=1}^{\infty}\omega_{nk} d_k^r \omega_{ki}^{-1}. \tag{5.34}$$

По предположению, $A=\Omega D\Omega^{-1}$. Следовательно,

$$A^r=\left(\Omega D\Omega^{-1}\right)^r=\Omega D\Omega^{-1}\cdot\Omega D\Omega^{-1}\,\ldots\,\Omega D\Omega^{-1}=\Omega D^r\Omega^{-1},$$

так как ассоциативный закон имеет место в силу условия (5.32). Поэтому элемент n-й строки и i-го столбца матрицы $\left(a_{ni}^{(r)}\right)$ имеет вид

$$a_{ni}^{(r)}=\sum_{k=1}^{\infty}\omega_{nk} d_k^{(r)}\,\omega_{ki}^{-1},$$

что совпадает с (5.34). В силу (5.32) этот ряд абсолютно сходится. Следовательно, $f(A)=\sum_{r=0}^{\infty} c_r A^r$, т. е.

$$\Theta_{ni}=\sum_{r=0}^{\infty} c_r a_{ni}^{(r)}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_r \omega_{nk} d_k^r \omega_{ki}^{-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} \omega_{nk}\omega_{ki}^{-1}\sum_{r=0}^{\infty} c_r d_k^r=\sum_{k=1}^{\infty}\omega_{nk} f(d_k)\,\omega_{ki}^{-1},$$

что совпадает с (5.33).

Перемена порядка суммирования в двойном ряде оправдана, так как он абсолютно сходится в силу предположения, что $|d_k|\leqslant 1$, сходимости $\sum |c_r|$ и условия (5.32). Теорема доказана.

В заключение мы заметим, что имеется способ построения дальнейших примеров коммутативных матриц, связанный со степенными рядами от коммутативных матриц. Примером такого построения может служить следующий результат (Динс [1], 415):

(5.3, VII) *Если A и B — коммутативные K_r-матрицы с K_r-гранями M и N соответственно и если ряды*

$$\sum_{p=0}^{\infty} |c_p| M^p = c \quad \text{и} \quad \sum_{p=0}^{\infty} |e_p| N^p = e$$

сходятся, то матрицы

$$C=\sum_{p=0}^{\infty} c_p A^p \quad \text{и} \quad E=\sum_{p=0}^{\infty} e_p B^p$$

коммутативны и являются K_r-матрицами с K_r-гранями, не превышающими c и e соответственно.

Так как A — K_r-матрица, то мы имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ni}|\,|a_{ik}|=\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ni}|\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|\leqslant M\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ni}|\leqslant M^2$$

и т. д. для любой степени A и аналогично для B. Следовательно, если матрицы A^p и B^p обозначить через $\left(a_{nk}^{(p)}\right)$ и $\left(b_{nk}^{(p)}\right)$, мы получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_{nk}^{(p)}\right|\leqslant M^p, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|b_{nk}^{(p)}\right|\leqslant N^p,$$

так что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}|c_p|\left|a_{nk}^{(p)}\right|\leqslant c, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}|e_p|\left|b_{nk}^{(p)}\right|\leqslant e.$$

Таким образом, C и E являются K_r-матрицами с K_r-гранями, не превышающими c и e соответственно. Но

$$|(CE)_{nk}| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |c_p| \, |a_{ni}^{(p)}| \sum_{q=0}^{\infty} |e_q| \, |b_{ik}^{(q)}| \leqslant ce,$$

так что мы можем переставлять члены ряда для $(CE)_{nk}$ любым образом без изменения его суммы. Сгруппировав члены, для которых $p+q=m$, мы получим:

$$CE = \sum_{m=0}^{\infty} (c_0 e_m B^m + c_1 e_{m-1} A B^{m-1} + \ldots \\ \ldots + c_{m-1} e_1 A^{m-1} B + c_m e_0 A^m) = EC,$$

ибо коэффициенты c_r и e_r, так же как и матрицы A и B, можно менять местами, отчего значение общего члена ряда не изменится.

Из (**4.6**, IV), (**5.2**, III) и (**5.3**, VII) вытекает следующий результат:

(**5.3**, VIII) *Предположим, что*:

(I) *A и B — коммутативные T-матрицы с K_r-гранями M и N соответственно*;

(II) *ряды* $\sum_{p=0}^{\infty} |c_p| M^p = c$, $\sum_{p=0}^{\infty} |e_p| N^p = e$ *сходятся и*

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_p = 1 \quad \sum_{p=0}^{\infty} e_p = 1.$$

Тогда

$$C = \sum_{p=0}^{\infty} c_p A^p \quad \text{и} \quad E = \sum_{p=0}^{\infty} e_p B^p$$

совместны для $\{z_k\}$ *при условии, что*

$$C[E(z_k)] = (CE)(z_k) \quad \text{и} \quad E[C(z_k)] = (EC)(z_k).$$

5.4. Абсолютная эквивалентность для ограниченных последовательностей

(**5.4**, I) *Для того чтобы T-матрицы A и B были абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей, необходимо и достаточно, чтобы*

$$S_n \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| \to 0 \qquad (n \to \infty), \tag{5.41}$$

где $c_{nk} = a_{nk} - b_{nk}$ (Кук [6], [7]).

(I) В соответствии с обозначениями (5.11) имеем $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}z_k = z'_n - z''_n$. Если $|z_k| \leqslant M$ для любого k, то

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}z_k \right| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}|.$$

Следовательно, если выполняется (5.41), то $z'_n - z''_n \to 0$, так что условие (5.41) является достаточным.

(II) Наоборот, пусть $z'_n - z''_n \to 0$, т. е. $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}z_k \to 0$ при $n \to \infty$ для *любой* ограниченной последовательности $\{z_k\}$. Покажем, что тогда $S_n \to 0$.

(а) Пусть (c_{nk}) — *действительная* матрица. Если S_n не стремится к нулю, то она должна стремиться к положительному пределу, например α, или иметь несколько конечных предельных точек, включая, быть может, нуль, ибо для любого $n \geqslant n_0$

$$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| \leqslant K. \tag{5.42}$$

Предположим сначала, что

$$S_n \to \alpha. \tag{5.43}$$

Тогда мы построим действительную последовательность $\{z_k\}$ (ср. с (**4.4**, III)), такую, что

$$-1 \leqslant z_k \leqslant 1, \tag{5.44}$$

причем $z'_n - z''_n$ не стремится к нулю.

В соответствии с условием (5.43) мы можем выбрать n_1 такое, что для любого $n \geqslant n_1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}| > \frac{3}{4}\alpha,$$

и затем выбрать m_1 такое, что

$$\sum_{k=m_1+1}^{\infty} |c_{n_1,k}| < \frac{1}{24}\alpha,$$

что возможно в силу (5.42).

Определим, как и в (**4.1**, I), функцию $\operatorname{sgn}(x)$ (x — действительное): $\operatorname{sgn}(x) = 1$ ($x > 0$), $\operatorname{sgn}(x) = -1$ ($x < 0$), $\operatorname{sgn}(0) = 0$. Тогда, если $z_k = \operatorname{sgn}(c_{n_1, k})$ для $1 \leqslant k \leqslant m_1$, то в соответствии с условием (5.44) имеем:

$$z_{n_1}^* \equiv \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_1, k} z_k \right| \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_1, k}| - 2 \sum_{k=m_1+1}^{\infty} |c_{n_1, k}| > \frac{2}{3} \alpha.$$

Так как A и B суть T-матрицы, то

$$\lim_{n \to \infty} c_{n, k} = 0 \tag{5.45}$$

для любого фиксированного k.

Следовательно, мы можем подобрать $n_2 > n_1$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{m_1} |c_{n_2, k}| < \frac{1}{6} \alpha,$$

и затем $m_2 > m_1$, чтобы

$$\sum_{k=m_2+1}^{\infty} |c_{n_2, k}| < \frac{1}{6} \alpha,$$

что возможно в силу (5.42).

Тогда, положив $z_k = 0$ для $m_1 < k \leqslant m_2$, мы получим:

$$z_{n_2}^* \equiv \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_2, k} z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{m_1} |c_{n_2, k}| + \sum_{k=m_2+1}^{\infty} |c_{n_2, k}| < \frac{1}{3} \alpha.$$

Дальше, принимая во внимание условия (5.43) и (5.45), выберем $n_3 > n_2$ такое, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_3, k}| > \frac{3}{4} \alpha, \qquad \sum_{k=1}^{m_2} |c_{n_3, k}| < \frac{1}{48} \alpha,$$

и затем выберем $m_3 > m_2$ такое, чтобы

$$\sum_{k=m_3+1}^{\infty} |c_{n_3, k}| < \frac{1}{48} \alpha,$$

что возможно в силу (5.42).

Тогда, положив $z_k = \operatorname{sgn}(c_{n_3, k})$ для $m_2 < k \leqslant m_3$, мы получим:

$$z_{n_3}^* \equiv \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_3, k} z_k \right| \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n_3, k}| - 2 \sum_{k=1}^{m_2} |c_{n_3, k}| - 2 \sum_{k=m_3+1}^{\infty} |c_{n_3, k}| > \frac{2}{3} \alpha.$$

Продолжая этим путем, мы построим последовательность $\{z_k\}$ такую, что все ее элементы равны 0 или ± 1, а $z_{n_r}^*$ $(r = 1, 2, \ldots)$, т. е. $z'_{n_r} - z''_{n_r}$, не стремится ни к какому пределу.

Если $\{S_n\}$ имеет несколько предельных точек, одна из которых, скажем, α, то найдется последовательность индексов n'_r $(r=1, 2, \ldots)$ такая, что $\lim\limits_{r\to\infty} S_{n'_r}=\alpha$. Следовательно, если заменить в предыдущих рассуждениях n соответственно на n', то получим доказательство теоремы и в этом случае. Таким образом, условие (5.41) является необходимым, если (c_{nk}) — действительная матрица.

(б) Если (c_{nk}) — комплексная матрица, то мы напишем $c_{nk}=r_{nk}e^{i\theta_{nk}}$ и положим $z_k=e^{-i\theta_{n_1,k}}$ для $1\leqslant k\leqslant m_1$, $z_k=0$ для $m_1<k\leqslant m_2$, $z_k=e^{-i\theta_{n_3,k}}$ для $m_2<k\leqslant m_3$ и т. д.; остальные рассуждения проводятся так же, как и выше. Следовательно, условие (5.41) необходимо и в том случае, когда (c_{nk}) — комплексная матрица. Теорема доказана.

Понятие абсолютной эквивалентности легко распространить и на случай, когда одна или обе матрицы A и B *полунепрерывные* (см. § 1.8).

Пусть $n=[\omega]$ — целая часть непрерывной переменной ω; тогда, положив

$$z'_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}z_k,\quad z''(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k(\omega)\,z_k,$$

мы скажем, что T-матрицы (a_{nk}) и $(b_k(\omega))$ *абсолютно эквивалентны для данного класса последовательностей* $\{z_k\}$, если $z'_n-z''(\omega)\to 0$ при $\omega\to\infty$. Определение абсолютной эквивалентности в случае, когда A и B *обе* полунепрерывны, становится теперь очевидным.

(**5.4**, II) *Нижняя треугольная матрица B и общая матрица A не могут быть абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей, если не выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_{nk}|=0.$$

Действительно, в обозначениях теоремы (**5.4**, I)

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}|c_{nk}|+\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_{nk}|,$$

где члены положительны или нули.

В качестве примера к (**5.4**, I) приведем следующий результат (примеры 2 и 3 к гл. 5 иллюстрируют эту теорему):

(**5.4**, III) *Средние Чезаро любого положительного порядка r и «дискретные» средние Рисса того же самого порядка* *) *абсо-*

*) См. § 5.6, а также М. Рисс [1], [2] и Агнью [3].

лютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей. Полагая в этом случае k изменяющимся от 0 до n, получаем:

$$S_n = \frac{r}{r+n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{n!\, r\Gamma(r+n-k)}{(n-k)!\,\Gamma(r+n+1)} - \left(1-\frac{k}{n}\right)^r + \right.$$
$$\left. + \left(1-\frac{k+1}{n}\right)^r \right| + \frac{n!\,\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+n+1)}.$$

Первый член справа стремится к нулю при $n\to\infty$; то же самое имеет место и для последнего члена в силу формулы Стирлинга для $\Gamma(x)$.

Далее,

$$\frac{n!\, r\Gamma(r+n-k)}{(n-k)!\,\Gamma(r+n+1)} = \frac{r}{n-k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^r (1+\varphi_{n-k}),$$

где $\varphi_{n-k}\to 0$ при $n-k\to\infty$.

Покажем сначала, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{r}{n-k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^r |\varphi_{n-k}| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Разобьем эту сумму на две: от 1 до $n-\theta_n$ и от $n-\theta_n+1$ до $n-1$, где $\theta_n\to\infty$ и $\frac{\theta_n}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда в первой сумме $|\varphi_{n-k}|\leqslant\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$ (так как тогда $n-k\to\infty$), а во второй сумме $|\varphi_{n-k}|<K_1$ (K_1 — постоянная). Учитывая это, получаем:

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{r}{n-k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^r \varphi_{n-k} \right| \leqslant r\varepsilon_n n^{-r} \sum_{k=1}^{n-\theta_n} (n-k)^{r-1} +$$
$$+ rK_1 n^{-r} \sum_{k=n-\theta_n+1}^{n-1} (n-k)^{r-1} \leqslant K_2\varepsilon_n + rK_1\left(\frac{\theta_n}{n}\right)^r \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

так как $\frac{\theta_n}{n}\to\infty$.

Следовательно, для доказательства того, что $S_n\to 0$ при $n\to\infty$, достаточно показать, что

$$S'_n \equiv \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{r}{n-k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^r - \left(1-\frac{k}{n}\right)^r + \left(1-\frac{k+1}{n}\right)^r \right| \to 0. \quad (5.46)$$

9*

Так как $\left(1-\frac{k+1}{n}\right)^r=\left(1-\frac{k}{n}\right)^r\left(1-\frac{1}{n-k}\right)^r$, мы имеем:

$$\frac{r}{n-k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^r-\left(1-\frac{k}{n}\right)^r+\left(1-\frac{k+1}{n}\right)^r=$$
$$=\left(1-\frac{k}{n}\right)^r\left[\frac{r(r-1)}{2!}\cdot\frac{1}{(n-k)^2}+O\left\{\frac{1}{(n-k)^3}\right\}\right]=$$
$$=\frac{r(r-1)}{2n^r(n-k)^{2-r}}+O\left[\frac{(n-k)^{r-3}}{n^r}\right]=O(n^{-s}), \tag{5.47}$$

где $s=\min(r, 2)$.

(а) Если $r>2$, то, согласно (5.46), $S'_n=\sum_{k=1}^{n-1}O(n^{-2})\to 0$ при $n\to\infty$.

(б) Если $1<r<2$, то $S'_n=\sum_{k=1}^{n-1}O(n^{-r})\to 0$ при $n\to\infty$.

(в) Если $r=1$, то непосредственным подсчетом в (5.46) убеждаемся, что $S'_n=0$.

(г) Если $0<r<1$, то, согласно (5.47):

$$S'_n=O\left[\frac{1}{n^r}\sum_{p=1}^{n-1}p^{r-2}\right]\to 0 \quad \text{при } n\to\infty,$$

так как ряд $\sum_{p=1}^{\infty}p^{r-2}$ абсолютно сходится.

Теорема доказана.

5.5. Абсолютная эквивалентность для неограниченных последовательностей

Обратимся теперь к *неограниченным* последовательностям. Выберем сначала неограниченную последовательность $\{\theta_k\}$ такую, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\theta_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}\theta_k, \quad R_n\equiv\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}\theta_k| \tag{5.51}$$

существуют для любого n.

(Это условие автоматически выполняется, если A и B — обе нижние треугольные матрицы.) Будем рассматривать класс неограниченных последовательностей $\{z_k\}$, для которых

$$|z_k|\leqslant|\theta_k|. \tag{5.52}$$

(5.5, I) *Для того чтобы T-матрицы A и B были абсолютно эквивалентны для всех (неограниченных) последовательностей, удовлетворяющих условиям* (5.51) *и* (5.52), *необходимо и достаточно, чтобы $R_n\to 0$ при $n\to\infty$.*

(I) Условие является достаточным. Действительно,

$$R'_n \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk} z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk} \theta_k| = R_n,$$

так что $R'_n \to 0$, ибо $R_n \to 0$ при $n \to \infty$.

(II) Обратно, пусть $z'_n - z''_n \to 0$, т. е. $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} z_k \to 0$ при $n \to \infty$ для *всех* $\{z_k\}$, удовлетворяющих одновременно условиям (5.51) и (5.52)*).

Покажем, что в этом случае $R_n \to 0$ $\left(\text{и следовательно, } R'_n \to 0\right)$.

Предположим, что R_n не стремится к нулю. Тогда или $R_n \to \alpha$, где α — положительное число, или R_n имеет несколько конечных предельных точек, включая, быть может, 0 или $R_n \to \infty$.

(a) Если $R_n \to \alpha$, мы можем, как и в (**5.4**, I), построить последовательность $\{v_k\}$, удовлетворяющую (5.52) и такую, что соответсвующая последовательность $z'_n - z''_n$ не стремится к 0.

Предположим сначала, что (c_{nk}) действительная. Без ограничения общности мы можем считать, что последовательность $\{\theta_k\}$ в (5.51) действительная и положительная. Тогда, употребляя те же обозначения, что и в (**5.4**, I), мы положим:

$$\begin{array}{lll} v_k = \theta_k \operatorname{sgn}(c_{n_1, k}) & \text{для} & 1 \leqslant k \leqslant m_1, \\ v_k = 0 & \text{для} & m_1 < k \leqslant m_2, \\ v_k = \theta_k \operatorname{sgn}(c_{n_3, k}) & \text{для} & m_2 < k \leqslant m_3, \\ v_k = 0 & \text{для} & m_3 < k \leqslant m_4 \end{array}$$

и т. д.

Как и в (**5.4**, I), мы будем иметь:

$$v^*_{n_1} > \frac{2}{3}\alpha, \quad v^*_{n_2} < \frac{1}{3}\alpha, \quad v^*_{n_3} > \frac{2}{3}\alpha, \quad v^*_{n_4} < \frac{1}{3}\alpha \quad \text{и т. д.}$$

---

*) Более точно это означает, что для всех $|z_k| \leqslant \theta_k$ $\left(\text{где } R_n = \sum_{k=1}^{\infty} |(a_{nk} - b_{nk})\,\theta_k| < \infty\right)$, для которых $z'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k$ и $z''_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} z_k$ существуют и $z'_n - z''_n \to 0$ при $n \to \infty$, $R_n \to 0$. Вопрос существования z'_n и z''_n автор не рассматривает. Дальнейшее доказательство ведется так, как будто из одного условия $|z_k| \leqslant |\theta_k|$ (см. построение v_k) вытекает, что существуют z'_n и z''_n. Это, конечно, неверно, в чем легко убедиться на примере. Доказательство теоремы (**5.5**, I) будет корректным, если потребовать, чтобы ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\theta_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}\theta_k$ абсолютно сходились для всех n (или $n \geqslant n_0$). (*Прим. ред.*)

Таким образом, все элементы $\{v_k\}$ будут 0 или $\pm\theta_k$, так что $\{v_k\}$ удовлетворяет условию (5.52), и требуемый результат для случая, когда $R_n \to \alpha$ и (c_{nk}) действительная, доказан.

Случай, когда $\{R_n\}$ имеет несколько предельных точек, приводится к разобранному так же, как это сделано в (**5.4**, I).

Если (c_{nk}) комплексная, то мы запишем $c_{nk} = r_{nk}e^{i\varphi_{nk}}$ и в этом случае возьмем:

$$\begin{aligned}
v_k &= \theta_k e^{-i\varphi_{n_1,k}} && \text{для} \quad 1 \leqslant k \leqslant m_1,\\
v_k &= 0 && \text{для} \quad m_1 < k \leqslant m_2,\\
v_k &= \theta_k e^{-i\varphi_{n_3,k}} && \text{для} \quad m_2 < k \leqslant m_3,\\
v_k &= 0 && \text{для} \quad m_3 < k \leqslant m_4
\end{aligned}$$

и т. д.; остальная часть доказательства проводится, как и выше.

(б) Предположим теперь, что $R_n \to \infty$. Тогда мы построим действительную последовательность $\{x_k\}$, $|x_k| \leqslant 1$, $x_k \to 0$, такую, что

$$x'_n \equiv \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\theta_k x_k$$

содержит подпоследовательность, стремящуюся к ∞; θ_k предполагаются действительными и положительными.

Так как A и B суть T-матрицы, то

$$\lim_{n\to\infty} c_{nk} = 0 \tag{5.53}$$

для любого фиксированного k.

Следовательно, если p — фиксированное число, то последовательность

$$\sum_{k=1}^{p} |c_{nk}\theta_k| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

имеет наибольший член (зависящий от p); мы обозначим его через C_p.

Так как $R_n \to \infty$, то для последовательно выбранных n и p, скажем для n_1 и p'_1, мы имеем:

$$\sum_{k=1}^{p'_1} |c_{n_1,k}\theta_k| > \beta^2,$$

где $\beta > 1$ — некоторое фиксированное число.

Когда n_1 выбрано, подберем число $p_1 > p'_1$ такое, что

$$\sum_{k=p_1+1}^{\infty} |c_{n_1,k}\theta_k| \leqslant \varepsilon,$$

где ε — данное положительное число.

Предположим сначала, что (c_{nk}) действительная.

Возьмем $x_k = \frac{1}{\beta} \operatorname{sgn}(c_{n_1,\,k})$ для $1 \leqslant k \leqslant p_1$. Тогда

$$x'_{n_1} = \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{p_1} |c_{n_1,\,k}\theta_k| + \sum_{k=p_1+1}^{\infty} c_{n_1,\,k}\theta_k x_k,$$

т. е. $|x'_{n_1}| > \beta - \varepsilon$, так как $|x_k| \leqslant 1$.

Определим теперь $n_2 > n_1$ и $p'_2 > p_1$ так, чтобы

$$\frac{1}{\beta^2} \sum_{k=p_1+1}^{p'_2} |c_{n_2,\,k}\theta_k| > C_{p_1} + \beta^2, \tag{5.54}$$

и, фиксируя n_2, определим $p_2 > p'_2$, чтобы

$$\sum_{k=p_2+1}^{\infty} |c_{n_2,\,k}\theta_k| \leqslant \varepsilon. \tag{5.55}$$

Положим $x_k = \frac{1}{\beta^2} \operatorname{sgn}(c_{n_2,\,k})$ для $p_1 < k \leqslant p_2$; тогда

$$x'_{n_2} = \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^{p_1} c_{n_2,\,k}\theta_k \operatorname{sgn}(c_{n_1,\,k}) + \frac{1}{\beta^2} \sum_{k=p_1+1}^{p_2} |c_{n_2,\,k}\theta_k| + \sum_{k=p_2+1}^{\infty} c_{n_2,\,k}\theta_k x_k;$$

следовательно, согласно (5.54) и (5.55), $x'_{n_2} > \beta^2 - \varepsilon$.

Продолжая таким путем, мы определим последовательность $\{x_k\}$, $x_k \to 0$, такую, что для определенных значений n $x'_n \to \infty$, т. е. мы определим последовательность $\theta_k x_k$ (удовлетворяющую (5.52)), для которой соответствующая последовательность $z'_n - z''_n$ содержит подпоследовательность, стремящуюся к ∞.

В случае, когда (c_{nk}) комплексная, доказательство можно провести аналогично, полагая только $c_{nk} = r_{nk} e^{i\varphi_{nk}}$ и выбирая $x_k = \beta^{-1} e^{-i\varphi_{n_1,\,k}}$ для $1 \leqslant k \leqslant p_1$ и т. д.

Случаи (а) и (б) показывают, что условие $R_n \to 0$ необходимо. Теорема доказана.

(**5.5**, II) *Нижняя треугольная матрица B и общая матрица A не могут быть абсолютно эквивалентны для всех (неограниченных) последовательностей, удовлетворяющих* (5.52) *вместе с* (5.51), *без того чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{nk}\theta_k| = 0.$$

Действительно,

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} |c_{nk}\theta_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{nk}\theta_k|,$$

где члены положительны или нули.

В связи с теоремой (**5.5**, I) отметим следующее:

(I) М. Рисс обратил внимание на различие между пределами

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^r z_k \quad \text{и} \quad \lim_{\omega\to\infty}\sum_{k<\omega}\left(1-\frac{k}{\omega}\right)^r z_k,$$

где n — целое положительное, а ω — непрерывная положительная переменная; может оказаться, что существование одного из этих пределов не влечет существование другого (М. Рисс [1] и [2]; см. также Агнью [3]). Второй из пределов определяет метод суммирования средними Рисса (§ 4.3 (VII)), первый же предел определяет метод суммирования *«дискретными» средними Рисса* (см. (**5.4**, III)). Рисс показал, что в общем случае, когда $\{z_k\}$ не обязательно ограниченная, оба метода эквивалентны (т. е. взаимно-совместны) при $0<r<1$, но не эквивалентны при $r=2$ или $r=3$, хотя их эквивалентность сохраняется и в этом случае, если в первом из методов сумму $\sum\limits_{k=1}^{n-1}$ заменить на $\sum\limits_{k=1}^{n-2}$.

Можно показать, что имеет место следующий результат (доказательство см. Кук [7]):

(**5.5**, III) *Полунепрерывные и дискретные средние Рисса любого порядка $r>0$ абсолютно эквивалентны для всех $\{z_k\}$, таких, что*

$$z_k=o(k),\ \textit{если}\ r\geqslant 1;\quad z_k=o(k^r),\ \textit{если}\ 0<r<1. \tag{5.56}$$

*Этот результат «наилучший из возможных»**).

Из определения абсолютной эквивалентности (§ 5.1) немедленно следует, что если A, B и C суть T-матрицы (дискретные или полунепрерывные) и попарно (A, B) и (A, C) абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей, то матрицы (B, C) также абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей. Из этого замечания и (**5.5**, III) вытекает, что *в* (**5.4**, III) *«дискретные» средние Рисса могут быть заменены на полунепрерывные средние Рисса.*

(II) Следующий, подобный предыдущему, результат относится к средним Бореля (доказательство см. Кук [7]):

(**5.5**, IV) *Дискретные и полунепрерывные средние Бореля абсолютно эквивалентны для всех $\{z_k\}$, таких, что $z_k=o(\sqrt{k})$. Этот результат «наилучший из возможных».*

5.6. Транслятивные и абсолютно трянслятивные T-пределы

Вопросы взаимной совместности и абсолютной эквивалентности близко соприкасаются с вопросами транслятивности и абсолютной транслятивности предельных преобразований и методов суммирования.

*) То есть теорема становится неверной, если в (5.56) заменить o на O.

Для того чтобы объяснить эти понятия, мы отметим основное различие между обычной сходимостью и обобщенной (обобщенная сходимость — это сходимость последовательности, полученной в результате матричного преобразования первоначальной последовательности). В первом из этих случаев любая подпоследовательность данной последовательности $\{z_n\}$ сходится к тому же самому пределу, что и данная; это, в частности, верно и в том случае, если мы добавим или удалим конечное число элементов. Аналогично, если ряд $\sum c_n$ сходится к s, мы можем прибавить или вычесть сумму s', например сумму конечного числа членов, без нарушения сходимости, причем сумма нового ряда будет равна $s \pm s'$. Что же касается второго случая, то он может и не обладать этими свойствами, т. е. если данная последовательность $\{z_n\}$ преобразуется T-матрицей в последовательность $\{z'_n\}$, сходящуюся, например, к s, то ниоткуда не следует, что любая подпоследовательность последовательности $\{z_n\}$ также преобразуется этой матрицей в последовательность, сходящуюся к s. Это происходит потому, что *в преобразованной последовательности $\{z'_n\}$ любой элемент зависит от всех элементов z_n первоначальной последовательности.*

*T-предел (или T-преобразование) называется транслятивным, если существование T-предела для одной из последовательностей $\{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$ или $\{z_2, z_3, z_4, \ldots\}$ влечет существование T-предела для другой и они равны**). Таким образом, преобразование $A(z_n)$, где A — T-матрица, является транслятивным в том и только в том случае, если (I) *или* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_{k+1}$, *или* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,\,k+1} z_{k+1}$ стремится к пределу при $n \to \infty$ и (II) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(z_k - z_{k+1}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как $a_{n1} z_1 \to 0$ при $n \to \infty$, то условие (II) эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - a_{n,\,k+1}) z_{k+1} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty;$$

таким образом, обе последовательности в (I) должны стремиться к пределам при $n \to \infty$ и эти пределы будут равны.

Положим $z'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_{k+1}$, $z''_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,\,k+1} z_{k+1}$, где A — T-матрица; T-преобразование $A(z_n)$ называется абсолютно трансля-

---

*) Автор, следуя Динсу [1], 418, называет такое преобразование «регулярным». В русском переводе мы будем всюду употреблять для этого преобразования термин «транслятивное», введенный Хиллом [2]. (*Прим. перев.*)

тивным, если $z'_n - z''_n \to 0$ *при* $n \to \infty$ (Кук [6], 123—125), т. е. как z'_n, так и z''_n стремятся к одному и тому же пределу, или ни одно из них не стремится к пределу, но их разность стремится к нулю.

Если рассматривать вместо последовательностей ряды, то мы будем называть *метод* γ*-суммирования ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *транслятивным, если* γ*-суммируемость одного из рядов* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *или* $\sum_{k=2}^{\infty} c_k$ *влечет то же самое для другого и* $s_2 = s_1 - c_1$, *где* s_2 *есть* γ*-сумма последнего из рядов, а* s_1 *есть* γ*-сумма первого из них.*

Иными словами, если $s(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_{k+1}$, $\sigma(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{k+1}(\omega) c_{k+1}$ и если один из пределов $\lim\limits_{\omega\to\infty} s(\omega)$ или $\lim\limits_{\omega\to\infty} \sigma(\omega)$ существует, то существует и другой и оба предела равны. Действительно,

$$s(\omega) - \sigma(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \{g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\} c_{k+1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega)(c_{k+1} - c_k) + c_1 g_1(\omega) \to s_2 - s_1 + c_1 = 0 \qquad (\omega \to \infty).$$

Из определений немедленно следует, что:

(I) *Если* T*-преобразование* $A(z_n)$ *транслятивно, то соотношение*

$$A\text{-}\lim(z_1, z_2, \ldots) = z$$

влечет за собой

$$A\text{-}\lim(z_p, z_{p+1}, \ldots) = z$$

(p *— любое целое положительное число*), *и наоборот.*

(II) *Если* $G(c_k)$ *— транслятивный метод* γ*-суммирования и* G*-сумма ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *равна* s, *то когда вставим в ряд любым образом новые члены* $c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$, *тогда новый ряд будет* G*-суммируем к значению* $s + c'_1 + c'_2 + \ldots + c'_p$.

В качестве примера можно отметить, что *средние Чезаро и Рисса любого порядка* $r > 0$ *и метод суммирования Абеля транслятивны* (см. Перрон [1], Динс [1], 419; см. также примеры 6 и 7 к гл. 5 и Сильверман [3]).

(**5.6**, I) *Экспоненциальный метод суммирования Бореля не является транслятивным, однако абсолютно экспоненциальный метод транслятивен* (Динс [1], 419).

Пусть $f(t)=1+\frac{e^t\sin t^2}{t}$ и пусть коэффициенты c_k определены из соотношения

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!}=f'(t)-f(t). \tag{5.61}$$

По определению экспоненциального метода суммирования (§ 4.3 (VI)),

$$g_k(\omega)=\frac{1}{k!}\int_0^{\omega}e^{-t}t^k dt.$$

Следовательно, из (5.61) получаем:

$$\int_0^{\omega}e^{-t}[f'(t)-f(t)]\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}g_{k+1}(\omega)\,c_{k+1}\equiv\sigma(\omega).$$

Интегрирование по частям показывает, что

$$\sigma(\omega)=e^{-\omega}f(\omega)-f(0)=e^{-\omega}f(\omega)-1,$$

т. е.

$$\sigma(\omega)=\frac{\sin\omega^2}{\omega}+e^{-\omega}-1\to-1 \quad \text{при } \omega\to\infty.$$

Но

$$s(\omega)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}g_k(\omega)\,c_{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{k+1}}{k!}\int_0^{\omega}e^{-t}t^k dt=$$

$$=\int_0^{\omega}e^{-t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{k+1}t^k}{k!}\right)dt,$$

или, согласно (5.61),

$$s(\omega)=\int_0^{\omega}e^{-t}[f''(t)-f'(t)]\,dt=e^{-\omega}f'(\omega)-1,$$

так как

$$f'(t)=e^t\left(\frac{\sin t^2}{t}+2\cos t^2-\frac{\sin t^2}{t^2}\right)$$

и $f'(0)=1$.

Следовательно,

$$s(\omega)=\frac{\sin\omega^2}{\omega}+2\cos\omega^2-\frac{\sin\omega^2}{\omega^2}-1$$

и $s(\omega)$ не имеет предела при $\omega\to\infty$.

Рассмотрим теперь функцию $u(\omega)$, связанную с рядом $\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ соотношением, указанным в § 4.3 (VI); функция, имеющая аналогичную связь с рядом $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$, является $u'(\omega)$.

Из сказанного в § 4.3 (VI) следует, что если $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ суммируем экспоненциальными средними к значению s, то $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ также суммируем этим методом к значению $s+c_0$. Следовательно, добавление к ряду члена не нарушает суммируемость ряда экспоненциальными средними, но приведенный выше пример (принадлежащий Харди) показывает, что удаление члена ряда может нарушить суммируемость. Этот факт мы выразим следующим образом: экспоненциальный метод суммирования Бореля *трансляттивен слева*.

Абсолютная суммируемость (B) есть частный случай суммируемости (B). Следовательно, из сделанных выше замечаний для доказательства второй части теоремы достаточно показать, что если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ абсолютно суммируем (B), то $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ также абсолютно суммируем (B).

По определению, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ абсолютно суммируем (B), если все интегралы

$$\int_A^{\infty} e^{-x}\left|\frac{d^r u(x)}{dx^r}\right| dx \qquad (r=0,\ 1,\ \ldots,\ A>0)$$

существуют. Но как мы уже видели, функция $u(\omega)$ для $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ обращается в $u'(\omega)$ для $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$; следовательно, условия для абсолютной суммируемости (B) (которую мы обозначим через $|B|$) ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ содержат также условия для суммируемости $|B|$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$.

Остается только доказать, что

$$|B|\text{-сумма ряда } \sum_{k=0}^{\infty} c_k = c_0 + |B|\text{-сумма ряда } \sum_{k=1}^{\infty} c_k. \qquad (5.62)$$

Условия для $|B|$-суммируемости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ или $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ включают, в частности, существование интеграла

$$\int^{\infty} e^{-x} u'(x)\, dx.$$

Следовательно, согласно § 4.3 (VI), равенство (5.62) имеет место и теорема тем самым доказана.

Экспоненциальный метод Бореля является частным случаем преобразований, транслятивных только слева или справа. Общее определение таких преобразований следующее.

Если существование A-предела последовательности $\{z_1, z_2, \ldots\}$ влечет существование A-предела для $\{z_0, z_1, z_2, \ldots\}$ и если оба эти предела равны, но обратное утверждение не верно, то A-предел называется *транслятивным слева* (Хилл [2], Динс [1], 420; Динс называет его «полурегулярным слева»). *Если существование* $A\text{-}\lim\{z_0, z_1, z_2, \ldots\}$ *влечет существование* $A\text{-}\lim\{z_1, z_2, \ldots\}$ *и эти пределы равны, а обратное утверждение не верно, то A-предел называется транслятивным справа* (Хилл [2]).

В связи с (**5.6**, I) представляет интерес следующий результат, принадлежащий Вермсу [3]:

(**5.6**, II) *Экспоненциальный метод суммирования Бореля транслятивен для всех степенных рядов в многоугольнике суммируемости.*

Если D — многоугольник суммируемости для степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и z_0 — какая-либо точка внутри D, то

$$\lim_{\omega\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\omega) c_k z_0^k = f(z_0), \tag{5.63}$$

где

$$g_k(\omega) = \frac{1}{k!}\int_0^{\omega} e^{-t} t^k dt \qquad (\omega > \omega_0).$$

Функция $\varphi(z) \equiv \frac{1}{z}[f(z) - c_0]$ имеет особенности в тех же конечных точках, что и $f(z)$, и не имеет других особых точек. Следовательно, ее многоугольник суммируемости будет тот же самый, а именно D.

Далее, ряд Тэйлора функции $\varphi(z)$ будет $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^n$, поэтому если (5.63) имеет место, то метод G применим к ряду для $\varphi(z)$, т. е.

$$\lim_{\omega\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\omega) c_{k+1} z_0^k = \varphi(z_0) = \frac{1}{z_0}[f(z_0) - c_0].$$

Умножая на z_0, мы получим:

$$\lim_{\omega\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\omega) c_{k+1} z_0^{k+1} = f(z_0) - c_0. \tag{5.64}$$

Таким образом, (5.64) является следствием (5.63), откуда и следует требуемый результат, ибо обратное также верно в силу (**5.6**, I).

Как мы видели ((**4.4**, IV), (**4.4**, VI)), различные обобщенные пределы последовательности не вегда равны между собой. Поэтому желательно выбрать один из них, который можно рассматривать как «правильное» значение обобщенного предела при надлежащем определении этого термина.

Для последовательностей частичных сумм ряда Тэйлора такой выбор может быть эффективно проведен следующим путем. Возьмем ряд Тэйлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, представляющий собой известную функцию $f(z)$ или ее определенную ветвь, и рассмотрим последовательность частичных сумм этого ряда в точке z_0 вне или на границе круга сходимости и внутри главной звездной области, включая вершины (Динс [1], 308). «Правильное» значение обобщенного предела этой последовательности мы определим равным $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ (где $z \to z_0$ вдоль радиуса-вектора, проведенного из начала координат в точку z_0), если этот предел существует. Если z_0 является регулярной точкой функции $f(z)$, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ может быть заменен на $f(z_0)$.

(**5.6**, III) *Если транслятивный или транслятивный слева метод γ-суммирования суммирует расходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, то его γ-сумма будет «правильным» значением* $\frac{1}{1-z}$ (Динс [1], 418; см. также примеры 16 и 17 к гл. 5).

Действительно, если мы обозначим γ-сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ через $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\right]_\gamma$, то, согласно предположению, будем иметь:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right]_\gamma = \left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right]_\gamma - 1 = \sigma - 1, \quad \text{где } \sigma \equiv \left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right]_\gamma.$$

Но

$$\left[z \sum_{n=0}^{\infty} z^n\right]_\gamma = z\left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right]_\gamma = z\sigma.$$

Следовательно, $\sigma - 1 = z\sigma$, так что $\sigma = \frac{1}{1-z}$.

В заключение этого параграфа приведем некоторые результаты, относящиеся к *абсолютной транслятивности* T-пределов.

$A(z_n)$ будет абсолютно транслятивным T-пределом тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk}-a_{n,k+1})\,z_{k+1}\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Так как сейчас (a_{nk}) является T-матрицей, то и $(a_{n,k+1})$ будет T-матрицей. Используя доказательства теорем (**5.4**, I) и (**5.5**, I) с заменой в них b_{nk} на $a_{n,k+1}$, мы получим следующие результаты (Кук [6], 123—125):

(**5.6**, IV). *Для того чтобы T-преобразование $A(z_n)$ было абсолютно транслятивным для всех ограниченных последовательностей $\{z_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sigma_n\equiv\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}-a_{n,k+1}|\to 0 \quad \textit{при} \quad n\to\infty.$$

Обращаясь к неограниченным последовательностям $\{z_n\}$, мы рассмотрим только такой класс из них, для которого $|z_k|\leqslant\theta_k$ (θ_k — действительные положительные возрастающие числа), где

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\theta_k,\ \sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k+1}\theta_{k+1},\\ &\rho_n\equiv\sum_{k=1}^{\infty}|(a_{nk}-a_{n,k+1})\,\theta_{k+1}|\end{aligned}\right\} \tag{5.65}$$

существуют для каждого n.

Так как условия (5.65) получаются из (5.51)*) заменой в последних b_{nk} на $a_{n,k+1}$ и θ_k на θ_{k+1}, то мы имеем:

(**5.6**, V) *Для того чтобы T-преобразование $A(z_n)$ было абсолютно транслятивным для всех (неограниченных) последовательностей $\{z_k\}$, удовлетворяющих условию $|z_k|\leqslant\theta_k$ вместе с* (5.65), *необходимо и достаточно, чтобы $\rho_n\to 0$ при $n\to\infty$.*

(В качестве упражнения к (**5.6**, IV) см. пример 10 к гл. 5.)

Следующий результат иллюстрирует (**5.6**, V).

(**5.6**, VI) *Матрица Бореля абсолютно транслятивна для всех (неограниченных) последовательностей $\{z_k\}$, для которых $z_k=o(\sqrt{k})$. Этот результат «наилучший из возможных».*

---

*) См. сноску к доказательству теоремы (**5.5**, I). (*Прим. ред.*)

Мы имеем:

$$\rho_n = e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{n^k}{k!}-\frac{n^{k+1}}{(k+1)!}\right| o(\sqrt{k}) =$$

$$= e^{-n}\sum_{k=0}^{n-2}\left[\frac{n^{k+1}}{(k+1)!}-\frac{n^k}{k!}\right] o(\sqrt{k}) + e^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}\left[\frac{n^k}{k!}-\frac{n^{k+1}}{(k+1)!}\right] o(\sqrt{k}) =$$

$$= e^{-n} o(\sqrt{n})\sum_{k=0}^{n-2}\left[\frac{n^{k+1}}{(k+1)!}-\frac{n^k}{k!}\right] + e^{-n} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\left[\frac{n^k}{k!}-\frac{n^{k+1}}{(k+1)!}\right] k =$$

$$= e^{-n} o(\sqrt{n})\left(\frac{n^n}{n!}-1\right) + e^{-n} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\left[\frac{n^k}{(k-1)!}-\frac{n^{k+1}}{k!}\right] +$$

$$+ e^{-n} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{n^{k+1}}{(k+1)!} = e^{-n} o(\sqrt{n})\, O\left(\frac{e^n}{\sqrt{n}}\right) +$$

$$+ e^{-n} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[\frac{n^n}{(n-1)!} + O(e^n)\right] = e^{-n} o(e^n) +$$

$$+ e^{-n} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[O(e^n\sqrt{n}) + O(e^n)\right] = o(1) + o(1) \quad \text{при } n \to \infty, \tag{5.66}$$

что и доказывает первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения заменим во второй строке выражения (5.66) для ρ_n величину $o(\sqrt{k})$ на $\sqrt{k}$; этого достаточно, чтобы показать, что ρ_n в этом случае не стремится к нулю. Обозначив полученные после замены две суммы во второй строке (5.66) соответственно через S_1 и S_2, мы видим, что $S_1 \geqslant 0$ для любого n, в то время как

$$S_2 > e^{-n}\sqrt{n}\sum_{k=n}^{\infty}\left\{\frac{n^k}{k!}-\frac{n^{k+1}}{(k+1)!}\right\} = e^{-n}\sqrt{n}\,\frac{n^n}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Следовательно, ρ_n не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Теорема доказана.

(**5.6**, VII) *Средние Чезаро любого порядка $r > 0$ абсолютно транслятивны для всех последовательностей $\{z_k\}$, для которых $z_k = o(k^r)$, если $0 < r < 1$; $z_k = o(k)$, если $r \geqslant 1$. Этот результат «наилучший из возможных».*

Если (a_{nk}) — матрица средних Чезаро порядка $r > 0$, мы имеем, как и при доказательстве (**5.4**, III), для $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$
\begin{aligned}
a_{nk} - a_{n,k+1} &= \frac{n!\,r\Gamma(r+n-k)}{(n-k)!\,\Gamma(r+n+1)}\left(1 - \frac{n-k}{r+n-k-1}\right) = \\
&= \frac{r(r-1)}{n-k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^r (r+n-k-1)^{-1}(1+\varphi'_{n-k}) = \\
&= \frac{r}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{r-1}\left[\frac{r-1}{n-k} + O\left\{\frac{1}{(n-k)^2}\right\}\right](1+\varphi'_{n-k}),
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

где $\varphi'_{n-k} \to 0$ при $n-k \to \infty$.

Так как для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ каждый из членов φ'_{n-k} и $O\left(\frac{1}{n-k}\right)$ есть $O(1)$, мы получаем:

$$a_{nk} - a_{n,k+1} = O\left[n^{-r}(n-k)^{r-2}\right],$$

когда $r \neq 1$; при $r = 1$ разность слева равна нулю. Но известно, что

$$a_{n,n}|z_n| + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|z_k|}{n^r(n-k)^{2-r}} = o(1) \quad \text{при } n \to \infty,$$

когда $z_k = o(k)$ при $r > 1$ или когда $z_k = o(k^r)$ при $0 < r < 1$ (см. доказательство (**5.4**, III)). Из того же доказательства следует, что последняя сумма не стремится к нулю при $n \to \infty$, если мы возьмем $z_k = k$ $(r > 1)$, $z_k = k^r$ $(0 < r < 1)$.

Таким образом, согласно (5.67), этот результат «наилучший из возможных».

Следствие. *Аналогичный результат (также «наилучший из возможных») имеет место для средних Рисса любого порядка* $r > 0$.

Действительно, если (a_{nk}) — матрица средних Рисса порядка r, то

$$
\begin{aligned}
a_{nk} - a_{n,k+1} &= \left(1-\frac{k}{n}\right)^r - 2\left(1-\frac{k+1}{n}\right)^r + \left(1-\frac{k+2}{n}\right)^r = \\
&= \left(1-\frac{k}{n}\right)^r\left[1 - 2\left(1-\frac{1}{n-k}\right)^r + \left(1-\frac{2}{n-k}\right)^r\right] = \\
&= \left(1-\frac{k}{n}\right)^r O\left[\frac{1}{(n-k)^2}\right] = O\left[n^{-r}(n-k)^{r-2}\right],
\end{aligned}
$$

и дальше доказательство продолжается так же, как и в теореме.

5.7. Сравнение произведений различных методов суммирования

Мы приведем здесь некоторые теоремы Агнью о сравнении произведений различных методов суммирования (Агнью [5]); несколько простых результатов дано в примерах 22—26 к гл. 5. То, что мы называем «совместностью» и «взаимной совместностью», Агнью называет «взаимной совместностью» и «эквивалентностью» соответственно.

В § 5.2 мы указали различие между $A[B(z_k)]$ и $(AB)(z_k)$; $A[B]$ и (AB) могут не быть взаимно-совместными или даже совместными.

Для этих произведений Агнью употребляет другие обозначения; первое он называет *итерационным произведением* методов и обозначает через $AB(z_k)$, второе — *композиционным* и обозначает $A\cdot B(z_k)$. Мы всюду будем употреблять обозначения $A[B]$ и (AB), так как они лучше отображают заключенный в них смысл. Таким образом, итерационное произведение методов определяется так:

$$U_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\sum_{p=1}^{\infty}b_{kp}z_p=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}a_{nk}b_{kp}z_p,$$

и $\{z_n\}$ суммируема $A[B]$ к L, если $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=L$.

Композиционное произведение двух методов определяется так:

$$V_n=\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}b_{kp}\right)z_p=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}b_{kp}z_p,$$

и $\{z_n\}$ суммируема (AB) к L, если $\lim\limits_{n\to\infty}V_n=L$.

В рассмотренных произведениях $A[B]$ и (AB) мы не будем обязательно предполагать, что ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_{nk}z_k$ сходятся для любого $n\geqslant 1$; может случиться, что V_n стремится к пределу, в то время как U_n не имеет предела по той причине, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_{nk}z_k$ будет расходиться для некоторых или всех значений n (см. (**5.7**, II) и пример 27 к гл. 5).

(**5.7**, I) *Если A и B суть T-матрицы и A — матрица с конечными строками, то* $(AB)\supset A[B]$.

Теорема будет доказана, если мы покажем, что из существования U_n следует существование V_n и $U_n=V_n$.

Если U_n существует, то все ряды $\sum\limits_{p=1}^{\infty}b_{kp}z_p$ $(k=1,\,2,\,\ldots)$ сходятся; следовательно, если $a_{nk}=0$ для $k>q_n$, то

$$U_n=\sum_{k=1}^{q_n}a_{nk}\sum_{p=1}^{\infty}b_{kp}z_p=\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{q_n}a_{nk}b_{kp}\right)z_p=V_n;$$

изменение порядка суммирования здесь, очевидно, допустимо. Но, как будет показано при доказательстве теоремы (**5.7**, II), существование V_n не обязательно влечет существование U_n; равенство

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{q_n}a_{nk}b_{kp}\right)z_p=\sum_{k=1}^{q_n}a_{nk}\sum_{p=1}^{\infty}b_{kp}z_p$$

может не иметь места из-за расходимости некоторых или всех рядов $\sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} z_p$, в то время как левая часть этого выражения может существовать.

Таким образом, (AB) и $A[B]$, где A и B удовлетворяют условиям теоремы (**5.7**, I), *совместны*, но они не обязательно *взаимно-совместны*, как это видно из следующей теоремы:

(**5.7**, II) *Существуют неотрицательные T-матрицы A и B, где A — с конечными строками, и последовательность $\{z_k\}$ такая, что $\{z_k\}$ суммируема (AB), но не суммируема $A[B]$.*

Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — взятые по порядку простые числа $2, 3, 5, \ldots$ Определим матрицы (a_{nk}) и (b_{nk}). Положим

$$a_{n, p_n} = a_{n, p_n^2} = \frac{1}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$a_{nk} = 0 \ \left(k \neq p_n, \ k \neq p_n^2\right).$$

Если n не является простым числом или квадратом простого числа, то положим $b_{nn} = 1$, $b_{nk} = 0$ $(k \neq n)$ и пусть, далее,

$$b_{p_n, k} = 0, \quad \text{когда } k \neq p_n, \ p_n^3, \ p_n^5, \ p_n^7, \ \ldots,$$
$$b_{p_n, k} = 2^{-\alpha}, \quad \text{когда } k \text{ имеет вид } p_n^{2\alpha-1} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots),$$
$$b_{p_n^2, k} = 0, \quad \text{когда } k \neq p_n^2, \ p_n^4, \ p_n^6, \ \ldots,$$
$$b_{p_n^2, k} = 2^{-\alpha}, \quad \text{когда } k \text{ имеет вид } p_n^{2\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Эти матрицы A и B удовлетворяют условиям теоремы. Отметим, что $a_{nk} = b_{nk} = 0$ при $n > k$.

Определим $\{z_k\}$, положив

$$z_k = \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha}, \quad \text{когда } k \text{ имеет вид } p_n^{2\alpha-1} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots),$$
$$z_k = -\frac{2^{\alpha+1}}{\alpha}, \quad \text{когда } k \text{ имеет вид } p_n^{2\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots),$$

$z_k = 0$ во всех других случаях. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} b_{kp} = a_{n, p_n} b_{p_n, p} + a_{n, p_n^2} b_{p_n^2, p} = \begin{cases} 2^{-(\alpha+1)}, & \text{если } p = p_n^{2\alpha-1} \\ & \text{или если } p = p_n^{2\alpha}, \\ 0 & \text{во всех других случаях,} \end{cases}$$

так что

$$V_n = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} b_{kp} \right) z_p = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) = 0.$$

Однако $\sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}z_p = 0$, если k не является ни простым числом, ни квадратом простого числа *); эта сумма не существует, если k — простое число или квадрат простого; в последних двух случаях указанные ряды обращаются соответственно в ряды

$$2\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha} \quad \text{или} \quad -2\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha},$$

которые расходятся.

Следовательно, $U_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left(\sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}z_p\right)$ не существуют. Таким образом, указанная выше последовательность $\{z_k\}$ суммируема (AB) к 0 и не суммируема $A[B]$, что и доказывает теорему.

Матрица B в этой теореме не может быть с конечными строками, так как если бы обе матрицы A и B были с конечными строками, то $U_n = V_n$ для любого n, и тогда (AB) и $A[B]$ были бы взаимно-совместны.

Как будет показано в (**5.7**, IV), существуют неотрицательные T-матрицы A и B, для которых $A[B]$ и (AB) несовместны. Тем не менее существует широкий класс последовательностей (включающий все ограниченные и односторонне ограниченные последовательности), для которых $A[B]$ и (AB) взаимно-совместны.

Мы будем говорить, что *последовательность* $\{s_n\}$ *лежит в углу комплексной плоскости, меньшем* π, если существуют точка z_0, угол θ_0 и положительный угол $\varphi < \frac{\pi}{2}$ такие, что для каждого n

$$s_n = z_0 + \rho_n e^{i(\theta_0+\theta_n)}, \quad \text{где} \quad \rho_n \geqslant 0, \ |\theta_n| \leqslant \varphi. \tag{5.71}$$

(**5.7**, III) *Если A и B — неотрицательные T-матрицы, то $A[B]$ и (AB) взаимно-совместны для любой последовательности $\{s_n\}$, которая лежит в углу, меньшем* π.

Предположим сначала, что $\{s_n\}$ удовлетворяет (5.71) и является такой, для которой существует V_n. Тогда

$$V_n = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}b_{kp}\left(z_0 + \rho_p e^{i(\theta_0+\theta_p)}\right), \tag{5.72}$$

---

*) Это утверждение неточное, так как если, например, $k = p_n^4$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{p_n^4,\, i} z_i = b_{p_n^4,\, p_n^4} z_{p_n^4} = 1 \cdot z_{p_n^4} = -\frac{2^{2+1}}{2} = -4 \neq 0.$$

Сумма $\sum_{i=1}^{\infty} b_{ki}z_i$ равна нулю, если k не является степенью простого числа. (*Прим. ред.*)

и если ξ_p и η_p — действительная и мнимая части $\rho_p e^{i\theta_p}$, то

$$V_n = z_0 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} b_{kp} + e^{i\theta_0} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} b_{kp} (\xi_p + i\eta_p). \qquad (5.73)$$

В нашем случае $\xi_p \geqslant 0$, так как $|\theta_p| \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$, и, кроме того, η_p действительные, $a_{nk} \geqslant 0$ и $b_{nk} \geqslant 0$ для любых n и k; следовательно, условие (5.73) влечет сходимость ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} b_{kp} \xi_p.$$

Но $|\eta_p| < \xi_p \operatorname{tg} \varphi$, так что этот двойной ряд будет сходиться и в том случае, если ξ_p заменить на $|\eta_p|$. Отсюда следует, что оба двойных ряда в (5.73) абсолютно сходятся, и поэтому двойной ряд в (5.72) абсолютно сходится.

Следовательно,

$$U_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{nk} b_{kp} \left(z_0 + \rho_p e^{i(\theta_0 + \theta_p)}\right)$$

существует и $U_n = V_n$. Таким образом, из $V_n \to L$ следует, что $U_n \to L$. Аналогично $U_n \to L$ влечет $V_n \to L$. Теорема доказана.

(**5.7**, IV) *) *Существуют две неотрицательные T-матрицы A и B $\left(B\right.$ с конечными столбцами и $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = 1$ для любого $\left.n\right)$ и последовательность $\{s_p\}$ такие, что*

$$T_k = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} s_p = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} T_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{nk} b_{kp} s_p = 0,$$

$$V_n = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} b_{kp} s_p = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Будем рассматривать целые положительные числа 1, 2, 3, ... как двойную последовательность h_{nk}, такую, что

$$h_{11} = 1, \quad h_{21} = 2, \quad h_{12} = 3, \quad h_{31} = 4,$$
$$h_{22} = 5, \quad h_{13} = 6, \quad h_{41} = 7 \text{ и т. д.}$$

---

*) Агнью отмечает, что для доказательства (**5.7**, IV) ему не удалось найти более простого примера, чем приведенный ниже, однако можно построить более простые примеры, если не требовать неотрицательности матриц A и B; (**5.7**, VII) является таким примером.

Положим

$$a_{nk}=0 \qquad (k\neq h_{n1},\ h_{n2},\ h_{n3},\ \ldots),$$
$$a_{nk}=2^{-r} \qquad (k=h_{nr},\quad r=1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда (a_{nk}) — неотрицательная T-матрица и $\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}=1$ для любого n.

Двойной ряд в определении U_n и V_n после удаления строк с нулевыми элементами имеет вид

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}b_{h_{n1},\,1}s_1+\frac{1}{2}b_{h_{n1},\,2}s_2+\frac{1}{2}b_{h_{n1},\,3}s_3+\ldots,\\ +\frac{1}{4}b_{h_{n2},\,1}s_1+\frac{1}{4}b_{h_{n2},\,2}s_2+\frac{1}{4}b_{h_{n2},\,3}s_3+\ldots,\\ +\frac{1}{8}b_{h_{n3},\,1}s_1+\frac{1}{8}b_{h_{n3},\,2}s_2+\frac{1}{8}b_{h_{n3},\,3}s_3+\ldots\end{array}\right\}\qquad(5.74)$$

Положим

$$b_{h_{nr},\,k}=0 \qquad (k\neq h_{nr},\quad h_{n,\,r+1},\quad h_{n,\,r+2},\ \ldots);$$

тогда двойной ряд (5.74) после удаления столбцов с нулевыми элементами будет иметь вид

$$\left.\begin{array}{lllll}\frac{1}{2}b_{h_{n1},\,h_{n1}}s_{h_{n1}} & +\frac{1}{2}b_{h_{n1},\,h_{n2}}s_{h_{n2}} & +\frac{1}{2}b_{h_{n1},\,h_{n3}}s_{h_{n3}} & +\ldots,\\ +\quad 0 & +\frac{1}{4}b_{h_{n2},\,h_{n2}}s_{h_{n2}} & +\frac{1}{4}b_{h_{n2},\,h_{n3}}s_{h_{n3}} & +\ldots,\\ +\quad 0 & +\quad 0 & +\frac{1}{8}b_{h_{n3},\,h_{n3}}s_{h_{n3}} & +\ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{array}\right\}\qquad(5.75)$$

Рассмотрим теперь двойной ряд:

$$\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0-\frac{1}{6}+0-0+0-0+\ldots\\ \ldots+0-0+\frac{1}{3}-0+0-0+0-\frac{1}{8}+0-\frac{1}{10}+\ldots\\ \ldots+0-0+0-0+\frac{1}{5}-0+0-0+0-0+\ldots\\ \ldots+0-0+0-0+0-0+\frac{1}{7}-0+0-0+\ldots,\end{array}\qquad(5.76)$$

члены которого определены следующим образом: если k нечетно, то $u_{nk}=\frac{1}{k}$ при $n=\frac{1}{2}(k+1)$ и $u_{nk}=0$ в противном случае; если k четно, то $u_{nk}=-\frac{1}{k}$ при $n=n_k$ и $u_{nk}=0$ в противном случае. Здесь n_k — наименьшее из n, для которых $u_{n1}+u_{n2}+\ldots+u_{n,\,k-1}-$

$-\frac{1}{k} \geqslant 0$; например, $n_k = 1$ для $k = 2, 4, 6, 12$, $n_k = 2$ для $k = 8$, 10, 14, 28, 840 и т. д.

Теперь каждая строка в (5.76) содержит только конечное число отличных от нуля элементов, и для фиксированного k существует одно и только одно значение n, для которого $u_{nk} \neq 0$. Также для каждого n $u_{nk} = 0$ при $k < 2n - 1$, $u_{nk} = \frac{1}{2n-1}$ для $k = 2n - 1$, а все последующие отличные от нуля элементы в строке с номером n отрицательны.

Следовательно, частичные суммы по строкам образуют убывающую последовательность ($k > 2n - 1$). Так как $\sum_{i=1}^{k-1} u_{ni} - \frac{1}{k} \geqslant 0$, эта последовательность не отрицательна, так что $\sum_{k=1}^{\infty} u_{nk}$ сходится для любого n. Предположим, что для частного значения n этот ряд сходится к $s > 0$. Пусть k_1 — наименьшее из целых чисел, больших $\frac{1}{s}$. Так как частичные суммы образуют убывающую последовательность, стремящуюся к s, то они больше s и, следовательно, больше $\frac{1}{k}$ для любого $k \geqslant k_1$. Но это невозможно, так как для $n = 1$ $\sum_{i=1}^{k-1} u_{ni} \geqslant \frac{1}{k}$ только для $k = 2, 4, 6, 12$; в действительности это невозможно ни для какого n, так как в каждой строке содержится только конечное число отличных от нуля элементов. Следовательно, предположение, что $s > 0$, неверно и, значит, $s = 0$.

Таким образом, двойной ряд (5.76) имеет повторную сумму по строкам, равную 0, и повторную сумму по столбцам, равную $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

Определим теперь (b_{nk}) и $\{s_k\}$ так, чтобы члены двойных рядов (5.75) и (5.76), расположенные на одних и тех же местах, были соответственно равны. Это можно сделать, полагая равными нулю те из элементов $\left(b_{h_{nr}, h_{ns}}\right)$, для которых соответствующие члены в (5.76) равны нулю, а элементы, отличные от нуля среди элементов

$$b_{h_{nr}, h_{nr}}, \quad b_{h_{nr}, h_{n, r+1}}, \quad b_{h_{nr}, h_{n, r+2}}, \quad \ldots,$$

могут быть взяты (по порядку) равными

$$\frac{1}{2d_r}, \quad \frac{1}{2^2 d_r}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2^{\delta_r} d_r}, \quad \text{где } d_r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{\delta_r}}.$$

Последовательность $s_{h_{n1}}, s_{h_{n2}}, s_{h_{n3}}, \ldots$ может быть определена теперь элемент за элементом.

Таким образом, мы получаем элементы матрицы B, удовлетворяющие условиям теоремы. Из тождественности (5.75) и (5.76) и того факта, что сумма элементов каждой строки в (5.76) равна нулю, следует, что $T_k=0$ для любого k. Так как (5.76) и, следовательно, (5.75) имеют повторную сумму по строкам, равную нулю, и повторную сумму по столбцам, равную $\ln 2$, мы имеем $U_n=0$, $V_n=\ln 2$.

Если, наконец, мы разделим каждое s_k, определенное выше, на $\ln 2$, то T_k, U_n и V_n также окажутся разделенными на $\ln 2$, и мы получим требуемый в теореме результат.

Следующие два утверждения получаются как следствия из только что доказанной теоремы.

(**5.7**, V) *Существуют неотрицательные T-матрицы A и B и последовательность $\{s_k\}$ такие, что B и (AB) несовместны для $\{s_k\}$.*

(**5.7**, VI) *Существуют неотрицательные T-матрицы A и B и последовательность $\{s_k\}$ такие, что $A[B]$ и (AB) несовместны для $\{s_k\}$.*

Можно построить более простой пример, чем в (**5.7**, IV), если не требовать, чтобы A и B были обязательно неотрицательными. Приведем такой пример, оставляя доказательство читателю (см. пример 26 к гл. 5).

(**5.7**, VII) *Если r — комплексное число, $0<|r|<1$, то*

$$\text{(A)} \qquad S_n = s_n + r^n s_{n+1} + r^{n+1} s_{n+2} + \ldots$$

и

$$\text{(B)} \qquad T_n = \frac{1}{1-r} s_{n-1} - \frac{r}{1-r} s_n$$

являются такими T-преобразованиями, что $A[B]$ и (AB) несовместны. Последовательность $s_k=(1-r)r^{-k}$ суммируется методом $A[B]$ к 0 и методом (AB) к 1.

Если $0<r<1$, то все $a_{nk}\geqslant 0$, но некоторые из элементов $b_{nk}<0$; если $-1<r<0$, то все $b_{nk}>0$, но некоторые из элементов $a_{nk}<0$. Если r не является действительным, ни одно из условий $a_{nk}\geqslant 0$, $b_{nk}\geqslant 0$ не выполняется. Метод (A) в (**5.7**, VII) эквивалентен сходимости для каждого r, удовлетворяющего условию $0<|r|<1$.

(**5.7**, VIII) *Если A и B — неотрицательные T-матрицы и если $B(s_k)$ имеет вид*

$$T_n = \sum_{k=n-\alpha}^{n+\beta} b_{nk} s_k,$$

где α и β — целые неотрицательные числа, то $A[B]\supset(AB)$.

Возьмем $s_p=0$ для $p<1$ и $b_{kp}=0$ для $p<k-\alpha$ и для $p>k+\beta$.

Предполагая $\{s_p\}$ такой последовательностью, для которой

$$V_n = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} b_{kp} s_p \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=p-\beta}^{p+\alpha} a_{nk} b_{kp} s_p \tag{5.77}$$

существует, мы получаем для каждого фиксированного n:

$$V_n = \lim_{Q \to \infty} \sum_{p=1}^{Q} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} b_{kp} s_p = \lim_{Q \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{Q} a_{nk} b_{kp} s_p =$$

$$= \lim_{Q \to \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{Q-\beta} a_{nk} \sum_{p=1}^{Q} b_{kp} s_p + \sum_{k=Q-\beta+1}^{Q+\alpha} a_{nk} \sum_{p=1}^{Q} b_{kp} s_p \right\}$$

и, следовательно,

$$V_n = \lim_{Q \to \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{Q-\beta} a_{nk} \sum_{p=1}^{Q} b_{kp} s_p + \sum_{k=Q-\beta+1}^{Q+\alpha} \sum_{p=Q-\alpha-\beta+1}^{Q} a_{nk} b_{kp} s_p \right\}. \tag{5.78}$$

Действия под знаком предела обоснованы, так как элементы b_{kp} при $p < k - \alpha$ и $p > k + \beta$ равны нулю.

Из сходимости первого ряда в (5.77) следует:

$$\Delta_p \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} b_{kp} |s_p| \to 0 \text{ при } p \to \infty.$$

Но так как $a_{nk} \geqslant 0$, $b_{nk} \geqslant 0$, то мы имеем $0 \leqslant a_{nk} b_{kp} |s_p| \leqslant \Delta_p$ для каждого фиксированного k. Следовательно,

$$\left| \sum_{k=Q-\beta+1}^{Q+\alpha} \sum_{p=Q-\alpha-\beta+1}^{Q} a_{nk} b_{kp} s_p \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=Q-\beta+1}^{Q+\alpha} \sum_{p=Q-\alpha-\beta+1}^{Q} \Delta_p = (\alpha + \beta) \sum_{p=Q-\alpha-\beta+1}^{Q} \Delta_p \to 0 \quad \text{при} \quad Q \to \infty.$$

Отсюда и из (5.78) получаем:

$$U_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} s_p \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \sum_{p=k-\alpha}^{k+\beta} b_{kp} s_p$$

существует и $U_n = V_n$, что и доказывает теорему.

Примеры показывают, что включение $(AB) \supset A[B]$ в рассмотренном случае невозможно (см. пример 27 к гл. 5).

Предположим теперь, что A, X, B, Y являются T-матрицами и существует такое число N, что $a_{nk} = x_{nk}$, $b_{nk} = y_{nk}$ при $n \geqslant N$. Тогда очевидно не только то, что $A \sim X$ и $B \sim Y$, но что (A, X) и (B, Y) представляют собой две пары абсолютно эквивалентных матриц для всех последовательностей, для которых эти матрицы применимы.

Сейчас мы сравним $A[B]$ с $X[Y]$ и (AB) с (XY) при упомянутых выше условиях для A, B, X и Y.

(**5.7**, IX) *Пусть*

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}s_k,\quad S'_n=\sum_{k=1}^{\infty}x_{nk}s_k,\quad (A,\ X)$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}s_k,\quad T'_n=\sum_{k=1}^{\infty}y_{nk}s_k\quad (B,\ Y)$$

— четыре T-преобразования и пусть существует такое N, что $a_{nk}=x_{nk}$, $b_{nk}=y_{nk}$ для $n\geqslant N$. Тогда два метода суммирования

$$A[B]:\quad U_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\sum_{p=1}^{\infty}b_{kp}s_p,$$

$$X[Y]:\quad U'_n=\sum_{k=1}^{\infty}x_{nk}\sum_{p=1}^{\infty}y_{kp}s_p,$$

абсолютно эквивалентны для всех $\{s_p\}$, для которых U_n и U'_n существуют для каждого n, а два метода:

$$(AB):\quad V_n=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}b_{kp}s_p,$$

$$(AY):\quad V'_n=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}x_{nk}y_{kp}s_p,$$

абсолютно эквивалентны для всех $\{s_p\}$, для которых V_n и V'_n существуют для каждого n.

Пусть ε_α — функция от α и $\varepsilon_\alpha\to 0$ при $\alpha\to\infty$. Тогда

$$U_n=\sum_{k=1}^{N-1}a_{nk}T_k+\sum_{k=N}^{\infty}a_{nk}\left\{\sum_{p=1}^{N-1}b_{kp}s_p+\sum_{p=N}^{\infty}b_{kp}s_p\right\}=$$

$$=\varepsilon_n+\sum_{k=N}^{\infty}a_{nk}\left\{\varepsilon_k+\sum_{p=N}^{\infty}b_{kp}s_p\right\}=\varepsilon_n+\sum_{k=N}^{\infty}a_{nk}\sum_{p=N}^{\infty}b_{kp}s_p.$$

Аналогично

$$U'_n=\varepsilon_n+\sum_{k=N}^{\infty}x_{nk}\sum_{p=N}^{\infty}y_{kp}s_p.$$

Но в пределах суммирования этих двух рядов мы имеем для $n\geqslant N$ $x_{nk}=a_{nk}$ и $y_{nk}=b_{nk}$, следовательно, $U_n=\varepsilon_n+U'_n$, т. е. $U_n-U'_n\to 0$ при $n\to\infty$, что и доказывает первое утверждение.

Так как $x_{nk}=a_{nk}$, когда $n\geqslant N$, мы можем записать для $n\geqslant N$

$$V_n=\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{N-1}a_{nk}b_{kp}s_p+\sum_{k=N}^{\infty}a_{nk}b_{kp}s_p\right),$$

$$V'_n=\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{N-1}a_{nk}y_{kp}s_p+\sum_{k=N}^{\infty}a_{nk}y_{kp}s_p\right).$$

Поскольку $y_{kp} = b_{kp}$ при $k \geqslant N$, то отсюда следует, что для $n \geqslant N$

$$V_n - V'_n = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} a_{nk} (b_{kp} - y_{kp}) s_p. \tag{5.79}$$

Но, по предположению, T_n и T'_n существуют для каждого n, поэтому

$$\sum_{p=1}^{\infty} (b_{kp} - y_{kp}) s_p$$

существует для $k = 1, 2, \ldots, N-1$. Следовательно, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ для этого множества значений k, из (5.79) получаем, что $V_n - V'_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теперь теорема доказана полностью.

5.8. Некоторые результаты Брудно

Перед тем как закончить эту главу, мы должны упомянуть появившуюся недавно в русской литературе работу А. Л. Брудно [1]. Основной результат Брудно (теорема 1) следующий:

(**5.8**, I) *Если всякая ограниченная последовательность, суммируемая T-матрицей A, суммируется и T-матрицей B, то A и B совместны для этих последовательностей.*

Брудно отмечает, что в то время, когда его работа находилась в печати, он обнаружил, что такая же теорема была опубликована раньше (Мазур и Орлич [1]; см. также Мазур [1]). Оба метода доказательства, как Мазура и Орлича, так и Брудно, сложны, и было бы интересно найти более короткое и простое доказательство этой теоремы *).

Брудно называет множество всех ограниченных последовательностей, суммируемых матрицей A, *ограниченным полем для* A и обозначает через $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(A)$; вообще говоря, может быть несколько T-матриц с одним и тем же ограниченным полем. *Нормой T-матрицы A* он называет ее K_r-грань (§ 2.3). *Нормой ограниченного поля* $\mathfrak{A}$ Брудно называет точную нижнюю грань норм T-матриц, для которых $\mathfrak{A}$ является ограниченным полем, и обозначает ее $\|\mathfrak{A}\|$.

Некоторые из дальнейших результатов А. Л. Брудно следующие:

(I) *Для любого ограниченного поля $\mathfrak{A}$ существует нижняя треугольная матрица A с $a_{ii} \neq 0$ для любого i, такая, что $\mathfrak{A}$ является ограниченным полем для A.*

(II) *Для любого числа $N > 1$ существует ограниченное поле $\mathfrak{A}$ с $\|\mathfrak{A}\| = N$.*

(III) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ *влечет* $\|\mathfrak{A}\| \leqslant \|\mathfrak{B}\|$ (знак $\subset$ включает и равенство).

---

*) Простое доказательство этой теоремы дано Питерсеном и приведено в обзорной статье. (*Прим. перев*).

(IV) *Ограниченное поле $\mathfrak{A}$ определяет единственный предел для каждой последовательности из этого поля, к которому последовательность суммируется любой T-матрицей, имеющей $\mathfrak{A}$ своим ограниченным полем.*

Доказательство этих и других результатов читатель найдет в работе Брудно.

Примеры к главе 5

1. Если A — матрица (1.24) средних арифметических, D — диагональная матрица (a_{ii}), то показать, что равенство $\Omega A = D\Omega$ удовлетворяется, если в качестве Ω взять нижнюю треугольную матрицу Эйлера (§§ 2.1, 5.3).

2 *). Применяя (**5.4**, I), показать, что $(C, 1)$ и $(C, 2)$ не являются абсолютно эквивалентными для всех ограниченных последовательностей.

3. Применяя (**5.4**, II), показать, что средние арифметические и средние Бореля не являются абсолютно эквивалентными для всех ограниченных последовательностей **).

4. Доказать (**5.5**, III).

5. Доказать (**5.5**, IV).

6. Доказать, что методы суммирования Чезаро и Рисса любого порядка $r > 0$ и метод суммирования Абеля транслятивны. (См. § 5.6; матрицы в этих трех случаях будут соответственно

$$g_k(\omega) = \frac{\Gamma(\omega+1)\,\Gamma(\omega+r-k+1)}{\Gamma(\omega+r+1)\,\Gamma(\omega-k+1)} \quad (1 \leqslant k \leqslant [\omega]), \quad g_k(\omega) = 0 \quad (k > [\omega])$$

$$g_k(\omega) = \left(1 - \frac{k}{\omega}\right)^r \qquad (1 \leqslant k < [\omega]), \quad g_k(\omega) = 0 \qquad (k \geqslant [\omega]),$$

$$g_k(\omega) = \left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)^k;$$

показать, что соответственно в каждом из случаев

$$\sigma(\omega) = \frac{\omega}{\omega+r}\, s(\omega-1),$$

$$\sigma(\omega) = \left(\frac{\omega-1}{\omega}\right)^r s(\omega-1),$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\omega}{\omega+1}\, s(\omega),$$

где

$$s(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega)\, c_k, \quad \sigma(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{k+1}(\omega)\, c_k.)$$

---

*) Доказательство предложений в примерах 2 и 3 см. Кук [6].

**) Классическим примером ряда, суммируемого $(C, 1)$ и не суммируемого матрицей Бореля, является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ (Харди и Литтльвуд [1], 15).

7 *). Показать, что матрицы

(а) $$g_0(\omega)=1,\quad g_k(\omega)=\frac{\omega(\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+k-1)}{(\omega+r)(\omega+r+1)\ldots(\omega+r+k-1)}$$
$$(k\geqslant 1,\quad r>0);$$

(б) $$a_k(\omega)=g(\theta^k\omega)-g(\theta^{k+1}\omega)\qquad(0<\theta<1),$$

где $g(x)$ — такая действительная возрастающая функция, что

$$\lim_{x\to 0} g(x)=A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} g(x)=A+1,$$

приводят к транслятивным преобразованиям.

8 **). Если T-$\lim z_n$ существует и является транслятивным, то T-$\lim c_n=0$, где $z_{n+1}=c_0+c_1+\ldots+c_n$, и наоборот.

Следовательно, для того чтобы T-предел мог быть транслятивным для данной последовательности $\{z_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$T\text{-}\lim(z_{n+1}-z_n)=0$$

при условии, что T-$\lim z_n$ существует.

9. Предположим, что:

(I) A и B — коммутативные T-матрицы с K_r-гранями M и N соответственно;

(II) $\sum\limits_{p=0}^{\infty}|g_p|M^p$ и $\sum\limits_{p=0}^{\infty}|h_p|N^p$ сходятся и $\sum\limits_{p=0}^{\infty}g_p=1$, $\sum\limits_{p=0}^{\infty}h_p=1$;

(III) матрицы $G=\sum\limits_{p=0}^{\infty}g_pA^p$ и $H=\sum\limits_{p=0}^{\infty}h_pB^p$ преобразуют обе последовательности $\{z_{k+1}\}$ и $\{z_k\}$ в сходящиеся последовательности и G транслятивная для $\{z_k\}$.

Доказать, что H будет также транслятивной для $\{z_k\}$ при условии, что $G[H(c_k)]=(GH)(c_k)$ и $H[G(c_k)]=(HG)(c_k)$, где $c_k=z_{k+1}-z_k$. (Использовать пример 8 и (**5.3**, VIII).)

10 ***). Доказать, что средние арифметические и средние Бореля абсолютно транслятивны для всех ограниченных последовательностей.

11. Если A и B — такие T-матрицы, что AB и BA абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей, то доказать, что соответствующие A- и B-пределы совместны для всех ограниченных последовательностей. (Продолжить рассуждения в (**5.2**, I), начиная с (5,23).)

12. Если T-матрицы A и B абсолютно элвивалентны для всех ограниченных последовательностей, то AB и BA абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей.

13. Если нижние треугольные T-матрицы A и B абсолютно эквивалентны для всех (неограниченных) последовательностей $\{z_n\}$, для которых $|z_n|\leqslant\theta_n$, где $\{\theta_n\}$ — положительная монотонно возрастающая последовательность, то AB и BA абсолютно эквивалентны для всех таких последовательностей.

14. Если (общие) T-матрицы A и B абсолютно эквивалентны для всех (неограниченных) последовательностей $\{z_n\}$, для которых $|z_n|\leqslant\theta_n$, где $\{\theta_n\}$ — положительная монотонно возрастающая последовательность, и ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\theta_k,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|b_{nk}|\theta_k$$

---

*) См. Перрон [1] и Динс [1], 419.

**) Относительно примеров 8 и 9 см. Динс [1], 422.

***) См. Кук [6], 124.

сходятся для каждого n, и если $z'_n = A(z_n)$, $\bar{z}_n = B(z_n)$ такие, что $|z'_n| \leqslant M\theta_n$, $|\bar{z}_n| \leqslant M'\theta_n$, где M и M' суть K_r-грани A и B соответственно, то $B[A(z_n)] - A[B(z_n)] \to 0$ при $n \to \infty$.

15 *). Если A и B абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей и если C и D обладают этими же свойствами, то AC и BD обладают этими свойствами (A, B, C и D суть T-матрицы).

16 **). Пусть σ_n — транслятивная слева γ-сумма ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k$, где n — целое положительное число. Доказать, что если σ_n существует для данного значения z, то $\sigma_{n-1}, \sigma_{n-2}, \ldots, \sigma_1$ также существует для того же самого z $(n \geqslant 2)$. Отсюда вывести, что если транслятивный слева γ-метод суммирует расходящийся ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k$ $(n \geqslant 1)$, то его обобщенная сумма будет «правильным» значением $(1-z)^{-n}$.

17. Если γ-матрица G суммирует все расходящиеся ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k$$

для $n \geqslant 1$, каждый к его «правильному» значению $(1-z)^{-n}$, то показать, что G определяет транслятивный слева метод γ-суммирования для всех таких рядов (транслятивный в случае $n=1$).

18. Пусть B — матрица Бореля $\left(\frac{e^{-n} n^k}{k!}\right)$, а $B^{(\varepsilon)}$ — матрица, полученная из нее заменой нулями всех элементов, за исключением тех, для которых

$$(1-\varepsilon_1)\, n \leqslant k \leqslant (1+\varepsilon_2)\, n,$$

где $0 < \varepsilon_1 < 1$, $0 < \varepsilon_2 < 1$. Показать, что $B^{(\varepsilon)}$ абсолютно эквивалентна B для всех ограниченных последовательностей и что $B^{(\varepsilon)}$ имеет бесконечное множество л. с. и п. с. обратных. Рассмотреть случай $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{3}$ (см. пример 11 к гл. 4).

19. Доказать, что матрица $R = (r_{nk})$ $(n, k = 0, 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющая условиям $0 < r_{n0} < 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} r_{n0} = 1$, $r_{nk} = (r_{n0})^{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, является транслятивной γ-матрицей, которая суммирует любой степенной ряд во всех регулярных точках, лежащих на границе его круга сходимости, к «правильному» значению. Рассмотреть в качестве примеров случаи, где r_{nk} равно:

(I) $$\theta^{\frac{k+1}{n+1}} \qquad (0 < \theta < 1);$$

(II) $$(n+2)^{-\frac{p(k+1)}{n+1}} \qquad (p > 0);$$

здесь $x^{\frac{1}{n+1}}$ — главное значение $\sqrt[n+1]{x}$.

---

*) Пример дан Робинсоном.

) Примеры 16—21 даны Вермсом; пример 16 является обобщением (5.6**, III), а пример 17 является обратным результатом к (**5.6**, III) и примеру 16. См. Вермс [1], [2] и [3].

20. Если ряд Дирихле $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k s}$ $(0 \leqslant \lambda_k < \lambda_{k+1},\ \lambda_k \to \infty,\ s = \sigma + it)$, представляющий функцию $f(s)$, имеет конечную абсциссу сходимости σ_0, то γ-матрица L с элементами

$$l_{nk} = e^{-\frac{p\lambda_k}{n}} \qquad (p > 0,\ n,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

суммирует этот ряд во всех точках $s_0 = \sigma_0 + it$ ее линии сходимости, когда $f(s_0 + 0)$ существует. Суммой ряда будет $f(s_0 + 0)$, т. е. предел для $f(s_0 + \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ по положительным значениям. Для частного случая ряда Дирихле $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s}$ мы имеем $l_{nk} = k^{-\frac{p}{n}}$. Матрица L для ряда Дирихле является аналогом матрицы R для степенного ряда в примере 19.

21. Пусть $H = AG$, где A есть T-матрица, а G есть γ-матрица. Если $\lim\limits_{k \to \infty} g_{nk} \equiv g_n$ стремится к пределу g при $n \to \infty$, то показать, что

$$\lim_{k \to \infty} h_{nk} \equiv h_n$$

стремится к тому же самому пределу g. Показать также, что H совместна с G для любого ряда $Z \equiv \sum\limits_k z_k$, для которого произведение AGZ ассоциативно; это применимо, в частности: (а) если A — матрица с конечными строками; (б) если двойной ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nj} g_{jk} z_k$ сходится абсолютно. В качестве примера рассмотреть случай, когда A есть T-матрица Бореля $\left(\frac{e^{-n} n^k}{k!}\right)$, G есть γ-матрица Бореля

$$\left(\frac{1}{k!} \int_0^n e^{-t} t^k \, dt\right) \quad \text{и} \quad Z \equiv \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

Область суммируемости для двойного преобразования $A(GZ)$ будет более широкой, чем для одного преобразования GZ, а именно $\operatorname{Re}(z) < 1$.

22 *). Дать примеры двух неотрицательных T-матриц A и B с конечными строками, не удовлетворяющих ни одному из соотношений $A \supset B$, $B \supset A$, $A \sim B$, т. е. A и B несовместны.

23. Дать примеры двух неотрицательных T-матриц A и B с конечными строками и последовательности $\{z_n\}$, которая суммируется методом A к z' и методом B к $z'' \neq z'$. Так как $\{z_n\}$ суммируется $A[B]$ к z'', то отсюда следует, что A и $A[B]$ будут несовместными, и таким образом, нельзя доказать, что $A \supset A[B]$, $A[B] \supset A$ или $A \sim A[B]$.

24. Построить простой пример, показывающий, что включение $B \supset A[B]$ может не иметь места, и следовательно, B и $A[B]$ не обязаны быть взаимно-совместными даже в том случае, когда A и B — неотрицательные T-матрицы с конечными строками. Однако если A и B суть T-матрицы, то $A[B] \supset B$, т. е. B и $A[B]$ совместны для всех последовательностей, которые суммируемы методом B.

*) Относительно примеров 22—28 см. Агнью [5]; о примере 25 см. Агнью [4].

25. Показать, что существуют T-матрицы A и B с конечными строками, для которых не имеет места включение $B \supset (AB)$; следовательно, B и (AB) не обязаны быть взаимно-совместными. Путем построения последовательности, суммируемой B и не суммируемой (AB), для соответственно подобранных T-матриц A и B показать, что включение $(AB) \supset B$ может не иметь места.

26. Доказать (**5.7**, VII).

27. Положим для $n = 1, 2, \ldots$:

$$a_{nk} = 0 \quad (k \neq n^2, n^4, n^8, \ldots),$$
$$a_{nk} = 2^{-\sigma} \quad (k = n^{2^\sigma}, \text{ кроме } n = k = 1, \ \sigma = 1, 2, \ldots),$$
$$a_{11} = 1$$

и для $n = 2, 3, \ldots$:

$$b_{nk} = 0 \quad (k \neq n, \ k \neq n - 1),$$
$$b_{nk} = \frac{1}{2} \quad (k = n, \ k = n - 1),$$
$$b_{11} = 1, \quad b_{1k} = 0 \qquad (k > 1).$$

Показать, что последовательность $s_n = (-1)^n \log n$ суммируема $A[B]$ к 0 и не суммируема (AB). Следовательно, включение $(AB) \supset A[B]$ не имеет места для неотрицательных T-матриц A и B.

28. Показать, что в условиях теоремы (**5.7**, IX): (I) $A[B]$ и $X[B]$; (II) (AB) и (XB) абсолютно эквивалентны для всех $\{s_p\}$, для которых существует T_k для любого k.

Положим $a_{n1} = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\quad a_{nn} = 1 - \frac{1}{n}$ $\quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$, $a_{nk} = 0$ $\quad (k \neq 1, \ k \neq n)$,

$$\begin{array}{lll} b_{1k} = 2^{-q}, & \text{когда } k = 4q - 3 & (q = 1, 2, 3, \ldots), \\ b_{1k} = 0, & \text{когда } k \neq 4q - 3 & (q = 1, 2, 3, \ldots), \\ y_{1k} = 2^{-q}, & \text{когда } k = 4q - 1 & (q = 1, 2, 3, \ldots), \\ y_{1k} = 0, & \text{когда } k \neq 4q - 1 & (q = 1, 2, 3, \ldots) \end{array}$$

и для любого $n > 1$

$$a_{nk} = y_{nk} = 1, \ \text{когда} \ k = n; \quad b_{nk} = y_{nk} = 0, \ \text{когда} \ k \neq n.$$

Доказать, что если $s_k = (-2)^q$, когда $k = 4q - 1$, и $s_k = 0$, когда $k \neq 4q - 1$, то U_n и V_n (в обозначениях (**5.7**, IX)) обе расходятся, если $n \to \infty$, пробегая последовательность $4q - 1$ $(q = 1, 2, \ldots)$, но $A[B]$ и (AB) абсолютно эквивалентны для последовательности $\{s_k\}$, а в действительности для всех $\{s_k\}$, для которых T_k существует для каждого k.

Доказать еще, что последовательность $\{s_k\}$, где $s_k = (-2)^q$ при $k = 4q - 3$; $s_k = 0$ при $k \neq 4q - 3$, не суммируется $A[Y]$ или (AY), но (AY) и $A[Y]$ абсолютно эквивалентны для данной последовательности $\{s_k\}$ и в действительности для всех $\{s_k\}$, для которых T'_k существует для любого k. (T_k и T'_k имеют тот же смысл, что и в (**5.7**, IX).)

29. Показать, что T-матрица, соответствующая γ-матрице Абеля (§ 4.3 (VIII)) $g_k(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega + 1}\right)^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, будет $a_k(\omega) = \frac{\omega^k}{(\omega + 1)^{k+1}}$ (использовать следствие теоремы (**4.6**, VI)). Показать также, что эта T-матрица абсолютно транслятивна для всех ограниченных последовательностей (см. § 8.7).

ГЛАВА 6

ЯДРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

6.1. Теорема Кноппа о ядрах

Понятие ядра последовательности введено Кноппом [1], ему принадлежит основная теорема о ядрах последовательностей и их T-преобразований.

Мы определим *ядро* R комплексной последовательности $\{s_n\}$ следующим образом.

Как известно, множество точек называется *выпуклым*, если оно полностью содержит отрезок прямой линии, соединяющей любые две точки этого множества. (Полное изложение теории выпуклых множеств см. Боннезен и Фенхель [1].)

Пусть R_n — наименьшая выпуклая замкнутая область комплексной плоскости, содержащая точки s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, ..., т. е. *выпуклая оболочка* этого множества точек; тогда, очевидно,

$$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots,$$

где $R_1 \supset R_2$ означает (как обычно), что R_1 содержит R_2 или совпадает с R_2.

Пусть $R = R_1R_2R_3 \ldots$ — общая часть множеств R_1, R_2, R_3, ..., т. е. их пересечение.

Область R содержит множество D предельных точек последовательности $\{s_n\}$. Действительно, пусть s — предельная точка $\{s_n\}$ и предположим, что $\lim\limits_{i\to\infty} s_{n_i} = s$. Возьмем любое положительное число p, фиксируем его и определим q так, чтобы $n_q > p$; тогда $s_{n_q}, s_{n_{q+1}}, s_{n_{q+2}}, \ldots$ принадлежат R_p. Так как R_p замкнуто, то оно содержит все предельные точки этой последовательности, и следовательно, s принадлежит R_p. Так как p — произвольное число, то отсюда и следует требуемый результат.

Множество R, которое необходимо будет выпуклым и замкнутым, называется *ядром последовательности* $\{s_n\}$.

Если R состоит только из одной точки, то $\{s_n\}$ сходится. Если R пустое (т. е. не содержит конечных точек), то последовательность $\{s_n\}$ называется *определенно расходящейся*, и в этом случае мы будем обозначать $s_n \sim \infty$. Например*), если s_n равно n или in, смотря по тому, четное или нечетное n, то каждое множество R_n содержит часть первого квадранта комплексной плоскости, остающуюся после удаления треугольной области с прямым углом в начале координат; в этом случае легко видеть, что ядро R последовательности $\{s_n\}$ пусто, и следовательно, $s_n \sim \infty$. Также, если $s_n = n + (-1)^n in^2$, то $s_n \sim \infty$. Но если $s_n = ni^n$, то любое R_n содержит все точки комплексной плоскости, и в этом случае уже не имеет места соотношение $s_n \sim \infty$; если $s_n = (-1)^n$, то каждое R_n состоит из отрезка действительной оси между -1 и $+1$, так что в этом случае также не будет $s_n \sim \infty$.

Если A — T-матрица, то ядро R' A-преобразования каждой сходящейся последовательности $\{s_n\}$ совпадает с ядром R самой последовательности $\{s_n\}$ и каждое из ядер R и R' состоит из одной точки, являющейся пределом последовательности $\{s_n\}$.

Основная теорема, принадлежащая Кноппу, о которой мы упоминали выше, заключается в следующем:

Если A — неотрицательная T-матрица, то ядро R любой последовательности $\{z_n\}$, к которой применимо преобразование A, содержит ядро R' последовательности $\{z'_n\}$, полученной в результате A-преобразования последовательности $\{z_n\}$ (Кнопп [I], 115).

Доказательство этой теоремы, данное ниже в (**6.1**, I) и (**6.1**, II), принадлежит Динсу (публикуется здесь впервые); теорема сначала доказывается для действительных последовательностей и затем обобщается на комплексные.

Ядром *действительной* последовательности $\{x_n\}$ является отрезок $\gamma = (a, b)$ между верхним и нижним пределами a и b последовательности $\{x_n\}$.

(**6.1**, I) *Если (a_{nk}) — неотрицательная T-матрица, то ядро $\gamma' = (a', b')$ преобразованной последовательности $\{x'_n\}$, где $x'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$, содержится в ядре $\gamma = (a, b)$ действительной последовательности $\{x_n\}$.*

Мы должны показать, что $a \leqslant a'$ и $b \geqslant b'$. Докажем последнее.

Если $b = \infty$, то это очевидно. Если $b \neq \infty$, то имеется не более конечного числа значений n, для которых $x_n > b + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, и поэтому найдется положительное число m, такое, что $x_k < b + \varepsilon$ при $k > m$. Так как

$$x'_n = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} x_k, \quad \text{а} \quad \lim_{n \to \infty} a_{nk} = 0$$

*) Эти примеры даны Агнью [6].

для любого фиксированного k, то мы видим, что x'_n и $x''_n = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} x_k$ имеют одно и то же производное множество, и

$$x''_n \leqslant (b+\varepsilon) \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} \to b+\varepsilon \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

ибо (a_{nk}) — *неотрицательная T-матрица*. Поэтому абсцисса любой предельной точки последовательности x''_n не будет превосходить $b+\varepsilon$. Принимая во внимание, что ε произвольно, мы получаем $b' \leqslant b$.

Далее, $-a$ является верхним пределом последовательности $\{-x_k\}$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(-x_k) = -x'_n.$$

Но, по только что доказанному, имеем $-a' \leqslant -a$, где $-a'$ — верхний предел $\{-x'_n\}$, и следовательно, $a \leqslant a'$. Теорема доказана.

Другое определение ядра комплексной последовательности, данное Кноппом, заключается в следующем. Всякая прямая линия L делит плоскость на две полуплоскости. Если множество точек S лежит полностью в такой полуплоскости (несколько или все точки могут лежать на самой линии L), то мы будем говорить, что L является *барьерной линией* для S. В том случае, когда S не имеет барьерных линий, *ядром* множества S является вся плоскость. Когда S имеет барьерные линии, *ядром* множества S является общая часть всех полуплоскостей, содержащих множество D предельных точек S.

Покажем, что *оба определения ядра эквивалентны* *).

Пусть x — последовательность, E — ядро x в первом определении, D — производное множество x, F — общая часть всех полуплоскостей, содержащих D.

Мы знаем, что $E \supset D$ и, очевидно, $F \supset D$; покажем, что $E = F$.

(I) Пусть a не принадлежит E; тогда a не принадлежит множеству R_n (для некоторого фиксированного n), и мы можем провести барьерную линию L, отделяющую a от R_n. Так как $R_n \supset D$ (R_n замкнуто), то L отделяет a от D. Следовательно, a не принадлежит F, и поэтому $E \supset F$.

(II) Разделим плоскость прямой L на две части так, чтобы одна из полуплоскостей, которую обозначим через P, содержала D. L будет барьерной линией для D. Все точки последовательности $\{x_n\}$, исключая, быть может, конечное число их, лежат с той же стороны от L, что и точки множества D, ибо в противном случае нашлась бы, по крайней мере, одна предельная точка, лежащая с противоположной стороны от L, чем множество D. Следовательно, существует такое m, что $x_m, x_{m+1}, \ldots$ принадлежат P. Значит, R_m лежит в P,

*) Доказательство и замечания после (**6.1, II**) о связи ядер с производными множествами даны Алленом.

так что и E лежит в P. Таким образом, $F \supset E$. Из включений $E \supset F$ и $F \supset E$ следует, что $E = F$, и требуемый результат доказан *).

(**6.1**, II) *Если* (a_{nk}) — *неотрицательная* T-*матрица, то ядро* R' *последовательности* $\{z'_n\}$, $z'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k$, *содержится в ядре* R *комплексной последовательности* $\{z_n\}$.

Если R — вся плоскость, то нечего доказывать. Если $\{z_k\}$ имеет барьерную линию вида $x = a$, например, если $\varliminf_{k \to \infty} x_k = a$, то (**6.1**, I) показывает, что $\varliminf_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \geqslant a$, так что прямая $x = a$ является барьерной линией и для $\{z'_n\}$. Отсюда следует, что если какая-либо прямая L, образующая угол θ с положительным направлением мнимой оси, является барьерной для $\{z_n\}$, то $\{e^{-i\theta} z_n\}$ имеет барьерную линию вида $x = a$, которая также является барьерной линией и для $\{e^{-i\theta} z'_n\}$, и таким образом, L является барьерной линией для $\{z'_n\}$.

Следовательно, любая полуплоскость, содержащая D, содержит также и D', где D и D' — множества предельных точек соответственно последовательностей $\{z_n\}$ и $\{z'_n\}$. Это и доказывает теорему.

Мы видим, что:

(1) *Если две последовательности имеют одно и то же производное множество, то они имеют одно и то же ядро* (*согласно второму определению*) **).

(2) *Две последовательности могут иметь одно и то же ядро, но различные производные множества*; например, последовательности $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$ и $\left\{1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}, \ldots\right\}$ имеют ядрами отрезок $[0, 1]$.

---

*) Это доказательство справедливо только для ограниченных последовательностей. В случае неограниченных последовательностей приведенное здесь второе определение ядра является неполным, так как не введено понятие барьерной линии производного множества D в том случае, когда оно содержит бесконечно удаленную точку или состоит из нее одной, в то время как для самого множества S барьерные линии имеются. В силу этого все дальнейшие результаты этого параграфа, которые получены на основании второго определения ядра, нужно считать доказанными только для ограниченных последовательностей. Что касается теоремы (**6.1**, II), то она справедлива для любых последовательностей, хотя приведенное здесь доказательство нуждается в уточнении. См., например, Харди, Расходящиеся ряды, стр. 76—79. (*Прим. перев.*)

**) Для неограниченных последовательностей это неверно. Например, последовательности $s_n = (-1)^n n$, $s'_n = (-1)^n in$, рассматриваемые в комплексной плоскости, имеют одно и то же производное множество, которое состоит из одной бесконечно удаленной точки, однако ядром первой из них является вся действительная ось, а ядром второй — вся мнимая ось. (*Прим. перев.*)

Возникает вопрос: если две последовательности имеют одно и то же ядро, что можно сказать о их производных множествах? Ответ может быть выражен двумя способами, а именно в терминах первого и второго определения ядра. Мы дадим сначала ответ, исходя из второго определения.

Две последовательности имеют одно и то же ядро тогда и только тогда, когда каждая полуплоскость, содержащая производное множество одной из последовательностей, содержит производное множество и другой.

Действительно, предположим, что последовательности x и y имеют одно и то же ядро E. Пусть D и D' — их производные множества и пусть P — полуплоскость, содержащая D. Тогда, по второму определению, P содержит E, но так как $E \supset D'$, то отсюда следует, что $P \supset D'$. Обратно, пусть каждая полуплоскость, содержащая D, содержит также и D' и наоборот. Если a принадлежит E, то a принадлежит любой полуплоскости, которая содержит D (в соответствии со вторым определением), и поэтому любой полуплоскости, которая содержит D'; следовательно, a принадлежит E', так что $E' \supset E$. Аналогично $E \supset E'$, и таким образом, $E = E'$.

Две последовательности имеют одно и то же ядро тогда и только тогда, когда любая выпуклая область, содержащая производное множество одного из них, содержит также производное множество другого.

Действительно, предположим, что x и y имеют одно и то же ядро E и P — выпуклая область, содержащая D. Если P не содержит D', то найдется, по крайней мере, одна точка a из D', лежащая вне P, и значит, существует барьерная линия, отделяющая a от D. Иначе говоря, существует полуплоскость, содержащая D, но не содержащая D'. Это противоречит предыдущему результату, так как, по предположению, x и y имеют одно и то же ядро.

Обратно, пусть любая выпуклая область, содержащая D, содержит также и D' и наоборот. Тогда любая полуплоскость, содержащая D, содержит также и D' и наоборот; следовательно, x и y имеют одно и то же ядро.

6.2. Некоторые теоремы Агнью о ядрах

Приведем некоторые теоремы Агнью о ядрах (Агнью [2]).

В теории суммирования иногда рассматриваются T-матрицы, удовлетворяющие условиям

(г)
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1;$$

(д) *для каждого* k $a_{nk} = 0$ *почти для всех* n (т. е. для каждого k элементы $a_{nk} = 0$, кроме конечного числа значений n);

(е)
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1 \quad \textit{для любого } n$$

(см. Агнью [1], [2], Гурвиц [2], [3]). Ясно, что эти условия содержат в себе условия (а)′ — (в)′ теоремы (**4.1**, II). Для действительных матриц имеет важное значение условие

(ж) $a_{nk} \geqslant 0$ *для любых* n *и* k.

В теоремах (**4.5**, I) — (**4.5**, VI) матрицы удовлетворяют условиям (д) и (е) и не обязательно удовлетворяют (г) или (ж).

Следующие результаты указывают на некоторые свойства действительных T-матриц, удовлетворяющих условиям (д), (е) и (ж).

(**6.2**, I) *Для каждой последовательности* $\{s_n\}$ *и каждой последовательности* $\{z_n\}$ *точек из ядра* $\{s_n\}$ *существует действительная квадратная* T*-матрица, удовлетворяющая условиям* (д), (е) *и* (ж), *которая преобразует* $\{s_k\}$ *в последовательность* $\{\sigma_n\}$ *такую, что* $|z_n - \sigma_n| < \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть R_{np} — наименьшая выпуклая замкнутая область, содержащая точки $s_n, s_{n+1}, \ldots, s_{n+p}$, и пусть $R_{n\infty}$ — сумма множеств $R_{n1}, R_{n2}, R_{n3}, \ldots$; тогда $R_{np} \subset R_{n,p+1} \subset R_{n\infty}$ для любого p.

Можно показать, что $R_{n\infty} \subset R_n$ (R_n определено в начале предыдущего параграфа) и что $R_n \subset R^0_{n\infty}$, где $R^0_{n\infty}$ — множество, состоящее из точек $R_{n\infty}$ и предельных точек множества $R_{n\infty}$. Учитывая, что R_n замкнуто, имеем:

$$R^0_{n\infty} = R_n. \tag{6.21}$$

Так как z_n является точкой из R, то $z_n \in R_n$ для любого n, поэтому, согласно (6.21), мы можем выбрать σ_n и номер p_n такие, что $|z_n - \sigma_n| < \frac{1}{n}$ и $\sigma_n \in R_{n,p_n}$ для любого n.

Так как R_{n,p_n} — замкнутый выпуклый многоугольник, вершинами которого являются все или некоторые из точек $s_n, s_{n+1}, \ldots, s_{n+p_n}$, то мы можем взять три вершины, скажем $s_{n+\mu_n}, s_{n+\nu_n}, s_{n+\pi_n}$, так, чтобы полученный при этом треугольник содержал σ_n в качестве внутренней или граничной точки. Если $s_n, s_{n+1}, \ldots, s_{n+p_n}$ лежат на одной прямой или совпадают, то многоугольник обращается в отрезок прямой линии или точку и вершины треугольника будут находиться на одной прямой или совпадут.

Теперь мы можем выбрать α_n и β_n такие, что

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta_n \leqslant 1$$

и

$$\sigma_n = (1 - \beta_n) s_{n+\mu_n} + \alpha_n \beta_n s_{n+\nu_n} + \beta_n (1 - \alpha_n) s_{n+\pi_n}.$$

Преобразование

$$x'_n = (1 - \beta_n) x_{n+\mu_n} + \alpha_n \beta_n x_{n+\nu_n} + \beta_n (1 - \alpha_n) x_{n+\pi_n}$$

удовлетворяет всем требуемым свойствам, что и доказывает теорему.

Отметим, что может не существовать T-матрицы, удовлетворяющей условиям (е) и (ж), при помощи которой $\{s_n\}$ преобразуется непосредственно в $\{z_n\}$, даже в предположении ограниченности $\{s_n\}$.

Применяя (**6.2**, I) и метод доказательства (**4.5**, II), мы получим:

(**6.2**, II) *Для каждой последовательности* $\{s_n\}$ *и каждого замкнутого множества* A, *содержащегося в ядре* $\{s_n\}$, *существует действительная квадратная или треугольная* T*-матрица, удовлетворяющая условиям* (д), (е) *и* (ж), *которая преобразует* $\{s_n\}$ *в последовательность, имеющую* A *множеством своих предельных точек.*

Так как ядро любой последовательности является замкнутым множеством, то множество A может совпадать со своим ядром. Взяв в качестве A одну точку, мы получим:

(**6.2**, III) *Для каждой последовательности* $\{s_n\}$ *и любого постоянного числа* σ *из ядра* $\{s_n\}$ *существует квадратная или треугольная* T*-матрица, удовлетворяющая условиям* (д), (е) *и* (ж), *которая преобразует* $\{s_n\}$ *в последовательность, сходящуюся к* σ.

(См. также примеры 3—6 к гл. 6.)

6.3. Определенно расходящиеся последовательности

Нашей ближайшей задачей будет рассмотрение условий, при которых ядро последовательности или ее преобразования при помощи T-матрицы будет *пустым* (Агнью [6], 178—184).

Мы сначала заметим, что если $s_n \sim \infty$, то $|s_n| \to \infty$. Действительно, $s_n \sim \infty$ означает, что ядро R последовательности $\{s_n\}$ пусто. Так как R является общей частью монотонно убывающей последовательности R_1, R_2, R_3, ... замкнутых множеств, то отсюда следует, что для каждого $r > 0$ мы можем выбрать соответствующее N, такое, что R_N не содержит ни одной точки круга $|s_n| \leqslant r$. Тогда $|s_n| > r$ при $n \geqslant N$ и, значит, $|s_n| \to \infty$.

Пример $s_n = (-1)^n n$ показывает, что условие $|s_n| \to \infty$ не влечет $s_n \sim \infty$. Если все точки s_n лежат внутри угла, меньшего π, и $|s_n| \to \infty$, то $s_n \sim \infty$, однако обратное утверждение не верно, как это видно из примера $s_n = n + (-1)^n in^2$. В этой последовательности $|s_n| \to \infty$ и $s_n \sim \infty$, однако не существует угла, меньшего π, в котором лежали бы все точки этой последовательности.

(**6.3**, I) *Для того чтобы последовательность* $\{s_n\}$ *была определенно расходящейся* ($s_n \sim \infty$), *необходимо и достаточно, чтобы существовал такой угол* φ, *что*

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Re}(s_n e^{i\varphi}) = +\infty. \tag{6.31}$$

Если условие (6.31) выполняется, то для любого $M > 0$ можно выбрать такое N, что $\operatorname{Re}(s_n e^{i\varphi}) > M$ при $n \geqslant N$. Таким образом, ядро $\{s_n e^{i\varphi}\}$ не может содержать точек с действительной частью, меньшей M, так что ядро последовательности $\{s_n e^{i\varphi}\}$ пусто.

Так как ядро последовательности $\{s_n\}$ представляет собой повернутое ядро последовательности $\{s_n e^{i\varphi}\}$, то ядро $\{s_n\}$ также пусто, т. е. $s_n \sim \infty$, что и доказывает достаточность условия.

Докажем необходимость. Пусть $s_n \sim \infty$. Тогда, в силу выпуклости R_n, в R_n существует единственная точка P_n, ближайшая к началу координат O, и если мы положим $P_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$, где $\rho_n \geqslant 0$ и $-\pi < \varphi_n \leqslant \pi$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_n = +\infty$. Выберем такое N, чтобы $\rho_n > 0$ при $n \geqslant N$. Когда $n \geqslant N$, прямая L_n, проходящая через середину OP_n и перпендикулярная к OP_n, не может пересекать R_n, в противном случае из выпуклости R_n вытекало бы, что P_n не является ближайшей к началу координат точкой из R_n. Следовательно, точка O и область R_n лежат по разные стороны от прямой L_n.

Рассмотрим сначала случай, когда существуют такие n и n', что при $n > n' \geqslant N$ $\varphi_n \neq \varphi_{n'}$. В этом случае прямые L_n и $L_{n'}$ делят плоскость на четыре области (клина) и область R_n лежит в клине W, вертикально противоположном клину, содержащему O. Если мы возьмем в качестве φ угол, на который должны быть повернуты точки плоскости для того, чтобы биссектриса угла W совпала по направлению с положительным направлением действительной оси, то мы видим, что

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Re}(s_n e^{i\varphi}) = +\infty.$$

Если $\varphi_n = \varphi_{n'}$ для всех n, n', для которых $n > n' \geqslant N$, мы возьмем $\varphi = -\varphi_n$ для фиксированного n, удовлетворяющего условию $n > n' \geqslant N$, и придем к тому же заключению.

(**6.3**, II) *Если две последовательности* $\{s_n\}$ *и* $\{s'_n\}$ *удовлетворяют условию*

$$\lim_{n \to \infty} |s_n - s'_n| = 0, \tag{6.32}$$

то их ядра R *и* R' *совпадают.*

Это будет доказано, если мы установим, что

$$R' \subset R \quad \text{и} \quad R \subset R'.$$

Для доказательства включения $R' \subset R$ мы возьмем точку z' из R' и предположим, что $z' \bar{\in} R$. Тогда найдется такой номер p, что $z' \bar{\in} R_p$. Пусть z'' — точка (*единственная*) из R_p, ближайшая к z'. Положим

$$\alpha = z' + \frac{1}{3}(z'' - z'), \quad \beta = z' + \frac{2}{3}(z'' - z'),$$

и пусть $|z'' - z'| = 3d$; тогда

$$|\alpha - z'| = |\beta - \alpha| = |z'' - \beta| = d.$$

Выберем $q > p$ так, чтобы $|s_n - s'_n| > d$ при $n > q$. Пусть L_α и L_β — прямые, проведенные в точках α и β перпендикулярно к прямой $z'z''$. Тогда точки из R_p и, следовательно, все точки s_q, s_{q+1}, s_{q+2}, ... отделены от z' прямой L_β; отсюда следует, что все точки s'_q, s'_{q+1}, s'_{q+2}, ... отделены от z' прямой L_α. Следовательно, $z' \bar{\in} R'_q$ и, значит, $z' \bar{\in} R'$.

Полученное противоречие показывает, что $R' \subset R$. Аналогично $R \subset R'$, и теорема тем самым доказана.

(Как обобщение этого результата см. пример 1 к гл. 6.)

В следующих теоремах этого параграфа T-матрица будет предполагаться нижней треугольной и комплексной.

(**6.3**, III) *Для того чтобы нижняя треугольная T-матрица A обладала тем свойством, что $s_n \sim \infty$ влечет $\sigma_n \sim \infty$, где σ_n есть A-преобразование последовательности $\{s_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная константа K, такая, что*

$$a_{nk} = \operatorname{Re}(a_{nk}) \geqslant 0 \tag{6.33}$$

для любого n и любого $k \geqslant K$.

Достаточность условий немедленно следует из того факта, что теорема Кноппа о ядрах остается справедливой и в том случае, если условие неотрицательности (a_{nk}) для любого n и k заменить условием (6.33) (см. доказательство (**6.1**, I) и (**6.1**, II) *).

Для доказательства необходимости нам потребуется несколько лемм.

Лемма 1. *Если нижняя треугольная T-матрица A обладает свойством, что $s_n \sim \infty$ влечет $\sigma_n \sim \infty$, то найдется число K_1 такое, что*

$$\operatorname{Im}(a_{nk}) \geqslant 0 \tag{6.34}$$

для любого n и для $k \geqslant K_1$.

Пусть A — нижняя треугольная T-матрица, для которой условие (6.34) не имеет места. Тогда мы построим последовательность $s_n = x_n + iy_n$, для которой $x_n \to +\infty$, так что $s_n \sim \infty$, в то время как соотношение $\sigma_n \sim \infty$ не будет иметь места.

Чтобы указать, как определяются элементы этой последовательности, мы предположим, что нами уже определены номера

$$1 = n_0 < \nu_1 < n_1 < \ldots < \nu_{p-1} < n_{p-1},$$

и предположим, что s_k уже определены для $1 \leqslant k \leqslant n_{p-1}$.

---

*) Ссылка на доказательство теоремы (**6.1**, II) не корректна См. сноску переводчика перед теоремой (**6.1**, II). (*Прим. ред.*)

Выберем $\nu_p > n_{p-1}$ таким, чтобы

$$\left|\sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{\nu_p, k} s_k\right| < \frac{1}{2p},$$

$$\left|1 - \sum_{k=n_{p-1}+1}^{\nu_p} a_{\nu_p, k}\right| < \frac{1}{2p\,|p+ip^2|},$$

и положим $s_k = p + ip^2$ для $n_{p-1} < k \leqslant \nu_p$. Тогда

$$\sigma_{\nu_p} = \sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{\nu_p, k} s_k + (p+ip^2) \sum_{k=n_{p-1}+1}^{\nu_p} a_{\nu_p, k},$$

так что

$$|\sigma_{\nu_p} - (p+ip^2)| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{\nu_p, k} s_k\right| + \\ + |p+ip^2| \cdot \left|1 - \sum_{k=n_{p-1}+1}^{\nu_p} a_{\nu_p, k}\right| < \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p}.$$

Выберем теперь k_p и n_p так, чтобы для них выполнялось неравенство $\nu_p < k_p \leqslant n_p$ и $a_{n_p, k_p} = b + ic$ (c действительное), где $c < 0$. Положим $s_k = p$ $(\nu_p < k \leqslant n_p,\ k \neq k_p)$, $s_{k_p} = p + x + iy$, где x и y — действительные числа, подлежащие определению.

Полагая

$$\alpha + i\beta = \sum_{k=1}^{\nu_p} a_{n_p, k} s_k + p \sum_{k=\nu_p+1}^{n_p} a_{n_p, k}$$

(α и β действительные), мы видим, что

$$\sigma_{n_p} = \alpha + i\beta + (b+ic)(x+iy) = (\alpha + bx - cy) + i(\beta + cx + by).$$

Возьмем действительное число V_p так, чтобы оно удовлетворяло условиям $V_p \leqslant -p$ и $cV_p - b\alpha - c\beta \geqslant 0$, и определим x и y из уравнения

$$\sigma_{n_p} \equiv (\alpha + bx - cy) + i(\beta + cx + by) = iV_p.$$

Тогда

$$\alpha + bx - cy = 0, \quad \beta + cx + by = V_p,$$

так что

$$cx = V_p - \beta - b\left(\frac{bx+\alpha}{c}\right),$$

или

$$(b^2+c^2)\,x = cV_p - (b\alpha + c\beta) \geqslant 0.$$

Таким образом, $x \geqslant 0$, и следовательно, $\operatorname{Re}(s_{k_p}) \geqslant p$. Продолжая таким путем, мы построим последовательность целых положительных чисел (номеров)

$$1 = n_0 < \nu_1 < n_1 < \nu_2 < n_2 < \ldots$$

и последовательность $\{s_k\}$ так, что

$$\operatorname{Re}(s_k) \geqslant p \qquad (n_{p-1} < k \leqslant n_p). \tag{6.35}$$

Последовательность $\{\sigma_n\}$, полученная от преобразования последовательности $\{s_n\}$ при помощи матрицы A, будет удовлетворять условиям

$$\sigma_{\nu_p} = p + ip^2 + \varepsilon_p, \quad \sigma_{n_p} = iV_p \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{6.36}$$

где $\varepsilon_p \to 0$ и $V_p \leqslant -p$.

Из (6.35) мы имеем $s_n \sim \infty$. Но из (6.36), (**6.3**, II) и того факта, что ядро последовательности содержит ядро каждой ее подпоследовательности, следует, что ядро R' последовательности $\{\sigma_n\}$ содержит ядро последовательности $\{\tau_p\}$, где

$$\tau_p = p + ip^2 \qquad (p = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots), \qquad \tau_p = iV_p \qquad (p = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots).$$

Так как $|\tau_p| \to \infty$ и $\{\tau_p\}$ имеет бесконечное множество точек на полупараболе $z = x + ix^2$ $(x \geqslant 0)$ и бесконечное множество точек на отрицательной части мнимой оси, то отсюда видно, что ядром $\{\tau_n\}$ является замкнутая полуплоскость $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$. Следовательно, ядро R' содержит эту полуплоскость, и таким образом, соотношение $\sigma_n \sim \infty$ не имеет места. Лемма доказана.

Если нижняя треугольная T-матрица A обладает таким свойством, что $s_n \sim \infty$ влечет $\sigma_n \sim \infty$, то комплексно сопряженная матрица $(\bar{a}_{nk})$ также обладает этим свойством, и тогда, по лемме 1, найдется такое $K_2 > K_1$, что

$$\operatorname{Im}(\bar{a}_{nk}) \geqslant 0 \quad \text{для любого } n \text{ при} \quad k > K_2,$$

т. е.

$$\operatorname{Im}(a_{nk}) \leqslant 0 \quad \text{для любого } n \text{ при} \quad k > K_2.$$

Из сопоставления этого результата с леммой 1 следует

Лемма 2. *Если нижняя треугольная T-матрица A обладает свойством, что $s_n \sim \infty$ влечет $\sigma_n \sim \infty$, то существует такое число K_2, что*

$$\operatorname{Im}(a_{nk}) = 0 \quad \textit{для любого } n \textit{ и } k > K_2. \tag{6.37}$$

Мы завершим доказательство теоремы (**6.3**, III), если докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Если нижняя треугольная T-матрица A удовлетворяет условию* (6.37), *но не удовлетворяет условию* (6.33), *то существует действительная последовательность* $\{s_n\}$ *из неотрицательных элементов, такая, что* $s_n \to +\infty$, *в то время как ядром* R' *последовательности* $\{\sigma_n\}$, *полученной в результате* A-*преобразования последовательности* $\{s_n\}$, *является вся действительная ось.*

Выберем K_2 так, чтобы выполнялось условие (6.37), и положим $s_k = 0$ для $1 \leqslant k < K_2$.

Предположим, что уже определены номера

$$K_2 = n_0 < \nu_1 < n_1 < \nu_2 < n_2 < \ldots < \nu_{p-1} < n_{p-1}$$

и s_k для $1 \leqslant k \leqslant n_{p-1}$. Выберем $\nu_p > n_{p-1}$ таким, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{\nu_p, k} s_k \right| < \frac{1}{2p}, \qquad \left| 1 - \sum_{k=n_{p-1}+1}^{\nu_p} a_{\nu_p, k} \right| < \frac{1}{2p^2},$$

и положим $s_k = p$ для $n_{p-1} < k \leqslant \nu_p$.

Тогда

$$\sigma_{\nu_p} = \sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{\nu_p, k} s_k + p \sum_{k=n_{p-1}+1}^{\nu_p} a_{\nu_p, k},$$

так что

$$|\sigma_{\nu_p} - p| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{\nu_p, k} s_k \right| + p \left| 1 - \sum_{k=n_{p-1}+1}^{\nu_p} a_{\nu_p, k} \right| < \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p}.$$

Выберем теперь k_p и n_p так, чтобы $\nu_p < k_p \leqslant n_p$ и $a_{n_p, k_p} < 0$.

Положим $s_k = p$ для $\nu_p < k \leqslant n_p$ $(k \neq k_p)$, $s_{k_p} = p + x$, где x выбрано таким, что $x \geqslant 0$ и

$$\sigma_{n_p} = \sum_{k=1}^{\nu_p} a_{n_p, k} s_k + p \sum_{k=\nu_p+1}^{n_p} a_{n_p, k} + a_{n_p, k_p} x < -p.$$

Продолжая таким же образом дальше, мы определим последовательность номеров $K_2 = n_0 < \nu_1 < n_1 < \nu_2 < n_2 < \ldots$ и последовательность $\{s_n\}$ действительных неотрицательных чисел, для которых $s_k \geqslant p$:

$$(n_{p-1} < k \leqslant n_p), \quad \sigma_{\nu_p} > p - \frac{1}{p}, \quad \sigma_{n_p} < -p \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Легко видеть, что $s_n \to +\infty$ и что ядро R' последовательности $\{\sigma_n\}$ состоит из всей действительной оси. Это доказывает лемму 3, откуда окончательно следует (**6.3**, III).

При доказательстве теоремы (**6.3**, III) было показано, что если нижняя треугольная T-матрица не удовлетворяет условию (6.33), то найдется последовательность $\{s_n\}$, для которой $\operatorname{Re}(s_n) \to +\infty$, в то время как соотношение $\sigma_n \sim \infty$ не имеет места. Из этого замечания и того факта, что $\operatorname{Re}(s_n) \to +\infty$ влечет $s_n \sim \infty$, получаем:

(**6.3**, IV) *Для того чтобы нижняя треугольная T-матрица A могла обладать тем свойством, что* $\operatorname{Re}(s_n) \to +\infty$ *влечет* $\sigma_n \sim \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число K, что*

$$a_{nk} = \operatorname{Re}(a_{nk}) \geqslant 0 \tag{6.38}$$

для любого n и $k \geqslant K$.

Из (**6.3**, III) и (**6.3**, IV) следует (и это можно показать непосредственно с помощью (**6.3**, I)), что класс нижних треугольных T-матриц, обладающих тем свойством, что $\operatorname{Re}(s_n) \to +\infty$ влечет $\sigma_n \sim \infty$, совпадает с классом нижних треугольных T-матриц, обладающих свойством, что $s_n \sim \infty$ влечет $\sigma_n \sim \infty$.

Условие (6.38) не является необходимым, если рассматривать только действительные последовательности $\{s_n\}$. Примером может служить T-преобразование

$$\sigma_n = \left(1 + \frac{i}{n}\right) s_n, \tag{6.39}$$

где матрица преобразования является диагональной; если

$$s_n = \operatorname{Re}(s_n) \to +\infty, \text{ то } \operatorname{Re}(\sigma_n) = s_n \to +\infty,$$

и следовательно, $\sigma_n \sim \infty$, хотя (6.38) и не имеет места.

6.4. Теорема о ядрах ограниченных последовательностей

При доказательстве теоремы Кноппа о ядрах, приведенном в (**6.1**, I) и (**6.1**, II), была установлена только *достаточность* условий того, чтобы ядро A-преобразования последовательности $\{z_n\}$ содержалось в ядре первоначальной последовательности $\{z_n\}$; в этом параграфе будут даны *необходимые и достаточные* условия для некоторых классов матриц и последовательностей.

Приведем сначала результат, относящийся к *произвольным* последовательностям, но только к *нижним треугольным матрицам* (Агнью [6], 134).

(**6.4**, I) *Для того чтобы нижняя треугольная T-матрица A обладала таким свойством, что ядро R любой последовательности $\{s_n\}$ содержало бы ядро R' последовательности $\{\sigma_n\}$, полученной в результате A-преобразования $\{s_n\}$, необходимо и* *достаточно, чтобы существовало такое число K, что*

$$a_{nk} = \mathrm{Re}\,(a_{nk}) \geqslant 0 \tag{6.41}$$

для любого n и для $k \geqslant K$ *).

Достаточность условий следует из доказательства теорем (**6.1**, I) и (**6.1**, II). Чтобы доказать необходимость, мы заметим, что если условие (6.41) не имеет места, то, как это было показано при доказательстве (**6.3**, III), найдется последовательность $\{s_n\}$ с пустым ядром R, в то время как R' содержит, по крайней мере, одну точку, так что включение $R' \subset R$ не имеет места.

Только что упомянутая последовательность $\{s_n\}$ была *неограниченной*. Если рассматривать только *ограниченные* последовательности, то условие (6.41) не является необходимым для того, чтобы ядро последовательности $\{s_n\}$ содержало ядро A-преобразования. В самом деле, матрица преобразования (6.39) не удовлетворяет условию (6.41), однако, согласно (**6.3**, II), ядро всякой ограниченной последовательности совпадает в этом случае с ядром преобразованной последовательности.

Следовательно, для ограниченных последовательностей должна быть отдельная теорема. Впервые она была доказана Агнью ([6], 184) только для нижних треугольных матриц, причем его доказательство основано на некоторых результатах Гурвица, установленных для нижних треугольных матриц. Но эти результаты легко распространить на общие бесконечные матрицы, так что доказательство Агнью теоремы о ядрах также может быть распространено и на эти матрицы. Способ доказательства указан в примерах 10—13 к гл. 6 и основывается на примере 9 к этой же главе (см. также Агнью [14]).

Мы приведем здесь доказательство этой теоремы (для общих бесконечных матриц), принадлежащее А. Робинсону **).

(**6.4**, II) *Для того чтобы T-матрица A была такой, что ядро любой ограниченной последовательности $\{s_n\}$ содержит ядро последовательности $\{\sigma_n\}$, полученной в результате A-преобразования $\{s_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1. \tag{6.42}$$

(I) Для того чтобы установить достаточность, нам потребуется следующая лемма:

Лемма 1. *Если в комплексной плоскости любой круг, содержащий данное замкнутое выпуклое множество S, также*

---

*) В настоящее время теорема доказана во всей полноте, т. е. получены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять произвольная T-матрица A, чтобы ядро любой последовательности содержало ядро A-преобразования. См. обзорную статью в конце книги. (*Прим. перев.*)

**) Публикуется здесь впервые.

содержит другое данное выпуклое множество Σ, *то* Σ *содержится в* S.

Действительно, предположим, что существует точка $\sigma \in \Sigma$ *), не принадлежащая S. Тогда, по свойствам выпуклых множеств, существует прямая линия l, отделяющая σ от S, т. е. σ лежит в одной из полуплоскостей, определенных при помощи l, а S находится в другой полуплоскости и l не имеет общих точек с S. Мы докажем, что существует круг $\bar{C}$, касающийся l и содержащий S. Тогда $\bar{C}$ не может содержать σ, и лемма тем самым будет доказана.

Так как S — замкнутое множество, то оно находится на некотором расстоянии δ от l. Пусть l_1 — прямая, параллельная l, отстоящая от l на расстоянии $\frac{\delta}{2}$ и находящаяся от нее с той же стороны, что и S. Так как S ограничено, то оно может быть заключено в квадрат $ABCD$, имеющий одной из сторон, например AD, часть линии l_1. На продолжении AB (AB перпендикулярна к AD) выберем точку E такую, что $AE = d > \frac{4a^2 - \delta^2}{4\delta}$, где a — длина стороны квадрата. Тогда круг $\bar{C}$ с центром в E, касающийся l, будет искомым.

Действительно, если r — радиус окружности $\bar{C}$, мы имеем $r = d + \frac{1}{2}\delta$; точки A и B лежат, очевидно, внутри $\bar{C}$. Также $DE = \sqrt{a^2 + d^2}$, но $d\delta > a^2 - \frac{1}{4}\delta^2$, так что $r^2 = \left(d + \frac{1}{2}\delta\right)^2 > a^2 + d^2$, т. е. $r^2 > DE^2$. Таким образом, D (а поэтому и C) лежит внутри $\bar{C}$. Следовательно, $\bar{C}$ касается l и содержит S, что и доказывает лемму.

Доказательство достаточности условия (6.42). Пусть ядро последовательности $\{s_n\}$ содержится в круге радиуса R с центром в начале, т. е. для любого заданного $\varepsilon > 0$ $|s_k| \leqslant R + \varepsilon$ при всех $k > k(\varepsilon)$. По данному $\delta > 0$ мы выберем $n = n(\delta, \varepsilon)$ такое, что

$$|a_{nk}| \leqslant \frac{\delta}{k(\varepsilon) \max\limits_{k \leqslant k(\varepsilon)} |s_k|} \tag{6.43}$$

для любого $k \leqslant k(\varepsilon)$ и $n > n(\delta, \varepsilon)$ **). Если условие (6.42) выполняется, то найдется число n_0 такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant 1 + \delta \quad \text{для любого } n > n_0. \tag{6.44}$$

---

*) $\sigma \in \Sigma$ означает (как обычно), что σ принадлежит Σ.

**) Правая часть неравенства (6.43) равна ∞, если $s_k = 0$ при $k \leqslant k(\varepsilon)$. Во избежание дальнейших осложнений вместо $\max |s_k|$ лучше взять $\max\limits_{k \leqslant k(\varepsilon)} \{|s_k| + 1\}$. (*Прим. ред.*)

Следовательно, для любого $n > \max[n_0, n(\delta, \varepsilon)]$ мы имеем из (6.43) и (6.44):

$$|\sigma_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{k(\varepsilon)} a_{nk}s_k\right| + \left|\sum_{k=k(\varepsilon)+1}^{\infty} a_{nk}s_k\right| \leqslant$$
$$\leqslant \delta + (1+\delta)(R+\varepsilon) = (R+\varepsilon) + \delta(1+R+\varepsilon).$$

Но для фиксированного ε величина $\delta(1+R+\varepsilon) \to 0$ вместе с δ, а так как ε произвольно, то отсюда следует, что любая предельная точка последовательности $\{\sigma_n\}$ содержится в круге $|z| = R$; то же самое верно и для ядра последовательности $\{\sigma_n\}$.

Рассмотрим теперь круг радиуса R с центром в произвольной точке z_0, содержащий ядро последовательности $\{s_n\}$. Тогда круг радиуса R с центром в начале координат будет включать ядро последовательности $\{\bar{s}_n\}$, где $\bar{s}_n = s_n - z_0$. Следовательно, ядро последовательности $\{\bar{\sigma}_n\}$, являющейся A-преобразованием последовательности $\{\bar{s}_n\}$, будет также содержаться в круге $|z| = R$. Но

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\bar{s}_k + z_0 \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \bar{\sigma}_n + z_0 \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk},$$

откуда, принимая во внимание, что A есть T-матрица, следует, что $\sigma_n - (\bar{\sigma}_n + z_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Это в свою очередь влечет, что производные множества последовательностей $\{\sigma_n\}$ и $\{\bar{\sigma}_n + z_0\}$ совпадают. Так как ядро $\{\bar{\sigma}_n\}$ содержится в круге $|z| \leqslant R$, то отсюда следует, что ядро $\{\bar{\sigma}_n + z_0\}$ содержится в круге радиуса R с центром в z_0; то же самое верно и для ядра последовательности $\{\sigma_n\}$.

Мы показали, что всякий круг комплексной плоскости, содержащий ядро последовательности $\{s_n\}$, содержит также и ядро последовательности $\{\sigma_n\}$. Отсюда, согласно лемме 1, следует, что ядро последовательности $\{\sigma_n\}$ содержится в ядре последовательности $\{s_n\}$.

Достаточность условия (6.42) доказана.

(II) Для доказательства необходимости нам потребуется другая лемма.

Лемма 2. *Пусть двойная последовательность*

$$S = \left\{x_k^{(n)}\right\} \qquad (n,\ k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

ограничена в своей совокупности, т. е. $\left|x_k^{(n)}\right| < M$ *для всех* n *и* k, *и пусть* Y — *произвольная предельная точка последовательности* $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k^{(n)}$, *где* (a_{nk}) *есть* T-*матрица. Тогда существует последовательность* $\{\bar{x}_k\}$, *элементами которой служат элементы из последовательности* S, *такая, что* Y *будет предельной точкой последовательности* $\bar{y}_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\bar{x}_k$.

По предположению, существует последовательность целых положительных чисел n_r $(r = 1, 2, \ldots)$, где $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, такая, что $\lim\limits_{r\to\infty} y_{n_r} = Y$. Для того чтобы определить $\{\bar{x}_k\}$, фиксируем k_1 такое, что

$$\sum_{k=k_1+1}^{\infty} |a_{n_1,k}| < \frac{1}{2M},$$

и определим $\bar{x}_k$ для $1 \leqslant k \leqslant k_1$, положив $\bar{x}_k = x_k^{(n_1)}$. Затем выберем r_2 так, чтобы

$$|a_{n_{r_2},k}| < \frac{1}{4Mk_1}$$

для $1 \leqslant k \leqslant k_1$, и определим $k_2 > k_1$, чтобы оно удовлетворяло условию

$$\sum_{k=k_2+1}^{\infty} |a_{n_{r_2},k}| < \frac{1}{4M},$$

после чего определим $\bar{x}_k$ для $k_1 < k \leqslant k_2$, положив $\bar{x}_k = x_k^{(n_{r_2})}$.

Теперь мы выберем $r_3 > r_2$ так, чтобы

$$|a_{n_{r_3},k}| < \frac{1}{8Mk_2} \quad \text{для} \quad 1 \leqslant k \leqslant k_2,$$

и определим $k_3 > k_2$, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=k_3+1}^{\infty} |a_{n_{r_3},k}| < \frac{1}{8M},$$

после чего определим $\bar{x}_k$ для $k_2 < k \leqslant k_3$, положив $\bar{x}_k = x_k^{(n_{r_3})}$, и т. д.

Последовательность $\{\bar{x}_k\}$ будет состоять из элементов последовательности S, и мы получаем:

$$\bar{y}_{n_{r_p}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_{r_p},k}\bar{x}_k = \left(\sum_{k=1}^{k_{p-1}} + \sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p} + \sum_{k_p+1}^{\infty}\right) a_{n_{r_p},k}\bar{x}_k.$$

По определению $\bar{x}_k$, имеем $\bar{x}_k = x_k^{(n_{r_p})}$ для $k_{p-1} + 1 \leqslant k \leqslant k_p$, где $k_0 = 0$, $r_1 = 1$, поэтому

$$|\bar{y}_{n_{r_p}} - y_{n_{r_p}}| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_{r_p},k}\left(\bar{x}_k - x_k^{(n_{r_p})}\right)\right| =$$
$$= \left|\left(\sum_{k=1}^{k_{p-1}} + \sum_{k=k_p+1}^{\infty}\right) a_{n_{r_p},k}\left(\bar{x}_k - x_k^{(n_{r_p})}\right)\right|,$$

так что

$$|\bar{y}_{n_{r_p}} - y_{n_{r_p}}| \leqslant k_{p-1}\frac{2M}{2^p k_{p-1} M} + \frac{2M}{2^p M} = \frac{1}{2^{p-2}} \to 0 \quad \text{при } p \to \infty.$$

Следовательно, $\lim\limits_{p\to\infty} \bar{y}_{n_{r_p}} = \lim\limits_{p\to\infty} y_{n_{r_p}} = Y$, и лемма доказана.

Доказательство необходимости условия (6.42). Определим $\{x_k^{(n)}\}$, положив $x_k^{(n)} = e^{-i \arg a_{nk}}$, если $a_{nk} \neq 0$; $x_k^{(n)} = 1$, если $a_{nk} = 0$. Тогда

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|.$$

Если условие (6.42) не выполняется, то существует предельная точка Y последовательности $\{y_n\}$ такая, что $Y > 1$. С другой стороны, согласно лемме 2, существует последовательность $\{\bar{x}_k\}$, состоящая из соответствующим образом подобранных элементов $x_k^{(n)}$, A-преобразование которой $\bar{y}_n$ имеет Y предельной точкой. Но $|x_k^{(n)}| = 1$ для всех n и k, следовательно, все члены последовательности $\{\bar{x}_k\}$ содержатся в единичном круге с центром в начале координат, а значит, и ядро $\{\bar{x}_k\}$ также содержится в этом круге. Это приводит нас к противоречию, так как оказывается, что ограниченная последовательность $\{\bar{x}_k\}$, ядро которой содержится в единичном круге, преобразуется матрицей A в последовательность $\{y_n\}$, которая имеет предельные точки вне этого круга, и значит, ядро последовательности $\{\bar{y}_n\}$ не содержится в ядре $\{\bar{x}_n\}$.

Теорема доказана полностью.

6.5. Две теоремы Робинсона об абсолютной эквивалентности и ядрах

Две теоремы, данные в этом параграфе и принадлежащие А. Робинсону*), тесно связаны с (**6.4**, II), а также с (**6.1**, I) и (**6.1**, II).

(**6.5**, I) *Ядро A-преобразования любой ограниченной последовательности $\{s_n\}$ содержится в ядре $\{s_n\}$ тогда и только тогда, когда T-матрица (a_{nk}) абсолютно эквивалентна неотрицательной матрице (b_{nk}) для всех ограниченных последовательностей.*

(I) Доказательство достаточности. Пусть

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k, \quad \sigma_n' = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} s_k.$$

Если $|s_k| \leqslant M$ для любого k, а A и B абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей, то, согласно (**5.4**, I), имеем:

$$|\sigma_n - \sigma_n'| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_{nk}| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

*) Публикуется здесь впервые.

По (**6.3**, II) ядра последовательностей $\{\sigma_n\}$ и $\{\sigma'_n\}$ в этом случае совпадают. Но по теореме Кноппа о ядрах ядро $\{\sigma'_n\}$ содержится в ядре $\{s_n\}$, так как (b_{nk}) — неотрицательная T-матрица. Следовательно, ядро $\{\sigma_n\}$ содержится в ядре $\{s_n\}$.

(II) Доказательство необходимости. Положим $R_p(z) = \operatorname{Re}(z)$, если $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$; $R_p(z) = 0$, если $\operatorname{Re}(z) < 0$, и $\bar{R}(z) = \operatorname{Re}(z) - R_p(z)$. Если $b_{nk} = \operatorname{Re}(a_{nk})$, то $B = (b_{nk})$ является T-матрицей, причем A и B абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей. Действительно, если это не так, то

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im}(a_{nk})| > 0. \tag{6.51}$$

Положим $x_k^{(n)} = 1$, если $\operatorname{Im}(a_{nk}) \geqslant 0$, и $x_k^{(n)} = -1$, если $\operatorname{Im}(a_{nk}) < 0$. Тогда последовательность $\{y_n\}$, $y_n \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(n)}$, будет такой, что $\operatorname{Im}(y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im}(a_{nk})|$, и из (6.51) следует, что $\{y_n\}$ имеет предельную точку с не равной нулю мнимой частью. Тогда из леммы 2 к теореме (**6.4**, II) получаем, что последовательность $\{\bar{x}_k\}$, элементами которой являются ± 1, может быть определена таким способом, что ее A-преобразование имеет предельную точку с отличной от нуля мнимой частью, хотя ядро $\{\bar{x}_k\}$, очевидно, состоит только из действительных точек. Это противоречит предположению, что ядро A-преобразования (и, следовательно, множество всех его предельных точек) содержится в ядре первоначальной последовательности.

Теперь мы покажем, что b_{nk} и $c_{nk} \equiv R_p(a_{nk})$ абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей. В самом деле, если это не так, то

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{k=1}^{\infty} |\bar{R}(a_{nk})| > 0. \tag{6.52}$$

Положим $x_k^{(n)} = 1$, если $\bar{R}(a_{nk}) < 0$, и $x_k^{(n)} = 0$, если $\bar{R}(a_{nk}) = 0$. Тогда

$$u_n \equiv \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k^{(n)} = -\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{R}(a_{nk})|,$$

а соотношение (6.52) показывает, что $\{u_n\}$ имеет предельную точку с отрицательной абсциссой. Снова применяя лемму 2 теоремы (**6.4**, II), мы можем определить последовательность $\{\bar{x}_k\}$ такую, что $\bar{x}_k$ равны 0 или 1, а ее B-преобразование (а следовательно, и ее A-преобразование, так как A и B абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей) имеет предельную точку с отрицательной абсциссой, хотя ядро $\{\bar{x}_k\}$, очевидно, состоит только из точек с неотрицательными абсциссами. Следовательно, B и C, а поэтому C и A абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей, причем C — неотрицательная T-матрица.

Теорема доказана.

В следующей теореме матрица A предполагается *действительной*.

(**6.5**, II) *Ядро A-преобразования любой последовательности $\{s_k\}$, для которой $|s_k| \leqslant \theta_k$, где $\theta_k \to \infty$ при $k \to \infty$, содержится в ядре последовательности $\{s_k\}$ тогда и только тогда, когда действительная T-матрица (a_{nk}) абсолютно эквивалентна неотрицательной матрице (b_{nk}) для всех $\{s_k\}$, для которых $|s_k| \leqslant \theta_k$ и ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|\,\theta_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}\theta_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_{nk}|\,\theta_k \qquad (6.53)$$

сходятся для каждого n.

(I) Доказательство достаточности. В обозначениях (**6.5**, I), (I)

$$|\sigma_n - \sigma'_n| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_{nk}|\,\theta_k \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

согласно (**5.5**, I), если A и B абсолютно эквивалентны для всех $\{s_k\}$, для которых $|s_k| \leqslant \theta_k$, $\theta_k \to \infty$ при $k \to \infty$, и все три ряда в (6.53) сходятся для каждого n. Дальше доказательство продолжается точно так же, как в (**6.5**, I), (I).

(II) Для доказательства необходимости нам потребуется следующая лемма, являющаяся обобщением леммы 2 теоремы (**6.4**, II):

Лемма. *Пусть двойная последовательность $S = \{x_k^{(n)}\}$ $(n, k = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет условию $|x_k^{(n)}| \leqslant \theta_k$ для любого n, где $\theta_k \to \infty$ при $k \to \infty$, и пусть A — матрица такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_{nk} = 0$ для любого фиксированного k и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|\,\theta_k$ сходится для любого n. Пусть Y — произвольная конечная предельная точка последовательности $\{y_n\}$, $y_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(n)}$ (если существует хотя бы одна такая точка). Тогда существует последовательность $\{\bar{x}_k\}$, элементы которой принадлежат S, такая, что Y является предельной точкой последовательности*

$$\bar{y}_n \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\bar{x}_k.$$

Мы сначала заметим, что $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\bar{x}_k$ сходится для любого n, так как элементами $\{\bar{x}_k\}$ являются элементы $x_k^{(n)}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, а $|x_k^{(n)}| \leqslant \theta_k$, где $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|\,\theta_k$ сходится для каждого n.

По условию, найдется последовательность целых положительных чисел $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ такая, что $\lim_{n\to\infty} y_{p_n} = Y$. Пусть M_N — верхняя грань чисел θ_k для $1 \leqslant k \leqslant N$. Для того чтобы определить $\{\bar{x}_k\}$, мы возьмем сначала k_1, удовлетворяющее условию

$$\sum_{k=k_1+1}^{\infty} |a_{p_1,\,k}|\,\theta_k < \frac{1}{2},$$

и положим $\bar{x}_k = x_k^{(p_1)}$ для $1 \leqslant k \leqslant k_1$. Затем мы выберем $r_2 > 1$, чтобы оно удовлетворяло условию $|a_{p_{r_2},\,k}| < \frac{1}{4k_1} M_{k_1}$ для $1 \leqslant k \leqslant k_1$, что возможно, так как $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ для любого фиксированного k. Теперь мы определим $k_2 > k_1$ так, чтобы

$$\sum_{k=k_2+1}^{\infty} |a_{p_{r_2},\,k}|\,\theta_k < \frac{1}{4},$$

и положим $\bar{x}_k = x_k^{(p_{r_2})}$ для $k_1 < k \leqslant k_2$. Выберем затем $r_3 > r_2$ таким, чтобы оно удовлетворяло условию

$$|a_{p_{r_3},\,k}| < \frac{1}{8k_2 M_{k_2}} \quad \text{для } 1 \leqslant k \leqslant k_2,$$

после чего определим $k_3 > k_2$ из условия

$$\sum_{k=k_3+1}^{\infty} |a_{p_{r_3},\,k}|\,\theta_k < \frac{1}{8}$$

и положим $\bar{x}_k = x_k^{(p_{r_3})}$ для $k_2 < k \leqslant k_3$ и т. д.

Все элементы $\bar{x}_k$ удовлетворяют тому условию, что для каждого из них можно указать такое n, что $\bar{x}_k = x_k^{(n)}$.

Мы имеем:

$$\bar{y}_{p_{r_m}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{p_{r_m},\,k}\bar{x}_k = \left(\sum_{k=1}^{k_{m-1}} + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m} + \sum_{k=k_m+1}^{\infty}\right) a_{p_{r_m},\,k}\bar{x}_k.$$

Но, по определению, $x_k = x_k^{(p_{r_m})}$ для $k_{m-1}+1 \leqslant k \leqslant k_m$, где $k_0=0$, $r_1=1$; следовательно,

$$|\bar{y}_{p_{r_m}} - y_{p_{r_m}}| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{p_{r_m}, k}\left(\bar{x}_k - x_k^{(p_{r_m})}\right)\right| =$$

$$= \left|\left(\sum_{k=1}^{k_{m-1}} + \sum_{k=k_m+1}^{\infty}\right) a_{p_{r_m}, k}\left(\bar{x}_k - x_k^{(p_{r_m})}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant k_{m-1}\frac{2M_{k_{m-1}}}{2^m k_{m-1} M_{k_{m-1}}} + \frac{2}{2^m} = \frac{1}{2^{m-2}} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Таким образом,

$$\lim_{m\to\infty} \bar{y}_{p_{r_m}} = \lim_{m\to\infty} y_{p_{r_m}} = Y,$$

и лемма доказана.

Доказательство необходимости. В обозначениях (**6.5**, I) $a_{nk} \equiv b_{nk}$, так как здесь (a_{nk}) предполагается *действительной*; (a_{nk}) и (c_{nk}) абсолютно эквивалентны для всех $\{s_n\}$, для которых $|s_k| \leqslant \theta_k$, где θ_k удовлетворяют условиям теоремы. Действительно, если это не так, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{\infty} |\bar{R}(a_{nk})|\, \theta_k > 0. \tag{6.54}$$

Положим $x_k^{(n)} = \theta_k$, если $\bar{R}(a_{nk}) < 0$; $x_k^{(n)} = 0$, если $\bar{R}(a_{nk}) = 0$. Тогда

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k^{(n)} = -\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{R}(a_{nk})|\theta_k. \tag{6.55}$$

(а) Предположим, что последовательность $\alpha_n \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |\bar{R}(a_{nk})|\,\theta_k$ имеет конечную предельную точку с положительной абсциссой. Тогда из (6.55) следует, что $\{y_n\}$ имеет конечную предельную точку с отрицательной абсциссой. Согласно лемме мы можем определить $\{\bar{x}_k\}$ так, что $\bar{x}_k = \theta_k$ или $\bar{x}_k = 0$, а ее B-преобразование (а следовательно, и A-преобразование) имеет предельную точку с отрицательной абсциссой, хотя ядро самой последовательности $\{\bar{x}_k\}$, очевидно, состоит только из точек с неотрицательными абсциссами.

Следовательно, A и C абсолютно эквивалентны для всех $\{s_k\}$, для которых $|s_k| \leqslant \theta_k$, где θ_k удовлетворяет условиям теоремы, а C — неотрицательная T-матрица.

(б) Предположим теперь, что $\{\alpha_n\}$ имеет предельными точками только $+\infty$ и (возможно) 0. Если единственной предельной точкой является 0, то теорема доказана. Если это не так, то, по предположению, найдется такая последовательность положительных целых чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, что $\lim\limits_{r \to \infty} \alpha_{n_r} = +\infty$. Определим последовательность $\{x_k^{(n)}\}$, полагая $x_k^{(n)} = 0$ для всех k, если n не является элементом последовательности $\{n_r\}$ $(r = 1, 2, \ldots)$; $x_k^{(n_r)} = \frac{\theta_k}{\alpha_{n_r}}$, если $\bar{R}(a_{n_r, k}) < 0$, и $x_k^{(n_r)} = 0$, если $\bar{R}(a_{n_r, k}) = 0$. Тогда

$$y_{n_r} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_r, k} x_k^{(n_r)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\bar{R}(a_{n_r, k})|\,\theta_k}{\alpha_{n_r}} = -1,$$

и таким образом, последовательность $y_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k^{(n)}$ имеет -1 предельной точкой, в то время как все $x_k^{(n)}$ неотрицательны.

Теорема доказана.

Условие теоремы *не является необходимым*, если (a_{nk}) — комплексная матрица. Действительно, если A и B не являются абсолютно эквивалентными для всех $\{s_n\}$, для которых $|s_k| \leqslant \theta_k$, где θ_k удовлетворяет условиям теоремы, то

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im}(a_{nk})|\,\theta_k > 0. \tag{6.56}$$

Положим $x_k^{(n)} = \theta_k$, если $\operatorname{Im}(a_{nk}) \geqslant 0$, и $x_k^{(n)} = -\theta_k$, если $\operatorname{Im}(a_{nk}) < 0$. Тогда

$$\operatorname{Im}(y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im}(a_{nk})|\,\theta_k$$

и из (6.56) следует, что $\{y_n\}$ имеет предельную точку с отличной от нуля мнимой частью.

Однако $\operatorname{Re}(y_n)$ может стремиться к $+\infty$ и ядро последовательности $\{y_n\}$ будет пустым, так что в этом случае применение леммы с $\bar{x}_k = \pm\theta_k$ не приводит к противоречию *).

6.6. Теорема Штейнгауза и ядра

Два результата, приведенных в этом параграфе, касаются теоремы Штейнгауза и принадлежат Агнью ([6], 184—186). Теорема Штейнгауза (**4.4**, III) может быть также сформулирована следующим образом:

Соответственно для каждого T-преобразования A существует ограниченная последовательность $\{s_n\}$, такая, что ядро ее A-преобразования $\{\sigma_n\}$ содержит более одной точки.

Первая из теорем этого параграфа, а именно (**6.1**, I), показывает, что невозможно специализировать T-матрицу A и ядро R последова-

*) Фактически здесь утверждается только тот факт, что проведенное доказательство неприменимо для комплексных матриц. (*Прим. перев. и ред.*)

тельности $\{s_n\}$ в том направлении, чтобы ядро R' ее A-преобразования было подмножеством ядра R. (В связи с (**6.6**, I) и (**6.6**, II) см. пример 15 к гл. 6.)

(**6.6**, I) *Если A — нижняя треугольная T-матрица и E — непустое замкнутое множество в комплексной плоскости, то существует последовательность $\{s_n\}$ точек из E, такая, что множество E_s предельных точек последовательности $\{s_n\}$ совпадает с E, а множество E_σ предельных точек последовательности $\{\sigma_n\}$, являющейся A-преобразованием последовательности $\{s_n\}$, содержит E, т. е. $E_\sigma \supset E_s = E$.*

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — последовательность, элементы которой образуют подмножество множества E, всюду плотное в E. Обозначим элементы последовательности

$$\alpha_1;\quad \alpha_1, \alpha_2;\quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3;\ \ldots;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n;\ \ldots$$

по порядку через $\beta_1, \beta_2, \ldots$ Таким образом, множество предельных точек последовательности $\beta_1, \beta_2, \ldots$ состоит из множества $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и его предельных точек (ср. (**4.5**, II)) и, значит, совпадает с E, так как множество $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ всюду плотно в E.

Выберем n_1 таким, чтобы

$$\left|\beta_1 - \sum_{k=1}^{n_1} a_{n_1, k}\beta_1\right| < \frac{1}{2},$$

и положим $s_k = \beta_1$ для $1 \leqslant k \leqslant n_1$. Когда уже определены $n_1 < n_2 < \ldots < n_{p-1}$ и s_k для $1 \leqslant k \leqslant n_{p-1}$, мы выберем $n_p > n_{p-1}$ так, чтобы

$$\left|\beta_p - \sum_{k=1}^{n_{p-1}} a_{n_p, k}s_k - \sum_{k=n_{p-1}+1}^{n_p} a_{n_p, k}\beta_p\right| < \frac{1}{2^p},$$

и положим $s_k = \beta_p$ для $n_{p-1} < k \leqslant n_p$. Мы видим, что для определенной по индукции последовательности $\{s_n\}$ выполняется неравенство $|\beta_p - \sigma_{n_p}| < 2^{-p}$, а последовательности $\{s_n\}$ и $\{\sigma_n\}$ обладают свойствами, указанными в формулировке теоремы.

Если множество E в теореме (**6.6**, I) еще и выпукло, то ядро R последовательности $\{s_n\}$, построенной при доказательстве (**6.6**, I), совпадает с множеством E, и мы имеем:

$$R' \supset E_\sigma \supset E_s = R = E.$$

Если, кроме того, A является треугольной T-матрицей, удовлетворяющей условию (6.41), то в дополнение к $R' \supset R$ мы имеем и $R' \subset R$. Таким образом, мы получаем:

(**6.6**, II) *Если A — нижняя треугольная T-матрица, удовлетворяющая условию*

$$a_{nk} = \mathrm{Re}\,(a_{nk}) \geqslant 0 \qquad (6.61)$$

для любого n и $k > K$, то для каждого непустого замкнутого выпуклого множества E комплексной плоскости можно построить последовательность $\{s_n\}$ такую, что ее ядро R и ядро R' ее A-преобразования $\{\sigma_n\}$ оба совпадают с E, т. е. $R' = R = E$.

Из (**6.4**, II) и (**6.6**, I) следует, что (**6.6**, II) остается справедливой при замене условий (6.61) условием (6.42) для нижних треугольных T-матриц A, если в дополнение к требованиям, наложенным на E, потребовать еще его ограниченность.

(Некоторые другие результаты о ядрах см. Пиранян [1], Рафф [1], Винн [1], Аллен [2]; см. также примеры 16—19 к гл. 6, примеры 3—6 к гл. 8.)

Примеры к главе 6

1 *). Если $\{s_n\}$ и $\{s'_n\}$ — ограниченные последовательности, такие, что

$$\lim_{n \to \infty} |s_n - s'_n| = 0,$$

а A есть T-матрица, то показать, что A-преобразования последовательностей $\{s_n\}$ и $\{s'_n\}$ имеют одно и то же ядро. (Фактически этот результат имеет место и в том случае, когда A есть K_r-матрица, столбцы которой являются нуль-последовательностями.)

2. Проиллюстрировать (**6.3**, I), положив $s_n = n$ при n четном и $s_n = ni$ при n нечетном.

3 **). Показать, что для каждой неограниченной последовательности $\{s_n\}$ и каждой последовательности $\{\sigma_n\}$ найдется квадратная T-матрица, удовлетворяющая условиям (г) — (е) § 6.2, которая преобразует $\{s_n\}$ в $\{\sigma_n\}$.

4. Доказать, что для каждой неограниченной последовательности $\{s_n\}$ и каждого замкнутого множества F комплексной плоскости можно указать квадратную или треугольную T-матрицу, удовлетворяющую условиям (г)—(е) § 6.2, которая преобразует $\{s_n\}$ в последовательность, имеющую F множеством своих предельных точек. Отметить частный случай этой теоремы, когда множество F состоит из одной точки σ.

(Использовать пример 3 и метод доказательства (**4.5**, II).)

5. Показать, что для каждой $\{s_n\}$, которая не состоит только из одного повторяющегося элемента при $n > n_0$ и сходится к s, и каждой $\{\sigma_n\}$, сходящейся к s, существует квадратная T-матрица, удовлетворяющая условиям (г) — (е) § 6.2 и преобразующая $\{s_n\}$ в $\{\sigma_n\}$.

(Если $s_n \to s$, то каждое T-преобразование последовательности $\{s_n\}$ опять является последовательностью, сходящейся к s. Возникает вопрос: существует ли какое-либо ограничение на последовательность $\{\sigma_n\}$, имеющую пределом s, в которую обращается $\{s_n\}$ в результате T-преобразования?)

6. Показать, что соответственно для каждой сходящейся последовательности $\{s_n\}$, имеющей по крайней мере один отличный от нуля элемент, и каждой последовательности $\{\sigma_n\}$, которая сходится к тому же самому значению, существует квадратная T-матрица, удовлетворяющая условию (г) § 6.2, которая преобразует $\{s_n\}$ в $\{\sigma_n\}$.

---

*) Пример принадлежит Аллену.

**) Примеры 3—6 см. Агнью [2].

7*). Пусть $\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k$. Матрица (a_{nk}) называется *вполне регулярной*, если она является T-матрицей и преобразует всякую действительную последовательность $\{s_k\}$, $s_k \to +\infty$, в действительную последовательность $\{\sigma_k\}$ такую, что $\sigma_k \to +\infty$. Доказать, что условие $a_{nk} \geqslant 0$ для почти всех k **) является необходимым и достаточным, чтобы действительная нижняя треугольная T-матрица (a_{nk}) была вполне регулярной.

(Что не всякая T-матрица является вполне регулярной, даже если она действительная, видно из следующего примера:

$$\sigma_n = \frac{2}{n}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) - s_n.$$

Положив $s_n = n$, мы имеем $s_n \to +\infty$, в то время как $\sigma_n = 1$ и, значит, $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = 1$)

8. В обозначениях примера 7 показать, что условие $a_{nk} \geqslant 0$ для почти всех k является необходимым и достаточным, чтобы действительная нижняя треугольная T-матрица (a_{nk}) обладала свойствами:

$$\text{(I)} \quad \varliminf_{n \to \infty} \sigma_n \geqslant \varliminf_{n \to \infty} s_n \quad \textit{или} \quad \text{(II)} \quad \varlimsup_{n \to \infty} \sigma_n \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} s_n$$

при условии, что пределы справа конечны.

Если потребовать выполнения *обоих* неравенств (I) и (II), то мы получаем задачу о *ядре* действительной последовательности; если оба предела в правых частях неравенств конечны, то последовательность $\{s_n\}$ ограничена, а из (6.4, II) известно, что необходимым и достаточным условием, чтобы неравенства (I) и (II) имели место, в этом случае является условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \to 1 \quad \text{при } n \to \infty.$$

9***). *Колебанием* последовательности $\{s_k\}$ называется величина $\Omega(s) = \varlimsup\limits_{m, n \to \infty} |s_m - s_n|$.

Для сходимости последовательности $\{s_n\}$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $\Omega(s) = 0$.

Доказать следующие результаты:

(1) для того чтобы $\Omega(s)$ было конечным, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{s_n\}$ была ограниченной;

(2) для того чтобы общая бесконечная T-матрица $A \equiv (a_{nk})$ удовлетворяла условию $\Omega(\sigma) \leqslant \Omega(s)$ для любой $\{s_k\}$, к которой применимо A-преобразование и где $\{\sigma_n\}$ есть A-преобразование последовательности $\{s_k\}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1.$$

---

*) Примеры 7 и 8 см. Гурвиц [2] и [3].

**) Ср. с условием (д) § 6.2. Условие, наложенное на матрицу в примерах 7 и 8, имеет тот смысл, что отрицательные элементы могут находиться только в конечном числе столбцов.

***) См. Гурвиц [3]. Гурвиц получил приведенный здесь результат для нижних треугольных T-матриц. Обобщение на произвольные T-матрицы см. Агнью [8].

10 *). Пусть (a_{jk}) — действительная T-матрица, удовлетворяющая условию

$$A'_j \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \to 1$$

при $j \to \infty$; положим $p_{jk} = a_{jk}$, если $a_{jk} \geqslant 0$; $p_{jk} = 0$, если $a_{jk} < 0$; $-n_{jk} = a_{jk}$, если $a_{jk} < 0$; $n_{jk} = 0$, если $a_{jk} \geqslant 0$, и положим еще

$$P_j = \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}, \quad N_j = \sum_{k=1}^{\infty} n_{jk}.$$

Доказать, что $P_j \to 1$, $N_j \to 0$ при $j \to \infty$.

11. Используя примеры 9 и 10, доказать: для того чтобы ядро любой ограниченной последовательности содержало ядро A-преобразования этой последовательности ($A \equiv (a_{jk})$ — действительная T-матрица), необходимо и достаточно, чтобы $A'_j \to 1$ при $j \to \infty$.

(Отметить, что условие $\Omega(\sigma) \leqslant \Omega(s)$ является необходимым, но не достаточным, чтобы ядро $\{\sigma_n\}$ всегда содержалось в ядре $\{s_n\}$.)

12. Пусть (a_{jk}) — комплексная T-матрица, $a_{jk} = b_{jk} + ic_{jk}$, где b_{jk} и c_{jk} — действительные, и пусть

$$B'_j = \sum_{k=1}^{\infty} |b_{jk}|, \quad C'_j = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{jk}|.$$

Показать, что (b_{jk}) является T-матрицей и что (c_{jk}) — K_r-матрица с пределами по столбцам $a_k = 0$ и $a = \lim\limits_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} = 0$. Если $A'_j \to 1$, то, применяя неравенство Минковского, показать, что $B'_j \to 1$, $C'_j \to 0$ при $j \to \infty$.

13. Из примеров 11 и 12 вывести, что ядро A-преобразования (совершаемого посредством комплексной T-матрицы (a_{nk})) любой ограниченной последовательности $\{s_n\}$ содержится в ядре первоначальной последовательности тогда и только тогда, когда $A'_j \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \to 1$ при $j \to \infty$.

14 **). Другое доказательство теоремы в примере 13 может быть получено следующим образом. Предположим, что $a = \overline{\lim\limits_{j \to \infty}} A'_j > 1$; тогда: или

(I) $b = \overline{\lim\limits_{j \to \infty}} B'_j > 1$, или

(II) $B'_j \to 1$, но $c = \overline{\lim\limits_{j \to \infty}} C'_j > 0$ (в обозначениях примера 12).

В случае (I) показать, что можно построить такую последовательность $\{s_k\}$, $s_k = \pm 1$, что ее B-преобразование имеет b предельной точкой, т. е. некоторые предельные точки последовательности, полученной после A-преобразования, имеют бо́льшую действительную часть по сравнению с действительной частью любой точки первоначальной последовательности.

В случае (II) показать, что можно построить такую последовательность $\{s_k\}$, $s_k = \pm 1$, что ее C-преобразование имеет c предельной точкой, и таким образом, существует действительная последовательность, A-преобразование которой имеет комплексные предельные точки.

---

*) Из решения примеров 10—13 вытекает второе доказательство (6.4, II), о чем упоминалось непосредственно перед теоремой.

**) Пример дан Динсом.

Иллюстрировать случай (II), положив

$$c_{jk}=\frac{(-1)^{k+1}}{j} \qquad (1\leqslant k\leqslant j), \quad c_{jk}=0 \qquad (k>j),$$
$$s_k=(-1)^{k+1}$$

и взяв в качестве (b_{jk}) матрицу средних арифметических. Тогда A-преобразование последовательности $\{s_k\}$ имеет i единственной предельной точкой.

15 *). Обобщить (6.6, I) и (6.6, II) с нижних треугольных матриц на общие T-матрицы.

16. Показать, что матрица A, в которой $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk}=0$, преобразует всякую ограниченную последовательность в нуль-последовательность тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

(Этот результат принадлежит Шуру [1], теорема III; см. также Рафф [1].)

17 **). Доказать, что T-матрица A преобразует всякую ограниченную последовательность $\{s_n\}$ в последовательность, ядро которой совпадает с ядром $\{s_n\}$, если существует пермутатор P (§ 1.5) такой, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}-p_{nk}|\to 0 \qquad \text{при } n\to\infty,$$

т. е. если существует пермутатор, абсолютно эквивалентный A (§§ 5.1, 5.4) для всех ограниченных последовательностей. (Учесть, что пермутатор оставляет ядро последовательности без изменения, а затем использовать пример (16) и (6.3, II).)

18. Доказать, что T-матрица оставляет ядро любой ограниченной последовательности без изменения тогда и только тогда, когда:

(I) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\to 1$ при $n\to\infty$;

(II) для любой бесконечной последовательности натуральных чисел p_i $(i=1, 2, \ldots)$ число 1 является предельной точкой последовательности

$$u_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_{n,\,p_i}.$$

(Эта теорема является обобщением результата, содержащегося в примере 17, в том направлении, что указанные условия являются как необходимыми, так и достаточными.)

19. Доказать, что если A удовлетворяет условию (I) примера 18, то тому же условию удовлетворяет и A^n, где n — любое целое положительное число, а если A удовлетворяет обоим условиям (I) и (II) примера 18, то и A^n удовлетворяет этим условиям.

---

*) Пример дан Роджерсом.

**) Примеры 17—19 даны Алленом; относительно 18 и 19 см. Аллен [2], а также Рафф [1] и Винн [1], [2].

ГЛАВА 7

ПРОБЛЕМЫ НЕЭФФЕКТИВНОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

7.1. Неэффективные матрицы, левосторонние обратные которых являются K_r-матрицами

В § 5.2 было дано определение круга применения K_r-матрицы A. Множество всех последовательностей из круга применения матрицы A, которые суммируются этой матрицей, мы будем называть *эффективной областью* матрицы A. Так, эффективная область K-матриц включает все сходящиеся последовательности. Если класс последовательностей $\{z_k\}$ принадлежит эффективной области матрицы A, то A называется *эффективной* для класса $\{z_k\}$; в противном случае A называется *неэффективной* для класса $\{z_k\}$.

В этой главе мы дадим достаточные условия для матрицы, чтобы она могла быть неэффективной: (I) для всех расходящихся последовательностей; (II) для всех ограниченных расходящихся последовательностей; (III) для всех рядов Тэйлора вне их круга сходимости (Кук и Динс [1]).

Близкие к проблеме *эффективности* вопросы рассматриваются также в гл. 8.

В § 7.4 будет отмечено любопытное явление суммируемости посредством матрицы ряда Тэйлора в *точке* (или *в множестве изолированных точек*) вне круга сходимости; это явление носит промежуточный характер между неэффективностью во всех точках вне круга сходимости и эффективностью в *области*, лежащей вне круга сходимости.

Мы начнем с рассмотрения класса *вполне неэффективных K-матриц*, т. е. K-матриц, которые не суммируют ни одну расходящуюся последовательность *). Докажем следующие два результата.

(7.1, I) *Если K-матрица A с конечными строками имеет л. с. обратную ^{-1}A, которая является K-матрицей с конечными строками, то A вполне неэффективна.*

*) См. также примеры 16—18 к гл. 7.

(**7.1**, II) *Если K-матрица A имеет л. с. обратную ${}^{-1}A$, которая является K-матрицей, то A неэффективна для всех ограниченных расходящихся последовательностей.*

Предположим, что для данной расходящейся последовательности $\{z_k\}$ и двух данных K-матриц A и B имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}z_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni}a_{ik}\right)z_k, \tag{7.11}$$

т. е. предположим, что порядок суммирования может быть изменен без нарушения сходимости и изменения суммы.

Если A преобразует $\{z_k\}$ в сходящуюся последовательность $\{z'_i\}$, то в левой части (7.11) мы получаем сходящуюся последовательность ($n = 1, 2, \ldots$), так как $Б$ есть K-матрица. Поэтому в правой части мы также получаем сходящуюся последовательность, т. е. произведение матриц BA преобразует $\{z_k\}$ в сходящуюся последовательность. В частности, если B является л. с. обратной ${}^{-1}A$ для A (и, значит, ${}^{-1}A$ есть K-матрица, так как, по предположению, B есть K-матрица), то правая часть (7.11) обращается в z_n, а $\{z_n\}$, по предположению, расходится, хотя, согласно проведенным выше рассуждениям, она должна сходиться. Следовательно, допущение «A преобразует $\{z_k\}$ в сходящуюся последовательность» не имеет места в том случае, когда ${}^{-1}A$ существует и является K-матрицей.

Таким образом, задача нахождения классов неэффективных матриц сводится, в частности, к определению классов матриц и последовательностей, к которым применимы проведенные выше рассуждения.

В нашем случае, т. е. когда A и B — обе K-матрицы с конечными строками, условие (7.11) выполняется для любой последовательности $\{z_k\}$. Оно также имеет место и для любой пары K-матриц, если $\{z_k\}$ является ограниченной последовательностью. Отсюда и следуют теоремы (**7.1**, I) и (**7.1**, II).

Первый из этих результатов, очевидно, применим и для частичных сумм любого ряда Тэйлора вне его круга сходимости. Можно легко обобщить (**7.1**, II) на неограниченные последовательности, если заметить, что условие (7.11) выполняется для $\{z_k\}$, лежащих внутри круга применения $B[A]$, согласно (**5.2**, IV). Таким образом, мы получаем:

(**7.1**, III) *Если K-матрица A имеет л. с. обратную ${}^{-1}A$, которая является K-матрицей, то A неэффективна для всех расходящихся последовательностей, лежащих внутри круга применения преобразования $A^{-1}[A]$.*

Мы можем сделать и дальнейшие обобщения, предполагая ${}^{-1}A$ K_r-матрицей вместо K-матрицы, но ограничиваясь случаем, когда A является матрицей с конечными строками.

(**7.1**, IV) *Если К-матрица A с конечными строками имеет л. с обратную ^{-1}A, являющуюся K_r-матрицей с конечными строками, то эффективная область A не содержит неограниченных последовательностей; в частности, A неэффективна для любого ряда Тэйлора вне его круга сходимости.*

Согласно условиям теоремы мы имеем из (7.11):

$$\sum_{i=1}^{i_n} {}^{-1}a_{ni} \sum_{k=1}^{k_i} a_{ik} z_k = z_n. \qquad (7.12)$$

Предположим, что A преобразует расходящуюся последовательность $\{z_k\}$ в сходящуюся последовательность $\{z'_i\}$, $z'_i \to z'$. Обозначим верхнюю грань $|z'_i|$ через b. По предположению,

$$\sum_{i=1}^{i_n} |{}^{-1}a_{ni}| \leqslant M \quad \text{для любого } n > n_0,$$

так что модуль выражения в левой части (7.12) не превосходит Mb. Но выражение в левой части (7.12) равно z_n, поэтому, если верхняя грань $|z_n|$ больше, чем Mb, то мы получаем противоречие. Это всегда имеет место, когда верхняя грань $|z_n|$ бесконечна.

Если $s_n(z)$ — n-я частичная сумма некоторого ряда Тэйлора и z лежит вне круга сходимости, то (Динс [1], 353)

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |s_n(z)| = \infty.$$

Теорема доказана.

7.2. Неэффективные матрицы, левосторонние обратные которых не являются K_r-матрицами

Матрица средних арифметических имеет единственную двустороннюю обратную

$$a_{nk}^{-1} = 0 \ (k \neq n, \ k \neq n-1), \quad a_{nn}^{-1} = n, \quad a_{n,\,n-1}^{-1} = -(n-1)$$

(см. § 2.1). Эта обратная матрица удовлетворяет условиям (б)' и (в') теоремы (**4.1**, II). Действительно, $\lim\limits_{n \to \infty} a_{nk}^{-1} = 0$ для любого фиксированного k и $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}^{-1} = 1$. Однако a_{nk}^{-1} не удовлетворяет условию (а)' теоремы (**4.1**, II), так как

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}^{-1}| = (n-1) + n = 2n - 1$$

неограниченно возрастает вместе с n, т. е. обратная не является K_r-матрицей.

Теперь мы докажем следующую теорему:

(**7.2**, I) *Если K-матрица A с конечными строками имеет л. с. обратную ^{-1}A также с конечными строками, которая удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{i_n} |{}^{-1}a_{ni}|} \leqslant 1, \tag{7.21}$$

то A неэффективна для всех последовательностей $\{z_n\}$, таких, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sqrt[n]{z_n}\right| > 1; \tag{7.22}$$

в частности, A неэффективна для любого ряда Тэйлора вне его круга сходимости.

Мы ограничим ^{-1}A условием, что для достаточно больших n

$$\sum_{i=1}^{i_n} |{}^{-1}a_{ni}| \leqslant \eta^n$$

для *любого* $\eta > 1$, что эквивалентно условию (7.21). Из (7.21) следует:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{i_n} {}^{-1}a_{ni} z'_i}\right| \leqslant 1,$$

где z'_i имеет тот же смысл, что и в § 7.1, так что верхняя грань $|z'_i|$ конечна, и следовательно, корень n-й степени из нее стремится к 1 при $n \to \infty$. Но последнее неравенство и условие (7.22) противоречивы, как это следует из (7.12), что и доказывает основное утверждение теоремы. Отметим, что условию (7.22) удовлетворяют частичные суммы $s_n(z)$ любого ряда Тэйлора, когда z находится вне круга сходимости (Динс [1], 353, [4]).

Теорема доказана.

По-видимому, трудно улучшить условия (7.21) так, чтобы K-матрица A была неэффективной для любого ряда Тэйлора вне его круга сходимости. Однако следующий результат показывает, что если ограничения подобного типа несколько ослабить, то A будет неэффективной для любого ряда Тэйлора вне большего (концентрического) круга, чем круг сходимости, так что таким путем можно определить *предельную область возможной эффективности.*

Мы предположим, что ^{-1}A удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{i_n} |{}^{-1}a_{ni}| \leqslant \eta^n$$

не для любого $\eta > 1$ при $n > n_0$, а только для некоторого *фиксированного* $\eta > 1$.

Без ограничения общности можно считать радиус сходимости ряда Тэйлора равным 1.

(7.2, II) *Если матрица A с конечными строками имеет л. с. обратную ${}^{-1}A$ также с конечными строками, которая удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{i_n} |{}^{-1}a_{ni}|} \leqslant \eta$$

для некоторого фиксированного $\eta > 1$, то для любого ряда Тэйлора с радиусом сходимости, равным 1, матрица A не эффективна в точках z, для которых $|z| > \eta$.

Мы сначала дадим несколько улучшенное неравенство для $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\sqrt[n]{s_n(z)}\right|$ при $|z| > 1$ по сравнению с тем, на которое мы ссылались в конце доказательства **(7.2, I)**, а именно:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sqrt[n]{s_n(z)}\right| > 1 \quad \text{для } |z| > 1.$$

Лемма. *Если $s_n(z)$ есть n-я частичная сумма ряда Тэйлора, радиус сходимости которого 1, и $|z| > \eta > 1$, то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sqrt[n]{s_n(z)}\right| > \eta.$$

Допустим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sqrt[n]{s_n(z)}\right| \leqslant \eta, \text{ когда } |z| > \eta > 1.$$

Тогда для любого данного $\sigma > 0$ можно подобрать число $n(\sigma)$ такое, что для $n > n(\sigma)$ выполняется $|s_n(z)| \leqslant (\eta+\sigma)^n$, $|s_{n+1}(z)| \leqslant (\eta+\sigma)^{n+1}$.

Таким образом, для ряда Тэйлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ мы имеем:

$$|c_{n+1}z^{n+1}| = |s_{n+1}(z) - s_n(z)| \leqslant 2(\eta+\sigma)^{n+1}.$$

Положим $|z| = \eta + \varepsilon$ и возьмем $\sigma = \frac{\varepsilon}{\eta}$. Тогда

$$|c_{n+1}|(\eta+\varepsilon)^{n+1} \leqslant 2\left(\eta + \frac{\varepsilon}{\eta}\right)^{n+1},$$

т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sqrt[n+1]{c_{n+1}}\right| \leqslant \frac{\eta + \frac{\varepsilon}{\eta}}{\eta+\varepsilon},$$

и следовательно, по теореме Коши — Адамара [см., например, Динс [1], 76, (III)], $1 \leqslant \dfrac{\eta + \frac{\varepsilon}{\eta}}{\eta + \varepsilon}$, так что $1 \leqslant \dfrac{1}{\eta}$, чего не может быть, так как $\eta > 1$. Противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы. Мы имеем:

$$\sum_{i=1}^{i_n} {}^{-1}a_{ni} \sum_{k=1}^{k_i} a_{ik} s_k(z) = s_n(z). \tag{7.23}$$

Если A преобразует расходящуюся последовательность $s_n(z)$ ($|z| > \eta > 1$) в сходящуюся $s'_n(z)$, то $|s'_n(z)|$ имеет конечную верхнюю грань для каждого фиксированного z. Тогда, так как

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{i_n} |{}^{-1}a_{ni}|} \leqslant \eta,$$

мы имеем:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{i_n} {}^{-1}a_{ni} s'_i(z)} \right| \leqslant \eta$$

для данного фиксированного $\eta > 1$. Последнее неравенство и неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sqrt[n]{s_n(z)} \right| > \eta \quad \text{для} \quad |z| > \eta,$$

полученное в лемме, противоречат (7.23). Это доказывает теорему.

7.3. Некоторые простые результаты об абсолютной эквивалентности

В этом параграфе мы будем рассматривать *нижние треугольные T-матрицы* (кроме простого результата (**7.3**, I)).

До сих пор в этой главе мы рассматривали матрицы, имеющие л. с. обратные, и доказанные выше теоремы неприменимы для матриц, не имеющих л. с. обратных. Возникает вопрос, нельзя ли видоизменить эти матрицы так, чтобы они обладали л. с. обратными, не нарушая их эффективность или неэффективность для данного класса последовательностей.

Для нижней треугольной матрицы A, где для любого n $a_{nn} \neq 0$, существует единственная п. с. обратная, которая также является нижней треугольной матрицей с $a_{nn}^{-1} = \dfrac{1}{a_{nn}}$; эта п. с. обратная будет и л. с. обратной; она единственная двусторонняя обратная в классе нижних треугольных матриц (см. (**2.1**, I) и замечание (a) после (**2.2**, I)). Таким образом, нижняя треугольная матрица A определенно имеет л. с. обратную, если все $a_{nn} \neq 0$. Нарушение этого условия может быть следующим:

(а) $a_{nn} = 0$ для конечного числа значений n;

(б) $a_{nn} = 0$ для бесконечного множества значений n.

Случай (а) охватывается следующим результатом:

(**7.3**, I) *Если две T-матрицы отличаются друг от друга не более чем конечным числом элементов, то они абсолютно эквивалентны для всех последовательностей, к которым они применимы.*

Действительно, если обозначить эти матрицы через A и A', то для любой последовательности $\{z_k\}$, к которой применимы A и A', мы имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a'_{nk}|\,|z_k| = 0,$$

откуда и следует требуемый результат.

Следствие. *Если A и A' — нижние треугольные T-матрицы, такие, что конечное число элементов a_{nn} равно нулю, а все a'_{nn} отличны от нуля (A и A' отличаются друг от друга только этим конечным числом элементов), то A' имеет л. с. обратную и обе A и A' эффективны или обе неэффективны для любого ряда Тэйлора в одной и той же области.*

Случай (б) охватывается следующим результатом:

(**7.3**, II) *Пусть A — нижняя треугольная T-матрица с бесконечным множеством равных нулю элементов, лежащих на главной диагонали, и пусть A' — нижняя треугольная T-матрица, полученная из A заменой всех этих нулевых элементов соответственно не равными нулю числами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, причем $\varepsilon_n \to 0$. Тогда A и A' абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей и для всех неограниченных последовательностей $\{z_n\}$, для которых $\varepsilon_n z_n \to 0$.*

Действительно,

$$\text{(I)} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} |a_{nk} - a'_{nk}| = \lim_{n\to\infty} |\varepsilon_n| = 0$$

и

$$\text{(II)} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} |a_{nk} - a'_{nk}|\,|z_k| = \lim_{n\to\infty} |\varepsilon_n z_n| = 0,$$

откуда, применяя (**5.4**, I) и (**5.5**, I), получаем требуемый результат.

7.4. Матрицы, эффективные для рядов Тэйлора в точке или на множестве изолированных точек вне круга сходимости

Мы сейчас рассмотрим явление, упомянутое в § 7.1, когда матрица *эффективна* для ряда Тэйлора *в точке или на множестве изолированных точек* (в противоположность *области*), лежащих вне круга сходимости.

(I) Положим $a_{nn}=\lambda$, $a_{n,n-1}=1-\lambda$, $a_{nk}=0$ $(k\neq n,\ k\neq n-1)$, где λ — комплексное число, не равное нулю. Очевидно, $A\equiv(a_{nk})$ — нижняя треугольная T-матрица.

Для того чтобы A могла суммировать Σz^n к его «правильному» значению $\frac{1}{1-z}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sigma_n(z)=\sum_{k=1}^{n} a_{nk}z^k\to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

В нашем случае $\sigma_n(z)=z^{n-1}[\lambda z+(1-\lambda)]=0$ в точке $z=1-\frac{1}{\lambda}$ для любого $n>1$ и точка $z=1-\frac{1}{\lambda}$ лежит вне круга $|z|=1$, если $|\lambda-1|>|\lambda|$, т. е. если $\operatorname{Re}(\lambda)<\frac{1}{2}$. Следовательно, если $\operatorname{Re}(\lambda)<\frac{1}{2}$ и $\lambda\neq 0$, то A суммирует Σz^n к его «правильному» значению $\frac{1}{1-z}$ в точке $z=1-\frac{1}{\lambda}$, которая находится вне круга сходимости, и не суммирует в других точках вне круга сходимости. Если λ действительное и $0<\lambda<1$, то A — положительная нижняя треугольная матрица.

Рассмотрим это явление в свете теорем (**7.2**, I) и (**7.2**, II).

Матрица A имеет двустороннюю обратную, которая будет нижней треугольной матрицей с $a_{nn}^{-1}=\frac{1}{a_{nn}}$ и единственной двусторонней обратной для A в классе нижних треугольных матриц; п. с. обратная будет единственной, но существует бесконечное множество л. с. обратных вследствие того факта, что элементами первого столбца л. с. обратной могут быть произвольные числа (см. замечание (а) после (**2.2**, I)).

Двусторонняя обратная матрица в нашем случае будет иметь своими элементами:

$$^{-1}a_{ni}=\frac{(\lambda-1)^{n-i}}{\lambda^{n-i+1}} \qquad (1\leqslant i\leqslant n), \quad ^{-1}a_{ni}=0 \qquad (i>n)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}|^{-1}a_{ni}|=\sum_{i=1}^{n}\frac{|\lambda-1|^{i-1}}{|\lambda|^{i}}=\frac{1}{|\lambda|}\sum_{i=0}^{n-1}\eta^i, \quad \text{где} \quad \eta=\left|1-\frac{1}{\lambda}\right|.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n}|^{-1}a_{ni}|=\frac{1}{\lambda}\,\frac{\eta^n-1}{\eta-1}\leqslant K\eta^n \quad \text{и} \quad \eta>1, \quad \text{если} \quad \operatorname{Re}(\lambda)<\frac{1}{2}.$$

Следовательно, согласно (**7.2**, II), когда $\operatorname{Re}(\lambda)<\frac{1}{2}$, матрица A неэффективна для любого ряда Тэйлора с радиусом сходимости 1 при $|z| > \left|1 - \frac{1}{\lambda}\right|$.

Также $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\sum\limits_{i=1}^{n} |{}^{-1}a_{ni}|} > 1$, когда $\eta > 1$, т. е. при $\operatorname{Re}(\lambda) < \frac{1}{2}$. Поэтому (**7.2**, I) неприменима в этом случае. Если $\operatorname{Re}(\lambda) > \frac{1}{2}$ $\left(\text{так что } \eta < 1 \text{ и } 1 - \frac{1}{\lambda} \text{ лежит внутри круга } |z| = 1\right)$, то (**7.2**, I) становится применимой.

(II) Пусть m — любое целое положительное число. Мы можем построить T-матрицу с конечными строками, которая суммирует Σz^n к $\frac{1}{1-z}$ в m точках вне круга $|z| = 1$.

Действительно, положим $a_{nn} = 1 - \lambda$, $a_{n,\,n+m} = \lambda$, $a_{nk} = 0$ $(k \neq n,\ k \neq n + m)$, $\lambda \neq 0$. Тогда $\sigma_n(z) = z^n[\lambda z^m + (1 - \lambda)] = 0$ при $z = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{m}}$, и мы получаем m значений z, причем все они лежат вне круга $|z| = 1$, если $\operatorname{Re}(\lambda) < \frac{1}{2}$.

Как частный случай возьмем

$$\lambda = -(e^{\mu m} - 1)^{-1}, \quad \mu > 0$$

$\left(\text{так что условие } \operatorname{Re}(\lambda) < \frac{1}{2} \text{ удовлетворяется}\right)$. Тогда

$$z = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(e^{\mu m}\right)^{\frac{1}{m}},$$

откуда $|z| = e^{\mu} > 1$. Таким образом, мы получаем m точек, равномерно расположенных на окружности $|z| = e^{\mu}$, т. е. на *любой* окружности с центром в начале координат и радиусом, большим 1.

Обратно, для данных m точек

$$z = e^{\mu}, \quad e^{\mu + \frac{2\pi i}{m}}, \quad e^{\mu + \frac{4\pi i}{m}}, \ \dots \qquad (\mu > 0)$$

найдется соответствующая T-матрица с конечными строками

$$a_{nn} = -\frac{e^{\mu m}}{1 - e^{\mu m}}, \quad a_{n,\,n+m} = \frac{1}{1 - e^{\mu m}}, \quad a_{nk} = 0 \qquad (k \neq n,\ n + m),$$

которая суммирует ряд Σz^n к $\frac{1}{1-z}$ в каждой из данных точек и не суммирует в других точках вне круга $|z| = 1$.

Таким образом, какая бы ни была точка вне круга $|z| \leqslant 1$, можно построить T-матрицу (подобрав соответственно λ), которая суммирует ряд Σz^n к $\frac{1}{1-z}$ в этой точке; эта же матрица суммирует Σz^n к $\frac{1}{1-z}$ во всех точках внутри круга $|z| \leqslant 1$.

(III) Мы сейчас обобщим результат, полученный для ряда Σz^n, на класс рядов Тэйлора.

(7.4, I) *Пусть дан ряд Тэйлора* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *с радиусом сходимости* 1, *удовлетворяющий условиям*:

(а) $|c_n z_1^n| > \delta > 0$ *для любого* n *и фиксированного* $|z_1| > 1$, *где* z_1 — *регулярная точка функции* $f(z)$;

(б) $\frac{1}{|c_n|} \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant n} |c_s| < M$, *где* M *не зависит от* n.

Тогда существует нижняя треугольная T-*матрица* A, *эффективная для этого ряда Тэйлора в точке* z_1 *вне круга* $|z| \leqslant 1$, *суммирующая его в этой точке к «правильному» значению* $f(z_1)$ *и не суммирующая этот ряд ни в какой другой точке вне круга* $|z| \leqslant 1$.

Положим $s_k(z) = \sum_{n=0}^{k} c_n z^n$, $R_k(z) = f(z) - s_k(z)$; $R_k(z)$, по определению, имеет смысл в каждой точке z, находящейся внутри, вне и на окружности круга $|z| = 1$, где определена функция $f(z)$.

Пусть A — нижняя треугольная матрица, в которой $a_{nk} = 0$ для всех k и n, кроме $k = n - 1$ и $k = n$. Рассмотрим выражение

$$\sigma_n(z) = a_{nn} R_n(z) + a_{n,\,n-1} R_{n-1}(z) =$$
$$= (a_{nn} + a_{n,\,n-1}) f(z) - [a_{nn} s_n(z) + a_{n,\,n-1} s_{n-1}(z_n)].$$

Положим $a_{n,\,n-1} = 1 - a_{nn}$ $(n \geqslant 1)$, $a_{00} = 1$. Тогда, так как

$$s_n(z) = s_{n-1}(z) + c_n z^n,$$

мы имеем:

$$\sigma_n(z) = f(z) - s_{n-1}(z) - a_{nn} c_n z^n.$$

Следовательно, $\sigma_n(z_1) = 0$, если мы выберем

$$a_{nn} = \frac{f(z_1) - \sum\limits_{p=0}^{n-1} c_p z_1^p}{c_n z_1^n};$$

мы можем предполагать, что регулярная точка z_1 выбрана так, что $a_{nn} \neq 0$ для любого значения n. В этом случае A будет эффективной для ряда Тэйлора в точке z_1.

Покажем, что при условиях (а) и (б) теоремы A будет T-матрицей. Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk}=0$ для любого фиксированного k, и так как

$$a_{n,\,n-1}=1-a_{nn}=\frac{\sum\limits_{p=0}^{n} c_p z_1^p - f(z_1)}{c_n z_1^n},$$

то мы имеем:

$$\sum_{k=0}^{n}|a_{nk}|\leqslant 2\left|\frac{f(z_1)}{c_n z_1^n}\right|+\frac{2}{|c_n|}\sum_{s=0}^{n}|c_s|\,|z_1|^{s-n}<$$

$$<\frac{2M'}{\delta}+2M\sum_{p=0}^{n}|z_1|^{-p}<K$$

независимо от n, если $|z_1|>1$. Кроме того, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{nk}=1$. Следовательно, A является T-матрицей. Теорема доказана.

Отметим, что здесь нет противоречия (как это может сначала показаться) между результатами §§ 7.1 и 7.2 и свойством *сверхсходимости* рядов Тэйлора.

Пусть $f(z)=\sum\limits_{r=0}^{\infty} c_r z^r$ удовлетворяет условиям теоремы Островского о сверхсходимости [см., например, Динс [1], 358, (I)], т. е. предположим, что радиус сходимости ряда равен 1 и существует последовательность номеров p_n и q_n таких, что $c_r=0$ для $p_n<r<q_n$, где $q_n\geqslant(1+\theta)p_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, а θ — фиксированное положительное число.

Сверхсходимость может рассматриваться как преобразование при помощи T-матрицы с конечными строками расходящейся полной последовательности частичных сумм ряда Тэйлора в соответствующим образом подобранную сходящуюся подпоследовательность этих частичных сумм.

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}s_k(z)=s_{p_n}(z),$$

где $a_{nk}=0$ $(k\neq p_n)$, $a_{n,\,p_n}=1$.

В области сверхсходимости $s_{p_n}(z)$ стремится к пределу $f(z)$ при $n\to\infty$, хотя $\{s_k(z)\}$ расходится. Что это не противоречит приведенным выше результатам, сразу видно из того факта, что (a_{nk}) не имеет л. с. обратной, как это следует из (**2.1**, II) ((a_{nk}) имеет в нашем случае бесконечное множество столбцов, состоящих из нулевых элементов).

Этот пример показывает, что *верхняя* треугольная T-матрица может быть эффективной для определенных типов рядов Тэйлора в *области*, лежащей вне круга сходимости; как мы увидим в § 8.4, это может иметь место также и для *нижних* треугольных T-матриц.

7.5. Некоторые дальнейшие результаты о неэффективности матриц

Результаты, приведенные в этом параграфе, показывают, что неэффективность матрицы A для ряда Тэйлора вне его круга сходимости не обязательно влечет существование л. с. обратной для A, удовлетворяющей соответствующим условиям.

(7.5, I) *Если K-матрица A с конечными строками, в которой $a_{nk}=0$ при $k>k_n$, удовлетворяет условиям:*

(а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{|a_{n,k_n}|} \sum\limits_{i=1}^{k_n-1} |a_{ni}-a_{n,i+1}| \leqslant 1;$

(б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\sqrt[k_n]{a_{n,k_n}}\right| \geqslant 1$, где $k_n\to\infty$ при $n\to\infty$,

то A неэффективна для ряда Σz^n вне круга $|z|\leqslant 1$.

Если $s_k(z)=\sum\limits_{n=0}^{k-1} z^n$, то

$$z'_n=\sum_{k=1}^{k_n} a_{nk}s_k(z)=\frac{A_n}{1-z}-\frac{1}{1-z}\sum_{k=1}^{k_n} a_{nk}z^k,$$

где

$$A_n=\sum_{k=1}^{k_n} a_{nk}.$$

Так как A является K-матрицей, то $A_n\to\alpha$ при $n\to\infty$. Таким образом, для того чтобы A была эффективной в этом случае, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{z''_n\}$, где $z''_n=\sum\limits_{k=1}^{k_n} a_{nk}z^k$, сходилась для некоторого z, $|z|>1$. Мы можем найти подпоследовательность этой последовательности такую, что она будет расходиться.

Применяя преобразование Абеля, получим:

$$z''_n=\sum_{i=1}^{k_n-1} z\left(\frac{1-z^i}{1-z}\right)(a_{ni}-a_{n,i+1})+z\left(\frac{1-z^{k_n}}{1-z}\right)a_{n,k_n},$$

т. е.

$$\frac{z-1}{z} z''_n = a_{n,\,k_n} z^{k_n} + \sum_{i=1}^{k_n-1} (a_{ni} - a_{n,\,i+1}) z^i - a_{n1}, \tag{7.51}$$

где $a_{n1} \to \alpha_1$, так как A есть K-матрица.

По условию (а), если $|z| > 1$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{a_{n,\,k_n} z^{k_n}} \sum_{i=1}^{k_n-1} (a_{ni} - a_{n,\,i+1}) z^i \right| \leqslant \frac{1}{|z|} < 1.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы $(1-\varepsilon)|z| > 1$; по условию (б), для бесконечного множества значений n величина $\sqrt[k_n]{a_{n,\,k_n}} > 1-\varepsilon$, и следовательно, $\left|a_{n,\,k_n} z^{k_n}\right| \to \infty$, когда $n \to \infty$, пробегая это множество значений.

Записав (7.51) в виде

$$\frac{z-1}{z} z''_n = a_{n,\,k_n} z^{k_n} \left[1 + \frac{1}{a_{n,\,k_n} z^{k_n}} \sum_{i=1}^{k_n-1} (a_{ni} - a_{n,\,i+1}) z^i \right] - a_{n1}$$

и учитывая сказанное выше, мы видим, что $\{z''_n\}$ (а следовательно, и $\{z'_n\}$) расходится при $|z| > 1$. Это и доказывает теорему.

(**7.5**, II) *Если A есть T-матрица с конечными строками, в которой $a_{nk} = 0$ для $k > k_n$, удовлетворяет условиям*

(а) $$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{|a_{n,\,k_n}|} \sum_{i=1}^{k_n-1} |a_{ni} - a_{n,\,i+1}| < 1$$

и

(б) $$\varliminf_{n\to\infty} |a_{n,\,k_n}| > 0,$$

где $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то A неэффективна для Σz^n вне круга $|z| \leqslant 1$ и не суммирует его к «правильному» значению ни в какой точке окружности $|z| = 1$.

Действительно, в обозначениях теоремы (**7.5**, I), чтобы T-матрица A была эффективна в точке z, последовательность $\{z''_n\}$ должна сходиться к 0, так как в этом случае $\alpha = 1$. В остальной части доказательство проводится так же, как и (**7.5**, I) с $\alpha_1 = 0$.

Следующие два результата являются частными случаями (**7.5**, I); доказательство их мы предоставляем читателю (см. примеры 4 и 5 к гл. 7).

(**7.5**, III) *Если в положительной нижней треугольной K-матрице A имеется бесконечное множество строк, которые являются неубывающими последовательностями, такими, что*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{nk}=\alpha>0,$$

то A неэффективна для Σz^n вне круга $|z|\leqslant 1$.

(**7.5**, IV) *Если в положительной нижней треугольной K-матрице A имеется бесконечное множество строк, которые являются невозрастающими последовательностями, такими, что*

$$\text{(I)}\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{nk}=\alpha>0;\qquad \text{(II)}\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_{n1}}{a_{nn}}\leqslant 2,$$

то A неэффективна для Σz^n вне круга $|z|\leqslant 1$.

7.6. K-матрицы, являющиеся обратными для T-матриц

В §§ 7.1 и 7.2 рассматривались T-матрицы, обладающие л. с. обратными K-матрицами. Некоторые примеры наводят на мысль, что если л. с. обратная T-матрицы является K-матрицей, то в действительности она будет T-матрицей. Ниже этот результат будет доказан. Мы придем к нему, рассматривая произведение матриц AB и BA, где A есть T-матрица, а B — K-матрица.

(**7.6**, I) *Если A является T-матрицей, а B есть K-матрица, то характеристические числа матрицы AB будут теми же, что и матрицы B.*

Обозначим характеристические числа (§ 4.1) матрицы B через β и β_k, а матрицы AB — через γ и γ_k и положим

$$c_{ni}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}b_{ki},\quad C_n\equiv\sum_{i=1}^{\infty}c_{ni}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}b_{ki}. \tag{7.61}$$

Так как $|C_n|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}||b_{ki}|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|N\leqslant MN$ для любого n, то порядок суммирования в (7.61) может быть обращен без нарушения сходимости и изменения суммы. Таким образом, мы получаем:

$$C_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}B_k,\quad\text{где}\quad B_k=\sum_{i=1}^{\infty}b_{ki},$$

откуда видно, что последовательность $\{C_n\}$ является A-преобразованием последовательности $\{B_k\}$.

Так как A является T-матрицей и $\lim\limits_{k\to\infty}B_k=\beta$, то мы имеем:

$$\gamma\equiv\lim_{n\to\infty}C_n=\beta. \tag{7.62}$$

Первое из равенств (7.61) при фиксированном i показывает, что c_{ni} является A-преобразованием $\{b_{ki}\}$, а так как по условию $\lim\limits_{k\to\infty} b_{ki}=\beta_i$, то

$$\gamma_i \equiv \lim_{n\to\infty} c_{ni}=\beta_i. \tag{7.63}$$

Из (7.62) и (7.63) вытекает требуемый результат.

Попробуем теперь применить эти же рассуждения к матрице BA. Положим

$$c'_{ni}\equiv\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}a_{ki}, \quad C'_n\equiv\sum_{i=1}^{\infty} c'_{ni}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}a_{ki}.$$

Тогда, как и выше, получим:

$$C'_n=\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}A_k, \quad \text{где} \quad A_k=\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki},$$

так что C'_n является B-преобразованием последовательности $\{A_k\}$, $A_k\to 1$ (так как A есть T-матрица). Следовательно, по теореме (**4.1**, I), (б), мы имеем:

$$\gamma'\equiv\lim_{n\to\infty} C'_n=\beta+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(A_k-1). \tag{7.64}$$

Если, как во многих хорошо известных примерах (например, в матрице средних арифметических, в матрице Бореля), $A_k=1$ для каждого k, то $\gamma'=\beta$, и тогда если $\beta\neq 1$, то BA не является T-матрицей. Также при i фиксированном c'_{ni} будет B-преобразованием последовательности $\{a_{ki}\}$ и $a_{ki}\to 0$ при $k\to\infty$, а тогда по (**4.1**, I), (б), получаем:

$$\gamma'_i\equiv\lim_{n\to\infty} c'_{ni}=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k a_{ki}. \tag{7.65}$$

Равенства (7.64) и (7.65) показывают, что в общем случае характеристические числа матриц BA и B не совпадают. С этим связано существующее различие между свойствами матриц AB и BA.

Следующий результат более точно характеризует природу матрицы BA в том случае, когда A имеет л. с. обратную, являющуюся K-матрицей.

(**7.6**, II) *Если A есть T-матрица, B — K-матрица (но не T-матрица) и если A имеет л. с. обратную, являющуюся K-матрицей, то BA является K-матрицей, но не T-матрицей.*

Для любой сходящейся последовательности $\{z_k\}$ мы имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}z_k=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni}a_{ik}\right)z_k,$$

и если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik}z_k=z'_i$, то $\{z'_i\}$ сходится.

По условию, существует сходящаяся последовательность $\{z'_i\}$, $z'_i \to z'$, такая, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni} z'_i = z''_n \to z'' \neq z',$$

так как B является K-матрицей, но не T-матрицей. Поэтому нам нужно доказать, что эта последовательность $\{z'_i\}$ является A-преобразованием сходящейся последовательности $\{z_k\}$, т. е. мы должны показать, что для данных (a_{ik}) и $\{z'_i\}$ система уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} z_k = z'_i \qquad (7.66)$$

имеет сходящееся решение $\{z_k\}$. Но в нашем случае A есть T-матрица и имеет л. с. обратную ${}^{-1}A$, являющуюся K-матрицей; тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} {}^{-1}a_{ni} z'_i = z_n, \qquad (7.67)$$

и так как $\{z'_i\}$ сходится, то будет сходиться и ее K-преобразование, т. е. (7.66) имеет сходящееся решение. Это и доказывает теорему.

(**7.6**, III) *Если обратная для T-матрицы является K-матрицей, то она необходимо будет T-матрицей.*

Действительно, если A есть T-матрица и $z_k \to z'$, то, согласно (7.66), $z'_i \to z'$; следовательно, если ${}^{-1}A$ существует и является K-матрицей, то из (7.67) видно, что ${}^{-1}A$ должна быть T-матрицей. Также, по теореме (**7.6**, I), п. с. обратная A^{-1}, являющаяся K-матрицей, имеет те же характеристические числа, что и матрица $AA^{-1} = I$, так что A^{-1} есть T-матрица.

Примеры к главе 7

1 *). Если матрица A преобразует данную последовательность $\{z_k\}$ в $\{z'_i\}$, т. е.

$$z'_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} z_k,$$

и если матрица B преобразует $\{z'_i\}$ обратно в $\{z_k\}$, то B называется *обратной для A относительно $\{z_k\}$*.

Доказать, что:

(I) любая л. с. обратная для K_r-матрицы A, которая является в свою очередь K_r-матрицей, будет обратной для A относительно любой ограниченной последовательности;

(II) любая матрица с конечными строками, являющаяся л. с. обратной для матрицы A с конечными строками, будет обратной для A относительно любой последовательности.

---

*) Примеры 1—3 даны Динсом.

2. Если $z_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $\{z_n\}$ называется *нуль-последовательностью*.

Доказать, что:

(I) если $A^{(1)}$ обратная для K_r-матрицы A относительно любой нуль-последовательности и является также K_r-матрицей, то $A^{(1)}$ будет л. с. обратной для A;

(II) если матрица $A^{(1)}$ с конечными строками является обратной для матрицы A с конечными строками относительно любой нуль-последовательности, то $A^{(1)}$ будет л. с. обратной для A.

(Примеры 1 и 2 подсказывают метод получения обратных матриц.)

3. Иллюстрировать пример 2, (II), рассмотрев матрицы $(C, 1)$ и $(C, 2)$.

4. Доказать (**7.5**, III).

5. Доказать (**7.5**, IV).

6. Доказать, что средние Чезаро любого порядка $r > 0$ неэффективны для всех рядов Тэйлора вне круга сходимости (показать, что они удовлетворяют условиям теоремы (**7.2**, I)).

7*). Доказать, что T-матрица (a_{nk}), где

$$a_{nn} = \frac{2}{3} \ (n \geqslant 1), \quad a_{n,\,n-1} = \frac{1}{3} \ (n \geqslant 2), \quad a_{nk} = 0 \quad (k \neq n, \ n-1),$$

имеет л. с. обратную $B = (b_{nk})$, являющуюся T-матрицей, где

$$b_{nk} = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n), \quad b_{nk} = 0 \qquad (k > n).$$

(Этот пример иллюстрирует теорему (**7.6**, III).)

8**). Если ${}^{-1}A$ — л. с. обратная для K-матрицы A и сама является K-матрицей, то показать, что ${}^{-1}A$ также и п. с. обратная для A, так что по (**2.2**, II) ${}^{-1}A$ будет единственной двусторонней обратной для A в ассоциативном поле K-матриц.

9***). Пусть B есть K-матрица, а A есть T-матрица

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \ldots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}.$$

Используя обозначения (**7.6**, I), взять $\beta = \beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1$, $\beta_k = 0$ для $k > 2$ и показать, что в этом случае BA будет T-матрицей. Также показать, что в качестве B можно взять матрицу (b_{nk}), где $b_{n1} = 1$, $b_{n2} = -1$ для любого n, $b_{nk} = \frac{1}{n}$ $(3 \leqslant k \leqslant n+2)$, $b_{nk} = 0$ $(k > n+2)$.

10****). *Матрицей Раффа* называется матрица, которая оставляет без изменения предельные точки любой ограниченной последовательности (см. Рафф [1]).

---

*) Пример дан М. Барнетт.

**) Пример дан Оуэном.

***) См. Кук и Динс [1], 62.

****) Пример принадлежит Хиллу [4]. См. конец § 8.5.

Показать, что $B \equiv (b_{nk})$, где $b_{11} = b_{k+1,\,k} = 1$ $(k \geqslant 1)$, $b_{nk} = 0$ (во всех других случаях), является T-матрицей Раффа; если $C \equiv (c_{nk})$ — матрица, в которой $c_{nn} = \dfrac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$, $c_{nk} = 0$ (во всех других случаях), то показать также, что $A \equiv B + C$ будет T-матрицей Раффа. Следовательно, A неэффективна для всех ограниченных последовательностей. С другой стороны, A суммирует неограниченную последовательность $(-1)^{k-1}\,k!$ к 0 (см. конец § 8.5).

11 *). Показать, что транслятивный слева метод γ-суммирования (§ 5.6) неэффективен для ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$, если c_k при $k \to \infty$ стремится к конечному, отличному от нуля пределу (комплексному или действительному).

12. Показать, что матрица $G^{(p)}$, полученная из γ-матрицы G в результате удаления первых p столбцов, является γ-матрицей. Если G транслятивна или транслятивна слева, то такой же будет и $G^{(p)}$.

13. Если γ-матрица G суммирует ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k \quad \text{к} \quad s(z) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

в области D, то для всякого фиксированного z из D матрица

$$H(p, z) \equiv \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} G^{(i)} \frac{z^i}{(1-z)^p}, \qquad G^{(0)} \equiv G \qquad (z \neq 1),$$

где $G^{(i)}$ имеет тот же смысл, что и в примере 12, является γ-матрицей, которая суммирует ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+p-1}{k} z^k$$

к $\dfrac{s(z)}{(1-z)^p}$ в области D.

Показать также, что если G транслятивна слева, то такой же будет и H, которая суммирует этот ряд к «правильному» значению $\dfrac{1}{(1-z)^{n+p}}$.

14. Пусть G — нижняя треугольная γ-матрица, в которой $g_{nk} = 1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ и $g_{nk} = 0$ $(k > n)$. Соответствующую ей нижнюю треугольную γ-матрицу $H(p, z)$, упомянутую в примере 13, обозначим через $H_1(p, z)$; элементами ее будут:

$$(h_1(p, z))_{nk} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{p}{i} \frac{(-z)^i}{(1-z)^p} \qquad (p \geqslant 1,\ n \geqslant k \geqslant 0).$$

Доказать, что $H_1(p, z_0)$, где $|z_0| > 1$, является транслятивной и эффективной для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} z^k \quad \text{при } r = 1, 2, \ldots, p$$

---

*) Примеры 11—15 принадлежат Вермсу; примеры 14—15 являются аналогами примеров § 7.4 для γ-матриц.

вне единичного круга только в точке z_0, причем суммирует этот ряд к «правильному» значению $(1-z_0)^{-r}$. Эта матрица будет неэффективной для таких рядов при $r > p$ всюду вне единичного круга.

15. Если $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — различные точки вне круга $|z| \leqslant 1$ и

$$[(1-z_1x)(1-z_2x)\ldots(1-z_mx)]^p \equiv \sum_{r=0}^{mp} u_r x^r \qquad (p \geqslant 1),$$

то матрица $H_1(p, z_1, z_2, \ldots, z_m)$, элементы которой

$$(h_1(p, z_1, z_2, \ldots, z_m))_{nk} = \frac{\sum\limits_{r=0}^{n-k} u_r}{\sum\limits_{r=0}^{mp} u_r},$$

является транслятивной нижней треугольной γ-матрицей, эффективной для ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{i+k-1}{k} z^k$ при $i = 1, 2, \ldots, p$ вне единичного круга только в точках $z_1, z_2, \ldots, z_m$, и суммирует его в этих точках к «правильному» значению. При $i > p$ она неэффективна всюду вне единичного круга.

16 *). Если нижняя треугольная T-матрица A удовлетворяет условиям: (I) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{nk}| = 1$ и (II) $|a_{nn}| > \theta > \frac{1}{2}$ почти для всех n (§ 6.2), то показать, что A эквивалентна сходимости, т. е. A «вполне неэффективна» (§ 7.1).

17. Если нижняя треугольная T-матрица A удовлетворяет условиям: (I) $a_{nk} \geqslant 0$ почти для всех k и (II) $a_{nn} > \theta > \frac{1}{2}$ почти для всех n, то показать, что A вполне неэффективна.

18. Если действительная нижняя треугольная T-матрица A такова, что $a_{nk} \leqslant 0$ при $k \neq n$ почти для всех k, то A вполне неэффективна.

---

*) Относительно примеров 16—18 см. Агнью [11]. Ср. эти результаты с (7.1, I).

ГЛАВА 8

ПРОБЛЕМЫ ЭФФЕКТИВНОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

8.1. Характер проблем эффективности

Мы сначала рассмотрим вопросы эффективности матриц для частичных сумм ряда Тэйлора в точках вне круга сходимости. Подобно тому как это было сделано в гл. 7, теперь естественно поставить следующий вопрос: какие существуют достаточные условия для матрицы специального вида, чтобы она была *эффективной* для рядов Тэйлора в некоторой *области* вне круга сходимости?

Как известно, полная аналитическая функция определяется путем аналитического продолжения, которое осуществляется шаг за шагом при помощи рядов Тэйлора. Борелю, Миттаг-Леффлеру, Линделёфу и другим авторам удалось получить интересные результаты, заменив сложный процесс аналитического продолжения одной формулой, имеющей смысл в некоторой области. Их метод заменяет цепочку преобразований одного ряда Тэйлора в другой ряд Тэйлора одним преобразованием его в последовательность; это преобразование осуществляется при помощи матрицы.

Область, к которой применима полученная таким образом формула, зависит от преобразования, т. е. от матрицы. Следовательно, возникает вопрос о нахождении связи между свойствами матрицы и эффективностью преобразования.

При изучении этого вопроса мы поступим так же, как и при изучении преобразований числовых последовательностей и рядов. Нам известны примеры методов суммирования расходящихся последовательностей, как, например, методы Бореля и Миттаг-Леффлера. Однако наше главное внимание будет сосредоточено не на конкретных методах, а на изучении природы этого явления.

Общий вид матриц, которые мы будем рассматривать, — это полунепрерывные T-матрицы типа матриц Миттаг-Леффлера (§ 4.3 (IV))

$$a_k(\omega) = \frac{g(k+1)\,\omega^{k+1}}{E(\omega)}, \tag{8.11}$$

где $g(k) \geqslant 0$ для любого k, а $E(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g(k) z^k$ — целая функция.

Наш метод будет заключаться в том, чтобы из свойств *коэффициентов* $g(k)$ установить свойства целой функции $E(z)$ и затем найти такие из этих свойств, которые делали бы класс матриц (8.11) эффективным для всех рядов Тэйлора:

(I) всюду в главной звездной области функции, представленной рядом Тэйлора *) (см., например, Динс [1], 308);

(II) в частной звездной области, например в многоугольнике Бореля (точное определение *частной звездной области* см. в § 8.3).

Как будет показано, в этих звездных областях методы суммирования при помощи T-матрицы и соответствующей ей γ-матрицы эквивалентны и являются транслятивными (см. § 8.3). Мы также рассмотрим другие типы матриц, применяемых в частных звездных областях.

Причиной выбора матриц именно типа (8.11) служит тот факт, что почти все известные примеры матриц, эффективных в упомянутых выше областях (I) или (II), имеют такой вид. Например, частные случаи таких матриц, где в качестве $E(z)$ взяты

$$e^z, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{z}{\log(k+\beta)}\right]^k \qquad (\beta > 1),$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-2}}{\Gamma\left[1+\dfrac{k}{(\log k)^{\alpha}}\right]} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

были изучены соответственно Борелем (Борель [1], 97 и дальше; см. также Динс [1], 302—307 и 400—404), Миттаг-Леффлером [1], Линделёфом [1], 121 (см. также Динс [1], 346 и 511—512) и Мальмквистом [1].

Матрицы (8.11), в которых в качестве $E(z)$ взяты первые две из упомянутых функций, эффективны для рядов Тэйлора в частной звездной области, а матрицы, где в качестве $E(z)$ взяты последние две функции, эффективны в главной звездной области.

---

*) Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и ряд сходится для малых значений z. *Главной звездной областью* или звездой Миттаг-Леффлера функции $f(z)$ называется область, полученная из комплексной плоскости следующим путем: из начала проводятся лучи ко всем особым точкам функции $f(z)$ и по части каждого луча, расположенной за особой точкой, делается разрез. Так, главной звездной областью функции $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ служит плоскость z, разрезанная вдоль луча $[1, \infty)$. См. Харди, Расходящиеся ряды, стр. 104—105. (*Прим. перев.*)

Мы не будем проводить раздельно доказательства последних утверждений, ибо они являются только *частными случаями* общих теорем, данных в §§ 8.2 и 8.3.

Другой метод подхода к этой задаче дан Булем [1] в кратком изложении теории суммирования; для того чтобы установить суммируемость ряда Тэйлора к сумме $f(x)$ при помощи матрицы типа (8.11) его методом, необходимо показать, что

$$\int\limits_C \frac{E\left(\frac{\xi x}{z}\right)}{E(\xi)} \frac{f(z)}{z-x}\, dz \to 0 \quad \text{при } \xi \to \infty \tag{8.12}$$

в частной или главной звездной области, где контур C состоит из точек полной звездной области и находится внутри круга произвольно большого радиуса с центром в начале координат (Буль [1], 6, 42; если $f(z)$ является мероморфной, то задача упрощается; см. там же гл. 2). Можно проверить, что условие (8.12) выполняется в некоторых специальных случаях, однако трудно определить свойства класса функций $E(\xi)$, удовлетворяющих (8.12) в частной или главной звездной области, и выразить их через свойства коэффициентов $g(k)$ функции $E(\xi)$. Значительно проще решать эти задачи так, как это сделано в §§ 8.2 и 8.3.

8.2. Матрицы, эффективные для всех рядов Тэйлора в главной звездной области

Следующая хорошо известная теорема из теории функций комплексного переменного, принадлежащая Ле-Руа и Линделёфу (см. Линделёф [1], 109—119; также Динс [1], 340—345), служит основой для дальнейшего изложения.

(8.2, I) *Предположим, что* (а) *функция* $g(x+iy)$ *регулярна в полуплоскости* $x \geqslant \alpha$ *и* (б) *существует такое неотрицательное число* $\theta < \pi$, *что для любого произвольно малого* $\varepsilon > 0$ *и для достаточно больших* ρ

$$|g(\alpha+\rho e^{i\psi})| < e^{(\theta+\varepsilon)\rho}, \quad \text{где} -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Тогда $E(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g(k) z^k$ *будет регулярной внутри угла* $\theta < \arg z < 2\pi - \theta$.

В частности, если условие (б) *удовлетворяется при* $\theta = 0$, $E(z)$ *будет регулярной всюду, за исключением* (*возможно*) *точек положительной действительной оси между* 1 и ∞. *Кроме того, при выполнении упомянутых выше условий*

$E(z) = z^\alpha \varepsilon(z)$, *если* $\alpha > -1$, *и* $E(z) = -\sum\limits_{k=1}^{m} g(-k) z^{-k} + z^\alpha \varepsilon(z)$, *если* $-(m+1) < \alpha \leqslant -m$, *где* $\varepsilon(z)$ *равномерно стремится к нулю, когда* $|z| \to \infty$, *находясь в углу* $\theta + \eta \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \theta - \eta$ *для любого произвольно малого* $\eta > 0$.

Мы установим класс T-матриц, эффективных для рядов Тэйлора всюду в главной звездной области *).

Нам потребуется следующая теорема Динса, относящаяся к преобразованию Миттаг-Леффлера [Динс [1], 309, (I)]:

(**8.2**, II) *Если для любого* $\varepsilon > 0$ *целая функция*

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^k,$$

где $g(k) \geqslant 0$ *для любого* k, *при* $|z| \to \infty$ $(z = re^{i\varphi})$ *стремится к нулю равномерно в области* $\varepsilon \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \varepsilon$, *то в главной звездной области функции* $f(z)$ *справедливо представление Миттаг-Леффлера*:

$$f(z) = \lim_{\omega \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} s_k(z)\, g(k+1) \frac{\omega^{k+1}}{E(\omega)},$$

где $s_n(z)$ *есть* n*-я частичная сумма ряда Тэйлора по степеням* z *функции* $f(z)$.

Мы сейчас докажем теорему, которая даст возможность получить класс матриц вида (8.11), удовлетворяющих условиям только что упомянутой выше теоремы Динса и, следовательно, эффективных для всех рядов Тэйлора всюду в главной звездной области.

В этой главе при употреблении логарифмов имеется в виду только их главное значение.

(**8.2**, III) *Пусть* $g(z)$ — *регулярная функция при* $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$ *и*

$$\log \frac{1}{g(z)} = z\varepsilon(z) \log(z+\beta), \quad \beta > 0,$$

где $\varepsilon(z)$ *удовлетворяет следующим условиям при* $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$:

(I) $\operatorname{Re}[\varepsilon(z)] \geqslant 0$ *для* $|z| = \rho > \rho_0$

и стремится к нулю при $\rho \to \infty$;

(II) $\operatorname{Im}[\varepsilon(z)] = o\left(\dfrac{1}{\log \rho}\right)$ *при* $\rho \to \infty$;

(III) $\varepsilon(k) \log(k+\beta) \to \infty$ *при* $k \to \infty$ (k *целое*).

Тогда T*-матрица* $a_k(\omega) = \dfrac{g(k+1)\,\omega^{k+1}}{E(\omega)}$, *где* $g(k) \geqslant 0$ *для любого* k, *эффективна для всех рядов Тэйлора всюду в главной*

---

*) Главная звездная область будет всюду браться относительно начала координат (см. Динс [1], 308).

звездной области и $E(z)=\sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^k$ *является целой функцией бесконечного порядка.*

По условию (III), радиус сходимости R ряда $\sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^k$ равен ∞, так как

$$R=\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|[g(k)]^{-\frac{1}{k}}\right|=\overline{\lim_{k\to\infty}} e^{\varepsilon(k)\log(k+\beta)}=\infty .$$

Отсюда следует, что $E(z)$ — целая функция. Эта целая функция имеет бесконечный порядок. Действительно [см., например, Динс [1], 293, (I)],

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k\log k}{\log\frac{1}{g(k)}}=\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log k}{\varepsilon(k)\log(k+\beta)}=\infty,$$

так как $\varepsilon(k)\to 0$ при $k\to\infty$ согласно условиям (I) и (II).

Представим $\varepsilon(z)$ в виде $\varepsilon(z)=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$ (ε_1 и ε_2 действительные) и для простоты изложения рассмотрим сначала вместо функции $g(z)$ функцию $g_1(z)$, определенную условием

$$\log\frac{1}{g_1(z)}=z\varepsilon(z)\log z.$$

Тогда мы имеем, употребляя для e^s также обозначение $\exp(s)$:

$$|g_1(\rho e^{i\psi})|=|\exp[(-\varepsilon_1-i\varepsilon_2)\rho(\cos\psi+i\sin\psi)(\log\rho+i\psi)]|=$$
$$=\exp[-\varepsilon_1\rho\cos\psi\log\rho+\varepsilon_1\rho\psi\sin\psi+\varepsilon_2\rho\psi\cos\psi+\varepsilon_2\rho\sin\psi\log\rho]. \quad (8.21)$$

Так как, по условию (I), $\varepsilon_1\geqslant 0$ для $\rho>\rho_0$, то первое слагаемое в скобках в (8.21) не больше 0 для $-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\rho>\rho_0$, а так как $\varepsilon_1\to 0$ при $\rho\to\infty$, то второе слагаемое есть $o(\rho)$. Принимая во внимание, что по условию (II) $\varepsilon_2=o\left(\frac{1}{\log\rho}\right)$, получаем третье и четвертое слагаемые равными соответственно $o\left(\frac{\rho}{\log\rho}\right)$ и $o(\rho)$ при $\rho\to\infty$.

Следовательно, $|g_1(\rho e^{i\psi})|\leqslant e^{\eta\rho}$, где $\eta>0$ — произвольное малое число, когда $\rho>\rho_0$ и $-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

То же самое неравенство будет верно и для $|g(\rho e^{i\psi})|$. В самом деле,

$$\frac{g_1(z)}{g(z)}=\exp\left[z\varepsilon(z)\log\left(1+\frac{\beta}{z}\right)\right]=\exp\left[z\varepsilon(z)\left(\frac{\beta}{z}-\frac{\beta^2}{2z^2}+\ldots\right)\right]=$$
$$=\exp\left[\varepsilon(z)\left(\beta-\frac{\beta^2}{2z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)\right]\to 1 \quad \text{при } \rho\to\infty.$$

Отметим также, что по условию теоремы функция $g(x+iy)$ регулярна для $x \geqslant 0$, где $z = x+iy$.

Таким образом, условия теоремы (**8.2**, I) удовлетворяются с $\alpha = 0 = 0$, так что $E(z)$ будет регулярной и при $|z| \to \infty$ стремится к нулю равномерно в области $\eta' \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \eta'$ при любом произвольно малом $\eta' > 0$.

Из (**8.2**, II) следует, что данная матрица $(a_k(\omega))$ эффективна для всех рядов Тэйлора всюду в главной звездной области. Теорема доказана.

Примеры. (I) Условия теоремы (**8.2**, III), очевидно, выполняются, если

$$\varepsilon(z) = \frac{\log\log(z+\beta)}{\log(z+\beta)}, \quad \beta > 1.$$

В этом случае мы имеем:

$$g(k) = \exp[-k\log\log(k+\beta)] = [\log(k+\beta)]^{-k},$$

и следовательно, матрица Линделёфа

$$a_k(\omega) = \frac{\omega^{k+1}[\log(k+1+\beta)]^{-(k+1)}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \omega^k [\log(k+\beta)]^{-k}}, \quad \beta > 1,$$

соответствующая целой функции Линделёфа, упомянутой в § 8.1 является частным случаем матриц, удовлетворяющих условиям (**8.2**, III).

(II) Возьмем

$$\varepsilon(z) = [\log(z+\beta)]^{-q}, \quad \text{где} \quad \beta > 1, \quad 0 < q < 1.$$

Условие (III) теоремы, очевидно, удовлетворяется. Для больших ρ

$$\varepsilon(z) \sim \left(\frac{1}{\log z}\right)^q = r^{-q}e^{-iq\theta},$$

где $\log z = re^{i\theta}$, так что

$$r = \sqrt{(\log\rho)^2 + \psi^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{\psi}{\log\rho}.$$

Таким образом, взяв главное значение аргумента, мы имеем:

$$\varepsilon(z) \sim \frac{\cos q\theta - i\sin q\theta}{r^q},$$

и для $\rho > \rho_0$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$ мы можем сделать $\cos q\theta$ достаточно близким к 1, в то время как

$$\sin q\theta = O\left(\frac{1}{\log\rho}\right).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}[\varepsilon(z)] \geqslant 0$$

и

$$\operatorname{Re}[\varepsilon(z)] = O[(\log\rho)^{-q}] \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to \infty,$$

$$\operatorname{Im}[\varepsilon(z)] = O[(\log\rho)^{-(q+1)}].$$

Отсюда следует, что условия (I) и (II) теоремы (**8.2**, III) также удовлетворяются. Полагая $p = 1 - q$, так что $0 < p < 1$, мы видим, что T-матрица

$$a_k(\omega) = \frac{\left\{\dfrac{\omega}{e^{[\log(k+1+\beta)]^p}}\right\}^{k+1}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\dfrac{\omega}{e^{[\log(k+\beta)]^p}}\right]^k}, \quad \beta > 1,$$

эффективна для всех рядов Тэйлора в главной звездной области. Этот пример (Миттаг-Леффлер [1], 145) является, таким образом, частным случаем (**8.2**, III).

(III) Возьмем

$$g(z) = \frac{1}{\Gamma\left[1 + \dfrac{z}{(\log z)^\alpha}\right]}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда, как легко видеть, используя асимптотическую формулу для $\Gamma(x)$, в принятых в (**8.2**, III) обозначениях имеем $\varepsilon(z) \sim (\log z)^{-\alpha}$, так что этот пример приводится к предыдущему. Следовательно, T-матрица, образованная из целой функции Мальмквиста, упомянутой в § 8.1, а именно:

$$a_k(\omega) = \frac{\dfrac{\omega^{k-1}}{\Gamma\left[1 + \dfrac{k+1}{[\log(k+1)]^\alpha}\right]}}{\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{\omega^{k-2}}{\Gamma\left[1 + \dfrac{k}{(\log k)^\alpha}\right]}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

является частным случаем (**8.2**, III).

Приведенные выше три примера являются главными известными конкретными примерами матриц, эффективных для всех рядов Тэйлора в главной звездной области. Можно заметить, что они являются простыми следствиями теоремы (**8.2**, III). (*Предельные случаи* матриц, когда параметр α стремится к 0, исключены из рассмотрения; они могут быть получены, например, из функции Миттаг-Леффлера $E_\alpha(z)$ или из функции Линделёфа $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{k^\alpha}\right)^k$ при $\alpha \to 0$; см. примеры (II) и (III) в конце § 8.3.)

(IV) Положим

$$\varepsilon(z) = \frac{\log\log\log(z+\beta)}{\log(z+\beta)}, \quad \beta > e.$$

Как и в примере (I), можно показать, что условия (**8.2**, III) в этом случае удовлетворяются, так что T-матрица

$$a_k(\omega)=\frac{\dfrac{\omega^{k+1}}{[\log\log(k+1+\beta)]^{k+1}}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\omega^k}{[\log\log(k+\beta)]^k}},\quad \beta>e,$$

эффективна для всех рядов Тэйлора в главной звездной области.

Продолжая таким путем, мы можем образовать матрицу

$$a_k(\omega)=\frac{\dfrac{\omega^{k+1}}{[\log^p(k+1+\beta)]^{k+1}}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\omega^k}{[\log^p(k+\beta)]^k}},$$

где p — любое целое положительное число, для достаточно большого β *). Таким образом, мы получаем «*логарифмическую шкалу*» положительных T-матриц, каждая из которых эффективна для любого ряда Тэйлора в главной звездной области.

8.3. Матрицы, эффективные для всех рядов Тэйлора в частных звездных областях

При рассмотрении эффективности матриц в частной звездной области, конечно, не нужно в (**8.2**, I) предполагать $\theta=0$.

Мы будем рассматривать функции $g(z)$, которые удовлетворяют условию $g(k)\geqslant 0$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ и такие, что

$$E(z)=\sum_{k=0}^{\infty}g(k)\,z^k$$

является целой функцией конечного порядка σ. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{k\log k}{\log\dfrac{1}{g(k)}}=\sigma. \tag{8.31}$$

На функцию $E(z)$ мы наложим условие, чтобы $E(\omega z)$ стремилась к нулю при $\omega\to\infty$ равномерно относительно z, когда z находится в определенном углу с вершиной в начале координат.

---

*) В выражении для $a_k(\omega)$ символ $\log^p x$ обозначает $\underbrace{\log\log\ldots\log}_{p\ \text{раз}} x$. (*Прим. перев.*)

(**8.3**, I) *Пусть* $g(z)$ — *регулярная функция при* $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$ *и*

$$\log \frac{1}{g(z)} = \frac{z \log z}{\sigma} [1 + \varepsilon(z)], \tag{8.32}$$

где

$$\varepsilon(z) = \frac{\lambda}{\log z} + o\left(\frac{1}{\log |z|}\right) \tag{8.33}$$

при $|z| \to \infty$ *и* $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$, *а* λ *и* σ — *положительные постоянные, причем* $\sigma > \frac{1}{2}$. *Тогда* $E(\omega r e^{i\varphi}) \to 0$, *когда* $\omega \to \infty$, *равномерно в углу*

$$\frac{\pi}{2\sigma} + \eta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\sigma} - \eta,$$

где $r = |z|$, η — *произвольное малое положительное число и* $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^k$ *будет целой функцией порядка* σ.

Из (8.32) и (8.33) видно, что условие (8.31) удовлетворяется, так что $E(z)$ — целая функция порядка σ. Из этих условий также получаем:

$$\log g(z) = -\frac{z \log z}{\sigma} - \frac{\lambda z}{\sigma} + o(z).$$

Следовательно, если $z = \rho e^{i\psi}$, то

$$\operatorname{Re}\,[\log g(z)] = \rho\left[-\frac{1}{\sigma}\cos\psi \log\rho + \frac{1}{\sigma}\psi\sin\psi - \frac{\lambda}{\sigma}\cos\psi + o(1)\right].$$

Первый и третий член справа неположительны для $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Значит,

$$|g(\rho e^{i\psi})| \leqslant e^{\frac{\rho}{\sigma}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)},$$

где $\delta \to 0$ при $\rho \to \infty$.

Таким образом, условия теоремы (**8.2**, I) удовлетворяются с $\alpha = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2\sigma} < \pi$, так как $\sigma > \frac{1}{2}$. Это и доказывает требуемый результат.

Мы будем ссылаться на угол

$$\frac{\pi}{2\sigma} < \theta < 2\pi - \frac{\pi}{2\sigma} \tag{8.34}$$

как на *угол применения* матрицы Миттаг-Леффлера, ассоциированной с функцией $E(z)$.

Следующие результаты до (**8.3**, VI) включительно принадлежат Вермсу (публикуются здесь впервые).

Всюду в этом параграфе мы будем предполагать, что $f(z)$ определена рядом Тэйлора $\sum c_k z^k$ (*с отличным от нуля радиусом* *сходимости*) и аналитически продолжена в ее главную звездную область; через $s_k(z)$ будет в дальнейшем обозначаться сумма $c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k$.

Пусть D — область в z'-плоскости, содержащая начало координат, причем граница области D проходит через $z' = 1$ и встречается с каждым радиусом-вектором, проведенным из начала координат, не более чем в одной точке. Такая область будет называться *производящей* областью.

Если ξ — какая-либо точка z-плоскости, то преобразование $z = \xi z'$, примененное ко всем точкам из D, порождает соответствующую область в z-плоскости, которая будет обозначаться через ξD. Общая часть всех областей ξD, соответствующих всем вершинам ξ главной звездной области функции $f(z)$, образует область, которая будет называться *частной звездной областью функции* $f(z)$, *соответствующей производящей области* D. Она полностью лежит внутри главной звездной области функции $f(z)$ и может быть обозначена через $\Pi \xi D$.

Если D состоит из всей плоскости z', за исключением части действительной оси от 1 до $+\infty$, то соответствующая «частная» звездная область совпадает с главной звездной областью.

Следующая теорема принадлежит Окада ([1], 63—64); приведенное здесь доказательство было впервые проведено для матриц типа (8.11) Вермсом и затем обобщено Хенстоком на матрицы типа рассмотренных Окада (см. Хенсток [1]).

(8.3, II) *Пусть для* $\omega \geqslant \Omega \geqslant 0$ *все ряды Тэйлора*

$$\varphi(z', \omega) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega) z'^{k+1}$$

сходятся во всех точках z' *производящей области* D *и пусть* (I) $\varphi(1, \omega) \to 1$ *при* $\omega \to \infty$ *и* (II) $\varphi(z', \omega) \to 0$ *при* $\omega \to \infty$ *равномерно в любой замкнутой области, полностью лежащей внутри* D. *Тогда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega) s_k(z) \to f(z)$$

при $\omega \to \infty$ *в частной звездной области функции* $f(z)$, *соответствующей производящей области* D.

Обозначим через D' дополнение к D относительно всей z'-плоскости, а если $u = \frac{1}{z'}$, то мы обозначим преобразованные области в u-плоскости соответственно через U и U'. Как следует из определения области D, область U окружает область U' и точки $u = 0$ и $u = 1$ лежат на границе U' или же $u = 0$ лежит внутри U' (в случае, когда D — конечная область).

Если z — фиксированная точка в $\xi_j D$, где ξ_j — вершина главной звездной области функции $f(z)$, то $z = \xi_j z'_j = \frac{\xi_j}{u_j}$, где u_j лежит в U. Следовательно, если z находится в частной звездной области, соответствующей производящей области D, то в U лежат все точки u_j, а также и все их предельные точки, так как множество особых точек функции $f(z)$ замкнуто. Следовательно, можно провести простой замкнутый контур C, *полностью лежащий* в U, такой, что все u_j и их предельные точки лежат вне C, а $u = 0$ и $u = 1$ — внутри C. Кроме того, u_j, соответствующие каждой другой особой точке функции $f(z)$, лежат вне C, так как эти особые точки лежат на прямых линиях, проведенных через O и ξ_j, где O — начало *).

Рассмотрим интеграл Миттаг-Леффлера

$$I(z, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(zu)}{1-u} \varphi\left(\frac{1}{u}, \omega\right) du,$$

где C — описанный выше контур. Так как u_j лежат вне C, то $f(zu)$ будет регулярной, когда u лежит внутри области, ограниченной контуром C, или на самом контуре C, так что $\left|\frac{f(zu)}{1-u}\right| \leqslant M$ для всех u на C. Так как все u, лежащие на C, принадлежат U, то отсюда следует, что $z' = \frac{1}{u}$ лежит в D, и следовательно, по условию (II) теоремы

$$\max_{u \in C} \left|\varphi\left(\frac{1}{u}, \omega\right)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad \omega \to \infty.$$

Таким образом, $|I(z, \omega)| \leqslant \frac{ML}{2\pi} \max |\varphi(z', \omega)| \to 0$, когда $\omega \to \infty$, где L — длина C. Поэтому интеграл существует и стремится к 0 при $\omega \to \infty$.

Так как у подынтегральной функции особыми точками внутри или на контуре C являются только точки $u = 0$ и $u = 1$, то мы имеем $I(z, \omega) = I_0 + I_1$, где I_0 и I_1 — интегралы по достаточно малым контурам, окружающим точки $u = 0$ и $u = 1$ соответственно. По условию (I) теоремы,

$$I_1 = -f(z)\varphi(1, \omega) \to -f(z)$$

---

*) Действительно, мы имеем $u_j = \frac{\xi_j}{z}$, где z — фиксированная точка; следовательно, если $k\xi_j$ $(k > 1)$ — особая точка функции $f(z)$, то соответствующая ей точка u будет ku_j, которая лежит вне C.

при $\omega \to \infty$, и если γ — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $u=0$, то

$$I_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (c_0 + c_1 uz + c_2 u^2 z^2 + \ldots)(1 + u + u^2 + \ldots) \times$$
$$\times \left[\frac{a_0(\omega)}{u} + \frac{a_1(\omega)}{u^2} + \frac{a_2(\omega)}{u^3} + \ldots\right] du =$$
$$= c_0 a_0(\omega) + (c_0 + c_1 z) a_1(\omega) + (c_0 + c_1 z + c_2 z^2) a_2(\omega) + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega) s_k(z) \,^{*}).$$

Утверждение теоремы теперь следует немедленно.

Пусть $g(z)$ удовлетворяет условиям (**8.3**, I) и матрица $(a_k(\omega))$ определена формулой (8.11) с $g(k) > 0$ для любого k и $g(0) = 1$. Тогда

$$\varphi(z', \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(k+1)(\omega z')^{k+1}}{E(\omega)} = \frac{E(\omega z') - 1}{E(\omega)}$$

удовлетворяет условиям (**8.3**, II) внутри угла применения (8.34), так как $E(\omega z') \to 0$ внутри этого угла, а $E(\omega) \to \infty$ при $\omega \to \infty$, ибо $g(k) > 0$ для любого k. Матрица $(a_k(\omega))$ является T-матрицей и поэтому эффективна для ряда $\sum z'^n$ в круге $|z'| < 1$, т. е.

$$\lim_{\omega \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega)\left(\frac{1 - z'^{k+1}}{1 - z'}\right) = \frac{1}{1 - z'},$$

так что условия теоремы (**8.3**, II) выполняются в этом круге так же, как и внутри угла применения, вершина которого находится в начале координат. Таким образом, производящей областью D здесь будет область, образованная объединением части плоскости, заключенной внутри угла применения (8.34), и круга $|z'| < 1$; матрица $(a_k(\omega))$ будет эффективной для ряда $\sum c_k z^k$ в соответствующей частной звездной области.

Ряды Тэйлора также можно суммировать при помощи γ-матриц (§ 4.2), вместо применения T-матриц к частичным суммам этих рядов.

---

*) В рассуждениях используется тот факт, что $\varphi\left(\frac{1}{u}, \omega\right)$ регулярна в окрестности $u=0$ и что при малых u справедливо равенство $\varphi\left(\frac{1}{u}, \omega\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega) \frac{1}{u^{k+1}}$ $(\omega \geqslant \Omega)$, а это значит, что ряд Тэйлора по z' функции $\varphi(z', \omega)$ имеет радиус сходимости ∞. (*Прим. ред.*)

Теоремы (**8.3**, III) и (**8.3**, VI) устанавливают два результата в этом направлении.

(**8.3**, III) *Преобразования последовательности частичных сумм ряда* $\sum c_k z^k$ *посредством T-матрицы* $A \equiv (a_k(\omega))$ *типа* (8.11) *и ряда* $\sum c_k z^k$ *посредством γ-матрицы* $G \equiv (g_k(\omega))$, *где* $g_k(\omega) = \sum_{p=k}^{\infty} a_p(\omega)$, *являются взаимно-совместными для всех рядов Тэйлора с отличным от нуля радиусом сходимости.*

Если $a_k(\omega)$ определена равенством (8.11), то мы имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega)\, s_k(z) = \frac{1}{E(\omega)} \sum_{k=0}^{\infty} g(k+1)\, \omega^{k+1} \sum_{m=0}^{k} c_m z^m =$$

$$= \frac{1}{E(\omega)} \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m \sum_{k=m}^{\infty} g(k+1)\, \omega^{k+1} = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(\omega)\, c_m z^m. \quad (8.35)$$

Действительно, так как ряд Тэйлора имеет отличный от нуля радиус сходимости, то $|c_m| \leqslant \rho^m$ для некоторого положительного ρ, и так как $E(z)$ — целая функция, то отсюда следует, что двойной ряд абсолютно сходится и поэтому изменение порядка суммирования оправдано.

Утверждение теоремы следует теперь из (8.35).

(**8.3**, IV) *Метод суммирования рядов Тэйлора посредством T-матриц типа* (8.11) *является транслятивным в частной звездной области.*

Действительно, если $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, то частные звездные области функций

$$f(z),\ zf(z) \quad \text{и} \quad \frac{f(z) - c_0}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} z^k$$

совпадают, так как особые точки всех трех функций будут одни и те же. Отсюда и следует требуемый результат.

Сейчас мы построим матрицу, которая не относится к типу (8.11), *однако удовлетворяет условиям теоремы* (**8.3**, II) *и для которой частная звездная область образуется при помощи угла применения с вершиной, передвинутой из начала координат в точку* $z' = 1$.

Рассмотрим целые функции

$$F_\omega(z') \equiv E[\omega(z' - 1)] \qquad (\omega > \omega_0). \quad (8.36)$$

Мы имеем $F_\omega(z') \to 0$ при $\omega \to \infty$, если $z' - 1$ лежит внутри угла применения (8.34) с вершиной в начале координат, т. е. если

$$z' \text{ лежит внутри угла (8.34) с вершиной в точке } z' = 1. \quad (8.37)$$

Мы можем разложить целую функцию $F_\omega(z')$ в ряд Тэйлора

$$F_\omega(z') = E(-\omega + \omega z') = \sum_{k=0}^{\infty} E^{(k)}(-\omega)\frac{(\omega z')^k}{k!}.$$

Так как $g(0)=1$, то из (8.36) получаем $F_\omega(1) = E(0) = 1$ для любого $\omega > \omega_0$, так что $\lim\limits_{\omega\to\infty} F_\omega(1) = 1$. Но $\varphi(z', \omega) = F_\omega(z') - E(-\omega)$ и по (**8.3**, I) $E(-\omega) \to 0$, когда $\omega \to \infty$.

Следовательно, применяя (**8.3**, II), получаем, что матрица

$$b'_k(\omega) = \frac{E^{(k+1)}(-\omega)\,\omega^{k+1}}{(k+1)!} \tag{8.38}$$

эффективна в частной звездной области, соответствующей углу, описанному в (8.37). Эта матрица суммирует ряд Тэйлора в указанной области к «правильному» значению $f(z)$.

В силу тех же доводов, что и в (**8.3**, IV), матрица $(b'_k(\omega))$ является транслятивной; следовательно, матрица

$$b_k(\omega) = \frac{E^{(k)}(-\omega)\,\omega^k}{k!} \tag{8.39}$$

и матрица (8.38) взаимно-совместны для всех рядов Тэйлора с отличными от нуля радиусами сходимости в частной звездной области.

Из сказанного вытекает следующий результат:

(**8.3**, V) *Если* $g(z)$ *с* $g(0)=1$ *удовлетворяет условиям теоремы* (**8.3**, I), *то матрица* $\frac{E^{(k)}(-\omega)\,\omega^k}{k!}$ *эффективна для всякого ряда Тэйлора с отличным от нуля радиусом сходимости в частной звездной области, соответствующей углу применения* (8.34) *с вершиной в точке* $z'=1$.

Если $E(z) = e^z$, то (8.39) обращается в матрицу Бореля $\frac{e^{-\omega}\omega^k}{k!}$ и областью (8.37) здесь является полуплоскость $\operatorname{Re}(z) < 1$, ведущая в общем случае к многоугольнику суммируемости Бореля *).

Для матрицы (8.39) выполняется соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(\omega) = F_\omega(1) = E(0) = g(0) = 1,$$

так что $\lim\limits_{\omega\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(\omega) = 1$. Так как $(b_k(\omega))$ эффективна для каждого из полиномов z^p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ в точке $z=1$, то мы получаем:

$$\lim_{\omega\to\infty} \sum_{k=p}^{\infty} b_k(\omega) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\omega\to\infty} \sum_{k=p+1}^{\infty} b_k(\omega) = 1,$$

*) См. пример (I) в конце этого параграфа.

откуда, вычитая одно равенство из другого, будем иметь:

$$\lim_{\omega \to \infty} b_p(\omega) = 0$$

для любого фиксированного p.

Таким образом, матрица $(b_k(\omega))$ удовлетворяет двум условиям Сильвермана — Теплица для T-матриц. Что касается третьего условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k(\omega)| \leqslant M$$

для любого $\omega > \omega_0$, то оно выполняется, если $E^{(k)}(-\omega) \geqslant 0$ для любого k и для всех $\omega > \omega_0$; в противном же случае оно может и не выполняться. Следовательно, $(b_k(\omega))$ может быть, а может и не быть T-матрицей.

Можно отметить, что попытка заменить $E[\omega(z'-1)]$ в (8.36) на $E[\omega(z'-p)]$, где $p > 1$, не приводит к положительным результатам, ибо, для того чтобы выполнялись указанные выше условия, в качестве $F_\omega(z)$ нужно взять

$$\frac{E[\omega(z'-p)]}{E[\omega(1-p)]},$$

а знаменатель здесь стремится к нулю при $\omega \to \infty$.

Если $\left(b'_k(\omega)\right)$ определена равенством (8.38), а $g_k(\omega) = \sum\limits_{p=k}^{\infty} b'_p(\omega)$, то $(g_k(\omega))$ и $\left(b'_k(\omega)\right)$ взаимно-совместны в частной звездной области и

$$g_k(\omega) = \sum_{p=k+1}^{\infty} E^{(p)}(-\omega)\frac{\omega^p}{p!} = 1 - \sum_{p=0}^{k} E^{(p)}(-\omega)\frac{\omega^p}{p!}. \quad (8.391)$$

Выражение для $g_k(\omega)$ может быть представлено в виде

$$g_k(\omega) = \frac{1}{k!}\int_0^{\omega} E^{(k+1)}(-t)\, t^k\, dt,$$

так как интегрирование по частям дает

$$g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega) = \frac{E^{(k+1)}(-\omega)\,\omega^{k+1}}{(k+1)!} = b'_k(\omega),$$

а в соответствии с (8.391) имеем:

$$g_0(\omega) = \int_0^{\omega} E'(-t)\, dt = E(0) - E(-\omega).$$

Таким образом, преобразование ряда $\sum c_k z^k$ может быть записано так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(\omega) c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k z^k}{k!} \int_0^{\omega} E^{(k+1)}(-t) t^k \, dt. \tag{8.392}$$

Операции суммирования и интегрирования можно поменять местами, когда $\sum c_k z^k$ имеет отличный от нуля радиус сходимости. Действительно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}(-t) \frac{c_k (tz)^k}{k!}$ мажорируется при $0 \leqslant t \leqslant \omega$ рядом $\sum_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}(\omega) \frac{|c_k z^k| \omega^k}{k!}$, а ряд Тэйлора $\sum_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}(\omega) \frac{z^k}{k!}$ целой функции $E'(\omega + z)$ имеет бесконечный радиус сходимости, так что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}(-t) \frac{c_k (tz)^k}{k!}$$

сходится абсолютно и равномерно для всех конечных t.

Меняя местами в (8.392) операции суммирования и интегрирования и устремляя ω к ∞, мы получим для обобщенной суммы ряда интегральную формулу

$$\lim_{\omega \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\omega) c_k z^k = \int_0^{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}(-t) \frac{c_k (zt)^k}{k!} \, dt, \tag{8.393}$$

справедливую в частной звездной области.

(Эта формула и матрица (8.38) были получены иным способом Миттаг-Леффлером [1], 166—177; см. также Борель [1], 118—121 и Окада [1] и [2].)

При $E(z) = e^z$ (8.393) обращается в интеграл Бореля.

Если $g(z)$ удовлетворяет условиям (**8.2**, III) вместо (**8.3**, I), то (8.393) имеет силу в *главной* звездной области (опять при предположении, что $g(0) = 1$).

Таким образом, мы получаем следующую теорему:

(**8.3**, VI) *Если* $g_k(\omega) = \sum_{p=k+1}^{\infty} E^{(p)}(-\omega) \frac{\omega^p}{p!}$ *и* $g(z)$ *с* $g(0) = 1$ *удовлетворяет условиям* (**8.2**, III), *то* $(g_k(\omega))$ *эффективна для всех рядов Тэйлора с отличным от нуля радиусом сходимости в главной звездной области; если* $g(z)$ *с* $g(0) = 1$ *удовлетворяет условиям теоремы* (**8.3**, I), *то* $(g_k(\omega))$ *эффективна для всех таких рядов Тэйлора в соответствующей частной звездной области. В каждом из этих случаев интеграл в* (8.393) *дает обобщенную* *сумму ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, *которая получается в результате суммирования этого ряда матрицей* $(g_k(\omega))$.

Примеры. Приведем примеры матриц, удовлетворяющих условиям теоремы (**8.3**, I). Так как во всех этих примерах $g(0)=1$, то к ним применимы теоремы (**8.3**, II) и (**8.3**, V). (Эти же теоремы применимы к примерам в § 8.2.)

(I) Матрица Бореля является частным случаем (8.11), где

$$g(z)=\frac{1}{\Gamma(1+z)}.$$

Мы имеем:

$$\log\frac{1}{g(z)}=\log\Gamma(1+z)=\left(z+\frac{1}{2}\right)\log z-z+\log\eta(z),$$

где

$$\lim_{|z|\to\infty}\eta(z)=\sqrt{2\pi}.$$

Таким образом,

$$\log\frac{1}{g(z)}=z\log z\left[1-\frac{1}{\log z}+\frac{1}{2z}+\frac{\log\eta(z)}{z\log z}\right]=z\log z\,[1+\varepsilon(z)],$$

где $\varepsilon(z)$ удовлетворяет (8.33), а условие (8.31) имеет место с $\sigma=1$. Следовательно, величина угла применения равна π.

(II) Положим $g(z)=z^{-\theta z}$, где $0<\theta<2$ (Линделёф [1], 119). Взяв в (**8.2**, I) $\alpha=0$ (см. Линделёф [1], замечание на стр. 119), мы получим $\log\dfrac{1}{g(z)}=\theta z\log z$, так что $\sigma=\dfrac{1}{\theta}$, и поэтому $\sigma>\dfrac{1}{2}$. Условия (8.31) и (8.32) также удовлетворяются.

Величина угла применения в этом случае равна $2\pi-\theta\pi$, и, устремляя θ к нулю, ее можно сделать как угодно близкой к 2π. Однако нужно отметить, что мы не можем получить всю *главную* звездную область для *конкретной матрицы* путем такого предельного перехода; для любого *данного* θ, как бы мало оно ни было, мы можем только сказать, что угол применения *близок* к 2π. $E(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{k^\theta}\right)^k$ является целой функцией порядка $\dfrac{1}{\theta}>\dfrac{1}{2}$.

(III) Если мы возьмем $g(z)=\dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha z)}$, где $0<\alpha<2$, то

$$E(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)},$$

т. е. получаем функцию Миттаг-Леффлера $E_\alpha(z)$. Функция $E_\alpha(z)$ является целой функцией порядка $\dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{1}{2}$, и условия (8.31) и (8.32) удовлетворяются, как и в примере (I). Величина угла применения равна $2\pi - \alpha\pi$. Матрица Бореля является частным случаем при $\alpha = 1$.

(IV) Настоящий пример является обобщением примера (III). Пусть

$$g(z) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha z)\,\Gamma(1+\beta z)},$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 2$. Мы имеем:

$$\log\frac{1}{g(z)} = \log\Gamma(1+\alpha z) + \log\Gamma(1+\beta z) =$$

$$= \left(\alpha z + \frac{1}{2}\right)\log \alpha z + \left(\beta z + \frac{1}{2}\right)\log\beta z - (\alpha+\beta)\,z + \log\eta(z),$$

где

$$\lim_{|z|\to\infty} \eta(z) = 2\pi.$$

Следовательно,

$$\log\frac{1}{g(z)} = (\alpha+\beta)\,z\log z\,[1 + \varepsilon(z)],$$

где

$$\varepsilon(z) = \frac{\alpha\log\alpha + \beta\log\beta - (\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)\log z} + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

так что (8.31) и (8.32) удовлетворяются с $\sigma = \dfrac{1}{\alpha+\beta}$.

Таким образом,

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)\,\Gamma(1+\beta k)}$$

является целой функцией порядка $\dfrac{1}{\alpha+\beta} > \dfrac{1}{2}$, и величина угла применения равна $2\pi - (\alpha+\beta)\,\pi$.

Этот процесс может быть распространен на случай любого конечного числа гамма-функций с положительными параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ при условии, что $\sum\limits_{r=1}^{p} \alpha_r < 2$. Мы тогда получим целую функцию $E(z)$, а именно:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha_1 k)\,\Gamma(1+\alpha_2 k)\ldots\Gamma(1+\alpha_p k)},$$

которая имеет порядок

$$\frac{1}{\sum\limits_{r=1}^{p} \alpha_r} > \frac{1}{2};$$

величина угла применения в этом случае равна $2\pi - \pi\sum\limits_{r=1}^{p}\alpha_r$ (см. также пример 1 к гл. 8).

8.4. Нижние треугольные матрицы, эффективные в областях вне круга сходимости

Матрицы, рассмотренные в §§ 8.2 и 8.3, принадлежат к классу, который может быть назван «*мощным*», т. е. матрицы этого класса эффективны для *сильно* расходящихся последовательностей, таких, как частичные суммы рядов Тэйлора в точках вне круга сходимости. Но они часто бывают неэффективными для *слабо* расходящихся последовательностей, например для слабо колеблющихся последовательностей.

Матрицы, суммирующие последовательности второго типа (и обычно не суммирующие последовательности первого типа), как, например, средние арифметические, средние Чезаро и Рисса, могут быть отнесены к «*слабому*» классу (см. Харди и Литтльвуд [1], [2] и Харди [2], 153). Например, как уже упоминалось в связи с примером 3 к гл. 5, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

не суммируем при помощи матрицы Бореля, хотя он суммируется методом $(C, 1)$.

Возникает вопрос: должны ли матрицы «мощного» типа быть «квадратными» для того, чтобы они были эффективными для рядов Тэйлора в области вне круга сходимости?

Как будет показано, существуют нижние треугольные T-матрицы, эффективные для ряда $\sum z^n$ в области вне круга $|z| \leqslant 1$, откуда следует, что ответ на поставленный вопрос отрицательный.

В примерах «квадратных» матриц (a_{nk}), которые известны как эффективные для рядов Тэйлора вне круга сходимости, максимум элемента a_{nk} при изменении k и фиксированном $n > n_0$ достигается при значении $k \geqslant n$. Так, в случае матриц Бореля и Линделёфа максимум достигается соответственно при

$$k = n \quad \text{и} \quad k = [e^{n-1}] \qquad (n > n_0)\ ^*).$$

Поэтому, если мы будем строить *модифицированную* матрицу Бореля, которая должна быть *нижней треугольной T-матрицей*, то, для того чтобы она стала эффективной для ряда $\sum z^n$ вне круга $|z| \leqslant 1$, вероятно, мы должны сделать так, чтобы максимум (a_{nk}) достигался для значений k, существенно еньших n, так как $a_{nk} = 0$ для $k > n$.

---

*) Здесь $[x]$ означает целую часть x.

Эти соображения приводят к следующим результатам (Кук [8]) *):

(8.4, I) *Пусть* α, β — *постоянные, причем*

$$0 \leqslant \alpha < 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0), \quad \beta > 1.$$

Тогда каждая из трех сумм

$$e^{-x} \sum_{0 \leqslant k < \alpha x} \frac{(zx)^k}{k!}, \quad e^{-x} \sum_{\alpha x \leqslant k \leqslant \beta x} \frac{(zx)^k}{k!}, \quad e^{-x} \sum_{k > \beta x} \frac{(zx)^k}{k!}$$

(*x действительное*) *стремится к нулю при $x \to \infty$, если z удовлетворяет условиям*:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{Re}(z) < 1;$$

$$\text{(II)} \qquad |z| \leqslant \alpha e^{\frac{1-\varepsilon}{\alpha} - 1};$$

$$\text{(III)} \qquad |z| \leqslant \beta e^{\frac{1}{\beta} - 1};$$

условие (II) *при* $\alpha = 0$ *и условие* (III) *при* $\beta = \infty$ *опускаются.*
Мы имеем:

$$A(x) \equiv e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zx)^k}{k!} = e^{(z-1)x} \to 0 \tag{8.41}$$

при $x \to \infty$, если $\operatorname{Re}(z) < 1$. Применяя формулу Стирлинга для $[\alpha x]!$, получим **):

$$B(x) \equiv \left| e^{-x} \sum_{0 \leqslant k < \alpha k} \frac{(zx)^k}{k!} \right| \leqslant e^{-x} |z|^{\alpha x} \frac{\alpha x x^{\alpha x}}{[\alpha x]!} <$$

$$< \frac{K_1 e^{-x} \left(\alpha e^{\frac{1-\varepsilon}{\alpha} - 1}\right)^{\alpha x} \alpha x x^{\alpha x}}{e^{-\alpha x} (\alpha x)^{\alpha x + \frac{1}{2}}}.$$

---

*) В работе, на которую сделана ссылка, имеется опечатка на стр. 155, во второй строке после (1); в знаменателе вместо напечатанного $\alpha x + \frac{3}{2}$ должно быть $\alpha x + \frac{1}{2}$. В приведенном здесь доказательстве это исправлено.

**) Первая половина неравенства неверна для $|z|$ достаточно малых (например, для $z = 0$). Оценка будет верна при $|z| \geqslant \alpha$ и если справа еще взять множитель 2. Тогда из приведенных в тексте неравенств следует, что $B(x) \to 0$ при $x \to \infty$ для $|z| \geqslant \alpha$. Если же $|z| < \alpha$, то тем более $B(x) \to 0$ при $x \to \infty$. (*Прим. ред. и перев.*)

Таким образом,

$$B(x) < K_2 e^{-\varepsilon x}\sqrt{x} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{8.42}$$

так как $\varepsilon > 0$.

Здесь при доказательстве предполагалось, что $\alpha > 0$; при $\alpha = 0$ нечего доказывать. Следовательно, если выполняется условие (II) теоремы и $\alpha > 0$, то $B(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Далее,

$$C(x) \equiv \left| e^{-x} \sum_{k > \beta x} \frac{(zx)^k}{k!} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{e^{-x}(|z|x)^{m+1}}{(m+1)!}\left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(|z|x)^p}{(m+2)(m+3)\ldots(m+p+1)}\right],$$

где $m = [\beta x]$. Таким образом, учитывая условие (III) и неравенство $|z| < \beta$ (из этого же условия), мы получаем:

$$C(x) < \frac{K_3 e^{-x}(|z|x)^{m+1}}{e^{-m-1}(m+1)^{m+\frac{3}{2}}} \frac{1}{1 - \frac{|z|}{\beta}} < \frac{K_4}{\sqrt{\beta x}} \frac{e^{-x}|z|^{m+1}}{e^{-\beta x}\beta^{m+1}} \frac{\beta}{\beta - |z|} <$$
$$< \frac{K_5 e^{(\beta-1)x}}{\sqrt{x}} \left(\frac{|z|}{\beta}\right)^{m+1} < \frac{K_6}{\sqrt{x}}.$$

Здесь $K_1, \ldots, K_6$ — положительные константы. Следовательно,

$$C(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty, \quad \text{когда} \quad |z| \leqslant \beta e^{\frac{1}{\beta}-1}, \quad \beta > 1. \tag{8.43}$$

Поэтому при выполнении условий (I)—(III) из (8.41)—(8.43) получаем:

$$D(x) \equiv e^{-x} \sum_{\alpha x \leqslant k \leqslant \beta x} \frac{(zx)^k}{k!} \to 0, \text{ когда } x \to \infty.$$

Это и доказывает теорему. Так как $\frac{e^{x-1}}{x} > 1$ для всех положительных x, $x \neq 1$, то область, определенная условиями (I)—(III), выходит за круг $|z| \leqslant 1$ *). Отсюда немедленно вытекает следующий результат:

(8.4, II) *Если D — область, являющаяся общей частью полуплоскости* $\mathrm{Re}(z) < 1$ *и круга* $|z| \leqslant \lambda e^{\frac{1}{\lambda}-1}$, *где* $\lambda > 1$, *то нижняя треугольная Т-матрица* (a_{nk}):

$$a_{nk} = \frac{e^{-\frac{n}{\lambda}}\left(\frac{n}{\lambda}\right)^k}{k!} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n), \quad a_{nk} = 0 \qquad (k > n),$$

эффективна для ряда Σz^n *всюду в* D.

*) Величина $\alpha e^{\frac{1-\varepsilon}{\alpha}-1}$ стремится к $1 - \varepsilon$, если $\alpha \to 1 - \varepsilon$. Поэтому область, определенная условиями (I), (II) и (III), при α близких к $1 - \varepsilon$ будет находиться внутри круга $|z| < 1$. (*Прим. ред.*)

Положим $R_k(z)=\frac{1}{1-z}-s_k(z)$, где $s_k(z)=\sum_{n=0}^{k} z^n$; тогда $R_k(z)=\frac{z^k}{1-z}$.

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}z^k \to 0 \text{ при } n\to\infty \text{ всюду в } D \tag{8.44}$$

и что (a_{nk}) есть T-матрица.

Положив в (**8.4**, I) $\alpha=0$, $\beta=\lambda$, $x=\frac{n}{\lambda}$, сразу получаем (8.44).

Также, полагая $z=1$, из (8.43) будем иметь:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{n}{\lambda}}\left(\frac{n}{\lambda}\right)^k}{k!}\to 0 \text{ при } n\to\infty, \text{ но } \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{n}{\lambda}}\left(\frac{n}{\lambda}\right)^k}{k!}=1,$$

откуда $\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\to 1$ при $n\to\infty$.

Следовательно, (a_{nk}) является T-матрицей, так как ясно, что другие два условия (**4.1**, II) выполняются. Требуемый результат доказан.

Область D, очевидно, простирается за круг $|z|\leqslant 1$. Максимум a_{nk} при переменном k и фиксированном $n>n_0$ достигается при $k=\left[\frac{n}{\lambda}\right]$.

Отметим, что наличие только *одного* максимума для a_{nk} при $k<n$ не является существенным; можно построить нижнюю треугольную T-матрицу с двумя максимумами, каждый из которых достигается при $k<n$, и эффективную для ряда Σz^n в некоторой области вне круга $|z|\leqslant 1$ (см. пример 2 к гл. 8). Этот результат может быть обобщен на случай, когда a_{nk} имеет три и более максимумов при $k<n$.

Следующим примером нижней треугольной T-матрицы, эффективной для рядов Тэйлора в области, выходящей за круг сходимости, является *матрица Эйлера — Кноппа*:

$$a_{nk}=C_k^n r^k(1-r)^{n-k}\quad(0\leqslant k\leqslant n),\quad a_{nk}=0\qquad(k>n)$$

(Кнопп [2], Радемахер [2], Агнью [16], [18], Макфейл [1]). Эта матрица суммирует ряд Σz^n во всех точках внутри круга $|1-r+rz|\leqslant 1$, центр которого находится в точке $1-\frac{1}{r}$, а радиус равен $\frac{1}{|r|}$. Если $0<r<1$, то этот круг включает круг сходимости $|z|=1$. Эта матрица представляет также интерес и в том смысле, что она не принадлежит к типу матриц Миттаг-Леффлера.

Этот пример, а также (**8.4**, II) можно распространить на общие ряды Тэйлора, применяя (**8.3**, II).

8.5. Эффективность для ограниченных последовательностей

В оставшихся параграфах этой главы мы рассмотрим проблемы эффективности матриц для *ограниченных* последовательностей.

Мы сначала покажем, что при рассмотрении эффективности T-матриц для ограниченных последовательностей достаточно использовать последовательности, составленные только из 0 и 1 (Кук и Барнетт [1], Хенсток [2])*).

(8.5, I) *Пусть* $\{z_n\}$ — *действительная ограниченная последовательность с конечным числом* N *предельных точек* $l_1, l_2, \ldots, l_N$. *Для того чтобы* $\{z_n\}$ *суммировалась* T-*матрицей* A, *достаточно, чтобы* A *была эффективна для каждой из* N *последовательностей из* 0 *и* 1, *построенных соответствующим образом для данной последовательности* $\{z_n\}$.

Мы можем предположить, что $l_1 < l_2 < \ldots < l_N$. Из $\{z_k\}$ можно извлечь N подпоследовательностей, где p-я подпоследовательность состоит из всех z_k, расположенных в интервале

$$(l_p - \varepsilon, \; l_p + \varepsilon), \quad p = 1, 2, \ldots, N,$$

а $\varepsilon > 0$ выбрано настолько малым, что эти интервалы не перекрываются. Тогда p-я подпоследовательность стремится к l_p. Что касается точек z_k, не принадлежащих ни одной из этих подпоследовательностей, то их имеется не более конечного числа, ибо в противном случае существовала бы предельная точка, отличная от $l_1, l_2, \ldots, l_N$. Обозначим p-ю подпоследовательность через $\{z_{r_p(k)}\}$.

Будем строить последовательности из 0 и 1, упомянутые в формулировке теоремы. Возьмем в качестве p-й последовательность, состоящую из 1 на местах с номерами $r_p(k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и 0 на остальных местах. Так как, по предположению, A эффективна для каждой из таких N последовательностей, мы имеем:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n, r_p(k)} = \beta_p,$$

где β_p — некоторое число, зависящее только от p.

Матрица $(a_{n, r_p(k)})$ является K-матрицей с характеристическими числами $\alpha_k = 0$ и $\alpha = \beta_p$, следовательно, по теореме **(4.1, I)** Кожима—Шура мы получаем:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n, r_p(k)} z_{r_p(k)} = \beta_p l_p.$$

---

*) Работа Хенстока [2] была опубликована после того, как настоящая книга была сдана в печать, поэтому здесь не представилось возможным изложить ее содержание. В работе обобщается **(8.5, I)** на случай, когда $\{z_n\}$ имеет счетное множество или континуум предельных точек.

Последовательность $\{z_k\}$ состоит из элементов подпоследовательностей $\{z_{r_p(k)}\}$ вместе с *конечным* числом не вошедших в них элементов z_k, если такие имеются. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk}=0$ для любого фиксированного k, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_k a_{nk}z_k=0$, когда $\sum\limits_k$ распространяется на *конечное* число значений k. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}z_k=\sum_{p=1}^{N}\beta_p l_p.$$

Порядок членов в ряде $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}z_k$ не играет роли, так как $\{z_k\}$ ограничена, и поэтому ряд сходится абсолютно для каждого n. Теорема доказана.

Следствие. *Теорема может быть обобщена на комплексные ограниченные последовательности $\{z_k\}$, имеющие N предельных точек $l'_p+il''_p$ $(p=1, 2, \ldots, N$, l'_p и l''_p — действительные числа$)$, но теперь достаточным условием является эффективность A для $2N$ аналогичных последовательностей из 0 и 1.*

Действительно, если $z_k=u_k+iv_k$, то предельными точками действительных ограниченных последовательностей $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ являются соответственно l'_p и l''_p $(p=1, 2, \ldots, N)$, откуда и вытекает упомянутое следствие.

Удовлетворительно обобщить метод (**8.5**, I) на случай, когда $\{z_k\}$ имеет бесконечное множество предельных точек, весьма трудно. Следующий результат, принадлежащий Хенстоку, охватывает этот случай и, как будет видно в конце доказательства, включает в себя (**8.5**, I).

(**8.5**, II) *Пусть (a_{nk}) — действительная T-матрица, а $\{z_k\}$ — действительная последовательность, такая, что $|z_k|<B$ для любого k. Обозначим через $\{x(k)\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ подпоследовательность положительных целых чисел такую, что $z_{x(k)}\leqslant x$, и положим $g_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n,x(k)}$. Если $g_n(x)$ стремится к пределу $g(x)$ при $n\to\infty$ для всех x из $(-B, B)$, то*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}z_k=\int_{-B}^{B} x\,dg(x),$$

где справа стоит интеграл Римана — Стилтьеса.

Так как A есть T-матрица, то мы имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\leqslant M$ для любого $n>n_0$, и таким образом, $g_n(x)$ существует для каждого n и x. Также

$$g_n(B)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk},\quad g_n(-B)=0.$$

Пусть $y > x$. Тогда $\{x(k)\}$ будет подпоследовательностью последовательности $\{y(k)\}$, так что

$$|g_n(y) - g_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,\,y(k)}| - \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,\,x(k)}|.$$

Отсюда следует, что вариация функции $g_n(x)$ в $(-B,\, B)$ не превосходит величину $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant M$, т. е. $g_n(x)$ имеет ограниченное изменение в $(-B,\, B)$, и значит, интеграл Римана — Стилтьеса $\int\limits_{-B}^{B} x\, dg_n(x)$ существует.

Пусть теперь $-B = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = B$, где

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m)$$

для некоторого произвольного $\varepsilon > 0$. Тогда, если обозначить через $\sum\limits_{p(i)}$ сумму, в которой суммирование производится по всем целым числам $p(i)$, принадлежащим последовательности $\{x_i(k)\}$, но не принадлежащим $\{x_{i-1}(k)\}$, получим:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k - \sum_{i=1}^{m} x_i [g_n(x_i) - g_n(x_{i-1})] \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{p(i)} a_{n,\,p(i)} [z_{p(i)} - x_i] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{p(i)} |a_{n,\,p(i)}|\, \varepsilon \leqslant M\varepsilon \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k = \int\limits_{-B}^{B} x\, dg_n(x)$. и остается только показать, что

$$\int_{-B}^{B} xd\, [g(x) - g_n(x)] \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение в $(-B,\, B)$, так как изменение функции $g_n(x)$ в этом интервале не превосходит M независимо от n.

Так как $g_n(-B)=0$, то мы имеем также $g(-B)=0$, и следовательно,

$$\left|\int_{-B}^{B} x d\,[g(x)-g_n(x)]\right| =$$

$$= \left|\{x\,[g(x)-g_n(x)]\}_{-B}^{B} - \int_{-B}^{B} [g(x)-g_n(x)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant B\,|g(B)-g_n(B)| + \int_{-B}^{B} |g(x)-g_n(x)|\,dx \to 0 \quad \text{при } n\to\infty,$$

ибо B фиксировано, $|g_n(x)|$ ограничена (независимо от n) и $g_n(x)$ стремится к $g(x)$ при $n\to\infty$ для всех x из $(-B, B)$.

Теорема доказана.

Чтобы получить (**8.5**, I) из (**8.5**, II), предположим, что $-B=l_0<l_1$ и $l_N<l_{N+1}=B$. Тогда если $l_p<x<l_{p+1}$ $(p=0, 1, \ldots, N)$, то легко проверить, что

$$g(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(l_p+\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}\sum_{q=1}^{p}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n, r_q(k)}=\sum_{q=1}^{p}\beta_q$$

$\left(\text{при } p=0 \text{ полагаем, по определению, } \sum_{q=1}^{p}=0\right)$, и поэтому

$$\int_{-B}^{B} x\,dg(x)=\sum_{p=1}^{N} l_p\beta_p,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}z_k=\sum_{p=1}^{N} l_p\beta_p.$$

Следствие. *Теорема* (**8.5**, II) *может быть обобщена на комплексные ограниченные последовательности* $\{z_k\}$.

Действительно, если $z_k=u_k+iv_k$ (u_k и v_k действительные) и если $\{x(k)\}$, $\{y(k)\}$ — подпоследовательности целых положительных чисел, для которых

$$u_{x(k)}\leqslant x, \quad v_{y(k)}\leqslant x,$$

то мы положим

$$g_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,\,x(k)}, \quad h_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,\,y(k)}.$$

Если $|z_k|\leqslant B$, то также $|u_k|\leqslant B$, $|v_k|\leqslant B$. Если $g_n(x)\to g(x)$ и $h_n(x)\to h(x)$ при $n\to\infty$ для всех x из $(-B, B)$, то, согласно (**8.5**, II), имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}u_k=\int_{-B}^{B} x\,dg(x), \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}v_k=\int_{-B}^{B} x\,dh(x),$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}z_k = \int_{-B}^{B} x\,dg(x) + i\int_{-B}^{B} x\,dh(x),$$

что и доказывает следствие.

Мы видим, что *N последовательностей из* 0 *и* 1 *в* (**8.5**, I) *строятся по данной последовательности $\{z_k\}$ следующим образом. Из $\{z_k\}$ выделяются подпоследовательности $\{z_{r_p(k)}\}$, все элементы которых лежат соответственно в интервалах $(l_p-\varepsilon, l_p+\varepsilon)$, $p=1, 2, \ldots, N$ ($\varepsilon>0$ выбирается столь малым, чтобы эти интервалы не перекрывались). Обозначив элементы последовательности из* 0 *и* 1, *которая соответствует предельной точке l_p, через $u_m^{(p)}$, полагаем $u_m^{(p)}=1$, если $m=r_p(k)$, и $u_m^{(p)}=0$ во всех других случаях.*

Мы сейчас дадим простые достаточные условия, чтобы метод суммирования, определенный матрицей A, был сильнее, чем сходимость (Агнью [12]) *).

(**8.5**, III) *Если матрица A такая, что*:

$$\text{(I)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|<\infty \qquad (n=1, 2, \ldots);$$

$$\text{(II)} \qquad \lim_{n\to\infty}\max_{k=1,2,\ldots}|a_{nk}|=0,$$

то существует, по крайней мере, одна расходящаяся последовательность из 0 *и* 1, *суммируемая при помощи этой матрицы. В частности, если A есть T-матрица такая, что $\lim\limits_{n,k\to\infty} a_{nk}=0$, то некоторая расходящаяся последовательность из* 0 *и* 1 *суммируется этой матрицей.*

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots$ — две последовательности положительных чисел такие, что $n\alpha_n\to 0$ и $\beta_n\to 0$ при $n\to\infty$. Условие (II) влечет существование возрастающей последовательности целых положительных чисел $n_1, n_2, \ldots$ такой, что для $p=1, 2, \ldots$

$$|a_{nk}|\leqslant\alpha_p \quad \text{при } n\geqslant n_p, \quad k=1, 2, \ldots \tag{8.51}$$

Фиксируем такую последовательность $\{n_p\}$. Тогда из условия (I) следует, что если $k_1, k_2, \ldots$ — последовательность целых положитель-

*) Метод суммирования сильнее сходимости, если он суммирует все сходящиеся последовательности и хотя бы одну расходящуюся. Если этот метод определяется при помощи матрицы, то и о матрице также говорят, что она сильнее, чем сходимость. Отметим, что условия (I) и (II), вообще говоря, не являются достаточными для того, чтобы матрица, удовлетворяющая им, была сильнее сходимости, так как при этих условиях она может не быть K-матрицей. (*Прим. перев.*)

ных чисел, достаточно быстро возрастающих к $+\infty$, то для $p=1, 2, \ldots$ имеем:

$$\sum_{k=k_p+1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant \beta_p \quad \text{при } n_p \leqslant n < n_{p+1}. \tag{8.52}$$

Фиксируем теперь последовательность $\{k_p\}$, удовлетворяющую условию (8.52), причем можно считать $k_{p+1} > k_p + 1$ $(p=1, 2, \ldots)$.

Пусть $\{s_k\}$ — последовательность из 0 и 1, определенная условиями $s_{k_p}=1$, $s_k=0$ $(k \neq k_p)$, $p=1, 2, \ldots$ Тогда каждое из равенств $s_k=1$ и $s_k=0$ имеет место для бесконечного множества значений k, так что последовательность $\{s_k\}$ расходится. Кроме того, преобразование $\{\sigma_n\}$ этой последовательности $\{s_k\}$ для $p=1, 2, \ldots$ и $n_p \leqslant n < n_{p+1}$ удовлетворяет условию

$$|\sigma_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k\right| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,k_j}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |a_{n,k_j}| + \sum_{j=p+1}^{\infty} |a_{n,k_j}| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{p} \alpha_p + \sum_{k=k_p+1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant p\alpha_p + \beta_p,$$

что следует из (8.51) и (8.52).

Так как при $n \to \infty$ также и $p \to \infty$, то $p\alpha_p \to 0$ и $\beta_p \to 0$ при $n \to \infty$, а следовательно, $\sigma_n \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. последовательность $\{s_k\}$ A-суммируема к нулю (см. (**8.6**, VI)).

Будем в дальнейшем обозначать через σ_∞ *множество всех ограниченных последовательностей, через* $\mathfrak{X}$ — *множество всех расходящихся последовательностей из* 0 *и* 1.

Следующий результат принадлежит Хиллу [4]:

(**8.5**, IV) *Пусть E — произвольное сепарабельное* *) *подмножество множества* σ_∞. *Тогда любая T-матрица A содержит строчную подматрицу $B \equiv (a_{m_i,k})$, которая необходимо будет T-матрицей, такую, что $E \subset \sigma_\infty(B)$, где $\sigma_\infty(B)$ обозначает множество всех последовательностей из σ_∞, суммируемых при помощи матрицы B (т. е. B-суммируемых).*

Пусть D — счетное плотное в E подмножество множества E, состоящее из точек $x_n \equiv \{s_k^{(n)}\}$ $(n=1, 2, \ldots)$, и пусть $A \equiv (a_{mk})$ — произвольная T-матрица. Тогда последовательность $t_m^{(1)} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}s_k^{(1)}$ будет ограниченной и, следовательно, содержит сходящуюся подпоследовательность $\{t_{m_i}^{(1)}\}$, где мы можем считать $m_1=1$. Положим $a_{m_i,k} \equiv a_{ik}^{(1)}$ для всех i и k и выберем из ограниченной последова-

*) Читателя, незнакомого с понятием сепарабельности, отсылаем к § 9.3 (непосредственно перед (**9.3**, VI)).

тельности $t_i^{(2)} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(1)} s_k^{(2)}$ сходящуюся подпоследовательность $\{t_{i_j}^{(2)}\}$ такую, что $i_1 = 1$, $i_2 = 2$. Дальше, положим $a_{i_j,k}^{(1)} = a_{jk}^{(2)}$ для всех j и k и применим эту матрицу к $\{s_k^{(3)}\}$ и т. д.

Мы определим таким путем последовательность T-матриц (a_{mk}), $(a_{mk}^{(1)})$, $(a_{mk}^{(2)})$, ..., каждая из которых является строчной подматрицей предыдущей матрицы. Матрица $(a_{mk}^{(m)}) \equiv B$ является T-матрицей и, как следует из ее построения, будет эффективной для каждой x_n из D.

Для того чтобы показать, что B эффективна также в $E - D$, мы сначала отметим, что оператор $y = B(x)$, где $B(x) \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^{(m)} s_k \right\}$ и $x \equiv \{s_k\}$, является линейным и преобразует множество σ_∞ в его подмножество. Тогда если x_0 — какая-нибудь точка из $E - D$, то существует подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$ из D, сходящаяся к x_0, так как D — счетное плотное подмножество множества E. Полагая $y_i \equiv B(x_{n_i})$, мы будем иметь:

$$y_0 = \lim_{i \to \infty} y_i = \lim_{i \to \infty} B(x_{n_i}) = B(x_0).$$

Пусть Γ — *множество всех сходящихся последовательностей*; тогда $\{y_i\}$ принадлежит Γ, а так как Γ — замкнутое подмножество в σ_∞, то и y_0 принадлежит Γ. Это и доказывает теорему.

Матрица $A \equiv (a_{nk})$ называется *реверсивной*, если система уравнений $t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет единственное решение $\{s_k\}$, соответствующее каждой $\{t_n\}$ из Γ; A называется матрицей *типа* M, если из условий

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} u_k a_{nk} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

всегда следует, что $u_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Матрица, которая является одновременно T-матрицей, реверсивной и типа M, называется *совершенной* (см. Банах [1], 90; Хилл [1]).

Совершенные матрицы могут быть эквивалентными сходимости, однако реверсивные T-матрицы, не принадлежащие к типу M, всегда сильнее, чем сходимость. Это видно из следующих двух результатов, принадлежащих Хиллу [4]:

(I) *Если совершенная матрица сильнее, чем сходимость, то она эффективна для некоторой неограниченной последовательности.*

(II) *Любая реверсивная T-матрица, не принадлежащая к типу M, эффективна для некоторой неограниченной последовательности* (см. пример 10 к гл. 7). Доказательство этих результатов читатель найдет в упомянутой работе Хилла.

8.6. Суммирование последовательностей из 0 и 1

В этом параграфе будут приведены результаты, принадлежащие Хиллу [5] (см. также Бак и Поллард [1]), относящиеся к суммированию последовательностей $\mathfrak{X}$, т. е. расходящихся последовательностей из 0 и 1.

Мы будем употреблять следующие обозначения:

$A \equiv (a_{nk})$ — действительная T-матрица;

$\mathfrak{X}_0(A)$ — множество всех $x \in \mathfrak{X}$, не суммируемых методом A, т. е. методом, определенным при помощи матрицы A;

$\mathfrak{X}_1(A)$ — дополнение множества $\mathfrak{X}_0(A)$ до $\mathfrak{X}$, т. е. множество всех $x \in \mathfrak{X}$, суммируемых методом A;

$\mathfrak{X}_2(A)$ — подмножество множества $\mathfrak{X}_1(A)$, состоящее из тех $x \in \mathfrak{X}_1(A)$, которые суммируются методом A к значению $\frac{1}{2}$.

Пусть η обозначает интервал $0 < y < 1$, а η^* — множество точек, остающееся в этом интервале после удаления из него всех точек y вида $\frac{m}{2^n}$ $(m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

Между $\mathfrak{X}$ и η^* может быть установлено взаимно-однозначное соответствие, для чего нужно представить y в виде двоичной дроби $0, \alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots$; каждой точке из η^* вида $0, \alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots$ (где каждое из α или 0, или 1) ставится в соответствие $x \in \mathfrak{X}$ вида $x = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$, и наоборот.

Для $i = 0,\ 1,\ 2$ $\eta_i(A)$ обозначает множество точек y, соответствующих $\mathfrak{X}_i(A)$ по только что указанному правилу.

«*Почти все последовательности из* $\mathfrak{X}$» означает подмножество из $\mathfrak{X}$, для которого соответствующее подмножество из η (а поэтому и из η^*) имеет меру Лебега, равную 1.

Важнейшую роль в доказательстве следующих четырех теорем будут играть *функции Радемахера* (Радемахер [1]), поэтому мы дадим сначала определение и основные свойства этих функций.

(I) Разделим интервал (0, 1) на 2^{n+1} равных интервалов и положим $R_n(y) = 1$, $R_n(y) = -1$ поочередно внутри этих интервалов ($+1$ в первом интервале) и $R_n(y) = 0$ в концах интервалов. Таким образом, для $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$

$$R_n(y) = (-1)^k$$

при

$$\frac{k}{2^{n+1}} < y < \frac{k+1}{2^{n+1}} \qquad \left(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^{n+1} - 1\right),$$

и

$$R_n(y) = 0$$

в противном случае.

(II) Для каждой двоичной дроби $y = 0,\alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots$ из η^* мы имеем:

$$\alpha_n = \frac{1}{2}[1 - R_n(y)] \qquad (n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots).$$

(III) Если $\rho_n(u) = \int\limits_0^u R_n(y)\,dy$, то $0 \leqslant \rho_n(u) \leqslant 2^{-(n+1)}$ для $0 \leqslant u \leqslant 1$ и $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

(IV) $\int\limits_0^1 R_m(y)\,R_n(y)\,dy = \delta_{mn}$, т. е. $\{R_n(y)\}$ является ортонормальной системой на $[0,1]$ (см. Качмаж и Штейнгауз [1], 55—56).

(V) Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2$ сходится (c_n — действительные числа), то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n R_n(y)$ сходится почти всюду в η (см., например, Качмаж и Штейнгауз [1], 148).

(VI) Если $\sigma_n(y) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k R_k(y)$ (a_k действительные), то для каждого $q > 0$ справедливо *неравенство Хинчина*:

$$\int\limits_0^1 |\sigma_n(y)|^{2q}\,dy \leqslant M_q \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)^q,$$

где M_q зависит только от q (см., например, Качмаж и Штейнгауз [1], 153).

(VII) Если $g_n(y)$ — функции, неотрицательные и интегрируемые по Лебегу на интервале $0 \leqslant y \leqslant 1$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, и если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^1 g_n(y)\,dy < \infty,$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(y) < \infty \quad \text{почти всюду в } \eta.$$

(VIII) Каждому $x \equiv \{\alpha_k\} \in \mathfrak{X}$ соответствует $y \in \eta^*$, поэтому, учитывая (II), мы можем записать A-преобразование последовательности x в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\alpha_k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - \frac{1}{2}\tau_n(y),$$

где $\tau_n(y) \equiv \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} R_k(y)$. Следовательно, y принадлежит к $\eta_1(A)$ (к $\eta_2(A)$) тогда и только тогда, когда $\{\tau_n(y)\}$ сходится (сходится к нулю). Сходимость последовательности $\{\tau_n(y)\}$, конечно, эквивалентна A-суммируемости последовательности $\{R_k(y)\}$.

(**8.6**, I) *Для каждой действительной T-матрицы A множества $\eta_1(A)$ и $\eta_2(A)$ имеют одну и ту же меру, и эта общая мера равна* 0 *или* 1.

Если $y = 0, \alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots$ — какая-нибудь точка из $\eta_1(A)$ или $\eta_2(A)$, то точка, полученная из нее изменением значений конечного числа α_k, также принадлежит к $\eta_1(A)$ или $\eta_2(A)$, так как A является T-матрицей. Следовательно, эти множества однородные, и поэтому каждое из них имеет меру 0 или 1 (см. Виссер [1]). Так как $\eta_2(A) \subset \eta_1(A)$, то утверждение теоремы будет следовать немедленно, если мы покажем, что условие $m[\eta_1(A)] = 1$ влечет $m[\eta_2(A)] = 1$, где $m(E)$ обозначает меру Лебега множества E. Чтобы доказать это, мы воспользуемся свойством (VIII) функций Радемахера, приведенным выше, при предположении, что $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n(y) \equiv \lambda(y)$ существует почти всюду в η. Тогда нам нужно только показать, что $\lambda(y) = 0$ почти всюду в η.

Так как $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$ сходится при любом n, то мы, по свойству (III) функций Радемахера, имеем:

$$\int\limits_0^u \tau_n(y)\,dy = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\rho_k(u) \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1). \tag{8.61}$$

Кроме того, по свойству (I) функций Радемахера, последовательность $\{\tau_n(y)\}$ ограничена в совокупности, и поэтому мы можем применить к (8.61) теорему Лебега. Тогда в соответствии со свойством (III) получим $\int\limits_0^u \lambda(y)\,dy = 0$ для $0 \leqslant u \leqslant 1$. Следовательно, $\lambda(y) = 0$ почти всюду в η, и теорема доказана.

(**8.6**, II) *Для каждой действительной T-матрицы A множество $\eta_1(A)$ является множеством первой категории* *) *в* η.

Пусть для каждой пары неотрицательных целых чисел m и p $E_{mp} \equiv E_{mp}(A)$ обозначает подмножество множества η^*, для которого

$$|\tau_n(y) - \tau_{n+q}(y)| \leqslant \frac{1}{m+1} \tag{8.62}$$

для любого $n \geqslant p$ и для любого $q \geqslant 1$.

Если мы запишем

$$G_m = E_{m0} + E_{m1} + \ldots + E_{mp} + \ldots \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{8.63}$$

---

*) О множествах первой и второй категорий см. Банах [1], 13; Гобсон [1], т. I, 134.

то, как это может быть проверено*),

$$\eta_1(A)\eta^* = G_0G_1G_2 \ldots + G_1G_2G_3 \ldots + \ldots \\ \ldots + G_mG_{m+1}G_{m+2} \ldots + \ldots \tag{8.64}$$

Функция $\tau_n(y)$ является непрерывной в каждой точке y множество η^*; следовательно, каждое множество E_{mp} замкнуто в η^*. По теореме Штейнгауза (**4.5**, III), найдется последовательность $x_0 \equiv \{a_k\} \in \mathfrak{X}$, не суммируемая методом A. Точка $y_0 = 0,a_0a_1a_2 \ldots$, соответствующая x_0, очевидно, принадлежит η^*, и из свойства (VIII) функций Радемахера следует, что $\{\tau_n(y_0)\}$ расходится. Следовательно, существуют $\delta > 0$ и две последовательности положительных целых чисел $\{n_i\}$ и $\{q_i\}$, $n_i \to \infty$ при $i \to \infty$, такие, что

$$|\tau_{n_i}(y_0) - \tau_{n_i+q_i}(y_0)| > \delta \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8.65}$$

Положим $m_0 > \frac{2}{\delta}$. Докажем сначала, что G_m является множеством первой категории в η^* для каждого $m \geqslant m_0$. Предположим противное. Тогда найдется некоторое $\mu \geqslant m_0$, для которого G_μ будет множеством второй категории. Из (8.63) при $m = \mu$ вытекает, что в таком случае по крайней мере одно замкнутое множество $E_{\mu p}$, скажем $E_{\mu\pi}$, должно содержать сегмент $a < y < b$ из η^*.

Изменяя (если это необходимо) конечное число (например, первые r) знаков в $y_0 = 0,a_0a_1a_2 \ldots$, мы можем получить новую точку $y_1 = 0,b_0b_1b_2 \ldots b_ra_{r+1}a_{r+2} \ldots$ из η^*, такую, что $a < y_1 < b$.

Так как

$$\{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots\} = \\ = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} - \{a_0, a_1, \ldots, a_r, 0, 0, \ldots\} + \\ + \{b_0, b_1, \ldots, b_r, 0, 0, \ldots\},$$

то мы имеем:

$$\tau_n(y_1) = \tau_n(y_0) + \sum_{k=0}^{r} a_{nk}(b_k - a_k) \equiv \tau_n(y_0) + A(n), \tag{8.66}$$

где $A(n) = o(1)$ при $n \to \infty$, ибо (a_{nk}) — T-матрица, а r фиксировано.

Из (8.62) и того факта, что $y_1 \in E_{\mu\pi}$, мы заключаем, что

$$|\tau_n(y_1) - \tau_{n+q}(y_1)| \leqslant \frac{1}{\mu+1} \tag{8.67}$$

для каждого $n \geqslant \pi$ и $q = 1, 2, \ldots$

---

*) Легко видеть, что $G_{m+1} \subset G_m$ и поэтому $\eta_1(A)\eta^* = G_0G_1G_2 \ldots$ (*Прим. ред.*)

С другой стороны, из (8.66) и (8.65) и соотношения $m_0 \leqslant \mu$ мы имеем:

$$|\tau_{n_i}(y_1) - \tau_{n_i+q_i}(y_1)| \geqslant$$
$$\geqslant |\tau_{n_i}(y_0) - \tau_{n_i+q_i}(y_0)| - |A(n_i)| - |A(n_i+q_i)| >$$
$$> \delta + o(1) > \frac{2}{m_0} + o(1) \geqslant \frac{2}{\mu} + o(1) > \frac{1}{\mu+1}$$

для всех достаточно больших i. Это противоречит неравенству (8.67), и тем самым наше утверждение, что G_m является множеством первой категории в η^*, для $m \geqslant m_0$ доказано.

Так как каждое произведение в правой части (8.64) является подмножеством некоторого $G_m (m \geqslant m_0)$, то отсюда следует, что $\eta_1(A)\eta^*$, как сумма счетного числа множеств первой категории, является множеством первой категории в η^* и, значит, в η.

Теорема теперь следует из того факта, что множество $\eta_1(A) - \eta_1(A)\eta^*$ счетно.

Из (**8.6**, I) и (**8.6**, II) немедленно вытекает следующий результат:

(**8.6**, III) *Для каждой действительной T-матрицы A множество* $\eta_0(A)$:

(I) *имеет меру или* 0 *или* 1;

(II) *является дополнением множества первой категории в* η;

(III) *является множеством второй категории в* η. (См. Гобсон [1], т. I, 135—136, § 94.)

Из предыдущих теорем следует, что не существует последовательности $\{A_m\}$ T-матриц, обладающей тем свойством, что каждая $x \in \mathfrak{X}$ суммируется, по крайней мере, одной из матриц A_m, так как всякое множество вида $\sum_{m=0}^{\infty} \eta_1(A_m)$ снова является множеством первой категории.

Из вероятностной теоремы Бореля (Борель [2], 259—260) теперь вытекает, что *почти все последовательности из $\mathfrak{X}$ суммируемы* $(C, 1)$ *к значению* $\frac{1}{2}$.

Будем говорить, что T-матрица обладает *свойством Бореля*, если она суммирует почти все последовательности из $\mathfrak{X}$ к значению $\frac{1}{2}$. Хилл получил следующий результат:

(**8.6**, IV) *Для того чтобы действительная T-матрица обладала свойством Бореля, необходимо, чтобы*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^2 = o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{8.68}$$

и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^2\right)^q$ *сходился для некоторого* $q > 0$.

Очевидно, что

$$\tau_n^2(y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{ni}a_{nk}R_i(y)R_k(y),$$

где, по свойству (I) функций Радемахера, двойной ряд сходится абсолютно и равномерно в η^*.

Интегрируя этот ряд почленно, что в силу только что сказанного допустимо, и принимая во внимание свойство (IV) функций Радемахера, получаем:

$$\int_0^1 \tau_n^2(y)\,dy=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}^2 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{8.69}$$

Если A обладает свойством Бореля, то ограниченная в совокупности последовательность $\{\tau_n(y)\}$ сходится к 0 почти всюду в η. Применяя к (8.69) теорему Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла, получаем доказательство необходимости условия (8.68).

Предположим теперь, что выполняется достаточное условие для некоторого $q>0$. Для этого q, по свойству (VI) функций Радемахера, имеем:

$$\int_0^1 |\tau_n(y)|^{2q}\,dy\leqslant M_q\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}^2\right)^q,$$

и следовательно, $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1|\tau_n(y)|^{2q}\,dy<\infty$.

Пользуясь теперь свойством (VII), получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\tau_n(y)|^{2q}<\infty \quad \text{почти всюду в } \eta$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n(y)=0 \quad \text{почти всюду в } \eta.$$

Теорема доказана.

Хилл замечает, что ему кажется маловероятным, что условие (8.68) является достаточным, хотя этот вопрос остается нерешенным *). Конечно, при выполнении условия (8.68) легко показать, что существует строчная подматрица $(a_{n_i,\,k})$ матрицы (a_{nk}) не слабее, чем матрица A, обладающая свойством Бореля. Действительно, из (8.68)

---

*) Недавно Гарро [G. A. Garreau] доказал, что условие (8.68) не является достаточным.

и (8.69) мы получаем:

$$\int_0^1 \tau_n^2(y)\,dy = o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и следовательно, существует подпоследовательность $\{\tau_{n_i}(y)\}$, сходящаяся к 0 почти всюду в η (см., например, Гобсон [1], т. II, 245).

(**8.6**, V) *Матрица Бореля обладает свойством Бореля* *).

Мы имеем:

$$S \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^2\right)^q = \sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{-2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{2k}}{(k!)^2}\right]^q = \sum_{n=0}^{\infty}[e^{-2n}I_0(2n)]^q,$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка (Уотсон [1], 77). Но $I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}$ (Уотсон [1], 203).

Следовательно,

$$S = O\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\right)^q\right],$$

где ряд сходится при любом $q > 2$.

(**8.6**, VI) *Средние Чезаро любого порядка $r > 0$ обладают свойством Бореля* (Агнью и Хилл [1]).

Этот результат вытекает из следующих известных фактов:

(а) Почти все последовательности из $\mathfrak{X}$ суммируемы $(C, 1)$ к значению $\frac{1}{2}$.

(б) Если ограниченная последовательность суммируется методом $(C, 1)$, то она суммируется и методом (C, r) для любого $r > 0$ (Когбетлянц [1], 24).

(в) Методы (C, r) совместны (Когбетлянц [1], 17).

Если x, y — две ограниченные последовательности (т. е. $x \in \sigma_\infty$ и $y \in \sigma_\infty$), то расстояние между ними определяется как

$$\max_{k=1,2,\ldots} |x_k - y_k|$$

(см. § 10.8).

Обозначим через $\sigma_\infty(A)$, где A есть T-матрица, множество последовательностей из σ_∞, суммируемых методом A. Хилл [4] ставит вопрос: будет ли $\sigma_\infty(A)$ обязательно *сепарабельным подмножеством множества* σ_∞, и высказывает предположение, что это не так. Справедливость его предположения следует сразу из (**8.6**, I).

Действительно, если A — какая-либо T-матрица, эффективная, по крайней мере, для того же множества последовательностей, что

*) Это было установлено Хиллом другим методом.

и (C, r) при некотором $r > 0$, то из (**8.6**, VI) следует, что $\sigma_\infty(A)$ содержит несчетное множество последовательностей из $\mathfrak{X}$, каждая из которых находится на расстоянии 1 от всех других. Следовательно, $\sigma_\infty(A)$ *не может быть сепарабельным.*

8.7. «Правильное» значение обобщенного предела ограниченной расходящейся последовательности

При рассмотрении теорем (**4.4**, IV) и (**4.4**, VI) возникает следующий вопрос: что́ понимать под «правильным» значением обобщенного предела, получающегося в результате суммирования T-матрицей данной расходящейся последовательности?

Этот вопрос был уже рассмотрен в § 5.6; в настоящем параграфе будет показано, что определение «правильного» значения, данное в § 5.6, является особенно полезным в случае ограниченных последовательностей и оно имеет связь со свойством Бореля (Кук и Барнетт [1]).

Следующий простой результат дает возможность установить взаимно-однозначное соответствие между каждой ограниченной расходящейся последовательностью и частичными суммами ряда Тэйлора в отдельной точке на границе его круга сходимости (радиуса 1). С некоторыми оговорками это соответствие может быть распространено и на неограниченные последовательности *).

(**8.7**, I) *Множество всех ограниченных расходящихся последовательностей совпадает с множеством всех ограниченных расходящихся последовательностей частичных сумм рядов Тэйлора с радиусом сходимости* 1 *в отдельной точке на границе его круга сходимости* **).

Пусть $\{z_n\}$ — ограниченная расходящаяся последовательность, $|z_n| < M$. Положим $c_n = z_n - z_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$, $c_0 = z_0$, так что $|c_n| < 2M$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда частичными суммами ряда Тэйлора $\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ будут $s_n(z) = \sum\limits_{m=0}^{n} c_m z^m$, которые при $z = 1$ обращаются в $c_0 + c_1 + \ldots + c_n = z_n$.

Так как частичные суммы при $z = 1$ ограничены, то $z = 1$ не может лежать вне круга сходимости, но в то же время ряд расходится при $z = 1$, и следовательно, радиус сходимости его должен равняться 1 и $z_n = s_n(1)$.

Будем ссылаться на $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, где $c_n = z_n - z_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$, $c_0 = z_0$, как на *ряд Тэйлора, ассоциированный* с ограниченной расходящейся последовательностью $\{z_n\}$.

---

*) Радиус сходимости здесь может оказаться равным нулю.

**) Приведенное здесь доказательство принадлежит Динсу.

Тогда «правильным» значением обобщенного предела последовательности $\{z_n\}$ *(если он существует) мы будем называть величину* $\lim\limits_{z\to 1-0} f(z)$ *) *в том случае, когда этот предел существует; если этот предел не существует, «правильного» значения нет.*

«Правильное» значение равно обобщенному пределу при суммировании методом Абеля (§ 4.3 (VIII)).

При определенных условиях $\lim\limits_{z\to 1-0} f(z)$ может быть просто заменен значением $f(1)$, например, если $z=1$ является регулярной точкой функции $f(z)$.

Всюду в этом параграфе $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *будет обозначать ряд Тэйлора, ассоциированный с данной последовательностью* $\{z_n\}$ *из* $\mathfrak{X}$ (§ 8.5, 8.6), *а под «правильным» значением будет подразумеваться значение* $\lim\limits_{z\to 1-0} f(z)$.

В свете приведенных выше определений докажем следующий результат:

(**8.7**, II) *Почти все последовательности из* $\mathfrak{X}$ *суммируются любой действительной T-матрицей, обладающей свойством Бореля, к «правильному» значению* **):

$$\frac{1}{2}=\lim_{z\to 1-0} f(z).$$

Для доказательства напомним сначала известную теорему Фробениуса и Гёльдера (см., например, Динс [1] 437—438): *если ряд Тэйлора суммируем* (C, r), $r>0$, *в точке* z' *на границе круга сходимости, то его* (C, r)*-сумма является «правильным» значением, т.е. равна пределу функции* $f(z)$, *представленной рядом Тэйлора, когда точка* z *стремится к* z' *вдоль радиуса изнутри круга сходимости.*

Возьмем точку $z=1$ и ряд Тэйлора, ассоциированный с последовательностью $\{z_k\}$ из $\mathfrak{X}$. Так как (C, r)-средние обладают свойством Бореля, то отсюда следует, что

$$\lim_{z\to 1-0} f(z)=\frac{1}{2}$$

для почти всех последовательностей из $\mathfrak{X}$. С другой стороны, T-предел (получающийся при применении данной T-матрицы) равен $\frac{1}{2}$ для

---

*) Символ $z\to 1-0$, как обычно, обозначает, что z стремится к 1 вдоль действительной оси со стороны меньших значений.

**) Конечно, $f(z)$ изменяется от последовательности к последовательности из $\mathfrak{X}$. Таким образом, мы имеем континуум различных функций $f(z)$, каждая из которых стремится к пределу $\frac{1}{2}$ при $z\to 1-0$.

почти всех $\{z_k\}$ из $\mathfrak{X}$ и, следовательно, T-предел равен значению $\lim\limits_{z \to 1-0} f(z)$ для почти всех $\{z_k\}$ из $\mathfrak{X}$, что и доказывает результат.

Упомянутая выше теорема Фробениуса и Гёльдера показывает, что всякая последовательность из $\mathfrak{X}$, суммируемая (C, r), $r > 0$, суммируется этим методом к «правильному» значению. Аналогичное замечание относится и к средним Рисса ($r > 0$) и вытекает из абсолютной эквивалентности средних Чезаро и Рисса одного и того же порядка $r > 0$ для всех ограниченных последовательностей (см. (**5.4**, III) и (**5.5**, III)).

То же самое верно и для матрицы Бореля. Действительно, известно, что *если ряд Тэйлора суммируем посредством матрицы Бореля* *) *в точке на границе круга сходимости, то его обобщенная сумма, получающаяся в результате применения этого метода, является «правильным» значением* (см. Харди [3], 44—45 и Фрагмéн [1]).

В частности, это относится и к ряду Тэйлора, ассоциированному с последовательностью из $\mathfrak{X}$ при $z = 1$. Далее, «полунепрерывные» и «дискретные» матрицы Бореля абсолютно эквивалентны для всех ограниченных последовательностей (см. (**5.5**, IV)), а в силу (**8.6**, V) дискретная матрица Бореля обладает свойством Бореля. Отсюда и следует утверждение относительно матрицы Бореля.

Следующая теорема дает общий теоретический метод для получения T-матриц A, эффективных, по крайней мере, для тех же последовательностей, что и матрица B. Таким образом, если B обладает свойством Бореля, то то же самое имеет место и для A.

(**8.7**, III) *Пусть A и B суть T-матрицы такие, что*:

(I) *B имеет единственную л. с. обратную* ${}^{-1}B$;

(II) $A \cdot {}^{-1}B$ *является T-матрицей*;

(III) $A \cdot {}^{-1}BB$ *ассоциативно.*

Тогда если $B(z_n) \to \sigma$, то также $A(z_n) \to \sigma$ при условии, что или (а) *последовательность $\{z_n\}$ ограниченная, или* (б) $A \cdot {}^{-1}B$*—матрица с конечными строками.*

Пусть $C = A \cdot {}^{-1}B$. Тогда $A = CB$, так как $A \cdot {}^{-1}BB$ ассоциативно. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} c_{ni} b_{ik}\Big) z_k = \sum_{i=1}^{\infty} c_{ni} \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} z_k \equiv \sum_{i=1}^{\infty} c_{ni} \sigma_i \to \sigma,$$

так как $C = A \cdot {}^{-1}B$ есть T-матрица, а $\sigma_n \equiv B(z_n) \to \sigma$. Что касается изменения порядка суммирования, то оно допустимо в силу любого из условий (а) или (б) **).

---

*) То есть суммируем посредством «полунепрерывной» матрицы Бореля $\dfrac{e^{-\omega}\,\omega^k}{k!}$.

**) Если B с конечными строками, а C имеет бесконечные строки, то порядок суммирования в двойном ряде в общем случае нельзя изменять без наложения дополнительных ограничений на B.

Если мы в качестве B возьмем матрицу (C, r), $r>0$, то условие (I) теоремы (**8.7**, III) удовлетворяется при

$$^{-1}b_{nn}=\frac{1}{b_{nn}},\ ^{-1}b_{n,n-k}=\frac{A_k^{-r-1}}{b_{n-k,n-k}}\qquad (1\leqslant k<n). \tag{8.71}$$

Таким образом,

$$c_{nk}=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}\,{}^{-1}b_{ik}=\frac{1}{b_{kk}}\sum_{i=k}^{\infty}a_{ni}A_{i-k}^{-r-1},$$

т. е.

$$c_{nk}=\frac{(r+1)(r+2)\dots(r+k)}{k!}\sum_{i=k}^{\infty}a_{ni}A_{i-k}^{-r-1}, \tag{8.72}$$

где

$$A_m^s=\frac{(s+1)(s+2)\dots(s+m)}{m!}\qquad (m\geqslant 1),$$

$$A_0^s=1$$

(§ 4.3 (II)).

Полагая $r=1$, мы имеем:

$$A_0^{-2}=1,\quad A_1^{-2}=-1,\quad A_m^{-2}=0\quad \text{для } m\geqslant 2.$$

Следовательно, в этом случае (8.72) обращается в

$$c_{nk}=(k+1)(a_{nk}-a_{n,k+1}),$$

и условие (II) теоремы (**8.7**, III) удовлетворяется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\,|a_{nk}-a_{n,k+1}|\leqslant M \tag{8.73}$$

для любого $n\geqslant n_0$ *).

В самом деле, так как $\lim\limits_{k\to\infty}a_{nk}=0$, то (8.73) влечет $\lim\limits_{k\to\infty}ka_{nk}=0$, а тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\to 1\quad \text{при } n\to\infty \text{ **)}$$

(ср. Бозанкет [1], доказательство леммы 7).

Условие (III) теоремы (**8.7**, III) в нашем случае удовлетворяется для любой T-матрицы A; действительно,

$$((A\cdot{}^{-1}B)B)_{ni}=\sum_{k=i}^{\infty}(a_{nk}-a_{n,k+1})=a_{ni}=(A({}^{-1}BB))_{ni},$$

так как $a_{nk}\to 0$ при $k\to\infty$.

---

*) Ср. с примером 5 к гл. 4.

**) В правой части выведенного равенства пропущено еще одно слагаемое a_{n1}. (*Прим. ред.*)

Взяв $r=2$, мы имеем $A_0^{-3}=1$, $A_1^{-3}=-2$, $A_2^{-3}=1$, $A_m^{-3}=0$ для $m\geqslant 3$.

В этом случае (8.72) обращается в

$$c_{nk}=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)(a_{nk}-2a_{n,\,k+1}+a_{n,\,k+2}),$$

и условие (II) удовлетворяется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_{nk}-2a_{n,\,k+1}+a_{n,\,k+2}|\leqslant M \tag{8.74}$$

для любого $n\geqslant n_0$ *).

В самом деле, так как $\lim\limits_{k\to\infty}a_{nk}=0$, то условие (8.74) влечет

$$\lim_{k\to\infty}ka_{nk}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty}k^2(a_{nk}-a_{n,\,k+1})=0$$

(см. Бозанкет [1]).

Условие (III) также удовлетворяется для любой T-матрицы A, для которой $ka_{nk}\to 0$ при $k\to\infty$, что в нашем случае имеет место. Действительно, так как $b_{nk}=\dfrac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)}$ для $k\leqslant n$ при $r=2$, то, принимая во внимание, что $ka_{nk}\to 0$ при $k\to\infty$, получаем:

$$\begin{aligned}((A\cdot{}^{-1}B)B)_{ni}&=\sum_{k=1}^{\infty}(k-i+1)(a_{nk}-2a_{n,\,k+1}+a_{n,\,k+2})=\\&=a_{ni}=(A({}^{-1}BB))_{ni}.\end{aligned}$$

Таким образом, любая T-матрица A, удовлетворяющая условиям (8.73) и (8.74), обладает свойством Бореля и также суммирует почти все последовательности из $\mathfrak{X}$ к «правильному» значению.

Для произвольного r мы потребуем, чтобы (8.72) была T-матрицей и чтобы матрица A удовлетворяла условию (III), когда B является $(C,\ r)$-матрицей.

Пусть A удовлетворяет этим условиям, когда B является $(C,\ r)$-матрицей при каком-либо частном значении $r>0$, и пусть $z=1$ является регулярной точкой или точкой отрицательного порядка **) *функции $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, представленной рядом Тэйлора, который ассоциирован с последовательностью $\{z_k\}$ из $\mathfrak{X}$. Тогда $\{z_k\}$ суммируется матрицей A к «правильному» значению $\lim\limits_{z\to 1-0}f(z)$ или к $f(1)$, если $z=1$ является регулярной точкой.*

---

*) См. пример 6 к гл. 4.

**) См. Динс [1], 487—491.

Действительно, так как c_n может принимать значение только 0, 1 и -1, то $\frac{c_n}{n^r} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, применяя теорему М. Рисса (см. Динс [1], 469) в случае, когда $z = 1$ является регулярной точкой, и теорему Динса (см. Динс [1], 504) в случае, когда $z = 1$ является точкой отрицательного порядка функции $f(z)$, получаем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ суммируем (C, r), $r > 0$, при $z = 1$ к значению $\lim_{z \to 1} f(z)$.

Результат теперь следует из сказанного выше.

Когда r — целое положительное число, то (8.72) имеет вид

$$c_{nk} = \frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+k)}{k!} \Delta^r a_{nk},$$

где $\Delta a_{nk} = a_{nk} - a_{n,k+1}$. Дополнительным условием, чтобы (8.72) была T-матрицей, является неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \,|\Delta^r a_{nk}| \leqslant M$$

для любого $n \geqslant n_0$, которое вместе с $a_{nk} \to 0$ при $k \to \infty$ влечет *)

$$\Delta^\sigma a_{nk} = o\left(k^{-\sigma-1}\right), \quad \sigma = 0, 1, \ldots, (r-1).$$

T-матрица Абеля. Если G является γ-матрицей Абеля $\left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^k$ (§ 4.3 (VIII)), то, по следствию теоремы (**4.6**, VI),

$$a_k(\omega) \equiv \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^k - \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^{k+1} = \frac{\omega^k}{(\omega+1)^{k+1}}$$

является T-матрицей, так как

$$g(\omega) \equiv \lim_{k \to \infty} g_k(\omega) = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^k = 0$$

и, значит,

$$\lim_{\omega \to \infty} g(\omega) = 0.$$

Следовательно, если $\{z_k\}$ — ограниченная последовательность, то A-предел последовательности $\{z_k\}$ равен G-сумме $\{z_k\}$ (когда она существует), т. е. $\lim_{z \to 1-0} f(z)$.

Если ω заменить на n, то мы получим действительную T-матрицу $a_{nk} = \frac{n^k}{(n+1)^{k+1}}$, обладающую свойством Бореля, так как она удовлетворяет достаточным условиям теоремы (**8.6**, IV) для любого $q > 1$.

*) Это замечание принадлежит Бозанкет; см. Бозанкет [1].

Приведем дальнейшие примеры T-матриц, суммирующих последовательности из $\mathfrak{X}$ к «правильному» значению.

В (**8.5**, III) *A-сумма, равная* 0, *является «правильным» значением.*

В самом деле, в доказательстве (**8.5**, III) мы можем выбрать $\{k_p\}$ так быстро стремящуюся к ∞, что

$$s_1+s_2+\ldots+s_n=o(n), \text{ где } s_{k_p}=1, \quad s_k=0 \quad (k\neq k_p).$$

В этом случае $\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}=o(1)$, и следовательно, по теореме Фробениуса и Гёльдера, $\lim\limits_{z\to 1} f(z)=0$, т. е. A-сумма, равная 0, является «правильным» значением.

Мы также отметим, что для любой данной последовательности $\{z_k\}$ из $\mathfrak{X}$, которая не суммируется T-матрицей A, согласно (**4.5**, I) и (**4.5**, III), всегда можно найти другую T-матрицу, которая будет суммировать $\{z_k\}$, и, в частности, к «правильному» значению, если оно существует. Так, в (**4.5**, I) мы можем взять в качестве $\{\sigma_n\}$ сходящуюся последовательность, а $\{s_n\}$ взять из $\mathfrak{X}$, причем мы можем выбрать $\{\sigma_n\}$ такой, чтобы ее предел при $n\to\infty$ равнялся «правильному» значению $\lim\limits_{z\to 1-0} f(z)$, если этот предел существует. В (**4.5**, III) σ может быть также равной «правильному» значению, когда оно существует.

В заключение сделаем несколько замечаний, которые могут дать более отчетливое представление о содержании этого параграфа.

(I) Последовательность из $\mathfrak{X}$ может быть суммируемой к $\lim\limits_{z\to 1-0} f(z)$ при помощи T-матрицы A, но этот предел может не быть равным $\frac{1}{2}$, как это видно из приведенного выше замечания к (**8.5**, III). Другим примером является $(C, 1)$-сумма последовательности $\{0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots\}$, которая равна $\frac{1}{3}$; ассоциированный с этой последовательностью ряд Тэйлора

$$f(z)=z^2-z^3+z^5-z^6+z^8-z^9+\ldots=\frac{z^2}{1+z+z^2}$$

сходится для $|z|<1$ и $\lim\limits_{z\to 1} f(z)=\frac{1}{3}$, так что $\frac{1}{3}$ в этом случае является «правильным» значением.

(II) Из (**4.4**, IV) или (**4.4**, VI) следует, что можно построить T-матрицу, которая суммирует последовательность из $\mathfrak{X}$ к значению, отличному от предела Абеля. Таким образом, когда этот предел существует, последовательность может быть просуммирована такой T-матрицей к значению, отличному от «правильного». Отметим, что доказательство (**4.4**, IV) и (**4.4**, VI) не требует существования предела Абеля для рассматриваемых последовательностей, так что последовательность из $\mathfrak{X}$ может быть просуммирована T-матрицей и в том случае, когда предел Абеля не существует (см. ниже (V)).

(III) С другой стороны, T-матрица может быть неэффективной для последовательности из $\mathfrak{X}$, хотя предел Абеля может существовать; примерами таких матриц могут служить единичная матрица, матрицы в (**7.1**, I) и (**7.1**, II), матрица Раффа в примере 10 к гл. 7, а также матрицы в примерах 16—18 к гл. 7.

(IV) T-матрица Абеля разграничивает случаи (II) и (III), так как она эффективна для любой последовательности, для которой существует $\lim\limits_{z \to 1-0} f(z)$, и неэффективна для всякой последовательности, для которой этот предел не существует.

(V) Согласно (**4.4**, III), найдется хотя бы одна последовательность из $\mathfrak{X}$, которая не суммируется T-матрицей Абеля, т. е. найдется хотя бы одна последовательность из $\mathfrak{X}$, для которой $\lim\limits_{z \to 1-0} f(z)$ не существует. С другой стороны, этот предел существует для почти всех последовательностей из $\mathfrak{X}$, так как T-матрица Абеля обладает свойством Бореля.

(VI) (**8.7**, II) представляет собой широкое обобщение теоремы Абеля о степенных рядах (см. Сильверман и Тамаркин [1]).

(VII) Из (**8.6**, I) следует, что *любая действительная T-матрица или суммирует почти все, или же не суммирует почти все последовательности из* $\mathfrak{X}$. Мы видели много примеров таких матриц, суммирующих почти все из этих последовательностей, а в (III) указаны примеры действительных T-матриц, которые не сумммируют ни одну из последовательностей.

В качестве примера действительной T-матрицы, которая не суммирует почти все последовательности и в то же время суммирует некоторые последовательности из $\mathfrak{X}$, можно указать матрицу (a_{nk}), где

$$a_{nn} = a_{n,\,n+1} = \frac{1}{2}, \quad a_{nk} = 0 \qquad (k \neq n, \; k \neq n-1);$$

она суммирует последовательность 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... к значению $\frac{1}{2}$.

Замена отдельных 1 на 0 (или наоборот) в этой последовательности не изменит результата, так что эта матрица суммирует, по крайней мере, счетное множество последовательностей из $\mathfrak{X}$ к значению $\frac{1}{2}$.

Но $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^2 = \frac{1}{2}$, так что (8.68) не удовлетворяется, и поэтому эта матрица не обладает свойством Бореля.

Таким образом, (a_{nk}) дает пример матрицы требуемого типа.

Примеры к главе 8

1. Показать, что условия (8.32) и (8.33) выполняются для

$$g(z)=\frac{1}{[\Gamma(1+z)]^{\mu}},$$

где $0<\mu<2$ и, следовательно, $E(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k!)^{\mu}}$ — целая функция порядка $\frac{1}{\mu}$ поэтому соответствующая матрица типа (8.11) эффективна в частной звездной области, производящей для которой служит угол применения $2\pi-\mu\pi$. Матрица Бореля является частным случаем при $\mu=1$.

2 *). Пусть λ, μ, θ — действительные числа, такие, что

$$\lambda\theta>1,\quad 0<\mu\theta<1-\varepsilon\qquad(\varepsilon>0),\quad \mu>1,$$

и пусть

$$p_1=\lambda\theta e^{\frac{1}{\lambda\theta}-1},\quad p_2=\mu\theta e^{\frac{1-\varepsilon}{\mu\theta}-1},\quad p_3=\mu e^{\frac{1}{\mu}-1}.$$

Рассматривая частные случаи теоремы (8.4, I) при:

(I) $\alpha=0,\quad \beta=\lambda\theta,\quad x=\frac{n}{\lambda}$;

(II) $\alpha=\mu\theta,\quad \beta=\mu,\quad x=\frac{n}{\mu}$,

доказать, что нижняя треугольная T-матрица

$$a_{nk}=\frac{1}{2}\,\frac{e^{-\frac{n}{\lambda}}\left(\frac{n}{\lambda}\right)^k}{k!}\qquad(0\leqslant k\leqslant\theta n),$$

$$a_{nk}=\frac{1}{2}\,\frac{e^{-\frac{n}{\mu}}\left(\frac{n}{\mu}\right)^k}{k!}\qquad(\theta n<k\leqslant n),$$

$$a_{nk}=0\quad(k>n)$$

эффективна для ряда $\sum z^n$ всюду в области E, которая представляет собой общую часть полуплоскости $\operatorname{Re}(z)<1$ и наименьшего из кругов

$$|z|\leqslant p_1,\quad |z|\leqslant p_2,\quad |z|\leqslant p_3.$$

(Матрица a_{nk} имеет два максимума при $k=\left[\frac{n}{\lambda}\right]$ и $k=\left[\frac{n}{\mu}\right]$; ясно, что область E выходит за пределы круга $|z|\leqslant 1$.)

3 **). Если функция $f(z)$, определенная рядом $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ (с конечным радиусом сходимости), и ее аналитические продолжения являются однозначными внутри ее главной звездной области S, то доказать, применяя матрицу Линделёфа (§ 8.1 и 8.2), что для любой точки z из S функция $f(z)$ принадлежит ядру последовательности частичных сумм ряда $\sum c_n z^n$.

*) См. Кук [8].

**) Теорема в примере 3 дана Робинсоном, который доказал ее, используя принципы аналитического продолжения и идя по пути, намеченному в примерах 4 и 5. Примеры 4 — 6 также принадлежат ему.

4. Пусть ряд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, частичные суммы которого $s_n(z)$, имеет радиус сходимости $r>1$ и пусть $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_1)^n$ — ряд Тэйлора функции $f(z)$ по степеням $(z-z_1)$, где $0<z_1<1$, а $s'_n(z)$ — его частичные суммы. Если z^* действительное и $z^*>1$, то показать, что существует верхняя треугольная T-матрица с неотрицательными элементами для любых n и k, которая преобразует $s_k(z^*)$ в $s'_n(z^*)$.

5. Обобщить пример 4 при помощи следующего преобразования переменных:

Пусть ζ_0, ζ_1, ζ^* — действительные числа, такие, что $0\leqslant\zeta_0<\zeta_1<\zeta^*$, и пусть $\varphi(\zeta)=\sum\alpha_n(\zeta-\zeta_0)^n$ имеет радиус сходимости $\rho>\zeta_1-\zeta_0$. Пусть, кроме того, $\sum\beta_n(\zeta-\zeta_1)^n$ — ряд Тэйлора функции $\varphi(\zeta)$ по степеням $(\zeta-\zeta_1)$,

$$\sigma_k=\sum_{n=0}^{k}\alpha_n(\zeta^*-\zeta_0)^n,\qquad \sigma'_m=\sum_{n=0}^{m}\beta_n(\zeta^*-\zeta_1)^n.$$

Доказать, что ядро последовательности $\{\sigma'_m\}$ содержится в ядре последовательности $\{\sigma_k\}$, и путем повторного применения этого результата доказать теорему в примере 3.

6. Из теоремы в примере 3 вывести теорему Виванти (см., например, Динс [1], 226), что если ряд $f(z)=\sum c_n z^n$ имеет радиус сходимости 1 и $c_n\geqslant 0$ для любого $n>N$, то $z=1$ является особой точкой для $f(z)$.

7*). Если $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ и c_k при $k\to\infty$ стремится к конечному, отличному от нуля пределу (действительному или комплексному), то, применяя (**8.3**, III), (**8.3**, IV) и пример 11 к гл. 7, показать, что $z=1$ является особой точкой для $f(z)$. [Это является частным случаем обобщения теоремы Виванти; см. Динс [1], 227, (II).]

8. Если $a_{nk}=0$ для $k>\lambda_n$, $a_{n,\lambda_n}\neq 0$, где λ_n — целые числа, такие, что $1\leqslant\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots$, то $A\equiv(a_{nk})$ называется матрицей с *возрастающими конечными строками*; аналогично если $a_{nk}=0$ для $n>\mu_k$, $a_{\mu_k,k}\neq 0$, где

$$1\leqslant\mu_1<\mu_2<\mu_3<\ \ldots,$$

то A называется матрицей с *возрастающими конечными столбцами.*

Показать, что матрица с возрастающими конечными строками (конечными столбцами) имеет единственную п. с. (л. с.) обратную, если $\lambda_n=n$ $(\mu_k=k)$, и бесконечное множество п. с. (л. с.) обратных в противном случае.

9. Матрица, все строки (столбцы) которой содержат бесконечное множество отличных от нуля элементов, называется матрицей с *бесконечными строками* (*столбцами*).

Если T-матрица T с бесконечными строками (столбцами) применима к последовательности $\{c_k z^k\}$ в области D, то показать, что можно построить T-матрицу U с возрастающими конечными строками (конечными столбцами), такую, что U абсолютно эквивалентна (§ 5.1 и 5.4) матрице T для класса последовательностей, содержащего частную последовательность $\{c_k z_0^k\}$ из D. Если T — одновременно с бесконечными строками и бесконечными столбцами,

---

*) Примеры 7—9 принадлежат Вермсу.

то такая матрица U может быть построена одновременно с возрастающими конечными строками и возрастающими конечными столбцами; она имеет как п. с., так и л. с. обратную. Например, это можно сделать, если T является одной из матриц типа (8.11).

10 *). Показать, что любая матрица Вороного N_p (§ 4.3 (IX)) допускает обобщение теоремы Абеля, т. е. всякий раз, когда

$$t_n = \frac{1}{P_n}(p_0 s_n + p_1 s_{n-1} + \ldots + p_n s_0),$$

где $s_n = c_0 + c_1 + \ldots + c_n$, стремится к пределу s, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ имеет отличный от нуля радиус сходимости и определяет ветвь аналитической функции $f(z)$, такой, что $f(z) \to s$ при $z \to 1-0$. Отсюда получить, что все матрицы Вороного совместны.

11. Если

$$|a_{n, p_n}| = \max_{k=1, 2, \ldots} |a_{nk}|,$$

то показать, что необходимое условие (8.68) Хилла, чтобы A обладала свойством Бореля, эквивалентно условию $a_{n, p_n} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. если

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^2 \to 0$$

при $n \to \infty$, то $a_{n, p_n} \to 0$, *и наоборот* **). Ср. (**8.5**, III).

12. Введя в рассмотрение матрицу (a_{nk}):

$$a_{nk} = \frac{1}{\theta_n} \qquad (1 \leqslant k \leqslant \theta_n),$$

$$a_{nk} = 0 \qquad (k > \theta_n),$$

где $\{\theta_n\}$ — неубывающая последовательность целых положительных чисел (с повторениями), стремящаяся к ∞ произвольно медленно, показать, что достаточное условие Хилла, чтобы A обладала свойством Бореля, данное в (**8.6**, IV), не является необходимым. [Матрица $(C, 1)$ обладает свойством Бореля, следовательно, то же самое имеет место и для указанной матрицы A.]

13. Если через $L_\beta(z)$, $\beta > 1$ обозначена целая функция Линделёфа, то показать, что функция

$$f(z) = \cos\left(\frac{1}{1-z}\right) e^{-L_\beta\left(\frac{1}{1-z}\right)}$$

стремится к 0, когда $z \to 1$ от наименьших значений вдоль действительной оси, но не стремится к пределу, когда $z \to 1$ внутри круга $|z| \leqslant 1$ вдоль любой другой прямой линии, проходящей через $z = 1$.

---

*) Сильверман и Тамаркин [1].

) Как и в (8.6**, IV), A предполагается T-матрицей.

ГЛАВА 9

ГИЛЬБЕРТОВО ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО И МАТРИЦЫ ГИЛЬБЕРТА

9.1. Определения

Настоящую главу следует рассматривать только как введение в широкую область векторных пространств; наше внимание будет сосредоточено исключительно на гильбертовом векторном пространстве.

Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ действительных или комплексных чисел называется *H-вектором* или *точкой гильбертова* (*векторного*) *пространства*, если ряд $\sum |x_n|^2$ сходится; числа $x_1, x_2, \ldots$ называются *компонентами* (или *координатами*) вектора x. Мы будем обозначать $x \equiv \{x_1, x_2, \ldots\}$, когда H-вектор употребляется как вектор-столбец, и $x \equiv [x_1, x_2, \ldots]$, когда он употребляется как вектор-строка.

Длина вектора x (или *расстояние x от начала*) определяется величиной

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$$

и называется *нормой* вектора x.

Если, как обычно, $x^* = \bar{x}'$, то $\|x\|^2 = xx^*$ или x^*x, смотря по тому, является ли x вектор-строкой или вектор-столбцом *).

При рассмотрении матриц Гильберта в качестве переменных будут употребляться H-векторы, поэтому необходимо сначала описать основные свойства этих векторов. Рассматриваемые в этой главе векторы в большинстве случаев являются H-векторами, поэтому мы будем их называть просто «векторами».

Совокупность H-векторов образует *гильбертово векторное пространство, которое будет обозначаться через* σ_2. В частности, *единичные векторы*, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 1$, являются такими,

*) См. сноску на стр. 257.

что *точки*, представляющие их «концы», образуют поверхность *единичной гиперсферы* E с центром в начале координат.

Сумма двух векторов

$$x = \{x_1, \ x_2, \ \ldots\} \quad \text{и} \quad y = \{y_1, \ \ y_2, \ \ldots\}$$

и *произведение вектора* x *на скаляр* c определяются соотношениями:

$$x + y = \{x_1 + y_1, \ \ x_2 + y_2, \ \ldots\},$$
$$cx = xc = \{cx_1, \ cx_2, \ \ldots\};$$

аналогичное определение имеет место и для случая, когда x и y — вектор-строки.

Скалярное произведение двух векторов x, y определяется как

$$(x, \ y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

Матричным обозначением этого произведения является выражение xy^*, когда x и y — вектор-строки; ряд справа абсолютно сходится в силу неравенства Коши — Шварца

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \bar{y}_n|\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2.$$

Из этого неравенства также следует:

$$|xy^*| \leqslant \|x\| \ \|y\|. \tag{9.11}$$

Мы видим, что $(x, \ y) \neq (y, \ x)$, если $x \neq y$ и x и y не действительны *).

Приведенное выше определение скалярного произведения употребляется большинством авторов, например Нейманом [1], Стоуном [1]. Некоторые авторы (например, Жулиа [2], ч. II) определяют скалярное произведение как **)

$$(x, \ y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n y_n.$$

Очевидно, если x — вектор, то и cx — вектор для любого скаляра c.

Сумма двух векторов также вектор. Действительно, если $z = x + y$, где x, y — векторы, то из неравенства Минковского

---

*) Утверждение не точное, так как если $x = \left[i, \frac{i}{2}, \frac{i}{3}, \ldots, \frac{i}{n}, \ldots\right]$ и $y = \left[-i, -\frac{i}{2}, -\frac{i}{3}, \ldots, -\frac{i}{n}, \ldots\right]$, то $x \neq y$, но тем не менее $(x, y) = (y, x)$. (*Прим. ред.*)

**) Мы будем пользоваться первым из этих обозначений, хотя между ними нет существенного различия; одно выражение является комплексно сопряженным другому.

(см., например, Харди, Литтльвуд и Пойа [1], 30) следует, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

В случае $r=2$ мы имеем:

$$\|z\| \equiv \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \tag{9.12}$$

Это неравенство носит название *аксиомы треугольника*. Из (9.12) следует, что сумма двух векторов является вектором. Для любых векторов x, y и z, очевидно, имеет место дистрибутивный закон *), т. е.

$$x(y+z)' = xy' + xz'.$$

9.2. Сильная и слабая сходимость

Расстояние между двумя точками x и y из c_2 определяется так:

$$\|x-y\| = \sqrt{\sum_{p=1}^{\infty}|x_p-y_p|^2}.$$

Рассмотрим вектор x, p-я компонента (или координата) которого x_p, и множество векторов $x^{(n)}$, p-я координата каждого из которых равна $x_p+\frac{1}{p-n}$ при $p\neq n$ и равна x_n при $p=n$. Тогда мы имеем:

$$\|x-x^{(n)}\|^2 = \sum_{p=1}^{\infty}{}' \frac{1}{(p-n)^2},$$

где штрих у знака $\sum$ указывает, что при суммировании член с $p=n$ опускается, т. е.

$$\|x-x^{(n)}\|^2 = \frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{(n-2)^2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$$

Таким образом,

$$\|x-x^{(n)}\| \to \sqrt{2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad \text{при } n\to\infty,$$

хотя в обычном смысле $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$, т. е. все координаты вектора $x^{(n)}$ стремятся к соответствующим координатам вектора x.

*) При умножении двух векторов должно предполагаться, что один из них — вектор-столбец, а другой — вектор-строка, поэтому штрих после $y+z$, y и z указывает, что здесь $y+z$, y и z предполагаются вектор-строками.

Следовательно, в гильбертовом пространстве мы различаем два типа сходимости:

(I) Если $\|x - x^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность векторов $x^{(n)}$ называется *сильно сходящейся* к x, и этот факт записывается $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x^{(n)} = x$. Как будет видно в конце доказательства теоремы (**9.2**, IV), x является вектором.

(II) Последовательность векторов $x^{(n)} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots\}$ называется *слабо сходящейся* к $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, если (а) все $x^{(n)}$ ограничены в совокупности, т. е. $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)}|^2 \leqslant M$ для любого n, и (б) $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$. Слабая сходимость будет обозначаться через $x^{(n)} (\to) x$ или (когда не возникает сомнения) $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$. Из условия (а) следует, что x — вектор.

(**9.2**, I) *Если $x^{(n)}$ сходится сильно к x, то $x^{(n)}$ сходится также и слабо к x.*

В самом деле, из условия $\lim_{n\to\infty} \|x - x^{(n)}\| = 0$ следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать соответствующее положительное число N, такое, что если $x^{(n)} \equiv [x_{n1}, x_{n2}, \ldots]$, то $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_{ni}|^2 < \varepsilon^2$ для любого $n > N$. Следовательно, $|x_i - x_{ni}| < \varepsilon$ $(n > N;\ i = 1, 2, \ldots)$, т. е. $\lim_{n\to\infty} x_{ni} = x_i$ для любого i.

(**9.2**, II) *Если* $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ *и* $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} y^{(n)} = y$, *то*

$$\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} (x^{(n)} + y^{(n)}) = x + y.$$

Так как $x - x^{(n)}$ и $y - y^{(n)}$ — векторы, то, согласно (9.12), получаем:

$$\|x + y - x^{(n)} - y^{(n)}\| \leqslant \|x - x^{(n)}\| + \|y - y^{(n)}\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

(**9.2**, III) *Если* $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ *и* $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} y^{(n)} = y$, *то* *)

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} y^{(n)*} = x y^*.$$

Действительно, согласно (9.11) и (9.12):

$$|xy^* - x^{(n)} y^{(n)*}| =$$
$$= |(x - x^{(n)}) y^* + x (y^* - y^{(n)*}) - (x - x^{(n)})(y^* - y^{(n)*})| \leqslant$$
$$\leqslant \|x - x^{(n)}\| \, \|y\| + \|y - y^{(n)}\| \, \|x\| + \|x - x^{(n)}\| \, \|y - y^{(n)}\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

*) Скалярное произведение $x^{(n)} y^{(n)*}$ векторов $x^{(n)}$ и $y^{(n)}$ и норма $x^{(n)}$ суть скаляры, так что предел $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} y^{(n)*} = xy^*$ и пределы в (9.21) понимаются в обычном смысле.

Отметим два важных частных случая этого результата:

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)}y^* = xy^* \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\| = \|x\|. \tag{9.21}$$

(**9.2**, IV) *Для того чтобы существовал* $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x^{(n)}$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *можно было указать соответствующее целое число* N, *такое, что*

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \varepsilon \quad \text{для } m, \ n > N \text{ *)}. \tag{9.22}$$

Условие необходимо. Действительно, если

$$\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x^{(n)} = x,$$

то

$$\|x - x^{(n)}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $n > N$. Следовательно, когда $m, n > N$, тогда

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\| = \|(x^{(n)} - x) + (x - x^{(m)})\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x^{(n)} - x\| + \|x - x^{(m)}\| < \varepsilon.$$

Чтобы доказать достаточность условий, мы заметим, что если условие (9.22) выполняется, то в обозначениях (**9.2**, I)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{mk}|^2 < \varepsilon^2 \qquad (m, \ n > N)$$

и, следовательно,

$$|x_{nk} - x_{mk}| < \varepsilon \qquad (m, \ n > N; \quad k = 1, \ 2, \ \ldots).$$

Таким образом, $\lim_{n\to\infty} x_{nk}$ существует; обозначим его через x_k. Тогда, принимая во внимание, что

$$\sum_{k=1}^{p} |x_{nk} - x_{mk}|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{для } m, \ n > N,$$

мы получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{p} |x_{nk} - x_{mk}|^2 = \sum_{k=1}^{p} |x_k - x_{mk}|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

для $m > N$. Так как это имеет место для любого p, то, устремляя p к ∞, будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{mk}|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad (m > N)$$

*) Это является аналогом хорошо известного критерия Коши, необходимого и достаточного для обычной сходимости последовательностей.

или, обозначив $x=[x_1, x_2, \ldots]$,

$$\|x-x^{(m)}\|\to 0, \text{ т. е. } \operatorname*{LIM}_{m\to\infty} x^{(m)}=x.$$

Из $\|x-x^{(m)}\|\to 0$ следует, что x является вектором. В самом деле, $x-x^{(m)}$ — вектор при $m>N$, а так как $x^{(m)}$ — вектор, то и их сумма $(x-x^{(m)})+x^{(m)}$ тоже вектор.

В противоположность (**9.2**, III) мы сейчас дадим пример, который показывает, что *из слабой сходимости* $x^{(n)}(\to)x$ *и* $y^{(n)}(\to)y$ *не следует* $x^{(n)}y^{(n)*}\to xy^*$.

Возьмем $x_i^{(n)}=y_i^{(n)}=\delta_{in}$, где $\delta_{in}=0$ при $i\neq n$ и $\delta_{in}=1$ при $i=n$; тогда $x=y=0$, однако $x^{(n)}y^{(n)*}=\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(n)}\bar{y}_i^{(n)}=1$, так что $x^{(n)}y^{(n)*}\to 1\neq xy^*$.

Если существует неотрицательный вектор z такой, что $|x_i^{(n)}|\leqslant z_i$ для каждого n и i, то мы будем говорить, что z является *мажорантой* для последовательности векторов $x^{(n)}$ (см. Винтнер [1], 132).

(**9.2**, V) *Мажорантный критерий сильной сходимости. Если, по крайней мере, одна из двух последовательностей* $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ *имеет мажоранту, то из слабой сходимости* $x^{(n)}(\to)x$ *и* $y^{(n)}(\to)y$ *следует* $x^{(n)}y^{(n)*}\to xy^*$ (Винтнер [1], 132).

Предположим, что $|x_i^{(n)}|\leqslant z_i$ для любого n и i; так как $y^{(n)}(\to)y$, то $y^{(n)}$ ограничены в совокупности. Следовательно, применяя неравенство Коши — Шварца, получаем:

$$\sum_{i=N}^{\infty}|x_i^{(n)}\bar{y}_i^{(n)}|\leqslant\left(\sum_{i=N}^{\infty}|x_i^{(n)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=N}^{\infty}|y_i^{(n)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=N}^{\infty}z_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{M}\leqslant\frac{1}{3}\varepsilon$$

для $N>N_0$, ибо $\sum_{i=1}^{\infty}|y_i^{(n)}|^2\leqslant M$ для любого n, а z является вектором. Так как, по предположению, x и y — векторы, то также

$$\sum_{i=N}^{\infty}|x_i\bar{y}_i|\leqslant\left(\sum_{i=N}^{\infty}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=N}^{\infty}|y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для} \quad N>N_0.$$

Учитывая, что $\lim_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i$ и $\lim_{n\to\infty}y_i^{(n)}=y_i$, мы получаем:

$$\left|\sum_{i=1}^{N-1}x_i^{(n)}\bar{y}_i^{(n)}-\sum_{i=1}^{N-1}x_i\bar{y}_i\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для} \quad n>n_0.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(n)} \overline{y}_i^{(n)} - \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{для} \quad n > n_0,$$

откуда и вытекает требуемый результат.

Следствие 1. *Если* $x^{(n)} (\rightarrow) x$, *то* $x^{(n)} y^* \rightarrow x y^*$.

Следствие 2. *Если* $x^{(n)} (\rightarrow) x$ *и* $x^{(n)}$ *имеет мажоранту, то* $\operatorname*{LIM}_{n \to \infty} x^{(n)} = x$.

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} | x_i^{(n)} - x_i |^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \{ | x_i^{(n)} |^2 - x_i^{(n)} \overline{x}_i - \overline{x}_i^{(n)} x_i + | x_i |^2 \} =$$
$$= \| x^{(n)} \|^2 - x^{(n)} x^* - \overline{x}^{(n)} x' + \| x \|^2$$

и выражение в правой части, по теореме и предыдущему следствию, стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Из следствия 2 видно, почему теорема называется мажорантным критерием *сильной* сходимости.

Бесконечный ряд векторов $\sum_{n=1}^{\infty} x^{(n)}$ *называется сильно сходящимся к вектору* x, когда σ_n, где $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} x^{(k)}$, сильно сходится к x.

Как видно из (**9.2**, IV), для сильной сходимости упомянутого ряда необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такое N, что

$$\| \sigma_n - \sigma_m \| = \| x^{(m+1)} + x^{(m+2)} + \ldots + x^{(n)} \| < \varepsilon \ (m, n > N). \quad (9.23)$$

9.3. Векторные многообразия; сепарабельность гильбертова векторного пространства и следствия из нее

Два вектора x, $y (x \neq y)$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если x и y — вектор-строки, то xy^* и сопряженное ему значение $\overline{x} y'$ равны нулю, а если x и y — вектор-столбцы, то $x' \overline{y}$ и сопряженное ему значение $x^* y$ равны нулю.

Пусть мы имеем множество из *n попарно ортогональных* векторов $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ и пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x^{(i)}$. Тогда

$$\| x \|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} x^{(i)} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x^{(i)}, x^{(j)}).$$

Но $(x^{(i)}, x^{(j)})=0$, когда $i \neq j$, и $(x^{(i)}, x^{(i)})=\|x^{(i)}\|^2$. Следовательно,

$$\|x\|^2=\|x^{(1)}\|^2+\|x^{(2)}\|^2+\ldots+\|x^{(n)}\|^2.$$

Это равенство известно под названием *теоремы Пифагора* для векторов.

Если $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ — взаимно-ортогональные векторы, то, возведя неравенство (9.23) в квадрат, получим:

$$\sum_{k=m+1}^{n}\|x^{(k)}\|^2<\varepsilon^2 \qquad (m,\ n>N).$$

Но это есть необходимое и достаточное условие, чтобы ряд $\sum\|x^{(k)}\|^2$ сходился. Отсюда мы получаем следующий результат:

(**9.3**, I) *Ряд из взаимно-ортогональных векторов сильно сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд из квадратов их норм.*

Следствие. *Если удовлетворяется условие теоремы* (**9.3**, I), *то квадрат нормы ряда равен сумме ряда из квадратов норм его членов.*

Действительно, $\|\sigma_n\|^2=\|x^{(1)}\|^2+\|x^{(2)}\|^2+\ldots+\|x^{(n)}\|^2$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|\sigma_n\|=\|x\|$ согласно (9.21).

Рассмотрим теперь два вектора x и x_1 $(x_1\neq 0)$ и покажем, что можно определить скаляр λ так, что вектор $y_1=x-\lambda x_1$ будет ортогонален к x_1. Мы имеем $(x_1, y_1)=(x_1, x)-\bar{\lambda}\|x_1\|^2=0$, если $\lambda=\frac{(x, x_1)}{\|x_1\|^2}$. Таким образом, λ, удовлетворяющее указанному условию, однозначно определяется этой формулой и вектор λx_1 равен $\frac{(x, x_1)}{\|x_1\|^2}x_1$. В частности, если x_1 — *нормальный* вектор, т. е. $\|x_1\|=1$, то λx_1 обращается в $(x, x_1)x_1$, *и вектор x оказывается представленным в виде суммы двух векторов $x=(x, x_1)x_1+y_1$, где y_1 ортогонален к x_1.*

Множество нормальных (т. е. единичных) попарно ортогональных векторов называется *ортонормальным множеством.*

(**9.3**, II) *Множество из m ортогональных векторов является линейно независимым.*

Если $x^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ — ортогональные векторы, то, умножая равенство $\lambda_1x^{(1)}+\lambda_2x^{(2)}+\ldots+\lambda_mx^{(m)}=0$ (где все λ — скаляры) последовательно на $x^{(i)*}$, получаем:

$$\lambda_i=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

что и доказывает результат.

Пусть теперь мы имеем n линейно независимых векторов $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — произвольные скаляры. Тогда линейные комбинации векторов

$$c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \ldots + c_nx^{(n)}$$

из σ_2 образуют *линейное многообразие* V_n n измерений, в котором векторы $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ образуют *базис*.

(9.3, III) *) *Если линейное многообразие V_n имеет ортонормальный базис, то любой вектор $x \in \sigma_2$ может быть разложен единственным способом на два составляющих, один из которых ξ_n принадлежит V_n, а другой η_n ортогонален к V_n, т. е. ортогонален ко всем векторам из V_n.*

Предположим, что требуемое разложение имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x^{(i)} + \eta_n,$$

где векторы $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ортонормальны. Для определения c_i умножим это равенство на $x^{(j)*}$. Тогда, так как $(x^{(i)}, x^{(j)}) = 0$ при $i \neq j$ и $(x^{(j)}, x^{(j)}) = 1$, мы получим $(x, x^{(j)}) = c_j + (\eta_n, x^{(j)})$ или $c_j = (x, x^{(j)})$, ибо $(\eta_n, x^{(j)}) = 0$ по предположению. Следовательно, если требуемое разложение существует, то оно имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, x^{(i)})\, x^{(i)} + \eta_n. \tag{9.31}$$

Теперь осталось показать, что если мы запишем вектор x в форме (9.31), то вектор η_n обязан быть ортогональным ко всем векторам $x^{(i)}$. Умножим (9.31) на $x^{(j)*}$; тогда

$$(x, x^{(j)}) = (x, x^{(j)}) + (\eta_n, x^{(j)}),$$

так что $(\eta_n, x^{(j)}) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, что и доказывает результат.

В теореме излишне *предполагать* базис ортонормальным, так как, применяя процесс ортонормализации Шмидта, указанный ниже, любое множество из n линейно независимых векторов можно заменить другими n линейно независимыми векторами, которые являются ортонормальными и определяют то же самое линейное многообразие.

Процесс ортонормализации Шмидта (Шмидт [1], 442; первоначальная идея ортонормализации принадлежит Граму [1]).

Если x — какой-либо отличный от нуля вектор, то $\dfrac{x}{\|x\|}$ является, очевидно, *единичным* вектором. Это «нормализует» вектор x.

(9.3, IV) *Если векторы $x^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы, то коэффициенты c_{ij} могут быть выбраны такими, что*

*) См. Жулиа [1], ч. II, 7.

векторы $z^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, *где* $z^{(i)}=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x^{(j)}$, *образуют ортонормальное множество.*

(В множестве векторов, построенном ниже, $c_{ij}=0$ для $j>i$, так что фактически $z^{(i)}=\sum_{j=1}^{i} c_{ij}x^{(j)}$.)

Определим сначала c_1 так, чтобы $z^{(1)}\equiv c_1x^{(1)}$ был нормальным, т. е. $\|z^{(1)}\|=1$.

Согласно (**9.3**, III) мы можем записать $x^{(2)}=k_1z^{(1)}+\eta_1$, где $\eta_1\equiv x^{(2)}-k_1c_1x^{(1)}$ ортогонален к $x^{(1)}$, и затем выбрать c_2 так, чтобы $z^{(2)}\equiv c_2\eta_1$ был нормальным. Таким образом, мы будем иметь *два* ортонормальных вектора, скажем:

$$c_{11}x^{(1)} \quad \text{и} \quad c_{21}x^{(1)}+c_{22}x^{(2)}.$$

Теперь установим требуемый результат по индукции. Предположим, что мы построили множество из r ортонормальных векторов $z^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, r)$, где

$$z^{(r)}\equiv\sum_{j=1}^{r} c_{rj}x^{(j)}.$$

Тогда, по (**9.3**, III), мы можем записать

$$x^{(r+1)}=\sum_{i=1}^{r} k_iz^{(i)}+\eta_r,$$

где

$$\eta_r\equiv x^{(r+1)}-\sum_{i=1}^{r} k_iz^{(i)}$$

ортогонален к каждому из векторов $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(r)}$. Теперь мы можем выбрать c_{r+1} таким, чтобы вектор $z^{(r+1)}\equiv c_{r+1}\eta_r$ был нормальным. Ни один из η_r не может быть равен нулю, так как $x^{(j)}$ линейно независимы. Таким образом, мы имеем $z^{(r+1)}=\sum_{j=1}^{r+1} c_{r+1,j}x^{(j)}$, т. е. мы получили множество из $r+1$ ортонормальных векторов $z^{(i)}$. Так как мы уже построили множество из двух таких векторов, то теорема тем самым доказана.

Согласно (**9.3**, II) *векторы* $z^{(i)}$ *линейно независимы.*

Не представляет трудностей применить этот процесс и к *бесконечному* множеству векторов.

Как видно из проведенного доказательства, матрица из коэффициентов c_{ij} является *нижней треугольной матрицей*, элементы которой, расположенные по главной диагонали, отличны от нуля.

Из (**9.3**, IV) следует, что *мы можем всегда предполагать векторы* $x^{(i)}$, *образующие базис в* V_n, *ортонормальными.*

Считая в (9.31) $x^{(i)}$ ортонормальными векторами и применяя теорему Пифагора, получаем:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, x^{(i)})|^2 + \|\eta_n\|^2,$$

так как все векторы справа в (9.31) в этом случае ортогональны. Таким образом, мы приходим к *неравенству Парсеваля—Бесселя*

$$\sum_{i=1}^{n} |(x, x^{(i)})|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad \text{для любого } n; \tag{9.32}$$

знак равенства в нем имеет место тогда и только тогда, когда вектор x принадлежит V_n, т. е. $\eta_n = 0$.

Множество единичных векторов $e^{(i)}$, таких, что i-я компонента $e_i^{(i)} = 1$ и $e_j^{(i)} = 0$ при $j \neq i$, называется *фундаментальной системой единичных векторов*.

Бесконечное множество векторов называется *полным*, если не существует ненулевого вектора, ортогонального каждому из них; например, множество векторов $e^{(i)}$ является полным.

Сейчас мы рассмотрим некоторые свойства *общих бесконечномерных линейных многообразий*.

Пространство называется *линейным* *), если (а) из того, что x и y принадлежат пространству, следует, что $\lambda x + \mu y$ принадлежит этому же пространству для всех скаляров λ и μ, и (б) сложение элементов коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно по отношению к умножению на скаляр. Полагая $\lambda = \mu = 0$, мы видим, что *нулевой элемент* принадлежит каждому линейному пространству.

(9.3, V) σ_2 *является линейным пространством.*

Действительно:

(I) $\sum_{n=1}^{\infty} |cx_n|^2 = |c|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$, так что если $x \equiv \{x_n\}$ принадлежит σ_2, то и cx принадлежит σ_2 для любого скаляра c.

(II) Согласно (9.12), $x + y$ является вектором, если x и y — векторы. Принимая во внимание (I), получаем, что $\lambda x + \mu y$ принадлежит σ_2 при любых скалярах λ и μ. Таким образом, условие (а), характеризующее линейное пространство, выполняется и, очевидно, выполняется и условие (б).

Следствие. *Если векторы* $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *принадлежат* σ_2, *то и* $\sum_{i=1}^{n} c_i x^{(i)}$ *принадлежит* σ_2 *при любых скалярах* $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Введем некоторые определения.

---

*) Более точное (аксиоматическое) определение *линейного пространства* см. в § 10.1.

Пусть E — множество векторов y. Вектор x называется *предельным вектором* (или *предельной точкой*) множества E, если для произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти такой вектор y из E, отличный от x, что $\|x - y\| < \varepsilon$.

Множество предельных векторов x называется *производным множеством E' множества E*.

Множество векторов *замкнуто*, если оно содержит все свои предельные векторы, т. е. если содержит свое производное множество.

Производное множество E' множества E всегда замкнуто. В самом деле, предельный вектор для векторов E' также является предельным для векторов E и, следовательно, принадлежит E'.

Множество $E + E'$ представляет собой множество векторов, каждый из которых принадлежит, по крайней мере, одному из этих двух множеств. Очевидно, оно замкнуто; $E + E'$ называется *замыканием* множества E.

Линейное многообразие представляет собой такое множество векторов, что если x и y принадлежат ему, то и вектор $\alpha x + \beta y$ также принадлежит ему при любых скалярах α и β.

Замкнутое линейное многообразие V — это такое множество векторов, которое (I) линейно в соответствии с данным выше определением и (II) если сходящаяся последовательность векторов $x^{(n)}$ принадлежит этому множеству V, то и предельный вектор *) x принадлежит множеству V.

Вектор *ортогонален линейному многообразию* V, если он ортогонален каждому вектору из V. Мы будем говорить, что *два линейных многообразия V и V_1 ортогональны*, если каждый вектор из V ортогонален к каждому вектору из V_1.

Пусть F — подмножество пространства E. Если при выбранной надлежащим образом *метрике* (т. е. при надлежащем определении *расстояния* в E) для любого вектора из E существуют сколько угодно близкие к нему векторы из F, то говорят, что F *всюду плотно* (или просто *плотно*) в E в смысле этой метрики.

Если E имеет *счетное* подмножество, всюду плотное в E, то мы будем говорить, что E является *сепарабельным* при данной метрике **).

Метрика в $E \equiv \sigma_2$ определяется как

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2}.$$

*) То есть вектор, являющийся *сильным* пределом (см. определение, данное выше).

**) Таким образом, например, комплексная плоскость является сепарабельным множеством, так как рациональные комплексные числа, т. е. числа вида $a + ib$, где a и b рациональные, образуют счетное, всюду плотное в комплексной плоскости подмножество.

(**9.3**, VI) *) *Гильбертово векторное пространство* σ_2 *сепарабельно, как и любое пространство* V, *содержащееся в* σ_2.

Мы докажем, что можно найти счетное множество векторов $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$, замыканием которого является все пространство σ_2.

Если вектор x из σ_2, то $\sum |x_p|^2$ сходится, откуда следует, что для любого данного $\varepsilon > 0$ можно указать такое n, что

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} |x_p|^2 < \varepsilon^2.$$

Следовательно, если $\xi_p = x_p$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ и $\xi_p = 0$ $(p > n)$, то мы имеем $\|x - \xi\| < \varepsilon$.

Таким образом, мы видим, что *пространство* σ_2 *может быть образовано из множества векторов, имеющих только конечное число отличных от нуля координат, присоединением к нему производного множества этих векторов.* Поэтому первая часть теоремы сводится к доказательству того, что множество F векторов, имеющих только конечное число отличных от нуля координат, является сепарабельным.

Пусть Σ_n — множество векторов, имеющих своими первыми n координатами *рациональные* числа, а все остальные координаты равными нулю. Тогда множество

$$\Sigma = \Sigma_1 + (\Sigma_2 - \Sigma_1) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) + \ldots + (\Sigma_n - \Sigma_{n-1}) + \ldots$$

состоит из векторов, имеющих конечное число отличных от нуля координат, причем эти координаты являются рациональными числами. Теперь любой вектор x из F принадлежит или Σ, или производному множеству Σ'. Действительно, если все координаты вектора x с номерами, большими n, равны нулю, а отличные от нуля координаты рациональны **), то $x \in \Sigma_n - \Sigma_{n-1}$ и, следовательно, $x \in \Sigma$.

Если одна или более отличных от нуля координат вектора x иррациональны, то можно найти n комплексных рациональных чисел $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x'_i|^2 < \varepsilon^2$$

для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$. Следовательно, вектор $x' = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, 0, 0, \ldots\}$, принадлежащий Σ, удовлетворяет условию $\|x - x'\| < \varepsilon$. Поэтому x принадлежит производному множеству Σ'. Отсюда следует, что Σ — *всюду плотное в* F *множество.*

---

*) Теорема доказана, как в книге Жулиа [1], ч. II, 35—38.

**) Здесь нужно еще предположить, что n-я координата отлична от нуля. (*Прим. ред.*)

Но хорошо известно, что:

(I) действительные рациональные числа образуют счетное множество;

(II) комплексные рациональные числа образуют счетное множество;

(III) сумма счетного множества слагаемых, каждое из которых счетно, является счетным множеством. Отсюда следует, что множества $\Sigma_n - \Sigma_{n-1}$ являются счетными, и поэтому множество Σ *счетно*. Таким образом, F сепарабельно, а значит, сепарабельно и σ_2.

Остается доказать, что любое пространство V, содержащееся в σ_2, является сепарабельным.

Множество векторов Σ является счетным, и поэтому их можно перенумеровать

$$x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$$

Из предыдущих рассуждений видно, что если x — какой-либо вектор из V (так что $x \in \sigma_2$), то мы можем найти вектор $x_m \in \Sigma$, произвольно близкий к x. Следовательно, для любого данного целого положительного числа n, как бы велико оно ни было, можно найти вектор x_m такой, что

$$\|x - x_m\| < \frac{1}{n}.$$

В этом случае сфера с центром в x_m и радиуса $\frac{1}{n}$ содержит одну или более точек из V. Обозначим какую-нибудь одну из этих точек через x_{mn}, так что $\|x_{mn} - x_m\| < \frac{1}{n}$.

Множество всех различных векторов x_{mn} из V, полученное таким способом (относительно всех векторов x из V и всех значений n), является счетным, так как каждый из этих векторов зависит только от двух целых индексов m и n. Это множество всюду плотно в V. Действительно, пусть x — какой-нибудь вектор из V и ε — произвольно малое положительное число. Выберем $n > \frac{2}{\varepsilon}$, а затем определим m так, чтобы $\|x_m - x\| < \frac{1}{n}$; теперь в V найдется такой вектор x_{mn}, что $\|x_{mn} - x_m\| < \frac{1}{n}$, и мы получаем:

$$\|x - x_{mn}\| \leqslant \|x - x_m\| + \|x_m - x_{mn}\| < \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Таким образом, счетное множество векторов x_{mn} всюду плотно в V и, следовательно, V сепарабельно.

Теорема доказана.

Мы сейчас приведем некоторые теоремы об *ортонормальных множествах* в σ_2 *). Сначала отметим, что если x и y ортогональны, то

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

так как в этом случае $(x+y, x+y)$ обращается в $(x, x)+(y, y)$. Если x и y — два различных вектора, принадлежащие одному и тому же ортонормальному множеству, то

$$\|x-y\| = \sqrt{2}.$$

(**9.3**, VII) *Всякое ортонормальное множество S из σ_2 конечно или счетно.*

Если x и y — два вектора из S, то мы имеем:

$$\|x-y\| = \sqrt{2}. \tag{9.33}$$

Так как σ_2 сепарабельно, то существует счетное множество Σ, всюду плотное в σ_2. В таком случае, существуют векторы $x^{(m)}$ и $x^{(n)}$ в Σ такие, что

$$\|x - x^{(m)}\| < \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \|y - x^{(n)}\| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Векторы $x^{(m)}$ и $x^{(n)}$ различны между собой, ибо если бы $x^{(m)} = x^{(n)}$, то

$$\|x-y\| = \|(x - x^{(m)}) - (y - x^{(m)})\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x - x^{(m)}\| + \|y - x^{(m)}\| < \sqrt{2},$$

что противоречит (9.33).

Следовательно, каждому вектору x из S соответствует вектор $x^{(m)}$ из Σ, причем двум различным векторам из S соответствуют два различных вектора из Σ. Так как Σ счетно, то отсюда следует, что S не более чем счетное.

(**9.3**, VIII) *Полная ортонормальная система* **) *векторов из σ_2 содержит бесконечное множество векторов.*

Для доказательства нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *Пространство σ_2 имеет бесконечную размерность.*

Действительно, σ_2 содержит полную ортонормальную систему $e^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, т. е. содержит бесконечное множество линейно независимых векторов, и, следовательно, имеет бесконечную размерность.

Предположим теперь, что $x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — конечная ортонормальная система в σ_2.

*) Доказательства этих теорем подобны доказательствам соответствующих теорем в гильбертовом функциональном пространстве, приведенным в книге Жулиа [1], ч. II, гл. II.

) Ортонормальной системой называется последовательность $\{x^{(n)}\}$ попарно ортонормальных векторов $x^{(n)}$. Из теоремы (9.3**, VII) вытекает, что всякое ортонормальное множество в σ_2 является ортонормальной системой. (*Прим. перев.*)

Лемма 2. *Множество, состоящее из векторов вида $c_1x^{(1)}+c_2x^{(2)}+\ldots+c_nx^{(n)}$, не может содержать более чем n линейно независимых векторов.*

Пусть $y^{(i)}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x^{(k)}$ для $i=1, 2, \ldots, m$ и пусть мы нашли, что между векторами $y^{(i)}$ существует линейная зависимость, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i y^{(i)}=0$. Это может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_i a_{ik}x^{(k)}=0.$$

Так как по теореме (**9.3**, II) векторы $x^{(k)}$ линейно независимы, то предыдущее равенство влечет

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ik}=0 \quad \text{для} \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

и мы получаем однородную систему из n линейных уравнений с m неизвестными λ_i. Если $m>n$, эта система имеет нетривиальное решение для λ_i. Следовательно, в линейном многообразии n измерений может быть не более n линейно независимых векторов, и лемма тем самым доказана.

Теперь мы получаем, что множество векторов вида

$$c_1x^{(1)}+c_2x^{(2)}+\ldots+c_nx^{(n)}$$

не может исчерпать σ_2, которое согласно лемме 1 имеет бесконечное множество линейно независимых векторов, т. е. в σ_2 найдется вектор x такой, что

$$y\equiv x-\sum_{k=1}^{n}c_kx^{(k)}\neq 0$$

при любом выборе $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Взяв $c_k=(x, x^{(k)})$, мы получим $(y, x^{(k)})=0$, следовательно, y ортогонален к $x^{(k)}$, т. е. система $\{x^{(i)}\}$ не является полной. Повторяя описанный процесс, мы видим, что число ортогональных и линейно независимых векторов будет неограниченно возрастать, что и доказывает теорему.

Формула $x=\sum\limits_{k=1}^{n}c_kx^{(k)}+y$, $c_k=(x, x^{(k)})$, представляет собой разложение вектора x на два составляющих, где первый вектор принадлежит замкнутому линейному многообразию V векторов $x^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, а второй ортогонален к V; это разложение единственное.

(**9.3**, IX) *Если* $\{x^{(i)}\}$ — *ортонормальная система, конечная или бесконечная, а* x *и* y — *любые два вектора из* σ_2, *то ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x, x^{(i)}) \overline{(y, x^{(i)})} \equiv \sum_{i=1}^{\infty} a_i \bar{b}_i$$

абсолютно сходится.

Полагая в (9.32) $n \to \infty$, мы видим, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2$ и аналогично ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2$ сходятся. Применяя неравенство Коши — Шварца, заключаем, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \bar{b}_i$ абсолютно сходится.

(**9.3**, X) *Пусть* $\{x^{(i)}\}$ — *бесконечная ортонормальная система. Для того чтобы ряд* $\sum a_i x^{(i)}$ *сходился* *), *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд* $\sum |a_i|^2$.

Для сильной сходимости ряда $\sum a_i x^{(i)}$, согласно (**9.2**, IV), необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

$$\left\| \sum_{i=n}^{n+p} a_i x^{(i)} \right\| < \varepsilon$$

для $n > N(\varepsilon)$ и для любого целого положительного p. Но, по теореме Пифагора,

$$\left\| \sum_{i=n}^{n+p} a_i x^{(i)} \right\|^2 = \sum_{i=n}^{n+p} |a_i|^2,$$

так что предыдущее условие обращается в

$$\sum_{i=n}^{n+p} |a_i|^2 < \varepsilon^2$$

для $n > N(\varepsilon)$ и любого p, которое является необходимым и достаточным для сходимости ряда $\sum |a_i|^2$.

Следствие. *Если* $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{(i)}$, *где ряд* $\sum |a_i|^2$ *сходится, то* $a_i = (x, x^{(i)})$.

В самом деле, если

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{(i)} + y^{(n)},$$

*) То есть чтобы сильно сходилась последовательность $\sum_{i=1}^{n} a_i x^{(i)}$ при $n \to \infty$.

где $\|y^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$, то $\sigma_n \to x$. Следовательно,

$$(\sigma_n, x^{(j)}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^{(i)}, x^{(j)}\right) + (y^{(n)}, x^{(j)}).$$

Но, согласно (9.21), скалярное произведение векторов непрерывно и, значит,

$$\lim_{n \to \infty} (y^{(n)}, x^{(j)}) = 0.$$

Устремляя n к ∞, мы получим $a_j = (x, x^{(j)})$.

Пусть T — замкнутое линейное многообразие $[x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots \ldots, x^{(n)}, \ldots]$, т. е. множество векторов типа $c_1x^{(1)}+c_2x^{(2)}+\ldots+c_nx^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ вместе с пределами сходящихся последовательностей, элементами которых являются векторы такого же типа. Тогда T является линейным пространством; в самом деле, если $f_n \to f$ и $f'_n \to f'$ в смысле сильной сходимости, где f_n и f'_n — конечные линейные комбинации из $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, то из неравенств $\|f - f_n\| < \varepsilon$ и $\|f' - f'_n\| < \varepsilon$ получаем:

$$\|\lambda f + \mu f' - (\lambda f_n + \mu f'_n)\| < \varepsilon(|\lambda| + |\mu|)$$

для $n > n_0$ и произвольно выбранного положительного числа ε.

В частности, если ряд $\sum a_i x^{(i)}$ сходится, то его сумма принадлежит T.

Также, если x ортогонален ко всякому $x^{(i)}$, то x ортогонален к любому вектору из T. В самом деле, если $y^{(n)} \to x'$, где $y^{(n)}$ — элементы из T *), то $(x, y^{(n)}) = 0$ для любого n, и поэтому $(x, x') = 0$ в силу непрерывности скалярного произведения.

(**9.3**, XI) *Если $\{x^{(i)}\}$ — какая-нибудь ортонормальная система и x — какой-нибудь вектор, то имеет место разложение $x = y + z$, где*

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} (x, x^{(i)})\, x^{(i)} \equiv \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{(i)}$$

и $y \in T \equiv [x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots]$, а z ортогонален к T. Это разложение единственно.

Согласно (**9.3**, IX) ряд $\sum |a_i|^2$ сходится, а тогда в силу (**9.3**, X) ряд

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{(i)}$$

сходится и $y \in T$.

---

*) Здесь следует считать, что $y^{(n)}$ — конечная линейная комбинация векторов $x^{(i)}$. (*Прим. ред.*)

Вектор $x-y$ ортогонален ко всем $x^{(i)}$, так как

$$(x-y,\ x^{(i)})=\lim_{n\to\infty}\left(x-\sum_{j=1}^{n}a_jx^{(j)},\ x^{(i)}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[(x,\ x^{(i)})-\sum_{j=1}^{n}(x,\ x^{(j)})(x^{(j)},\ x^{(i)})\right]=0,$$

следовательно, $z=x-y$ ортогонален к T.

(**9.3**, XII) *Ортонормальная система* $\{x^{(i)}\}$ *полна тогда и только тогда, когда* $T\equiv[x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots]=\sigma_2$ (*первый критерий полноты ортонормальных систем*).

Действительно, если система $\{x^{(i)}\}$ полная, то нуль-вектор является единственным элементом из σ_2, который ортогонален к каждому $x^{(i)}$, а тогда в (**9.3**, XI) $z=0$ и, таким образом, произвольно взятый вектор x из σ_2 принадлежит T.

Обратно, если $\sigma_2=T$ и x ортогонален к каждому $x^{(i)}$, то x ортогонален к каждому вектору из σ_2, но нуль-вектор является единственным таким вектором, так как никакой другой вектор не ортогонален к самому себе.

(**9.3**, XIII) *Ортонормальная система* $\{x^{(i)}\}$ *полна тогда и только тогда, когда для любой пары* H*-векторов* x *и* y *имеет место равенство*

$$(x,\ y)=\sum_{i=1}^{\infty}(x,\ x^{(i)})\overline{(y,\ x^{(i)})}\equiv\sum_{i=1}^{\infty}a_i\bar{b}_i \tag{9.34}$$

(*второй критерий полноты ортонормальных систем*).

Действительно, если имеет место (9.34), то*)

$$(x,\ x)\equiv\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(x,\ x^{(i)})|^2. \tag{9.35}$$

Отсюда следует, что если x ортогонален ко всякому $x^{(i)}$, то $\|x\|^2=0$, т. е. x является нуль-вектором, и следовательно, система $\{x^{(i)}\}$ полна. Обратно, когда $\{x^{(i)}\}$ — полная система, то, по (**9.3**, XII), $\sigma_2=T$, а из непрерывности скалярного произведения мы имеем:

$$(x,\ y)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix^{(i)},\quad \sum_{i=1}^{n}b_ix^{(i)}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\bar{b}_i.$$

Из сказанного выше следует, что если $\{x^{(i)}\}$ — полная ортонормальная система в σ_2, то любой H-вектор x может быть представлен в виде $x=\sum_{i=1}^{\infty}a_ix^{(i)}$, где ряд $\sum|a_i|^2$ сходится. В таком случае мы

*) Некоторые авторы принимают это условие за определение полноты системы, т. е. система $\{x^{(i)}\}$ называется полной, если она удовлетворяет условию (9.35) для любого H-вектора x, и *выводят* отсюда принятое в данной книге определение; см., например, Жулиа [1], ч. II, 10—11.

будем говорить, что векторы $x^{(i)}$ образуют *базис* в σ_2. Всякая полная ортонормальная система является базисом в σ_2.

(**9.3**, XIV) *Для всякой системы векторов $\{x^{(i)}\}$ из σ_2 может быть построен ортонормальный базис, который определяет то же самое замкнутое линейное многообразие, что и система $\{x^{(i)}\}$.*

Если $x^{(i)}$ не являются линейно независимыми, то мы удалим из этой системы всякий вектор $x^{(k)}$, линейно зависимый с $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k-1)}$. Оставшееся множество векторов $y^{(i)}$ состоит уже из линейно независимых векторов и таких, что всякий вектор из замкнутого линейного многообразия $[x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(i)}, \ldots]$ или является пределом векторов вида $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i y^{(i)}$ при $n \to \infty$, или же равен частичной сумме $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i y^{(i)}$; множество $\{y^{(i)}\}$ может быть конечным или бесконечным. Заменим теперь $y^{(i)}$ ортонормальной системой $z^{(i)}$, построенной при помощи процесса ортонормализации Шмидта, так что $(z^{(i)}, z^{(j)}) = \delta_{ij}$. Из доказательства (**9.3**, IV) видно, что $y^{(i)}$ является линейной функцией от $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(i)}$. Так как матрица из c_{ij} в (**9.3**, IV) является нижней треугольной с отличными от нуля элементами, лежащими на главной диагонали, то (c_{ij}) имеет двустороннюю обратную, так что $z^{(i)}$ — линейная функция от $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(i)}$. Таким образом, два замкнутых линейных многообразия $[y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots]$ и $[z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots]$ совпадают. В силу этого $z^{(i)}$ образуют ортонормальный базис замкнутого линейного многообразия $[y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots]$, определенного при помощи векторов $y^{(i)}$, которое совпадает с замкнутым линейным многообразием $[x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots]$, определенным векторами $x^{(i)}$.

Из этого результата мы получаем следующую важную теорему:

(**9.3**, XV) *Пространство σ_2 содержит ортонормальный базис.*

Действительно, так как σ_2 сепарабельно, то оно содержит счетное подмножество $\{x^{(i)}\}$ векторов, *всюду плотное* в σ_2. Тогда, применив процесс Шмидта (**9.3**, IV) к $\{x^{(i)}\}$, мы получим ортонормальную систему, такую, что замкнутое линейное многообразие $[z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots]$ совпадает с замкнутым линейным многообразием $[x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots]$ и совпадает с σ_2, т. е.

$$[z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots] = [x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots] = \sigma_2.$$

(**9.3**, XVI) *Любое замкнутое линейное многообразие V в σ_2 обладает ортонормальным базисом.*

Согласно (**9.3**, VI) V сепарабельно, так что существует множество векторов $x^{(i)}$, всюду плотное в V. Применяя к этому множеству векторов процесс Шмидта, мы придем к требуемому результату, как и в (**9.3**, XV).

(Для более глубокого изучения свойств гильбертова пространства отсылаем читателя к книге Жулиа [1], ч. II, гл. I.)

9.4. Билинейные формы

Свойства матриц обнаруживаются в различных приложениях, например при преобразовании последовательностей, при решении матричных уравнений, при рассмотрении коэффициентов в системе линейных уравнений и т. д.

Гильберт использует матрицу $A = (a_{pq})$ для построения *билинейной формы*

$$A(x, y) = \sum_{p, q=1}^{\infty} x_p a_{pq} y_q,$$

где x и y — вектор-столбцы; некоторые свойства матрицы A будут отражены в свойствах $A(x, y)$. В матричном обозначении $A(x, y)$ имеет вид $x'Ay$. Это обозначение может казаться более предпочтительным, чем $A(x, y)$. Однако обозначение $A(x, y)$ стало общепринятым благодаря работам Гильберта и других авторов и поэтому будет сохраняться в нашем тексте.

Так как $A(x, y)$ является двойным рядом, то прежде чем перейти к рассмотрению билинейных форм, нужно дать соответствующее определение предельного процесса, посредством которого двойному ряду приписывается определенная сумма.

Для образования суммы двойного ряда $\sum\limits_{p, q} c_{pq}$ употребляются три различных метода.

(I) *Треугольный метод*. Образуем суммы

$$s_1 = c_{11}, \quad s_2 = s_1 + c_{12} + c_{21}, \quad s_3 = s_2 + c_{13} + c_{22} + c_{31}, \ \ldots$$

членов, расположенных на первой, второй, третьей и т. д. диагоналях, перпендикулярных к главной диагонали; ряд $\sum\limits_{p, q} c_{pq}$ называется *сходящимся по Коши*, когда сходится последовательность $s_1, s_2, s_3, \ldots$, а предел этой последовательности называется *суммой* вышеуказанного ряда *по Коши*.

(II) *Метод конечных прямоугольников*. Образуем s_{mn} сложением всех членов, у которых первый индекс не превосходит m, а второй индекс не превосходит n; ряд $\sum\limits_{p, q} c_{pq}$ называется *сходящимся по Прингсхейму*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число s, независимое от ε, и два числа $M(\varepsilon)$ и $N(\varepsilon)$ таких, что $|s_{mn} - s| \leqslant \varepsilon$ всякий раз, когда $m \geqslant M(\varepsilon)$ и $n \geqslant N(\varepsilon)$. В этом случае число s называется *внутренним* (или *Прингсхейма*) *пределом* двойной последовательности s_{mn}.

(III) *Метод бесконечных прямоугольников*. Если все строки образуют сходящиеся ряды $\sum\limits_{q=1}^{\infty} c_{pq} = \gamma_p$ и ряд $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \gamma_p$ сходится, то мы скажем тогда, что ряд $\sum\limits_{p,\,q} c_{pq}$ имеет *повторную сумму по строкам*, а сумма ряда $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \gamma_p$ называется *повторной суммой ряда* $\sum\limits_{p,\,q} c_{pq}$ *по строкам* и обозначается так:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} c_{pq}.$$

Аналогично определяется *повторная сумма ряда* $\sum\limits_{p,\,q} c_{pq}$ *по столбцам*, которая обозначается $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \sum\limits_{p=1}^{\infty} c_{pq}$.

Гильберт определяет $A(x, y)$, как в (II), т. е. как *внутренний* (*Прингсхейма*) *предел*. Чтобы гарантировать существование этого предела, мы подчиним A и переменные x и y некоторым условиям. На *матрицы* мы наложим условие, чтобы *внутренний предел для* $A(x, y)$ *существовал на* E, *где* E — *единичная гиперсфера* (§ 9.1), *т. е. существовал для любой пары единичных векторов*. Матрица, удовлетворяющая этому условию, называется *H-матрицей* (*матрицей Гильберта*). Частный случай билинейной формы, когда $y = \bar{x}$, т. е. $A(x, \bar{x})$, называется *квадратичной формой*.

Сумма по Коши в билинейных формах не будет употребляться совсем. Если внутренний предел для $A(x, y)$ существует на E и если $A(x, y)$ имеет повторные суммы по строкам и по столбцам, то мы в таком случае скажем, что $A(x, y)$ *сходится в трех употребительных смыслах*.

Приведенное выше определение H-матрицы и вытекающий отсюда метод подхода к изучению H-матрицы принадлежат Динсу. Обычно же H-матрицу определяют как одну из таких, для которых $A(x, y)$ является ограниченной для всех пар единичных векторов x и y, и отсюда затем выводят, что $A(x, y)$ сходится в трех употребительных смыслах. При определении Динса сначала будет доказано в (**9.4**, II), что $A(x, y)$ сходится в других двух смыслах, а затем при помощи теоремы Хеллингера — Теплица (**9.4**, V) будет доказана ограниченность $A(x, y)$. Этот метод позволяет более отчетливо выявить свойства H-матриц.

Если A — эрмитова матрица (т. е. $A^* = A$), то $A(x, \bar{x})$ называется *эрмитовой формой*; матричное обозначение ее $x'A\bar{x}$.

Когда A является H-матрицей, сходимость $A(x, y)$ на E не обязана быть равномерной. В самом деле, единичная матрица I является H-матрицей и $I(x, \bar{x}) = x'I\bar{x} = x'\bar{x} = \|x\|^2 = 1$ на E. Равномерная же сходимость на E означает, что для любого $\varepsilon > 0$

можно указать такое число N, что для всякого $n > N$

$$|1 - I_n(x, \bar{x})| \leqslant \varepsilon$$

для всех x, принадлежащих E, где

$$A_n(x, y) = \sum_{p, q=1}^{n} x_p a_{pq} y_q \text{ *)}$$

(аналогичный смысл имеет и I_n). Однако если $x_i = 1$, $x_p = 0$ $(p \neq i)$, то $I_n(x, \bar{x}) = 0$ для $i > n$; следовательно, $1 - I_n(x, \bar{x}) = 1$ для $i > n$ и, значит, указанное условие равномерной сходимости не выполняется, например, при $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Мы также увидим (непосредственно перед (**9.5**, IV)), что если A является H-матрицей, то сходимость $A(x, y)$ *не обязательно будет абсолютной*.

(**9.4**, I). *Если существуют все пределы по строкам* $\lim\limits_{n \to \infty} s_{mn} = r_m$ *и существует внутренний (Прингсхейма) предел* $\lim\limits_{m, n \to \infty} s_{mn} = s$, *то существует* $\lim\limits_{m \to \infty} r_m = s$. *Аналогично, если существуют все пределы по столбцам* $c_n = \lim\limits_{m \to \infty} s_{mn}$ *и существует внутренний предел* s, *то мы имеем* $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = s$.

Согласно предположению для любого данного $\varepsilon > 0$ существуют числа $M(\varepsilon)$ и $N(\varepsilon)$ такие, что $|s_{mn} - s| \leqslant \varepsilon$ для $m \geqslant M$ и $n \geqslant N$. Также существует число $N' = N'(m)$ такое, что $|s_{mn} - r_m| \leqslant \varepsilon$ для $n \geqslant N'$ (мы может считать $N' > N$). Следовательно, $|r_m - s| \leqslant 2\varepsilon$ для любого $m \geqslant M$. Доказательство второй части, т. е. в случае пределов по столбцам, проводится аналогично.

(**9.4**, II) *Теорема Гильберта о сходимости. Если A есть H-матрица, то $A(x, y)$ имеет повторную сумму по строкам и по столбцам* **).

Так как A является H-матрицей, то на E существует внутренний предел для $A(x, y)$. Взяв $x_j = 1$, $x_p = 0$ $(p \neq j)$, мы видим, что $\sum\limits_{q=1}^{\infty} a_{jq} y_q$ существует для любого j, и поэтому $r_m \equiv \sum\limits_{p=1}^{m} \sum\limits_{q=1}^{\infty} x_p a_{pq} y_q$ существует для всех x и y на E. Следовательно, если $s_{mn} \to s$ при $m, n \to \infty$ и $s_{mn} \to r_m$ при $n \to \infty$, то, согласно (**9.4**, I), $\lim\limits_{m \to \infty} r_m = s$, т. е. $A(x, y)$ имеет повторную сумму по строкам. Аналогичное доказательство может быть проведено и для столбцов.

---

*) $A_n(x, y)$ часто называется *отрезком* $A(x, y)$; ср. (**10.4**, III).

**) Данное здесь доказательство, принадлежащее Динсу, является более кратким по сравнению с тем, которое обычно приводится; см., например, Винтнер [1], 125—127.

Следствие. *Эрмитова форма действительна.* В самом деле, если A является H-матрицей, то повторная сумма по строкам для $A(x, \bar{x})$ равна повторной сумме по столбцам; следовательно, $\overline{A(x, \bar{x})} = A(x, \bar{x})$, так как в этом случае $A^* = A$.

Отличная от нуля квадратичная эрмитова форма называется *определенной*, если она имеет один и тот же знак для любого вектора x. Например, $\sum\limits_{p,\,q=1}^{\infty} \frac{x_p x_q}{p+q+1}$ — *положительно определенная* квадратичная форма для всех действительных (отличных от нуля) значений вектора x, так как

$$\int\limits_0^1 (x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \ldots)^2\, dt > 0$$

для всех действительных (отличных от нуля) векторов x.

Если для последовательности $\{y_q\}$ существует последовательность $\eta_p = \sum\limits_{q=1}^{\infty} a_{pq} y_q$, то $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \ldots\}$ называется *строчным преобразованием* вектора $y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ посредством матрицы A, и мы будем говорить, что строки матрицы A преобразуют y в η. Если существует последовательность $\xi_q = \sum\limits_{p=1}^{\infty} x_p a_{pq}$, то ξ называется *столбцевым преобразованием* вектора x посредством матрицы A, и мы будем говорить, что столбцы A преобразуют x в ξ.

Доказательство части (I) следующей теоремы принадлежит Динсу, части (II) — Ле-Бо *).

(**9.4**, III) (I) *Если A является H-матрицей, то ее строки и столбцы преобразуют любой вектор из E в вектор.*

(II) *Если*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} y_q \right|^2 \leqslant Q^2$$

для любого y из E или если

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left| \sum_{p=1}^{\infty} x_p a_{pq} \right|^2 \leqslant P^2$$

для любого x из E, то A является H-матрицей.

Для доказательства нам потребуются две леммы, первая из которых является просто другой формулировкой неравенства Коши — Шварца и ему обратного (см., например, Харди, Литтльвуд и Пойа [1], стр. 40, теорема 15, частный случай $k = k' = 2$).

*) Публикуется здесь впервые.

Лемма 1. *Если u и v — векторы, то* $|u^*v| \leqslant \|u\| \|v\|$ *и ряд* $\sum_k \bar{u}_k v_k$ *абсолютно сходится; наоборот, если* u^*v *существует для любого вектора u из E, то ряд* $\sum \bar{u}_k v_k$ *абсолютно сходится для любого вектора u и v является вектором.*

Лемма 2. *Два утверждения:*

(А) *повторная сумма по столбцам*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} x_p a_{pq} \right) y_q \quad \textit{существует на } E;$$

(Б) *ряд*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left| \sum_{p=1}^{\infty} x_p a_{pq} \right|^2 \quad \textit{сходится на } E,$$

следуют одно из другого. Аналогично, два утверждения:

(В) *повторная сумма по строкам*

$$\sum_{p=1}^{\infty} x_p \left(\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} y_q \right) \quad \textit{существует на } E;$$

(Г) *ряд*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} y_q \right|^2 \quad \textit{сходится на } E,$$

следуют одно из другого *).

Доказательство леммы 2. Предположим, что имеет место (А). Тогда $\sum_{p=1}^{\infty} x_p a_{pq}$ сходится на E, и поэтому, согласно лемме 1, любой столбец матрицы A является вектором, т. е. $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{pq}|^2$ сходится для любого q. Если $v_q = \sum_{p=1}^{\infty} x_p a_{pq}$, т. е. $v = x'A$, то по условию (А) ряд $\sum_{q=1}^{\infty} v_q y_q$ сходится для каждого y из E **). Следовательно, по лемме 1, v является вектором и, значит, имеет место (Б).

Пусть теперь выполняется условие (Б). Тогда v_q являются компонентами вектора и из леммы 1 следует, что выполняется условие (А).

---

*) В матричном обозначении четыре выражения (А) — (Г) будут соответственно $(x'A)\,y$, $x^*\bar{A}A'x$, $x'(Ay)$, y^*A^*Ay.

**) v является вектор-строкой, а x и y — вектор-столбцами.

Доказательство эквивалентности (В) и (Г) проводится аналогично.

Доказательство части (I) теоремы. Если A является H-матрицей, т. е. если существует внутренний предел для $A(x, y)$ на E, то выполняются условия (А) и (В) леммы 2, так как, по (**9.4**, II), существуют повторные суммы по строкам и по столбцам. Таким образом, по лемме 2, имеют место условия (Б) и (Г) и, значит, строчное и столбцевое преобразования векторов, принадлежащих E, необходимо будут векторами.

Доказательство части (II) теоремы. Пусть y' — вектор, для которого $y'_r = 0$ $(r < n)$, $y'_r = \lambda y_r$ $(r \geqslant n)$, где $y \in E$ и

$$\lambda = \left[\sum_{r=n}^{\infty} |y_r|^2\right]^{-\frac{1}{2}} \geqslant 1;$$

тогда y' также принадлежит E.

Следовательно,

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=n}^{\infty} a_{pq}\lambda y_q\right|^2 \leqslant Q^2 \quad \text{и} \quad \sum_{p=k}^{\infty}\left|\sum_{q=n}^{\infty} a_{pq}y_q\right|^2 \leqslant Q^2 \qquad (9.41)$$

для каждого k и $n \geqslant 1$.

Далее, если

$$v_p = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}y_q,$$

то $\sum_p |v_p|^2$ сходится по предположению, поэтому $\sum_{p=1}^{\infty} x_p v_p$ сходится для любого $x \in E$ к сумме, скажем, S. Для любого данного $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать такое μ, что для любого $m > \mu$

$$\sum_{p=\mu+1}^{m} |x_p|^2 < \frac{\varepsilon^2}{Q^2} \quad \text{и} \quad \left|\sum_{p=1}^{m} x_p v_p - S\right| < \varepsilon. \qquad (9.42)$$

Теперь мы можем выбрать такое ν, что для любого $n > \nu$ и для $p = 1, 2, \ldots, \mu$

$$\left|\sum_{q=1}^{n} a_{pq}y_q - v_p\right| < \frac{\varepsilon}{\mu},$$

откуда, принимая во внимание, что $|x_p| \leqslant 1$, получаем:

$$\left|\sum_{p=1}^{\mu} x_p \sum_{q=1}^{n} a_{pq}y_q - \sum_{p=1}^{\mu} x_p v_p\right| < \varepsilon. \qquad (9.43)$$

Учитывая (9.41), (9.42) и неравенство Коши — Шварца, будем иметь:

$$\left|\sum_{p=\mu+1}^{m} x_p \sum_{q=1}^{n} a_{pq}y_q - \sum_{p=\mu+1}^{m} x_p v_p\right| = \left|\sum_{p=\mu+1}^{m} x_p \sum_{q=n+1}^{\infty} a_{pq}y_q\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{p=\mu+1}^{m} |x_p|^2 \sum_{p=\mu+1}^{m} \left|\sum_{q=n+1}^{\infty} a_{pq}y_q\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\varepsilon}{Q}\cdot Q = \varepsilon. \qquad (9.44)$$

Следовательно, из (9.42) — (9.44) получаем:

$$\left|\sum_{p=1}^{m} x_p \sum_{q=1}^{n} a_{pq}y_q - S\right| < 3\varepsilon \quad \text{для} \quad m > \mu \text{ и } n > \nu.$$

Аналогично проводится доказательство при предположении, что

$$\sum_{q=1}^{\infty}\left|\sum_{p=1}^{\infty} x_p a_{pq}\right|^2 \leqslant P^2 \quad \text{на} \quad E.$$

Теорема доказана.

В связи с этой теоремой можно отметить, что утверждения

(а) $\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}y_q\right|^2$ сходится для данного бесконечного множества единичных векторов y и

(б) $\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}y_q\right|^2 \leqslant Q^2$ для того же множества единичных векторов

не являются эквивалентными. Например, пусть $y_m = 1$, $y_q = 0$ $(q \neq m)$, $a_{pp} = p$, $a_{pq} = 0$ $(q \neq p)$; тогда $\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}y_q\right|^2 = m^2$, т. е. указанный ряд сходится для системы фундаментальных единичных векторов. Однако очевидно, что эти суммы не ограничены в совокупности (если давать m значения 1, 2, ...).

Необходимое и достаточное условие (типа условий (**9.4**, III)), чтобы матрица A была H-матрицей, будет дано в (**9.4**, VI), следствие 2.

Значение $A(x, y)$ зависит от значений x и y, которые предполагаются взятыми на E. Представляет интерес определить область $D(A)$ комплексной плоскости, содержащую значения $A(x, y)$, соответствующие значениям x и y на E. Следующая теорема содержит некоторый результат в этом направлении.

(**9.4**, IV) *Если h — значение $A(x, y)$ на E, то любое число g, такое, что $|g| \leqslant |h|$, является значением $A(x, y)$ на E.*

Если $y \in E$, то при α действительном вектор $e^{i\alpha}y \in E$ и $A(x, e^{i\alpha}y) = e^{i\alpha}A(x, y)$. Следовательно, если h является значением $A(x, y)$ на E, то любое комплексное число, равное ему по модулю, также является значением $A(x, y)$ на E; в частности, $|h|$ также принадлежит к таким значениям, и соответствующее ему $A(x, y)$ необходимо будет действительным.

Предположим теперь, что $|A(x^0, y^0)| = g'$, $|A(x', y')| = h'$, где $g' > 0$, $h' > 0$, $g' < h'$. Если x и y принадлежат E, то рассмотрим $z = a(t)x + b(t)y$, где:

(I) $a(t)$ и $b(t)$ — действительные функции от t, непрерывные на замкнутом интервале $[0, 1]$;

(II) $a(0) = 1$, $b(0) = 0$, $a(1) = 0$, $b(1) = 1$;

(III) $z\bar{z} = 1$ для любого значения t в замкнутом интервале $[0, 1]$.

Обозначив для краткости $a \equiv a(t)$, $b \equiv b(t)$, из (III) имеем:

$$a^2 + b^2 + ab(x\bar{y} + \bar{x}y) - 1 = 0,$$

откуда, решая относительно b, получаем:

$$2b = -a(x\bar{y} + \bar{x}y) \pm \sqrt{a^2(x\bar{y} + \bar{x}y)^2 + 4(1 - a^2)};$$

условие (II) требует взять перед корнем знак $+$. Таким образом, a и b могут быть определены так, что удовлетворяются условия (I)—(III), и тогда $z = ax + by$ является единичным вектором, непрерывно изменяющимся от x к y, когда t пробегает значения от 0 до 1.

Возьмем теперь векторы u и v, построенные таким же путем, как и z, но принимающие соответственно значения от x^0 до x' и от y^0 до y':

$$u = a(t)x^0 + b(t)x', \quad v = c(t)y^0 + d(t)y'.$$

Тогда

$$A(u, v) = acA(x^0, y^0) + adA(x^0, y') + bcA(x', y^0) + bdA(x', y')$$

является непрерывной функцией от t, а значит, непрерывен и $|A(u, v)|$, который поэтому будет принимать любые значения между g' и h'.

Теперь осталось только показать, что значение 0 также принимается на E.

Если $x_m = 1$, $x_p = 0$ $(p \neq m)$ и $y_n = 1$, $y_q = 0$ $(q \neq n)$, то $A(x, y) = a_{mn}$, т. е. *любой элемент матрицы A является значением $A(x, y)$ на E*. Таким образом, когда A содержит нулевой элемент, нуль является значением $A(x, y)$ на E. Если же ни один из элементов A не равен нулю, то мы возьмем $x_1 = 1$, $x_p = 0$ $(p \neq 1)$ и $y_q = 0$ для всех q, исключая y_1 и y_2; тогда

$$A(x, y) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$

обращается в нуль, если $y_2 = -\dfrac{a_{11}y_1}{a_{12}}$, а из условия $|y_1|^2 + |y_2|^2 = 1$ определяется $|y_1|$. Следовательно, значение 0 принимается на E в каждом случае.

Теорема доказана.

Однако если $A(x, y)$ заменить квадратичной формой $A(x, \bar{x})$, то только что доказанный результат не всегда имеет место. Область, соответствующая значениям $A(x, \bar{x})$ на E, как было показано (Теплиц [4], 195—196, Хаусдорф [2]), является *выпуклой*. (См. также Винтнер [1], § 18; Стоун [1], 181; об общих теоремах, не обязательно относящихся к гильбертову пространству, см. Стоун [2].) Так как $I(x, \bar{x}) = 1$ на E, то мы видим, что эта область может состоять из единственной точки, т. е. она может не содержать начала (точки 0).

Если A — диагональная матрица $a_{nn} = \frac{1}{n}$, то $A(x, \bar{x}) > 0$ на E, однако можно выбрать ее значение сколь угодно близкое к 0, так как $\frac{1}{n}$ является одним из значений $A(x, \bar{x})$.

Билинейная форма $\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} x_p a_{pq} y_q$ называется *ограниченной*, если существует положительное число M, такое, что

$$\left| \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} x_p a_{pq} y_q \right| \leqslant M$$

для любого n и для всех векторов x, $y \in E$. Нижняя грань всех чисел M, удовлетворяющих этому неравенству, называется *точной гранью* билинейной формы. Поскольку мы будем интересоваться вопросами ограниченности билинейной формы, то можно без ограничения общности рассматривать только действительные матрицы и действительные векторы. В самом деле, если $x = x' + ix''$, $y = y' + iy''$, где x и y — векторы, то x', x'', y', y'' — действительные векторы, а $\xi = \frac{x'}{\|x'\|}$, $\eta = \frac{y'}{\|y'\|}$ — единичные векторы; если $\sum_p \sum_q x_p a_{pq} y_q$ ограничена, то ограниченной будет и $\sum_p \sum_q \xi_p a_{pq} \eta_q$, и наоборот. Если $a_{pq} = b_{pq} + ic_{pq}$ (b_{pq} и c_{pq} — действительные числа), а $\sum_p \sum_q \xi_p b_{pq} \eta_q$ и $\sum_p \sum_q \xi_p c_{pq} \eta_q$ по отдельности ограничены, то ограниченной будет и $\sum_p \sum_q \xi_p a_{pq} \eta_q$, и наоборот.

Следующая теорема, принадлежащая Хеллингеру и Теплицу ([2], § 10), показывает, что между ограниченными билинейными формами и H-матрицами существует тесная связь.

(**9.4**, V) *Если на E существует внутренний (Прингсхейма) предел для $A(x, y)$, то так определенные значения $A(x, y)$ образуют ограниченное множество.*

Пусть $c_p > 0$ для любого p и пусть $\sum_{p=1}^{\infty} c_p^2 \leqslant 1$. Предположим, что $A(x, y)$ не ограничена. Тогда существуют две последовательности единичных векторов $\{x^{(i)}\}$ и $\{y^{(i)}\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ такие, что $|A(x^{(i)}, y^{(i)})| \to \infty$ при $i \to \infty$. Согласно сделанному выше замечанию мы можем предположить, что $A(x, y)$ действительна; изменяя, если это необходимо, знаки у всех a_{pq}, мы можем также предполагать, что $A(x^{(i)}, y^{(i)}) \to +\infty$. Поэтому мы можем выбрать n_1 и r_1 такими, что

$$A_{n_1}(x^{(r_1)}, y^{(r_1)}) > \frac{1}{c_1^2}, \tag{9.45}$$

где $A_n(x, y) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} x_p a_{pq} y_q$. Введем обозначения:

$$u_1 = c_1 x_1^{(r_1)}, \quad u_2 = c_1 x_2^{(r_1)}, \quad \ldots, \quad u_{n_1} = c_1 x_{n_1}^{(r_1)},$$
$$v_1 = c_1 y_1^{(r_1)}, \quad v_2 = c_1 y_2^{(r_1)}, \quad \ldots, \quad v_{n_1} = c_1 y_{n_1}^{(r_1)}.$$

Тогда

$$\sum_{p=1}^{n_1} u_p^2 = c_1^2 \sum_{p=1}^{n_1} \left(x_p^{(r_1)}\right)^2 \leqslant c_1 < 1 \quad \text{и} \quad \sum_{p=1}^{n_1} v_p^2 \leqslant c_1^2 < 1 \tag{9.46}$$

и, согласно (9.45), $A_{n_1}(u, v) > 1$.

Выберем теперь $n_2 > n_1$ и $r_2 > r_1$ так, чтобы

$$A_{n_2}(x^{(r_2)}, y^{(r_2)}) > \frac{1 + M_1 + 2N_1 + 2P_1}{c_2^2}, \tag{9.47}$$

где M_1, N_1, P_1 — верхние грани сумм соответственно

$$\sum_{p=1}^{n_1} \sum_{q=1}^{n_1} x_p a_{pq} y_q, \quad \sum_{p=1}^{n_1} \sum_{q=n_1+1}^{\infty} x_p a_{pq} y_q, \quad \sum_{p=n_1+1}^{\infty} \sum_{q=1}^{n_1} x_p a_{pq} y_q$$

для x и y на E. Существование граней для последних двух сумм следует из того, что они состоят из *конечного* числа сходящихся линейных форм, а линейная форма $\sum_{p=1}^{\infty} a_p x_p$, которая сходится для любого $x \in E$, ограничена согласно неравенству Коши — Шварца и ему обратному.

Теперь положим

$$u_{n_1+1} = c_2 x_{n_1+1}^{(r_2)}, \quad u_{n_1+2} = c_2 x_{n_1+2}^{(r_2)}, \quad \ldots, \quad u_{n_2} = c_2 x_{n_2}^{(r_2)},$$
$$v_{n_1+1} = c_2 y_{n_1+1}^{(r_2)}, \quad v_{n_1+2} = c_2 y_{n_1+2}^{(r_2)}, \quad \ldots, \quad v_{n_2} = c_2 y_{n_2}^{(r_2)}.$$

Тогда

$$\sum_{p=1}^{n_2} u_p^2 \leqslant c_1^2 + c_2^2 \sum_{p=n_1+1}^{n_2} \left(x_p^{(r_2)}\right)^2 \leqslant c_1^2 + c_2^2 < 1$$

и

$$\sum_{p=1}^{n_2} v_p^2 \leqslant c_1^2 + c_2^2 < 1. \tag{9.48}$$

Но

$$A_{n_2}(u, v)=c_1^2A_{n_1}(x^{(r_1)}, y^{(r_1)})+\sum_{p=1}^{n_1}\sum_{q=n_1+1}^{n_2}c_1x_p^{(r_1)}a_{pq}c_2y_q^{(r_2)}+$$
$$+\sum_{p=n_1+1}^{n_2}\sum_{q=1}^{n_1}c_2x_p^{(r_2)}a_{pq}c_1y_q^{(r_1)}+c_2^2\sum_{p=n_1+1}^{n_2}\sum_{q=n_1+1}^{n_2}x_p^{(r_2)}a_{pq}y_q^{(r_2)}. \quad (9.49)$$

Второй и третий члены в правой части (9.49) не превышают по модулю соответственно N_1 и P_1 и, кроме того,

$$c_2^2A_{n_1}(x^{(r_2)}, y^{(r_2)})\leqslant M_1,$$

следовательно, (9.47) дает

$$1+M_1+2N_1+2P_1<c_2^2\Bigg[A_{n_1}(x^{(r_2)}, y^{(r_2)})+$$
$$+\sum_{p=1}^{n_1}\sum_{q=n_1+1}^{n_2}x_p^{(r_2)}a_{pq}y_q^{(r_2)}+\sum_{p=n_1+1}^{n_2}\sum_{q=1}^{n_1}x_p^{(r_2)}a_{pq}y_q^{(r_2)}+$$
$$+\sum_{p=n_1+1}^{n_2}\sum_{q=n_1+1}^{n_2}x_p^{(r_2)}a_{pq}y_q^{(r_2)}\Bigg]<$$
$$<M_1+N_1+P_1+c_2^2\sum_{p=n_1+1}^{n_2}\sum_{q=n_1+1}^{n_2}x_p^{(r_2)}a_{pq}y_q^{(r_2)}.$$

Таким образом, $c_2^2\sum\limits_{p=n_1+1}^{n_2}\sum\limits_{q=n_1+1}^{n_2}x_p^{(r_2)}a_{pq}y_q^{(r_2)}>1+N_1+P_1$, и теперь из неравенства $A_{n_1}(u, v)>1$, (9.49) и сделанных выше оценок следует, что $A_{n_2}(u, v)>2$.

Продолжая таким путем, мы построим два вектора u и v на или внутри единичной гиперсферы E (см. (9.46) и (9.48)) такие, что $A_{n_s}(u, v)>s$ $(s=1, 2, \ldots)$, т. е. такие, что $A_n(u, v)$ расходится при $n\to\infty$. Следовательно, внутренний предел не может существовать, а это противоречит предположению. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что *если A является H-матрицей, то $|A(x, y)|\leqslant M$ для любой пары векторов x и y на E. Нижняя грань $P(A)$ чисел M, удовлетворяющих этому неравенству, называется H-гранью $A(x, y)$ (или H-гранью матрицы A). В случае квадратичной формы $A(x, \bar{x})$ нижняя грань чисел M обозначается через $M(A)$.*

В (**9.6**, VII) будет показано, что при таком определении $P(A)$ является *гранью* матрицы в соответствии с определением грани, данным в § 2.3; это относится и к $M(A)$ в том случае, когда A — эрмитова матрица, но в общем случае это не так.

Если $|A(x, y)|\leqslant P$ для любой пары векторов x, y на E, то тождество

$$x_pa_{pq}y_q\equiv a_{pq}\frac{x_p}{\|x\|}\frac{y_q}{\|y\|}\|x\|\,\|y\|$$

показывает, что для *любой* пары векторов x, y

$$|A(x, y)| \leqslant P\,\|x\|\,\|y\|.$$

С введением H-грани $P(A)$ теорему (**9.4**, IV) можно сформулировать следующим образом, обозначив, как и прежде, через $D(A)$ область комплексной плоскости, состоящую из значений $A(x, y)$ на E:

$D(A)$ является кругом с центром в начале координат радиуса $P(A)$.

Покажем теперь, что справедлива теорема, обратная (**9.4**, V), а именно:

(**9.4**, VI) *Если $A(x, y)$ ограничена, то A есть H-матрица, т. е. на E существует внутренний (Прингсхейма) предел для $A(x, y)$.*

Лемма. *Два утверждения:*

$$\text{(А)}\qquad \left|\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty} x_p a_{pq} y_q\right)\right| \leqslant P \quad \text{на } E$$

и

$$\text{(Б)}\qquad \sum_{q=1}^{\infty}\left|\sum_{p=1}^{\infty} x_p a_{pq}\right|^2 \leqslant P^2 \quad \text{на } E,$$

эквивалентны.

Доказательство непосредственно следует из неравенства Коши — Шварца и ему обратного.

Доказательство теоремы. Так как $A(x, y)$ ограничена, то выполняется условие (A) предыдущей леммы, а значит, выполняется и условие (Б). Следовательно, по (**9.4**, III), (II), A является H-матрицей.

Следствие 1. *Если $A(x, y)$ ограничена, то $\sum\limits_{p,\,q=1}^{\infty} x_p a_{pq} y_q$ сходится в трех употребительных смыслах.*

Это непосредственно следует из (**9.4**, VI) и (**9.4**, II).

Следствие 2. *Для того чтобы A была H-матрицей, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{q=1}^{\infty}\left|\sum_{p=1}^{\infty} x_p a_{pq}\right|^2 \leqslant P^2 \quad \text{для любого } x \text{ на } E$$

или

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} y_q\right|^2 \leqslant Q^2 \quad \text{для любого } y \text{ на } E.$$

Достаточность каждого из этих условий была доказана в (**9.4**, III), (II). Необходимость следует из (**9.4**, V) и леммы к (**9.4**, VI).

Следствие 2 является другой формулировкой теоремы (**9.4**, III), (I) и (II) в более общей форме. Таким образом, мы видим, что векторы, в которые преобразуются векторы из E строками или столбцами H-матрицы, ограничены в совокупности.

Из приведенных выше результатов вытекает, что *два утверждения*:

(а) *ряд* $\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}y_q\right|^2$ *сходится на* E,

(б) $\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}y_q\right|^2 \leqslant Q^2$ *на* E,

не эквивалентны. Действительно, из леммы 2 к (**9.4**, III) следует, что (а) эквивалентно существованию на E повторной суммы по строкам, в то время как из следствия 2 (**9.4**, VI) следует, что (б) эквивалентно существованию на E внутреннего (Прингсхейма) предела; однако существование повторной суммы по строкам не всегда влечет существование внутреннего предела.

Аналогичное замечание относится к столбцам.

9.5. Грани H-матриц

Сделаем сначала несколько общих замечаний. Пары матриц (A, A'), $(A, \bar{A})$, (A, A^*), где обозначения A', $\bar{A}$, A^* имеют обычный смысл (§ 1.3), могут не принадлежать одному и тому же ассоциативному полю $\mathcal{F}$. Так, если $\mathcal{F}$ — множество матриц с конечными строками и A — матрица с конечными строками, но не с конечными столбцами, то A' и A^* не принадлежат $\mathcal{F}$, или если $\mathcal{F}$ — ассоциативное поле K_r-матриц и ряды по столбцам K_r-матрицы A не сходятся абсолютно, то в таком случае A' и A^* не принадлежат полю $\mathcal{F}$. Винтнер ([1], 28) называет A^*A и AA^* соответственно *левой и правой нормами матрицы* A. Может случиться, что одна из них существует, а другая нет. Так, если A есть K_r-матрица, то AA^* существует, так как из $(AA^*)_{nk}=\sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}\bar{a}_{kl}$ следует:

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}\bar{a}_{kl}\right| \leqslant |A| \sum_{l=1}^{\infty} |a_{nl}| \leqslant |A|^2,$$

где $|A|$ — K_r-грань матрицы A. Однако те же рассуждения неприменимы к ряду

$$(A^*A)_{nk}=\sum_{l=1}^{\infty} \bar{a}_{ln}a_{lk},$$

который является скалярным произведением k-го и n-го столбцов из A; если, например, все элементы первого столбца в A равны 1, а все другие элементы в A равны 0, то $(A^*A)_{11}$ не существует.

В гильбертовом пространстве как AA^*, так и A^*A существуют (см. (**9.5**, IV), следствие; это утверждение вытекает из неравенства Коши — Шварца).

Если оба произведения AA^* и A^*A существуют и $AA^* = A^*A$, то матрица A называется *нормальной*.

Может случиться, что AA^* и A^*A существуют, но не равны между собой. Например, если $a_{12} = 1$, а все другие элементы из A равны нулю, то $(AA^*)_{11} = 1$, однако $(A^*A)_{11} = 0$; также $(AA^*)_{22} = 0$, но $(A^*A)_{22} = 1$.

Если A — эрмитова матрица, то обе нормы матрицы равны A^2 всякий раз, когда A^2 существует. Отметим, что существуют нормальные матрицы, не являющиеся эрмитовыми.

Ясно, что матрицы AA^* и A^*A являются эрмитовыми. В самом деле, так как $(AB)^* = B^*A^*$ (§ 1.3), то мы имеем:

$$(AA^*)^* = A^{**}A^* = AA^* \quad \text{и} \quad (A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A.$$

Легко видеть, что *если нижняя треугольная матрица является нормальной, то она будет диагональной матрицей* (см. пример 1 к гл. 9).

Эрмитовы компоненты матрицы. Положим $A = A_1 + iA_2$, где

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad A_2 = \frac{1}{2}i(A^* - A),$$

и мы, таким образом, получаем разложение A на две *эрмитовы компоненты*. В самом деле,

$$A_1^* = \frac{1}{2}(A^* + A) = A_1 \quad \text{и} \quad A_2^* = -\frac{1}{2}i(A - A^*) = A_2.$$

Такое разложение *единственно*. Действительно, если $A = B_1 + iB_2$ — другое такое разложение, то мы должны также иметь $B_1^* = B_1$, $B_2^* = B_2$ и, следовательно, $A^* = B_1 - iB_2$. Отсюда

$$B_1 = \frac{1}{2}(A + A^*) = A_1 \quad \text{и} \quad B_2 = \frac{1}{2}i(A^* - A) = A_2.$$

(**9.5**, I) *) *Если A^2 существует, то A является нормальной матрицей тогда и только тогда, когда ее эрмитовы компоненты коммутативны.*

Если A — нормальная матрица, то $A^*A = AA^*$. Тогда если A_1 и A_2 — эрмитовы компоненты A, то

$$A_1A_2 = \frac{1}{2}(A + A^*)\frac{1}{2}i(A^* - A) = \frac{1}{4}i\{(A^*)^2 - A^2\} = A_2A_1.$$

*) Теоремы (**9.5**, I) и (**9.5**, II) см. Винтнер [1], 32, 40, 41.

Наоборот, если $A_1A_2 = A_2A_1$, то из условий $A_1^* = A_1$, $A_2^* = A_2$ мы имеем:

$$AA^* = (A_1 + iA_2)(A_1^* - iA_2^*) = (A_1 + iA_2)(A_1 - iA_2) = A_1^2 + A_2^2 = A^*A.$$

Будем в дальнейшем называть *эрмитову H-матрицу HH-матрицей.*

(**9.5**, II) *Для HH-матриц* $M(A) = P(A)$, *для H-матриц* $P(A) \leqslant 2M(A)$.

(I) Предположим, что A есть HH-матрица, а x и y принадлежат E. Тогда

$$A(x+y, \bar{x}+\bar{y}) = A(x, \bar{x}) + A(x, \bar{y}) + A(y, \bar{x}) + A(y, \bar{y}) =$$
$$= A(x, \bar{x}) + A(x, \bar{y}) + \overline{A(x, \bar{y})} + A(y, \bar{y}),$$

так как A эрмитова. Следовательно,

$$A(x+y, \bar{x}+\bar{y}) - A(x-y, \bar{x}-\bar{y}) =$$
$$= 2A(x, \bar{y}) + \overline{2A(x, \bar{y})} = 4\,\mathrm{Re}\,\{A(x, \bar{y})\}. \quad (9.51)$$

Так как верхняя грань значений $|A(x, y)|$ для всех x и y на E является такой же, как и для $\mathrm{Re}\,\{A(x, y)\}$ или для $\mathrm{Re}\,\{A(x, \bar{y})\}$ (см. замечание в начале доказательства (**9.4**, IV)), то достаточно доказать, что модуль выражения в левой части равенства (9.51) не превосходит $4M(A)$. Когда это будет доказано, мы будем иметь $P(A) \leqslant M(A)$, а учитывая, что всегда $M(A) \leqslant P(A)$, мы и получим требуемый результат.

Мы имеем $|A(x, \bar{x})| \leqslant M(A)\|x\|^2$, так что модуль выражения в левой части (9.51) не превосходит величину

$$M(A)(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = M(A)(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2) = 4M(A).$$

Первая часть (**9.5**, II) доказана.

(II) Разложим A на ее эрмитовы компоненты A_1 и A_2, т. е. $A = A_1 + iA_2$. Так как, очевидно, $P(A) \leqslant P(A_1) + P(A_2)$, то мы имеем, по только что доказанной части (I) этой теоремы, $P(A) \leqslant M(A_1) + M(A_2)$. Но эрмитова форма является действительной ((**9.4**, II), следствие), и поэтому $A_1(x, \bar{x}) = \mathrm{Re}\,\{A(x, \bar{x})\}$, $A_2(x, \bar{x}) = \mathrm{Im}\,\{A(x, \bar{x})\}$. Следовательно,

$$M(A_1) \leqslant M(A), \quad M(A_2) \leqslant M(A),$$

откуда и получаем $P(A) \leqslant 2M(A)$.

$P(A)$ *может оказаться в точности равной* $2M(A)$. Например, возьмем $a_{12} = 1$, а все другие элементы матрицы A положим равными нулю. Тогда

$$\sum_{pq} x_p a_{pq} y_q = x_1 y_2,$$

так что, полагая $x_1 = y_2 = 1$, $x_p = 0$ $(p \neq 1)$, $y_q = 0$ $(q \neq 2)$, мы получим $P(A) = 1$. В нашем случае $M(A)$ является верхней гранью для $x_1\bar{x}_2$. Будем теперь брать в качестве x_1 и x_2 действительные числа, а $x_p = 0$ для $p > 2$. Тогда $x_1^2 + x_2^2 = 1$, так что произведение $x_1\bar{x}_2 = x_1\sqrt{1 - x_1^2}$ имеет максимум при $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и, значит, $M(A) = \frac{1}{2}$.

Приведем *пример ограниченной билинейной формы*. Используя метод Фейера и Рисса [1], покажем, что

$$\left| \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p+q+1} \right| \leqslant \pi$$

для x и y на E.

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, где $a_n \geqslant 0$ $(0 \leqslant n \leqslant N)$ и $f(z) \not\equiv 0$. Тогда по теореме Коши

$$\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 dx = -i \int_{0}^{\pi} \{f(e^{i\theta})\}^2 e^{i\theta} d\theta,$$

и поэтому

$$\int_{0}^{1} \{f(x)\}^2 dx < \int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 dx \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

откуда

$$\sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} \frac{a_p a_q}{p+q+1} < \pi \sum_{n=0}^{N} a_n^2.$$

Следовательно, по теореме (**9.5**, II), (I):

$$\left| \sum_{p=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} \frac{x_p y_q}{p+q+1} \right| < \pi \|x\| \|y\|;$$

устремляя N к ∞, мы получим требуемый результат для всех x и y на E.

Гильберт доказал элементарными методами, что если

$$S \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p+q} \quad \text{и} \quad T \equiv \sum_{p=1}^{\infty} {\sum_{q=1}^{\infty}}' \frac{x_p y_q}{p-q}$$

(штрих после знака $\sum$ означает, что при суммировании член при $p = q$ опускается), то для x и y на E

$$|S| \leqslant \pi, \quad |T| \leqslant 2\pi$$

(см. пример 2 к гл. 9). Более сложными методами можно доказать, что на самом деле $|T| \leqslant \pi$ (см. пример 7 к гл. 9) и $|S| < \pi$. (Дальнейшие сведения о подобного рода неравенствах и их обобщения см. Харди, Литтльвуд и Пойа, [1], гл. VIII и IX.)

Если $\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}| x_p y_q$ ограничена, то $A(x, y)$ называется *абсолютно ограниченной*. Всякая абсолютно ограниченная форма ограничена гранью Гильберта (§ 2.3), так как $\{|x_n|\}$ и $\{|y_n|\}$ принадлежат σ_2 всякий раз, когда $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ принадлежат σ_2. Так, приведенная выше форма Гильберта S является абсолютно ограниченной, так как $a_{pq} = \frac{1}{p+q}$ положительны для любых $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$.

Мы сейчас докажем, что форма T не является абсолютно ограниченной. Для этого достаточно показать, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty}{}' \frac{x_p y_q}{|p-q|} = \infty \tag{9.52}$$

для надлежащим образом подобранных векторов x и y.

Возьмем $x_p = p^{-\frac{1}{2}} (\log p)^{-1}$ $(p > 1)$, $y_q = q^{-\frac{1}{2}} (\log q)^{-1}$ $(q > 1)$, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Тогда x и y будут векторами и

$$\sum_{=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty}{}' \frac{x_p y_q}{|p-q|} > \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} k^{-1} x_{q+k} y_q > \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} x_m y_m \text{ *)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m (\log m)^2} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{k+1}^{\infty} \frac{du}{u (\log u)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log (k+1)}.$$

Последний ряд, состоящий из положительных членов, расходится, что и доказывает (9.52).

Мы видим, что *грань Гильберта не является нормальной* (§ 2.3, условие (V)); действительно, матрица (a_{pq}), где $a_{pq} = \frac{1}{p-q}$ $(p \neq q)$, $a_{pp} = 0$, является H-матрицей согласно (**9.4**, VI), однако $(\overset{+}{a}_{pq})$, где $\overset{+}{a}_{pq} = \frac{1}{|p-q|}$ $(p \neq q)$, $\overset{+}{a}_{pp} = 0$, не является H-матрицей **). Этот пример также показывает, что *сходящаяся билинейная форма может не быть абсолютно сходящейся*.

(**9.5**, III) *Если* $\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2$ *сходится, то* $A(x, y)$ *ограниченная*.

---

*) Так как y_q монотонно убывает с возрастанием q, $y_q \equiv y_{m-k} > y_m$; аналогично $x_{q-k} > x_{q+k}$.

**) Это замечание относительно H-грани принадлежит Аллену.

По неравенству Коши — Шварца,

$$|A(x,\ y)|^2 \leqslant \left[\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty}|x_p||a_{pq}|\right)|y_q|\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|y\|^2 \sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty}|x_p||a_{pq}|\right)^2,$$

следовательно, $|A(x,\ y)|^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2 \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}|a_{pq}|^2$, откуда видно, что $\sqrt{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}|a_{pq}|^2}$ является верхней гранью формы.

Обратное утверждение неверно, как это видно из того факта, что S, где $a_{pq} = \frac{1}{p+q}$, ограниченная.

Следующее расширение понятия гильбертова векторного пространства дает возможность обобщить многие теоремы о билинейных формах.

Совокупность всех последовательностей x, таких, что ряды $\sum_{p=1}^{\infty}|x_p|^r$ сходятся, образует *пространство*, которое мы будем обозначать σ_r.

Совокупность всех последовательностей $(x,\ y)$, таких, что x принадлежит σ_r, а y принадлежит σ_s, называется *пространством* σ_{rs}. Мы будем всюду предполагать, что $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ и $r>1$.

Билинейная форма $A(x,\ y)$ называется *ограниченной* в σ_{rs}, если $|A_n(x,\ y)| \leqslant M$ для любого n и всех единичных векторов x, y из σ_{rs}. Нижняя грань $P(A)$ чисел M, удовлетворяющих этому неравенству, называется *точной гранью* $A(x,\ y)$ в σ_{rs} или гранью матрицы A в σ_{rs}.

Длина вектора x в σ_r определяется как

$$\|x\| = \left(\sum_{p=1}^{\infty}|x_p|^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

(9.5, IV) *Если* $A(x,\ y)$ *имеет в* σ_{rs} *грань* P, *то*

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{\infty}|a_{pq}|^s \leqslant P^s \quad \textit{для любого } q \\ \textit{и} \quad &\sum_{b=1}^{\infty}|a_{pq}|^r \leqslant P^r \quad \textit{для любого } p. \end{aligned}\right\} \qquad (9.53)$$

Мы можем взять все x_p равными нулю, кроме $x_i = 1$, и все y_q равными нулю, кроме $y_1, y_2, \ldots, y_j$. Тогда, так как $A(x, y)$ имеет в σ_{rs} грань P, то

$$|A(x, y)| = \left|\sum_{q=1}^{j} a_{iq} y_q\right| = P\left(\sum_{q=1}^{j} |y_q|^s\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Это неравенство имеет место для всех $\{y_q\}$ из σ_s и любого j. Следовательно, применяя обратное неравенство Гёльдера (см., например, Харди, Литтльвуд и Пойа, [1], 40), мы получим:

$$\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^r \leqslant P^r \quad \text{для любого } p,$$

и второе из неравенств (9.53) тем самым доказано. Первое неравенство в (9.53) доказывается аналогично.

Следствие. *Если $A(x, y)$ имеет грань P в σ_2, то*

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{\infty} |a_{pq}|^2 \leqslant P^2 \quad \textit{для любого } q, \\ &\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2 \leqslant P^2 \quad \textit{для любого } p. \end{aligned}\right\} \tag{9.54}$$

Обратное утверждение неверно. Рассмотрим, например, форму (Хеллингер и Теплиц [2], 306)

$$\sum_{p,q} \frac{x_p y_q}{(p+q)^{1-\varepsilon}}, \quad \text{где} \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Условие (9.54) удовлетворяется, однако для

$$x_p = y_p = p^{-\left(\frac{1}{2}+\eta\right)} \quad (\eta > 0)$$

мы имеем:

$$A(x, y) = \sum_{p,q} \frac{1}{(p+q)^{1-\varepsilon}} \frac{1}{(pq)^{\frac{1}{2}+\eta}} > \sum_{p,q} \frac{1}{(p+q)^m},$$

где $m = 2 + 2\eta - \varepsilon$, так как $pq < (p+q)^2$ для $p > 0$, $q > 0$. Следовательно,

$$A(x, y) > \frac{1}{2^m} + \frac{2}{3^m} + \frac{3}{4^m} + \ldots$$

и ряд справа расходится для $m \leqslant 2$, т. е. для $\eta \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$.

Следующая теорема, принадлежащая Шуру [2], 6 *), дает простые достаточные условия для того, чтобы A была H-матрицей:

(9.5, V) *Еи слматрица A является одновременно K_r- и K_c-матрицей, т. е.е сли*

(I) $$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant M_1 \quad \textit{для любого } n$$

и

(II) $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant M_2 \quad \textit{для любого } k,$$

то A является H-матрицей и ее H-грань не превосходит $(M_1M_2)^{\frac{1}{2}}$.

Предположим сначала, что все элементы A действительные и неотрицательные. Из условия (II) следует, что $c = A'A$ существует и

$$c_{nk} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{in}a_{ik}.$$

Полагая $z_n \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$, мы имеем:

$$\sum_{k=1}^{N} c_{nk} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{\infty} a_{in}a_{ik} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{in} \sum_{k=1}^{N} a_{ik} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} a_{in}z_i$$

для любого N. Следовательно, учитывая (I) и (II), получим:

$$\sum_{k=1}^{N} c_{nk} \leqslant M_1M_2 \quad \text{для любого } n \text{ и } N.$$

Поэтому $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}$ сходится, и если $c_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}$, то мы имеем $c_n \leqslant M_1M_2$ для любого n. Пусть ω_n — верхняя грань чисел

$$u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_i c_{ik} x_k$$

для $\|x\| = 1$.

Чтобы определить ω_n, нам потребуется найти максимум u при фиксированном n, действительных (c_{ik}) и $\{x_i\}$ с $\|x\| = 1$ **). Применяя метод множителей Лагранжа и полагая

$$F \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0,$$

---

*) Доказательство незначительно видоизменено Алленом, чтобы согласовать его с определением H-грани, данным в §§ 2.3 и 9.4.

**) Здесь $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$, и мы скажем, что x лежит на E_n.

мы получим для определения x_i, доставляющих максимум или минимум величине u, систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

или, так как $c_{nk}=c_{kn}$, то

$$2(c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\ldots+c_{in}x_n)+2\lambda x_i=0 \qquad (1\leqslant i\leqslant n).$$

Умножая эти равенства соответственно на $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ и складывая, мы получим $u+\lambda=0$, так что

$$c_{i1}x_1+c_{i2}x_2+\ldots+c_{i,\,i-1}x_{i-1}+\\ +(c_{ii}-u)\,x_i+c_{i,\,i+1}x_{i+1}+\ldots+c_{in}x_n=0.$$

Следовательно, максимальные и минимальные значения u являются корнями характеристического уравнения (§ 1.6):

$$\begin{vmatrix} c_{11}-u & c_{12} & \ldots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22}-u & \ldots & c_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn}-u \end{vmatrix}=0,$$

и ω_n будет наибольшим из этих корней. Отсюда следует, что можно найти n действительных чисел $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$, которые не все равны нулю, удовлетворяющих n уравнениям:

$$\omega_n\xi_p=\sum_{q=1}^{n}c_{pq}\xi_q \qquad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Пусть $|\xi_p|$ — наибольшее из чисел $|\xi_1|,\ |\xi_2|,\ |\xi_3|,\ \ldots,\ |\xi_n|$; тогда

$$\omega_n|\xi_p|\leqslant\sum_{q=1}^{n}c_{pq}|\xi_q|\leqslant|\xi_p|\sum_{q=1}^{n}c_{pq}\leqslant|\xi_p|\,M_1M_2$$

для любого n, и следовательно, $\omega_n\leqslant M_1M_2$ для любого n. Таким образом,

$$\left|\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}x_pc_{pq}x_q\right|\leqslant M_1M_2$$

для любого n и любого x на E_n. Но

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}x_pc_{pq}x_q=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}x_px_q\sum_{k=1}^{\infty}a_{kp}a_{kq}=\\ =\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{n}a_{kp}x_p\right)\left(\sum_{q=1}^{n}a_{kq}x_q\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{n}a_{kp}x_p\right)^2.$$

Так как (a_{kp}) и $\{x_p\}$ действительные, то мы получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{p=1}^{n} a_{kp}x_p\right|^2 \leqslant M_1M_2$$

для любого n и любого x на E_n. Устремляя n к ∞, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}x_p\right|^2 \leqslant M_1M_2$$

для любого x на E.

Следовательно, по лемме к (**9.4**, VI),

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_i a_{ik} y_k\right| \leqslant (M_1M_2)^{\frac{1}{2}}$$

для любого x и y на E, откуда следует, что H-грань A не превосходит $(M_1M_2)^{\frac{1}{2}}$.

Так как a_{ik} действительные и неотрицательные, а $\{|x_k|\}$ принадлежит σ_2, когда $\{x_k\}$ принадлежит σ_2, то последнее неравенство может быть заменено неравенством

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |x_i a_{ik} y_k| \leqslant (M_1M_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Наконец, если элементы a_{ik} комплексные, то мы имеем:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_i a_{ik} y_k\right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |x_i a_{ik} y_k| \leqslant (M_1M_2)^{\frac{1}{2}},$$

откуда и следует теорема.

9.6. Теоремы о свертках; обращение H-матриц

Предположим, что $A(x, y)$ и $B(x, y)$ ограничены в пространстве σ_{rs} и их точные грани равны соответственно $P(A)$ и $P(B)$; как и раньше, мы предполагаем $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, $r>1$. Тогда, по теореме (**9.5**, IV), мы имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^r \leqslant \{P(A)\}^r, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|b_{kj}|^s \leqslant \{P(B)\}^s,$$

и из неравенства Гёльдера следует, что ряд

$$f_{ij}=\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}b_{kj}$$

абсолютно сходится; выражение

$$F(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i f_{ij} y_j,$$

где $x \in \sigma_r$, а $y \in \sigma_s$, называется *сверткой* *) A и B. Отметим, что в общем случае $F(B, A) \neq F(A, B)$. В матричном обозначении $F(A, B)$ имеет вид $x'ABy$.

(9.6, I) *Если $A(x, y)$ и $B(x, y)$ имеют в σ_{rs} точные грани* $P(A)$ и $P(B)$, *то $F(A, B)$ ограничена в σ_{rs} и ее точная грань не превосходит $P(A)P(B)$, т. е. $P(AB) \leqslant P(A)P(B)$.*

Пусть $m \geqslant n$ и $x_i = 0$ для $i > n$. Тогда, так как $A(x, y)$ имеет в σ_{rs} точную грань $P(A)$, мы получаем:

$$\left| \sum_{k=1}^{m} y_k \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} \right| \leqslant P(A)$$

для всех единичных векторов x из σ_r и всех единичных векторов y из σ_s.

Следовательно, по обратному неравенству Гёльдера,

$$\sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} \right|^r \leqslant [P(A)]^r \quad \text{для} \quad m \geqslant n,$$

так что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} \right|^r \leqslant [P(A)]^r. \tag{9.61}$$

Аналогично

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{n} b_{kj} y_j \right|^s \leqslant [P(B)]^s. \tag{9.62}$$

Но

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i f_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj} y_j \right). \tag{9.63}$$

Из (9.61)—(9.63) и неравенства Гёльдера теперь следует:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i f_{ij} y_j \right| \leqslant P(A) P(B)$$

для любого n, всех единичных векторов x из σ_r и всех единичных векторов y из σ_s. Теорема доказана.

*) Для случая $r = s = 2$ (т. е. гильбертова векторного пространства) см. Гильберт [1], Хеллингер и Теплиц [1], [2], Шур [2], Винтнер [1]. Для общих σ_{rs} см. Харди, Литтльвуд и Пойа [1], 253.

Полагая в (9.63) $n \to \infty$, получаем:

(**9.6**, II) *Если A и B ограничены в σ_{rs}, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ik}\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{kj} y_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i f_{ij} y_j \tag{9.64}$$

для всех единичных векторов x из σ_r и всех единичных векторов y из σ_s.

В частном случае, когда $r = s = 2$, эта теорема обычно известна под названием *первой теоремы Гильберта о свертке* (см., например, Винтнер [1], 129), а именно: *произведение двух H-матриц A и B является H-матрицей такой, что $(x'A)(By) = x'ABy$ для всех x и y на E и*

$$P(AB) \leqslant P(A)P(B).$$

Если в (9.64) мы возьмем вместо B единичную матрицу I, то получим:

$$f_{ij} = a_{ij},$$

и (9.64) обращается в

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_i a_{ik} y_k = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_i a_{ik} y_k. \tag{9.65}$$

Таким образом, порядок суммирования в ограниченной билинейной форме в σ_{rs} не играет роли, несмотря на тот факт, что двойной ряд может не быть абсолютно сходящимся (ср. с (**9.4**, II)).

(**9.6**, III) *Если A, B и C — ограниченные в σ_{rs} матрицы, то для них имеет место ассоциативный закон, т. е.*

$$A(BC) = (AB)C.$$

Нам нужно доказать, что для любых n и k

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} c_{jk}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} b_{ij}\right) c_{jk}. \tag{9.66}$$

Согласно (**9.5**, IV) ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ni}|^r$ сходится для любого n, а $\sum_{j=1}^{\infty} |c_{jk}|^s$ сходится для любого k, так как A и C ограничены в σ_{rs}. Следовательно, для любого фиксированного n мы можем положить $a_{ni} = x_i$, где $\{x_i\}$ принадлежит σ_r, и для любого фиксированного k положить $c_{jk} = y_j$, где $\{y_i\}$ из σ_s. Тогда (9.66) обращается в равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i b_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_i b_{ij} y_j,$$

которое верно в силу (9.65), так как B является ограниченной в σ_{rs}.

Частный случай этой теоремы при $r=s=2$ известен обычно под названием *второй теоремы Гильберта о свертках* (см., например, Винтнер, [1], 131).

Следствие. *Теорема остается справедливой, если только предположить, что B (средняя матрица) является ограниченной в σ_{rs}, а A и C таковы, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ni}|^r$ сходится для любого n и ряд $\sum_{j=1}^{\infty}|c_{jk}|^s$ сходится для любого k.*

Так как скалярные матрицы являются H-матрицами, а $\alpha A+\beta B$ также H-матрица, когда A и B суть H-матрицы, то отсюда следует, что *все H-матрицы образуют ассоциативное поле* (§ 1.4).

(**9.6**, IV) *Если A — H-матрица, то $AA^*(x, \bar{x})$ и $A^*A(x, \bar{x})$ — неотрицательно определенные эрмитовы формы. Кроме того* *),

$$M(AA^*)=M(A^*A)=P^2(A). \tag{9.67}$$

Мы уже видели, что AA^* и A^*A являются эрмитовыми матрицами (§ 9.5). Положим в первой теореме о свертке $B=A^*$, $y=\bar{x}$. Тогда

$$(x'A)(A^*\bar{x})=x'AA^*\bar{x}=AA^*(x, \bar{x}).$$

Но

$$(x'A)(A^*\bar{x})=(x'A)(\overline{A'x})=\|A'x\|^2\geqslant 0,$$

так что $AA^*(x, \bar{x})\geqslant 0$. Таким образом, $AA^*(x, \bar{x})$ (и аналогично $A^*A(x, \bar{x})$) — неотрицательно определенная эрмитова форма.

Чтобы доказать (9.67), мы сначала заметим, что так как по (**9.6**, I)

$$P(AB)\leqslant P(A)P(B),$$

то, принимая во внимание (**9.5**, II), будем иметь:

$$M(AA^*)=P(AA^*)\leqslant P(A)P(A^*)=P^2(A),$$

и аналогично

$$M(A^*A)\leqslant P^2(A).$$

Но если x и y на E, то

$$|A(x, y)|^2=\left|\sum_{p=1}^{\infty}x_p\sum_{q=1}^{\infty}a_{pq}y_q\right|^2\leqslant\sum_{p=1}^{\infty}|x_p|^2\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=1}^{\infty}a_{pq}y_q\right|^2=$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}\left|\sum_{q=1}^{\infty}a_{pq}y_q\right|^2=A^*A(\bar{y}, y),$$

так что $P^2(A)\leqslant M(A^*A)$.

Следовательно, $P^2(A)=M(A^*A)$ и аналогично $P^2(A)=M(AA^*)$.

*) См. Винтнер [1], 42 и 43.

Пусть $n(A)$ обозначает *нижнюю грань эрмитовых форм* $A(x, \bar{x})$ *для всех* x *на* E.

(9.6, V) *Если* A *есть НН-матрица и* $n(A) > 0$, *то* A *имеет двустороннюю Н-обратную* *).

По условию теоремы, мы имеем $A(x, \bar{x}) \geqslant n(A) > 0$ на E. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда равенство $(I - \varepsilon A)(x, \bar{x}) = 1 - \varepsilon A(x, \bar{x})$ показывает, что на E $M(I - \varepsilon A) < 1$, если $\varepsilon < \frac{1}{M(A)}$. Учитывая, что $M(A)$ или $P(A)$ являются гранями, из (**2.4**, II) **) получаем, что матрица εA имеет двустороннюю обратную, а значит, то же самое верно и для A.

(9.6, VI) *Если* A *есть Н-матрица, то* A *имеет п. с. Н-обратную* ***) *тогда и только тогда, когда* $n(AA^*) > 0$, *и имеет л. с. Н-обратную тогда и только тогда, когда* $n(A^*A) > 0$.

Мы видели, что $n(AA^*)$ и $n(A^*A)$ не всегда равны между собой, когда A является H-матрицей. Предположим, что $n(AA^*) > 0$. Так как AA^* — эрмитова матрица, то она, согласно (**9.6**, V), имеет двустороннюю H-обратную B, так что $AA^*B = I$. Следовательно, по (**9.6**, III) A^*B является п. с. H-обратной для A.

Аналогично если $n(A^*A) > 0$, то A^*A имеет двустороннюю H-обратную B_1 и B_1A^* является л. с. H-обратной для A.

Чтобы доказать обратное утверждение, предположим, что A имеет л. с. H-обратную C и что $n(A^*A) = 0$ (по определению $n(A^*A)$ всегда неотрицательное число). Тогда из $CA = I$ по первой теореме о свертке имеем:

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} x_p c_{pi} \right) \left(\sum_{q=1}^{\infty} a_{iq} \bar{x}_q \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{p=1}^{\infty} x_p c_{pi} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{q=1}^{\infty} a_{iq} \bar{x}_q \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

на E. Но

$$CC^*(x, \bar{x}) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_{pi} c^*_{iq} \right) x_p \bar{x}_q = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} x_p c_{pi} \sum_{q=1}^{\infty} c^*_{iq} \bar{x}_q =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} x_p c_{pi} \overline{\sum_{p=1}^{\infty} x_p c_{pi}} = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{p=1}^{\infty} x_p c_{pi} \right|^2;$$

перемена порядка суммирования допустима в силу абсолютной сходимости рядов. Следовательно,

$$1 \leqslant CC^*(x, \bar{x}) \cdot A^*A(x, \bar{x}) \text{ для любого } x \text{ на } E. \tag{9.68}$$

---

*) См. Винтнер [1], 135—139.

) В (2.4**, II) полагаем $A = -I$, $B = I - \varepsilon A$ (в последнем равенстве A то же, что и в (**9.6**, V)). См. также пример 20 к гл. 2.

***) То есть п. с. обратную, являющуюся H-матрицей. Это замечание относится и к дальнейшему. (*Прим. перев.*)

Так как сейчас $n(A^*A)=0$, то на E существуют векторы x, для которых $A^*A(x, \bar{x})$ сколь угодно мало отличается от нуля. Принимая во внимание, что C есть H-матрица и, значит, $CC^*(x, \bar{x})$ ограничена, мы видим, что это противоречит (9.68). Следовательно, $n(A^*A)>0$. Аналогично если A имеет п. с. H-обратную, то мы получим $n(AA^*)>0$, что и доказывает теорему.

(**9.6**, VII) $P(A)$ *удовлетворяет требованиям, предъявляемым к граням матриц, а именно*:

(I) $P(cA)=|c|P(A)$, $P(I)=1$ (c — любой скаляр);

(II) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$;

(III) $P(A+B)\leqslant P(A)+P(B)$;

(IV) $|a_{pq}|\leqslant P(A)$.

$M(A)$ *удовлетворяет этим условиям, когда A — эрмитова матрица, но не в общем случае* *).

(I) Каждому значению $|A(x, y)|$ на E соответствует значение $|cA(x, y)|=|c||A(x, y)|$ на E, и наоборот. Следовательно, верхняя грань значений $|cA(x, y)|$ на E будет такой же, как и для $|A(x, y)|$, умноженной на $|c|$. Также

$$|I(x, y)|^2\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2=1,$$

и $I(x, y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n y_n$ обращается в 1, когда $x_1=y_1=1$, а $x_n=y_n=0$ для $n>1$.

(II) Условие (II) было уже доказано в (**9.6**, I).

(III) Выполнение условия (III) следует из неравенства

$$|A(x, y)+B(x, y)|\leqslant|A(x, y)|+|B(x, y)|.$$

(IV) Условие (IV) следует из того факта, что любой элемент a_{pq} матрицы A является значением $A(x, y)$ на E (см. доказательство (**9.4**, IV)).

Теорема в отношении $P(A)$ доказана.

Так как, согласно (**9.5**, II), $M(A)=P(A)$, когда A является HH-матрицей, то доказанный результат относится и к $M(A)$, если A есть HH-матрица. Таким образом, как $M(A)$, так и $P(A)$ могут быть взятыми в качестве «грани» матрицы A, определенной в § 2.3.

Однако если A не есть эрмитова матрица, $M(A)$ не может в общем случае служить «гранью». Например, $M(A)$ не удовлетворяет

---

*) Необходимость в различии эрмитовой и неэрмитовой матриц для $M(A)$ была указана Мелвин-Мелвином.

условию (IV), когда

$$a_{12}=1, \quad a_{pq}=0 \qquad (p\neq 1,\ q\neq 2),$$

ибо в этом случае $a_{12}=1$, а $M(A)=\frac{1}{2}$; $M(A)$ не удовлетворяет также условию (II), когда $a_{12}=1$, $b_{21}=1$, а все остальные элементы A и B равны нулю. В этом случае $(AB)_{11}=1$, а все другие элементы AB равны нулю, и мы имеем $M(A)=M(B)=\frac{1}{2}$, $M(AB)=1$.

Теорема теперь доказана полностью.

9.7. Непрерывность в гильбертовом пространстве

Мы видели в (**9.2**, I), что если $x^{(n)}$ сходится сильно к x, то $x^{(n)}$ сходится и слабо к x.

Если $F(x^{(n)})\to F(x)$, когда $x^{(n)}$ стремится сильно к x, то функция $F(x)$ называется *непрерывной в точке* x. Если $F(x^{(n)})\to F(x)$, когда $x^{(n)}$ стремится слабо к x, то $F(x)$ называется *вполне непрерывной в точке* x.

Линейная форма $\sum_{p=1}^{\infty} a_p x_p$ называется *ограниченной*, если $\left|\sum_{p=1}^{N} a_p x_p\right|\leqslant M$ для любого N и каждого вектора x *).

(**9.7**, I) *Ограниченная линейная форма вполне непрерывна для любого вектора.*

Если $x^{(n)}(\to)x$, то мы имеем $\|x^{(n)}\|\leqslant K$ и $\|x\|\leqslant K$, так что для любого x

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{p=1}^{\infty} a_p\left(x_p-x_p^{(n)}\right)\right|\leqslant \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{p=1}^{m} a_p\left(x_p-x_p^{(n)}\right)\right|+$$

$$+\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{p=m+1}^{\infty} a_p x_p^{(n)}\right|+\left|\sum_{p=m+1}^{\infty} a_p x_p\right|\leqslant 2K\sqrt{\sum_{p=m+1}^{\infty}|a_p|^2}.$$

Так как последнее выражение стремится к нулю при $m\to\infty$, то мы видим, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{\infty} a_p x_p^{(n)}=\sum_{p=1}^{\infty} a_p x_p,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

---

*) В этом случае обратное неравенство Коши — Шварца показывает, что ряд $\sum_{p=1}^{\infty}|a_p|^2$ сходится.

В частности, если $x^{(n)}\,(\to)\,0$, то $\sum_{p=1}^{\infty} a_p x_p^{(n)} \to 0$.

(**9.7**, II) *Если ряд* $\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2$ *сходится, то* $A(x, y)$ *вполне непрерывна для любой пары векторов* x *и* y.

Пусть $h^{(n)}$ и $k^{(n)}$ — две последовательности векторов, каждая из которых слабо стремится к нулю, и

$$b_q^{(n)} = \sum_{p=1}^{\infty} h_p^{(n)} a_{pq}.$$

Мы, очевидно, можем считать $\|h^{(n)}\| \leqslant 1$ и $\|y\| \leqslant 1$. Тогда по неравенству Коши — Шварца мы имеем:

$$\left|\sum_{q=1}^{\infty} b_q^{(n)} y_q\right|^2 \leqslant \sum_{q=1}^{\infty} |y_q|^2 \sum_{q=1}^{\infty} |b_q^{(n)}|^2 \leqslant \sum_{q=1}^{\infty} \left|\sum_{p=1}^{\infty} h_p^{(n)} a_{pq}\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty} |a_{pq}|^2 \sum_{p=1}^{\infty} |h_p^{(n)}|^2\right) \leqslant \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2.$$

Следовательно, $\sum_{q=1}^{\infty} b_q^{(n)} y_q$ является ограниченной линейной формой, в которой y_q рассматриваются как коэффициенты, а $b_q^{(n)}$ — как координаты переменного вектора. Так как $h^{(n)}\,(\to)\,0$, то $b_q^{(n)}$ ограничены в своей совокупности и стремятся к нулю, а тогда по (**9.7**, I) стремится к нулю и

$$\sum_{q=1}^{\infty} b_q^{(n)} y_q \equiv A\left(h^{(n)}, y\right).$$

Аналогичные рассуждения можно провести для $A\left(x, k^{(n)}\right)$ и $A\left(h^{(n)}, k^{(n)}\right)$. Но мы имеем:

$$A\left(x + h^{(n)}, y + k^{(n)}\right) =$$
$$= A(x, y) + A\left(x, k^{(n)}\right) + A\left(h^{(n)}, y\right) + A\left(h^{(n)}, k^{(n)}\right).$$

Следовательно, $A\left(x + h^{(n)}, y + k^{(n)}\right) - A(x, y) \to 0$, что и доказывает теорему.

(**9.7**, III) *Ограниченная билинейная форма непрерывна (но не обязательно вполне непрерывна) для любой пары векторов.*

Пусть $h^{(n)}$ и $k^{(n)}$ — две последовательности векторов, каждая из которых сильно стремится к нулю. Тогда для каждого вектора x

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} x_p a_{pq} k_q^{(n)}\right| \leqslant P\|x\|\|k^{(n)}\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. формы $A(x, k^{(n)})$ ограничены в совокупности и стремятся к нулю. То же самое имеет место для форм $A(h^{(n)}, y)$ и $A(h^{(n)}, k^{(n)})$, и доказательство завершается так же, как и в (**9.7**, II).

(О дальнейших результатах по вопросам, затронутым в этой главе, см. Винтнер [1]; Гильберт [1], [2]; Хеллингер [1]; Хеллингер и Теплиц [1], [2], [3], [4]; Шмидт [1]; Шур [2]; Теплиц [2], [3], [5], [6]; Хан [1], [2]; Жулиа [1], ч. II; Ковалевский [1], 407—455; Вейль [1], [2]; Харди [1]; Харди, Литтльвуд и Пойа [1], гл. VIII и IX; Хислоп [1]; Ричардсон [1], [2]; Пелл [1], [2].)

Примеры к главе 9

1. Доказать, что если нижняя треугольная матрица нормальна (§ 9.5), то она является диагональной матрицей.

2. Рассматривая

$$I_n \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \left[\sum_{r=1}^{n} (-1)^r (x_r \cos rt - y_r \sin rt) \right]^2 dt$$

и принимая во внимание, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} t \sin mt \, dt = \frac{(-1)^{m+1} 2\pi}{m}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} t \cos mt \, dt = 0,$$

где m — любое целое положительное или отрицательное число (последнее равенство имеет место и при $m=0$), показать, что $I_n = 2(S_n - T_n)$, где

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \frac{x_p y_q}{p+q}, \quad T_n = \sum_{p=1}^{n} {\sum_{q=1}^{n}}' \frac{x_p y_q}{p-q};$$

$\sum'$ означает, что при суммировании опускаются члены с $p=q$. Показать также, что $|S| \leqslant \pi$ и $|T| \leqslant 2\pi$ для x и y из E, где S и T — гильбертовы билинейные формы (§ 9.5). (См. замечание о S и T после (**9.5**, II).)

3. Две последовательности векторов

$$a^{(p)} \equiv [a_{p1}, a_{p2}, \ldots] \quad \text{и} \quad a^{(q)} \equiv \{a_{1q}, a_{2q}, \ldots\}$$

называются *векторами матриц* A' и A соответственно, где A' обозначает матрицу, транспонированную к A. Таким образом, векторы матрицы A имеют своими компонентами отдельные столбцы из A, а векторы матрицы A' имеют своими компонентами отдельные *строки* из A, т. е. столбцы из A'. Любая матрица может быть таким путем представлена совокупностью вектор-строк или вектор-столбцов. Показать, что если последовательность скалярных компонент $a^{(p)} y = z_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ образует вектор z такой, что $\|z\| \leqslant M \|y\|$, то для любой пары векторов x и y билинейная форма $A(x, y)$ ограничена гранью M.

4 *). Доказать, что теорема (**1.7**, I) о показательной функции имеет место для H-матриц вместо нижних треугольных матриц.

5. Доказать следующий результат, обратный сформулированному в примере 3. Если на E существует внутренний предел для $A(x, y)$, то скаляры

*) См. Динс [3], 307.

$z_p = a^{(p)}y$ $(p = 1, 2, \ldots)$ образуют вектор z. Если $A(x, y)$ ограничена гранью M, то $\|z\| \leqslant M\|y\|$.

6 *). Если $r > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ и $A(x, y)$ имеет грань M в σ_{rs} (§ 9.5) и если

$$h_{pq} = \int f_p(t)\, g_q(t)\, dt, \quad \text{где} \quad \int |f_p(t)|^r\, dt \leqslant \mu^r,$$

и $\int |g_q(t)|^s\, dt \leqslant \nu^s$, то доказать, что $\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} x_p a_{pq} h_{pq} y_q$ имеет грань $M\mu\nu$.

7 **). Если a_n — коэффициенты Фурье при синусах нечетной ограниченной функции или коэффициенты Фурье при косинусах четной ограниченной функции, то билинейные формы

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} x_p a_{p+q} y_q, \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} x_p a_{p-q} y_q$$

ограничены в гильбертовом векторном пространстве σ_2.

Взяв функцию $\frac{1}{2}(\pi - \theta)$ для $0 < \theta < \pi$ и продолжив ее нечетно, доказать, что $|S| \leqslant \pi$ и $|T| \leqslant \pi$ в обозначениях примера 2.

8. Предположим, что векторы $[b_{p1}, b_{p2}, \ldots]$ H-матрицы B' (см. пример 3) образуют полную систему и что $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots$ — соответствующая ей ортонормальная система. Если y — любой вектор и

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} (v^{(i)}, y)\, v^{(i)},$$

то показать, что $y^{(n)} = Bx^{(n)}$, где $x^{(n)}$ — вектор, имеющий только конечное число отличных от нуля компонент.

9. Если $r > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ и $\sum_{p=1}^{\infty} x_p^r \leqslant X$, $\sum_{q=1}^{\infty} y_q^s \leqslant Y$, где $\{x_p\}$, $\{y_q\}$ неотрицательны, то показать, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p+q} < \pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{r} X^{\frac{1}{r}} Y^{\frac{1}{s}};$$

x и y — отличные от нуля векторы.

Если

$$\int_0^{\infty} [f(x)]^r\, dx \leqslant F, \qquad \int_0^{\infty} [g(y)]^s\, dy \leqslant G,$$

где $f(x)$ и $g(y)$—неотрицательные в интервале $(0, \infty)$ функции, то доказать неравенство

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{f(x)\, g(y)}{x+y}\, dx\, dy < \pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{r} F^{\frac{1}{r}} G^{\frac{1}{s}},$$

не предполагая, что $f(x) \equiv 0$ или $g(x) \equiv 0$.

---

*) Харди, Литтльвуд и Пойа [1], 268, задача 300; для случая $r = s = 2$ см. Шур [2].

**) Теплиц [5]; см. Харди, Литтльвуд и Пойа [1], 268, задача 303.

В обоих случаях константа $\pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{r}$ является «наилучшей из возможных».

Таким образом, мы получаем обобщение неравенства $|S| \leqslant \pi$ для гильбертовой формы S (см. выше пример 2) из σ_2 на пространство σ_{rs}, а также обобщение неравенства для сумм на интегралы.

Определение константы $\pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{r}$ и интегральный аналог даны Шуром [2], а обобщение на пространство σ_{rs} — Харди и М. Риссом; см. Харди [1] *).

---

*) Дальнейшие результаты и обобщения в различных направлениях см. Харди, Литтльвуд и Пойа [1], 272 и там же, §§ 9.2—9.4.

ГЛАВА 10

ПРОЕКТИВНАЯ СХОДИМОСТЬ, СХОДИМОСТЬ В СЕБЕ И ПРЕДЕЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

10.1. Некоторые типы пространств последовательностей

Основные понятия и результаты, содержащиеся в этой главе (кроме § 10.9), принадлежат Кёте и Теплицу [1]. Те результаты и определения, включая примеры к гл. 10 (кроме § 10.9), которые не содержатся в упомянутой работе Кёте и Теплица, принадлежат Аллену. Несколько простых результатов дано Динсом в его лекциях, о чем в тексте будет оговорено*). По вопросам, близким к содержанию этой главы, см. также Кёте [1], [2], [3], [4], Кёте и Теплиц [2], Вебер [1], Хагеман [1].

Совокупность математических объектов, таких, как числа, функции, последовательности, матрицы и т. п., называется *множеством*, если существует закон или правило, позволяющее определить, содержится ли данный элемент в этой совокупности или нет.

Множество S, замкнутое по отношению к сложению и умножению на скаляр и содержащее нулевой элемент 0 (с указанными ниже свойствами), называется *абстрактным линейным пространством*, если выполняются следующие десять условий для любых A, B и C из S и любых постоянных (комплексных) чисел a и b:

(1) $A+B=B+A$; (2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

(3) $A+0=A$; (4) уравнение $A+X=0$ имеет единственное в S решение;

(5) $aA=Aa$; (6) $a(bA)=(ab)A$;

(7) $0\cdot A=0$; (8) $1\cdot A=A$;

(9) $aA+bA=(a+b)A$; (10) $aA+aB=a(A+B)$.

Так, абстрактное линейное пространство образуют, например: (I) все целые функции; (II) все бесконечные последовательности; (III) все комплексные числа; (IV) все конечные последовательности, т. е.

*) На эти лекции мы будем ссылаться как на Динс [4].

последовательности, в которых все элементы, начиная с некоторого места, равны нулю; (V) все бесконечные матрицы.

В этой главе мы будем рассматривать исключительно *пространства последовательностей.*

Мы всюду будем обозначать через $e^{(k)}$ единичный вектор, координаты которого $e_k^{(k)}=1$, $e_p^{(k)}=0$ $(p\neq k)$. Если x и y — последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ и c — какой-либо скаляр, то $x+y$ и cx определяются как $\{x_k+y_k\}$ и $\{cx_k\}$ соответственно, а xy определяется как $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_ky_k$, когда этот ряд абсолютно сходится. Так определенное «*произведение*» двух последовательностей (полезное для наших целей) не нужно смешивать со «скалярным произведением» двух H-векторов x и y, а именно с $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\bar{y}_k$.

Множество S последовательностей называется пространством последовательностей, когда оно содержит начало (нулевой элемент) и обладает таким свойством, что если x и y принадлежат S, то при любом (комплексном) постоянном c $x+y$ и cx также принадлежат S.

Последовательности могут быть классифицированы по пространствам последовательностей, следующие из которых представляют определенный интерес*):

(I) σ — пространство всех последовательностей.

(II) s_0 — нуль-пространство, т. е. пространство, содержащее только начало (нулевую последовательность).

(III) φ — пространство всех конечных последовательностей.

(IV) Если $r\geqslant 1$ и если ряды $\sum|x_k|^r$ и $\sum|y_k|^r$ сходятся, то имеет место неравенство Минковского

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^r\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Отсюда следует, что множество всех последовательностей $\{x_k\}$, в которых ряды $\sum|x_k|^r$ сходятся, образует пространство; оно обозначается через σ_r (см. § 9.5). В частном случае, когда $r=2$, мы имеем гильбертово векторное пространство.

(V) σ_∞ — пространство всех ограниченных последовательностей.

(VI) Γ — пространство всех сходящихся последовательностей.

(VII) C — пространство всех стационарных последовательностей, в которых $x_{k+1}=x_k$ для $k\geqslant k_0$.

---

*) Пространства φ, $\sigma_r\,(r\geqslant 1)$, σ_∞ и δ введены Кёте и Теплицем [1] 196, 218, пространства Γ, C, D, Z, O_1, O_2, $\bar{O}_1$, $\bar{O}_2$ введены Динсом [4], и пространства E_r, F_r — Алленом.

(VIII) D — пространство последовательностей с чередующимися знаками, т. е. в которых $x_{k+1} = -x_k$ для $k > k_0$.

(IX) Z — пространство всех нуль-последовательностей, т. е. последовательностей, в которых $x_k \to 0$ при $k \to \infty$.

(X) O_1 — пространство всех последовательностей, таких, что $x_{2k+1} = 0$ для любого k.

(XI) O_2 — пространство всех последовательностей, таких, что $x_{2k} = 0$ для любого k.

(XII) $\bar{O}_1$ — пространство всех последовательостей, таких, что $\{x_{2k+1}\}$ является конечной последовательностью.

(XIII) $\bar{O}_2$ — пространство всех последовательностей, таких, что $\{x_{2k}\}$ является конечной последовательностью.

(XIV) E_r — пространство всех последовательностей, таких, что $|x_k|^r \leqslant Ak^r$ $(r > 0)$ для любого k.

(XV) F_r — пространство всех последовательностей, таких, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^r |x_k|$ сходится $(r > 0)$.

(XVI) δ — пространство всех последовательностей, таких, что если d_n — число отличных от нуля координат в первых n координатах, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_n}{n} = 0$.

Если x — фиксированный элемент и c — действительное число, то множество cx соответствует понятию *направления*; точки такого множества лежат на прямой линии и c может рассматриваться как параметр точек линии. Если в координатном пространстве конечного числа N измерений y находится на расстоянии 1 от начала, то по аналогии с двумерными и трехмерными случаями мы определим проекцию элемента x на направление y как $\sum_{k=1}^{N} x_k y_k$. Мы распространим это понятие на бесконечномерное пространство последовательностей.

Вектор $e^{(k)}$ можно рассматривать как вектор, представляющий точку на k-й координатной оси, отстоящую на расстоянии единицы от начала, или как единичный вектор вдоль этой оси. Взяв y равным $e^{(k)}$, мы видим, что координату x_k можно рассматривать как проекцию вектора x на соответствующую ось; *проекция вектора x на y определяется как сумма ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, когда этот ряд абсолютно сходится. Таким образом, понятие проекции в пространстве последовательностей бесконечного числа измерений не является универсальным, а зависит от сходимости ряда. Очевидно, что в этом определении y_k являются аналогами направляющих косинусов. Каждому $y \neq 0$ соответствует определенное направление (совокупность векторов cy для всех действительных постоянных c), и таким образом, мы можем рассматривать все возможные направления в данном пространстве α.

Пусть α — пространство, образованное из точек y; обозначим его через $\operatorname{loc} y$ (обозначение введено Тернбуллом [4]). Фиксируем сначала некоторое y и рассмотрим все x, для которых ряды $\sum x_k y_k$ абсолютно сходятся. Мы получим некоторое пространство последовательностей $\beta = \operatorname{loc} x$, определенным образом связанное с фиксированным направлением y. В общем случае мы можем рассматривать все точки x, для которых ряды $\sum x_k y_k$ абсолютно сходятся, когда y принимает все возможные положения в α. Полученное в этом случае множество, которое мы обозначим через $\alpha^* = \operatorname{loc} x$, называется *двойственным пространством к пространству* α или, короче, *двойственным пространством к* α.

Таким образом, двойственное пространство α^* *к* α *есть множество точек, которые могут быть спроектированы на любое направление в* α; *очевидно,* α^* *является пространством последовательностей.*

В этой главе через α^* будет всегда обозначаться двойственное пространство к α.

Двойственным пространством к α^* является α^{**}; очевидно, $\alpha^{**} \geqslant \alpha$. (Мы обозначаем $\alpha = \beta$, когда пространства α и β совпадают, и $\alpha > \beta$, когда α содержит все точки пространства β и одну или несколько других точек.)

Пространство последовательностей α называется *совершенным*, если $\alpha^{**} = \alpha$. Таким образом, совершенное пространство содержит любую последовательность, которая может быть спроектирована на любое направление в его двойственном пространстве. Ясно, что любое совершенное пространство содержит пространство φ.

(10.1, I) *Для любого пространства последовательностей* α *пространство* α^* *совершенно.*

Действительно, $\alpha^{***} \geqslant \alpha^*$, но если $x \in \alpha^{***}$, то ряд $\sum |u_k x_k|$ сходится для любого u из α^{**} и, в частности, для любого u из α. Таким образом, $x \in \alpha^*$, следовательно, $\alpha^{***} \leqslant \alpha^*$. Поэтому $\alpha^{***} = \alpha^*$, и теорема доказана*).

(10.1, II) *Если* $\alpha \leqslant \beta$, *то* $\alpha^* \geqslant \beta^*$.

Если $x \in \beta^*$, то ряд $\sum |x_k y_k|$ сходится для любого y из β и, в частности, для любого, y из α. Таким образом, $x \in \alpha^*$, откуда и следует требуемый результат.

(10.1, III) α^{**} — *наименьшее совершенное пространство, содержащее* α.

Если $\beta \geqslant \alpha$, то по **(10.1, II)** $\beta^* \leqslant \alpha^*$ и поэтому $\beta^{**} \geqslant \alpha^{**} \geqslant \alpha$. Если β, кроме того, совершенное, то мы имеем $\beta \geqslant \alpha^{**} \geqslant \alpha$, что и доказывает результат.

---

*) Как обычно, $x \in M$ означает, что x принадлежит множеству M, а $x \overline{\in} M$ — x не принадлежит M.

Сейчас мы определим двойственное пространство к каждому из пространств, перечисленных в начале этого параграфа.

(**10.1**, IV) $\varphi^* = \sigma$ *и* $\sigma^* = \varphi$; φ *и* σ — *совершенные пространства* (Динс [4]).

Если $x \in \varphi$, то ряд $\sum |u_k x_k|$ превращается в конечную сумму и, значит, сходится для любого u, следовательно, $\varphi^* = \sigma$.

Наоборот, ряд $\sum |u_k x_k|$ сходится для любого u тогда и только тогда, когда $\{x_k\}$ является конечной последовательностью. Действительно, полагая в противном случае $u_k x_k = 1$, когда $x_k \neq 0$, мы получим последовательность $\{u_k\}$, для которой ряд расходится. Поэтому $\sigma^* = \varphi$. Следовательно, $\varphi^{**} = \sigma^* = \varphi$ и $\sigma^{**} = \varphi^* = \sigma$, так что φ и σ — совершенные пространства.

(**10.1**, V) $\sigma_1^* = \sigma_\infty$ *и* $\sigma_\infty^* = \sigma_1$; σ_1 *и* σ_∞ — *совершенные пространства* (Кёте и Теплиц [1], 218).

Для любого x из σ_∞ и для любого y из σ_1 ряд $\sum |x_k y_k|$ сходится; следовательно, $\sigma_\infty \leqslant \sigma_1^*$ и $\sigma_1 \leqslant \sigma_\infty^*$. Если $u \in \sigma_\infty^*$ и $x_k = 1$ для всех k, то ряд $\sum |u_k x_k|$ сходится, так что $u \in \sigma_1$. Следовательно, $\sigma_\infty^* \leqslant \sigma_1$. Таким образом, учитывая включение $\sigma_1 \leqslant \sigma_\infty^*$, получаем $\sigma_\infty^* = \sigma_1$.

Если $v \overline{\in} \sigma_\infty$, то существует бесконечная последовательность индексов k_n, такая, что $|v_{k_n}| \geqslant n^2$. Если $u_{k_n} = \frac{1}{n^2}$, а все другие координаты u равны нулю, то $u \in \sigma_1$ и ряд $\sum |u_k v_k|$ расходится. Отсюда следует, что $\sigma_1^* \leqslant \sigma_\infty$, и, учитывая сказанное в первой части теоремы, получаем $\sigma_1^* = \sigma_\infty$.

Следовательно, $\sigma_1^{**} = \sigma_\infty^* = \sigma_1$ и $\sigma_\infty^{**} = \sigma_1^* = \sigma_\infty$, так что σ_1 и σ_∞ — совершенные пространства.

(**10.1**, VI) *Если* $r > 1$, *то* $\sigma_r^* = \sigma_s$, *где* $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$; σ_r — *совершенное пространство* (Кёте и Теплиц [1], 219).

Если $x \in \sigma_r$, $y \in \sigma_s$, то по неравенству Гёльдера

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^s\right)^{\frac{1}{s}},$$

так что $\sigma_s \leqslant \sigma_r^*$.

Если $u \overline{\in} \sigma_s$, то мы можем определить последовательность целых положительных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ такую, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} |u_k|^s = M_1 > 1, \quad \sum_{k=n_1+1}^{n_2} |u_k|^s = M_2 > 1, \ldots$$
$$\ldots, \sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} |u_k|^s = M_{p+1} > 1, \ldots$$

Положим

$$x_k = \frac{1}{M_1} u_k^{s-1} \quad \text{для} \quad 1 \leqslant k \leqslant n_1,$$

$$x_k = \frac{1}{(p+1) M_{p+1}} u_k^{s-1} \quad \text{для} \quad n_p + 1 \leqslant k \leqslant n_{p+1}.$$

Тогда

$$\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} |x_k|^r = \frac{1}{(p+1)^r M_{p+1}^r} \sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} |u_k|^s =$$

$$= \frac{1}{(p+1)^r M_{p+1}^{r-1}} < \frac{1}{(p+1)^r},$$

так что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^r < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}.$$

Отсюда следует, что $x \in \sigma_r$. Мы также имеем:

$$\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} |u_k x_k| = \frac{1}{p+1},$$

так что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k x_k| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, и ряд справа расходится. Следовательно, $\sigma_r^* \leqslant \sigma_s$ и, таким образом, мы получаем $\sigma_r^* = \sigma_s$. В частности (для гильбертова пространства), $\sigma_2^* = \sigma_2$. Также $\sigma_r^{**} = \sigma_s^* = \sigma_r$, так что σ_r — совершенное пространство.

(**10.1**, VII) $\Gamma^* = \sigma_1$; Γ *не является совершенным пространством* (Динс [4]).

Мы имеем $\Gamma < \sigma_\infty$ и поэтому, согласно (**10.1**, II) и (**10.1**, V), $\Gamma^* \geqslant \sigma_1$. Если $u \in \Gamma^*$ и $x_k = 1$ для любого k, то $x \in \Gamma$ и ряд $\sum |u_k x_k| \equiv \sum |u_k|$ сходится.

Следовательно, $\Gamma^* \leqslant \sigma_1$, так что окончательно получаем $\Gamma^* = \sigma_1$.

Согласно (**10.1**,V) $\Gamma^{**} = \sigma_\infty$, и таким образом, Γ не является совершенным.

(**10.1**, VIII) $Z^* = \sigma_1$; Z *не является совершенным пространством.*

Мы имеем $Z < \sigma_\infty$, и поэтому $Z^* \geqslant \sigma_1$. Предположим, что $u \bar{\in} \sigma_1$, и положим $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} |u_i|$. Тогда, по теореме Дини, ряд $\sum \frac{|u_n|}{s_n}$ расходится (см., например, Динс [1], 104). Но сейчас $\left\{\frac{1}{s_n}\right\} \in Z$, следовательно, $u \bar{\in} Z^*$, и поэтому $Z^* \leqslant \sigma_1$. Учитывая, что выше мы имели

$Z^* \geqslant \sigma_1$, получаем окончательно $Z^* = \sigma_1$. Из (**10.1**, V) следует $Z^{**} = \sigma_\infty$, так что Z не является совершенным.

(**10.1**, IX) $E_r^* = F_r$ *и* $F_r^* = E_r$; E_r *и* F_r — *совершенные пространства* $(r > 0)$.

Если $x \in E_r$, а $y \in F_r$, то

$$\sum |x_k y_k| \leqslant A \sum (k^r |y_k|),$$

причем ряды сходятся, так как сходится ряд справа. Поэтому $E_r^* \geqslant F_r$ и $F_r^* \geqslant E_r$. Но сейчас $\{k^r\} \in E_r$, так что если $u \in E_r^*$, то $\sum (|u_k| k^r)$ сходится и, таким образом, $u \in F_r$, т. е. $E_r^* \leqslant F_r$. Следовательно, $E_r^* = F_r$.

Если $v \in F_r^*$, то ряд $\sum |v_k y_k|$ сходится для любого y из F_r. Пусть $u = k^r y_k$; тогда $y \in F_r$ в том и только в том случае, если $u \in \sigma_1$. Следовательно, $\sum |v_k y_k| = \sum k^{-r} |v_k u_k|$ сходится для любого u из σ_1. Согласно (**10.1**, V) мы имеем $|v_k| \leqslant A k^r$ для любого k и, таким образом, $v \in E_r$, т. е. $F_r^* \leqslant E_r$. Учитывая сказанное в первой части теоремы, получаем $F_r^* = E_r$. Далее, $E_r^{**} = F_r^* = E_r$, $F_r^{**} = E_r^* = F_r$, так что E_r и F_r являются совершенными пространствами.

(**10.1**, X) $\delta^* = \varphi$; δ *не является совершенным.*

Согласно (**10.1**, I) δ^* совершенно и, значит, содержит φ. Предположим, что $u \in \delta^*$, но $u \bar{\in} \varphi$. Тогда из отличных от нуля координат точки u мы построим бесконечную подпоследовательность u_{n_k} $(k = 1, \ 2, \dots)$, такую, что $n_k > k^2 n_1$. Положим $x_{n_k} = \frac{1}{u_{n_k}}$, $x_i = 0$ $(i \neq n_k)$; тогда, если d_n — число отличных от нуля координат в первых n координатах точки x, мы имеем $\frac{d_{n_k}}{n_k} = \frac{k}{n_k} < \frac{1}{k n_1}$ и, таким образом, $x \in \delta$, хотя ряд $\sum |u_k x_k|$ расходится. Это противоречит предположению, что $u \in \delta^*$, и, следовательно, $\delta^* = \varphi$.

Теперь имеем $\delta^{**} = \varphi^* = \sigma$, так что δ не является совершенным.

Следующие результаты мы предоставляем доказать читателю (см. примеры 1 и 2 к гл. 10):

$C^* = \sigma_1$ *и* $D^* = \sigma_1$; C *и* D *не являются совершенными*;

$O_1^* = \bar{O}_2$ *и* $O_2^* = \bar{O}_1$; $\bar{O}_1^* = \bar{O}_2$ *и* $\bar{O}_2^* = \bar{O}_1$; $\bar{O}_1$ *и* $\bar{O}_2$ *совершенны, однако* O_1 *и* O_2 *не являются совершенными.*

Отметим, что α и α^* могут быть связаны соотношениями $\alpha^* < \alpha$, $\alpha^* > \alpha$, $\alpha^* = \alpha$, но может быть, что ни одно из этих соотношений не имеет места. Например, из доказанных выше теорем видно, что $\sigma^* < \sigma$, $\sigma_\infty^* < \sigma_\infty$, $\Gamma^* < \Gamma$, $\varphi^* > \varphi$, $\sigma_1^* > \sigma_1$, $\sigma_2^* = \sigma_2$. Но $C^* = \sigma_1$, а σ_1 не связано с C ни одним из этих соотношений *).

Для последующих целей мы произведем дальнейшую классификацию пространств последовательностей.

Пространство последовательностей α называется *нормальным*, если всякий раз, когда x принадлежит α, а $|y_k| \leqslant |x_k|$ для любого k, y также принадлежит α. Так, пространства φ, σ_r $(r \geqslant 1)$, σ_∞, σ, Z, O_1, O_2, $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$, E_r, F_r и δ нормальные, пространства Γ, C, D не являются нормальными.

(**10.1**, XI) *Всякое совершенное пространство является нормальным.*

Пусть α — совершенное пространство, $x \in \alpha$ и $|y_k| \leqslant |x_k|$ для любого k. Тогда ряд $\sum |u_k x_k|$ сходится для любого u из α^*, и поэтому то же самое имеет место и для ряда $\sum |u_k y_k|$. Следовательно, $y \in \alpha^{**}$, но $\alpha^{**} = \alpha$ (так как α совершенное) и, значит, $y \in \alpha$, т. е. α является нормальным пространством.

Например, пространство α^* является нормальным. Утверждение, обратное (**10.1**, XI), вообще говоря, неверно. Например, Z и δ содержат φ и нормальны, но не совершенны.

Пространство последовательностей называется *симметричным*, если из $x \in \alpha$ следует, что и $y \in \alpha$, когда координаты точки y образуют последовательность, состоящую в точности из тех же элементов, что и координаты точки x, но в другом порядке.

Так, φ, σ_r $(r \geqslant 1)$, σ_∞, σ, Z, C, Γ, E_r F_r — симметричные пространства **), пространства D, O_1, O_2, $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$ не являются симметричными.

(**10.1**, XII) *Если α — симметричное пространство, то и α^* симметричное.*

Предположим, что $u \in \alpha^*$ и что координаты точки v такие же, как и точки u, но в другом порядке. Если $v_i = u_{k_i}$, а $x \in \alpha$, то, переставляя местами координаты точки x, мы получим последовательность $\{x'_{k_i}\}$ такую, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |v_i x_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |u_{k_i} x'_{k_i}|$$

и $\{x'_{k_i}\} \in \alpha$. Отсюда следует, что $v \in \alpha^*$.

*) Пример указан нами. Автором в этом случае приведен ошибочный пример. (*Прим. перев.*)

**) Утверждение неточное, ибо пространства E_r и F_r при $r > 0$ несимметричны. Например, $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \in E_1$, если $x_k = k$, но элементы x_k можно так переставить, чтобы вновь полученная последовательность y_1, $y_2, \ldots, y_k, \ldots$ не была ограниченной никакой степенной функцией. (*Прим. ред.*)

Обратное утверждение неверно; например, D не является симметричным, в то время как $D^* = \sigma_1$ симметрично.

Совершенные пространства могут быть симметричными, например φ, $\sigma_r (r \geq 1)$, σ_∞, σ, *но могут быть и несимметричными*, например $\overline{O}_1$ и $\overline{O}_2$. Мы сейчас покажем, что совершенные симметричные пространства существуют только в определенной части пространства σ.

(**10.1**, XIII) *Если α — совершенное симметричное пространство, отличное от φ и σ, то $\sigma_1 \leqslant \alpha \leqslant \sigma_\infty$.*

Предположим, что α содержит неограниченную последовательность x, в которой $\{x_{k_i}\}$ неограниченно возрастает. Пусть x' — точка, полученная из x следующим образом: все координаты, номера которых не содержатся в последовательности $\{k_i\}$, полагаем равными нулю, а остальные координаты оставляем без изменения. Так как по (**10.1**, XI) α — нормальное пространство, то $x' \in \alpha$. Пространство α^* совершенное и поэтому содержит φ. Так как $\alpha \neq \sigma$, то $\alpha^* \neq \varphi$. В самом деле, если бы было $\alpha^* = \varphi$, то по (**10.1**, IV) $\alpha^{**} = \varphi^* = \sigma$ и, значит, $\alpha = \sigma$, так как α — совершенное пространство. Следовательно, $\alpha^* > \varphi$.

Пусть теперь точка $u \in \alpha^*$, но $u \,\overline{\in}\, \varphi$ и пусть u_{q_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ — ее отличные от нуля координаты. Из неограниченной последовательности x' мы можем извлечь подпоследовательность $\{x'_{p_i}\}$ такую, что $|x'_{p_i}| > \frac{1}{u_{q_i}}$. Тогда, переставляя местами координаты точки x', мы получим точку x'' из α, для которой ряд $\sum |x''_k u_k|$ расходится. Это противоречие вызвано предположением, что α содержит неограниченную последовательность x. Следовательно, $\alpha \leqslant \sigma_\infty$.

Далее, α^* является совершенным и симметричным, по теореме (**10.1**, XII), и не совпадает ни с φ, ни с σ. Поэтому $\alpha^* \leqslant \sigma_\infty$ в соответствии с проведенными выше рассуждениями для *любого* совершенного и симметричного пространства, отличного от φ и σ. Следовательно, по (**10.1**, II) и (**10.1**, V), $\alpha^{**} \geqslant \sigma_1$, т. е. $\alpha \geqslant \sigma_1$.

Теорема доказана.

Некоторые пространства последовательностей обладают таким свойством, что любая точка пространства имеет бесконечное множество координат, равных нулю, например φ, O_1, O_2, $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$. Для того чтобы определить, будет ли точка x принадлежать такому пространству или нет, мы должны исследовать только номера ее нулевых координат, ибо на отличные от нуля координаты не накладывается никаких ограничений.

Пространство последовательностей α называется *пространством свободной сходимости*, если из того факта, что x принадлежит α и $y_k = 0$ для всех k, для которых $x_k = 0$, следует, что и y принадлежит α. Так, пространства φ, σ, O_1, O_2, $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$, δ являются пространствами свободной сходимости, а пространства $\sigma_r (r \geqslant 1)$, σ_∞, Γ, C, D, Z не являются таковыми. Очевидно, что любое пространство свободной сходимости нормально, а δ представляет собой пример пространства свободной сходимости, которое содержит φ и нормально, но несовершенно.

(**10.1**, XIV) *Если α — пространство свободной сходимости, то и α^* является пространством свободной сходимости.*

Пусть $u_{k_i} (i = 1, 2, \ldots)$ — отличные от нуля координаты произвольного элемента u из α^* и пусть v имеет те же самые нулевые координаты, а v_{k_i} — произвольные. Если $\{u_{k_i}\}$ — конечная последовательность, то u и v принадлежат φ и поэтому принадлежат α^*. Если $\{u_{k_i}\}$ — бесконечная последовательность, то ряд $\sum |u_{k_i} x_{k_i}|$ сходится для любого x из α и в этом случае $\{x_{k_i}\}$ является конечной последовательностью. В самом деле, если бы $\{x_{k_i}\}$ была бесконечной, то, так как α — пространство свободной сходимости, мы могли бы построить такой элемент x в α, что $u_{k_i} x_{k_i} = 1$ для любого i. Поэтому ряд $\sum |v_{k_i} x_{k_i}|$ сходится и, следовательно, $v \in \alpha^*$.

Теорема доказана.

Пространство свободной сходимости O_1 состоит из всех последовательностей $\{x_k\}$, таких, что $x_{2k+1} = 0$ для любого k, а на x_{2k} не накладывается никаких ограничений. Отсюда следует, что в O_1^* $\{u_{2k}\} \in \varphi$, а $\{u_{2k+1}\}$ произвольна. В общем случае, когда α является пространством свободной сходимости, для установления зависимости между свойствами последовательностей из α^* и теми же свойствами последовательностей из α нам потребуются следующие определения:

(I) Множество M целых положительных чисел называется *F-множеством для пространства свободной сходимости* α, если всякая точка из α имеет только конечное число отличных от нуля координат с номерами из M.

(II) Множество M целых положительных чисел называется *W-множеством для пространства свободной сходимости* α, если в α существует последовательность, все координаты которой с номерами из M отличны от нуля (см. пример 3 к гл. 10).

Так как $\alpha^{**} \geqslant \alpha$, то мы видим, что любое F-множество для α^{**} является F-множеством для α и любое W-множество для α является W-множеством для α^{**}. Если M является W-множеством для α и если номера всех отличных от нуля координат элемента y принадлежат M, то $y \in \alpha$. В самом деле, в этом случае существует $x \in \alpha$ такой, что координаты x_k отличны от нуля, когда $k \in M$, а нулевые координаты x являются нулевыми координатами для y.

(**10.1**, XV) *Если α — пространство свободной сходимости, то α^* состоит из всех последовательностей u, таких, что всякий* *раз, когда M является W-множеством для α, и имеет только конечное число отличных от нуля координат с номерами из M.*

Пусть $x \in \alpha$ и его отличные от нуля координаты имеют номера k_i ($i = 1, 2, \ldots$). Обозначим $\{k_i\}$ через M. Тогда α содержит всякую последовательность, у которой все отличные от нуля координаты имеют номера, принадлежащие M, так как нулевые координаты последовательности x являются нулевыми координатами всех таких последовательностей.

Если M бесконечно, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |u_{k_i} x_{k_i}|$ сходится для любого x из α тогда и только тогда, когда $u_{k_i} = 0$ для любого $i > p$, где p — некоторое число. Следовательно, число отличных от нуля координат элемента u с номерами из M будет конечным.

Наконец, для любого данного W-множества для α найдется в α последовательность, координаты которой с номерами из этого множества все отличны от нуля.

Теорема доказана.

Если N есть F-множество для α, то пространство α не всегда содержит все точки, которые имеют конечное число отличных от нуля координат с номерами из N. Например, множество P всех нечетных чисел является F-множеством для O_1 и для $\overline{O}_1$, но O_1 содержит только последовательности, координаты которых с номерами из P все равны нулю, а $\overline{O}_1$ содержит всякую последовательность, которая имеет только конечное число отличных от нуля координат с номерами из P. Мы видели, что $\overline{O}_1$ совершенное, а O_1 не является совершенным пространством.

Когда F-множества для α известны, то для определения, будет ли α совершенным пространством, может служить следующий критерий:

(**10.1**, XVI) *Пространство свободной сходимости совершенно тогда и только тогда, когда оно содержит каждую последовательность, которая имеет конечное число отличных от нуля координат с номерами в каждом F-множестве для α.*

Заменяя в (**10.1**, XV) α на α^* и затем учитывая тот факт, что всякое W-множество для α^* является F-множеством для α и наоборот (см. пример 4 к гл. 10), мы видим, что α^{**} состоит из всех последовательностей, которые имеют конечное число отличных от нуля координат с номерами в каждом F-множестве для α. Так как по определению α является совершенным, когда $\alpha = \alpha^{**}$, то отсюда и следует утверждение теоремы.

Введем следующие определения, относящиеся к множествам последовательностей:

(I) Множество X из σ_∞ называется *ограниченным в совокупности*, если $|x_k| \leqslant M$ для любого k и любого x из X.

(II) Множество X из σ_1 называется *равномерно сходящимся* (относительно x), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $m(\varepsilon)$

такое, что

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k| \leqslant \varepsilon \qquad \text{для каждого } x \text{ из } X.$$

(III) Множество X из Γ называется *сходящимся в совокупности*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать число $N(\varepsilon)$ такое, что для любого x из X

$$|x_p - x_q| \leqslant \varepsilon \quad \text{для} \quad p,\ q \geqslant N.$$

(IV) Номер последней отличной от нуля координаты последовательности из φ называется *длиной последовательности*. Множество X из φ имеет *ограниченную длину* l, если $x_k = 0$ для $k > l$ и любого x из X.

Заметим, что множество последовательностей $e^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ из σ_∞ ограничено в совокупности, но то же самое множество, рассматриваемое как относящееся к Γ, не является сходящимся в совокупности. Также множество последовательностей $\{x_k^{(n)}\}$, где $x_k^{(n)} = n$ для любого k, сходится в совокупности, но не является ограниченным в совокупности.

10.2. Координатная сходимость и проективная сходимость

Чтобы описать топологические и другие структурные свойства пространств, мы должны определить в них понятие предельного процесса. Существуют два вида определений предельного процесса:

(I) определение предельного процесса, пригодное для всего пространства σ, и

(II) определение, тесно связанное с видом пространства, которое может быть неприменимо вне этого пространства.

Координатная сходимость (которую мы определим ниже) принадлежит к первому виду, сходимость в себе (§ 10.8) может быть обоих видов.

Рассмотрим последовательность $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ точек в пространстве последовательностей α, и пусть $x_k^{(n)}$ есть k-я координата точки $x^{(n)}$. Последовательность точек $x^{(n)}$ называется *координатно сходящейся* (*c-сходящейся*), если для любого k существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ *). Если этот предел обозначить через x_k, то точка x, имеющая своими координатами x_k, называется *координатным пределом* (*c-пределом*) $x^{(n)}$; этот факт мы будем обозначать $c\text{-}\lim x^{(n)} = x$.

*) Координатная сходимость, очевидно, включает слабую сходимость (§ 9.2) как частный случай; в последнем случае предел должен принадлежать σ_2 (или другому рассматриваемому пространству), тогда как при координатной сходимости предел может принадлежать, а может и не принадлежать рассматриваемому пространству.

Если мы положим $x_k^{(n)} \equiv x_{nk}$, то матрица (x_{nk}) имеет пределы по столбцам, когда $x^{(n)}$ c-сходится.

В пространстве конечного числа N измерений последовательность проекций точек $x^{(n)}$ на любое выбранное направление y, т. е. последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{N} x_k^{(n)} y_k$, сходится тогда и только тогда, когда $x^{(n)}$ c-сходится. Мы обобщим это понятие сходимости на пространство бесконечного числа измерений следующим образом. Если $\varphi \leqslant \beta \leqslant \alpha^*$ и если последовательность проекций точек $x^{(n)}$ из α на любое фиксированное направление в β сходится, т. е. если последовательность

$$u'_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} u_k$$

сходится для любого u из β, то мы скажем, что последовательность $x^{(n)}$ *проективно сходится* (p-*сходится*) *относительно* β *или* $\alpha\beta$-*сходится*. Когда $\beta = \alpha^*$, мы просто будем говорить, что $x^{(n)}$ p-сходится в α или α-сходится.

Проекцией точки $x^{(n)}$ на основной единичный вектор $e^{(k)}$ из β является $x_k^{(n)}$, поэтому из нашего предположения, что β содержит φ, следует, что $\alpha\beta$-*сходимость влечет* c-*сходимость*. Обратное утверждение неверно; например, $e^{(k)}$ c-сходится и проекция $e^{(k)}$ из σ_1 на u из σ_1^* равна u_k, но $\sigma_1^* = \sigma_\infty$, так что $e^{(k)}$ не является σ_1-сходящейся, ибо ограниченная последовательность не обязательно должна быть сходящейся.

Определение $\alpha\beta$-сходимости может быть выражено в терминах матриц.

Если $x^{(n)}$ $\alpha\beta$-сходится, то матрица $x_{nk} \equiv x_k^{(n)}$ преобразует любую последовательность из β в сходящуюся последовательность, так что вопрос об определении класса последовательностей, которые $\alpha\beta$-сходятся, совпадает с вопросом об определении класса матриц со строками из α, которые преобразуют любую последовательность из β в последовательность из Γ. Таким образом, мы приходим к рассмотрению преобразования пространства последовательностей вместо преобразования отдельных частных последовательностей. Например, строки K-матрицы принадлежат σ_1 и K-матрица преобразует Γ в подпространство пространства Γ; мы имеем $\varphi < \Gamma < \sigma_1^*$ (так как $\sigma_1^* = \sigma_\infty$), и (x_{nk}) является K-матрицей тогда и только тогда, когда $x^{(n)}$ $\sigma_1\Gamma$-сходится.

Обобщенный критерий Коши. Из критерия Коши для сходимости последовательности мы немедленно получаем обобщенный критерий для $\alpha\beta$-сходимости; этот критерий будет дан в (**10.2**, I), (I). Если β является нормальным пространством, то (**10.2**, I), (II) дает критерий $\alpha\beta$-сходимости в этом случае. (Теорема (**10.2**, I), (II) доказана Кёте и Теплицем [1], 198, когда оба пространства α и β являются нормальными, и затем распространена Алленом [1], 314 на более общий случай, где на α не накладывается ограничений.)

(**10.2**, I) (I) *Для того чтобы $x^{(n)}$ из α $\alpha\beta$-сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого u из β и для любого $\varepsilon > 0$ существовало положительное число $N = N(\varepsilon, u)$, такое, что для любых $p, q \geqslant N$*

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right) \right| \leqslant \varepsilon.$$

(II) *Если β — нормальное пространство, то, для того чтобы $x^{(n)}$ из α $\alpha\beta$-сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого u из β и любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon, u)$ такое, что для любых $p, q \geqslant N$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Мы докажем только случай (II). Из (I) следует, что условие в (II) является достаточным; остается доказать только его необходимость. Предположим, что $x^{(n)}$ $\alpha\beta$-сходится, а условие теоремы не выполняется. Тогда существуют $\varepsilon > 0$, $u \in \beta$ и последовательность пар номеров p_i, q_i такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \left(x_k^{(p_i)} - x_k^{(q_i)}\right) \right| > \varepsilon. \tag{10.21}$$

Мы можем выбрать N_1 так, что для фиксированного i_1

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} \left| u_k \left(x_k^{(p_{i_1})} - x_k^{(q_{i_1})}\right) \right| \leqslant \frac{1}{5} \varepsilon, \tag{10.22}$$

следовательно,

$$\sum_{k=1}^{N_1} \left| u_k \left(x_k^{(p_{i_1})} - x_k^{(q_{i_1})}\right) \right| > \frac{4}{5} \varepsilon. \tag{10.23}$$

Положим $v_k = u_k c_k$, где $|c_k| = 1$ для любого k, и определим аргументы чисел c_k для $1 \leqslant k \leqslant N_1$ так, чтобы $v_k \left(x_k^{(p_{i_1})} - x_k^{(q_{i_1})}\right)$ было действительным и неотрицательным. Тогда

$$\sum_{k=1}^{N_1} v_k x\left(_k^{(p_{i_1})} - x_k^{(q_{i_1})}\right) = \sum_{k=1}^{N_1} \left| u_k \left(x_k^{(p_{i_1})} - x_k^{(q_{i_1})}\right) \right| > \frac{4}{5} \varepsilon,$$

и таким образом, какие бы ни были аргументы c_k для $k > N_1$, мы имеем:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} v_k \left(x_k^{(p_{i_1})} - x_k^{(q_{i_1})}\right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{N_1} v_k \left(x_k^{(p_{i_1})} - x_k^{(q_{i_1})}\right) + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} v_k \left(x_k^{(p_{i_1})} - x_k^{(q_{i_1})}\right) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{N_1} \left| u_k \left(x_k^{(p_{i_1})} - x_k^{(q_{i_1})}\right) - \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \right| v_k \left(x_k^{(p_{i_1})} - x_k^{(q_{i_1})}\right) \Big|.$$

Так как $|v_k|=|u_k|$ для любого k, то из (10.22) и (10.23) получаем:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} v_k\left(x_k^{(p_{i_1})}-x_k^{(q_{i_1})}\right)\right|>\frac{3}{5}\varepsilon>\frac{1}{5}\varepsilon.$$

Но $\alpha\beta$-сходимость влечет c-сходимость, а из c-сходимости мы можем определить i_2 так, что

$$\sum_{k=1}^{N_1}\left|v_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)\right|\leqslant\frac{1}{5}\varepsilon. \tag{10.24}$$

Затем мы выберем $N_2>N_1$ таким, что

$$\sum_{k=N_2+1}^{\infty}\left|u_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)\right|\leqslant\frac{1}{5}\varepsilon, \tag{10.25}$$

и тогда из (10.21) следует:

$$\sum_{k=1}^{N_2}\left|u_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)\right|>\frac{4}{5}\varepsilon. \tag{10.26}$$

Теперь мы определим аргументы c_k для $N_1+1\leqslant k\leqslant N_2$ так, чтобы

$$\sum_{k=N_1+1}^{N_2} v_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)=\sum_{k=N_1+1}^{N_2}\left|u_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)\right|=$$

$$=\sum_{k=1}^{N_2}\left|u_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)\right|-\sum_{k=1}^{N_1}\left|u_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)\right|>\frac{3}{5}\varepsilon \tag{10.27}$$

в соответствии с (10.24) и (10.26).

Следовательно,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} v_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)\right|\geqslant\left|\sum_{k=N_1+1}^{N_2} v_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)\right|-$$

$$-\left|\sum_{k=1}^{N_1} v_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)\right|-\left|\sum_{k=N_2+1}^{\infty} v_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)\right|\geqslant$$

$$\geqslant\left|\sum_{k=N_1+1}^{N_2} v_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)\right|-\sum_{k=1}^{N_1}\left|u_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)\right|-$$

$$-\sum_{k=N_2+1}^{\infty}\left|u_k\left(x_k^{(p_{i_2})}-x_k^{(q_{i_2})}\right)\right|>\frac{1}{5}\varepsilon$$

в соответствии с (10.24), (10.25) и (10.27).

Так как $|v_k|=|u_k|$ и β — нормальное пространство, то $v \in \beta$ Таким образом, какие бы ни были аргументы v_k для $k > N_2$, мы имеем:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} v_k\left(x_k^{(q_i)} - x_k^{(q_{i_2})}\right)\right| > \frac{1}{5}\varepsilon.$$

Продолжая рассуждать таким путем, мы построим последовательность $v \in \beta$ такую, что

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} v_k\left(x^{(p_{i_m})} - x_k^{(q_{i_m})}\right)\right| > \frac{1}{5}\varepsilon$$

для бесконечной последовательности пар номеров p_{i_m} и q_{i_m} $(m=1, 2, \ldots)$. Полученное противоречие с (**10.2**, I), (I) и доказывает (**10.2**, I), (II).

В проведенном выше доказательстве от пространства β требовалось только, чтобы оно удовлетворяло следующему условию: если $u \in \beta$, то и $v \in \beta$ всякий раз, когда $|v_k|=|u_k|$ для любого k. Мы сейчас покажем, что такое пространство обязано быть нормальным, т. е. должно содержать y всякий раз, когда $|y_k| \leqslant |u_k|$. Действительно, пусть $u_k = a_k + ib_k$ (a_k и b_k — действительные числа) и, как обычно, $\bar{u}_k = a_k - ib_k$. Тогда $|u_k| = |\bar{u}_k|$, так что $\bar{u} \in \beta$. Из определения пространства последовательностей следует, что $u+\bar{u}$ и $u-\bar{u}$ принадлежат β и, следовательно, $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ принадлежат β. Теперь предположим, что $|y_k| \leqslant |u_k|$, и положим $y_k = c_k + id_k$ (c_k и d_k — действительные числа); тогда $c_k^2 + d_k^2 \leqslant a_k^2 + b_k^2$. Определим f_k так, чтобы $c_k^2 + f_k^2 = a_k^2 + b_k^2$, и построим точку $z = \{c_k + if_k\}$. Тогда $|z_k| = |u_k|$ и поэтому $z \in \beta$, а значит, и $\{c_k\} \in \beta$. Определим теперь g_k так, чтобы $g_k^2 + d_k^2 = a_k^2 + b_k^2$, и положим $x = \{g_k + id_k\}$; тогда $|x_k| = |u_k|$ и $x \in \beta$. Поэтому $\{d_k\} \in \beta$, и отсюда следует, что $\{c_k + id_k\} \in \beta$, т. е. $y \in \beta$. Таким образом, β — нормальное пространство.

10.3. Проективный предел

Проективная сходимость ведет к следующему новому понятию предела:

Точка x в α или вне α называется *проективным пределом* (*p-пределом*) *последовательности точек* $x^{(n)}$ *из* α *относительно* β, *или* $\alpha\beta\text{-}\lim x^{(n)}$, *если*

(I) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k$ *абсолютно сходится для любого* u *из* β *и*

(II) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k u_k$$

для любого u из β.

Если $\beta=\alpha^*$, то x называется *р-пределом* $x^{(n)}$ *в* α *или* $\alpha\text{-}\lim x^{(n)}$.

Проективный предел основывается на требовании, что предельный переход и проектирование могут быть переставлены местами; таким образом, мы видим из определения, что предел проекций $x^{(n)}$ из α на любое u из β равен проекции предела x на u. Этот предел не всегда существует, а если он существует, то не всегда принадлежит α. В этом отношении приведенное определение, принадлежащее Аллену [1], отличается от определения Кёте и Теплица [1]; в последнем в качестве возможных предельных точек рассматриваются только элементы пространства α и, таким образом, исключаются из рассмотрения, например, сходящиеся последовательности во множестве рациональных чисел, которые не имеют предела в этом множестве. Кёте и Теплиц рассматривают всякое пространство последовательностей как отдельное от всего пространства σ, в то время как Аллен рассматривает любое пространство последовательностей как подпространство пространства σ.

Для $u=e^{(k)}$ мы имеем в соответствии с условием (II), приведенным выше, $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)}=x_k$, следовательно, если $\alpha\beta\text{-}\lim x^{(n)}=x$, то и $c\text{-}\lim x^{(n)}=x$. Из (I) следует, что c-пределы $\alpha\beta$-сходящихся последовательностей могут рассматриваться как возможные $\alpha\beta$-пределы только в том случае, если они принадлежат β^*. Конечно, последовательность может $\alpha\beta$-сходиться, а c-предел может не удовлетворять какому-либо из условий (I) или (II) или обоим.

Пусть, например, $x_k^{(n)}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^k$; тогда $x^{(n)}\in\sigma_1$. Пусть u — какая-нибудь последовательность в D, и предположим, что $u_{k+1}=-u_k$ для $k>p$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k^{(n)}=\sum_{k=1}^{p} u_k\left(\frac{n}{n+1}\right)^k+u_{p+1}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p+r}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p} u_k\left(\frac{n}{n+1}\right)^k+u_{p+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p+1}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k^{(n)}=\sum_{k=1}^{p} u_k+\frac{1}{2}u_{p+1}.$$

Таким образом, $x^{(n)}$ $\sigma_1 D$-сходится, а условие (I), очевидно, не удовлетворяется для $c\text{-}\lim x^{(n)}=x$, где $x_k=1$ для любого k.

Рассмотрим теперь в σ_1 последовательность $x^{(n)}=e^{(n)}$. Она $\sigma_1\Gamma$-сходится, ее c-предел равен 0, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)}=1$ для любого n. Отсюда, полагая $u_k=1$ для любого k, мы видим, что условие (II) не удовлетворяется.

Когда $\beta=\varphi$, мы имеем следующий простой результат (Динс [4]):

(**10.3**, I) *$\alpha\varphi$-сходимость совпадает с c-сходимостью, и $\alpha\varphi$-предел совпадает с c-пределом c-сходящейся последовательности в α.*

Пусть последовательность $x^{(n)}\in\alpha$ c-сходится и пусть $c\text{-}\lim x^{(n)}=x$. Если $u\in\varphi$ и $u_k=0$ для $k>p$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p}x_k^{(n)}u_k=\sum_{k=1}^{p}x_ku_k.$$

Следовательно, любая c-сходящаяся последовательность из α $\alpha\varphi$-сходится и ее c-предел является ее $\alpha\varphi$-пределом.

Теорема доказана.

Мы видели, что $x^{(n)}$ может $\alpha\beta$-сходиться, а ее c-предел может не удовлетворять условиям, необходимым для $\alpha\beta$-предела. В примерах, данных выше и подтверждающих этот факт, пространство β не являлось, конечно, нормальным; если β — нормальное пространство, мы получаем следующую теорему *о существовании* $\alpha\beta$-*предела*:

(**10.3**, II) *Если β — нормальное пространство, то c-предел любой $\alpha\beta$-сходящейся последовательности является $\alpha\beta$-пределом этой последовательности.*

Из (**10.2**, I), (II) для любого данного u из β и любого $\varepsilon>0$ мы имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k\left(x_k^{(p)}-x_k^{(q)}\right)\right|\leqslant\varepsilon$$

для p, $q\geqslant N(\varepsilon, u)$. Таким образом, для любого m и для p, $q\geqslant N$

$$\sum_{k=1}^{m}\left|u_k\left(x_k^{(p)}-x_k^{(q)}\right)\right|\leqslant\varepsilon.$$

Если q фиксировано, а p неограниченно возрастает, то из c-сходимости следует:

$$\sum_{k=1}^{m}\left|u_k\left(x_k-x_k^{(q)}\right)\right|\leqslant\varepsilon \tag{10.31}$$

для $q\geqslant N$ и любого m. Устремляя m к ∞, мы имеем для $q\geqslant N$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k\left(x_k-x_k^{(q)}\right)\right|\leqslant\varepsilon. \tag{10.32}$$

Из (10.31) получаем:

$$\sum_{k=1}^{m}|u_kx_k|\leqslant\varepsilon+\sum_{k=1}^{m}\left|u_kx_k^{(q)}\right|.$$

Но так как $x^{(q)}\in\alpha$ и $u\in\beta\leqslant\alpha^*$, то мы имеем:

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left|u_kx_k^{(q)}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_kx_k^{(q)}\right|,$$

и следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k x_k|$ сходится, так что $x \in \beta^*$. Согласно (10.32)

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k\left(x_k - x_k^{(q)}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k\left(x_k - x_k^{(q)}\right)\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{для} \quad q \geqslant N,$$

поэтому $\lim\limits_{q \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k^{(q)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k$ и, следовательно, $\alpha\beta\text{-}\lim x^{(n)} = x$.

Теорема доказана.

Мы видим, что любой $\alpha\beta$-предел принадлежит β^*; следующий результат даст нам позднее возможность определить множество $\alpha\beta$-пределов, когда α содержит φ.

Если $x = \{x_k\}$ и $x^{(n)} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots\}$, то $x^{(n)}$ называется *секцией* x. Когда точка x описывает пространство γ, $x^{(n)}$ описывает подпространство пространства γ, *т. е. секцию пространства* γ.

(10.3, III) *) *Если* $\alpha \geqslant \varphi$, *то всякая последовательность в* β^* *является* $\alpha\beta$-*пределом ее секций.*

Если $x = \{x_k\}$ и $x_k^{(n)} = x_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, $x_k^{(n)} = 0$ $(k > n)$, то $x^{(n)}$ является секцией x и $x^{(n)} \in \varphi$, а следовательно, $x^{(n)} \in \alpha$, так как $\alpha \geqslant \varphi$. Тогда если $x \in \beta^*$, то $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k x_k|$ сходится для любого u из β и

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k^{(n)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} u_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k.$$

Следовательно, $\alpha\beta\text{-}\lim x^{(n)} = x$, что и доказывает результат.

Мы заметим, что c-предел $\alpha\beta$-сходящейся последовательности может принадлежать, а может и не принадлежать α. Например, как было показано в начале § 10.3, последовательность $\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\right\}$ $\sigma_1 D$-сходится, но, очевидно, ее c-предел не принадлежит σ_1. Также $\alpha\beta$-предел не всегда принадлежит α; например, последовательность точек $x^{(n)}$, принадлежащих пространству φ, где $x_k^{(n)} = 1$ для $1 \leqslant k \leqslant n$ и $x_k^{(n)} = 0$ для $k > n$, $\varphi\sigma_1$-сходится, однако, если $\varphi\sigma_1\text{-}\lim x^{(n)} = x$, мы имеем $x_k = 1$ для любого k и $x \bar{\in} \varphi$.

Для исследования вопросов существования и положения этих пределов воспользуемся следующими определениями, введенными Динсом [4]:

(I) Пусть дано некоторое определение сходимости и предела. Если c-предел любой сходящейся в этом определении последовательности из α является также пределом этой последовательности и при данном

*) Теорема принадлежит Динсу [4] и является обобщением результата Кёте и Теплица [1], 198, теорема 2.

определении, то α называется *регулярным* по отношению к данному определению сходимости.

(II) Пространство последовательностей α называется *сходяще-замкнутым* по отношению к данному определению сходимости, если c-предел любой сходящейся последовательности из α принадлежит α. Данная сходимость в таком случае не выводит из α.

(III) Пространство последовательностей α называется *предельно-замкнутым* по отношению к данному определению сходимости и предела, если предел всякой сходящейся последовательности из α принадлежит α.

Если α — сходяще-замкнутое пространство по отношению к $\alpha\beta$-сходимости, то α является предельно-замкнутым по отношению к $\alpha\beta$-сходимости. Обратное утверждение не верно; например, если $\sigma_1 D\text{-}\lim x^{(n)} = x$, то $x \in D^* = \sigma_1$ (см. пример 1 к гл. 10), по определению p-предела, и, таким образом, σ_1 является предельно-замкнутым по отношению к $\sigma_1 D$-сходимости. Но мы видели, что последовательность $\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\right\}$ $\sigma_1 D$-сходится, а ее c-предел не принадлежит σ_1. Отсюда следует, что σ_1 не является сходяще-замкнутым по отношению к $\sigma_1 D$-сходимости. Поэтому необходимо различать приведенные выше два определения замкнутости пространств.

Когда $\alpha \geqslant \varphi$, мы можем рассматривать $\alpha^*\alpha$-сходимость. В каждом случае α^* является предельно-замкнутым по отношению к $\alpha^*\alpha$-сходимости, так как из определения следует, что все $\alpha^*\alpha$-пределы принадлежат α^*. Приведенные выше примеры, в которых $\alpha = D$, показывают, что α^* не всегда является сходяще-замкнутым по отношению к $\alpha^*\alpha$-сходимости.

Сейчас мы рассмотрим *общий вопрос об определении множеств c-пределов и $\alpha\beta$-пределов $\alpha\beta$-сходящихся последовательностей.*

Обозначим множество c-пределов $\alpha\beta$-сходящихся последовательностей из α через $D_\beta(\alpha)$, а множество $\alpha\beta$-пределов $\alpha\beta$-сходящихся последовательностей из α — через $d_\beta(\alpha)$; эти пределы могут принадлежать или не принадлежать α; $D_\beta(\alpha)$ и $d_\beta(\alpha)$ называются *производными множествами* *). Когда $\beta = \alpha^*$, производные множества обозначаются просто $D(\alpha)$ и $d(\alpha)$ соответственно.

Очевидно, $D_\beta(\alpha) \geqslant d_\beta(\alpha)$, а из определения $\alpha\beta$-предела следует, что $d_\beta(\alpha) \leqslant \beta^*$. Дальше, если $x \in \alpha$ и $x^{(n)} = \frac{n-1}{n}x$, то $\alpha\beta\text{-}\lim x^{(n)} = x$, и поэтому $\alpha \leqslant d_\beta(\alpha) \leqslant \beta^*$.

Когда $\alpha \geqslant \varphi$, производные множества являются пространствами последовательностей. В самом деле, начало координат (нулевая точка) является c-пределом и $\alpha\beta$-пределом последовательности $\{x^{(n)}\}$, где $x^{(n)} = \left\{\frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right\}$, и поэтому содержится

*) Определение введено Динсом [4].

в каждом производном множестве. Также если x, y принадлежат $d_\beta(\alpha)$, а c — какой-либо скаляр и если $\alpha\beta\text{-}\lim x^{(n)}=x$ и $\alpha\beta\text{-}\lim y^{(n)}=y$, то $\alpha\beta\text{-}\lim(x^{(n)}+y^{(n)})=x+y$ и $\alpha\beta\text{-}\lim cx^{(n)}=cx$, так что $x+y$ и cx принадлежат $d_\beta(\alpha)$. Следовательно, когда α содержит φ, $d_\beta(\alpha)$ (и аналогично $D_\beta(\alpha)$) является пространством последовательностей.

Если $\alpha\geqslant\varphi$, то $d_\beta(\alpha)=\beta^*$ согласно (**10.3**, III), и если, кроме того, α регулярно по отношению к $\alpha\beta$-сходимости, то $d_\beta(\alpha)=D_\beta(\alpha)=\beta^*$. Также если $\alpha\geqslant\varphi$ и β^* сходяще-замкнутое по отношению к $\beta^*\beta$-сходимости, то $D_\beta(\alpha)=\beta^*$.

Определим производные пространства в некоторых случаях.

(**10.3**, IV) *Если β — нормальное пространство, то α будет регулярным по отношению к $\alpha\beta$-сходимости.*

Это следует немедленно из (**10.3**, II), и мы получаем $D_\beta(\alpha)=$ $=d_\beta(\alpha)\leqslant\beta^*$. Если, кроме того, $\alpha\geqslant\varphi$, то $D_\beta(\alpha)=d_\beta(\alpha)=\beta^*$ согласно (**10.3**, III); например, если $\alpha\geqslant\varphi$, то $D_\varphi(\alpha)=d_\varphi(\alpha)=\sigma$, так что σ является единственным пространством, содержащим φ, которое является замкнутым в обоих смыслах относительно φ.

Пространство α^* нормально, и поэтому в частном случае, когда $\beta=\alpha^*$, предыдущий общий результат может быть сформулирован следующим образом:

(**10.3**, V) *Всякое пространство последовательностей является регулярным по отношению к α-сходимости и $D(\alpha)=d(\alpha)\leqslant\alpha^{**}$; если также $\alpha\geqslant\varphi$,* то $D(\alpha)=d(\alpha)=\alpha^{**}$.

(Несколько иллюстраций этой теоремы дано в примере 7 к гл. 10.)

Применим теперь полученные результаты к частным типам пространств.

(**10.3**, VI) *Любое совершенное пространство α является сходяще-замкнутым и предельно-замкнутым по отношению к α-сходимости.*

Действительно, любое совершенное пространство содержит φ, и, согласно (**10.3**, V), когда α — совершенное пространство, мы имеем $D(\alpha)=d(\alpha)=\alpha$, что и доказывает теорему.

(**10.3**, VII) *Если $\alpha\geqslant\varphi$ и α является нормальным, то α^* замкнуто в обоих смыслах по отношению к $\alpha^*\alpha$-сходимости.*

Здесь условие $\varphi\leqslant\beta\leqslant\alpha^*$ обращается в $\varphi\leqslant\alpha\leqslant\alpha^{**}$. Так как α^* — совершенное пространство, то оно содержит φ, и поэтому в силу (**10.3**, IV) мы имеем $D_\alpha(\alpha^*)=d_\alpha(\alpha^*)=\alpha^*$. Это и доказывает результат.

Следующая теорема является обратной к (**10.3**, VI):

(**10.3**, VIII) *Если $\alpha\geqslant\varphi$ и предельно-замкнуто по отношению к $\alpha\beta$-сходимости, то α является совершенным и $\alpha=\beta^*$.*

Пусть $x\in\alpha^{**}$; построим секции

$$x^{(n)}=\{x_1,\ \ldots,\ x_n,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots\}.$$

Для любого u из β $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k x_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k x_k$, причем ряд справа абсолютно сходится, так как $\varphi \leqslant \beta \leqslant \alpha^*$ (и, значит, $\alpha^{**} \leqslant \beta^*$). Следовательно, $\alpha\beta\text{-}\lim x^{(n)} = x$ и, по условию теоремы, $x \in \alpha$. Отсюда сдедует, что $\alpha \geqslant \alpha^{**}$ и, значит, α является совершенным пространством. Возьмем какой-нибудь y из β^* и построим секции $y^{(n)}$; тогда $\alpha\beta\text{-}\lim y^{(n)} = y$, согласно (**10.3**, III), и, таким образом, $y \in \alpha$. Поэтому $\beta^* \leqslant \alpha$. Но так как, по (**10.1**, II), из $\beta \leqslant \alpha^*$ следует $\beta^* \geqslant \alpha$, то получаем $\alpha = \beta^*$.

В частности, если $a \geqslant \varphi$ и предельно-замкнуто по отношению к α-сходимости, то α — совершенное пространство.

(**10.3**, IX) *Если*:

(I) $\alpha \geqslant \varphi$;

(II) $\varphi \leqslant \beta \leqslant \mu \leqslant \alpha^*$;

(III) μ *нормальное*;

(IV) α *предельно-замкнуто по отношению к* $\alpha\beta$*-сходимости, то* α *является замкнутым в обоих смыслах по отношению к* $\alpha\mu$*-сходимости.*

Действительно, согласно (I), (IV) и (**10.3**, VIII), мы имеем $\alpha = \beta^*$, а из условия (II) $\beta^* \geqslant \mu^* \geqslant \alpha$. Следовательно, $\alpha = \mu^* = \beta^*$. Из (II), (III) и (**10.3**, VII) следует, что μ^* замкнуто в обоих смыслах по отношению к $\mu^*\mu$-сходимости. Требуемый результат будет получен, если μ^* заменить на α.

10.4. Проективно-ограниченные множества

Если $\varphi \leqslant \beta \leqslant \alpha^*$ и если множество проекций последовательностей из множества X, где X содержится в α, на любое *фиксированное* направление в β является ограниченным, т. е. если $\left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k x_k \right| \leqslant r(u)$ для любого x из X и фиксированного u из β, то мы будем говорить, что X *проективно-ограничено* (*p-ограничено*) *относительно* β или $\alpha\beta$-*ограничено*. Если $\beta = \alpha^*$, то мы скажем, что X p-ограничено в α или α-ограничено.

(Кёте и Теплиц [1], 201 рассматривают только случай, в котором $\beta = \alpha^*$, и их определение ограниченности множества в α совпадает с только что приведенным определением α-ограниченности множества; см. Аллен [1], 312.)

Ясно, что всякая $\alpha\beta$-сходящаяся последовательность является $\alpha\beta$-ограниченной. Проекция x на $e^{(k)}$ есть x_k, и таким образом, если X $\alpha\beta$-ограничено, то $|x_k| \leqslant r_k$ для любого k и для любого x из X; здесь мы можем взять $\beta = \sigma_\infty$. Это условие не является в общем случае достаточным. Например, если $x_k^{(n)} = k$ для $1 \leqslant k \leqslant n$ и $x_k^{(n)} = 0$ для $k > n$, то последовательность $x^{(n)}$ из φ не является $\varphi\sigma_\infty$-ограниченной.

Когда $x^{(n)} \in \alpha$ и является $\alpha\beta$-ограниченной, матрица $x_{nk} \equiv x_k^{(n)}$ преобразует любую последовательность из β в ограниченную. (В качестве иллюстрации см. пример 9 к гл. 10.)

Множество X из α называется *вполне ограниченным*, если каждому ограниченному множеству U из α^* соответствует положительное число $r(X, U)$, такое, что $|u'x| < r$ *) для любого x из X и любого u из U. Кёте и Теплицем ([1], 202) показано, что любое α-ограниченное множество является вполне ограниченным, и наоборот. Исходя из этого, Аллен ([1], 321) поставил и решил следующий вопрос (будет показано ниже): какими свойствами должно обладать множество U из β, чтобы множество проекций последовательностей из U на последовательности из X являлось ограниченным всякий раз, когда X является $\alpha\beta$-ограниченным?

Очевидно, U должно быть, по крайней мере, $\beta\alpha$-ограниченным, если $\alpha \geqslant \varphi$, ибо тогда $\varphi \leqslant \alpha \leqslant \beta^*$, но это в общем случае не является достаточным. Например, если $x_k^{(n)} = k$ для $1 \leqslant k \leqslant n$ и $x_k^{(n)} = 0$ для $k > n$, то $x^{(n)}$ c-сходится и тогда, по (**10.3**, I), $\sigma_\infty\varphi$-сходится, а последовательность $e^{(k)}$ $\varphi\sigma_\infty$-ограничена. Однако $|x^{(n)\prime} e^{(n)}| = |x_n^{(n)}| = n$.

Для исследования поставленного вопроса нам потребуется следующая лемма:

Если последовательность точек $x^{(n)}$ из α $\alpha\beta$-ограничена, а ряд $\sum |b_k|$ сходится, то последовательность $y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} b_i x^{(i)}$ $\alpha\beta$-сходится.

Для u из β $|x^{(n)\prime} u| \leqslant R(u)$ для любого n. Взяв $\varepsilon > 0$, мы можем выбрать p такое, что $\sum_{i=p+1}^{\infty} |b_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{R}$; тогда, если $m > n > p$, мы имеем:

$$|u'(y^{(m)} - y^{(n)})| = \left| u' \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^{(i)} \right| \leqslant \sum_{i=n+1}^{m} |b_i u' x^{(i)}| < \varepsilon.$$

Следовательно, по (**10.3**, I), (I), последовательность $y^{(n)}$ $\alpha\beta$-сходится, что и доказывает лемму.

Пусть теперь $|x_k^{(n)}| \leqslant r_k$ для любого n, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n x_k^{(n)}|$ сходится для любого k. Если $c\text{-}\lim y^{(n)} = y$, то $y_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_k^{(n)}$, и мы можем записать:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{(n)}.$$

---

*) Мы предполагаем, что u и x являются вектор-столбцами, так что u' является вектор-строкой. См. сноску на стр. 257.

Положим, например, $x_k^{(n)}=(-1)^{k+1}$ для $1\leqslant k\leqslant n$ и $x_k^{(n)}=0$ для $k>n$. Тогда $x^{(n)}\in\varphi$ и φC-ограничена. Возьмем $b_k=\frac{1}{k(k+1)}$, тогда, согласно лемме, $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}x^{(r)}=y^{(n)}$, и эта последовательность φC-сходится. Но

$$y_k^{(n)}=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}x_k^{(r)}=(-1)^{k+1}\sum_{r=k}^{n}\frac{1}{r(r+1)}=$$
$$=(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right),$$

следовательно, $y_k=\lim_{n\to\infty}y_k^{(n)}=\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. В этом случае c-предел не принадлежит $C^*=\sigma_1$ (см. пример 1 к гл. 10) и, таким образом, не удовлетворяет условиям, необходимым для φC-предела. Возвращаясь теперь к поставленному Алленом вопросу, мы предположим, что U является $\beta\mu$-ограниченным, где μ содержит как α, так и φ. Для того чтобы c-пределы $\beta\mu$-сходящихся последовательностей, построенных так же, как и в лемме, принадлежали β, Аллен требует, чтобы β было сходяще-замкнутым по отношению к $\beta\mu$-сходимости. Частные случаи, в которых μ является α, α^{**} и β^*, будут получены как следствия.

(**10.4**, I) *Если*: (I) $\varphi\leqslant\beta\leqslant\alpha^*$; (II) $\mu\geqslant\alpha$; (III) $\varphi\leqslant\mu\leqslant\beta^*$; (IV) β — *сходяще-замкнуто по отношению к* $\beta\mu$-*сходимости*; (V) X $\alpha\beta$-*ограничено*; (VI) U $\beta\mu$-*ограничено, то* $u'x$ *ограничено для всех* x *из* X *и всех* u *из* U.

Предположим, что при этих условиях $u'x$ не ограничено. Тогда мы можем определить $x^{(1)}$ из X и $u^{(1)}$ из U так, что для любого данного $\varepsilon>0$

$$|u^{(1)\prime}x^{(1)}|\geqslant 1+\varepsilon. \tag{10.41}$$

Так как X $\alpha\beta$-ограничено, то

$$|u^{(1)\prime}x|\leqslant s_1 \tag{10.42}$$

для любого x из X, а так как U $\beta\mu$-ограничено, мы также имеем:

$$|u'x^{(1)}|\leqslant r_1 \tag{10.43}$$

для любого u из U. Если целые числа p_k удовлетворяют условию $p_k>p_{k-1}$ и $p_0=0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}2^{-p_k-1}$ сходится; если $u^{(k)}\in U$, то последовательность $y^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}2^{-p_k-1}u^{(k)}$ $\beta\mu$-сходится по доказанной выше лемме. Выберем теперь p_1 таким, что

$$\frac{1}{2^{p_1-1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{r_1}. \tag{10.44}$$

Если $C\text{-}\lim y^{(n)} = y$, то $y \in \beta$, согласно условию (IV), и

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-p_{k-1}} u^{(k)} = u^{(1)} + 2^{-p_1} u^{(2)} + 2^{-p_2} u^{(3)} + \ldots,$$

так что

$$y'x^{(1)} = u^{(1)\prime} x^{(1)} + 2^{-p_1} u^{(2)\prime} x^{(1)} + 2^{-p_2} u^{(3)\prime} x^{(1)} + \ldots$$

Следовательно, согласно (10.43),

$$|y'x^{(1)}| \geqslant |u^{(1)\prime} x^{(1)}| - r_1 (2^{-p_1} + 2^{-p_2} + \ldots) \geqslant (1+\varepsilon) - \varepsilon,$$

где учтены (10.41) и (10.44). Поэтому $|y'x^{(1)}| \geqslant 1$, какие бы ни были целые числа p_k для $k \geqslant 2$.

Теперь в соответствии с нашим предположением, что $u'x$ не является ограниченным, мы можем определить $x^{(2)}$ из X и $u^{(2)}$ из U так, что

$$|x^{(2)\prime} u^{(2)}| \geqslant 2^{p_1} (s_1 + 2 + \varepsilon). \tag{10.45}$$

Тогда мы получим:

$$|x^{(2)\prime} u| \leqslant r_2 \tag{10.46}$$

для любого u из U и $|x'u^{(2)}| \leqslant s_2$ для любого x из X. Теперь мы определим $p_2 > p_1$ так, чтобы

$$\frac{1}{2^{p_2-1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{r_2}. \tag{10.47}$$

Тогда мы получим:

$$y'x^{(2)} = u^{(1)\prime} x^{(2)} + 2^{-p_1} u^{(2)\prime} x^{(2)} + 2^{-p_2} u^{(3)\prime} x^{(2)} + \ldots,$$

и следовательно,

$$|y'x^{(2)}| \geqslant 2^{-p_1} |u^{(2)\prime} x^{(2)}| - |u^{(1)\prime} x^{(2)}| - \sum_{k=3}^{\infty} 2^{-p_{k-1}} |u^{(k)\prime} x^{(2)}| \geqslant$$

$$\geqslant (s_1 + 2 + \varepsilon) - s_1 - r_2 \sum_{k=3}^{\infty} 2^{-p_{k-1}}$$

с учетом (10.45), (10.42) и (10.46). Отсюда, согласно (10.47), $|y'x^{(2)}| \geqslant 2$.

Продолжая таким путем, мы построим y в β и $x^{(n)}$ в X, которые будут удовлетворять условию $|y'x^{(n)}| \geqslant n$. Это противоречит предположению (V), что X $\alpha\beta$-ограничено, и теорема тем самым доказана.

Отметим, что если $\beta \geqslant \varphi$ и сходяще-замкнуто по отношению к $\beta\mu$-сходимости, то β предельно-замкнуто по отношению к $\beta\mu$-сходимости, и поэтому, согласно (**10.3**, VIII), $\beta = \mu^*$.

Если $\mu \geqslant \varphi$ и является нормальным, то μ^* сходяще-замкнуто по отношению к $\mu^*\mu$-сходимости согласно (**10.3**, VII). Мы можем, например, взять $\alpha = \varphi$, $\beta = \sigma_1$ и $\mu = Z$.

Если $\alpha \geqslant \varphi$, мы можем рассмотреть случай $\mu = \alpha$, ибо тогда $\varphi \leqslant \alpha \leqslant \beta^*$. Если β сходяще-замкнуто по отношению к $\beta\alpha$-сходимости, то $\beta = \alpha^*$ согласно (**10.3**, VIII). Таким образом, мы получаем следующий результат: *если* (I) $\alpha \geqslant \varphi$; (II) α^* *сходяще-замкнуто по отношению к* $\alpha^*\alpha$*-сходимости*; (III) X *р-ограничено в* α; (IV) U $\alpha^*\alpha$*-ограничено, то* $u'x$ *ограничено.*

Согласно (**10.3**, VII), условие (II) всегда выполняется, если $\alpha \geqslant \varphi$ и α является нормальным.

Рассмотрим теперь случай $\mu = \alpha^{**}$. Прежде чем применить (**10.4**, I), мы дадим пример, показывающий, что когда X $\alpha\beta$-ограничено, а U $\beta\alpha^{**}$-ограничено, то $u'x$ не обязательно ограничено. Возьмем $\alpha = \varphi$, $\beta = C$, тогда $\alpha^{**} = \varphi$. Последовательность $x^{(n)}$, где $x_n^{(n)} = \frac{1}{n}$, $x_k^{(n)} = 0$ $(k \neq n)$, φC-ограничена, а последовательность $u^{(n)}$, где $u_k^{(n)} = k^2$ для $1 \leqslant k \leqslant n$ и $u_k^{(n)} = 0$ для $k > n$, $C\varphi$-ограничена. В этом случае мы имеем $u^{(n)\prime} x^{(n)} = n$ и $u^{(n)\prime} x^{(n)}$ не являются ограниченными.

Положим в (**10.4**, I) $\mu = \alpha^{**}$, тогда из (**10.3**, VII) следует, что если условие (IV) удовлетворяется, то $\beta = \alpha^{***} = \alpha^*$. Обратно, α^* является совершенным и поэтому сходяще-замкнутым согласно (**10.3**, VI). Следовательно, когда X и U p-ограничены в α и α^* соответственно, $u'x$ является ограниченным для всех x из X и всех u из U.

Рассматривая этот факт в терминах матриц, мы видим, что если $x^{(n)}$ α-ограничена, а U α^*-ограничено, то матрица $x_{nk} \equiv x_k^{(n)}$ преобразует U в ограниченное в совокупности множество, принадлежащее σ_∞ (см. пример 10 к гл. 10).

Рассмотрим теперь частный случай теоремы (**10.4**, I), когда $\mu = \beta^*$. Мы сначала покажем на примере, что если X $\alpha\beta$-ограничено, а U β-ограничено, то $u'x$ не обязательно ограничено. Возьмем $\alpha = \sigma_1$, $\beta = D$, тогда $\beta^* = \sigma_1$. В начале § 10.3 было показано, что последовательность $x^{(n)}$, где $x_k^{(n)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k$, $\sigma_1 D$-сходится и, следовательно, $\sigma_1 D$-ограничена. Последовательность $u^{(n)}$, где $u_k^{(n)} = 1$ для $1 \leqslant k \leqslant n$ и $u_k^{(n)} = 0$ для $k > n$, $D\sigma_1$-ограничена. Но

$$u^{(n)\prime} x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = n\left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right] \to \infty$$

при $n \to \infty$.

Условие (IV) теоремы (**10.4**, I) с $\mu = \beta^*$ показывает, что β является сходяще-замкнутым по отношению к β-сходимости. Поэтому β предельно-замкнуто по отношению к β-сходимости, а так как $\beta \geqslant \varphi$, то из (**10.3**, VIII) следует, что β является совершенным. Обратно, всякое совершенное пространство β удовлетворяет этому условию согласно

(**10.3**, VI). Следовательно, если β совершенное и если X $\alpha\beta$-ограничено, а U β-ограничено, то $u'x$ ограничено. Это показывает, что *если* β *совершенное и если* $x^{(n)}$ $\alpha\beta$-*ограничена, то матрица* $x_{nk} \equiv x_k^{(n)}$ *будет преобразовывать любое* β-*ограниченное множество в ограниченное в совокупности множество, принадлежащее* σ_∞ (см. пример 11 к гл. 10).

Рассмотрим теперь свойства p-ограниченных множеств и покажем, какие типы последовательностей являются p-ограниченными в конкретных пространствах. Каждый результат будет иметь две формулировки, ибо его можно рассматривать как теорему о преобразовании последовательностей при помощи матриц.

(**10.4.** II) (I) *Множество* X φ-*ограничено тогда и только тогда, когда* (а) $|x_k| \leqslant r_k$ *для любого* x *из* X *и* (б) X *имеет ограниченную длину.*

(II) *Матрица с конечными строками* (x_{nk}) *преобразует любую последовательность в ограниченную тогда и только тогда, когда она ограничена по строкам и* $|x_{nk}| \leqslant r_k$ *для любого* n (Динс [4]).

Условия теоремы являются достаточными, так как в этом случае для u из σ мы имеем:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{l} |u_k| r_k,$$

где l — длина X.

Условие (а) является необходимым, так как σ содержит $e^{(k)}$. Следовательно, нам остается только доказать, что X необходимо будет иметь ограниченную длину или что матрица $x_{nk} \equiv x_k^{(n)}$ ограничена по строкам. Допустим, что это не так. Тогда в X найдется последовательность $x^{(n)}$, длина которой неограниченно возрастает. Обозначим длину $x^{(n)}$ через l_n и положим $u_k = 0$ для $1 \leqslant k \leqslant l_1 - 1$, $u_{l_1} = \dfrac{1}{x_{l_1}^{(1)}}$. Тогда, какими бы ни были выбраны u_k для $k > l_1$, мы имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k^{(1)} = u_{l_1} x_{l_1}^{(1)} = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k^{(2)} = u_{l_1} x_{l_1}^{(2)} + \sum_{k=l_1+1}^{l_2} u_k x_k^2.$$

Положим $u_k = 0$ для $l_1 + 1 \leqslant k \leqslant l_2 - 1$ и выберем u_{l_2} так, чтобы

$$u_{l_2} x_{l_2}^{(2)} = 2 + \frac{r_{l_1}}{|x_{l_1}^{(1)}|}.$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k^{(2)}\right| = |u_{l_1} x_{l_1}^{(2)} + u_{l_2} x_{l_2}^{(2)}| \geqslant 2 + \frac{r_{l_1}}{|x_{l_1}^{(1)}|} - \frac{r_{l_1}}{|x_{l_1}^{(1)}|},$$

так как $|x_{l_1}^{(2)}| \leqslant r_{l_1}$; таким образом, $\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k^{(2)}\right| \geqslant 2$, какими бы ни были значения u_k для $k > l_2$. Продолжая рассуждать таким путем, мы построим последовательность u такую, что $|u'x^{(n)}| \geqslant n$. Это противоречит предположению, что X p-ограничено, и теорема тем самым доказана.

(**10.4**, III) (I) *Множество X σ_∞-ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено в совокупности.*

(II) *Матрица (x_{nk}), в которой $|x_{nk}| \leqslant M_n$ для любого k, преобразует всякое множество U, такое, что множество чисел $s(u) = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ является ограниченным для всех u из U, в ограниченное в совокупности множество тогда и только тогда, когда $|x_{nk}| \leqslant M$ для любого n и k.*

Если X есть σ_∞-ограниченное множество, то, учитывая, что $e^{(k)}$ σ_1-ограничена, мы имеем $|x'e^{(k)}| \leqslant M$ для любого x из X и любого k согласно (**10.4**, I) при $\mu = \alpha^{**}$; действительно, σ_1 является совершенным и поэтому сходяще-замкнутым по отношению к σ_1-сходимости согласно (**10.3**, VI). Следовательно, условие теоремы является необходимым. Если же оно выполняется и $u \in \sigma_1$, мы имеем:

$$|u'x| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \quad \text{для любого } x \text{ из } U,$$

а это показывает, что условие является и достаточным.

Теорема также показывает, при каких условиях множество X из α $\alpha\sigma_1$-ограничено, когда $\alpha \subset \sigma_\infty$.

(**10.4**, IV) (I) *Множество X σ_1-ограничено тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leqslant M$ для любого x из X.*

(II) *Матрица (x_{nk}), у которой ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|$ сходятся для любого n, преобразует каждую ограниченную последовательность в ограниченную последовательность тогда и только тогда, когда она является K_r-матрицей.*

Достаточность условия очевидна. Для доказательства необходимости предположим, что X σ_1-ограничено и что U состоит из всех последовательностей u, таких, что $|u_k| = 1$ для любого k. Тогда U σ_∞-ограничено, согласно (**10.4**, III), и отсюда следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k x_k| \leqslant M$ для любого x из X и любого u из U (см. пример 10 к гл. 10).

Теорема доказана.

(**10.4**, V) (I) *Множество* X σ_r-*ограничено* ($r > 1$) *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^r \leqslant M$$

для любого x *из* X.

(II) *Если* $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ ($r>1$), *то матрица* (x_{nk}), *в которой ряды* $\sum_{k=1}^{\infty}|x_{nk}|^r$ *сходятся для каждого* n, *преобразует всякое множество* U, *такое, что множество чисел* $s(u)=\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|^s$ *является ограниченным для всех* u *из* U, *в ограниченное в совокупности множество тогда и только тогда, когда суммы* $\sum_{k=1}^{\infty}|x_{nk}|^r$ *ограничены независимо от* n.

Достаточность условия следует немедленно из неравенства Гёльдера

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|^s\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Докажем необходимость условия. Если $\varepsilon>0$ и условие теоремы не выполняется, то мы можем определить $x^{(1)} \in X$ так, что $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(1)}|^r > 1+\varepsilon$, и затем выбрать n_1 такое, что

$$\sum_{k=n_1+1}^{\infty} |x_k^{(1)}|^r \leqslant \varepsilon; \text{ тогда } s_1=\sum_{k=1}^{n_1}|x_k^{(1)}|^r > 1.$$

Таким же путем мы можем определить $x^{(2)} \in X$ и $n_2 > n_1$ такие, что

$$s_2=\sum_{k=1}^{n_2}|x_k^{(2)}|^r > 2^r.$$

Продолжая этот процесс, мы определим последовательность $x^{(m)}$ (в X) и последовательность целых чисел n_m, где $n_m > n_{m-1}$, такие, что

$$s_m=\sum_{k=1}^{n_m}|x_k^{(m)}|^r > m^r. \tag{10.48}$$

Теперь мы построим последовательность $u^{(m)}$ такую, что для $1 \leqslant k \leqslant n_m$ имеем:

$$|u_k^{(m)}| = \frac{|x_k^{(m)}|^{r-1}}{(s_m)^{\frac{1}{s}}},$$

и определим аргументы $u_k^{(m)}$ так, чтобы $u_k^{(m)} x_k^{(m)}$ были действительными и неотрицательными.

Положим $u_k^{(m)} = 0$ для $k > n_m$; тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k^{(m)}|^s = \frac{1}{s_m} \sum_{k=1}^{n_m} |x_k^{(m)}|^{s(r-1)} = \frac{1}{s_m} \sum_{k=1}^{n_m} |x_k^{(m)}|^r = 1$$

для любого m. Следовательно, последовательность $u^{(m)}$ σ_s-ограничена согласно первой части (**10.4**, V). Но

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(m)} u_k^{(m)} \right| = \sum_{k=1}^{n_m} |x_k^{(m)} u_k^{(m)}| = s_m^{-\frac{1}{s}} \sum_{k=1}^{n_m} |x_k^{(m)}|^r = s_m^{1-\frac{1}{s}} = s_m^{\frac{1}{r}},$$

и поэтому $|x^{(m)\prime} u^{(m)}| > m$ согласно (10.48). Это противоречит (**10.4**, I) (когда $\mu = \alpha^{**}$), откуда и следует необходимость условия.

(**10.4**, VI) (I) *Множество X σ-ограничено тогда и только тогда, когда $|x_k| \leqslant r_k$ для любого x из X.*

(II) *Матрица (x_{nk}) преобразует любую конечную последовательность в ограниченную последовательность тогда и только тогда, когда $|x_{nk}| \leqslant r_k$ для любого n.*

Как мы уже видели, условие теоремы необходимо (см. текст, следующий за определением p-ограниченного множества). Достаточность условия очевидна.

Свойства p-ограниченных множеств из α, когда α является пространством свободной сходимости, даются следующей теоремой:

(**10.4**, VII) *Если α — пространство свободной сходимости, то множество X из α p-ограничено в α тогда и только тогда, когда:* (I) $|x_k| \leqslant r_k$ *для любого x из X;* (II) *множество M, которое состоит из номеров всех отличных от нуля координат последовательностей из X, является F-множеством для α^*.*

Мы сначала докажем достаточность условий. Предположим, что условия теоремы выполняются и что $u \in \alpha^*$. Число отличных от нуля координат u с номерами из M конечно согласно определению F-множества. Если номера этих координат $k_1, k_2, \ldots, k_p$, то $|u'x| \leqslant \leqslant \sum_{i=1}^{p} |u_{k_i}| r_{k_i}$ для любого x из X; таким образом, X p-ограничено в α. Условие (I) необходимо, так как $\alpha^* \geqslant \varphi$ и $e^{(k)} \in \varphi$. Остается доказать необходимость условия (II). Мы покажем, что если (II) не выполняется, то найдутся $u \in \alpha^*$ и последовательность $x^{(n)}$ в X такие, что $u'x^{(n)}$ неограниченно возрастает.

Предположим, что M не является F-множеством для α^*. Тогда в α^* найдется точка v с бесконечным множеством отличных от нуля координат с номерами из M. Пусть эти номера в возрастающем порядке будут $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ Мы построим такую последовательность u, что все ее координаты, номера которых не принадлежат $\{n_i\}$, равны нулю. Тогда, как бы ни были определены координаты u с номерами из $\{n_i\}$, u будет принадлежать α^*, так как отличные от нуля координаты v являются нулевыми координатами u, а α^* является пространством свободной сходимости согласно (**10.1**, XIV).

Так как $n_1 \in M$, то найдется последовательность $x^{(1)} \in X$ такая, что $x_{n_1}^{(1)}$ отлично от нуля. Множество N, состоящее из номеров всех отличных от нуля координат $x^{(1)}$, является W-множеством для α и поэтому F-множеством для α^* (см. пример 4 к гл. 10). Отсюда следует, что только конечное число целых чисел n_i находится в N, т. е. число отличных от нуля координат $x^{(1)}$ с номерами в $\{n_i\}$ является конечным. Пусть l_1 — наибольший из этих номеров. Тогда существует последовательность $x^{(2)} \in X$ такая, что $x_{n_p}^{(2)} \neq 0$, где $n_p > l_1$. Число отличных от нуля координат $x^{(2)}$ с номерами из $\{n_i\}$ конечно; пусть наибольший из этих номеров l_2, так что $l_2 > l_1$. Продолжая рассуждать таким путем, мы определим u_{l_1}, u_{l_2}, ..., как в (**10.4**, II), полагая все другие координаты u равными нулю. Тогда $u'x^{(n)}$ неограниченно возрастает вместе с n. Полученное противоречие с предположением, что X p-ограничено в α, и доказывает необходимость условия (II).

Если α — пространство свободной сходимости, N есть F-множество для α и $x \in \alpha$, то число отличных от нуля координат последовательности x с номерами из N является конечным. Последний номер отличной от нуля координаты x, который содержится в N, называется *длиной x относительно N*.

Рассмотрим множество относительных длин, когда N фиксировано, а x изменяется в p-ограниченном множестве X. В частном случае, когда $\alpha = \varphi$ и N состоит из всех положительных целых чисел, множество относительных длин является ограниченным согласно (**10.4**, II). Следующая теорема является обобщением этого результата:

(**10.4**, VIII) *Если α — пространство свободной сходимости, то множество X из α p-ограничено в α тогда и только тогда, когда*:

(I) $|x_k| \leqslant r_k$ *для любого x из X*;

(II) *X — множество ограниченной длины относительно любого фиксированного F-множества для α.*

Условие (I) необходимо, как и в (**10.4**, VII). Множество M, которое состоит из номеров отличных от нуля координат последовательностей из X, является F-множеством для α^* согласно (**10.4**, VII). Если N есть F-множество для α, то N является W-множеством для α^* (см. пример 4 к гл. 10). Таким образом, общая часть множеств целых чисел M и N конечна. Следовательно, условие (II) также необходимо.

Обратно, множество номеров отличных от нуля координат любого фиксированного u из α^* является W-множеством для α^* и F-множеством для α. Таким образом, условия теоремы достаточны.

В качестве примеров отметим, что: (а) множество X p-ограничено в $\overline{O}_1$ тогда и только тогда, когда $|x_k| \leqslant r_k$ и $\{x_{2k+1}\}$ имеет ограниченную длину для любого x из X; (б) множество X p-ограничено в $\overline{O}_2$ тогда и только тогда, когда $|x_k| \leqslant r_k$ и $\{x_{2k}\}$ имеет ограниченную длину для любого x из X.

10.5. Сильная проективная сходимость и предел

Если $\varphi \leqslant \beta \leqslant \alpha^*$ и x фиксировано в α, в то время как u изменяется в β, то ряд $f(u) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k x_k$ определяет в β функцию от u. Мы будем рассматривать последовательность проекций векторов $x^{(n)}$ из α на векторы из β как последовательность функций $f^{(n)}(u)$, определенных в β, и разберем случай, в котором эта последовательность равномерно сходится всякий раз, когда u принадлежит p-ограниченному множеству U из β.

Если последовательность точек $x^{(n)}$ из α удовлетворяет условию, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого p-ограниченного множества U из β можно указать такое число $N(\varepsilon, U)$, что

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right) \right| \leqslant \varepsilon$$

для любого u из U и $p, q > N$, то говорят, *что* $x^{(n)}$ *сильно проективно сходится* (***p*-сходится**) *относительно* β *или* $\boldsymbol{\alpha\beta}$*-сходится*. Когда $\beta = \alpha^*$, мы будем говорить, что $x^{(n)}$ ***p*-сходится** в α или $\boldsymbol{\alpha}$*-сходится* *).

Взяв U, состоящее из одной точки, мы видим, что $\boldsymbol{\alpha\beta}$-сходимость влечет $\alpha\beta$-сходимость. Обратное неверно. Например, $e^{(k)}$ φC-сходится и p-ограничено в C, так как $C^* = \sigma_1$, но если $q \neq p$, мы имеем $e^{(p)}(e^{(p)} - e^{(q)}) = 1$, и следовательно, $e^{(k)}$ не есть $\boldsymbol{\varphi C}$-сходящаяся.

Из $\varphi \leqslant \beta \leqslant \alpha^*$ мы получаем $\beta^* \geqslant \alpha^{**}$, и таким образом, если U p-ограничено в β, то U p-ограничено в α^*. Отсюда следует, что $\boldsymbol{\alpha}$-сходимость влечет $\boldsymbol{\alpha\beta}$-сходимость. В самом деле, предположим, что $x^{(n)}$ $\boldsymbol{\alpha}$-сходится и что U p-ограничено в β. Тогда U p-ограничено в α^* и, следовательно, $u'x^{(n)}$ равномерно сходится для всех u из U. Таким образом, $x^{(n)}$ $\boldsymbol{\alpha\beta}$-сходится.

Определение ***p***-сходимости может быть установлено в терминах матриц: если $x^{(n)}$ $\boldsymbol{\alpha\beta}$-сходится, то матрица $x_{nk} \equiv x_k^{(n)}$ со строками из α преобразует любое p-ограниченное множество из β в сходящееся

*) Необходимо различать обозначения сходимости и пределов, набранные жирным шрифтом, от соответствующих обозначений, введенных раньше в этой главе и набранных обычным шрифтом. (*Прим. перев.*)

в совокупности множество из Г. Ниже будет показано, что преобразованное множество также ограничено в совокупности.

Иллюстрируем определение $\alpha\beta$-сходимости примером. Пусть $\alpha = \varphi$, $\beta = \sigma_\infty$ и $x^{(n)} = \{a, a^2, \ldots, a^n, 0, 0, \ldots\}$, где $0 < a < 1$. Если U p-ограничено в σ_∞, то $|u_k| \leqslant M$ для любого u из U, согласно (**10.4**, III), так что

$$|u'(x^{(p)} - x^{(q)})| = \left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k a^k\right| \leqslant M \sum_{k=p+1}^{q} a^k \leqslant \varepsilon$$

для любого u из U и p, $q \geqslant N(\varepsilon, U)$. Таким образом, $x^{(n)}$ $\varphi\sigma_\infty$-сходится. Отметим, что $c\text{-}\lim x^{(n)}$ не принадлежит φ.

Сейчас мы дадим «обобщенный критерий Коши» для сильной проективной сходимости.

(**10.5**, I) *Для того чтобы $x^{(n)}$ из α $\alpha\beta$-сходилась, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого p-ограниченного множества U из β можно было указать такое число $N(\varepsilon, U)$, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

для любого u из U и p, $q > N$.

Достаточность условия следует из определения. Для доказательства необходимости мы построим секции $u^{(n)} = \{u_1, \ldots, u_n, 0, 0, \ldots\}$ для любого u из U и рассмотрим множество V, состоящее из всех последовательностей $v^{(n)}$, таких, что

$$\left|v_k^{(n)}\right| = \left|u_k^{(n)}\right|;$$

последовательности $v^{(n)}$ принадлежат φ и поэтому принадлежат β. Для всех y из β^* выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} v_k^{(n)} y_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |u_k y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |u_k y_k|$$

для любого n, следовательно, V p-ограничено в β. Таким образом, если $x^{(n)}$ $\alpha\beta$-сходится, то

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} v_k^{(n)} \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

для p, $q \geqslant N(\varepsilon, U)$. Для данных двух произвольных целых чисел p, $q > N$ выберем аргументы координат $v_k^{(n)}$ так, чтобы произведения $v_k^{(n)}\left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)$ были действительными и неотрицательными. Тогда мы получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \left| u_k \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

для любого n и любого u из U, что и доказывает требуемый результат.

Как известно, $e^{(k)}$ p-сходится в σ_∞, а также p-ограничена в $\sigma_1 = \sigma_\infty^*$, однако $e^{(p)}(e^{(p)} - e^{(q)}) = 1$ для $q > p$, так что последовательность $e^{(k)}$ не будет $\boldsymbol{p}$-сходиться в σ_∞. Этот пример показывает, что p-сходимость не влечет $\boldsymbol{p}$-сходимости в любом из пространств C, D, Γ, Z и σ_r $(r > 1)$. Мы сейчас покажем, что существуют пространства последовательностей, в которых p-сходимость влечет $\boldsymbol{p}$-сходимость.

(**10.5**, II) *В σ_1 p-сходимость и $\boldsymbol{p}$-сходимость совпадают.*

Мы имеем $\sigma_1^* = \sigma_\infty$, и если U p-ограничено в σ_∞, то, согласно (**10.4**, III), $|u_k| \leqslant M$ для любого u из U. Предположим, что $x^{(n)}$ p-сходится в σ_1 и $\varepsilon > 0$. Тогда, полагая $u_k = 1$ для любого k в (**10.2**, I), (II), мы можем определить N так, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(p)} - x_k^{(q)} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{для} \quad p,\ q > N.$$

Следовательно, $\left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right) \right| \leqslant \varepsilon$ для любого u из U и $p, q > N$, поэтому $x^{(n)}$ $\boldsymbol{p}$-сходится в σ_1, и теорема доказана.

(**10.5**, III) *В любом пространстве свободной сходимости α p-сходимость и $\boldsymbol{p}$-сходимость совпадают.*

Предположим, что U p-ограничено в α^*. Пусть S — множество, состоящее из номеров всех отличных от нуля координат последовательностей из U. Тогда, согласно (**10.4**, VII), S является F-множеством для α^{**} и, таким образом, является F-множеством для α (§ 10.1). Если $x^{(n)}$ p-сходится в α, то $x^{(n)}$ имеет ограниченную длину l относительно S (см. (**10.4**, VIII) и пример 19 к гл. 10). Но, согласно (**10.1**, XIV) и (**10.4**, VII), $|u_k| \leqslant r_k$ для любого u из U и из c-сходимости следует, что

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right) \right| = \left| \sum_{k=1}^{l} u_k \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{l} r_k \left| x_k^{(p)} - x_k^{(q)} \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{для } p,\ q \geqslant N,$$

т. е. $x^{(n)}$ $\boldsymbol{p}$-сходится в α, что и требовалось доказать.

Например, p-сходимость и $\boldsymbol{p}$-сходимость совпадают в каждом из пространств φ, σ, O_1, O_2, $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$ и δ. Из того факта, что они совпадают в σ, следует, что $\alpha\varphi$-сходимость влечет $\boldsymbol{\alpha\varphi}$-сходимость, и наоборот.

Точка x называется *сильным проективным пределом ($\boldsymbol{p}$-пределом) последовательности точек $x^{(n)}$ из α относительно β, если:* (I) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k x_k|$ *сходится для любого* $u \in \beta$; (II) *для любого p-огра-*

ниченного множества $U \subset \beta$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $N(\varepsilon, U)$ *такое, что для каждого* $u \in U$ *имеем*:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left(x_k^{(n)} - x_k\right) \right| \leqslant \varepsilon \text{ для любого } n \geqslant N.$$

Этот предел мы будем обозначать так: $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}\text{-}\lim x^{(n)} = x$; когда $\beta = \alpha^*$, мы скажем, что x является ***p*-пределом для** $x^{(n)}$ *в* α, и будем обозначать $\boldsymbol{\alpha}\text{-}\lim x^{(n)} = x$.

Это определение $\boldsymbol{p}$-предела основывается на требовании, что всякий раз, когда на u накладывается ограничение, чтобы оно принадлежало к p-ограниченному множеству в β, проекции векторов $x^{(n)}$ на u равномерно сходятся к проекциям предела на u. Отметим, что $\boldsymbol{p}$-предел может принадлежать α и может быть вне α, но обязательно должен принадлежать β^* согласно условию (I), сформулированному выше. Например, если $0 < a < 1$ и

$$x^{(n)} = \{a,\ a^2,\ \ldots,\ a^n,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots\},$$

то из примера, данного перед (**10.5**, I), следует, что $\boldsymbol{\varphi\sigma_\infty}\text{-}\lim x^{(n)}$ не принадлежит φ.

Полагая U состоящим только из одной точки, мы видим, что если $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}\text{-}\lim x^{(n)} = x$, то $\alpha\beta\text{-}\lim x^{(n)} = x$ и $c\text{-}\lim x^{(n)} = x$.

Докажем следующую теорему:

(**10.5**, IV) *Любое пространство последовательностей* α *является регулярным по отношению к* $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$-*сходимости.*

Пусть $x^{(n)}$ $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$-сходится, $c\text{-}\lim x^{(n)} = x$, и предположим, что U p-ограничено в β. Тогда по (**10.5**, I) мы имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right) \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{для } p,\ q \geqslant N(\varepsilon,\ U).$$

Следовательно, для любого m и для p, $q \geqslant N$

$$\sum_{k=1}^{m} \left| u_k \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Фиксируя u и q и устремляя p к ∞, мы получаем из c-сходимости

$$\sum_{k=1}^{m} \left| u_k \left(x_k - x_k^{(q)}\right) \right| \leqslant \varepsilon \tag{10.51}$$

для любого m. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k \left(x_k - x_k^{(q)}\right) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{10.52}$$

Из (10.51) имеем:

$$\sum_{k=1}^{m} |u_k x_k| \leqslant \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} \left| u_k x_k^{(q)} \right|$$

для любого m и любого u из U. Так как $u \in \beta$ и $x^{(q)} \in \alpha$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k x_k^{(q)}|$ сходится, и поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k x_k|$ также сходится. Так как множество U произвольно, то $x \in \beta^*$, а из (10.52) следует, что $\boldsymbol{\alpha\beta}$-$\lim x^{(n)} = x$, и теорема тем самым доказана.

Таким образом, если $x^{(n)}$ $\boldsymbol{\alpha\beta}$-сходится и $\alpha\beta$-$\lim x^{(n)} = x$, то $\boldsymbol{\alpha\beta}$-$\lim x^{(n)} = x$.

Если $x^{(n)}$ $\boldsymbol{\alpha\beta}$-сходится и c-$\lim x^{(n)} = x$, то $\boldsymbol{\alpha\beta}$-$\lim x^{(n)} = x$, и значит, если U p-ограничено в β, то из определения $\boldsymbol{p}$-предела следует, что

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k^{(n)} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |u_k x_k| + \varepsilon \quad \text{для} \quad n \geqslant N(\varepsilon, U).$$

Так как $x \in \beta^*$, то $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k x_k| \leqslant r(x)$ для любого u из U и, значит, для любого u из U и $n \geqslant N$ имеет место $\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k^{(n)} \right| \leqslant r + \varepsilon$. Но так как $x^{(n)} \in \alpha \leqslant \beta^*$, то для любого фиксированного $n < N$ и любого u из U мы имеем $\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k^{(n)} \right| \leqslant s_n$. Поэтому $\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k^{(n)} \right| \leqslant R$ для любого n и любого $u \in U$. Отсюда следует, что матрица $x_{nk} \equiv x_k^{(n)}$ преобразует U в ограниченное в совокупности множество в Γ; раньше (стр. 337) мы видели, что преобразованное множество является также сходящимся в совокупности множеством.

В (**10.3**, III) мы видели, что если $\alpha \geqslant \varphi$, то любая точка в α^{**} является α-пределом ее секций. В φ, σ, σ_1 и в любом пространстве свободной сходимости p-сходимость влечет $\boldsymbol{p}$-сходимость, и наоборот. Из (**10.5**, IV) следует, что в φ, σ, σ_1 и в любом пространстве свободной сходимости, которое содержит φ, любая последовательность является $\boldsymbol{p}$-пределом ее секций. Если через $x^{(n)}$ обозначить секцию x из σ_r $(r > 1)$ и если U p-ограничено в σ_s, где $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, то $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^s \leqslant M$ для любого u из U согласно (**10.4**, V); поэтому

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left(x_k^{(n)} - x_k\right) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k x_k \right| \leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|^s \right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \varepsilon$$

для $n \geqslant N(\varepsilon, U)$ и для любого u из U. Следовательно, любая точка в $\sigma_r (r > 1)$ является $\boldsymbol{p}$-пределом ее секций.

Приведенные выше результаты также показывают, что: (а) любая точка в σ_1 является $\boldsymbol{\varphi\sigma_\infty}$-пределом ее секций, так как мы можем рассматривать секции как последовательности из φ; (б) если $\varphi < \alpha < \sigma_r$ и $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ $(r > 1)$, то любая точка в σ_r является $\boldsymbol{\alpha\sigma_s}$-пределом ее секций; (в) если $\alpha \geqslant \varphi$, то любая последовательность является $\alpha\varphi$-пределом ее секций.

Существуют пространства, содержащие последовательности, секции которых не являются p-сходящимися, например пространства σ_∞, C и Γ. Чтобы показать это, рассмотрим последовательность x, где $x_k = 1$ для любого k, и построим ее секции $x^{(n)}$; эта последовательность x принадлежит каждому из пространств σ_∞, C и Γ. Так как $e^{(k)}$ p-ограничена в σ_1, то мы имеем $e^{(p)}(x^{(p)} - x^{(p-1)}) = x_p^{(p)} - x_p^{(p-1)} = 1$. Таким образом, $x^{(n)}$ не является p-сходящейся в σ_∞.

10.6. Замыкание относительно сильной проективной сходимости

Из (**10.5**, IV) следует, что если α предельно-замкнуто по отношению к $\alpha\beta$-сходимости, то α сходяще-замкнуто по отношению к $\alpha\beta$-сходимости, и наоборот. Поэтому излишне делать различие в этом случае между двумя видами замкнутости, и мы будем говорить, что такое пространство α *замкнуто* по отношению к $\alpha\beta$-сходимости. Очевидно, что если α предельно-замкнуто по отношению к $\alpha\beta$-сходимости, то α замкнуто по отношению $\alpha\beta$-сходимости. Следовательно, всякое совершенное пространство α замкнуто по отношению к p-сходимости согласно (**10.3**, VI). Из (**10.3**, VII) также следует, что если $\alpha \geqslant \varphi$ и является нормальным, то α^* замкнуто по отношению к $\alpha^*\alpha$-сходимости; например, σ_1 замкнуто по отношению к $\sigma_1 Z$-сходимости.

Будем обозначать множество $\alpha\beta$-пределов последовательностей из α через $d'_\beta(\alpha)$; когда $\beta = \alpha^*$, мы будем обозначать его через $d'(\alpha)$.

Если $\alpha \geqslant \varphi$, то начало (нулевая точка) является $\alpha\beta$-пределом последовательностей

$$x^{(n)} = \left\{\frac{1}{n},\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots\right\} \quad \text{из} \quad \alpha.$$

В самом деле, если U p-ограничено в β, то $|u_1| \leqslant r$ для любого u из U и, таким образом,

$$|u'(x^{(p)} - x^{(q)})| = \left|u_1\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right| \leqslant r\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{для} \quad p,\ q \geqslant N.$$

Следовательно, $\alpha\beta\text{-}\lim x^{(n)} = 0$ и $d'_\beta(\alpha)$ содержит начало (нулевую точку), когда $\alpha \geqslant \varphi$. Отсюда вытекает, как в § 10.3, что $d'_\beta(\alpha)$ *является пространством последовательностей, когда* $\alpha \geqslant \varphi$.

Очевидно, что (I) $d'_\beta(\alpha) \leqslant d_\beta(\alpha) \leqslant D_\beta(\alpha)$, а из определения $\alpha\beta$-предела следует, что (II) $d'_\beta(\alpha) \leqslant \beta^*$, (III) $d'(\alpha) \leqslant \alpha^{**}$. (О частных случаях этих включений см. пример 20 к гл. 10.)

Всякая p-сходящаяся последовательность из α является как c-сходящейся, так и p-ограниченной, но эти два условия в общем случае не достаточны для p-сходимости. Например, последовательность $e^{(k)}$ c-сходится и p-ограничена в σ_1, но не является p-сходящейся в σ_1. В пространстве σ эти два условия, конечно, являются достаточными.

(10.6, I) *Если любая точка из α^* является **p**-пределом ее секций из α^*, то, для того чтобы последовательность точек в α была p-сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была c-сходящейся и p-ограниченной.*

Нам нужно доказать только достаточность условий. Пусть $u^{(n)}$ — секции произвольной точки u из α^*, а $x^{(n)}$ c-сходится и p-ограничена в α. Так как $\alpha^{**} \geqslant \alpha$ и $\alpha^{***} = \alpha^*$, то $x^{(n)}$ p-ограничена в α^{**}. По предположению, $\alpha^*\text{-}\lim u^{(n)} = u$, следовательно, для данного $\varepsilon > 0$ мы можем определить $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)}\left(u_k - u_k^{(m)}\right)\right| \equiv \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} x_k^{(n)} u_k\right| \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon$$

для любого n и для $m \geqslant N$.

Фиксируем любое $m \geqslant N$ и из c-сходимости определим N' такое, что

$$\left|\sum_{k=1}^{m} u_k\left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{для} \quad p,\ q \geqslant N'.$$

Тогда

$$|u'(x^{(p)} - x^{(q)})| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\sum_{k=1}^{m} u_k\left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} u_k x_k^{(p)}\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} u_k x_k^{(q)}\right| \leqslant \varepsilon$$

для $p,\ q \geqslant N'$. Поэтому $x^{(n)}$ p-сходится в α, и теорема доказана.

Например, если α — пространство свободной сходимости, то α^* является пространством свободной сходимости и, значит, любая точка из α^* является **p**-пределом ее секций. Таким образом, если α — пространство свободной сходимости, то необходимым и достаточным условием для p-сходимости в α являются c-сходимость и p-ограниченность.

Мы сейчас применим (**10.6**, I) к другим пространствам, используя свойства p-ограниченных множеств, приведенных в § 10.4; каждая из нижеследующих теорем формулируется также и в терминах матриц. Мы видели (в конце § 10.5), что в σ_∞ существуют точки, секции которых не являются **p**-сходящимся, и значит, (**10.6**, I) неприменима для σ_1.

Из последних замечаний в § 10.5 следует, что двойственные пространства к пространствам φ, σ_∞ и σ_r $(r > 1)$ обладают тем свойством, что всякая точка пространства является **p**-пределом ее секций.

(10.6, II) (I) *Последовательность из φ p-сходится в φ тогда и только тогда, когда она c-сходится и имеет ограниченную длину.*

(II) *Матрица с конечными строками преобразует любую последовательность в сходящуюся тогда и только тогда, когда она ограничена по строкам и имеет пределы по столбцам.*

Этот результат следует немедленно из (**10.4**, II) и (**10.6**, I).

(**10.6**, III) (I) *Для того чтобы $x^{(n)}$ р-сходилась в σ_r $(r > 1)$, необходимо и достаточно, чтобы* (а) *$x^{(n)}$ с-сходилась и* (б) $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^r \leqslant M$ *для любого n.*

(II) *Если $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ $(r > 1)$, матрица $(x_{nk}) = (x_k^{(n)})$, в которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^r$ сходится для каждого n, преобразует всякую последовательность u, у которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^s$ сходится, в сходящуюся последовательность тогда и только тогда, когда* (а) $\lim_{n\to\infty} x_{nk} = x_k$ *для любого фиксированного k и* (б) $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^r \leqslant M$ *для любого n.*

Этот результат следует немедленно из (**10.4**, V) и (**10.6**, I).

Два условия, установленных в (I), постулированы Ф. Риссом ([1], 55) для определения сходимости в этом пространстве. Банахом ([1], 137) доказано, что эти условия являются необходимыми и достаточными для слабой сходимости. Мы видим, что в этом пространстве сходимость по Риссу, слабая сходимость по Банаху и p-сходимость эквивалентны.

(**10.6**, IV) (I) *Последовательность $x^{(n)}$ р-сходится в σ_∞ тогда и только тогда, когда она с-сходится и ограничена в совокупности.*

(II) *Матрица (x_{nk}), в которой $|x_{nk}| \leqslant r_n$ для любого k, преобразует любую последовательность u, для которой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ сходится, в сходящуюся последовательность тогда и только тогда, когда* (а) $\lim_{n\to\infty} x_{nk} = x_k$ *для любого фиксированного k и* (б) $x_{nk}| \leqslant M$ *для любых n и k.*

Этот результат следует немедленно из (**10.4**, III) и (**10.6**, I).

(**10.6**, V) (I) *Последовательность р-сходится в σ тогда и только тогда, когда она с-сходится.*

(II) *Матрица преобразует всякую конечную последовательность в сходящуюся последовательность тогда и только тогда, когда она имеет пределы по столбцам.*

Этот результат является другой формулировкой теоремы (**10.3**, I).

(**10.6**, VI) (I) *Последовательность* $x^{(n)}$ *p-сходится в* σ_1 *тогда и только тогда, когда она c-сходится и ряды* $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}|$ *равномерно сходятся* *).

(II) *Матрица* (x_{nk}), *в которой ряды* $\sum_{k=1}^{\infty}|x_{nk}|$ *сходятся для каждого n, преобразует любую ограниченную последовательность в сходящуюся тогда и только тогда, когда она имеет пределы по столбцам и ряды* $\sum_{k=1}^{\infty}|x_{nk}|$ *равномерно сходятся.*

Предположим, что эти условия удовлетворяются для $x^{(n)}$. Тогда для данных $\varepsilon > 0$ и u из σ_∞, удовлетворяющего условию $|u_k| \leqslant M$, мы можем определить m такое, что

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}|x_k^{(n)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{для любого } n,$$

затем из c-сходимости мы определим N такое, что

$$\sum_{k=1}^{m}\left|u_k\left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)\right| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{для} \quad p,\ q \geqslant N.$$

Таким образом, для $p,\ q \geqslant N$ мы имеем:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k\left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{m}\left|u_k\left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)\right| + \sum_{k=m+1}^{\infty}\left|u_k x_k^{(p)}\right| + \sum_{k=m+1}^{\infty}\left|u_k x_k^{(q)}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Из (**10.2**, I), (I) следует, что последовательность $x^{(n)}$ p-сходится, и поэтому условия теоремы являются достаточными. Докажем теперь их необходимость.

Первое условие необходимо, так как σ_∞ содержит $e^{(k)}$.

Пусть $x^{(n)}$ p-сходится в σ_1. Тогда по (**10.3**, IV) и (**10.3**, V) $x^{(n)}$ имеет p-предел x из σ_1. Взяв $\varepsilon > 0$, мы можем определить m такое, что $\sum_{k=m+1}^{\infty}|x_k| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. Для любого u из σ_∞ мы имеем, согласно (10.32),

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k\left(x_k - x_k^{(q)}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{для } q \geqslant N(\varepsilon,\ u).$$

---

*) См. определение (II) в конце § 10.1. Матрица (x_{nk}) в (**10.6**, VI) не может быть T-матрицей, как это очевидно из (**4.4**, III). Фактически (**10.6**, VI) дает другое доказательство (**4.4**, III).

Положим $u_k = 0$ для $1 \leqslant k \leqslant m$ и $u_k = 1$ для $k > m$. Тогда

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k - x_k^{(q)}| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{для } q \geqslant N',$$

и таким образом,

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k^{(q)}| \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k| + \frac{1}{2}\varepsilon \leqslant \varepsilon \quad \text{для } q \geqslant N'.$$

Отсюда следует, что второе условие также необходимо.

Теорема доказана.

10.7. Некоторые свойства p-сходящихся последовательностей

В σ_1 и в любом пространстве свободной сходимости p-сходимость и $\boldsymbol{p}$-сходимость совпадают. Мы сейчас рассмотрим, какие типы последовательностей $\boldsymbol{p}$-сходятся в σ_∞ и в $\sigma_r\,(r > 1)$.

Легко видеть, что последовательность $x^{(n)}$ $\boldsymbol{p}$-сходится в σ_2 тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $N(\varepsilon)$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{для } p,\ q \geqslant N.$$

Это условие постулировано Гильбертом для определения сильной сходимости в σ_2 (см. § 9.2). Ниже, в (**10.8**, II) и (**10.8**, III), мы покажем, что обобщенное Риссом (Ф. Рисс [1], 59) понятие сильной сходимости по Гильберту совпадает с $\boldsymbol{p}$-сходимостью в σ_r для $r \geqslant 1$.

Мы сначала укажем свойства $\boldsymbol{p}$-сходящихся последовательностей в $\sigma_r\,(r > 1)$, причем результат формулируется также и в терминах матриц.

(**10.7**, I) (I) *Для того чтобы $x^{(n)}$ $\boldsymbol{p}$-сходилась в $\sigma_r\,(r > 1)$, необходимо и достаточно, чтобы*

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ *для любого фиксированного k и*

(б) *ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^r$ *равномерно сходились.*

(II) *Если* $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1\ (r > 1)$, *матрица* (x_{nk}), *в которой* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^r$ *сходится для каждого n, преобразует множество U, для которого множество* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|^s$ *является ограниченным, в ограниченное в совокупности и сходящееся в совокупности множество тогда и только тогда, когда* (а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{nk} = x_k$ *для любого фиксированного* k *и*

(б) *ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^r$ *равномерно сходятся.*

Условие (а) необходимо, так как σ_s содержит $e^{(k)}$. Докажем необходимость условия (б). Если $x^{(n)}$ **p**-сходится в σ_r, то, согласно (**10.5**, IV) и § 10.6 (первые абзацы) *), $x^{(n)}$ имеет p-предел x в σ_r. Так как $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, то для любого p-ограниченного множества V в σ_s и любого $\varepsilon>0$ можно указать такое число $N(\varepsilon, V)$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|v_k\left(x_k^{(n)}-x_k\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \tag{10.71}$$

для любого $n \geqslant N$ и любого v из V. Пусть U — множество, состоящее из всех последовательностей u следующего вида: каждому u соответствует $x^{(p)}$ такое, что или $u_k=0$, или $|u_k|=|x_k^{(p)}|^{r-1}$. Тогда $|u_k|^s=|x_k^{(p)}|^r$ или $|u_k|^s=0$, и поэтому $U\subset\sigma_s$.

Так как последовательность $x^{(n)}$ p-ограничена, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}|^r \leqslant M$ для любого n и, следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|^s \leqslant M$ для любого u из U. Таким образом, U p-ограничено в σ_s.

Так как $x\in\sigma_r$, мы можем определить m такое, что

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}|x_k|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2M^{\frac{1}{s}}}. \tag{10.72}$$

Положим в (10.71) $v_k=0$ для $1\leqslant k\leqslant m$, $|v_k|=|x_k^{(p)}|^{r-1}$ для $k>m$; тогда

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}|x_k^{(p)}|^{r-1}|x_k^{(n)}-x_k| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$$

для $n\geqslant N'$ и любого p. Следовательно,

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}|x_k^{(p)}|^{r-1}|x_k^{(n)}| \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty}|x_k^{(p)}|^{r-1}|x_k|+\frac{1}{2}\varepsilon. \tag{10.73}$$

---

*) См. также пример 20 (II) к гл. 10.

Но из неравенства Гёльдера и (10.72) мы имеем:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k^{(p)}|^{r-1} |x_k| \leqslant \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k^{(p)}|^{s(r-1)}\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2M^{\frac{1}{s}}} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k^{(p)}|^r\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^r \leqslant M$ для любого n. Используя (10.73), мы теперь получаем для любого p и для $n \geqslant N'$:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k^{(p)}|^{r-1} |x_k^{(n)}| \leqslant \varepsilon.$$

Так как N' не зависит от p, мы можем положить $p = n$ и тогда для $n \geqslant N'$ получим $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^r \leqslant \varepsilon$. Таким образом, условие (б) является необходимым.

Для доказательства достаточности предположим, что $x^{(n)}$ из σ_r удовлетворяет условиям (а) и (б).

Если U p-ограничено в σ_s, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|^s \leqslant M$ для любого u из U. Взяв $\varepsilon > 0$, мы можем определить, согласно (б), такое m, что

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3M^{\frac{1}{s}}} \tag{10.74}$$

для любого n.

Тогда, используя неравенство Гёльдера и c-сходимость, получаем:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} u_k \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} |u_k|^s\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant$$

$$\leqslant M^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{10.75}$$

для любого u из U и $p,\ q \geqslant N$. Но, согласно (10.74),

$$\left|\sum_{k=m+1}^{\infty} u_k x_k^{(n)}\right| \leqslant \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k|^s\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{10.76}$$

для любого n. Тогда для $p,\ q \geqslant N$ и для любого u из U мы будем иметь:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k\left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{m} u_k\left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)\right| + \\ + \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} u_k x_k^{(p)}\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} u_k x_k^{(q)}\right| \leqslant \varepsilon$$

согласно (10.75) и (10.76).

Следовательно, $x^{(n)}$ $\boldsymbol{p}$-сходится, и условия, таким образом, являются достаточными.

Теорема доказана.

(**10.7**, II) (I) *Для того чтобы $x^{(n)}$ была $\boldsymbol{p}$-сходящейся в σ_∞, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такое число $N(\varepsilon)$, что $\left|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right| \leqslant \varepsilon$ для любого k и для $p,\ q \geqslant N$.*

(II) *Матрица (x_{nk}), в которой $|x_{nk}| \leqslant M_n$ для любого k, преобразует любое множество U, удовлетворяющее условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| \leqslant M$ для любого u из U, в ограниченное в совокупности и сходящееся в совокупности множество тогда и только тогда, когда столбцы ее сходятся в совокупности.*

Последовательность $e^{(k)}$ p-ограничена в σ_1, так что если $x^{(n)}$ $\boldsymbol{p}$-сходится в σ_∞, то мы имеем $\left|e^{(k)}\left(x^{(p)} - x^{(q)}\right)\right| \leqslant \varepsilon$ для $p,\ q \geqslant N(\varepsilon)$ и любого k. Следовательно, условие необходимо.

Предположим теперь, что $x^{(n)}$ из σ_∞ удовлетворяет условию теоремы и что U p-ограничено в σ_1. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| \leqslant M$ для любого u из U. Выберем теперь N такое, что $\left|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$ для $p,\ q \geqslant N$ и для любого k; тогда если $p,\ q \geqslant N$, то $\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k\left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)\right| \leqslant \varepsilon$ для любого u из U, и следовательно, $x^{(n)}$ $\boldsymbol{p}$-сходится в σ_∞.

Теорема доказана.

10.8. Сходимость в себе и предел

Если каждой паре элементов x и y из пространства S можно поставить в соответствие число $d(x,\ y)$, удовлетворяющее *трем аксиомам Хаусдорфа*, а именно:

(I) $\qquad d(x,\ x) = 0,\ \ d(x,\ y) > 0$, когда $x \neq y$;

(II) $\qquad d(x,\ y) = d(y,\ x)$;

(III) $\qquad d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z)$, то $d(x, y)$ называется *расстоянием между x и y в S*, а S называется *метрическим пространством*.

Например, в качестве расстояния в σ может быть взята сумма ряда:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

В σ_∞ и σ_r $(r \geqslant 1)$ мы определим расстояние следующим образом:

(I) $\quad$ в σ_∞ $d(x, y) = \max |x_k - y_k|$;

(II) $\quad$ в σ_r $(r \geqslant 1)$ $d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^r \right)^{\frac{1}{r}}$

(см. Кёте и Теплиц [1], 218, 219; Банах [1], 11, 12; Хаусдорф [4], 94—97).

Последовательность элементов $x^{(n)}$ в метрическом пространстве называется *сходящейся в себе* (*d-сходящейся*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon)$ такое, что

$$d(x^{(p)}, x^{(q)}) \leqslant \varepsilon \quad \text{для } p, q \geqslant N.$$

Предположим, что $d(x, y)$ определяет расстояние в S_1 и что S_2 является максимальным пространством, в котором применимо это определение. Мы можем рассматривать S_1 отдельно от S_2 и точки S_1 как единственно возможные предельные точки сходящихся последовательностей из S_1 или же рассматривать S_1 как подпространство S_2 и элементы из S_2 как возможные предельные точки сходящихся последовательностей из S_1. Элемент x (в S_1 или в S_2) называется *пределом в смысле сходимости в себе* (*d-пределом*) *последовательности точек $x^{(n)}$ из S_1*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $N(\varepsilon)$ такое, что $d(x^{(n)}, x) \leqslant \varepsilon$ для $n \geqslant N$.

Если в пространстве σ_r расстояние определяется, как выше в п. (II), то мы видим, что определение d-сходимости в σ_r является обобщением определения сильной сходимости по Гильберту в σ_2 (см. Ф. Рисс [1], 59, 60).

(**10.8**, I) *В σ_∞ d-сходимость совпадает с **p**-сходимостью.*

Это следует немедленно из (**10.7**, II).

(**10.8**, II) *В σ_1 d-сходимость, p-сходимость и **p**-сходимость совпадают.*

Этот результат сразу следует из (**10.5**, II) и (**10.2**, I), (II), если положить $u_k = 1$ для любого k.

(**10.8**, III) *В $\sigma_r (r > 1)$ d-сходимость и **p**-сходимость совпадают.*

Пусть $x^{(n)}$ d-сходится в σ_r, а множество U p-ограничено в σ_s, где $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Тогда, по (**10.4**, V), $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leqslant M$ для любого

$u \in U$. Выберем N таким, чтобы $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$ для $p,\ q \geqslant N$; тогда из неравенства Гёльдера

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^s\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \varepsilon$$

для $p,\ q \geqslant N$ и любого $u \in U$. Следовательно, $x^{(n)}$ p-сходится.

Обратно, если $x^{(n)}$ p-сходится и $\varepsilon > 0$, то мы можем, согласно (**10.7**, I), выбрать N такое, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^r \leqslant \frac{\varepsilon^r}{2^{r+1}} \quad \text{для любого } n.$$

Следовательно, применяя неравенство Минковского

$$\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k^{(p)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k^{(q)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{\frac{1}{r}}},$$

получим

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}|^r \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^r. \tag{10.81}$$

Используя c-сходимость, мы можем определить число N' такое, что

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}|^r \leqslant \frac{\varepsilon^r}{2} \quad \text{для } p,\ q \geqslant N'. \tag{10.82}$$

Теперь из (10.81) и (10.82) следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}|^r \leqslant \varepsilon^r$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(p)} - x_k^{(q)}|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \varepsilon \quad \text{для } p,\ q \geqslant N'.$$

Таким образом, $x^{(n)}$ d-сходится.

Теорема доказана.

10.9. Теорема Бэра и теорема Банаха—Штейнгауза

В различных теоремах, содержащих необходимые и достаточные условия (например, в (**4.1**, I), (**4.1**, II), (**4.2**, I) (**4.2**, II), (**5.4**, I) (**5.5**, I), (**10.2**, I), (II)), необходимость условия (или одного из условий) устанавливалась при помощи предположения, что данное условие не выполняется, и затем строилась специальная последовательность со свойствами, которые приводили к противоречию. Такой метод доказательства был сначала основным и являлся наилучшим для преподнесения материала читателю в первое время. Сейчас, когда нами рассмотрены пространства последовательностей, доказательство необходимости таких условий может быть легко получено при помощи теоремы Банаха—Штейнгауза *), которую мы докажем в этом параграфе. Эта теорема имеет многочисленные применения в такого рода доказательствах.

Векторное пространство, в котором каждому элементу x отнесено неотрицательное число, обозначаемое через $\|x\|$ и удовлетворяющее условиям:

(I) $\|x\| > 0$, если $x \neq 0$, $\|0\| = 0$;

(II) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

(III) $\|cx\| = |c|\,\|x\|$ для любого постоянного c и любого x, называется *нормированным пространством*.

Если мы определим расстояние между двумя элементами x и y как $d(x, y) = \|x-y\|$, то пространство в этом случае называется *нормированным метрическим пространством*.

Нормированное метрическое пространство α называется *предельно-замкнутым по отношению к d-сходимости* **), если для любой последовательности точек x_n из α такой, что $\|x_m - x_n\| \to 0$ при $m \to \infty$ и $n \to \infty$ независимо друг от друга, найдется точка x из α такая, что $\|x - x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. *Нормированное метрическое пространство, предельно-замкнутое по отношению к d-сходимости, называется B-пространством* (*пространство Банаха* ***)).

Множество точек x, удовлетворяющих условию $\|x - x_0\| \leqslant \delta$ для какого-нибудь x_0 и некоторого $\delta > 0$, называется *сферой*.

(**10.9**, I) *Теорема Бэра. Если α является B-пространством и $\alpha = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$, то, по крайней мере, одно из множеств E_1, E_2, ... плотно в некоторой сфере.*

---

*) См., например, Банах [1], 90, Зигмунд [1]. Автор обязан Куперу за уточнение, касающееся применения этой теоремы.

) См. определение после (10.3**, III) и § 10.8.

***) В топологии пространства, предельно-замкнутые относительно d-сходимости, называются *полными пространствами*, так что они включают B-пространства.

Действительно, предположим, что ни одно из множеств E_n ни в какой сфере не плотно. Тогда внутри каждой сферы мы можем найти сферу для любого частного значения n, которая не содержит ни одной точки E_n. Обозначим через K_1 сферу, не содержащую точек E_1; мы можем выбрать K_1 так, чтобы ее радиус r_1 был меньше 1, т. е. $r_1 < 1$. Теперь мы выберем последовательность сфер $K_1, K_2, \ldots$ с радиусами $r_1, r_2, \ldots$, удовлетворяющую условиям:

$$\text{(I)}\quad K_{n+1} \subset K_n;\quad \text{(II)}\ K_n \text{ не содержит точек } E_n;\ \text{(III)}\ r_n < \frac{1}{n}.$$

Пусть x_n — центр сферы K_n, тогда $x_q \in K_q \subset K_p$, если $0 < p < q$ и $\|x_q - x_p\| \leqslant r_p < \frac{1}{p}$. Следовательно, $\|x_q - x_p\| \to 0$, когда $p \to \infty$ и $q \to \infty$ независимо друг от друга, и $\{x_n\}$ d-сходится к некоторой предельной точке x.

Однако если $0 < p < q$, то

$$\|x_p - x\| \leqslant \|x_p - x_q\| + \|x_q - x\| \leqslant r_p + \|x_q - x\|,$$

а так как это неравенство справедливо для произвольно больших q, то мы имеем $\|x_p - x\| \leqslant r_p$, т. е. x находится внутри сферы K_p. Следовательно, точка x не принадлежит никакому из множеств E_n, что противоречит предположению, что все пространство содержится в сумме множеств E_n. Это и доказывает теорему.

Приведем следующие примеры B-пространств:

(I) Если α — множество действительных чисел и $\|x\| = |x|$, то α является B-пространством.

(II) Если α — множество всех функций, определенных и непрерывных на $[a, b]$, и если $\|x\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$, то α является B-пространством. Условие $\|x - x_n\| \to 0$ означает, что $x_n(t)$ равномерно сходится к $x(t)$.

(III) Класс $L^2(a, b)$ всех функций $x(t)$, таких, что $|x(t)|^2$ интегрируемы по Лебегу на (a, b), является B-пространством, как это следует из теоремы Рисса—Фишера.

Оператор u, определенный в α, называется *аддитивным*, если

$$u(x + y) = u(x) + u(y)$$

для любых x и y из α. Тогда $u(x) + u(0) = u(x)$, так что $u(0) = 0$. Следовательно, $u(x) + u(-x) = 0$ и, значит, $u(-x) = -u(x)$.

Если $u(x)$ — аддитивный оператор и t — рациональное число, то очевидно, что $u(tx) = tu(x)$.

Оператор u, определенный в α, называется *однородным*, если $u(cx) = cu(x)$ для любого постоянного c и любого x из α.

Оператор, являющийся одновременно аддитивным и однородным, называется *дистрибутивным*.

В этом параграфе мы будем рассматривать *линейные операторы*, т. е. операторы, являющиеся *дистрибутивными и непрерывными по отношению к d-сходимости* *).

(**10.9**, II) *Для того чтобы дистрибутивный оператор u был непрерывным в α по отношению к d-сходимости, необходимо и достаточно, чтобы существовало положительное число M, такое, что*

$$\|u(x)\| \leqslant M\|x\| \quad \text{для любого } x \text{ из } \alpha. \tag{10.91}$$

Достаточность условия очевидна. Чтобы доказать необходимость, предположим, что существует последовательность точек $\{x_n\}$ такая, что

$$\|u(x_n)\| > n\|x_n\| \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Умножая на соответствующим образом подобранный скаляр (зависящий от n), мы можем положить $\|x_n\| = \frac{1}{n}$.

Тогда $\|x_n\| \to 0$, но $\|u(x_n)\| > 1$, так что u не является непрерывным по отношению к d-сходимости в точке $x = 0$. Это и доказывает необходимость условия.

Если u — линейный оператор, то наименьшее положительное число M, удовлетворяющее (10.91), называется *нормой* оператора и будет обозначаться через M_u; таким образом, M_u — точная верхняя граница значений $\|u(x)\|$ на E, где E — единичная гиперсфера $\|x\| = 1$.

Нормы в обеих частях неравенства (10.91) могут иметь совершенно различный смысл, так как α и пространство U значений $u(x)$ могут быть различными.

(**10.9**, III) *Теорема Банаха—Штейнгауза. Пусть $\{u_n\}$ — последовательность линейных операторов, определенных в B-пространстве α, и пусть M_{u_n} обозначает норму оператора u_n.*

Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \|u_n(x)\|$ конечен для любого x из α, то последовательность $\{M_{u_n}\}$ ограничена.

Пусть S_{mn} — множество всех точек x, для которых $\|u_m(x)\| \leqslant n$, и пусть

$$F_n \equiv S_{1n}S_{2n}S_{3n}\ldots$$

Множества S_{mn} замкнуты, следовательно, F_n также замкнуто. Для любого x из α $\|u_m(x)\| \leqslant n$ для каждого m и некоторого n. Поэтому каждый элемент x принадлежит к некоторому F_n, т. е.

$$\alpha = F_1 + F_2 + \ldots + F_n + \ldots$$

Следовательно, согласно (**10.9**, I), по крайней мере одно из F, скажем, F_n, является плотным в некоторой сфере. Но если F_n замкнуто

*) Оператор называется непрерывным по отношению к d-сходимости, если $\|u(x) - u(x_n)\| \to 0$, когда $\|x - x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ (ср. § 9.7).

и плотно в сфере, оно должно содержать всю сферу. Поэтому для некоторого *фиксированного* n найдутся x_0 и $\delta > 0$ такие, что $\|u_m(x)\| \leqslant n$ для любого m всякий раз, когда $\|x - x_0\| \leqslant \delta$. Тогда, если $\|y\| \leqslant \delta$, мы имеем:

$$\|u_m(y)\| = \|u_m(x_0 + y) - u_m(x_0)\| \leqslant \|u_m(x_0 + y)\| + \|u_m(x_0)\| \leqslant 2n.$$

Таким образом, если $\|y\| \leqslant 1$, то $\|u_m(y)\| \leqslant \frac{2n}{\delta}$ для любого m и, значит, последовательность $\{M_{u_n}\}$ является ограниченной.

Доказательство необходимости условия $(\alpha)'$ теоремы Кожима—Шура (**4.1**, I)*). Доказательство того факта, что суммы $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| = M_i$ конечны для каждого $i \geqslant 1$, проводится так же, как и в (**4.1**, I). Докажем, что множество $\{M_i\}$ ограничено.

Множество Γ всех сходящихся последовательностей является пространством последовательностей; в качестве нормы $\|x\|$ в этом пространстве мы возьмем точную верхнюю грань $|x_i|$. При таком определении нормы пространство Γ есть B-пространство.

Обозначим через $u_i(x)$ операцию $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k$ и положим

$$\|u_i(x)\| \equiv |u_i(x)|;$$

тогда $\|u_i(x)\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| |x_k| \leqslant M_i \|x\|$ для любого x из Γ. Следовательно, по теореме (**10.9**, II), u_i *будет линейным оператором в* Γ.

Если последовательность $x^{(N)}$ определена условиями

$$x_k^{(N)} = \frac{|a_{ik}|}{a_{ik}} \qquad (a_{ik} \neq 0), \qquad x_k^{(N)} = 0 \qquad (a_{ik} = 0)$$

для $1 \leqslant k \leqslant N$ (i фиксировано) и $x_k^{(N)} = 0$ для $k > N$, где N — произвольное целое положительное число, то она принадлежит Γ и $\|x^{(N)}\| = 1$. Но

$$\frac{\|u_i(x^{(N)})\|}{\|x^{(N)}\|} = \sum_{k=1}^{N} |a_{ik}| \leqslant M_i,$$

и для данного произвольного $\varepsilon > 0$ найдется целое положительное число N_ε, такое, что

$$\frac{\|u_i(x^{(N_\varepsilon)})\|}{\|x^{(N_\varepsilon)}\|} > M_i - \varepsilon.$$

---

*) Доказательство для T-матриц дано Банахом ([1], 90—91) и перенесено на K-матрицы Вермсом (здесь приводится доказательство Вермса).

Поэтому M_i *в действительности является нормой оператора* $u_i(x)$ в Γ (в смысле определения, данного перед (**10.9**, III)). Но, по предположению, для любого фиксированного x из Γ $u_i(x) \to u(x)$ при $i \to \infty$, где $u(x)$ конечно. Следовательно,

$$\varlimsup_{i\to\infty} \|u_i(x)\| = \varlimsup_{i\to\infty} |u_i(x)| < \infty$$

и, по теореме (**10.9**, III), множество $\{M_i\}$ ограничено. Требуемый результат доказан.

Примеры к главе 10

1 *). Показать, что $C^* = \sigma_1$ и $D^* = \sigma_1$ и что C и D не являются совершенными.

2. Доказать, что $O_1^* = \overline{O}_2$ и $O_2^* = \overline{O}_1$, $\overline{O}_1^* = \overline{O}_2$ и $\overline{O}_2^* = \overline{O}_1$ и что $\overline{O}_1$ и $\overline{O}_2$ совершенны, а O_1 и O_2 не являются совершенными.

3. Показать, что:

(I) любое множество целых положительных чисел является F-множеством для φ и W-множеством для σ;

(II) множество всех четных целых чисел является F-множеством для O_2 и $\overline{O}_2$ и W-множеством для O_1 и $\overline{O}_1$;

(III) множество всех нечетных целых чисел является F-множеством для O_1 и $\overline{O}_1$ и W-множеством для O_2 и $\overline{O}_2$;

(IV) множество квадратов всех целых чисел является W-множеством для δ.

4. Доказать, что любое W-множество для α является F-множеством для α^*, но обратное утверждение неверно. Отсюда вывести, что любое W-множество для α является F-множеством для α и что справедливо обратное утверждение. Показать также, что если α совершенно, то справедливо утверждение, обратное первому.

5. На примере $x_k^{(n)} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^k$ иллюстрировать тот факт, что c-сходимость не обязательно влечет $\alpha\beta$-сходимость.

6. Показать, что если $\alpha \geqslant \varphi$, то любая последовательность из α^* является α-пределом ее секций.

7. Иллюстрировать (**10.3**, IV) и (**10.3**, V) следующими примерами:

$$\begin{aligned}
&D_{\sigma_\infty}(\varphi) = d_{\sigma_\infty}(\varphi) = \sigma_1, && D_{\sigma_2}(\varphi) = d_{\sigma_2}(\varphi) = \sigma_2,\\
&D_{\sigma_1}(\varphi) = d_{\sigma_1}(\varphi) = \sigma_\infty, && D_{\sigma_2}(\sigma_1) = d_{\sigma_2}(\sigma_1) = \sigma_2,\\
&D_{\sigma_1}(\sigma_2) = d_{\sigma_1}(\sigma_2) = \sigma_\infty, && D_{\sigma_1}(\sigma_1) = d_{\sigma_1}(\sigma_1) = \sigma_\infty,\\
&D_{\overline{O}_1}(\varphi) = d_{\overline{O}_1}(\varphi) = \overline{O}_2, && D_{\overline{O}_2}(\varphi) = d_{\overline{O}_2}(\varphi) = \overline{O}_1,\\
&D(\Gamma) = d(\Gamma) = \sigma_\infty, && D(C) = d(C) = \sigma_\infty,\\
&D(D) = d(D) = \sigma_\infty, && D(Z) = d(Z) = \sigma_\infty.
\end{aligned}$$

8. Показать, что σ_1 замкнуто в двух смыслах по отношению к $\sigma_1 Z$-сходимости.

---

*) Как было уже сказано в начале главы, все примеры к гл. 10 даны Алленом.

9. Доказать, что:

(I) $e^{(k)}$ σ_1-ограничена;

(II) если $x_k^{(n)} = (-1)^{k+1}$ для $k \leqslant n$ и $x_k^{(n)} = 0$ для $k > n$, то $x^{(n)}$ φC-ограничена;

(III) если x — фиксированная точка нормального пространства α, а X — множество, состоящее из всех точек, координаты которых имеют такие же модули, что и соответствующие координаты x, то X α-ограничено.

10. Доказать, что если X α-ограничено, а u — какая-нибудь точка из α^*, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k u_k| \leqslant r(u)$ для любого x из X.

11. Показать, что если β—совершенное пространство, а X $\alpha\beta$-ограничено, то любому u из β соответствует $r(u)$ такое, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k u_k| \leqslant r(u)$ для любого x из X.

12. Показать, что единичные векторы Гильберта образуют p-ограниченное множество в σ_2.

13. Доказать, что матрица (x_{nk}) с конечными строками преобразует любое множество U, удовлетворяющее условию $|u_k| \leqslant r_k$, в ограниченное в совокупности множество тогда и только тогда, когда она ограничена по строкам и $|x_{nk}| \leqslant m_k$ для любого n.

14. Показать, что матрица (x_{nk}), удовлетворяющая условию $|x_{nk}| \leqslant M_n$, преобразует любое множество U, для которого $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ в совокупности ограничены, в ограниченное в совокупности множество тогда и только тогда, когда $|x_{nk}| \leqslant M$ для любых n и k.

15. Доказать, что матрица (x_{nk}), у которой ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|$ сходятся для любого n, преобразует любое ограниченное в совокупности множество в ограниченное в совокупности множество тогда и только тогда, когда она является K_r-матрицей.

16. Если $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, где $r > 1$, то матрица (x_{nk}), у которой ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^r$ сходятся при любом n, преобразует любое множество U, в котором $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|^s$ ограничены в совокупности, в ограниченное в совокупности множество тогда и только тогда, когда суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^r$ ограничены.

17. Матрица (x_{nk}) преобразует любое множество U конечных последовательностей, имеющее ограниченную длину и удовлетворяющее условию $|u_k| \leqslant r_k$ $(r_k > 0)$, в ограниченное в совокупности множество тогда и только тогда, когда $|x_{nk}| \leqslant m_k$ для любого n.

18. Показать, что $e^{(k)}$ p-сходится в σ.

19. Доказать, что если α — пространство свободной сходимости, U есть p-ограниченное множество в α^* и S — множество, состоящее из номеров всех отличных от нуля координат последовательностей из U, то S является F-множеством для α^{**}. Также показать, что если $x^{(n)}$ p-сходится в α, то $x^{(n)}$ имеет ограниченную длину l относительно S.

20. Доказать следующие результаты:

(I) $d'(\varphi) = \varphi$;

(II) $d'(\sigma_r) = \sigma_r \ (r \geqslant 1)$;

(III) $d'(\sigma) = \sigma$;

(IV) $d'_{\sigma_\infty}(\varphi) = \sigma_1$;

(V) $d'_{\sigma_2}(\varphi) = \sigma_2$;

(VI) $d'_{\sigma_2}(\sigma_1) = \sigma_2$;

(VII) $d'_{\varphi}(\alpha) = \sigma$,

где $\alpha \geqslant \varphi$ (так что σ является единственным пространством, содержащим φ которое замкнуто по отношению к p-сходимости относительно φ);

(VIII) $d'_{\sigma_1}(\varphi) \leqslant \sigma_\infty$;

(IX) $d'_{\sigma_1}(\sigma_1) \leqslant \sigma_\infty$;

(X) $d'_{\sigma_1}(\sigma_2) \leqslant \sigma_\infty$.

21. Показать, что последовательность $x^{(n)}$ из $\overline{O}_1$ p-сходится тогда и только тогда, когда она c-сходится и $x^{(n)}_{2k+1}$ имеет ограниченную длину; также показать, что $x^{(n)}$ из $\overline{O}_2$ p-сходится тогда и только тогда, когда она c-сходится и $x^{(n)}_{2k}$ имеет ограниченную длину.

22. Найти классы последовательностей, которые p-сходятся в пространствах C, D, Z и Γ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы укажем некоторые работы, относящиеся к содержанию настоящей книги, в дополнение к тем, которые уже упоминались в тексте. Работы, касающиеся материала второго тома, а именно: функциональных и абстрактных гильбертовых пространств, применения бесконечных матриц в квантовой механике, линейных операторов в гильбертовом пространстве, математической теории спектра, проективной сходимости и пределов в матричных пространствах и кольцах, мы упоминать здесь не будем.

Применение бесконечных матриц к *умножению последовательностей и рядов*: Смэйл [2], Кожима [2], Робисон [1], Адамс [1], Агнью [15], Гамильтон [1], [2], [3], Нигам [1].

Применение матриц Гильберта к *динамике и кинетической теории газа*: Хислоп [1] и Гильберт [1], 267—282 соответственно.

Вопросы, связанные с *ядрами последовательностей*: Радо [1].

Обобщения *пространства Банаха и других пространств*: Хаусдорф [3], Спенсер [1], Дей [1], Вулих [1], Роджерс [2].

Сильная суммируемость. Для данной действительной или комплексной матрицы (a_{nk}) и $p > 0$ Сас [1] называет комплексную последовательность $\{s_k\}$ *сильно суммируемой методом A к s*, если (I) $\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} | s - s_k |^p$ сходится для каждого $n \geqslant 1$ и (II) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$. Гамильтон и Хилл [1] доказывают некоторые теоремы о сильной сходимости.

Пределы последовательностей функций. Гиллеспи и Гурвицем [1] рассмотрен вопрос о связи между пределами последовательностей функций и пределами последовательностей, полученных в результате преобразования при помощи матриц. Для того чтобы предел сходящейся последовательности непрерывных функций был непрерывной функцией, достаточно, но не необходимо, чтобы сходимость была равномерной. Изучение теории суммирования показывает, что это условие является также достаточным для равномерной сходимости последовательности, полученной в результате преобразования данной последовательности при помощи T-матрицы. Следующий пример показывает, что полученная в результате преобразования последовательность сходится равномерно, в то время как первоначальная последовательность сходится неравномерно. Положим

$$s_n(x) = \begin{cases} 2^n x & (0 \leqslant x \leqslant 2^{-n}), \\ 2 - 2^n x & (2^{-n} \leqslant x \leqslant 2^{-n+1}), \\ 0 & (2^{-n+1} \leqslant x \leqslant 1). \end{cases}$$

Тогда $s_n(x)$ непрерывна для $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $s_n(x) \to 0$. В самом деле, если $x = 0$, то $s_n(x) = 0$ для любого n, а если $0 < x \leqslant 1$, то $s_n(x) = 0$, когда

$$n > 1 - \frac{\log x}{\log 2}.$$

Сходимость в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ не является равномерной, так как $s_n(2^{-n}) = 1$.

Если $\sigma_n(x)$ — арифметические средние для $s_n(x)$, то $\sigma_n(x) = \frac{1}{n}(2^{n+1} - 2)x$, когда $0 \leqslant x \leqslant 2^{-n}$, и $\sigma_n(x) = \frac{1}{n}(2 - 2x)$, когда $2^{-n} \leqslant x \leqslant 1$. Следовательно, $0 \leqslant \sigma_n(x) \leqslant \frac{2}{n}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, и таким образом, $\sigma_n(x) \to 0$ равномерно в интервале $[0, 1]$.

Гиллеспи и Гурвиц показали, что всякая ограниченная последовательность действительных непрерывных функций, определенная на замкнутом компатном множестве E в любом абстрактном метрическом пространстве, которая сходится к непрерывной предельной функции, равномерно суммируема при помощи соответствующим образом подобранной T-матрицы.

Близкие к этому вопросы рассмотрены Агнью в [1] и [8].

Матрицы Хаусдорфа. Пусть $\chi(t)$ — функция с ограниченным изменением при $0 \leqslant t \leqslant 1$, причем $\chi(0) = 0$ и $\chi(t) = \frac{1}{2}\{\chi(t+0) + \chi(t-0)\}$ при $0 < t < 1$. При помощи этой «функции множества» производится *преобразование Хаусдорфа* $H(\chi)$, а именно:

$$\sigma_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} s_k \, d\chi(t);$$

ряд $\sum c_k$ с частичными суммами s_k называется $H(\chi)$-суммируемым к σ, если $\sigma_n \to \sigma$ при $n \to \infty$. Матрица преобразования будет T-матрицей тогда и только тогда, когда $\chi(1) = 1$ и $\chi(t) \to 0$ при $t \to 0$ (т. е. $\chi(t)$ непрерывна в точке $t = 0$ справа).

Среди хорошо известных T-матриц, получаемых как частные случаи, мы имеем (C, r)-матрицу при $\operatorname{Re}(r) > 0$, полагая $\chi(t) = 1 - (1-t)^r$, матрицу Гёльдера при $\operatorname{Re}(r) > 0$, когда

$$\chi(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t \left(\log \frac{1}{u}\right)^{r-1} du,$$

и матрицу Эйлера — Кноппа (§ 8.4), полагая $\chi(t)=0$ или $\chi(t)=1$, смотря по тому, будет ли $0\leqslant t<r$ или $r\leqslant t\leqslant 1$.

Матрицы Хаусдорфа также тесно связаны с общей проблемой моментов.

О преобразованиях Хаусдорфа и их свойствах см. Хаусдорф [1], Гарабедян [1], [2], Гарабедян, Хилле и Уолл [1], Сильверман и Тамаркин [1], Хилле и Тамаркин [1], [2], Агнью [17].

Возвращаясь к общей теории матриц, отметим, что некоторые результаты для конечных матриц, содержащиеся в работах Вельштейна [1] и Тернбулла [5], возможно, могут быть распространены на бесконечные матрицы, если устремлять к ∞ порядок конечной квадратной матрицы.

Из дальнейших работ упомянем следующие: Окада [2], [3]; Мазур [2]; Сильверман [2], [3]; Тамаркин [1]; Морс [1]; Дэйл [1]; Скотт и Уолл [1]; Гронуолл [1]; Агнью [7], [13], [19], [20]; Джеймс [1]; Вермс [2], [3], [4], [5]; Лорд [1]; Суноути [1]; Гомиш [1]; Обрешков [1]; Фубини [1]; Андреоли [1]; Сарымсаков [1]; Гамильтон [4]; Эрдёш и Пиранян [1], [2], [3], [4]; Барлаз [1]; Г. Гурвиц [1]; Лоренц [1], [2], [3], [4]; Меньшов [1]; Даревский [1].

И. И. ВОЛКОВ и П. Л. УЛЬЯНОВ

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ПО ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

(ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ)

ВВЕДЕНИЕ

В дополнение к основному тексту книги в статье приняты следующие определения и обозначения.

Методы суммирования будут обозначаться буквами A, B, C, Λ, ... Если метод суммирования определен матрицей, то и метод и матрица будут обозначаться одной и той же буквой, и мы часто вместо «метод» будем говорить «матрица», подразумевая под этим, если нужно, метод, определенный этой матрицей. Через $A(x)$ или $A\text{-}\lim x_n$ будет обозначаться результат суммирования последовательности $x=\{x_n\}$ методом A. В частности, когда метод определен матрицей $A\equiv(a_{mn})$ $(m,\ n=1,\ 2,\ \ldots)$, тогда $A(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}x_n$, если предел справа существует.

Метод суммирования называется *регулярным*, если он суммирует каждую сходящуюся последовательность к тому же самому конечному пределу, к которому она сходится. Регулярные матричные методы определяются матрицами Теплица (T-матрицами).

Множество последовательностей, суммируемых методом A, называется *полем сходимости* этого метода и будет обозначаться через A^*.

Два метода суммирования A и B называются *совместными*, если они не могут суммировать одну и ту же последовательность к различным пределам *).

Метод B *сильнее* метода A (или A *слабее* B), что обозначается $A\subseteq B$, если каждая последовательность, суммируемая методом A, суммируется и методом B, хотя, быть может, к другому пределу. Если $A\subseteq B$ и, кроме того, существует последовательность, суммируемая методом B и не суммируемая методом A, то метод B называется *строго* сильнее метода A (или A *строго* слабее B) и обозначается $A\subset B$ **).

---

*) Несравнимые матрицы мы также относим к совместным (см. § 5.1 основного текста).

**) Таким образом, при определении включений методов суммирования их совместность заранее не предполагается; этим приведенные определения отличаются от определений, данных в § 5.1 настоящей книги.

В случаях, когда будет идти речь о тех или иных свойствах методов, примененных к ограниченным последовательностям, мы будем добавлять слово *ограниченно*, например *ограниченное* поле, A и B *ограниченно* совместны, B *ограниченно* сильнее A и т. д., и в соответствующих случаях обозначать $\overset{*}{A_o}$, $A_o \subseteqq B_o$, $A_o \subset B_o$.

Если для действительных последовательностей или рядов к множеству возможных предельных значений наряду с конечными отнесены также $+\infty$ и $-\infty$, то мы будем дополнительно употреблять определения: A и B *вполне* совместны, если они не могут суммировать одну и ту же последовательность к различным пределам, конечным или бесконечным определенного знака *); метод B *вполне* сильнее A (обозначается $A \subseteqq\subseteqq B$), если каждая последовательность, суммируемая методом A к какому-либо пределу, конечному или бесконечному определенного знака, суммируется и методом B к некоторому пределу, конечному или бесконечному определенного знака.

Матрица называется *положительной*, если все ее элементы неотрицательны **). Матрица (a_{mn}) называется *нормальной*, если $a_{mn}=0$ для $n>m$, $a_{mm}\neq 0$. Через A_p будет обозначаться матрица, которая получается из $A\equiv(a_{mn})$, если в ней положить все элементы a_{mn} с $n<p$ равными нулю.

Цифры в квадратных скобках со звездочкой указывают на соответствующую работу из списка литературы к обзорной статье. Без звездочек отмечены работы из списка литературы к основному тексту книги.

Вся обзорная статья состоит из двух частей. Первая часть, содержащая изложение некоторых вопросов из теории суммирования числовых последовательностей, написана И. И. Волковым. Вторая часть, содержащая изложение некоторых результатов, относящихся, в основном, уже к функциональным рядам и последовательностям, написана П. Л. Ульяновым. Объем статьи не позволил нам осветить довольно много новых результатов, относящихся к общей теории суммирования. Из-за этого факта в обзорной статье в некоторой степени отразились склонности авторов.

---

*) Если, например, для некоторой последовательности $x=\{x_n\}$ $A(x)=+\infty$, а $B(x)=-\infty$ или $B(x)=a\neq+\infty$, то A и B уже не являются вполне совместными. Отметим, что последовательность $\{x_n\}$ суммируется матрицей (a_{mn}) к $+\infty$, если $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n=+\infty$, причем не исключается случай, когда для некоторых или даже для всех m имеет место $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n=+\infty$. Аналогичный смысл имеет суммируемость к $-\infty$.

**) Если рассматриваемая матрица является T-матрицей, то она считается положительной и в том случае, когда ее отрицательные элементы расположены не более чем в конечном числе строк и столбцов.

ЧАСТЬ I

§ 1. Совместность методов суммирования

Как было уже сказано в § 5.8, для ограниченных последовательностей имеет место следующая теорема Мазура — Орлича:

Теорема 1.1. *Если A и B — T-матрицы и $A_o \subseteq B_o$, то A и B ограниченно совместны.*

Независимо от Мазура и Орлича эта теорема была доказана Брудно А. Л. [1]. Мы приведем здесь доказательство, принадлежащее Питерсену [43*].

Очевидно, достаточно доказать следующую лемму:

Лемма. *Если две T-матрицы $A \equiv (a_{mn})$ и $B \equiv (b_{mn})$ суммируют ограниченную последовательность $\{s_n\}$ к различным значениям, то существует ограниченная последовательность, суммируемая матрицей A и не суммируемая матрицей B.*

Доказательство леммы. Без ограничения общности можно считать, что

$$A\text{-}\lim s_n = 0, \quad B\text{-}\lim s_n = 1.$$

Положим

$$t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n, \quad \tau_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} s_n,$$

$$H = \sup_n |s_n|, \quad M = \sup_m \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}||s_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_{mn}||s_n| \right\}.$$

В силу предположения найдется последовательность $\{\delta_m\}$, $\delta_m > 0$, $\delta_m \to 0$ при $m \to \infty$, такая, что

$$|t_m| \leqslant \delta_m, \quad |\tau_m - 1| \leqslant \delta_m.$$

Пусть $\{F_k\}$ — последовательность частичных сумм ряда

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \ldots - \frac{1}{n} + \ldots,$$

в котором $\frac{1}{n}$ встречается $2n$ раз, причем первые n раз со знаком «+», вторые n раз со знаком «—». Последовательность $\{F_k\}$ обладает свойствами

$$F_k = 0, \quad \text{если } k = p(p+1), \quad p = 1, 2, \ldots,$$
$$F_k = 1, \text{ если } k = p^2, \ p = 1, 2, \ldots$$

Положим $|F_{k+1} - F_k| = \eta_k$; очевидно, $|F_k| \leqslant 1$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \eta_k = 0$.

Выберем последовательность $\{\varepsilon_m\}$, $\varepsilon_m > 0$, $\lim \varepsilon_m = 0$ при $m \to \infty$, последовательность натуральных чисел $\{m_k\}$ и целочисленные неубывающие функции натурального аргумента $\lambda(m)$ и $\mu(m)$, удовлетворяющие условиям:

$$\sum_{n=1}^{\lambda(m)} |a_{mn}| \leqslant \varepsilon_m, \quad \sum_{n=1}^{\lambda(m)} |b_{mn}| \leqslant \varepsilon_m,$$

$$\sum_{n=\mu(m)}^{\infty} |a_{mn}| \leqslant \varepsilon_m, \quad \sum_{n=\mu(m)}^{\infty} |b_{mn}| \leqslant \varepsilon_m,$$

причем $\lambda(m_k) = \mu(m_{k-1})$, $k = 2, 3, \ldots$

Положим

$$s'_n = s_n \quad \text{для } n < \lambda(m_1),$$
$$s'_n = F_k s_n \quad \text{для } \lambda(m_k) \leqslant n < \mu(m_k).$$

Покажем, что последовательность $\{s'_n\}$ обладает требуемыми свойствами, т. е. суммируется методом A и не суммируется методом B.

Пусть $m_k \leqslant m \leqslant m_{k+1}$; тогда имеем:

$$t'_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s'_n = \sum_{n=1}^{\lambda(m)-1} a_{mn} s'_n + F_k \sum_{n=\lambda(m)}^{\mu(m)-1} a_{mn} s_n +$$
$$+ (F_{k+1} - F_k) \sum_{n=\mu(m_k)}^{\mu(m)-1} a_{mn} s_n + \sum_{n=\mu(m)}^{\infty} a_{mn} s'_n,$$

так как $\mu(m) \leqslant \mu(m_{k+1})$ и $\lambda(m_k) \leqslant \lambda(m) \leqslant \mu(m_k)$. Отсюда и из того, что $|s'_n| \leqslant |s_n|$, следует:

$$|t'_m| \leqslant \sum_{n=1}^{\lambda(m)} |a_{mn} s'_n| + |F_k| \left| \sum_{n=\lambda(m)}^{\mu(m)-1} a_{mn} s_n \right| +$$
$$+ |F_{k+1} - F_k| \sum_{n=\mu(m_k)}^{\mu(m)-1} |a_{mn}| |s_n| + \sum_{n=\mu(m)}^{\infty} |a_{mn}| |s'_n|.$$

Первое, третье и четвертое слагаемые справа в этом неравенстве не превосходят соответственно $H\varepsilon_m$, $M\eta_k$ и $H\varepsilon_m$, а второе слагаемое не превосходит $\delta_m + 2H\varepsilon_m$. Таким образом,

$$|t'_m| \leqslant H\varepsilon_m + \delta_m + 2H\varepsilon_m + M\eta_k + H\varepsilon_m$$

и, следовательно, $A\text{-}\lim s'_n = 0$.

Покажем теперь, что $\{s'_n\}$ не суммируется методом B. Как и выше, для $m_k \leqslant m \leqslant m_{k+1}$ имеем:

$$\tau'_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} s'_n = \sum_{n=1}^{\lambda(m)-1} b_{mn} s'_n + F_k \sum_{n=\lambda(m)}^{\mu(m)-1} b_{mn} s_n +$$
$$+ (F_{k+1} - F_k) \sum_{n=\mu(m_k)}^{\mu(m)-1} b_{mn} s_n + \sum_{n=\mu(m)}^{\infty} b_{mn} s'_n.$$

Для первого, третьего и четвертого слагаемых в правой части этого равенства мы получаем такие же оценки, как и в случае матрицы (a_{mn}), т. е. они не превосходят по модулю соответственно $H\varepsilon_m$, $M\eta_k$ и $H\varepsilon_m$ и, следовательно, стремятся к нулю при $m \to \infty$. Что касается второго слагаемого

$$F_k \sum_{n=\lambda(m)}^{\mu(m)-1} b_{mn} s_n,$$

то при $k = p(p+1)$ оно обращается в нуль, а при $k = p^2$ стремится к 1 при $m \to \infty$.

Таким образом,

$$\lim_{p\to\infty} \tau'_{m_{p(p+1)}} = 0, \quad \lim_{p\to\infty} \tau'_{m_{p^2}} = 1.$$

Отсюда следует, что $\{s'_n\}$ не суммируется матрицей B. Лемма доказана.

Теорема 1.1 немедленно следует из леммы.

Из теоремы 1.1 вытекает (Мазур и Орлич [28*])

Следствие. *Если из суммируемости ограниченной последовательности $x = \{s_n\}$ T-матрицей A всегда следует суммируемость этой же матрицей последовательности $x^* = \{s_{n+1}\}$, то $A(x) = A(x^*)$.*

Действительно, рассмотрим матрицу $B \equiv (b_{mn})$, где

$$b_{mn} = a_{m,n-1}, \quad b_{m1} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots; n = 2, 3, \ldots).$$

В силу условия любая ограниченная последовательность, суммируемая T-матрицей A, суммируется и T-матрицей B. Применяя теорему 1.1, получаем требуемый результат.

Теорема Мазура — Орлича, как показано ими же, не допускает обобщения на неограниченные последовательности, т. е. включение $A \subseteq B$ для произвольных последовательностей не влечет совместности матриц A и B для этих последовательностей.

Пример*). Определим матрицы A и B следующим образом:

$$a_{m,m-1} = 1, \quad a_{mm} = -\frac{1}{m}, \quad a_{mn} = 0 \text{ в остальных случаях,}$$

$$b_{m,m-1} = 1 - \frac{1}{(m-1)!}, \quad b_{mm} = -\frac{1}{m}, \quad b_{mn} = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

Положим

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n, \quad t_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} s_n.$$

Тогда для любой последовательности $\{s_n\}$

$$\sigma_1 = -s_1, \qquad t_1 = -s_1,$$

$$\sigma_{m+1} = s_m - \frac{1}{m+1} s_{m+1}, \quad t_{m+1} = \left(1 - \frac{1}{m!}\right) s_m - \frac{1}{m+1} s_{m+1}.$$

) Пример незначительно отличается от данного Мазуром и Орличем в [28].

Нетрудно показать, что
$$s_m = -m!\left[\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{1!} + \frac{\sigma_3}{2!} + \ldots + \frac{\sigma_m}{(m-1)!}\right],$$
откуда
$$t_{m+1} = \sigma_{m+1} + \left[\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{1!} + \frac{\sigma_3}{2!} + \ldots + \frac{\sigma_m}{(m-1)!}\right].$$
Последнее равенство показывает, что $A \subseteq B$. Однако для $s_n = n!$ мы имеем:
$$\sigma_{m+1} = 0 \ (m \geqslant 1), \quad t_m = -1 \qquad (m \geqslant 1),$$
т. е. A и B несовместны.

Если вместо включения $A \subseteq B$ рассматривать полное включение $A \subseteq \subseteq B$, то для произвольных (действительных) последовательностей имеет место следующий результат (см. [13*]):

Теорема 1.2. *Если $A \equiv (a_{mn})$ и $B \equiv (b_{mn})$ — действительные положительные T-матрицы с конечными строками и $A \subseteq \subseteq B$, то A и B вполне совместны для всех действительных последовательностей* *).

Теорема вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Если две действительные положительные T-матрицы $A \equiv (a_{mn})$ и $B \equiv (b_{mn})$ с конечными строками суммируют какую-либо действительную последовательность $\{s_n\}$ к различным значениям, конечным или бесконечным, то существует последовательность, суммируемая методом A и не суммируемая методом B ни к конечному значению, ни к бесконечности определенного знака.*

Доказательство леммы. Обозначим через $a(m)$ и $b(m)$ номера последних отличных от нуля элементов в строке с номером m матриц A и B соответственно. Так как A и B суть T-матрицы, то $a(m) \to \infty$, $b(m) \to \infty$ при $m \to \infty$.

Мы можем предполагать выполненными следующие условия:
$$a(m+1) \geqslant a(m) > 0, \quad b(m+1) \geqslant b(m) > 0,$$
$$a(m) \geqslant b(m) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$
Пусть для некоторой последовательности $\{s_n\}$
$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}s_n = s_A, \quad \lim_{m \to \infty} \sum_{n \to 1}^{\infty} b_{mn}s_n = s_B.$$
Без ограничения общности можно считать, что $s_A > 0$, $s_B < -1$.

*) Строго говоря, в теореме достаточно потребовать положительность только матрицы A, а тогда из включения $A \subseteq \subseteq B$ и того, что A и B являются T-матрицами с конечными строками, следует, что и матрица B должна быть положительной. В самом деле, если бы B не была положительной, т. е. существовали бы элементы $b_{mn} < 0$ со сколь угодно большими m и n, то можно было бы построить последовательность $s = \{s_n\}$, $s_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, для которой $A(s) = +\infty$, а $B(s)$ не существует (см., например, § 6.3, лемма 3 настоящей книги).

Построим индуктивно последовательности $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ и $\{x_i\}$ (p_i и q_i — натуральные числа). Положим $p_1 = 1$; в качестве q_1 возьмем число, удовлетворяющее условиям $q_1 \geqslant 1$ и $a(q_1+1) > a(q_1)$. Положим $x_n = 1$ для $1 \leqslant n \leqslant a(q_1)$. Пусть уже построены p_{i-1}, q_{i-1} и x_n для $i \leqslant n \leqslant a(q_{i-1})$, причем $a(q_{i-1}+1) > a(q_{i-1})$. Выберем p_i так, чтобы оно удовлетворяло условиям:

$$p_i > q_{i-1}, \quad b(p_i) > a(q_{i-1}),$$

$$\sum_{n=a(q_{i-1})+1}^{a(m)} a_{mn} s_n > 0 \quad \text{для } m \geqslant p_i.$$

После этого подберем числа y_n для $a(q_{i-1}) < n \leqslant a(p_i)$ так, чтобы они удовлетворяли условиям:

$$y_n > 0, \quad y_n \geqslant s_n,$$

$$\sum_{n=a(q_{i-1})+1}^{a(m)} a_{mn} y_n > 0 \quad \text{для} \quad q_{i-1} < m \leqslant p_i,$$

$$\sum_{n=a(q_{i-1})+1}^{b(p_i)} b_{p_i, n} y_n > 0.$$

Теперь определим q_i так, чтобы оно удовлетворяло условиям:

$$q_i > p_i, \quad a(q_i+1) > a(q_i), \quad b(q_i) > a(p_i),$$

$$\sum_{n=a(q_{i-1})+1}^{a(p_i)} b_{q_i, n} y_n + \sum_{n=a(p_i)+1}^{b(q_i)} b_{q_i, n} s_n < -1.$$

Положим $y_n = s_n$ для $a(p_i) < n \leqslant a(q_i)$. Тогда, учитывая неотрицательность матрицы A, получим:

$$\sum_{n=a(q_{i-1})+1}^{a(m)} a_{mn} y_n > 0 \quad \text{для} \quad q_{i-1} < m \leqslant q_i,$$

$$\sum_{n=a(q_{i-1})+1}^{b(q_i)} b_{q_i, n} y_n < -1.$$

Положим теперь $x_n = c y_n$ для $a(q_{i-1}) < n \leqslant a(q_i)$, причем число $c > 0$ возьмем столь большим, чтобы x_n удовлетворяли условиям:

$$\sum_{n=1}^{a(m)} a_{mn} x_n > i \quad \text{для} \quad q_{i-1} < m \leqslant q_i,$$

$$\sum_{n=1}^{b(p_i)} b_{p_i, n} x_n > 0, \qquad \sum_{n=1}^{b(q_i)} b_{q_i, n} x_n < -1.$$

Из этих неравенств следует, что $A(x) = +\infty$, т. е. $\{x_n\}$ суммируется методом A к $+\infty$ и не суммируется методом B ни к конечному, ни к бесконечному значению. Лемма доказана.

Теорема немедленно следует из леммы.

Приведенный после теоремы 1.1 пример показывает, что требование положительности матриц в условиях теоремы 1.2 существенно.

Следующий результат, принадлежащий Лоренцу и Робинсону [26*], устанавливает связь между матрицами A и B при их полном включении. Мы приведем его здесь без доказательства *).

Теорема 1.3. *Если A и B — вполне совместные T-матрицы с конечными строками, A — положительная и $A \subsetneq \subsetneq B$, то найдутся целое число p и положительная T-матрица C с конечными строками такие, что $B_p = CA_p$.*

Условие, что A и B вполне совместны и $A \subsetneq \subsetneq B$, может быть заменено более слабым, а именно: из $\sigma_m \to +\infty$ всегда следует $|\tau_m| \to +\infty$, где

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n, \quad \tau_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} s_n.$$

Как следует из теоремы 1.2, предположение полной совместности матриц A и B излишне, ибо при условиях, наложенных на A и B, она следует из включения $A \subsetneq \subsetneq B$.

Следующий результат (см. [13*]), имеющий место уже для произвольных действительных T-матриц, показывает, что включение $A \subsetneq B$ только для класса последовательностей, суммируемых к $+\infty$, и совместность A и B для этого класса последовательностей влечет включение $A_0 \subsetneq B_0$, а следовательно, по теореме 1.1, и их совместность для ограниченных последовательностей. Мы приведем его в более общей форме. Через R_A будет обозначаться ядро последовательности, полученной в результате A-преобразования данной последовательности. Аналогичный смысл имеет R_B.

Теорема 1.4. *Если любая действительная последовательность, суммируемая действительной T-матрицей A к $+\infty$, суммируется также действительной T-матрицей B к $+\infty$, то для любой ограниченной последовательности $\{s_n\}$ имеет место включение $R_B \subset R_A$.*

Доказательство. Мы покажем, что $R_B \subset R_A$ для любой ограниченной действительной последовательности. Распространение доказательства на комплексные ограниченные последовательности не представляет затруднений.

Допустим, что для некоторой ограниченной последовательности $\{s_n\}$ включение $R_B \subset R_A$ не имеет места. Тогда мы построим последова-

*) В цитируемой работе требование полной совместности авторы включают в само определение полного включения. В наших определениях эти два свойства матриц рассматриваются независимо друг от друга.

тельность $\{x_n\}$, суммируемую матрицей A к $+\infty$ и не суммируемую к этому значению матрицей B. При нашем допущении можно считать, что

$$\varliminf_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}s_n > \beta > 0, \quad \varliminf_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}s_n < -\beta < 0.$$

В этом случае найдутся число m_0 и последовательность целых чисел $\{m'_k\}$, $m'_k < m'_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}s_n > \beta \qquad (m > m_0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m'_k, n}s_n < -\beta \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Пусть последовательность $\{\varepsilon_k\}$ удовлетворяет условиям:

$$\varepsilon_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon, \quad \text{где} \quad 0 < \varepsilon < \frac{\beta}{2}.$$

Построим индуктивно последовательности целых чисел $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$. Положим $m_1 = m_0$, $n_1 = 1$, и пусть уже определены m_{k-1} и n_{k-1}. Определим m_k и n_k. Число $m_k > m_{k-1}$ выберем из последовательности $\{m'_k\}$ так, чтобы оно удовлетворяло условиям:

$$(k-1)\sum_{n=1}^{n_{k-1}} |a_{mn}s_n| < \varepsilon \quad \text{для} \quad m \geqslant m_k,$$

$$(k-1)\sum_{n=1}^{n_{k-1}} |b_{mn}s_n| < \varepsilon \quad \text{для} \quad m \geqslant m_k.$$

Выберем теперь $n_k > n_{k-1}$, подчинив его условиям:

$$(k+1)\sum_{n=n_k+1}^{\infty} |a_{mn}s_n| < \varepsilon_k \quad \text{для} \quad m \leqslant m_k,$$

$$(k+1)\sum_{n=n_k+1}^{\infty} |b_{mn}s_n| < \varepsilon_k \quad \text{для} \quad m \leqslant m_k.$$

Определим последовательность $\{x_n\}$, положив $x_n = ks_n$ для $n_{k-1} < n \leqslant n_k$ $(k = 2, 3, \ldots)$, $x_1 = s_1$. Покажем, что $\{x_n\}$ суммируется матрицей A к $+\infty$ и не суммируется к $+\infty$ матрицей B.

Для $m \leqslant m_{k+1}$ из предыдущих условий и определения $\{x_n\}$ имеем:

$$\sum_{n=n_{k+1}+1}^{\infty} |a_{mn}x_n| = \sum_{p=0}^{\infty}(k+2+p)\sum_{n=n_{k+1+p}+1}^{n_{k+p+2}} |a_{mn}s_n| < \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_{k+1+p} < \varepsilon, \tag{1.1}$$

а для $m \geqslant m_k$

$$\sum_{n=1}^{n_{k-1}} |a_{mn} x_n| \leqslant (k-1) \sum_{n=1}^{n_{k-1}} |a_{mn} s_n| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

В силу определения x_n эти неравенства справедливы при замене в них x_n на s_n. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n = \sum_{n=1}^{n_{k-1}} + \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} + \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} + \sum_{n=n_{k+1}+1}^{\infty} =$$
$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4 > \beta,$$

то с учетом предыдущих оценок и выбора последовательностей $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ получаем:

$$\sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 > \beta - 2\varepsilon \quad \text{для} \quad m_k \leqslant m \leqslant m_{k+1}.$$

Умножая это неравенство на k и прибавляя к обеим частям $\sum_3$, получим:

$$k \sum\nolimits_2 + (k+1) \sum\nolimits_3 > (\beta - 2\varepsilon) k + \sum\nolimits_3 \quad \text{для} \quad m_k \leqslant m \leqslant m_{k+1}.$$

Принимая во внимание определение x_n и то, что $\left|\sum_3\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn} s_n| < M$, из предыдущего неравенства будем иметь:

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_{k+1}} a_{mn} x_n > (\beta - 2\varepsilon) k - M \quad \text{для} \quad m_k \leqslant m \leqslant m_{k+1},$$

а с учетом (1.1) и (1.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n > (\beta - 2\varepsilon) k - 2\varepsilon - M \text{ для } m_k \leqslant m \leqslant m_{k+1} \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Совершенно аналогично

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{m_k, n} x_n < (-\beta + 2\varepsilon) k + 2\varepsilon + M \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Так как $\beta - 2\varepsilon > 0$, а $m_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то получаем, что $\{x_n\}$ суммируется методом A к $+\infty$ и не суммируется к этому значению методом B. Теорема доказана.

§ 2. О полях сходимости T-матриц

Следующая теорема, принадлежащая Мазуру и Орличу [1], устанавливает, что не существует T-матрицы (сильнее, чем сходимость), поле сходимости которой содержало бы только ограниченные последовательности.

Теорема 2.1. *Если T-матрица A суммирует какую-либо расходящуюся последовательность, то она суммирует, по крайней мере, одну неограниченную последовательность.*

Мы приведем доказательство, данное Даревским В. М. [15*].

Доказательство. Пусть $A \equiv (a_{mn})$ суммирует ограниченную расходящуюся последовательность $\{u_n\}$ к значению u. Положим $x = \{x_n\} = \{u_n - u\}$. Тогда x суммируется матрицей A к нулю. Построим индуктивно две последовательности натуральных чисел $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$. Числа m_1 и n_1 возьмем такими, чтобы

$$|y_m| \equiv \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}x_n\right| < 1 \qquad (m \geqslant m_1),$$

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} |a_{mn}| < 1 \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ m_1).$$

Пусть уже выбраны m_{k-1} и n_{k-1}. Выберем $m_k > m_{k-1}$ так, чтобы

$$|y_m| < \frac{1}{k}, \quad \sum_{n=1}^{n_{k-1}} |a_{mn}| < \frac{1}{k} \quad \text{для} \quad m \geqslant m_k,$$

и $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы

$$\sum_{n=n_k}^{\infty} |a_{mn}| < \frac{1}{2^{k-1}k} \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ m_k).$$

Разобьем последовательность $\{x_n\}$ на зоны и k-зоной назовем последовательность $x_{n_{k-1}+1},\ x_{n_{k-1}+2},\ \ldots,\ x_{n_k}$ (полагая $n_0 + 1 = 1$).

Так как последовательность $\{x_n\}$ расходится, то выделим из нее подпоследовательность $\{x'_n\}$ такую, что $|x'_n| > c > 0$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, причем элементы $\{x'_n\}$ будут в некоторых сколь угодно дальних зонах. Умножая все элементы k-зоны на $\sqrt{k}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$, мы получим неограниченную последовательность $\{\xi_n\}$. Покажем, что $\{\xi_n\}$ суммируется матрицей A к нулю.

Пусть $m_k \leqslant m < m_{k+1}$ $(k > 1)$. Тогда

$$\eta_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\xi_n =$$
$$= \sum_{n=1}^{n_{k-1}} a_{mn}\xi_n + \sqrt{k} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_{mn}x_n + \sqrt{k+1} \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_{mn}x_n + \ldots,$$

откуда

$$|\eta_m| < \frac{N}{\sqrt{k}} + \sqrt{k}\left|\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_{k+1}} a_{mn}x_n\right| + (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})MN +$$
$$+ \frac{N}{2^k}\left(\frac{\sqrt{k+2}}{k+1} + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{k+3}}{k+2} + \frac{1}{2^2}\,\frac{\sqrt{k+4}}{k+3} + \ldots\right),$$

где

$$N=\sup_n|x_n|<\infty,\quad M=\sup_m\sum_{n=1}^{\infty}|a_{mn}|<\infty.$$

Летко видеть, что

$$\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=0,$$

$$\frac{1}{2^k}\left(\frac{\sqrt{k+2}}{k+1}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{k+3}}{k+2}+\frac{1}{2^2}\frac{\sqrt{k+4}}{k+3}+\ldots\right)<\frac{1}{2^{k-1}}\sqrt{\frac{2}{k+1}},$$

$$\left|\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_{k+1}}a_{mn}x_n\right|\leqslant|y_m|+\left|\sum_{n=1}^{n_{k-1}}a_{mn}x_n\right|+\left|\sum_{n=n_{k+1}+1}^{\infty}a_{mn}x_n\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{2^k}\frac{1}{k+1}\right)N.$$

Так как $k\to\infty$ при $m\to\infty$, то $\lim\limits_{m\to\infty}\eta_m=0$. Теорема доказана.

Непосредственным обобщением предыдущей теоремы является следующая

Теорема 2.2. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — последовательность T-матриц, каждая из которых суммирует расходящуюся последовательность $\{u_n\}$ к одному и тому же значению. Тогда существует неограниченная последовательность, которая суммируется любой из матриц A_i $(i=1, 2, \ldots)$ к любому наперед заданному значению u.*

Будем называть последовательности $x^{(1)}=\{x_k^{(1)}\}$, $x^{(2)}=\{x_k^{(2)}\}, \ldots$ $\ldots, x^{(n)}=\{x_k^{(n)}\}$ линейно независимыми относительно T-матрицы A, если линейная комбинация этих последовательностей $\lambda_1x^{(1)}+\lambda_2x^{(2)}+\ldots+\lambda_nx^{(n)}$ не суммируется этой матрицей при любых значениях $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не равных одновременно нулю. Если A — единичная матрица, то такие последовательности просто называют линейно независимыми.

Из следующего результата, принадлежащего Брудно А. Л. [1], вытекает, что если T-матрица суммирует одну ограниченную расходящуюся последовательность, то она будет суммировать n линейно независимых ограниченных последовательностей.

Теорема 2.3. *Если A и B суть T-матрицы и $A_0\subset B_0$, то, каково бы ни было целое число n, найдется n ограниченных последовательностей, суммируемых матрицей B и линейно независимых относительно матрицы A.*

Используя этот результат, Огиевецкий И. И. [36*] доказал следующую теорему:

Теорема 2.4. а) *Для любой T-матрицы существует несчетное множество ограниченных последовательностей, линейно независимых относительно этой матрицы.*

б) *Любая T-матрица, суммирующая одну ограниченную расходящуюся последовательность, суммирует несчетное множество ограниченных последовательностей, расходящихся одновременно с любой их линейной комбинацией.*

Для доказательства упомянутых результатов отсылаем читателя к цитированным работам.

Для неограниченных последовательностей результат типа установленного в теореме 2.3 может не иметь места, как это вытекает из приведенной ниже теоремы, принадлежащей Даревскому В. М. [15*].

Теорема 2.5. *Для любой неограниченной последовательности $x=\{x_n\}$ и любого числа ξ можно указать T-матрицу, которая суммирует все последовательности вида $\{cx_n+\alpha_n\}$, где c — постоянная, $\{\alpha_n\}$ — сходящаяся последовательность, к значению $c\xi+\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ и не суммирует ни одну последовательность, отличную от этого вида.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}=\{u_n\}+\{u'_n\}$, где

$$u_n=x_n-\xi, \quad u'_n=\xi \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как $\{u_n\}$ — неограниченная последовательность, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, удовлетворяющую условиям:

$$1)\ u_{n_k}\neq 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots); \tag{2.1}$$

2) для любого $m\leqslant n_k$

$$\left|\frac{u_m}{u_{n_{k+1}}}\right|<\frac{1}{k^2} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.2}$$

Определим матрицу $A\equiv(a_{mn})$ следующим образом. Все элементы m-й строки для $n_{k-1}+1\leqslant m\leqslant n_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n_0=0)$ положим равными нулю, за исключением элемента $a_{mm}=1$ и элемента $a_{m,n_{k+1}}$, который определим из условия

$$u_m+a_{m,n_{k+1}}u_{n_{k+1}}=0. \tag{2.3}$$

Отсюда и из (2.2) следует:

$$|a_{m,n_{k+1}}|<\frac{1}{k^2} \qquad (n_{k-1}+1\leqslant m\leqslant n_k;\quad k=1,\ 2,\ \ldots),$$

т. е. A является T-матрицей. Последовательность $\{u_n\}$ преобразуется матрицей A в последовательность $\{0,\ 0,\ \ldots\}$, и значит, последовательность $\{x_n\}$ суммируется матрицей A к значению ξ.

Пусть теперь $\{v_n\}$ — какая-либо последовательность, суммируемая матрицей A. Тогда

$$v_m+a_{m,n_{k+1}}v_{n_{k+1}}=l_m \qquad (n_{k-1}+1\leqslant m\leqslant n_k;\ k=1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\{l_m\}$ сходится. Последнее равенство в силу (2.3) можно записать в виде

$$v_m - \frac{v_{n_{k+1}}}{u_{n_{k+1}}} u_m = l_m \qquad (n_{k-1}+1 \leqslant m \leqslant n_k;\ k=1,\ 2,\ \ldots); \tag{2.4}$$

отсюда при $m = n_k$ получаем:

$$\frac{v_{n_{k+1}}}{u_{n_{k+1}}} = \frac{v_{n_k}}{u_{n_k}} - \frac{l_{n_k}}{u_{n_k}} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) следует:

$$v_m - \frac{v_{n_1}}{u_{n_1}} u_m = l_m - \left(\frac{l_{n_1}}{u_{n_1}} + \frac{l_{n_2}}{u_{n_2}} + \ldots + \frac{l_{n_k}}{u_{n_k}}\right) u_m \tag{2.6}$$

$$(n_{k-1}+1 \leqslant m \leqslant n_k;\ k=1,\ 2,\ \ldots),$$

причем ряд

$$\frac{l_{n_1}}{u_{n_1}} + \frac{l_{n_2}}{u_{n_2}} + \ldots$$

абсолютно сходится в силу (2.2). Обозначив его сумму через s, из (2.6) получаем:

$$v_m + \left(s - \frac{v_{n_1}}{u_{n_1}}\right) u_m = l_m + \varepsilon_m,$$

где

$$\varepsilon_m = u_m \left(\frac{l_{n_{k+1}}}{u_{n_{k+1}}} + \frac{l_{n_{k+2}}}{u_{n_{k+2}}} + \ldots\right) \ (n_{k-1}+1 \leqslant m \leqslant n_k;\ k=1, 2, \ldots).$$

Очевидно, что $|\varepsilon_m| < \frac{MU_k}{k^2}$, где

$$M = \sup_k |l_{n_k}|, \quad U_k = |u_{n_{k+1}}| \left(\frac{1}{|u_{n_{k+1}}|} + \frac{1}{|u_{n_{k+2}}|} + \ldots\right).$$

Так как $k \to \infty$ вместе с m, а U_k в силу условия (2.2) стремится к 1 при $k \to \infty$, то $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$. Следовательно, полагая

$$\frac{v_{n_1}}{u_{n_1}} - s = \alpha, \quad \left(s - \frac{v_{n_1}}{u_{n_1}}\right)\xi + l_m + \varepsilon_m = \delta_m,$$

получаем, что $v_m = \alpha x_m + \delta_m$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots)$, где δ_m сходится. Теорема доказана.

Целлер [64*] отмечает, что матрица, удовлетворяющая условиям теоремы, может быть построена нормальной.

Регулярный матричный метод называется *внутренне совершенным*, если он совместен со всеми регулярными методами, не более сильными, чем он. Из предыдущих результатов вытекает следующая (см. [15*])

Теорема 2.6. *Из всех регулярных методов суммирования внутренне совершенными являются только тривиальные (т. е. эквивалентные сходимости).*

Доказательство. Если какой-либо регулярный матричный метод A сильнее обыкновенной сходимости, то по теореме 2.1 он суммирует некоторую неограниченную расходящуюся последовательность $\{x_n\}$ к некоторому значению ξ. В силу теоремы 2.5 можно построить T-матрицу B, которая суммирует $\{x_n\}$ к значению $\eta \neq \xi$, причем каждая B-суммируемая последовательность имеет вид $\{cx_n + \alpha_n\}$, где c — постоянная, а $\{\alpha_n\}$ сходится и, значит, $B \subsetneq A$. Таким образом, любой нетривиальный регулярный матричный метод A несовместен с некоторым, не более сильным регулярным методом B, а так как тривиальный метод является внутренне совершенным, то теорема доказана.

Как следует из теоремы 2.1, не существует T-матриц, суммирующих только ограниченные расходящиеся последовательности, хотя существуют T-матрицы, сильнее, чем сходимость, не суммирующие ни одну расходящуюся ограниченную последовательность. Следующая теорема (принадлежащая Агнью [1*]), которую мы приводим без доказательства, дает достаточные условия того, что T-матрица не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности.

Теорема 2.7. *Если T-матрица $A \equiv (a_{nk})$ удовлетворяет условию*

$$\varliminf_{n\to\infty}\left[a_{nn} - \sum_{k=0}^{\infty}{}^{*} |a_{nk}|\right] > 0$$

(где $\sum^*$ показывает, что при суммировании член с $k = n$ опускается), то ни одна ограниченная расходящаяся последовательность не суммируется этой матрицей.

Следующий результат, принадлежащий Виланскому [9*], указывает необходимые и достаточные условия для того, чтобы реверсивная *) K-матрица могла суммировать расходящуюся последовательность. Теорема доказана для нормальных матриц.

Положим $\|A\| = \sup\limits_n \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$; как отмечено Банахом [1], если A — реверсивная матрица, то существуют ограниченная последовательность $\{c_k\}$ и матрица $B \equiv (b_{nk})$ такие, что когда $\{y_n\}$ сходится, тогда

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k,$$

где

$$x_n = c_n \lim_{r\to\infty} y_r + \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}y_k,$$

---

*) Определение реверсивной матрицы см. в конве § 8.5 основного текста.

причем ряды справа сходятся. Ясно, что если A — нормальная матрица, то $c_n = 0$, $B = A^{-1}$. Определим $\|A^{-1}\|$ как

$$\sup_n \left\{ |c_n| + \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}| \right\}.$$

В случае, когда A нормальная, это определение совпадает с введенным выше.

Теорема 2.8. *Реверсивная K-матрица A суммирует расходящуюся последовательность тогда и только тогда, когда $\|A^{-1}\| = \infty$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\|A^{-1}\| = \infty$. Так как $\{c_n\}$ — ограниченная последовательность, то мы получаем, что $\|B\| = \infty$. Но тогда можно построить сходящуюся последовательность $\{y_n\}$ такую, что последовательность $\{\sigma_n\}$, где $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} y_k$, будет неограниченной. Положим $x_n = c_n \lim_{r \to \infty} y_r + \sigma_n$. Последовательность $\{x_n\}$ также не ограничена, так как $\{c_n\}$ ограничена, однако $\{y_n\}$, где $y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$, сходится.

Необходимость. Предположим, что $\|A^{-1}\| < \infty$. Пусть $\{x_n\}$ суммируется методом A. Тогда последовательность $\{y_n\}$, где

$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$, сходится и

$$|x_n| = \left| c_n \lim_{r \to \infty} y_r + \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} y_k \right| \leqslant \|A^{-1}\| \sup_r |y_r| < \infty.$$

Таким образом, $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. Но если реверсивная K-матрица суммирует только ограниченные последовательности, то она суммирует только сходящиеся последовательности (доказательство этого факта см. в цитированной работе; если A есть T-матрица, то это следует из теоремы 2.1). Теорема доказана.

Следующая теорема, принадлежащая Брудно А. Л. [4*], является в некотором смысле противоположной предыдущей. Она содержит необходимые и достаточные условия того, чтобы T-матрица была равносильна сходимости.

Теорема 2.9. *Для того чтобы T-матрица A была равносильна сходимости, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\delta_0 > 0$ такое, что*

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n \right| \geqslant \delta_0 \overline{\lim_{n \to \infty}} |x_n|$$

для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$.

Приведенная теорема является частным случаем более общих результатов, сформулированных в упомянутой работе в терминах норм матриц и последовательностей.

Нетрудно показать, что для любой T-матрицы A можно указать T-матрицу A' с конечными строками такую, что для ограниченных последовательностей имеет место включение $A_o \subseteq A'_o$. Очевидно и обратное, т. е. для любой T-матрицы A' с конечными строками можно построить T-матрицу A, которая имеет в каждой строке неограниченное множество отличных от нуля элементов и для которой $A'_o \subseteq A_o$. Эрдеш и Пиранян [67*] показали, что для произвольных (неограниченных) последовательностей включения такого вида могут не иметь места. Приведем их результаты.

Теорема 2.10. *Существует T-матрица A, для которой не существует T-матрицы B с конечными строками, удовлетворяющей условию $A \subseteq B$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$A \equiv (a_{nk}) \qquad (n,\ k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$A \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \ldots \\ & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \ldots \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

элементы которой

$$a_{nk} = \frac{1}{2^p} \quad \text{для} \quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \quad k = 2^{n-1}(2p-1),\ p = 1,\ 2,\ \ldots,$$

$a_{nk} = 0$ в других случаях.

Мы покажем, что, какая бы ни была T-матрица B с конечными строками, можно построить последовательность $\{s_n\}$, суммируемую матрицей A и не суммируемую матрицей B. Построение последовательности $\{s_n\}$ будет зависеть от того, к какому из двух следующих ниже случаев относится матрица B, и опирается на тот факт, что каждый столбец матрицы A содержит один и только один отличный от нуля элемент.

Случай I. Для любого целого положительного числа m существует элемент b_{nk}, расположенный сколь угодно далеко вправо, причем положительный элемент в k-м столбце матрицы A находится ниже первых m строк. Точнее говоря, для любой пары целых положительных чисел m и h можно указать два положительных числа n и k ($k > h$), таких, что

$$b_{nk} \neq 0,$$

$$a_{rk} = 0, \quad r = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Построим по индукции последовательности $\{n_r\}$, $\{k_r\}$ и $\{s_k\}$. Пусть $b(n_1, k_1)$ *) — отличный от нуля элемент матрицы B. Положим

$$s_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, k_1 - 1),$$
$$s_k = \frac{1}{b(n_1, k_1)} \qquad (k = k_1),$$
$$s_k = 0 \qquad (k = k_1 + 1, k_1 + 2, \ldots, k_1'),$$

где k_1' — номер последнего отличного от нуля элемента в n_1-й строке матрицы B. Очевидно, что при любом выборе остальных элементов последовательности $\{s_k\}$ мы имеем:

$$t(n_1) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} b(n_1, k) s_k = 1.$$

С другой стороны, существуют целые положительные числа n_1' и k_1'' $(k_1'' > k_1')$, такие, что $a(n_1', k_1) \neq 0$ и $a(n_1', k_1'') \neq 0$. Положим $s_k = 0$ $(k = k_1' + 1, k_1' + 2, \ldots, k_1'' - 1)$; $s_k = 0$ для всех k $(k > k_1'')$, для которых $a(n_1', k) > 0$, а s_k для $k = k_1''$ определим так, чтобы $\sum_{k=1}^{k_1''} a(n_1', k) s_k = 0$.

Пусть уже определены n_{r-1}, k_{r-1} и s_k для $k = 1, 2, \ldots, k_{r-1}''$. Выберем теперь n_r и k_r так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

$$n_r > \max\{n_{r-1}, n_{r-1}'\}, \quad k_r > k_{r-1}'',$$
$$b(n_r, k_r) \neq 0, \quad a(n, k_r) = 0$$

при $n \leqslant \max\{n_{r-1}, n_{r-1}'\}$, и пусть $a(n_r', k_r)$ — положительный элемент матрицы A в k_r-м столбце. Очевидно, что $n_r' > \max\{n_{r-1}, n_{r-1}'\}$. Обозначив через k_r' номер последнего отличного от нуля элемента в n_r-й строке матрицы B, выберем $k_r'' > k_r'$ так, чтобы элемент $a(n_r', k_r'')$ матрицы A был положительным.

Положим $s_k = 0$ для $k_{r-1}'' < k < k_r$ и для $k_r < k < k_r''$, а s_k для $k = k_r$ и $k = k_r''$ выберем так, чтобы

$$t(n_r) \equiv \sum_{k=1}^{k_r'} b(n_r, k) s_k = (-1)^{r+1},$$

---

*) Мы здесь употребляем запись $b(n_r, k_r)$ и $a(n_r, k_r)$ вместо b_{n_r, k_r} и a_{n_r, k_r}.

а k_r''-я частичная сумма ряда $\sum\limits_k a(n_r', k) s_k$ равнялась нулю. Элементы s_k $(k > k_r'')$, для которых $a(n_r', k) > 0$, положены равными нулю.

Так как каждый столбец матрицы A содержит только один отличный от нуля элемент, то для построенной последовательности $\{s_k\}$ мы имеем

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

а последовательность $\{t_n\}$,

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} s_k,$$

имеет бесконечное множество значений $+1$ и -1.

Случай II. Существуют числа N и K такие, что если для каких-либо $n_0 > N$ и $k_0 > K$ элемент $a_{n_0, k_0} > 0$, то $b_{p, k_0} = 0$ при всех p. В этом случае при построении последовательности $\{s_k\}$ мы положим $s_k = 0$ всякий раз, когда $k \leqslant K$ или один из элементов a_{nk} $(n > N)$ отличен от нуля. Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k = 0 \qquad (n = N+1, N+2, \ldots).$$

Остальные элементы s_k мы выберем так, чтобы B-преобразование последовательности $\{s_k\}$ расходилось, а каждый из N рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

сходился к некоторому значению a_n.

Пусть (n_1, k_1), (n_2, k_2), ... — последовательность пар целых положительных чисел, удовлетворяющих условиям:

1) $n_r > N \qquad (r = 1, 2, \ldots)$;

2) $b(n_r, k) = 0 \qquad (k = k_r + 1, k_r + 2, \ldots)$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{k_{r-1}} |b(n_r, k)| < \frac{1}{2^r} \qquad (r = 2, 3, \ldots)$.

Элементы s_k, которые не были определены, мы положим теперь равными $(-1)^r$, когда $k_{r-1} < k \leqslant k_r$ $(r = 2, 3, \ldots)$. При таком определении будем иметь:

$$\lim_{r \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} b(n_r, k) s_k - (-1)^r \right] = 0,$$

и в то же время ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ абсолютно сходятся. Теорема доказана.

Незначительно видоизменяя предыдущие рассуждения, можно доказать следующий более общий результат (см. [67*]):

Теорема 2.11. *Если A есть T-матрица, каждая строка которой содержит бесконечное множество не равных нулю элементов, а каждый столбец содержит только один не равный нулю элемент, то не существует T-матрицы B с конечными строками, удовлетворяющей условию $A \subseteq B$.*

Следующая теорема показывает, что в свою очередь существуют T-матрицы с конечными строками, поля которых не содержатся в полях никаких бесконечнострочных T-матриц.

Теорема 2.12. *Существует T-матрица A с конечными строками, для которой включение $A \subseteq C$ не имеет места ни для какой T-матрицы C, имеющей в каждой строке бесконечное множество отличных от нуля элементов.*

Действительно, матрица

$$A \equiv \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}$$

удовлетворяет условиям теоремы. В самом деле, какова бы ни была T-матрица C, содержащая в каждой строке бесконечное множество отличных от нуля элементов, можно построить последовательность $\{s_k\}$, удовлетворяющую условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

C-преобразование которой не существует.

§ 3. О включении методов суммирования

Как известно, для любой T-матрицы A можно построить другую T-матрицу C, которая сильнее, чем данная, т. е. $A \subset C$. Сейчас мы рассмотрим вопрос о существовании матрицы сильнее каждой из двух данных. Как впервые показал Брудно А. Л. [7*], такой матрицы может не существовать. Очевидно, представляет интерес рассматривать матрицы, являющиеся совместными, по крайней мере, для ограниченных последовательностей, ибо в противном случае несуществование матрицы сильнее, чем каждая из двух данных, следует из теоремы Мазура — Орлича (теорема 1.1).

А. Л. Брудно построил пример двух T-матриц A и B, совместных для всех ограниченных последовательностей и ограниченно не накрываемых, т. е. для которых не существует T-матрицы C, суммирующей все ограниченные последовательности, каждая из которых суммируется хотя бы одной из матриц A или B.

Простой пример двух положительных совместных T-матриц A и B, ограниченно не накрываемых никакой положительной T-матрицей C, построен Питерсеном [44*].

Пример двух совместных T-матриц, не накрываемых никакой третьей T-матрицей, указан также Лоренцем и Целлером. Ими также получены другие результаты в этом направлении, которые мы здесь приводим (см. [27*]).

Теорема 3.1. *Существуют две совместные T-матрицы A и B, для которых не существует T-матрицы C, удовлетворяющей одновременно условиям $A \subsetneqq C$, $B \subsetneqq C$.*

Доказательство. В качестве A возьмем матрицу A теоремы 2.12, а в качестве $B \equiv (b_{nk})$ — матрицу, удовлетворяющую условию $b_{n,2k-1} = b_{n,2k}$ для всех n и k, которая содержит в каждом столбце один и только один отличный от нуля элемент, а в каждой строке бесконечное множество не равных нулю элементов. Нетрудно показать, что A и B совместны для всех последовательностей, а из теорем 2.11 и 2.12 следует, что не существует T-матрицы C, удовлетворяющей одновременно условиям $A \subsetneqq C$, $B \subsetneqq C$.

При доказательстве следующей теоремы будут построены две T-матрицы, совместные только для ограниченных последовательностей и ограниченно не накрываемые никакой T-матрицей. Через (m) будет обозначаться пространство (Банаха) ограниченных последовательностей $x \equiv \{x_n\}$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$.

Теорема 3.2. *Существуют две T-матрицы $A \equiv (a_{lk})$ и $B \equiv (b_{lk})$ $(l, k = 0, 1, \ldots)$, совместные для ограниченных последовательностей и такие, что в (m) не существует непрерывного линейного функционала, который в A_o^* совпадает с A-$\lim x$, а в B_o^* совпадает с B-$\lim x$.*

Очевидно, что для матриц A и B, удовлетворяющих условиям теоремы, не существует T-матрицы C, которая была бы для ограниченных последовательностей сильнее каждой из данных.

Доказательство. Теорема будет доказана, если мы построим две совместные T-матрицы A и B, удовлетворяющие следующему условию (S): для каждого $\varepsilon > 0$ существуют последовательности $x \in A_o^*$ и $y \in B_o^*$ с $\|x - y\| < \varepsilon$ такие, что $|A\text{-}\lim x - B\text{-}\lim y| > 1$.

При построении матриц A и B будут использованы блоки (2×3) (для малого ρ)

$$A(\rho) = \begin{pmatrix} 1-\rho & \rho & 0 \\ 1-\rho & 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad B(\rho) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 1-\rho \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждый из этих блоков преобразует тройку (1, 1, 1) в пару (1, 1), $A(\rho)$ преобразует (1, 0, 0) в $(1-\rho,\ 1-\rho)$, $B(\rho)$ преобразует $(1, \rho, 0)$ в (ρ, ρ), так что две близкие друг к другу по норме тройки преобразуются в две достаточно удаленные друг от друга пары.

Пусть A_n^{2m} — блок $(2m \times 3)$, состоящий из m одинаковых блоков $2^{-n}A(4^{-n})$, расположенных один над другим. Образуем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_1^2 & & & & & \\ & A_1^4 & A_2^4 & & & \\ & & & A_1^8 & A_2^8 & A_3^8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

причем будем считать, что внутри каждого блока, входящего в состав этой матрицы, строки переставлены таким образом, что в строках матрицы, которые пересекают группу блоков $A_1^{2^n}, A_2^{2^n}, \dots, A_n^{2^n}$, содержится каждая комбинация из строк блоков $2^{-1}A(4^{-1})$, $2^{-2}A(4^{-2})$, ..., $2^{-n}A(4^{-n})$ *). Матрица A требуемая. Аналогичным образом строится матрица B. Очевидно, A и B суть T-матрицы.

---

*) Рассмотрим, например, вторую блок-строку матрицы A; она состоит из блоков A_1^4 и A_2^4. В каждом из этих блоков четыре строки: две одинаковые строки одного (первого) вида и две одинаковые строки другого (второго) вида. Так, блок A_1^4 состоит из двух строк вида $a_1 \equiv \{2^{-1}(1-4^{-1}),\ 2^{-1}4^{-1},\ 0\}$ и двух строк вида $a_2 \equiv \{2^{-1}(1-4^{-1}), 0, 2^{-1}4^{-1}\}$, которые чередуются между собой. Пусть b_1 и b_2 — строки первого и второго видов блока A_2^4. Описанной перестановкой строк внутри блоков вторая блок-строка, имевшая в наших обозначениях вид

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix},$$

преобразуется, например, в

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_1 & b_2 \end{Vmatrix}.$$

Этой перестановкой мы добились такого положения, что для каждого блока, входящего в состав матрицы A, можно указать две горизонтали, которые пересекают этот блок по строкам разных видов, а другие блоки — по строкам попарно одинакового вида. Например, в нашем случае для блока A_1^4 (который рассматривается после перестановки в нем строк) в качестве пары таких горизонталей можно взять первую и вторую: они пересекают этот блок по строкам разного вида, а блок A_2^4 — по строкам одного и того же вида.

В силу конструкции блоков для любого n можно построить последовательности x и y такие, что x состоит из троек $(0, 0, 0)$ и $(1, 0, 0)$ и суммируется матрицей A к значению $2^{-n}(1-4^{-n})$, а последовательность y состоит соответственно из троек $(0, 0, 0)$ и $(1, 4^{-n}, 0)$ и суммируется матрицей B к значению $2^{-n}4^{-n}$ *). Тогда мы получаем $\|x-y\|=4^{-n}$ и $|A\text{-}\lim x - B\text{-}\lim y| = 2^{-n}(1-2\cdot 4^{-n})$. Так как n можно взять сколь угодно большим, то тем самым показано, что матрицы A и B удовлетворяют условию (S). Остается показать, что они совместны для ограниченных последовательностей.

Пусть N_p — множество натуральных чисел k, таких, что k-й столбец матрицы A состоит из элементов блока A_p^{2m}. Множества N_p попарно не пересекаются. Рассмотрим частичное преобразование

$$y_l^{(p)} = \sum_{k\in N_p} a_{lk}x_k. \tag{3.1}$$

Для любой A-суммируемой последовательности x и каждого p имеем:

$$x_{3n+1}-x_{3n+2}\to 0 \quad \text{при} \quad 3n\in N_p \quad \text{и} \quad n\to\infty. \tag{3.2}$$

Действительно, если $|x_{3n+1}-x_{3n+2}|=\delta>0$ для какого-либо n, $3n\in N_p$, то в A можно найти две строки с номерами l и l', которые пересекают блок A_p^{2m} и для которых $|y_l^{(p)}-y_{l'}^{(p)}|=2^{-p}4^{-p}\delta$. В самом деле, пусть n_0 таково, что $3n_0\in N_p$ и $|x_{3n_0+1}-x_{3n_0+2}|=\delta>0$. Столбцы матрицы A с номерами $3n_0$, $3n_0+1$, $3n_0+2$ пересекут некоторый блок $A_p^{2m_0}$. Тогда в качестве l можно взять номер той строки матрицы A, на которой лежит какая-либо строка первого вида из блока $A_p^{2m_0}$, а в качестве l' — номер той строки из A, на которой лежит строка второго вида из этого блока. Тогда получим:

$$|y_l^{(p)}-y_{l'}^{(p)}| = |2^{-p}(1-4^{-p})x_{3n_0}+2^{-p}4^{-p}x_{3n_0+1} - \\ - 2^{-p}(1-4^{-p})x_{3n_0}-2^{-p}4^{-p}x_{3n_0+2}| = 2^{-p}4^{-p}\delta.$$

В силу конструкции матрицы A можно найти две строки λ и λ', пересекающие блок A_p^{2m}, для которых $|y_\lambda - y_{\lambda'}| = |y_l^{(p)}-y_{l'}^{(p)}|$. Отсюда следует, что если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|x_{3n+1}-x_{3n+2}|=\eta>0 \quad (\text{для } 3n\in N_p),$$

то колебание последовательности, полученной в результате A-преобразования последовательности x, не меньше $8^{-p}\eta$. Это противоречит тому, что x A-суммируема.

*) Для этого в последовательности x тройки $(1, 0, 0)$ (соответственно в последовательности y тройки $(1, 4^{-n}, 0)$) надо расположить на местах против тех блоков матрицы A (или B), которые имеют нижний индекс n, а против остальных блоков поставить тройки $(0, 0, 0)$.

Аналогично если x также и B-суммируема, то в силу (3.2) и свойств $B(\rho)$ получим:

$$x_{3n} - x_{3n+2} \to 0 \qquad (3n \in N_p, \quad n \to \infty).$$

Отсюда для любого p

$$\sum_{k \in N_p} (a_{lk} - b_{lk}) x_k \to 0 \quad \text{при } l \to \infty. \tag{3.3}$$

Кроме того,

$$\sum_{k \overline{\in} N_1, N_2, \ldots, N_r} (|a_{lk}| + |b_{lk}|) \leqslant 2^{-r+1} \quad (l = 1, 2, \ldots), \tag{3.4}$$

так что из (3.3) и (3.4) для каждого r имеем:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} (a_{lk} - b_{lk}) x_k\right| \leqslant \left|\sum_{k \in N_1, N_2, \ldots, N_r} (a_{lk} - b_{lk}) x_k\right| + \\ + 2^{-r+1} \|x\| = o(1) + 2^{-r+1} \|x\| \quad (l \to \infty),$$

т. е. A и B совместны для ограниченных последовательностей.

Следующая теорема, которую мы приводим без доказательства, дополняет предыдущие результаты о накрываемости двух матриц. При доказательстве ее, как отмечают авторы, использованы методы, применяемые Брудно в работе о нормах полей T-матриц.

Теорема 3.3. *Если T-матрицы A и B совместны для всех последовательностей, то существует T-матрица C ограниченно сильнее, чем каждая из A и B, т. е. $A_0 \subsetneqq C_0$, $B_0 \subsetneqq C_0$, и, следовательно, ограниченно совместная с A и B.*

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что матрицы A и B, удовлетворяющие условию (S) теоремы 3.2, не могут быть совместными для всех последовательностей.

Предыдущая теорема может быть обобщена на случай любого конечного числа матриц при надлежащем определении их совместности. Назовем, например, три метода A, B и C *одновременно* совместными, если из $x + y + z = 0$, где $x = \{x_k\} \in A^*$, $y = \{y_k\} \in B^*$, $z = \{z_k\} \in C^*$, следует $A\text{-}\lim x + B\text{-}\lim y + C\text{-}\lim z = 0$. Тогда имеет место следующий результат:

Теорема 3.4. *Если три T-матрицы A, B и C одновременно совместны для всех последовательностей, то существует T-матрица D, ограниченно совместная с каждой из матриц A, B и C и такая, что $A_0 \subseteqq D_0$, $B_0 \subsetneqq D_0$ и $C_0 \subseteqq D_0$.*

Для трех T-матриц, являющихся попарно совместными, Питерсен [44*] отметил следующий результат: существуют три попарно совместные T-матрицы A, B и C, такие, что любая последовательность $\{s_n\}$ может быть представлена в виде суммы трех последовательностей $s_n = x_n + y_n + z_n$, причем $\{x_n\} \in A^*$, $\{y_n\} \in B^*$, $\{z_n\} \in C^*$. Эти матрицы суть следующие:

$$a_{m, \left[\frac{3}{2} m\right]} = 1, \quad b_{m, \left[\frac{3}{2} m\right]+1} = 1, \quad c_{m, \left[\frac{3}{2} m\right]+2} = 1,$$

а в остальных случаях $a_{mn} = 0$, $b_{mn} = 0$, $c_{mn} = 0$. Вопрос, существуют ли две совместные матрицы, обладающие вышеуказанными свойствами, остается нерешенным.

О некоторых результатах, относящихся к существованию матрицы более сильной, чем заданное счетное множество матриц (удовлетворяющих определенным условиям), см. Брудно А. Л. [6*], Олевский А. М. [37*].

Следующие результаты относятся к построению T-матрицы, которая является «промежуточной» по отношению к двум данным T-матрицам. Приведем результат Брудно А. Л. [1].

Теорема 3.4. *Если A и B суть T-матрицы, $A \subset B$, причем существует ограниченная последовательность, суммируемая матрицей B и не суммируемая матрицей A, то существует T-матрица C такая, что $A \subset C \subset B$.*

Мы приведем более краткое доказательство этой теоремы, которое было дано позднее Питерсеном [45*]. Докажем сначала лемму. Матрица A', все строки которой являются строками матрицы A, будет называться *субматрицей* матрицы A.

Лемма. *Если A и B суть T-матрицы, $A_0 \subset B_0$, то существует субматрица A' матрицы A, которая суммирует некоторые, но не все последовательности, суммируемые матрицей B, причем $A \subset A'$.*

Доказательство леммы. Положим

$$t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n, \quad \tau_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} s_n.$$

Для последовательностей $\{s_n^1\}$ и $\{s_n^2\}$ аналогичные суммы будут обозначаться через t_m^1, t_m^2, τ_m^1, τ_m^2.

Мы можем предположить, что ограниченная последовательность $\{s_n^1\}$ суммируется матрицей B к нулю и не суммируется матрицей A. Введем обозначения:

$$\varlimsup_{m \to \infty} t_m^1 = u, \quad \varliminf_{m \to \infty} t_m^1 = v < u.$$

Пусть $\{u_k\}$ — частичные суммы ряда

$$1 - 1 + 0 + \ldots + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + \ldots + 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 + \ldots$$
$$\ldots + 0 + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} + 0 + \ldots + 0 -$$
$$- \frac{1}{n} - \ldots - \frac{1}{n} + 0 + \ldots,$$

где $\frac{1}{n}$ встречается в ряде $2n$ раз, причем первые n раз со знаком «+», вторые n раз со знаком «—». За первыми n числами $\frac{1}{n}$ следует $g(n)$ нулей, за вторыми n числами $\frac{1}{n}$ следует $h(n)$ нулей, где $g(n)$ и $h(n)$ — целочисленные функции n. Очевидно, $0 \leqslant u_k \leqslant 1$ для любого k и $\eta_k = |u_{k+1} - u_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Пусть $\{\varepsilon_m\}$, $\{m_k\}$, $\lambda(m)$, $\mu(m)$ имеют тот же смысл и удовлетворяют тем же условиям, что и в лемме к теореме 1.1. Если необходимо, мы можем выбрать $\lambda(m)$ так, что $\lambda(m+1) - \lambda(m) \leqslant 1$ для каждого m. Определим последовательность $\{s_n^2\}$, положив $s_n^2 = s_n^1$ для $n < \lambda(m_1)$, $s_n^2 = u_k s_n^1$ для $\lambda(m_k) \leqslant n < \mu(m_k)$. Ясно, что $\{s_n^2\}$ зависит от выбора $g(n)$ и $h(n)$, однако легко показать, что при любом их выборе $B\text{-}\lim s_n^2 = 0$ *). Пусть теперь последовательности $\{m_i'\}$ и $\{m_j''\}$, $t_{m_i'} \equiv t_i$, $t_{m_j''} \equiv t_j$, обладают свойствами

$$\lim_{i \to \infty} t_i^1 = u, \quad \lim_{j \to \infty} t_j^1 = v.$$

Очевидно, можно выбрать $g(n)$ и $h(n)$ так, что

$$s_n^2 = s_n^1 \quad \text{при } \lambda(m_i') < n \leqslant \mu(m_i'),$$

$$s_n^2 = s_n^1 \quad \text{при } \lambda(m_j'') < n \leqslant \mu(m_j'')$$

для бесконечного множества значений i и j, например $\{i''\}$ и $\{j''\}$, и

$$s_n^2 = 0 \quad \text{при } \lambda(m_i') < n \leqslant \mu(m_i'),$$

$$s_n^2 = 0 \quad \text{при } \lambda(m_j'') < n \leqslant \mu(m_j'')$$

также для бесконечного множества значений i и j, например $\{i'\}$ и $\{j'\}$. В силу такого выбора мы будем иметь или

$$\lim_{i'' \to \infty} t_{i''}^2 \neq \lim_{i' \to \infty} t_{i'}^2,$$

или

$$\lim_{j'' \to \infty} t_{j''}^2 \neq \lim_{j' \to \infty} t_{j'}^2,$$

так что последовательность $\{s_n^2\}$ не суммируется матрицей A. В то же время субматрица A', состоящая из бесконечного множества строк матрицы A с номерами $m_{i'}'$ и $m_{j'}''$, будет суммировать $\{s_n^2\}$ к нулю, причем A' не суммирует $\{s_n^1\}$, ибо

$$\lim_{i' \to \infty} t_{i'}^1 \neq \lim_{j' \to \infty} t_{j'}^1.$$

Лемма доказана.

---

*) Это доказывается так же, как в лемме к теореме 1.1 доказывается равенство $A\text{-}\lim s_n' = 0$.

Доказательство теоремы. Образуем матрицу C из всех строк матрицы A', построенной в лемме, и всех строк матрицы B, взятых в произвольном порядке. Матрица С требуемая. Она суммирует все последовательности, суммируемые матрицей A, и не суммирует никакой последовательности, не суммируемой матрицей B; она суммирует $\{s_n^2\}$ к нулю и, значит, строго сильнее, чем A, и не суммирует $\{s_n^1\}$, значит, строго слабее B. Теорема доказана.

Как заметил Питерсен, в теореме существенно, что B строго сильнее A в том смысле, что B суммирует хотя бы одну *ограниченную* последовательность, не суммируемую матрицей A. Если не требовать ограниченности для той последовательности, которая B-суммируема, но не суммируема матрицей A, то теорема может оказаться неверной. Например, если через A и B обозначены преобразования

$$(A)\quad t_n = 2s_{n-1} - s_n,$$
$$(B)\quad \tau_n = 4s_{n-2} - 4s_{n-1} + s_n,$$

то можно показать, что методом A суммируются только последовательности вида $c_1 2^n + s_n^1$, а методом B — последовательности вида $c_2 n 2^n + c_3 2^n + s_n''$, где c_1, c_2, c_3 — постоянные, а $\{s_n'\}$ и $\{s_n''\}$ сходятся. Очевидно, что $A \subset B$, однако не существует матрицы C, удовлетворяющей условию $A \subset C \subset B$.

§ 4. Ядро последовательностей. Полная эквивалентность двух методов суммирования

Приведем сначала без доказательств*) ряд результатов, относящихся к ядрам последовательностей и дополняющих гл. 6 настоящей книги. Для этого нам потребуется несколько расширить определение ядра, чтобы оно охватывало и тот случай, когда в результате T-преобразования при помощи матрицы $A \equiv (a_{mn})$ ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n$ расходятся для некоторых или всех m. Ядром R_A A-преобразования последовательности $\{z_n\}$ посредством матрицы $A \equiv (a_{mn})$ будем называть множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих при любом действительном φ условию

$$\operatorname{Re} z e^{i\varphi} \leqslant \varlimsup_{m\to\infty} \varlimsup_{q\to\infty} \operatorname{Re} e^{i\varphi} \sum_{n=0}^{q} a_{mn} z_n. \tag{4.1}$$

Если все ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} z_n$ сходятся, то так определенное ядро совпадает с ядром в определении Кноппа для последовательности $\{\sigma_m\}$, где

*) Доказательства можно найти в работах, на которые сделаны ссылки.

$\sigma_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} z_n$. Ядро R последовательности $\{z_n\}$ получается, если положить $A = I$ (I — единичная матрица). Точка ∞ *), по определению, включается в ядро, если при каком-либо φ двойной верхний предел справа в (4.1) равен $+\infty$. Ядро не может быть пустым, хотя и может состоять из одной точки ∞ **).

Будем называть действительную T-матрицу *T_∞-матрицей*, если любая действительная последовательность, расходящаяся к $+\infty$, преобразуется этой матрицей в последовательность, расходящуюся к $+\infty$ или к $-\infty$ ***). В частности, вполне регулярная матрица, т. е. T-матрица, которая всякую действительную последовательность, расходящуюся к $+\infty$, преобразует опять в последовательность, расходящуюся к $+\infty$, является T_∞-матрицей. Легко показать, что класс T_∞-матриц шире класса вполне регулярных матриц. Например, $A \equiv (a_{mn})$, где $a_{mm} = 1$, $a_{mn} = -\frac{1}{2^n}$ $(n > m)$, $a_{mn} = 0$ $(n < m)$, является T_∞-матрицей, но не является вполне регулярной (см. [12*], стр. 97). T_∞-матрицу, не являющуюся вполне регулярной, назовем *строго T_∞-матрицей*.

Представим матрицу A в виде $A = B + iC$, где $A \equiv (a_{mn})$, $B \equiv (b_{mn})$, $C \equiv (c_{mn})$, $a_{mn} = b_{mn} + ic_{mn}$ (b_{mn} и c_{mn} — действительные числа).

Следующие две теоремы (см. [11*], а также [19*]) дают необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять T-матрица A, чтобы ядро любой последовательности содержало ядро A-преобразования этой последовательности.

Теорема 4.1. *Пусть A — комплексная T-матрица. Для того чтобы $R_A \subset R$ для любой комплексной последовательности $\{z_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы матрица B была T_∞-матрицей и существовали числа M и N такие, что $c_{mn} = 0$ при $m > M$, $n > N$.*

Включение ядер в комплексной плоскости с одной бесконечно удаленной точкой имеет теоретико-множественный смысл. В частности, если некоторая действительная последовательность $\{z_n\}$, $z_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, преобразуется матрицами A и D соответственно в последовательности $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$, причем $z'_n \to +\infty$, $z''_n \to -\infty$, то мы в обоих случаях имеем $R_A \subset R$ и $R_D \subset R$ (точнее, $R_A = R_D = R$). Чтобы все-таки различать эти два случая, мы введем понятие включения ядер в *узком* смысле, а именно: ядро R_A содержится в ядре R

*) Мы рассматриваем комплексную плоскость с единственной бесконечно удаленной точкой.

**) В отличие от терминологии § 6.1 основного текста, где в этом случае ядро считалось пустым.

***) Относительно суммирования к $+\infty$ или $-\infty$ см. сноску **) на стр. 366.

в узком смысле, если для любого действительного φ имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\ \overline{\lim_{q\to\infty}}\ \operatorname{Re} e^{i\varphi}\sum_{n=0}^{q} a_{mn}z_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \operatorname{Re} z_n e^{i\varphi};$$

R_A и R_B совпадают в узком смысле, если в этом неравенстве знак $\leqslant$ заменить знаком равенства.

Относительно включения ядер в узком смысле имеет место следующая

Теорема 4.2*). *Пусть A — комплексная T-матрица. Для того чтобы ядро R_A любой комплексной последовательности $\{z_n\}$ содержалось в ядре R последовательности $\{z_n\}$ в узком смысле, необходимо и достаточно, чтобы B была вполне регулярной и существовали числа M и N такие, что $c_{mn}=0$ при $m>M$, $n>N$.*

Г. Гурвицем [1] указаны необходимые и достаточные условия того, чтобы T-матрица была вполне регулярной. Катнером [19*] получены необходимые и достаточные условия того, чтобы T-матрица была строго T_∞-матрицей **). Они заключаются в следующем:

Теорема 4.3. *Для того чтобы действительная T-матрица A была строго T_∞-матрицей, необходимо и достаточно, чтобы:*

а) *все строки A, исключая, быть может, конечное число их, содержали бесконечное множество отличных от нуля элементов;*

б) *существовало целое число M, такое, что для любого $m>M$ можно указать число $\mu(m)$, обладающее свойствами: если $m>M$, $n>\mu(m)$, то $a_{mn}\leqslant 0$;*

в) *существовали неотрицательные числа λ_{mn}, определенные для всех неотрицательных m и n, со свойствами:* 1) *при любом фиксированном n последовательность $\{\lambda_{mn}\}$ не возрастает;* 2) *для любого фиксированного m ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{mn}$ сходится;* 3) *для всех m и n $a_{mn}\geqslant-\lambda_{mn}$;* 4) *для любого данного бесконечного множества S значений m существует конечное подмножество S^*, $S^*\subset S$, целые числа M и N и число $\delta>0$ такие, что для каждого $n>N$ $a_{mn}\leqslant-\delta\lambda_{Mn}$, по крайней мере, для одного m из S^*.*

Следующие две теоремы принадлежат Лоренцу и Робинсону [26*]:

Теорема 4.4. *Если A и B — действительные T-матрицы, B положительная и для любой ограниченной последовательности $R_A\subset R_B$, то найдется положительная T-матрица C, такая, что*

) Для действительных матриц и последовательностей теорема такого типа доказана Роджерсом [49].

**) Матрицу, которую мы называем строго T_∞-матрицей, Катнер называет ядерно-регулярной матрицей II-типа.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|d_{mn}|\to 0$ *при* $m\to\infty$, *где* d_{mn} — *элементы* m-*й строки матрицы* $CB-A$.

Из теорем 4.4, 1.2 и теоремы Кноппа о ядрах вытекает следующий результат:

Теорема 4.5. *Пусть* A *и* B *суть* T-*матрицы с конечными строками, причем* B *положительная. Тогда условия* 1) — 5) *эквивалентны*:

1) $B \subseteqq \subseteq A$;

2) *из* $\tau_m\to+\infty$ *всегда следует* $|\sigma_m|\to+\infty$, *где* σ_m *и* τ_m — *соответственно* A- *и* B-*средние последовательности* $\{s_n\}$;

3) $A_p=CB_p$ *для некоторого* p, $C\equiv(c_{mn})$ *положительная*;

4) $R_A\subset R_B$ *для любой действительной последовательности*;

5) $R_A\subset R_B$ *для любой комплексной последовательности*.

В § 2 был рассмотрен вопрос о существовании матрицы более сильной, чем каждая из двух данных. Аналогично этому можно поставить вопрос о существовании матрицы *ядерно сильнее* *), чем каждая из двух данных матриц. Для ограниченных последовательностей ответ на этот вопрос дает следующая теорема, принадлежащая Лоренцу и Целлеру [27*].

Теорема 4.6. *Для двух* T-*матриц* A *и* B *могут быть следующие возможности*:

а) *существует ограниченная последовательность* $\{z_n\}$, *для которой* R_A *и* R_B *не имеют общих точек*;

б) *существует* T-*матрица* C, *такая, что для любой ограниченной последовательности* $R_C\subset R_A$ *и* $R_C\subset R_B$.

Следующие результаты, которые мы приводим также без доказательств, относятся к полной эквивалентности двух методов суммирования. Два метода A и B называются *вполне эквивалентными*, если одновременно $A \subseteqq \subseteqq B$ и $B \subseteqq \subseteqq A$ и, кроме того, A и B вполне совместны. Метод A называется *вполне эквивалентным сходимости*, если из суммируемости последовательности методом A к конечному значению или бесконечности определенного знака следует сходимость этой последовательности к тому же самому значению, и наоборот **).

Лоренцем и Робинсоном [26*] указаны необходимые и достаточные условия того, чтобы метод, определенный действительной T-матрицей A с конечными строками, был вполне эквивалентен сходимости. Они заключаются в следующем:

Теорема 4.7. *Метод* A, *определенный действительной* T-*матрицей с конечными строками, вполне эквивалентен сходимости тогда и только тогда, когда для некоторого* p

*) Матрица A ядерно сильнее матрицы B, если $R_A\subset R_B$.

**) Полная эквивалентность по самому определению имеет смысл только для действительных последовательностей и матриц.

матрица A_p положительна и содержит бесконечную последовательность строк вида

$$0\ 0\ \ldots\ 0\ a_{m_n,n}\ 0\ 0\ \ldots \quad (n=1,\ 2,\ \ldots);$$

(очевидно, необходимо $m_n \to \infty$, $a_{m_n,n} \to 1$ при $n \to \infty$).

Необходимые и достаточные условия для того, чтобы произвольная действительная T-матрица была вполне эквивалентна сходимости, даются следующей теоремой (см. [12*]):

Теорема 4.8. *Метод суммирования, определенный действительной T-матрицей $A \equiv (a_{mn})$, вполне эквивалентен сходимости тогда и только тогда, когда:*

1) *этот метод вполне регулярен;*

2) *существует такое число p, что для любого $n > p$ можно указать целое число $m = m(n)$, удовлетворяющее условиям:*

$$a_{m(n),n} \neq 0, \quad a_{m(n),k} = 0 \qquad (k > p,\ k \neq n).$$

Так как A есть T-матрица, то очевидно, что $m(n) \to \infty$, $a_{m(n),n} \to 1$ при $n \to \infty$.

Следующий результат, принадлежащий Лоренцу и Робинсону [26*] и независимо от них доказанный Аграновичем [3*], дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы два метода, определенных нормальными матрицами A и B, были вполне эквивалентны.

Теорема 4.9. *Если два метода A и B, определенных нормальными T-матрицами, вполне эквивалентны, то существует последовательность $\{c_m\}$, $c_m \to 1$ при $m \to \infty$, такая, что для некоторого p*

$$a_{mn} = c_m b_{mn}, \quad m = 1,\ 2,\ \ldots, \quad n = p,\ p+1,\ \ldots$$

Доказательство. Так как A и B — нормальные матрицы, то существует нормальная матрица $C \equiv (c_{mn})$, такая, что $A = CB$. С другой стороны, матрица C должна быть вполне эквивалентной сходимости, и поэтому по теореме 4.7 существует такое p, что при $n > p$ $c_{mn} = 0$ $(n \neq m)$, а $c_{mm} \to 1$ при $m \to \infty$. Так как $a_{mn} = \sum_{k=n}^{m} c_{mk} b_{kn}$, то для $n \geqslant p$ мы получаем $a_{mn} = c_{mm} b_{mn}$. Полагая $c_{mm} = c_m$, получаем требуемый результат.

ЧАСТЬ II

Нижеследующий материал посвящен, в основном, изложению результатов, относящихся к суммированию действительных функциональных рядов и последовательностей *). Исключение составляет § 5, в котором речь идет о числовых подпоследовательностях.

*) Правда, из излагаемого материала легко видно, что большинство результатов верно и для комплексных рядов (последовательностей).

Бóльшая часть результатов, содержащихся в §§ 5—8, по внешнему виду примыкает к теоремам типа Таубера, т. е. когда из суммируемости числового или функционального ряда (или последовательности) мы можем заключить о его сходимости. § 9 посвящен вопросу суммируемости рядов Фурье — Лебега. В § 10 сформулированы некоторые задачи, решение которых неизвестно.

В дальнейшем через $T^* = \|a_{nm}\|$ обозначаются матрицы, для которых *)

$$\lim_{n \to \infty} a_{nm} = 0 \qquad (m = 0, 1, \ldots), \tag{1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} = 1, \tag{2}$$

т. е. матрицы T^* не обязаны удовлетворять условию Теплица (см. гл. 4, § 1)

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| \leqslant H \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{3}$$

где H — постоянная. Более того, ряды (3) могут оказаться расходящимися.

Через $\gamma = \|B_{nm}\|$ обозначаются регулярные матричные методы суммирования рядов с помощью множителей (см. гл. 4, § 2), а через $\gamma^* = \|B_{nm}\|$ обозначаются матрицы, для которых

$$\lim_{n \to \infty} B_{nm} = 1 \qquad (m = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$

и

$$\lim_{m \to \infty} B_{nm} = \gamma_n, \quad \lim_{n \to \infty} \gamma_n = 0. \tag{5}$$

Легко сообразить, что метод суммирования с помощью матрицы γ^* не обязан быть регулярным.

Через $\gamma^{**} = \|B_{nm}\|$ обозначаются матрицы, для которых справедливо (4). Совершенно ясно, что класс матриц γ^{**} значительно шире класса матриц γ и γ^*.

§ 5. Суммирование подпоследовательностей

Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений, которые сами по себе представляют некоторый интерес.

Теорема 5.1. *Пусть $A = \|a_{nm}\|$ — такая матрица, что при всех ε_m ($\varepsilon_m = \pm 1$) последовательность*

$$A_n = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m a_{nm} \tag{5.1}$$

---

*) Следует отличать матрицу T^* от поля T^* матрицы Теплица T (см. Введение к обзорной статье).

ограничена постоянной, зависящей, быть может, от выбора ε_m. *Тогда найдется такая постоянная* H, *что*

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| \leqslant H \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Доказательство. Пусть n фиксировано. Положим *) $\varepsilon_m = \operatorname{sgn} a_{nm}$. Так как ряд (5.1) сходится при любом выборе ε_m, то отсюда вытекает сходимость ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \operatorname{sgn} a_{nm} = H_n < \infty. \tag{5.2}$$

Нам нужно доказать, что H_n ограничены в совокупности. Отметим теперь, что ограниченность постоянных A_n при каждом выборе $\varepsilon_m = \pm 1$ эквивалентна ограниченности постоянных

$$A'_n = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m a_{nm} \tag{5.3}$$

при каждом выборе $\delta_m = 0$ или 1, так как каждый ряд вида (5.1) есть разность некоторых двух рядов вида (5.3), и наоборот, каждый ряд вида (5.3) есть половина суммы некоторых двух рядов вида (5.1).

Пусть m_0 фиксировано. Полагая $\delta_{m_0} = 1$ и $\delta_m = 0$ при $m \neq m_0$, мы получаем:

$$|a_{n,m_0}| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m a_{nm} \right| = H'_{m_0} < \infty \tag{5.4}$$

при всех $n = 0, 1, \ldots$

Допустим теперь, что H_n не ограничены в совокупности. Положим $D_j = H'_0 + H'_1 + \ldots + H'_j$. Индуктивно построим последовательности $\{n_k\}$, $\{m_k\}$.

Пусть числа n_k и m_k определяются из соотношений

$$H_{n_1} = \sum_{m=0}^{\infty} |a_{n_1,m}| > 2H'_0 + 2,$$

$$\sum_{m=m_1}^{\infty} |a_{n_1,m}| < \frac{1}{2},$$

а при $k > 1$

$$H_{n_k} = \sum_{m=0}^{\infty} |a_{n_k,m}| > 2D_{m_{k-1}} + k^2 + 1, \tag{5.5}$$

$$\sum_{m=m_k}^{\infty} |a_{n_k,m}| < \frac{1}{2}. \tag{5.6}$$

*) Если $a_{nm} = 0$, то ε_m можно взять равным 1.

Это возможно в силу предположения неограниченности H_n в совокупности и (5.2).

Положим $\varepsilon_m = \operatorname{sgn} a_{n_k, m}$ при $m_{k-1}+1 \leqslant m \leqslant m_k$. Ясно, что (см. (5.4) — (5.6))

$$|A_{n_k}| = \left|\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m a_{n_k, m}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{m=m_{k-1}+1}^{m_k} \varepsilon_m a_{n_k, m} - \sum_{m=0}^{m_{k-1}} |a_{n_k, m}| - \sum_{m=m_k+1}^{\infty} |a_{n_k, m}| =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} |a_{n_k, m}| - 2\sum_{m=0}^{m_{k-1}} |a_{n_k, m}| - 2\sum_{m=m_k+1}^{\infty} |a_{n_k, m}| \geqslant$$

$$\geqslant H_{n_k} - 2\sum_{m=0}^{m_{k-1}} H'_m - 1 \geqslant k^2,$$

т. е. A_n не ограничены. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следствие 5.1. *Пусть дан метод* $T^* = \|a_{nm}\|$ *и последовательность* $\{s_k\}$ *такова, что при любых* $\varepsilon_k = \pm 1$ *последовательность* $\{t_n\}$

$$t_n = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m s_m a_{nm}$$

ограничена по n *постоянной, зависящей, быть может, от выбора* ε_m. *Тогда у последовательности* $\{s_k\}$ *имеется, по крайней мере, одна конечная предельная точка.*

Доказательство. Из теоремы 5.1 вытекает

$$\sum_{m=0}^{\infty} |s_m||a_{nm}| \leqslant H < \infty \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{5.7}$$

Предположим, что $|s_m| \to \infty$ при $m \to \infty$. Найдем M такое, что $|s_m| > 4H$ при $m \geqslant M$. Тогда

$$\sum_{m=0}^{\infty} |s_m||a_{nm}| \geqslant \sum_{m=M}^{\infty} |s_m||a_{nm}| \geqslant 4H \sum_{m=M}^{\infty} |a_{nm}|.$$

Так как матрица $\|a_{nm}\|$ типа T^* (см. (1) и (2) на стр. 396), то

$$\sum_{m=M}^{\infty} a_{nm} > \frac{1}{2} \quad \text{при } n \geqslant n_0,$$

и поэтому

$$\sum_{m=0}^{\infty} |s_m||a_{nm}| > \frac{4H}{2} = 2H \qquad (n \geqslant n_0),$$

что противоречит (5.7). Стало быть, $|s_m|$ не может сходиться к $+\infty$, и потому у $\{s_m\}$ имеется, по крайней мере, одна конечная предельная точка, что и требовалось доказать.

Замечание 5.1. а) Легко видеть, что при предположениях следствия 5.1 нельзя утверждать, что последовательность обязана быть ограниченной и тем более сходящейся. В качестве примера можно взять метод суммирования с помощью средних арифметических (метод $(C, 1)$) и последовательность $\{s_k\}$ такую, что $s_{2^n} = n$ и $s_k = 1$ при $k \neq 2^n$.

б) Как показывает предыдущий пример, нуль во множество предельных точек последовательности $\{s_k\}$ может не входить.

Теорема 5.2. *Пусть метод $T^* = \|a_{nm}\|$ и последовательность $\{s_k\}$ таковы, что при любых $\varepsilon_k = \pm 1$ последовательность $\{\varepsilon_k s_k\}$ T^*-суммируема. Тогда нуль является предельной точкой последовательности $\{s_k\}$.*

Предположим противное, т. е. $|s_i| \geqslant h > 0$ при $i \geqslant i_0$. Так как у нас дан метод суммирования T^*, то мы можем считать, что $|s_i| \geqslant 1$ при всех i. Согласно условию последовательность $\{\varepsilon_k s_k\}$ всегда T^*-суммируема, поэтому, полагая $\varepsilon_m = \operatorname{sgn}(s_m a_{nm})$ при фиксированном n, мы получаем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m s_m a_{nm} = \sum_{m=0}^{\infty} |s_m| \, |a_{nm}| < \infty \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{5.8}$$

а так как $|s_m| \geqslant 1$, то и

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| < \infty \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{5.9}$$

Если матрица T^* не удовлетворяет условию (5.9), то мы получим противоречие и вместе с ним утверждение теоремы 5.2.

Теперь осталось рассмотреть случай, когда T^* удовлетворяет условию (5.9). Фиксируем произвольно m_0 и построим по индукции последовательности $\{n_i\}$, $\{m_i\}$ так, что если $\{n_i\}$, $\{m_i\}$ подобраны для $i \leqslant k-1$, то $n_k > n_{k-1}$ находим таким большим, что

$$\sum_{m=0}^{m_{k-1}} |s_m| \, |a_{n_k, m}| < \frac{1}{2^k}, \qquad \sum_{m=0}^{m_{k-1}} |a_{n_k, m}| < \frac{1}{2^k}, \tag{5.10}$$

$$\left| 1 - \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_k, m} \right| < \frac{1}{2^k}, \tag{5.11}$$

и после этого берем $m_k > m_{k-1}$ таким, что (см. (5.8) и (5.9))

$$\sum_{m=m_k}^{\infty} |s_m| \, |a_{n_k, m}| < \frac{1}{2^k}, \qquad \sum_{m=m_k}^{\infty} |a_{n_k, m}| < \frac{1}{2^k}. \tag{5.12}$$

Полагаем $\varepsilon_m = (-1)^k \operatorname{sgn}\{s_m a_{n_k, m}\}$ при $m_{k-1}+1 \leqslant m \leqslant m_k$. Очевидно, что тогда

$$t_{n_k} = \sum_{m=0}^{m_{k-1}} \varepsilon_m s_m a_{n_k, m} + \sum_{m=m_{k-1}+1}^{m_k} \varepsilon_m s_m a_{n_k, m} + \\ + \sum_{m=m_k+1}^{\infty} \varepsilon_m s_m a_{n_k, m} = T_1 + T_2 + T_3. \quad (5.13)$$

В силу (5.10) и (5.12) имеем:

$$|T_1| \leqslant \frac{1}{2^k}, \quad |T_3| \leqslant \frac{1}{2^k}. \quad (5.14)$$

С другой стороны,

$$T_2 = (-1)^k \sum_{m=m_{k-1}+1}^{m_k} |s_m| \, |a_{n_k, m}| = (-1)^k U_k,$$

где (см. (5.10) — (5.12))

$$U_k = \sum_{m=m_{k-1}+1}^{m_k} |s_m| \, |a_{n_k, m}| \geqslant \\ \geqslant \sum_{m=0}^{\infty} |a_{n_k, m}| - \sum_{m=0}^{m_{k-1}} |a_{n_k, m}| - \sum_{m=m_k+1}^{\infty} |a_{n_k, m}| \geqslant 1 - \frac{3}{2^k}.$$

Стало быть, $U_k \geqslant \frac{1}{2}$ при $k > 4$, и поэтому T_2 заведомо не может иметь предела при $k \to \infty$. Но тогда из (5.13) и (5.14) следует, что величина t_{n_k} не имеет предела. Получили противоречие. Теорема 5.2 доказана.

Замечание 5.2. а) Замечание 5.1, б) показывает, что утверждения следствия 5.1 и теоремы 5.2 существенно отличаются друг от друга.

б) При предположениях теоремы 5.2 нельзя утверждать, что последовательность $\{s_k\}$ обязана быть сходящейся к нулю. Более того, множество предельных точек последовательности $\{s_k\}$ может совпасть со всей прямой. В качестве примера можно взять метод $T^* = (C, 1)$ и последовательность $\{s_k\}$ построить так, чтобы она была для «большинства» индексов k равна нулю и на очень редких местах принимала каждое рациональное значение с бесконечным повторением.

Из теоремы 5.2 легко получить, что справедлива

Теорема 5.3. *Пусть дан метод $T^* = \|a_{nm}\|$. Тогда если $\{s_k\}$ такова, что любая ее подпоследовательность $\{s_{k_i}\} = \{s'_i\}$ суммируема, то последовательность $\{s_k\}$ имеет только одну предельную точку и сходится.*

Допустим противное, т. е. найдутся две бесконечные последовательности $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ такие, что

$$p_0 < q_0 < p_1 < q_1 < \ldots, \quad |s_{p_k} - s_{q_k}| \geqslant h > 0 \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{5.15}$$

где h — некоторая фиксированная постоянная. Согласно условию любая подпоследовательность s_{k_i} T^*-суммируема и потому $\{\varepsilon_k (s_{p_k} - s_{q_k})\}$ T^*-суммируема при любых $\varepsilon_k = \pm 1$ *). Стало быть, в силу теоремы 5.2, найдется подпоследовательность k_j такая, что $s_{p_{k_j}} - s_{q_{k_j}} \to 0$ при $j \to \infty$. Но это противоречит (5.15), что и требовалось доказать.

Для регулярных методов T теорема 5.3 была доказана Баком (см. [1] и [4*]) другим методом. Результат Бака упоминается также в примерах к гл. 4.

Из теоремы 5.3 непосредственно вытекают следствия (Бак [1]).

Следствие 5.2. *Пусть последовательность $\{s_n\}$ суммируема регулярным методом T. Тогда, для того чтобы $\{s_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы каждая подпоследовательность $\{s_{n_i}\}$ была T-суммируема.*

Необходимость вытекает из регулярности метода T. Достаточность же следует из теоремы 5.3.

Следствие 5.3. *Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, если существует метод суммирования T^*, который суммирует каждый ряд вида*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=k_{i-1}+1}^{k_i} a_n \right\}$$

при любом выборе k_i.

Полезно отметить еще одно следствие, которое вытекает из теоремы 5.3.

Следствие 5.4. *Пусть T^* — некоторый метод суммирования, а s_k — некоторая расходящаяся последовательность. Тогда найдется подпоследовательность s_{k_i}, которая не суммируема T^*.*

Совершенно ясно, что это предложение более общо, чем теорема Штейнгауза (см. **4.4**, III), которая лишь утверждала, что для каждого регулярного метода T найдется последовательность из 0 и 1, не суммируемая методом T.

Естественно возникает вопрос о возможности перенесения теоремы 5.3 на случай функциональных последовательностей и рядов. Ясно, что если последовательность $s_k(x)$ $(x \in [0,\ 1])$ такова, что

---

*) Например, последовательности $s_{p_0}, s_{q_1}, \ldots, s_{p_{2n}}, s_{q_{2n+1}}, \ldots$ и $s_{q_0}, s_{p_1}, \ldots, s_{q_{2n}}, s_{p_{2n+1}}, \ldots$ T^*-суммируемы, и потому суммируема их разность, т. е. суммируема $\varepsilon_k (s_{p_k} - s_{q_k})$ при $\varepsilon_k = (-1)^k$. Совершенно так же проходит доказательство и для любых $\varepsilon_k = \pm 1$.

любая подпоследовательность $s_{k_i}(x)$ всюду на [0, 1] T-суммируема, то, согласно теореме 5.3, $\{s_k(x)\}$ сходится на [0, 1]. Допустим теперь, что $s_{k_i}(x)$ T^*-суммируема почти всюду на [0, 1], а исключительное множество (меры нуль) несуммируемости, вообще говоря, зависит от выбора k_i. Можно ли в этом случае утверждать, что $s_k(x)$ сходится почти всюду на [0, 1] или же на множестве положительной меры? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 5.4. *Существует ортогональный ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x) \qquad \left(\int_0^1 \varphi_i\varphi_j\,dx = \delta_{ij}\right), \tag{5.16}$$

который всюду на [0, 1] *расходится, и тем не менее любая его подпоследовательность частных сумм* (C, 1)*-суммируема почти всюду на* [0, 1].

В силу теоремы Меньшова ([31*], см. также [20*], стр. 195) существует расходящийся всюду на [0, 1] ортогональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \tag{5.16'}$$

для которого

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log n < \infty. \tag{5.17}$$

Мы можем считать, что $c_n \neq 0$ при всех n. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} c_n\varphi_n(x)\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\psi_k(x) \qquad (0 = n_0 < n_1 < \ldots),$$

где $\{n_i\}$ — произвольная возрастающая последовательность, и

$$A_k = \sqrt{\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} c_n^2} \quad \text{и} \quad \psi_k(x) = \frac{1}{A_k}\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} c_n\varphi_n(x).$$

Очевидно, что $\{\psi_k(x)\}$ — ортонормированная система на [0, 1]. Кроме того, в силу $n_k \geqslant k$ (см. еще (5.17))

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \log k = \sum_{k=1}^{\infty} \log k \left\{\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} c_n^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} c_n^2 \log n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \log k < \infty.$$

Но последнее условие, в силу другой теоремы Меньшова ([31*], [30*], см. также [20*], стр. 223), гарантирует (C, 1)-суммируемость почти всюду на [0, 1] ортогонального ряда $\sum A_k\psi_k(x)$, а так как последовательность $\{n_i\}$ была произвольной, то это и доказывает теорему 5.4.

Обобщением теоремы 5.3 на случай методов T и ограниченных последовательностей является следующий результат Агнью [10] (этот результат упоминался в примерах к гл. 4):

Теорема 5.5. *Если даны метод T и ограниченная последовательность $\{s_k\}$, то найдется такая подпоследовательность $\{s_{k_i}\}$, что множество предельных точек последовательности*

$$t_n = \sum_{i=0}^{\infty} s_{k_i} a_{ni}$$

содержит в себе множество предельных точек последовательности $\{s_n\}$.

В связи с теоремой 5.3 имеется еще ряд результатов. Чтобы их сформулировать, введем некоторые новые понятия. Пусть s_n — некоторая последовательность, а t — некоторая точка из (0, 1]. Каждое $t \in (0, 1]$ единственным образом можно представить в виде двоичной дроби $t = 0,\ a_1a_2\ \ldots$, где $a_{n_i} = 1$ и $a_{m_j} = 0$, причем n_i — бесконечная последовательность, а $\{n_i\} + \{m_j\} = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Сопоставим каждому такому t подпоследовательность s_{n_i}. Это соответствие между точками из (0, 1] и всеми подпоследовательностями из последовательности $\{s_n\}$ будет взаимно-однозначным. Осуществив это соответствие, мы можем говорить о множестве подпоследовательностей положительной меры, той или иной категории и т. д., подразумевая при этом метрическую или дескриптивную характеристику соответствующего множества на (0, 1].

Измеримое множество $E \subset (0, 1]$ называется *однородным*, если оно обладает свойством: как только $t = 0, a_1a_2 \ldots \in E$, так и любая другая точка, полученная изменением не более чем конечного числа a_i, также принадлежит E.

Лемма. *Всякое однородное множество E имеет меру* 0 *или 1.*

Допустим противное, т. е. $0 < mE < 1$. Раз $mE > 0$, то найдется двоично-иррациональная точка $t_0 \in E$, которая является точкой плотности множества E. Разделим (0, 1] на 2^n равных полуинтервалов и через Δ_n обозначим тот полуинтервал, который содержит t_0. В силу выбора точки t_0 мы имеем:

$$\frac{m\{E \cdot \Delta_n\}}{\frac{1}{2^n}} = 1 - \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Стало быть, $m\{E \cdot \Delta_n\} = \frac{1}{2^n} - \frac{\varepsilon_n}{2^n}$. Но множество E однородно, и потому

$$m\left\{E \cdot \left(0,\ \frac{1}{2^n}\right]\right\} = m\left\{E \cdot \left(\frac{1}{2^n},\ \frac{2}{2^n}\right]\right\} = \ldots = m\left\{E\left(\frac{2^n-1}{2^n},\ 1\right]\right\}.$$

Следовательно,

$$mE = 2^n\left(\frac{1}{2^n} - \frac{\varepsilon_n}{2^n}\right) = 1 - \varepsilon_n \to 1 \quad \text{при } n \to \infty,$$

что противоречит предположению $mE < 1$.

Теперь мы убедимся, что справедлива (Бак, Поллард [1])

Теорема 5.6. *Если последовательность s_n расходится, то и почти все ее подпоследовательности расходятся.*

Пусть $A \subset (0, 1]$ — множество всех точек, соответствующих сходящимся подпоследовательностям из s_n. Нам нужно доказать, что $mA = 0$. Так как сходимость последовательности не зависит от конечного числа членов этой последовательности, то множество A однородно, и потому $mA = 0$ или $mA = 1$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что случай $mA = 1$ невозможен. Если $mA = 1$, то найдется двоично-иррациональная точка $t_0 \in A$, что $1 - t_0 \in A$. Совершенно ясно, что точке $t_0 \in A$ соответствует бесконечная подпоследовательность $s_{n_k} \to \alpha$, а точке $1 - t_0 \in A$ — бесконечная подпоследовательность $s_{m_i} \to \beta$, при этом все n_k отличны от всех m_j и $\{n_k\} + \{m_j\} = 1, 2, 3, \ldots$ Это означает, что вся последовательность s_n разбивается на две подпоследовательности, сходящиеся соответственно к α и β. Так как s_n расходится, то $\alpha \neq \beta$. Пусть B_1 — множество из $(0,1]$, соответствующее всем подпоследовательностям из s_n, которые сходятся к α, а B_2 строится соответственно по подпоследовательностям, сходящимся к β. Очевидно, что $A = B_1 + B_2$, а так как $mA = 1$ и множества B_1, B_2 однородны, то хотя бы одно из них имеет меру 1. Пусть, например, $mB_1 = 1$. Но тогда найдется точка $t_0' \in B_1$ такая, что и $1 - t_0' \in B_1$, а это влечет то, что вся последовательность s_n разбивается на две подпоследовательности, сходящиеся к α. Стало быть, s_n сходится. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из теоремы 5.6 вытекает

Следствие 5.5. *Если последовательность s_n такова, что множество сходящихся ее подпоследовательностей имеет положительную меру* (*или полную меру*), *то s_n сходится.*

Такого же типа результат имеет место и для метода суммирования $(C, 1)$, т. е. справедлива (см. Бак, Поллард [1])

Теорема 5.7. Если почти все подпоследовательности из $\{s_n\}$ $(C, 1)$-суммируемы, то $\{s_n\}$ также $(C, 1)$-суммируема.

Обратно неверно, т. е. из $(C, 1)$-суммируемости последовательности s_n не вытекает $(C, 1)$-суммируемость почти всех подпоследовательностей из s_n (Бак, Поллард [1]).

По поводу ограниченных последовательностей те же авторы доказали, что справедлива

Теорема 5.8. *Ограниченная последовательность $\{s_n\}$ $(C, 1)$-суммируема тогда и только тогда, когда почти все ее подпоследовательности $(C, 1)$-суммируемы.*

По поводу обобщения теоремы Бака имеются еще результаты Кью и Питерсена (см. [24*], [25*]). Например, справедлива

Теорема 5.9. *Пусть T — некоторый метод суммирования. Тогда последовательность $\{s_n\}$ сходится, если множество T-суммируемых подпоследовательностей из $\{s_n\}$ имеет вторую категорию.*

Отметим, что по типу этот результат примыкает к теореме Хилла (см. **8.6**, II).

Из теорем 5.8 и 5.9 вытекает, например, что если ограниченная расходящаяся последовательность $\{s_n\}$ $(C, 1)$-суммируема, то множество $(C, 1)$-суммируемых подпоследовательностей имеет первую категорию и его мера равна 1.

§ 6. Суммируемость частичных рядов первого вида

Прежде чем перейти к изложению основного материала этого параграфа, мы сделаем некоторые замечания и введем определения, которые понадобятся не только в настоящем параграфе, но и ниже.

Из определений методов суммирования видно, что методы γ^* и T^*, вообще говоря, различны. В случае конечнострочных методов они сводятся друг к другу. В общем же случае формально всякий метод $T^* = \|a_{nm}\|$ сводится к методу $\gamma^* = \|B_{nm}\|$ с $\gamma_n = 0$, если положить $B_{nm} = \sum\limits_{k=m}^{\infty} a_{nk}$. Обратное неверно, так как если при некотором n_0 последовательность $B_{n_0, m}$ не имеет нулевого предела по m (кстати, предел для методов γ^{**} даже может и не существовать), то метод γ^* нельзя свести ни к какому методу T^*.

Так как результаты этого и нижеследующих параграфов относятся к суммированию рядов, то из приведенных ниже рассуждений легко заметить, что, доказав некоторое утверждение для методов γ^* (или для γ^{**}), мы можем это же доказательство перевести и на методы T^*. Обратный же ход от T^* к γ^* (тем более к γ^{**}) обязательно потребует новых дополнительных рассуждений, которые связаны с тем, что $\lim\limits_{m \to \infty} B_{nm}$ может не существовать, а если и существует, то может быть отличным от нуля.

В указанном выше смысле методы γ^* (тем более γ^{**}) шире методов T^*. Более того, методы $\gamma^*(\gamma^{**})$ значительно более удобны для изучения суммируемости *рядов*, что будет, в частности, видно из дальнейшего. Как правило, выкладки для методов T^* значительно удлиняются, из-за чего идея доказательства того или иного факта становится мало прозрачной из-за технических трудностей. Ввиду этого мы будем проводить рассуждения только для методов γ^{**} (или γ^*), опуская доказательство для методов T^*, хотя результаты будут сформулированы для методов γ^*, γ^{**} и T^*.

Теперь введем ряд определений.

Определение 6.1. Пусть функции $f_n(x)$ определены на множестве $E \subset [0, 1]$. Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{6.1}$$

называют *безусловно сходящимся по внешней мере на* E, если он при любом порядке членов сходится по внешней мере на E, т. е. если для всякого переставленного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{n_k}(x) \tag{6.2}$$

найдется такая почти всюду конечная функция $F(x)$, что для любого $\gamma > 0$

$$\lim_{N \to \infty} m_e E \left\{ \left| F(x) - \sum_{k=0}^{N} f_{n_k}(x) \right| > \gamma \right\} = 0.$$

Отметим, что введенное определение дано для любых функций $f_n(x)$, т. е. $f_n(x)$ могут быть измеримы, а могут быть и неизмеримы. Если в указанном определении все $f_n(x)$ измеримы на E, то мы говорим о *безусловной сходимости по мере.*

Далее, если все ряды вида (6.2) сходятся почти всюду на E, то мы говорим, что ряд (6.1) *безусловно сходится почти всюду на* E. В этом определении следует иметь в виду, что исключительное множество (меры нуль) точек расходимости ряда (6.2), вообще говоря, зависит от перестановки членов.

Нетрудно убедиться, что для безусловно сходящегося ряда функция $F(x)$ (с точностью до значений на множестве меры нуль) не зависит от перестановки членов ряда (см., например, [61*]).

Относительно таких рядов Орлич (см. [39*], а также [20*], стр. 42) доказал, что справедлива

Теорема 6.1. *Для того чтобы ряд* (6.1) *был безусловно сходящимся на* E *по внешней мере, необходимо и достаточно, чтобы всякий ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_{n_i}(x) \qquad (n_0 < n_1 < \ldots) \tag{6.3}$$

был сходящимся на E *по внешней мере.*

Правда, Орлич [39*] формулировал этот результат для измеримых функций, но доказательство ([20*], стр. 42) справедливо и для произвольных.

В той же работе (Орлич [39*]) доказана

Теорема 6.2. *Если функции* $f_n(x)$ *измеримы на* E *и ряд* (6.1) *безусловно сходится на* E *по мере, то почти всюду на* E

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^2(x) < \infty.$$

Определение 6.2. Пусть дан ряд (6.1). Тогда всякий ряд вида (6.3) мы будем называть *частичным рядом 1-го вида.*

Всякий же ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n f_n(x) \qquad (\delta_n = 0 \text{ или } 1) \tag{6.4}$$

мы будем называть *частичным рядом 2-го вида.*

Ясно, что с точки зрения сходимости частичные ряды (6.3) и (6.4) ведут себя одинаково. Что же касается суммируемости, то эти ряды существенно отличаются друг от друга. В настоящем параграфе речь будет идти о рядах вида (6.3).

Определение 6.3. Пусть $\gamma^{**} = \|B_{nm}\|$ — некоторый метод суммирования и

$$\sigma_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) B_{Nn} \qquad (N = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{6.5}$$

где равенство (6.5) понимается в смысле сходимости ряда по внешней мере на E к $\sigma_N(x)$. Мы говорим, что ряд (6.1) *γ^{**}-суммируем на E по внешней мере к $F(x)$*, если $\sigma_N(x)$ существуют и

$$\sigma_N(x) \Longrightarrow F(x).$$

Знак $\Longrightarrow$ означает сходимость по внешней мере на E. В дальнейшем $\sigma_N(x)$ мы будем называть *γ^{**}-средним* от ряда (6.1).

Если $f_n(x)$ измеримы, то мы говорим о *γ^{**}-суммируемости по мере.*

Если же $f_n(x)$ произвольны, но $\sigma_N(x) \to F(x)$ для почти всех (п. в.) $x \in E$, то мы говорим о *γ^{**}-суммируемости ряда* (6.1) *для п. в.* $x \in E$.

Отметим, что в последнем определении, хотя речь идет о сходимости п. в. $\sigma_N(x)$ к $F(x)$, тем не менее сами $\sigma_N(x)$ определяются с помощью сходимости по внешней мере (или по мере) рядов вида (6.5), а не в смысле сходимости п. в. рядов в (6.5) к $\sigma_N(x)$. *В силу этого условия на существование $\sigma_N(x)$ сведены до минимума.*

Если ряд (6.1) такой, что все его переставленные ряды (6.2) γ^{**}-суммируемы почти всюду на E (по мере на E), то мы говорим, что ряд (6.1) *безусловно γ^{**}-суммируем почти всюду на E* (по мере на E).

Совершенно аналогично даются определения суммируемости ряда (6.1) по внешней мере, по мере или почти всюду для методов T^*, или для регулярных методов Теплица T *).

Ради краткости доказательств мы будем иногда рассматривать измеримые функции и методы γ^*, хотя те же доказательства

*) Напомним, что ряд суммируем методом Теплица, если суммируемы частные суммы этого ряда.

(с некоторым добавлением) справедливы для методов γ^{**} и T^* при произвольных функциях, которые ограничены измеримыми функциями.

Докажем ряд вспомогательных утверждений (см. работы [60*] и [61*]).

Лемма 6.1. *Пусть дан метод суммирования* $\gamma^{**} = \|B_{nm}\|$ (*или метод* T^*). *Тогда найдется последовательность положительных чисел* η_k, *таких, что если члены ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \tag{6.6}$$

удовлетворяют неравенству

$$|u_k| \leqslant \eta_k \qquad (k \geqslant k_0),$$

то ряд (6.6) *сходится к числу* D *и, кроме того,* γ^{**}*-суммируем к* D.

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} B_{nm} = 1$ $(m = 0, 1, \ldots)$, то $|B_{nm}| \leqslant H_m$ для всех n. Положим $\eta_k = \frac{1}{(k+2)^2 H_k}$. Очевидно, что тогда ряд из η_k, а стало быть, ряд (6.6), абсолютно сходится. Положим

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = D$$

и покажем, что ряд (6.6) γ^{**}-суммируем к D. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем такое M, что $M \geqslant k_0$, $M \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ и $\sum\limits_{k=M+1}^{\infty} |u_k| < \varepsilon$. Тогда при n достаточно больших

$$\left|\sigma_n - \sum_{k=0}^{\infty} u_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k B_{nk} - \sum_{k=0}^{\infty} u_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{M} u_k (B_{nk} - 1)\right| +$$
$$+ \sum_{k=M+1}^{\infty} |u_k| |B_{nk}| + \sum_{k=M+1}^{\infty} |u_k| \leqslant \varepsilon + \sum_{k=M+1}^{\infty} \eta_k H_k + \varepsilon \leqslant 3\varepsilon,$$

что и доказывает лемму.

Почти очевидной является следующая

Лемма 6.2. *Пусть* $f_n(x) \Longrightarrow 0$ *на* E *и* $\varepsilon_n \downarrow 0$. *Тогда найдется множество* $E_1 \subset E$ *с* $m(E - E_1) = 0$ *и последовательность* $n_1 < n_2 < \ldots$ *такие, что при* $x_0 \in E_1$

$$|f_{n_k}(x_0)| < \varepsilon_k \quad \textit{для} \quad k \geqslant k_0(x_0).$$

Теперь докажем основную лемму этого параграфа (см. работу [62*]).

Лемма 6.3. *Пусть даны метод* $\gamma^{**} = \|B_{nm}\|$ (*или* T^*) *и ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \qquad (x \in [0, 1]), \tag{6.7}$$

который не сходится на $[0, 1]$ *по внешней мере. Тогда если* $f_{j_N}(x) \rightrightarrows 0$ *на* $[0, 1]$ *по некоторой подпоследовательности* j_N, *то из ряда* (6.7) *можно выделить частичный ряд* 1-*го вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{i_n}(x) \qquad (i_0 < i_1 < \ldots), \tag{6.8}$$

который не был бы γ^{**}-*суммируем* (T^*-*суммируем*) *на* $[0, 1]$ *по внешней мере.*

Если для некоторого частичного ряда вида (6.8) γ^{**}-средние не имеют смысла, то лемма доказана. Поэтому мы будем считать, что для любого частичного ряда от ряда (6.7) γ^{**}-средние имеют смысл. Далее, так как мы предполагаем, что каждая функция $f_i(x)$ ограничена измеримой и конечной п. в. на $[0, 1]$ функцией $F_i(x)$ то на основании теоремы Лузина, не ограничивая общности, мы можем считать $|f_i(x)| \leqslant A_i$ при $x \in [0, 1]$. Кроме того, если использовать леммы 6.1 и 6.2, из доказательства будет видно, что мы можем считать $f_{j_N}(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$. Положим $D_i = A_0 + \ldots + A_i$. По условию, ряд (6.7) не сходится по внешней мере на $[0, 1]$, и потому для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$

$$m_e E\left\{\left|\sum_{i=\alpha'_N}^{\beta'_N} f_i(x)\right| > \varepsilon\right\} > \delta \qquad (N = 0, 1, \ldots), \tag{6.9}$$

где $0 = \alpha'_0 < \beta'_0 < \alpha'_1 < \beta'_1 < \ldots$ — такие редкие последовательности, что вне всех отрезков $[\alpha'_N, \beta'_N]$ находится бесконечно много функций $f_{j_N}(x) \equiv 0$. Построим из членов ряда (6.7) частичный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_{k_i}(x) \tag{6.10}$$

таким образом, чтобы он содержал бесконечно много сумм

$$\sum_{i=\alpha'_{N_s}}^{\beta'_{N_s}} f_i(x) = \sum_{i=\alpha_s}^{\beta_s} f_i(x) \quad (\alpha_0 = 0)$$

и чтобы после каждой такой суммы стояло ровно $(\beta_s - \alpha_s + 1)$ функций $f_{j_N}(x) \equiv 0$. Ряд (6.8) будем строить индуктивным способом и при этом так, что он будет частичным рядом от (6.10). Построим последовательности $\{m_i\}$, $\{n_i\}$, $\{Q_i\}$, $\{N_i\}$, $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$, где $p_i = \alpha_{N_i}$, $q_i = \beta_{N_i}$.

Пусть $N_0 = 0$, $p_0 = \alpha_0 = 0$, $q_0 = \beta_0$ и $Q_0 = q_0$. Пусть уже подобраны $\{p_i\}$, $\{n_i\}$, $\{q_i\}$, $\{m_i\}$, $\{Q_i\}$ и $\{N_i\}$ для $0 \leqslant i \leqslant k-1$

и функция $f_{q_{k-1}}(x)$ стоит на месте Q_{k-1} в ряде (6.8). Берем теперь ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{M_j}(x) \tag{6.11}$$

такой, что до места Q_{k-1} идут уже выбранные функции f_n с номерами из $[p_i, q_i]$ при $0 \leqslant i \leqslant k-1$, а также нули между ними. Начиная с номера $Q_{k-1}+1$, в ряде (6.11) стоят в естественном порядке индексов все функции с номерами i из $[\alpha_j, \beta_j]$ при $j > N_{k-1}$. Находим $m_k > m_{k-1}$ такой, чтобы

$$|1 - B_{m_k, i}| < \frac{1}{2^k D_{q_{k-1}}} \quad \text{при } i \leqslant Q_{k-1}. \tag{6.12}$$

Далее, так как γ^{**}-средние от ряда (6.11) имеют смысл, то можно найти такую пару $(\alpha_{N_k}, \beta_{N_k}) = (p_k, q_k)$, что

$$m_e E\left\{\left|\sum_{i=p_k}^{q_k} f_i(x) B_{m_k, \tau_i}\right| > \frac{\varepsilon}{10^k}\right\} < \frac{\delta}{10^k} \qquad (p_k > q_{k-1}) \tag{6.13}$$

и

$$m_e E\left\{\left|\sum_{i=p_k}^{q_k} f_i(x)\left[B_{n_\alpha, \tau_i} - B_{m_\alpha, \tau_i}\right]\right| > \frac{\varepsilon}{10^k}\right\} < \frac{\delta}{10^k} \tag{6.14}$$
$$(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1),$$

где τ_i $(p_k \leqslant i \leqslant q_k)$ — это те номера, которые занимают функции $f_i(x)$ с $p_k \leqslant i \leqslant q_k$ в ряде (6.11). Поставим функции $f_i(x)$ $(p_k \leqslant i \leqslant q_k)$ на места n из $[\tau_{p_k}, \tau_{q_k}]$, положим $Q_k = \tau_{q_k}$, а на местах из $[Q_{k-1}+1, \tau_{p_k} - 1]$ расположим функции $f_{j_N}(x) \equiv 0$, т. е. заменим в ряде (6.11) все функции f_i с индексами i из $[\alpha_j, \beta_j]$ при $N_{k-1} < j < N_k$ нулями. После этого находим $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы

$$|1 - B_{n_k, i}| < \frac{1}{2^k D_{q_k}} \quad \text{при } i \leqslant Q_k. \tag{6.15}$$

Таким образом, ряд (6.8) полностью определен. Очевидно, что для этого ряда

$$\sigma_{n_k}(x) - \sigma_{m_k}(x) - \sum_{i=p_k}^{q_k} f_i(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=p_j}^{q_j} f_i\left[B_{n_k, \tau_i} - B_{m_k, \tau_i}\right] +$$
$$+ \sum_{i=p_k}^{q_k} f_i\left[B_{n_k, \tau_i} - 1\right] - \sum_{i=p_k}^{q_k} f_i B_{m_k, \tau_i} +$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{\infty} \sum_{i=p}^{q_i} f_i\left[B_{n_k, \tau_i} - B_{m_k, \tau_i}\right] = \sum_{i=1}^{4} S_i. \tag{6.16}$$

На основании (6.12) и (6.15) получим:

$$\left|S_1(x)\right| \leqslant \frac{2}{2^k D_{q_{k-1}}} \sum_{i=0}^{q_{k-1}} |f_i(x)| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}},$$

т. е. $S_1(x) \rightrightarrows 0$ при $k \to \infty$. На основании (6.15) имеем:

$$\left|S_2(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^k D_{q_k}} \sum_{i=p_k}^{q_k} |f_i(x)| \leqslant \frac{1}{2^k},$$

т. е. $S_2(x) \rightrightarrows 0$ при $k \to \infty$. В силу (6.13) $S_3(x) \rightrightarrows 0$ при $k \to \infty$. Определим множества

$$M_{jk} = E\left\{\left|\sum_{i=p_j}^{q_j} f_i(x)\left[B_{n_k, \tau_i} - B_{m_k, \tau_i}\right]\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{10^j}\right\} \text{ и } M_k = \prod_{j=k+1}^{\infty} M_{jk}.$$

Ясно, что $m_e C M_{jk} < \frac{\delta}{10^j}$ при $j > k$ (см. (6.14)). Поэтому $m_e C M_k \leqslant \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} m_e C M_{jk} < \frac{\delta}{10^k}$ и, стало быть, внутренняя мера $m_i M_k > 1 - \frac{\delta}{10^k}$. Если $x_0 \in M_k$, то

$$\left|\sum_{j=k+1}^{\infty} \sum_{i=p_j}^{q_j} f_i(x_0)\left[B_{n_k, \tau_i} - B_{m_k, \tau_i}\right]\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{10^k}.$$

Отсюда вытекает, что

$$m_e E\left\{|S_4| > \frac{\varepsilon}{10^k}\right\} < \frac{\delta}{10^k},$$

т. е. $S_4 \rightrightarrows 0$ при $k \to \infty$. В итоге $S_i \rightrightarrows 0$ при всех $i = 1, 2, 3, 4$, и потому (см. (6.16))

$$\sigma_{n_k}(x) - \sigma_{m_k}(x) - \sum_{i=p_k}^{q_k} f_i(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{при } k \to \infty. \tag{6.17}$$

Но $p_k = \alpha_{N_k}$, $q_k = \beta_{N_k}$, и потому (см. (6.9))

$$\sum_{i=p_k}^{q_k} f_i(x) \not\rightrightarrows 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

а это значит (см. (6.17)), что и $\sigma_{n_k}(x) - \sigma_{m_k}(x) \not\rightrightarrows 0$ при $k \to \infty$. Из последнего вытекает, что последовательность $\sigma_n(x)$ не может быть сходящейся по внешней мере на [0, 1]. Лемма доказана.

Теперь докажем, что справедлива (см. работу [62*])

Теорема 6.3. *Пусть γ^{**} (T^*) — некоторый метод суммирования. Тогда если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \qquad (x \in [0,\ 1]) \tag{6.18}$$

таков, что любой его частичный ряд 1-*го вида* γ^{**}-*суммируем* (T^*-*суммируем*) *на* $[0,\ 1]$ *по внешней мере, то*

$$\psi_n(x) = f(x) + \eta_n(x), \tag{6.19}$$

где $f(x)$ — *конечная функция на* $[0,\ 1]$, *а ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x)$$

безусловно сходится на $[0,\ 1]$ *по внешней мере. При этом* $f(x) \equiv 0$, *если метод* γ^{**} (T^*) *не суммирует ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1. \tag{6.20}$$

Доказательство. Так же как в лемме 6.3, мы можем, не ограничивая общности, считать, что $|\psi_n(x)| \leqslant A_n$ при $x \in [0,\ 1]$. Положим $D_n = A_0 + \ldots + A_n$.

1) Сначала докажем, что $\psi_n(x) = f(x) + \eta_n(x)$, где $f(x)$ — конечная функция на $[0,\ 1]$, и $\eta_n(x) \Longrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Допустим противное, т. е. для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$

$$m_e E\left\{ |\psi_{\alpha_k}(x) - \psi_{\beta_k}(x)| > \varepsilon \right\} > \delta, \tag{6.21}$$

где $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots$ Из системы функций $\{\psi_n\}$ выбросим все функции, у которых $n \in (\alpha_k,\ \beta_k)$, и оставшееся множество функций обозначим через $\{\overline{\psi}_n\}$. Из системы $\{\overline{\psi}_n\}$ индуктивно построим два частичных ряда от (6.18) так, что в одном из них опущено бесконечно много функций $\psi_{\beta_{q_i}}$, а в другом $\psi_{\alpha_{q_i}}$. Пусть уже построены $\{n_i\}$, $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ для $i = 1,\ \ldots,\ k-1$ так, что p_i означает место, на котором стоит функция $\psi_{\alpha_{q_i}}$ или $\psi_{\beta_{q_i}}$. Образуем два вспомогательных ряда из системы $\{\overline{\psi}_n\}$, где в первый раз выброшены функции $\psi_{\beta_{q_i}}$ при $i = 1,\ \ldots,\ k-1$, а в другой раз функции $\psi_{\alpha_{q_i}}$ при $i = 1,\ \ldots,\ k-1$ и функция $f_0(x)$ *). Так как γ^{**}-средние имеют смысл от каждого

*) Во втором случае дополнительно выбрасывается функция $f_0(x)$ для того, чтобы в обоих вспомогательных рядах функции ψ_{α_τ} и ψ_{β_τ} стояли на одном и том же месте для каждого $\tau > q_{k-1}$.

частичного ряда, то найдутся такие $p_k > p_{k-1}$ и $q_k > q_{k-1}$, что для $j \leqslant k-1$

$$m_e E\left\{\left|\psi_{\alpha_{q_k}} B_{n_j, p_k}\right| > \frac{1}{10^k}\right\} < \frac{1}{10^k}, \quad m_e E\left\{\left|\psi_{\beta_{q_k}} B_{n_j, p_k}\right| > \frac{1}{10^k}\right\} < \frac{1}{10^k}, \tag{6.22}$$

где p_k — общий номер места, на котором стоит функция $\psi_{\alpha_{q_k}}$ (функция $\psi_{\beta_{q_k}}$) в первом (соответственно во втором) вспомогательном ряде. После этого находим n_k такой, что

$$|1 - B_{n_k, i}| < \frac{1}{2^k D_{\beta_{q_k}}} \quad \text{при } i \leqslant p_k. \tag{6.23}$$

Пусть $\sigma'_n(x)$ $(\sigma''_n(x))$ суть γ^{**}-средние ряда, образованного по системе $\{\overline{\psi}_n\}$, из которой выброшены функции $\psi_{\beta_{q_i}}$ (соответственно $\psi_{\alpha_{q_i}}$) для $i = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что

$$\sigma'_{n_k} - \sigma''_{n_k} = \sum_{i=1}^{k} (\psi_{\alpha_{q_i}} - \psi_{\beta_{q_i}}) B_{n_k, p_i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (\psi_{\alpha_{q_i}} - \psi_{\beta_{q_i}}) B_{n_k, p_i} = S_1 + S_2. \tag{6.24}$$

Из (6.23) вытекает, что

$$\left|S_1 - \sum_{i=1}^{k} (\psi_{\alpha_{q_i}} - \psi_{\beta_{q_i}})\right| \leqslant \frac{1}{2^k D_{\beta_{q_k}}} \sum_{i=1}^{k} \left|\psi_{\alpha_{q_i}} - \psi_{\beta_{q_i}}\right| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{6.25}$$

На основании (6.22) (см. оценку S_4 в лемме 6.3) имеем:

$$S_2(x) \Rightarrow 0 \quad \text{при } k \to \infty. \tag{6.26}$$

Но согласно условию теоремы, $\sigma'_{n_k}(x)$ и $\sigma''_{n_k}(x)$ сходятся по внешней мере, и потому (см. (6.24) — (6.26)) при $k \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{k} (\psi_{\alpha_{q_i}} - \psi_{\beta_{q_i}}) \Rightarrow F(x), \text{ т. е. } \psi_{\alpha_{q_i}}(x) - \psi_{\beta_{q_i}}(x) \Rightarrow 0,$$

что противоречит (6.21).

2) Предположим, что метод γ^{**} суммирует ряд (6.20). Тогда любой частичный ряд от ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\psi_n(x) - f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x), \quad \text{где } \eta_n(x) \Rightarrow 0, \tag{6.27}$$

γ^{**}-суммируем по внешней мере на [0, 1]. Из леммы 6.3 вытекает (в силу $\eta_n \Rightarrow 0$), что любой частичный ряд от ряда (6.27) обязан сходиться на [0, 1] по внешней мере, так как в противном случае нашелся бы частичный подряд, не суммируемый методом γ^{**}. Таким образом, в случае 2) каждый частичный ряд от ряда (6.27) сходится по внешней мере на [0, 1], и потому (в силу теоремы 6.1) ряд (6.27) безусловно сходится по внешней мере на [0, 1].

3) Метод γ^{**} не суммирует ряд (6.20). В силу пункта 1) $\eta_n(x) \Longrightarrow 0$. Совершенно ясно, что тогда можно найти так быстро возрастающую последовательность $\{n_k\}$, чтобы ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta_{n_k}(x)$$

был γ^{**}-суммируемым на [0, 1] по внешней мере, а тогда, согласно условию теоремы, и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\psi_{n_k}(x) - \eta_{n_k}(x)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f(x)$$

будет γ^{**}-суммируемым на [0, 1] по внешней мере, что возможно, (в случае 3)) лишь когда $f(x) = 0$ п. в. на [0, 1]. Так как множества меры нуль не оказывают никакого влияния на сходимость рядов по мере, то мы можем считать, что $f(x) \equiv 0$ на [0, 1]. Таким образом, $\psi_n(x) = \eta_n(x)$, где $\eta_n(x) \Longrightarrow 0$, и потому (см. рассуждения в конце пункта 2)) ряд из $\eta_n(x)$ безусловно сходится на [0, 1] по внешней мере. Теорема доказана.

Из теоремы 6.3, используя теорему 6.2, получаем следующую теорему:

Теорема 6.3′. *Если члены ряда* (6.18) *являются измеримыми функциями, то при предположениях теоремы* 6.3 *еще можно утверждать, что*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n^2(x) < \infty \quad \textit{для почти всех } x \in [0, 1].$$

Из предыдущих результатов вытекает

Теорема 6.4. *Если тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(kx + \varphi_k) \quad (6.28)$$

таков, что любой его частичный ряд первого вида γ^{**}-суммируем (T^*-суммируем) по мере на множестве $E \subset [0, 2\pi]$ с $mE > 0$, то ряд (6.28) *безусловно сходится по мере на* $[0, 2\pi]$ *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 < \infty. \quad (6.29)$$

Доказательство. Нам достаточно показать, что справедливо (6.29). В силу теоремы 6.3 имеем:

$$\rho_k \cos(kx + \varphi_k) = f(x) + \eta_k(x), \quad (6.30)$$

где $f(x)$ — конечная измеримая функция, а $\eta_k(x) \rightrightarrows 0$ на E. Сначала докажем, что $f(x)$ эквивалентна нулю на E. Допустим противное, т. е., например, $f(x) > 0$ при $x \in E_1 \subset E$, где $mE_1 > 0$. Рассмотрим два случая:

Случай I. $\rho_{k_i} \leqslant C$ (C — постоянная), где $\{k_i\}$ — некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. Так как $\eta_{k_i}(x) \rightrightarrows 0$ на E_1, то из $\{k_i\}$ можно выделить подпоследовательность $\{n_j\}$ такую, что $\eta_{n_j}(x) \to 0$ п. в. на E_1. Но тогда, в силу теорем Лузина и Егорова, мы можем найти замкнутое множество $P \subset E$, $mP > 0$ такое, что $f(x)$ и $\eta_{n_j}(x)$ непрерывны на P и $\eta_{n_j}(x)$ равномерно сходится к нулю на P. Поэтому (см. (6.30))

$$\rho_{n_j} \int\limits_P \cos(n_j x + \varphi_{n_j})\, dx = \int\limits_P f(x)\, dx + \int\limits_P \eta_{n_j}(x)\, dx = \int\limits_P f(x)\, dx + \varepsilon_j, \qquad (6.31)$$

где $\varepsilon_j \to 0$ при $j \to \infty$. В то же время при $j \to \infty$

$$\left| \rho_{n_j} \int\limits_P \cos(n_j x + \varphi_{n_j})\, dx \right| \leqslant C \left\{ \left| \int\limits_P \cos n_j x\, dx \right| + \left| \int\limits_P \sin n_j x\, dx \right| \right\} \to 0$$

в силу того, что коэффициенты Фурье характеристической функции множества P стремятся к нулю. Но тогда из (6.31) вытекает, что $\int\limits_P f\, dx = 0$; это невозможно, ибо $mP > 0$ и $f > 0$ на P.

Случай II. $\rho_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Так как $f(x)$ конечна и измерима, а $\eta_k(x) \rightrightarrows 0$ на E, то, как и в случае I, найдется совершенное множество $P \subset E$, $mP > 0$, и последовательность $\{n_j\}$ такие, что f и η_{n_j} непрерывны на P и $\eta_{n_j}(x)$ равномерно сходится к нулю на P. Поэтому (см. (6.30))

$$\rho_{n_j}^2 \int\limits_P \cos^2(n_j x + \varphi_{n_j})\, dx = \int\limits_P f^2(x)\, dx + \delta_j, \qquad (6.32)$$

где $\delta_j \to 0$ при $j \to \infty$. Но хорошо известно (см., например, [16*], стр. 134), что при $n \to \infty$

$$\int\limits_P \cos^2(nx + \varphi_n)\, dx \to \frac{1}{2} mP > 0, \qquad (6.33)$$

и потому (см. (6.32)), учитывая $\rho_k \to \infty$, имеем:

$$\int\limits_P f^2(x)\, dx = \lim_{j \to \infty} \rho_{n_j} \int\limits_P \cos^2(n_j x + \varphi_{n_j})\, dx = \infty,$$

что противоречит непрерывности $f(x)$ на P.

Далее, так как множества меры нуль не влияют на сходимость по мере, мы можем считать, что $f(x) \equiv 0$ на E. Стало быть, на основании теоремы 6.3' мы получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \cos^2(kx+\varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^2(x) < \infty \quad \text{для п. в. } x \in E. \tag{6.34}$$

В силу теоремы Егорова мы можем считать, что ряд (6.34) сходится равномерно на некотором $P \subset E$, $mP > 0$. Но тогда (см. 6.34))

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \cos^2(kx+\varphi_k) \leqslant D \quad \text{при } x \in P,$$

где D — постоянная. Из последнего неравенства вытекает

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \int_P \cos^2(kx+\varphi_k)\,dx \leqslant DmP. \tag{6.35}$$

Принимая во внимание (6.33), мы видим, что неравенство (6.29) вытекает из (6.35). Теорема доказана.

Отметим еще одно утверждение (см. работу [62*])

Теорема 6.5. *Если числовой ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *таков, что любой его частичный ряд первого вида суммируем некоторым методом* γ^{**} *(или* T^**), то* $u_k = A + \eta_k$, *где* A *— постоянная, а ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \tag{6.36}$$

абсолютно сходится. При этом число A *может быть отличным от нуля лишь в случае, когда метод* $\gamma^{**}(T^*)$ *суммирует ряд* (6.20).

Теорема 6.5 непосредственно вытекает из теоремы 6.3, если положить $\psi_k(x) = u_k$ при $x \in [0, 1]$ и учесть, что в этом случае сходимость по мере эквивалентна обычной сходимости числового ряда.

Теорема 6.5 допускает обобщение (см. работу [62*]), на доказательстве которого мы не будем останавливаться.

Теорема 6.5'. *Пусть* $\gamma^{**}(T^*)$ *— некоторый метод суммирования. Тогда если числовой ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *таков, что для любого его частичного ряда первого вида* γ^{**}*-средние* (T^**-средние*) *имеют смысл и ограничены, то* $u_k = A + \eta_k$, *где* A *— постоянная, а ряд* (6.36) *абсолютно сходится. При этом постоянная* $A = 0$, *если* γ^{**}*-средние* (T^**-средние*) *от ряда* (6.20) *не имеют смысла или же, если имеют смысл, то не ограничены.*

Следует заметить, что в условиях теоремы 6.5′ *не предполагается равномерная ограниченность всех* γ^{**}-средних независимо от выбора частичных рядов.

Далее, в теореме 6.5′, в отличие от теоремы 6.5, нельзя утверждать, что $A = 0$, если метод $\gamma^{**}(T^*)$ не суммирует ряд (6.20), ибо возможен случай, когда $A \neq 0$, и тем не менее метод γ^{**} не суммирует ряд (6.20).

В связи с только что доказанными теоремами возникает вопрос о возможности переноса их со случая γ^{**}-суммируемости по мере на случай γ^{**}-суммируемости п. в. на $[0, 1]$. Точнее, если ряд таков, что любой его частичный ряд первого вида γ^{**}-суммируем п. в. на $[0, 1]$, то можем ли мы утверждать, что этот ряд с точностью до общего постоянного члена является п. в. сходящимся?

На поставленный вопрос ответ дает (см. работу [62*])

Теорема 6.6. *Существует ортогональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{6.37}$$

($c_n\varphi_n(x) \to 0$ *на* $[0, 1]$), *который всюду на* $[0, 1]$ *расходится, и тем не менее любой его частичный ряд первого вида* $(C, 1)$-*суммируем п. в. на* $[0, 1]$.

В качестве ряда (6.37) можно взять ряд (5.16′) из теоремы 5.4. Он всюду расходится, и кроме того, всякий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{n_k} \varphi_{n_k}(x) \qquad (n_0 < n_1 < n_2 < \ldots) \tag{6.38}$$

на основании соотношения $n_k \geqslant k$ удовлетворяет условию (см. (5.17))

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_{n_k}^2 \log k \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} c_{n_k}^2 \log n_k \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 \log n < \infty,$$

что в силу теоремы Меньшова гарантирует $(C, 1)$-суммируемость п. в. на $[0, 1]$ ортогонального ряда (6.38). Теорема доказана.

§ 7. Суммируемость частичных рядов второго вида

Предварительно докажем, что справедлива

Лемма 7.1. *Пусть дан метод суммирования* $\gamma^{**} = \| B_{nm} \|$ *и ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \qquad (x \in E) \tag{7.1}$$

таков, что γ^{**}-*средние имеют смысл для каждого его частичного ряда 2-го вида* *). *Тогда если* $\{p'_k, q'_k\}$ *последовательность*

*) См. определение таких частичных рядов в § 6.

пар $p'_1 < q'_1 < p'_2 < q'_2 < \ldots$, то из нее можно выделить подпоследовательность пар $\{p_k, q_k\}$ такую, что для некоторого частичного ряда 2-го вида

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i f_i(x) \qquad (\delta_i = 0 \text{ или } 1) \tag{7.2}$$

и для некоторых n_k, m_k на множестве E

$$\sigma_{n_k}(x) - \sigma_{m_k}(x) - \sum_{i=p_k}^{q_k} f_i(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{7.3}$$

где через $\sigma_n(x)$ обозначены γ^{**}-средние ряда (7.2).

Доказательство. Так как мы предполагаем, что каждая $f_i(x)$ ограничена измеримой функцией, то, как будет видно из нижеследующих рассуждений, не ограничивая общности, можно (на основании теоремы Лузина) считать, что $|f_i(x)| \leqslant A_i$ при $x \in E$. Положим $D_j = A_0 + \ldots + A_j$. Ряд (7.2) мы будем строить рекуррентным образом так, чтобы $\delta_i = 0$ для всех i, за исключением i, принадлежащих отрезкам $[p_k, q_k]$, которые специальным образом выбраны из последовательности отрезков $[p'_k, q'_k]$ при $k = 1, 2, \ldots$ Положим $m_0 = n_0 = p_0 = q_0 = 0$. Пусть уже подобраны $\{m_j\}$, $\{n_j\}$ и $\{p_j, q_j\}$ (из $\{p'_i, q'_i\}$) для $j = 0, \ldots, k-1$, и δ_i при $i \leqslant q_{k-1}$ таково, что $\delta_i = 1$ при $i \in [p_j, q_j]$ для $0 \leqslant j \leqslant k-1$ и $\delta_i = 0$ для остальных $i \leqslant q_{k-1}$. Находим $m_k > n_{k-1}$ такой, что

$$|1 - B_{m_k, i}| < \frac{1}{2^k D_{q_{k-1}}} \quad \text{при} \quad i \leqslant q_{k-1} \qquad (k \geqslant 1). \tag{7.4}$$

По условию ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=p'_j}^{q'_j} f_i(x) B_{ni} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

сходится на E по внешней мере, и поэтому можно найти из $[p'_j, q'_j]$ такую далекую пару $[p_k, q_k]$ с $p_k > q_{k-1}$, что

$$m_e E\left\{\left|\sum_{i=p_k}^{q_k} f_i(x)\left[B_{n_\alpha, i} - B_{m_\alpha, i}\right]\right| > \frac{1}{10^k}\right\} < \frac{1}{10^k} \tag{7.5}$$
$$(\alpha = 0, 1, \ldots, k-1)$$

и

$$m_e E\left\{\left|\sum_{i=p_k}^{q_k} f_i(x) B_{m_k, i}\right| > \frac{1}{10^k}\right\} < \frac{1}{10^k}. \tag{7.6}$$

После этого находим $n_k > m_k$ такой, чтобы

$$|1 - B_{n_k, i}| < \frac{1}{2^k D_{q_k}} \quad \text{при} \quad i \leqslant q_k. \tag{7.7}$$

Теперь полагаем $\delta_i = 0$ при $q_{k-1} < i < q_k$ и $\delta_i = 1$ при $i \in [p_k, q_k]$. Таким образом, ряд (7.2) полностью определен. Очевидно, что для этого ряда при $k > 1$

$$\sigma_{n_k}(x) - \sigma_{m_k}(x) - \sum_{i=p_k}^{q_k} f_i(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=p_j}^{q_j} f_i(x)[B_{n_k, i} - B_{m_k, i}] +$$
$$+ \sum_{i=p_k}^{q_k} f_i(x)[B_{n_k, i} - 1] - \sum_{i=p_k}^{q_k} f_i(x) B_{m_k, i} +$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{\infty} \sum_{i=p_j}^{q_j} f_i(x)[B_{n_k, i} - B_{m_k, i}] = \sum_{\tau=1}^{4} S_\tau(x). \tag{7.8}$$

Из (7.4) и (7.7) вытекает, что при всех $x \in E$

$$|S_1(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=p_j}^{q_j} A_i \frac{2}{2^k D_{q_{k-1}}} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}},$$

т. е. $S_1(x) \rightrightarrows 0$ на E при $k \to \infty$. Из (7.7) имеем:

$$\left| S_2(x) \right| \leqslant \sum_{i=p_k}^{q_k} A_i \frac{1}{2^k D_{q_k}} \leqslant \frac{1}{2^k} \quad \text{при} \quad x \in E,$$

т. е. $S_2(x) \rightrightarrows 0$ на E при $k \to \infty$. Учитывая (7.6), получаем $S_3(x) \rightrightarrows 0$ на E при $k \to \infty$. Что касается S_4, то на основании (7.5) (рассуждая так же, как в лемме 6.3 при оценке S_4) получаем $S_4(x) \rightrightarrows 0$ на E. Стало быть, $S_\tau(x) \rightrightarrows 0$ на E при $\tau = 1, 2, 3, 4$, и потому (см. (7.8)) соотношение (7.3) справедливо, что и требовалось доказать.

Из леммы 7.1 непосредственно вытекает (см. работу [62*])

Теорема 7.1. *Если $\gamma^{**} = \|B_{nm}\|$ — метод суммирования, а ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \qquad (x \in E) \tag{7.9}$$

таков, что любой его частичный ряд 2-го вида γ^{**}-суммируем на E по внешней мере, то ряд (7.9) безусловно сходится на E по внешней мере. Кроме того, если $f_i(x)$ измеримые функции на E, то

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i^2(x) < \infty \quad \text{п. в. на } E. \tag{7.10}$$

Действительно, в силу теорем 6.1 и 6.2 нам достаточно доказать, что любой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{n_k}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i f_i(x) \qquad (\delta_i = 1 \text{ при } i = n_k \text{ и } \delta_i = 0 \text{ при } i \neq n_k)$$

сходится на E по внешней мере *). Допустим противное, т. е. некоторый ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i f_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x) \tag{7.11}$$

не сходится на E по внешней мере. Тогда для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$

$$m_e E\left\{\left|\sum_{i=p'_k}^{q'_k} \psi_i(x)\right| > \varepsilon\right\} > \delta \qquad (p'_1 < q'_1 < p'_2 < q'_2 < \ldots). \tag{7.12}$$

Стало быть, на основании леммы 7.1 найдется из (7.11) частичный ряд второго вида

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta'_i \psi_i(x) \qquad (\delta'_i = 0 \text{ или } 1) \tag{7.13}$$

такой, что для некоторых n_k, m_k на множестве E

$$\sigma_{n_k}(x) - \sigma_{m_k}(x) - \sum_{i=p_k}^{q_k} \psi_i(x) \Rightarrow 0 \quad \text{при } k \to \infty, \tag{7.14}$$

где $\sigma_n(x)$ есть γ^{**}-среднее ряда (7.13), а $\{p_k, q_k\}$ выбраны из $\{p'_j, q'_j\}$. Поэтому (см. (7.12) и (7.14))

$$\sigma_{n_k}(x) - \sigma_{m_k}(x) \not\Rightarrow 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

т. е. ряд (7.13) не является γ^{**}-суммируемым на E по внешней мере. Но тогда и ряд (см. (7.11) и (7.13))

$$\sum_{i=0}^{\infty} (\delta_i \delta'_i) f_i(x) \qquad (\delta_i \delta'_i = 0 \text{ или } 1)$$

не суммируем на E по внешней мере. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 7.2. *Пусть* $\gamma^{**} = \|B_{nm}\|$ — *некоторый метод суммирования и числовой ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i \tag{7.15}$$

*) Напомним, что с точки зрения сходимости частичные ряды 1-го и 2-го вида неразличимы.

таков, что любой его частичный ряд 2-го вида имеет ограниченные γ^{**}-средние. Тогда ряд (7.15) *абсолютно сходится.*

Допустим противное, т. е. найдутся такие δ_i ($\delta_i = 0$ или 1), что, например,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i c_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = \infty. \tag{7.16}$$

Стало быть, существуют пары $\{p'_k, q'_k\}$ такие, что

$$\sum_{i=p'_k}^{q'_k} a_i > k \qquad (p'_1 < q'_1 < p'_2 < q'_2 < \ldots). \tag{7.17}$$

Полагая в лемме 7.1 $f_i(x) = a_i$ при $x \in [0, 1]$, мы можем выделить из ряда (7.16) частичный ряд 2-го вида

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta'_i a_i \qquad (\delta'_i = 0 \text{ или } 1) \tag{7.18}$$

такой, что для некоторых n_k, m_k имеем:

$$\sigma_{n_k} - \sigma_{m_k} - \sum_{i=p_k}^{q_k} a_i \to 0 \quad \text{при } k \to \infty, \tag{7.19}$$

где σ суть γ^{**}-средние ряда (7.18), а $\{p_k, q_k\}$ выбраны из $\{p'_i, q'_i\}$. Из (7.17) и (7.19) вытекает, что γ^{**}-средние ряда (7.18) не ограничены. Но (см. (7.16) и (7.18))

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta'_i a_i = \sum_{i=0}^{\infty} (\delta'_i \delta_i)\, c_i \qquad (\delta'_i \delta_i = 0 \text{ или } 1),$$

и потому γ^{**}-средние некоторого частичного ряда 2-го вида от ряда (7.15) не ограничены. Получили противоречие. Теорема доказана.

Замечание 7.1. Следует иметь в виду, что в условиях теоремы 7.2 не предполагается равномерная ограниченность γ^{**}-средних независимо от выбора частичного ряда 2-го вида.

Замечание 7.2. Такого же типа утверждения, как теоремы 7.1 и 7.2, имеют место и для методов суммирования T^*.

Замечание 7.3. Сравнивая теоремы 7.1 и 7.2 с теоремами 6.3, 6.3′, 6.5, 6.5′, мы видим, что случай суммируемости частичных рядов 1-го вида отличен от случая суммируемости частичных рядов 2-го вида.

Из теоремы 7.2 (см. еще замечание 7.2) вытекает

Следствие 7.1. *Пусть* $\gamma^{**}(T^*)$ — *некоторый метод суммирования и числовой ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i \tag{7.20}$$

таков, что любой его частичный ряд 2-го вида γ^{**}*-суммируем* (T^**-суммируем*). *Тогда ряд* (7.20) *абсолютно сходится.*

Далее, так как всякий ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \delta_i c_i$ равен половине суммы некоторых двух рядов вида $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i c_i$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$, то из следствия 7.1 получаем

Следствие 7.2. *Если ряд* (7.20) *таков, что любой ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i c_i \qquad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

γ^{**}*-суммируем* (T^**-суммируем*), *то ряд* (7.20) *абсолютно сходится.*

Только что полученное утверждение для регулярных методов T впервые было доказано Орличем [40*].

Как и в § 6, возникает вопрос: если функциональный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \qquad (x \in E) \tag{7.21}$$

таков, что любой его частичный ряд 2-го вида γ^{**}-суммируем п. в. на E, то можем ли мы гарантировать безусловную (или обычную) сходимость п. в. на E ряда (7.21)? Ответ дает (см. работу [62*])

Теорема 7.3. *Существует ортогональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \qquad (x \in [0, 1]),$$

который всюду на $[0, 1]$ *расходится и тем не менее любой его частичный ряд 2-го вида* $(C, 1)$*-суммируем п. в. на* $[0, 1]$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.6.

§ 8. Безусловная суммируемость

Понятия безусловной сходимости и суммируемости по мере и почти всюду были даны в начале § 6. Там же отмечалось *преимущество* методов γ^{**} при исследовании суммируемости рядов.

Хотя результаты этого параграфа мы будем формулировать и доказывать для *измеримых* функций, тем не менее нижеследующие рассуждения, как правило, проходят (с некоторым добавлением) для *произвольных* функций (см. об этом работы [61*], [62*]).

Отметим еще, что, как и в предыдущих параграфах, существование γ^{**}-средних или T^*-средних понимается не в смысле *сходимости почти всюду* соответствующих рядов, а в смысле *сходи-*

мости по мере (по внешней мере) *). Этот факт значительно ослабляет условия, которые возникают в связи с существованием γ^{**}-средних или T^*-средних.

Что касается истории излагаемого вопроса, то читатель сможет найти ее во введении к работе [60*].

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые определения.

Определение 8.1. Пусть ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \qquad (x \in E) \tag{8.1}$$

разбит на некоторое конечное число частичных рядов 1-го вида **)

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{n_k^{(p)}}(x) \qquad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ M), \tag{8.2}$$

где $n_0^{(p)} < n_1^{(p)} < n_2^{(p)} < \ldots$ Возьмем из (8.2) частичный ряд при $p=0$ и «разбавим» его членами всех остальных частичных рядов (8.2) при $p=1, \ldots, M$ так, чтобы в новом ряде

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_{q_i}(x) \tag{8.3}$$

члены любого частичного ряда (8.2) шли в естественном порядке, т. е. если $n_{k_2}^{(p)} > n_{k_1}^{(p)}$, то в ряде (8.3) функция $f_{n_{k_2}^{(p)}}$ стоит правее функции $f_{n_{k_1}^{(p)}}$. В этом случае мы говорим, что ряд (8.3) получен из ряда (8.1) *слабой перестановкой* членов в ряде (8.1) или что ряд (8.3) — *слабо переставленный ряд* (8.1).

Определение 8.2. Ряд (8.1) называется *слабо безусловно сходящимся* почти всюду (по мере) на E, если любой его слабо переставленный ряд сходится почти всюду (соответственно по мере)на E.

Если в данном определении *сходимость* заменена на *суммируемость* методом γ^{**} или T^*, то мы говорим о *слабой безусловной суммируемости* почти всюду (по мере) на E методом γ^{**}или T^*.

Полезно отметить, что на основании результата С. Б. Стечкина [53*] в работе [59*] доказано, что существует на $[0, 2\pi]$ функция с весьма хорошими дифференциальными свойствами, тригонометрический ряд Фурье которой (а также его сопряженный ряд) абсолютно расходится всюду на всей прямой и тем не менее этот ряд безусловно сходится почти всюду на всей прямой. Указанный факт показывает, что безусловная сходимость п. в. весьма существенно отличается от абсолютной сходимости.

---

*) Там, где существование средних понимается не в смысле сходимости по мере, мы будем особо оговаривать.

**) См. определение частичных рядов в § 6.

Замечание 8.1. Почти очевидным является следующий факт (см. лемму 4 из [60*]): *функциональный ряд* (8.1) *слабо безусловно сходится почти всюду* (*по мере*) *на* E *тогда и только тогда, когда всякий его частичный ряд сходится почти всюду* (*по мере*) *на* E.

Из теоремы 6.1 вытекает, что всякий ряд, слабо *безусловно* сходящийся по мере, является *безусловно* сходящимся по мере.

Лемма 8.1. *Если ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \qquad (x \in A) \tag{8.4}$$

расходится в каждой точке множества A ($mA = \tau > 0$), *а числовая последовательность* $|H_k| \to \infty$, *то можно найти такие* $k_i \to \infty$, *что ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} H_{k_i} f_i(x) \tag{8.5}$$

не сходится по мере на A *и расходится п. в. на* A.

В самом деле, в силу теоремы Лузина мы можем предполагать, что A — замкнутое множество, а $f_i(x)$ непрерывны на A. Положим $B_i = \sup\limits_{x \in A} |f_i(x)|$ и $E_i = E\{|f_i(x)| > 0\}$. Так как ряд (8.4) всюду на A расходится, то $A = \overline{\lim\limits_{i \to \infty}} E_i$. Найдем такие $\varepsilon_i \downarrow 0$, что, положив $E'_i = E\{|f_i(x)| \geqslant \varepsilon_i\}$, имеем:

$$mE'_i > mE_i - \frac{\tau}{10^{i+1}} \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{8.6}$$

Выбросим из A все множества $E\{\varepsilon_i > |f_i(x)| > 0\}$. Оставшееся множество обозначим через A_1. Ясно (см. (8.6)), что $mA_1 > \frac{\tau}{2}$.

Так как ряд (8.4) расходится, то, положив $s_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} f_i(x)$, мы будем иметь *):

$$\overline{\lim_{k \to \infty}}\, s_k(x) - \underline{\lim_{k \to \infty}}\, s_k(x) = \varepsilon(x) > 0 \qquad (x \in A_1). \tag{8.7}$$

Найдем конечную измеримую функцию $\eta(x)$, такую, что $0 < \eta(x) < \varepsilon(x)$ при $x \in A_1$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что A_1 совершенно, а $\eta(x)$ непрерывна на A_1 (в противном случае мы перешли бы к рассмотрению совершенного подмножества). Положим $\min\limits_{x \in A_1} \eta(x) = \eta$. В силу (8.7) можно для каждого $x_0 \in A_1$ найти

*) Если один (или оба) из пределов бесконечен, то полагается $\varepsilon(x) = \infty$.

такие $\alpha_1(x_0) < \beta_1(x_0) < \alpha_2(x_0) < \beta_2(x_0) < \ldots$, что

$$\left|\sum_{i=\alpha_p(x_0)}^{\beta_p(x_0)} f_i(x_0)\right| > \eta \qquad (p = 1, 2, \ldots). \tag{8.8}$$

В силу непрерывности $f_i(x)$ на A_1 из (8.8) вытекает, что

$$\left|\sum_{i=\alpha_p(x_0)}^{\beta_p(x_0)} f_i(x)\right| > \eta \quad \text{при} \quad x \in A_1(x_0 - \delta_{x_0},\ x_0 + \delta_{x_0}), \tag{8.9}$$

где δ_{x_0} — некоторое положительное число. Если p фиксировано, а x_0 пробегает множество A_1, то система окрестностей $(x_0 - \delta_{x_0},\ x_0 + \delta_{x_0})\, A_1$ (см. (8.9)) покрывает A_1, и потому можно выбрать конечное покрытие множества A_1. Стало быть, найдутся такие числа $\bar{\alpha}_p < \bar{\beta}_p$ $(\bar{\alpha}_p \geqslant p)$, что если $x_0 \in A_1$, то

$$\left|\sum_{i=\alpha}^{\beta} f_i(x_0)\right| > \eta \tag{8.10}$$

для некоторых α и β, причем $\bar{\alpha}_p \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \bar{\beta}_p$. Выберем из последовательности пар $\{\bar{\alpha}_p, \bar{\beta}_p\}$ подпоследовательность $\{\alpha_p, \beta_p\}$ такую, что $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots$

Строим теперь ряд (8.5). Берем k_1 таким, что $\varepsilon_1 H_{k_1} > 1$. Пусть определены $k_1, \ldots, k_{i-1}$. Находим $k_i > k_{i-1}$ так, что

$$\varepsilon_i |H_{k_i}| > 1 + \sum_{j=1}^{i-1} |H_{k_j}| B_j. \tag{8.11}$$

Но тогда (см. (8.10) и (8.11)), учитывая выбор $\{\alpha_p, \beta_p\}$, имеем *):

$$\left|\sum_{i=\alpha_p}^{\beta_p} f_i(x) H_{k_i}\right| > 1 \quad \text{при всех} \quad x \in A_1,$$

т. е. ряд (8.5) не сходится по мере на A_1. Расходимость же п. в. на A ряда (8.5), очевидно, вытекает из выбора E_i' и k_i. Доказательство леммы закончено.

Ниже нам понадобятся следующие утверждения (см. работы [61*], [62*]):

Лемма 8.2. *Пусть* $\gamma^{**} = \|B_{nm}\|$ — *метод суммирования и расходящийся по мере на* E *ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \qquad (x \in E,\ mE > 0) \tag{8.12}$$

---

*) Следует иметь в виду, что если $x_0 \in A_1$, то $f_i(x_0) = 0$ или же $|f_i(x_0)| \geqslant \varepsilon_i$.

таков, что $f_{p_i}(x) \to 0$ *п. в. на* E *по некоторой возрастающей последовательности* $\{p_i\}$. *Тогда члены ряда* (8.12) *можно так слабо переставить, чтобы вновь полученный ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_{q_i}(x) \tag{8.13}$$

не был γ^{**}*-суммируемым по мере на* E.

Мы можем предполагать, что γ^{**}-средние существуют от всех слабо переставленных рядов, так как в противном случае лемма 8.2 доказана.

Считая, что $f_{p_i}(x) \to 0$ п. в. на E достаточно быстро (в противном случае мы бы перешли к подпоследовательности (см. лемму 6.2)), на основании леммы 6.1 получаем, что ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_{p_i}(x) \tag{8.14}$$

при любом «разбавлении» нулями не чаще, чем через один член, сходится и γ^{**}-суммируется п. в. на E к функции $F(x)$. Обозначим через $\{p'_i\}$ возрастающую последовательность всех целых чисел, которые отличны от элементов $\{p_j\}$. Отметим, что ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_{p'_i}(x) \tag{8.15}$$

расходится по мере на E. Рассмотрим три случая:

1) Для некоторого n_0 $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} |B_{n_0, k}| = \infty$. Поскольку ряд (8.15) расходится по мере на E, то найдется множество $E_1 \subset E$, $mE_1 > 0$, такое, что ряд (8.15) расходится в каждой точке E_1. В силу леммы 8.1 можно найти такую быстро возрастающую последовательность $k_i > k_{i-1} + 1$, что ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_{p'_i}(x) B_{n_0, k_i}$$

не сходится по мере на E_1 (тем более на E). Разбавим ряд (8.14) всеми членами ряда (8.15) так, чтобы на местах k_i стояли функции $f_{p'_i}(x)$, а на остальных местах в порядке возрастания индексов стояли $f_{p_i}(x)$. Совершенно ясно, что так полученный ряд является слабо переставленным рядом от (8.12) и что для него γ^{**}-среднее $\sigma_{n_0}(x)$ не имеет смысла. Получили противоречие.

2) Для некоторого n_0 $0 < \overline{\lim\limits_{k \to \infty}} |B_{n_0, k}| < \infty$. Стало быть, найдется последовательность k'_i такая, что $\lim\limits_{i \to \infty} B_{n_0, k'_i} = C \neq 0$. В силу

теоремы Лузина можно найти совершенные множества

$$P_1 \subset \ldots \subset P_k \subset \ldots \subset E, \quad mP_k > mE - \frac{1}{k},$$

такие, что $f_{p'_i}(x)$ непрерывны на P_k. Положим

$$B_k = \sum_{i=0}^{k} \sup_{x \in P_k} \left| f_{p'_i}(x) \right|.$$

Из $\{k'_i\}$ выделим быстро возрастающую подпоследовательность $\{k_i\}$, такую, что

$$|C - B_{n_0, k_i}| < \frac{1}{2^i (1 + B_i)}. \tag{8.16}$$

Так же, как в пункте 1), образуем слабо переставленный ряд, в котором на местах k_i стоят функции $f_{p'_i}(x)$. Пусть этот ряд (8.13), а $\sigma_{n_0}(x)$ — его γ^{**}-среднее. Очевидно, что

$$C \sum_{i=0}^{\infty} f_{q_i}(x) - \sigma_{n_0}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (C - B_{n_0, i}) f_{q_i}(x) =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} C f_{p_i}(x) - \sum_{i=0}^{\infty} f_{p_i}(x) B_{n_0, \tau_i} +$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty} f_{p'_i}(x) (C - B_{n_0, k_i}) = S_1 + S_2 + S_3, \tag{8.17}$$

где τ_i — место функции $f_{p_i}(x)$ в ряде (8.13). Ряды S_1 и S_2 сходятся п. в. на E в силу выбора p_i. Что касается S_3, то из (8.16) для $x \in P_k$ имеем:

$$|S_3(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \left| f_{p'_i}(x) \right| \frac{1}{2^i (1 + B_i)} =$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} \left| f_{p'_i}(x) \right| \frac{1}{2^i (1 + B_i)} + \sum_{i=k}^{\infty} B_i \frac{1}{2^i (1 + B_i)} < \infty,$$

т. е. ряд S_3 абсолютно сходится п. в. на E. Итак, ряды S_1, S_2 и S_3 сходятся п. в. на E. Следовательно (см. (8.17)), ряд $\sum_{i=0}^{\infty} f_{q_i}(x)$ сходится по мере на E, ибо $C \neq 0$ и ряд, определяющий $\sigma_{n_0}(x)$, сходится по мере на E.

Ряд (8.13) расходится по мере на E, так как он образован из двух рядов, один из которых (8.14) сходится п. в. на E, а другой (8.15) расходится по мере на E. Получили противоречие.

3) $\lim\limits_{m\to\infty} B_{nm}=0$ $(n=0, 1, \ldots)$. В силу теоремы Лузина можно построить такие замкнутые множества

$$A_1 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots \subset E, \quad m(E-A_i)<\frac{1}{i},$$

что все функции $f_{p_i'}(x)$ непрерывны на A_k. Положим

$$D_k=1+\sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in A_k} \left| f_{p_i'}(x) \right|. \tag{8.18}$$

Индуктивно построим последовательности $\{n_i\}$, $\{m_i\}$ так, что если n_i, m_i определены для $i\leqslant k-1$, то находим $n_k>n_{k-1}$ такой, что

$$|1-B_{n_k, m_i}|<\frac{1}{2^k D_k} \quad \text{при} \quad i=0, 1, \ldots, k-1. \tag{8.19}$$

Далее находим $m_k>m_{k-1}+1$ так, что

$$|B_{n_i, m_k}|<\frac{1}{2^k D_k} \quad \text{при} \quad 0<i\leqslant k; \tag{8.20}$$

строим ряд (8.13) так, что на местах m_k стоят функции $f_{p_k'}(x)$, а на остальных местах — функции $f_{p_k}(x)$ в порядке возрастания p_k. Ясно, что если $\sigma_n(x)$ суть γ^{**}-средние от ряда (8.13), то для п. в. $x\in E$

$$\sigma_{n_k}(x)-\sum_{i=0}^{m_{k-1}} f_i(x)=o(1)+\sum_{i=0}^{\infty} f_{p_i'}(x) B_{n_k, m_i}-\sum_{i=0}^{k-1} f_{p_i'}(x)=$$
$$=o(1)+\sum_{i=0}^{k-1} f_{p_i'}(x)\left[B_{n_k, m_i}-1\right]+$$
$$+\sum_{i=k}^{\infty} f_{p_i'}(x) B_{n_k, m_i}=o(1)+S_1+S_2. \tag{8.21}$$

Но при $x\in A_1$ (см. (8.19))

$$|S_1(x)|\leqslant\sum_{i=0}^{k-1}\left|f_{p_i'}(x)\right|\frac{1}{2^k D_k}\leqslant\frac{1}{2^k}. \tag{8.22}$$

С другой стороны (см. (8.20)), при $x\in A_k$

$$|S_2(x)|\leqslant\sum_{i=k}^{\infty}\left|f_{p_i'}(x)\right|\left|B_{n_k, m_i}\right|\leqslant\sum_{i=k}^{\infty} D_i\frac{1}{2^i D_i}=\frac{1}{2^{k-1}}. \tag{8.23}$$

Из (8.21) — (8.23) вытекает, что п. в. на E

$$\sigma_{n_k}(x)-\sum_{i=0}^{k-1} f_{p_i'}(x)-F(x)=o(1) \quad \text{при} \quad k\to\infty, \tag{8.24}$$

ибо $A_k \to E_1 \subset E$ и $mE_1 = mE$. Так как ряд (8.15) расходится по мере на E, то из (8.24) вытекает, что $\sigma_{n_k}(x)$ не сходится по мере на E и, стало быть, ряд (8.13) не суммируется методом γ^{**} по мере на E.

Лемма 8.2 доказана.

Если понимать существование γ^{**}-средних в смысле *сходимости п. в.* рядов, которые определяют γ^{**}-средние, то справедлива

Лемма 8.2′. *Если ряд* (8.12) *расходится п. в. на E и $f_{p_i}(x) \to 0$ п. в. на E, то для всякого метода γ^{**} члены ряда* (8.12) *можно так слабо переставить, чтобы вновь полученный ряд не был γ^{**}-суммируемым в почти каждой точке $x \in E$.*

Доказательство проходит так же, как рассуждения в лемме 8.2, только слова «расходимость по мере» следует заменять словами «расходимость п. в.» и предполагать (иначе все доказано), что γ^{**}-средние существуют на некоторых подмножествах E положительной меры.

Замечание 8.2. Весьма важно иметь в виду, что лемма 8.2′ (в противоположность лемме 8.2) становится *неверной*, если в ней понимать существование γ^{**}-средних в смысле сходимости по мере соответствующих рядов (см. об этом еще теорему 8.3). Тем не менее справедливо нижеследующее утверждение, в котором существование γ^*-средних понимается в смысле *сходимости* по мере соответствующих рядов.

Лемма 8.3. *Если ряд* (8.12) *расходится п. в. на E и $f_{p_i}(x) \to 0$ п. в. на E, то для любого метода γ^* члены ряда* (8.12) *можно так слабо переставить, чтобы вновь полученный ряд* (8.13) *не являлся бы γ^*-суммируемым п. в. на E* *).

Действительно, если ряд (8.12) расходится по мере на E, то лемма 8.3 вытекает из пунктов 2) и 3) леммы 8.2. Поэтому мы можем предполагать, что ряд (8.12) сходится по мере на E. Дальнейшие рассуждения идут примерно так же, как в пункте 3) леммы 8.2. Так же определяем A_k и D_k и, кроме того, полагаем

$$F_k(x) = \sum_{i=k}^{\infty} f_{p'_i}(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{на} \quad E$$

согласно предположению. Индуктивно находим n_i, m_i так, что если n_i, m_i подобраны для $i \leqslant k-1$, то сначала находим $n_k > n_{k-1}$ такое, что

$$1 - B_{n_k},\ m_i \Big| < \frac{1}{2^k D_k} \text{ при } i \leqslant k-1,\ \gamma_{n_k} F_k(x) \to 0 \text{ п. в. на } E, \quad (8.25)$$

*) Это означает, что или γ^*-среднее $\sigma_n(x)$ от ряда (8.13) не имеет смысла на E при некотором n_0, или же, если они все имеют смысл, то $\sigma_n(x)$ является расходящейся п. в. на E.

где $\lim_{m\to\infty} B_{nm}=\gamma_n$, а $\lim_{n\to\infty}\gamma_n=0$, ибо нам дан метод γ^*. После этого находим $m_k > m_{k-1}+1$ таким, что

$$|B_{n_i, m_k}-\gamma_{n_i}| < \frac{1}{2^k D_k} \quad \text{при} \quad i \leqslant k. \tag{8.26}$$

Так же, как в пункте 3) леммы 8.2, строится ряд (8.13) и

$$\sigma_{n_k}(x)-\sum_{i=0}^{m_{k-1}} f_i(x)=o(1)+S_1(x)+S_2(x), \tag{8.27}$$

где $S_1(x)\to 0$ п. в. на E в силу (8.25). Для $S_2(x)$ имеем:

$$S_2(x)=\sum_{i=k}^{\infty} f_{p'_i}(x)\left[B_{n_k, m_i}-\gamma_{n_k}\right]+\gamma_{n_k}F_k(x)=U_1(x)+U_2(x), \tag{8.28}$$

где $U_2(x)\to 0$ п. в. на E в силу (8.25). Из (8.26) имеем:

$$|U_1(x)| \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} D_i \frac{1}{2^i D_i}=\frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{при} \quad x\in A_k,$$

т. е. $U_1(x)\to 0$ п. в. на E, и потому (см. (8.28) $S_2(x)\to 0$ п. в. на E. Стало быть (см. (8.27)), последовательность

$$\sigma_{n_k}(x)-\sum_{i=0}^{k-1} f_{p'_i}(x)$$

почти всюду на E сходится. Но ряд (8.15) п. в. на E расходится, и потому $\sigma_{n_k}(x)$ п. в. на E расходится, что и требовалось доказать.

Замечание 8.3. Доказанные утверждения (леммы 8.2 и 8.3) остаются справедливыми и для методов T^*. Отметим, что для методов T^* (в отличие от методов γ^{**}) не возникает никаких особых случаев, связанных с пониманием существования T^*-средних (см. замечание 8.2 и лемму 8.2′).

Из доказанных утверждений вытекают следующие теоремы (см. работы [61*], [62*]):

Теорема 8.1. *Если $f_{p_i}(x)\to 0$ п. в. на E и ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \qquad (x\in E,\ mE>0) \tag{8.29}$$

слабо безусловно γ^{**}-суммируемым (T^*-*суммируем*) *по мере на E, то ряд* (8.29) *безусловно сходится по мере на E и*

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i^2(x)<\infty \quad \textit{п. в. на} \quad E. \tag{8.30}$$

В силу теоремы 6.2 и замечания 8.1 достаточно доказать, что ряд (8.29) слабо безусловно сходится по мере на E. Предположив противное, мы сразу получаем противоречие, если используем лемму 8.2 и замечание 8.3.

Теорема 8.2 *). *Если $f_{p_i}(x) \to 0$ п. в. на E и ряд* (8.29) *слабо безусловно γ^*-суммируем (T^*-суммируем) п. в. на E, то ряд* (8.29) *слабо безусловно сходится п. в. на E.*

Утверждение вытекает из леммы 8.3 и замечания 8.3.

Следствие 8.1 *). *Если $f_{p_i}(x) \to 0$ п. в. на E и ряд* (8.29) *безусловно γ^*-суммируем (T^*-суммируем) п. в. на E, то ряд* (8.29) *безусловно сходится п. в. на E.*

Утверждение вытекает из теоремы 8.2.

Замечание 8.4. Утверждение, содержащееся в следствии 8.1 для случая регулярных методов T, доказано впервые Орличем [41*] при условии, что $f_i(x) \to 0$ для п. в. $x \in E$.

Следствие 8.2. *Если числа $c_{p_i} \to 0$, а ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i \tag{8.31}$$

слабо безусловно γ^{**}-суммируем (T^*-суммируем), то ряд (8.31) *абсолютно сходится.*

Утверждение вытекает из теоремы 8.1, если взять $f_i(x) \equiv c_i$.

Замечание 8.5. Следствие 8.2 тем более остается справедливым, если потребовать от ряда (8.31) безусловную суммируемость. В работах [60*] — [62*] даны более точные результаты, чем следствие 8.2. В этом же направлении имеются результаты Робертсона [47*], которые относятся к условно сходящимся рядам.

Теперь отметим такой результат (см. [62*]):

Теорема 8.3. *Существуют регулярный метод $\gamma^{**} = \|B_{nm}\|$ и ортогональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \qquad (a_n\varphi_n(x) \to 0 \quad \text{на} \quad [0,\ 1]), \tag{8.32}$$

который всюду на $[0,\ 1]$ *расходится, и тем не менее безусловно γ^{**}-суммируем п. в. на E* **).

Доказательство. Возьмем расходящийся всюду на $[0,\ 1]$ ортогональный ряд Меньшова (см. [20*], стр. 195)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty\right). \tag{8.33}$$

---

*) Теорема 8.2 и следствие 8.1 сохраняют силу и для методов γ^{**}, только уже в этом случае существование γ^*-средних следует понимать в смысле сходимости п. в. соответствующих рядов (см. лемму 8.2′ и замечание 8.2).

**) В теореме 8.3 существование γ^{**}-средних понимается в смысле сходимости *по мере* соответствующих рядов.

Совершенно ясно, что $a_n\varphi_n(x)\to 0$ п. в. на $[0, 1]$, и потому, изменяя значения функций $\varphi_n(x)$ на множествах меры нуль, мы можем считать, что $a_n\varphi_n(x)\to 0$ всюду на $[0, 1]$, а ряд (8.33) всюду расходится. Положим $B_{nm}=1$ при всех n и m. Так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2<\infty$, то γ^{**}-средние $\sigma_n(x)$ для каждого переставленного ряда от (8.33) имеют смысл и не зависят от n, т. е. ряд (8.33) безусловно γ^{**}-суммируем п. в. на $[0, 1]$, что и требовалось доказать.

Сравнивая следствие 8.1 и теорему 8.3, мы видим, что в вопросе безусловной суммируемости почти всюду регулярные методы T и γ могут *существенно отличаться друг от друга*, тогда как в случае безусловной суммируемости по мере (см. теорему 8.1) этого нет.

Ниже нам понадобятся:

Лемма 8.4. *Какова бы ни была последовательность $s_0, s_1, \ldots$ $\ldots, s_n \ldots$, всегда можно найти конечнострочный регулярный метод T, который суммирует $\{s_k\}$ к конечному пределу.*

Доказательство. Если s_n сходится, то все доказано. Пусть теперь s_n расходится и ограничена. Тогда существование метода T гарантирует теорема Агнью (см. гл. 4, § 5). Если же s_n не ограничена, то существование метода T вытекает из другой теоремы Агнью (см. примеры 3 и 4 к гл. 6, а также теорему 2.5 Даревского).

Замечание 8.6. Известно (см. (**4.6**, II)), что произведение двух T-матриц снова есть T-матрица. Кроме того (см. теорему (**5.7**, I)), если $A=\|a_{nm}\|$, $B=\|b_{nm}\|$ и A конечнострочна, т. е. $a_{nm}=0$ при $m\geqslant q_n$, то $A[B]\subset(AB)$. Более того (см. (**5.7**, II)), если для последовательности z_p сходятся ряды $\sum\limits_{p=0}^{\infty} b_{kp}z_p$, то

$$U_n=\sum_{k=0}^{q_n} a_{nk}\left(\sum_{p=0}^{\infty} b_{kp}z_p\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{q_n} a_{nk}b_{kp}\right)z_p=V_n,$$

т. е. существуют и равны преобразования с помощью n-х строк:

$$A[B](z_p)=(AB)(z_p).$$

Аналогично для методов γ: если $B=\|B_{nm}\|$ и $D=\|D_{nm}\|$ — регулярные γ-методы, где D конечнострочный, т.е. $D_{nm}=0$ при $m\geqslant q_n$, то метод $(DB)=H=\|H_{nm}\|$ является γ-методом, где

$$H_{nm}=\sum_{j=0}^{q_n} D_{nj}(B_{jm}-B_{j-1,m}).$$

При этом, если для ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i$ существуют B-средние

$$\sigma_j=\sum_{i=0}^{\infty} x_iB_{ji} \qquad (j=0, 1, \ldots),$$

то для n-х преобразований справедливо равенство $D[B](x_i) = (DB)(x_i)$, т. е.

$$\sum_{j=0}^{q_n} D_{nj}(\sigma_j - \sigma_{j-1}) = \sum_{i=0}^{\infty} H_{ni} x_i \text{ *)}.$$

Справедливы еще такие утверждения (см. работы [61*], [62*]):

Лемма 8.5. *Пусть дан метод* $\gamma^* = \|B_{nm}\|$ *с* $\gamma_n = 0$ (*или* T^*) *и ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \qquad (x \in E) \tag{8.34}$$

таков, что γ^*-*средние имеют смысл на* E *от любого слабо переставленного ряда из* (8.34). *Тогда для любых двух различных возрастающих последовательностей* $\{q'_i\}$, $\{q''_i\}$ *найдутся последовательность* $\{n_k\}$ *и два слабо переставленных ряда*

$$\sum_{i=0}^{\infty} f'_i(x) \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{\infty} f''_i(x) \tag{8.35}$$

таких, что если $\sigma'_n(x)$ *и* $\sigma''_n(x)$ — *средние рядов* (8.35), *то*

$$\sigma'_{n_k}(x) - \sigma''_{n_k}(x) = f_{q'_k}(x) - f_{q''_k}(x) + o(1) \quad \textit{для п. в. } x \in E \text{ **)}. \tag{8.36}$$

В самом деле, рассмотрим случай метода γ^*. Положим

$$\psi_i(x) = f_{q'_i}(x) \quad \text{и} \quad \varphi_i(x) = f_{q''_i}(x).$$

В силу теоремы Лузина найдутся замкнутые множества $P_1 \subset \ldots \ldots \subset P_k \subset \ldots \subset E$ с $m(E - P_k) < \frac{1}{k}$, такие, что все функции f_i непрерывны на P_k. Положим

$$D_k = 1 + \sum_{i=1}^{k} \left[\sup_{x \in P_k} |\psi_i(x)| + \sup_{x \in P_k} |\varphi_i(x)| \right]. \tag{8.37}$$

Индуктивно строим последовательности $\{p_i\}$, $\{n_i\}$, $\{m_i\}$ так, что если они определены ***) для $1 \leqslant i \leqslant k-1$, то сначала находим $p_k > m_{k-1} + 1$ такое, что

$$|B_{n_i, p}| < \frac{1}{2^k D_k} \quad \text{при} \quad \begin{cases} p \geqslant p_k, \\ 1 \leqslant i \leqslant k-1. \end{cases} \tag{8.38}$$

---

*) Преобразование последовательности x_n с помощью матрицы $\gamma = \|c_{nm}\|$ означает преобразование ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ $(x_{-1} = 0)$ с помощью матрицы $\gamma = \|c_{nm}\|$.

**) В лемме 8.5 еще предполагается, что имеется бесконечно много целых положительных чисел, которые не входят в последовательности $\{q'_i\}$, $\{q''_i\}$.

***) При построении последовательностей сначала произвольным образом выбирается p_1, а далее идет построение по индукции.

После этого берем $n_k > n_{k-1}$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} |B_{n_k, p_i} - B_{n_k, m_i}| < \frac{1}{2^k D_k}; \tag{8.39}$$

$$|1 - B_{n_k, p_k}| < \frac{1}{2^k D_k}. \tag{8.40}$$

Теперь выбираем $m_k > p_k + 1$ так, что

$$|B_{n_k, m_k}| < \frac{1}{2^k D_k}. \tag{8.41}$$

Ряды (8.35) строим так, что у первого ряда на месте p_n стоит функция ψ_n, а на месте m_n функция φ_n; у второго ряда наоборот. Оставшиеся члены ряда (8.34) располагаем одним и тем же способом на незаполненные места в рядах (8.35). Очевидно, что

$$\sigma'_{n_k}(x) - \sigma''_{n_k}(x) - (\psi_k(x) - \varphi_k(x)) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1} (\psi_j - \varphi_j)(B_{n_k, p_j} - B_{n_k, m_j}) + (\psi_k - \varphi_k)(B_{n_k, p_k} - B_{n_k, m_k} - 1) +$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{\infty} (\psi_j - \varphi_j)(B_{n_k, p_j} - B_{n_k, m_j}) = S_1 + S_2 + S_3. \tag{8.42}$$

Но, в силу (8.37) и (8.39), имеем для $x \in P_k$:

$$|S_1(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \{|\psi_j(x)| + |\varphi_j(x)|\} |B_{n_k, p_j} - B_{n_k, m_j}| < \frac{1}{2^k}. \tag{8.43}$$

С другой стороны, на основании (8.37) и (8.38)

$$|S_3(x)| \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} D_j |B_{n_k, p_j} - B_{n_k, m_j}| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} D_j \frac{2}{2^j D_j} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{при} \quad x \in P_k. \tag{8.44}$$

Кроме того, в силу (8.37), (8.40) и (8.41)

$$|S_2(x)| \leqslant D_k \{|1 - B_{n_k, p_k}| + |B_{n_k, m_k}|\} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \text{ при } x \in P_k. \tag{8.45}$$

Так как $P_k \to E_1 \subset E$ и $mE_1 = mE$, то из (8.42)—(8.45) вытекает (8.36).

Следствие 8.3. *Пусть дан метод* $\gamma^{**} = \|B_{nm}\|$ (*или* T^*) *и ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x) \qquad (x \in E) \tag{8.46}$$

слабо безусловно γ^{**}-суммируем (T^*-суммируем) на E по мере. Тогда

$$\psi_i(x) = f(x) + \eta_i(x) \qquad (x \in E), \tag{8.47}$$

где $f(x)$ — конечная функция на E, а $\eta_i(x) \Rightarrow 0$ на E.

Случай I. $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} |B_{n_0,\,m}| > 0$ для некоторого n_0. Так как γ^{**}-среднее с номером n_0 существует от любого слабо переставленного ряда (8.46), то в этом случае $\psi_i(x) \Rightarrow 0$ на E, т. е. $f(x) \equiv 0$ на E.

Случай II. $\lim\limits_{m\to\infty} B_{nm} = 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots$, т. е. метод γ^{**} удовлетворяет требованиям леммы 8.5. Допустим, что (8.47) несправедливо, т. е. найдутся две различные редкие последовательности $\{m'_k\}$, $\{m''_k\}$, такие что

$$m'_1 < m''_1 < m'_2 < m''_2 < \ldots \quad \text{и} \quad \psi_{m'_k} - \psi_{m''_k} \not\Rightarrow 0 \quad \text{на} \quad E. \tag{8.48}$$

Обозначим через Q_k те функции ряда (8.46), которые не вошли в системы $\{\psi_{m'_k}\}$, $\{\psi_{m''_k}\}$. Мы можем считать, что система $\{Q_k\}$ бесконечна. Так как ряд (8.46) слабо безусловно сходится по мере на E, то в силу леммы 8.5 имеем:

$$\psi_{m'_k} - Q_k \Rightarrow M_1, \quad \psi_{m''_k} - Q_k \Rightarrow M_2 \quad \text{на} \quad E \tag{8.49}$$

(один раз мы берем $f_{q'_k} = \psi_{m'_k}$, $f_{q''_k} = Q_k$, а другой раз $f_{q'_k} = \psi_{m''_k}$, $f_{q''_k} = Q_k$). Далее, построим последовательность функций

$$\varepsilon_k(x) = \left\{\psi_{m'_1}, \psi_{m''_2}, \ldots, \psi_{m'_{2k-1}}, \psi_{m''_{2k}}, \ldots\right\}.$$

Опять, полагая $f_{q'_k} = \varepsilon_k$, $f_{q''_k} = Q_k$, получаем из леммы 8.5:

$$\varepsilon_k - Q_k \Rightarrow M_3, \quad \text{т. е.} \quad \psi_{m'_{2k-1}} - Q_{2k-1} \Rightarrow M_3 \quad \text{и} \quad \psi_{m''_{2k}} - Q_{2k} \Rightarrow M_3. \tag{8.50}$$

Из (8.49) и (8.50) вытекает $M_1(x) = M_3(x)$, $M_2(x) = M_3(x)$ для п. в. $x \in E$, т. е. $M_1(x) = M_2(x)$ п. в. на E. Но тогда из (8.49) следует $\psi_{m'_k} - \psi_{m''_k} \Rightarrow 0$ на E, что противоречит (8.48). Следствие доказано.

Справедлива следующая (см. работы [61*], [62*])

Теорема 8.4. *Если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \qquad (x \in E,\ mE > 0) \tag{8.51}$$

слабо безусловно γ^{**}-суммируем (T^*-суммируем) на E по мере, то

$$\psi_n(x) = f(x) + \eta_n(x) \qquad (x \in E), \tag{8.52}$$

где $f(x)$ — конечная функция на E, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x) \tag{8.53}$$

безусловно сходится по мере на E. Кроме того,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n^2(x) < \infty \quad \text{п. в. на } E, \tag{8.54}$$

и если метод γ^{**} (метод T^*) не суммирует ряд *)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1, \tag{8.55}$$

то $f(x) \equiv 0$ при $x \in E$.

Для доказательства разберем два случая.

Случай I. Метод γ^{**} (T^*) суммирует ряд (8.55). Тогда (см. следствие 8.3) ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\psi_n(x) - f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x)$$

слабо безусловно γ^{**}-суммируем (T^*-суммируем) на E по мере. А так как $\eta_n(x) \Longrightarrow 0$ на E, то $\eta_{p_i}(x) \to 0$ п. в. на E по некоторой подпоследовательности $p_i \to \infty$. Стало быть, в силу теоремы 8.1 ряд (8.53) безусловно сходится по мере на E и справедливо (8.54).

Случай II. Метод γ^{**} (T^*) не суммирует ряд (8.55). Этот случай несколько громоздок. Относительно него см. цитированные работы.

Из теоремы 8.4 и 8.2 вытекает

Теорема 8.5. *Если ряд* (8.51) *слабо безусловно γ^* (или T^*)-суммируем п. в. на E, то справедливы* (8.52), (8.54) *и ряд* (8.53) *слабо безусловно сходится п. в. на E. При этом $f(x) \equiv 0$, если метод γ^* (или T^*) не суммирует ряда* (8.55).

Отметим, что теорема 8.5 *неверна* для методов γ^{**} (см. теорему 8.3). Если же понимать существование γ^{**}-средних в смысле сходимости почти всюду (а не в смысле сходимости по мере, как в теоремах 8.4 и 8.5) соответствующих рядов, то справедлива (см. работу [62*]) **)

Теорема 8.6. *Если ряд* (8.51) *слабо безусловно γ^{**} (или T^*)-суммируем п. в. на E, то справедливы* (8.52), (8.54) *и ряд* (8.53)

*) И. И. Волков впервые отметил важный факт, что при любом порядке членов ряд (8.55) суммируем некоторым методом T и тем не менее ряд (8.55) расходится.

**) Напомним, что приводимые результаты справедливы и для случая, когда ряды содержат и неизмеримые функции; правда, в этом случае нужны дополнительные рассуждения.

сходится (*даже слабо безусловно*) *п. в. на* E. *Кроме того,* $f(x) \equiv 0$, *если метод* γ^{**} (*или* T^*) *не суммирует ряда* (8.55).

Доказательство теоремы 8.6 для регулярных методов $\gamma^{**} = \gamma = \|B_{nm}\|$ простое, и мы его приводим.

Случай I. Метод γ суммирует ряд (8.55). Тогда, в силу условия теоремы и следствия 8.3, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\psi_n(x) - f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x) \qquad (\eta_n(x) \rightrightarrows 0 \text{ на } E) \tag{8.56}$$

слабо безусловно γ-суммируем п. в. на E и $\eta_{p_l}(x) \to 0$ п. в. на E по некоторой подпоследовательности, а поэтому (см. теорему 8.2, сноску к ней и лемму 8.2′) ряд (8.56) слабо безусловно сходится п. в. на E.

Случай II. Для некоторого n_0 ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} B_{n_0, m}$ не сходится, т. е. для некоторых $\varepsilon > 0$ и $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots$

$$\left| \sum_{m=n_k+1}^{m_k} B_{n_0, m} \right| > \varepsilon \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{8.57}$$

Сначала покажем, что $f(x)$ эквивалентна нулю. Допустим противное, т. е., например, $f(x) \geqslant \beta > 0$ при $x \in E_1 \subset E$, $mE_1 > 0$. В силу следствия 8.3 $\eta_n(x) \rightrightarrows 0$, поэтому (см. лемму 6.2) можно найти такие p_k, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \eta_{p_k}(x) \tag{8.58}$$

сходится п. в. на E. Строим из (8.51) слабо переставленный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_{q_i}(x) \tag{8.59}$$

так, что у него на местах $[n_{k-1}+1,\ n_k - 1]$ стоят функции $\psi_{p_k}(x)$ в порядке возрастания индексов, а остальные функции из ряда (8.51) стоят в ряде (8.59) на местах n_k. По условию, ряд (8.59) γ-суммируем п. в. на E, а так как ряд (8.58) сходится (а значит, и γ-суммируется) п. в. на E, то, заменяя в ряде (8.59) каждую функцию $\psi_{p_k}(x)$ функцией $f(x)$, мы снова получим ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi^*_{q_i}(x), \tag{8.60}$$

который должен быть γ-суммируемым п. в. на E. Но для ряда (8.60) γ-среднее

$$\sigma_{n_0}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi^*_{q_i}(x) B_{n_0, i} \tag{8.61}$$

не имеет смысла на E_1 с $mE_1 > 0$, ибо в ряде (8.61) имеется бесконечно много сумм

$$\sum_{m=n_k+1}^{m_k} f(x) B_{n_0, m} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots),$$

модуль которых больше $\beta\varepsilon$ при $x \in E_1$ (см. (8.57)). Получили противоречие, и потому $f(x)$ эквивалентна нулю, а так как множества меры нуль не влияют на сходимость (суммируемость) п. в., то мы можем считать $f(x) \equiv 0$.

Но если $f(x) \equiv 0$, то ряд (8.51) совпадает с рядом (8.53), у которого $\eta_n(x) \rightrightarrows 0$ на E, и потому, как в случае I, ряд (8.53), т. е. ряд (8.51), слабо безусловно сходится п. в. на E.

Случай III. Существуют $\sum\limits_{m=0}^{\infty} B_{nm} = \delta_n$, но последовательность $\{\delta_n\}$ не сходится. На основании леммы 8.4 найдем конечнострочный метод γ_1, который суммирует последовательность $\{\delta_n\}$. Тогда (см. замечание 8.6) регулярный метод $\gamma_1\gamma$ сильнее метода γ и он суммирует ряд (8.55). Очевидно, что ряд (8.51) также будет слабо безусловно $(\gamma_1\gamma)$-суммируем п. в. на E, и потому, в силу пункта 1), $\psi_n(x) = f(x) + \eta_n(x)$, и ряд (8.53) слабо безусловно сходится п. в. на E. Но так как γ — регулярный метод, то, согласно условию теоремы, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\psi_n(x) - \eta_n(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(x)$$

γ-суммируем п. в. на E. Но метод γ не суммирует ряд (8.55), потому $f(x)$ эквивалентна нулю, и, как в пункте 2), мы можем считать $f(x) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Из теорем 8.5 и 8.6 непосредственно вытекает

Следствие 8.4 *). *Если ряд* (8.51) *безусловно* γ^* (*или* γ^{**}-, *или* T^*-)-*суммируем п. в. на* E, *то справедливо* (8.52) *и ряд* (8.53) *безусловно сходится п. в. на* E. *При этом* $f(x) \equiv 0$ *на* E, *если метод* γ^* (γ^{**}, T^*) *не суммирует ряда* (8.55).

Замечание 8.7. Утверждение, содержащееся в следствии 8.4, для методов T^* впервые анонсировано без доказательства А. М. Олевским [38*] для случая, когда существование T^*-средних понимается в смысле сходимости п. в. рядов, их определяющих.

Что касается методов γ^* и γ^{**} (а также доказательства для методов T^*), то эти результаты можно найти в работах [61*], [62*].

Из теоремы 8.6 еще вытекает (см. работу [62*])

*) В этом утверждении существование γ^*-средних и T^*-средних следует понимать в смысле сходимости по мере рядов, определяющих средние. Что касается γ^{**}-средних, то их нужно определять через сходимость почти всюду, и это существенно.

Следствие 8.5. *Если числовой ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \tag{8.62}$$

слабо безусловно γ^{**} (T^*)*-суммируем, то*

$$c_n = A + \eta_n, \tag{8.63}$$

где A *— постоянная, а ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \tag{8.64}$$

абсолютно сходится. При этом $A = 0$, *если метод* $\gamma^{**}(T^*)$ *не суммирует ряда* (8.55).

Тем более справедливо (см. работу [60*])

Следствие 8.6. *Если числовой ряд* (8.62) *безусловно* γ^{**} $(T^*$-)-суммируем и $\varliminf_{n\to\infty} |c_n| = 0$, *то ряд* (8.62) *абсолютно сходится.*

Это утверждение вытекает из следствия 8.5, так как в этом случае из (8.63) следует $A = 0$.

Следствие 8.7. *Если числовой ряд* (8.62) *безусловно* γ^{**} (T^*)*-суммируем, то справедливо* (8.63) *и ряд* (8.64) *абсолютно сходится. При этом* $A = 0$, *если метод* γ^{**} (T^*) *не суммирует ряда* (8.55).

Утверждение непосредственно вытекает из следствия 8.5.

Отметим, что следствие 8.7 для регулярных методов T получено В. Ф. Гапошкиным и А. М. Олевским.

Утверждение, содержащееся в следствии 8.5, допускает обобщение. Именно, справедлива (см. работу [62*])

Теорема 8.7. *Если числовой ряд* (8.62) *таков, что после любой слабой перестановки его членов* γ^{**} $(T^*$-)*-средние ограничены (постоянной, априори зависящей от порядка), то справедливо* (8.63) *и ряд* (8.64) *абсолютно сходится. При этом* $A = 0$, *если* γ^{**} (T^*)*-средние от ряда* (8.55) *не имеют смысла, или же имеют смысл, но не ограничены.*

Следует иметь в виду, что в теореме 8.7 (в отличие от следствия 8.5) может быть случай, когда метод γ^{**} (T^*) не суммирует ряда (8.55) и тем не менее $A \neq 0$.

§ 9. Суммирование рядов Фурье линейными методами

Введем ряд обозначений.

Через $L(0, 2\pi)$ $(C(0, 2\pi))$ обозначается класс 2π-периодических интегрируемых (соответственно непрерывных) функций, а через $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$ — треугольная матрица *), у которой $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\lambda_{n+1}^{(n)} = 0$.

*) В целях удобства здесь берется $\lambda_k^{(n)}$, а не λ_{nk}.

Положим

$$\Delta_k = \Delta\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)} \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

и

$$\Delta_k^2 = \Delta^2\lambda_k^{(n)} = \Delta_k - \Delta_{k+1} \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Пусть $f(x) \in L(0,\ 2\pi)$ и ее ряд Фурье

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ \left(a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(u) \cos ku\, du, \quad b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(u) \sin ku\, du\right). \end{array}\right\} \tag{9.1}$$

Возьмем тригонометрический полином

$$U_n(f,\ x,\ \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{9.2}$$

Из (9.2) (используя (9.1)) легко получить:

$$U_n(f,\ x,\ \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)]\, K_n(u)\, du,$$

где ядро

$$K_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos ku.$$

В частности, если $\Lambda = (C,\ 1)$, т. е. $\lambda_k^{(n)} = 1 - \dfrac{k}{n+1}$, то получаем ядро Фейера (см., например, [16*], стр. 51)

$$K_n(u) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin (n+1) \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_n(u)\, du = 1. \tag{9.3}$$

А. Н. Колмогоров ([21*], [22*], см. также [16*], § 84) доказал, что существуют ряды Фурье, которые расходятся всюду на $[0,\ 2\pi]$.

Естественно возникает вопрос: при каких условиях, наложенных на матрицу Λ, полиномы $U_n(f,\ x,\ \Lambda)$ сходятся к $f(x)$ при $n \to \infty$ в тех или иных точках x? Этому вопросу (и даже несколько более общему) посвящено много работ (например: Д. К. Фаддеев [63*], П. И. Романовский [50*], И. П. Натансон [33*], С. М. Никольский [35*], Надь [32*], Карамата и Томич [17а*], А. Ф. Тиман [58*]; см. также [34*], гл. 10, § 2).

Справедлива (см. С. М. Никольский [35*])

Теорема 9.1. *Для того чтобы $U_n(f, x, \Lambda) \to f(x)$ равномерно на $[0, 2\pi]$ для каждой $f \in C(0, 2\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_k^{(n)} = 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots); \tag{9.4}$$

$$\int_0^\pi |K_n(u)|\, du \leqslant A \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{9.5}$$

где *A — некоторая постоянная* *).

В терминах элементов матрицы справедлива (С. М. Никольский [35*])

Теорема 9.2. *Если последовательность $\lambda_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ для каждого n выпукла* **) (*или вогнута*), *то условия*

$$|\lambda_k^{(n)}| \leqslant A_1, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1} \leqslant A_1 \tag{9.6}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n+1; \quad n = 0, 1, \ldots)$$

необходимы и достаточны для выполнения (9.5).

Более того (Сидон [51*]; см. доказательство в работе С. Б. Стечкина [54*]), если (9.5) справедливо, то

$$|\lambda_k^{(n)}| \leqslant A_2, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1} \leqslant A_2 \tag{9.7}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n+1; \quad n = 0, 1, \ldots).$$

Теорема 9.2 была обобщена Надем [32*]. Он доказал, что условие

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{l=n-k}^{n} \frac{n-k}{l} \right) |\Delta^2 \lambda_k^{(n)}| \leqslant A_3 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{9.8}$$

влечет (9.5).

Карамата и Томич [17а*] ослабили условие Надя.

В последнее время указанные результаты были усилены А. В. Ефимовым. Он доказал ***), что справедлива

Теорема 9.3. *Если последовательность $\{\lambda_k^{(n)}\}$ такова, что*

$$H(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1} |\Delta^2 \lambda_k^{(n)}| \leqslant A \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{9.9}$$

*) Через A, A_1, A_2, ... мы будем обозначать постоянные, которые, вообще говоря, различны в разных формулах.

**) $\lambda_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ выпукла (вогнута), если $\Delta_k^2 \geqslant 0$ $\left(\Delta_k^2 \leqslant 0\right)$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

***) С любезного согласия автора здесь помещены его результаты.

то, для того чтобы $U_n(f, x, \Lambda) \to f(x)$ *равномерно на* $[0, 2\pi]$ *для каждой* $f \in C(0, 2\pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{9.10}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1} \leqslant A_1 \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{9.11}$$

Необходимость условий (9.10) и (9.11) вытекает из теоремы 9.1 и теоремы Сидона. Что касается достаточности, то, в силу теоремы 9.1, нужно убедиться в справедливости (9.5), и потому все будет доказано, если покажем, что справедлива следующая лемма А. В. Ефимова:

Лемма 9.1. *При любых* $\{\lambda_k^{(n)}\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1;\ n = 0, 1, \ldots)$

$$\int_0^{\pi} |K_n(u)|\, du \leqslant A \left\{ 1 + H(n) + \sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n}|}{n-k+1} \right\}. \tag{9.12}$$

Прежде чем доказывать лемму 9.1, приведем ряд вспомогательных неравенств.

Положим $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$ *). Из определения $H(n)$ вытекает, что **)

$$\sum_{k=0}^{\nu} (k+1) |\Delta_k^2| \leqslant AH(n), \quad \sum_{k=\nu+1}^{n} (n-k) |\Delta_k^2| \leqslant AH(n). \tag{9.13}$$

Далее (см. работу Надя [32*]), применяя дважды преобразования Абеля (см., например, [16*], стр. 9), получаем:

$$\lambda_k^{(n)} = \lambda_0^{(n)} - \left(\lambda_0^{(n)} - \lambda_k^{(n)}\right) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \Delta_i = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)\Delta_i^2 - k\Delta_k \tag{9.14}$$

$$(1 \leqslant k \leqslant n).$$

Аналогично

$$\lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - \lambda_{n+1}^{(n)} = (n-k+1)\Delta_k - \sum_{i=k}^{n-1} (n-i)\Delta_i^2 \quad (0 \leqslant k \leqslant n). \tag{9.15}$$

---

*) $[a]$ означает целую часть числа a.

**) Совершенно ясно, что оценки (9.13) сохраняются, если мы вместо ν будем брать $\nu \pm 1$.

Из (9.14) и (9.15) вытекает, что для $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{n-k+1}{n+1}\lambda_k^{(n)} + \frac{k}{n+1}\lambda_k^{(n)} =$$

$$= \frac{n-k+1}{n+1} - \frac{n-k+1}{n+1}\sum_{i=0}^{k-1}(i+1)\Delta_i^2 - \frac{k}{n+1}\sum_{i=k}^{n-1}(n-i)\Delta_i^2, \quad (9.16)$$

стало быть (см. (9.16)),

$$|\lambda_k^{(n)}| \leqslant 1 + \sum_{i=0}^{k-1}(n-i)\frac{i+1}{n+1}|\Delta_i^2| +$$

$$+ \sum_{i=k}^{n-1}(i+1)\frac{n-i}{n+1}|\Delta_i^2| = 1 + H(n) \qquad (1 \leqslant k \leqslant n). \quad (9.17)$$

Если $1 \leqslant k \leqslant \nu = \left[\frac{n}{2}\right]$, то из (9.14) (учитывая (9.13) и (9.17)) получаем:

$$k|\Delta_k| \leqslant 1 + |\lambda_k^{(n)}| + \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)|\Delta_i^2| \leqslant A_1 + A_2H(n) \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]. \quad (9.18)$$

Очевидно, что при $p < q$

$$\sum_{i=p}^{q-1}\Delta_i^2 = \Delta_p - \Delta_q \text{ и } |\Delta_p| \leqslant |\Delta_q| + \sum_{i=p}^{q-1}|\Delta_i^2|,\ |\Delta_q| \leqslant |\Delta_p| + \sum_{i=p}^{q-1}|\Delta_i^2|. \quad (9.19)$$

Следовательно (см. (9.19)),

$$\sum_{k=0}^{n}|\Delta_k| = \sum_{k=0}^{\nu-1}|\Delta_k| + \sum_{k=\nu}^{n}|\Delta_k| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\nu-1}\left\{|\Delta_\nu| + \sum_{i=k}^{\nu-1}|\Delta_i^2|\right\} + \sum_{k=\nu}^{n}\left\{|\Delta_\nu| + \sum_{i=\nu}^{k-1}|\Delta_i^2|\right\} =$$

$$= \nu|\Delta_\nu| + \sum_{k=0}^{\nu-1}\left(\sum_{i=k}^{\nu-1}|\Delta_i^2|\right) + (n-\nu+1)|\Delta_\nu| + \sum_{k=\nu+1}^{n}\left(\sum_{i=\nu}^{k-1}|\Delta_i^2|\right) =$$

$$= (n+1)|\Delta_\nu| + \sum_{k=0}^{\nu-1}(k+1)|\Delta_k^2| + \sum_{k=\nu}^{n-1}(n-k)|\Delta_k^2|,$$

и потому (см. (9.13) и (9.18))

$$\sum_{k=0}^{n}|\Delta_k| \leqslant A_3 + A_4H(n) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (9.20)$$

Известно, что $\sin\alpha \geqslant \frac{2}{\pi}\alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$ при всех α, поэтому, полагая $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$, имеем:

$$\frac{1}{\nu+1}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\frac{2n-\nu+1}{2}t\cdot\sin\frac{\nu+1}{2}t\right|}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_1}{\nu+1}\int_0^{\frac{1}{\nu+1}}\frac{(2n-\nu+1)\,t\,(\nu+1)\,t}{t^2}\,dt + \frac{A_2}{\nu+1}\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\pi}\frac{dt}{t^2} \leqslant A_3 \quad (9.21)$$

равномерно относительно n *).

Теперь покажем, что равномерно относительно n выполняется

$$\int_0^{\frac{2\pi}{k+1}}\left|\frac{\sin\frac{2n-k+1}{2}t\sin\frac{k+1}{2}t}{(k+1)\sin^2\frac{t}{2}} - \frac{\sin\frac{2n-k+2}{2}t\sin\frac{k}{2}t}{k\sin^2\frac{t}{2}}\right|dt =$$

$$= O\left(\frac{1}{k+1}\right) \qquad (1 \leqslant k \leqslant n). \quad (9.22)$$

Так как $\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{4}{t^2} + O(1)$ при $t \in (0, \pi]$, то достаточно показать, что

$$T_{nk}(t) = \frac{\sin\frac{2n-k+1}{2}t\sin\frac{k+t}{2}t}{(k+1)\,t^2} - \frac{\sin\frac{2n-k+2}{2}t\sin\frac{k}{2}t}{kt^2} = O(1)$$

равномерно относительно n $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и $t \in (0, \pi]$. Но так как функция $\psi(u) = \frac{\sin u}{u}$ аналитическая (с ограниченной производной на $(-\infty, +\infty)$), то, преобразуя $T_{nk}(t)$ и используя формулу Лагранжа, имеем для некоторого θ $(0 < \theta < 1)$:

$$T_{nk}(t) = \frac{1}{2t}\sin\frac{2n-k+1}{2}t\left[\frac{\sin\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)t}{\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)t} - \frac{\sin\frac{k}{2}t}{\frac{k}{2}t}\right] -$$

$$-2\cos\frac{4n-2k+3}{4}t\sin\frac{t}{4}\,\frac{\sin\frac{k}{2}t}{kt^2} =$$

$$= O\left(\frac{1}{|t|}|t|\left|\psi'\left(\frac{k}{2}t+\theta\frac{t}{2}\right)\right|\right) + O\left(|t|\frac{k|t|}{k|t|^2}\right) = O(1).$$

---

*) Совершенно ясно, что оценка (9.21) остается справедливой при $n \geqslant 4$, если мы вместо ν будем брать $\nu \pm 1$.

Почти очевидны оценки

$$\frac{1}{k+1}\int\limits_{\frac{\pi}{k+1}}^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{2n-k+1}{2}t\sin\frac{k+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}\right|dt \leqslant \frac{A}{k+1}\int\limits_{\frac{\pi}{k+1}}^{\pi}\frac{dt}{t^2}\leqslant A_1 \tag{9.23}$$

равномерно относительно n и $k=0, 1, \ldots, n$. Также

$$\frac{1}{k+1}\int\limits_{\frac{\pi}{k+2}}^{\frac{\pi}{k+1}}\left|\frac{\sin\frac{2n-k+1}{2}t\sin\frac{k+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}\right|dt =$$

$$=O\left(\int\limits_{\frac{\pi}{k+2}}^{\frac{\pi}{k+1}}\frac{dt}{t}\right)=O\left(\log\frac{k+2}{k+1}\right)=O\left(\frac{1}{k+1}\right) \tag{9.24}$$

равномерно относительно n.

Доказательство леммы 9.1. Пусть $\nu=\left[\frac{n}{2}\right]$ и

$$\left.\begin{aligned} D_k(t)&=\frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t},\\ F_k(t)&=\frac{1}{2(k+1)}\,\frac{\sin^2(k+1)\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}D_i(t) \end{aligned}\right\} \tag{9.25}$$

— соответственно ядра Дирихле и Фейера (см. например, [16*], стр. 25 и 51) и

$$V_{nk}(t)=\frac{\sin\frac{2n-k+1}{2}t\sin\frac{k+1}{2}t}{2(k+1)\sin^2\frac{t}{2}} \tag{9.26}$$

$$(k=0, 1, \ldots n;\quad n=0, 1, \ldots).$$

Отметим, что так как, в силу (9.26):

$$(n-k)V_{n,n-k-1}(t)=\frac{\sin\frac{n+k+2}{2}t\sin\frac{n-k}{2}t}{2\sin^2\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{\cos(k+1)t-\cos(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}},$$

$$(n-k+1)V_{n,n-k}(t)=\frac{\cos kt-\cos(n+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}},$$

то (см. (9.25))

$$(n-k+1)V_{n,n-k}(t)-(n-k)V_{n,n-k-1}(t)=\frac{\cos kt-\cos(k+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=D_k(t). \quad (9.27)$$

Кроме того, при $\nu=\left[\frac{n}{2}\right]$ (см. (9.21))

$$\int_0^{\pi}|V_{n,n-\nu-1}(t)|\,dt\leqslant A_3 \qquad (n\geqslant 4). \quad (9.28)$$

Из (9.22) — (9.24) соответственно вытекают соотношения:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{p+1}}|V_{np}(t)-V_{n\ p-1}(t)|\,dt=O\left(\frac{1}{p+1}\right), \quad (9.29)$$

$$(p=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\int_{\frac{\pi}{p+1}}^{\pi}|V_{np}(t)|\,dt=O(1) \qquad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ n=0,\ 1,\ \ldots), \quad (9.30)$$

$$\int_{\frac{\pi}{p+2}}^{\frac{\pi}{p+1}}|V_{np}(t)|\,dt=O\left(\frac{1}{p+1}\right) \qquad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\quad n=0,\ 1,\ \ldots). \quad (9.31)$$

Применяя дважды преобразование Абеля, получаем (см. (9.25), (9.27)):

$$K_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos kt=\sum_{k=0}^{n}\Delta_k D_k(t)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\nu}\Delta_k D_k(t)+\sum_{k=\nu+1}^{n}\Delta_k\,[(n-k+1)\,V_{n,\,n-k}(t)-(n-k)\,V_{n,\,n-k-1}(t)]=$$
$$=\Delta_\nu(\nu+1)\,F_\nu(t)+\sum_{k=0}^{\nu-1}\Delta_k^2(k+1)\,F_k(t)+$$
$$+\Delta_\nu(n-\nu)\,V_{n,\,n-\nu-1}(t)-\sum_{k=\nu}^{n-1}\Delta_k^2(n-k)\,V_{n,\,n-k-1}(t)=$$
$$=M_1(t)-\sum_{k=\nu}^{n-1}\Delta_k^2(n-k)\,V_{n,\,n-k-1}(t)=M_1(t)+M_2(t). \tag{9.32}$$

Учитывая (9.25), (9.3) и (9.28), получаем:

$$\int_0^\pi|M_1(t)|\,dt\leqslant\int_0^\pi\Big\{(\nu+1)\,|\Delta_\nu|\,F_\nu(t)+(n-\nu)\,|\Delta_\nu|\,|V_{n,\,n-\nu-1}(t)|+$$
$$+\sum_{k=0}^{\nu-1}(k+1)\,|\Delta_k^2|\,F_k(t)\Big\}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant A_4\Big\{(\nu+1)\,|\Delta_\nu|+(n-\nu)\,|\Delta_\nu|+\sum_{k=0}^{\nu-1}(k+1)\,|\Delta_k^2|\Big\}$$

и, стало быть, на основании (9.18) и (9.13)

$$\int_0^\pi|M_1(t)|\,dt\leqslant A_5+A_6H(n). \tag{9.33}$$

Положим

$$V_{nk}(t)=V'_{nk}(t)+V''_{nk}(t)\qquad(t\in[0,\ \pi]), \tag{9.34}$$

где $V'_{nk}(t)=V_{nk}(t)$, а $V''_{nk}(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{k+1}$ и $V'_{nk}(t)=0$, а $V''_{nk}(t)=V_{nk}(t)$ при $\frac{\pi}{k+1}<t\leqslant\pi$. Используя (9.30) и (9.13), получаем:

$$\int_0^\pi\left|\sum_{k=\nu}^{n-1}\Delta_k^2(n-k)\,V''_{n,\,n-k-1}(t)\right|dt\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=\nu}^{n-1}(n-k)\,|\Delta_k^2|\int_{\frac{\pi}{n-k}}^{\pi}|V_{n,\,n-k-1}(t)|\,dt\leqslant A'_3\sum_{k=\nu}^{n-1}(n-k)\,|\Delta_k^2|\leqslant A_7H(n). \tag{9.35}$$

Теперь преобразуем по Абелю сумму

$$\sum_{k=\nu}^{n-1}(n-k)\,\Delta_k^2 V'_{n,\,n-k-1}(t)=\sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)\,\Delta_k\left[V'_{n,\,n-k-1}-V'_{n,\,n-k}\right]+$$
$$+(n-\nu)\,\Delta_\nu V'_{n,\,n-\nu-1}-\sum_{k=\nu+1}^{n}\Delta_k V'_{n,\,n-k}=$$
$$=\sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)\,\Delta_k\left[V'_{n,\,n-k-1}-V'_{n,\,n-k}\right]+$$
$$+(n-\nu)\,\Delta_\nu V'_{n,\,n-\nu-1}-\lambda_{\nu+1}^{(n)}V'_{n,\,n-\nu-1}-\sum_{k=\nu+2}^{n}\lambda_k^{(n)}\left[V'_{n,\,n-k}-V'_{n,\,n-k+1}\right].$$

Поэтому (см. (9.28), (9.29), (9.31))

$$\int_0^\pi\left|\sum_{k=\nu}^{n-1}\Delta_k^2(n-k)\,V'_{n,\,n-k-1}(t)\right|dt\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)\,|\Delta_k|\left\{\int_0^{\frac{\pi}{n-k+1}}|V_{n,\,n-k}-V_{n,\,n-k-1}|\,dt+\right.$$
$$\left.+\int_{\frac{\pi}{n-k+1}}^{\frac{\pi}{n-k}}|V_{n,\,n-k-1}|\,dt\right\}+(n-\nu)\,|\Delta_\nu|\int_0^{\frac{\pi}{n-\nu}}|V_{n,\,n-\nu-1}|\,dt+$$
$$+|\lambda_{\nu+1}^{(n)}|\int_0^{\frac{\pi}{n-\nu}}|V_{n,\,n-\nu-1}|\,dt+$$
$$+\sum_{k=\nu+2}^{n}|\lambda_k^{(n)}|\left\{\int_0^{\frac{\pi}{n-k+2}}|V_{n,\,n-k+1}-V_{n,\,n-k}|\,dt+\int_{\frac{\pi}{n-k+2}}^{\frac{\pi}{n-k+1}}|V_{n,\,n-k}|\,dt\right\}\leqslant$$
$$\leqslant A\left[\sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)\,|\Delta_k|\left\{\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{n-k}\right\}+(n-\nu)\,|\Delta_\nu|+\right.$$
$$\left.+|\lambda_{\nu+1}^{(n)}|+\sum_{k=\nu+2}^{n}|\lambda_k^{(n)}|\left\{\frac{1}{n-k+2}+\frac{1}{n-k+1}\right\}\right].$$

Стало быть (см. (9.17), (9.18), (9.20)),

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=\nu}^{n-1} \Delta_k^2 (n-k) V'_{n,\, n-k-1}(t) \right| dt \leqslant$$
$$\leqslant A'_7 + A_8 H(n) + A_9 \sum_{k=\nu+2}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1}. \tag{9.36}$$

Из (9.34) — (9.36) вытекает, что

$$\int_0^\pi |M_2(t)|\, dt \leqslant A_{10} \left(1 + H(n) + \sum_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1} \right). \tag{9.37}$$

Объединяя же (9.32), (9.33) и (9.37), получаем (9.12). Лемма доказана, а следовательно, доказана и теорема 9.3.

Замечание 9.1. *Если последовательность* $\lambda_k^{(n)}$ $(k=0, 1, \ldots$ $\ldots, n+1)$ *удовлетворяет условиям Никольского*, т. е., например, выпукла по k для каждого $n=0, 1, \ldots$, и справедливо (9.6), *то выполняется и условие Надя* (9.8).

В самом деле, по предположению, $\Delta^2\lambda_k^{(n)} \geqslant 0$, и потому (применяя дважды преобразование Абеля) имеем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i} \right) |\Delta^2\lambda_k^{(n)}| = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i} \right) \Delta^2\lambda_k^{(n)} =$$
$$= 1 - \lambda_n^{(n)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1} \leqslant 1 + 2A_1.$$

Замечание 9.2. *Если выполнено условие Надя* (9.8), *то*

$$H(n) \leqslant A \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{||\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1} \leqslant A \qquad (n=0, 1, \ldots). \tag{9.38}$$

В самом деле, условие (9.8) влечет (9.5), поэтому (по теореме Сидона) второе условие (9.38) справедливо. Далее, если $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$, то из (9.8) вытекает, что

$$A_3 \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=n-k}^{n} \frac{n-k}{i} \right) |\Delta_k^2| \geqslant \sum_{k=0}^{\nu-1} (n-k) \sum_{i=n-k}^{n} \frac{1}{i} |\Delta_k^2| \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k=0}^{\nu-1} (n-k) \frac{k+1}{n} |\Delta_k^2| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1) |\Delta_k^2| \tag{9.39}$$

и аналогично

$$A_3 \geqslant \sum_{k=\nu}^{n-1} (n-k) \frac{k+1}{n} |\Delta_k^2| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=\nu}^{n-1} (n-k) |\Delta_k^2|. \tag{9.40}$$

Но легко видеть, что

$$H(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1} |\Delta_k^2| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1) |\Delta_k^2| + \sum_{k=\nu}^{n-1} (n-k) |\Delta_k^2|, \tag{9.41}$$

и потому (см. (9.39), (9.40)) $H(n) \leqslant 4A_3$, т. е. первое условие (9.38) выполнено.

Таким образом, мы видим (см. замечания 9.1 и 9.2), что условия А. В. Ефимова (9.38) выполняются, если выполнено условие Надя (или Никольского). Более того, как показал А. В. Ефимов, условия (9.38) *менее* ограничительны, чем условия Надя.

В самом деле, пусть

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{2k}{n} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant \nu = \left[\frac{n}{2}\right],$$
$$\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{n-k+1} \quad \text{при} \quad \nu < k \leqslant n$$

и

$$\lambda_{n+1}^{(n)} = 0.$$

Очевидно, что

$$\Delta^2 \lambda_k^{(n)} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant \nu - 2,$$
$$\Delta^2 \lambda_{\nu-1}^{(n)} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n-\nu} + \frac{2\nu - n}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\Delta^2 \lambda_k^{(n)} = O\left(\frac{1}{(n-k)^3}\right) \quad \text{при} \quad \nu \leqslant k \leqslant n-1,$$

и

$$\Delta^2 \lambda_{n-1}^{(n)} = \lambda_{n-1}^{(n)} - 2\lambda_n^{(n)} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2},$$

и потому

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1) |\Delta^2 \lambda_k^{(n)}| = \nu |\Delta^2 \lambda_{\nu-1}^{(n)}| = O(1),$$

$$\sum_{k=\nu}^{n-1} (n-k) |\Delta^2 \lambda_k^{(n)}| = \sum_{k=\nu}^{n-1} (n-k)\, O\left(\frac{1}{(n-k)^3}\right) = O\left(\sum_{k=\nu}^{n-1} \frac{1}{(n-k)^2}\right) = O(1),$$

т. е. (см. (9.41)) первое условие (9.38) выполнено. Далее,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1}=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1}+$$
$$+\sum_{k=\nu+1}^{n}\frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1}\leqslant\frac{\nu+1}{n-\nu+1}+\sum_{k=\nu+1}^{n}\frac{1}{(n-k+1)^2}=O(1),$$

т. е. второе условие (9.38) выполнено.

Покажем, что выбранная последовательность $\{\lambda_k^{(n)}\}$ не удовлетворяет условиям Надя. Это вытекает из неравенства

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=n-k}^{n}\frac{n-k}{i}\right)|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|\geqslant|\Delta^2\lambda_{n-1}^{(n)}|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\geqslant A\log n \qquad (A>0).$$

Примерно так же показывается, что условия (9.38) менее ограничительны, чем условия Карамата и Томича [17a*].

Отметим еще следующий результат А. В. Ефимова:

Теорема 9.4. *Если матрица* $\Lambda=\|\lambda_k^{(n)}\|$ *удовлетворяет условию* (9.9), *то, для того чтобы* $U_n(f, x, \Lambda)\to f(x)$ *в каждой точке Лебега функции* f (*где* f — *произвольная функция из* $L(0, 2\pi)$), *необходимо и достаточно выполнение условий* (9.10) *и* (9.11).

§ 10. О некоторых проблемах

В настоящем параграфе будут сформулированы некоторые проблемы, относящиеся к функциональным рядам, решение которых мне неизвестно. Эти задачи предлагались мною на некоторых спецкурсах и семинарах в Московском университете.

Как правило, они будут формулироваться для случая сходимости, хотя большинство из них очевидным образом переформулируется и на случай суммируемости.

1) Пусть $f_n(x)$ — измеримые функции на [0, 1] и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x) \qquad (x\in[0, 1]) \tag{10.1}$$

при двух перестановках членов почти всюду на [0, 1] сходится соответственно к $F(x)$ и $\Phi(x)$. Можно ли для каждого числа $\lambda\in[0, 1]$ переставить члены в ряде (10.1) так, чтобы вновь полученный ряд почти всюду на [0, 1] сходился к $\lambda F(x)+(1-\lambda)\Phi(x)$? Эта проблема поставлена Банахом (см. об этом работу Орлича [41*]).

2) Пусть ряд (10.1) состоит из измеримых функций и любой его частичный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{n_k}(x) \qquad (n_0 < n_1 < n_2 < \ldots)$$

почти всюду на [0, 1] сходится. Можно ли утверждать, что ряд (10.1) при любом порядке членов сходится почти всюду на [0, 1], т. е. что ряд (10.1) безусловно сходится п. в. на [0, 1]?

В работе А. Н. Колмогорова и Д. Е. Меньшова [23*] имеется следующее утверждение (принадлежащее А. Н. Колмогорову):

Существует функция $f(x) \in L^2$ (0, 2π) такая, что члены ее тригонометрического ряда Фурье можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд расходился почти всюду на [0, 2π].

Поэтому, если ответ на проблему 2) положителен, то тогда, используя утверждение А. Н. Колмогорова, можно было бы доказать существование тригонометрического ряда Фурье из L^2, который расходится на множестве положительной меры.

3) Существует ли ортонормированная полная система (ОНПС) $\{\varphi_n(x)\}$, являющаяся системой безусловной сходимости, т. е. всякий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ $\quad (x \in [0, 1])$ при любом порядке членов сходится п. в. на [0, 1], как только $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Отметим, что ответ на проблему 3) заведомо положителен, если положителен ответ на проблему 2). В этом случае в качестве $\{\varphi_n(x)\}$ можно было бы взять систему Хаара (см. [20*], стр. 141).

4) Орлич доказал (см., например, [20*], стр. 198), что если $\{\varphi_n(x)\}$ — ОНС на [0, 1], а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x) \tag{10.2}$$

таков, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega(n) \log^2 n < \infty, \tag{10.3}$$

то ряд (10.2) безусловно сходится п. в. на [0, 1], как только $\omega(n)$ удовлетворяет условиям:

а) $\omega(n) \leqslant \omega(n+1)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(n) = \infty$;

в) найдутся постоянная $A > 0$ и последовательность $n_k \uparrow \infty$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega(n_k)} < \infty, \quad \log n_{k+1} \leqslant A \log n_k.$$

Возникает проблема: насколько окончательны условия Орлича? Другими словами, является ли теорема Орлича окончательной в том же смысле, в котором окончательна теорема Меньшова — Радемахера (см. [20*], теоремы [5.3.5] и [5.3.7]).

Если ответ на проблему 2) положителен, то в теореме Орлича в неравенстве (10.3) можно было бы взять $\omega(n) \equiv 1$, и тогда уж результат был бы окончательным.

5) Существует ли ряд из измеримых функций

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in [0,\ 1]),$$

который не является безусловно сходящимся п. в. на [0, 1], и тем не менее при любом порядке его членов справедливо неравенство

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \left| \sum_{i=0}^{N} f_{p_i}(x) \right| < \infty \quad \text{п. в. на} \quad [0,\ 1],$$

Отметим, что если не требовать измеримости $f_n(x)$, то существование такого ряда доказано в работе [62*].

6) Существует ли ортогональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, который при любом порядке членов расходится п. в. на [0, 1] (или, более слабо, на множестве положительной меры), и тем не менее

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty.$$

7) Если $\{\varphi_n(x)\}$ — ОНПС на [0, 1], то, как показал Орлич ([39*]; см. также [20*] теоремы [5.1.5] и [5.7.1]), для всякого конечнострочного метода T можно найти ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \qquad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right), \tag{10.4}$$

который бы п. в. на [0, 1] не был T-суммируем.

Можно ли всегда построить ряд вида (10.4), который при любом порядке членов не был бы T-суммируем п. в. на [0, 1] (или, слабее, на множестве положительной меры).

8) В работе [60*] (см. стр. 838) нами было показано, что существуют ортогональные ряды (с достаточно быстро убывающими коэффициентами), которые при некоторых разных порядках членов сходятся к различным функциям. Возникает вопрос: если $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная фиксированная ОНПС на [0, 1], то можно ли построить ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \qquad (x \in [0,\ 1]), \tag{10.5}$$

который при некоторых двух разных порядках следования членов п. в. на [0, 1] сходился бы к двум функциям, которые различны на множестве положительной меры. Более общо: можно ли построить ряд вида (10.5) такой, что для любой измеримой функции $f(x)$ члены ряда (10.5) можно так переставить, чтобы вновь полученный ряд сходился п. в. на [0, 1] к $f(x)$?

В этой проблеме заключены по существу две проблемы: а) $f(x)$ — произвольная конечная п. в. на [0, 1] функция; б) $f(x)$ обращается в $+\infty$ на множестве положительной меры.

Решение только что поставленной проблемы неизвестно и для случая тригонометрической системы.

9) Нижеследующая проблема является ослаблением проблемы 8). А. А. Талалян [56*] доказал, что если $\{\varphi_n(x)\}$ - - ОНПС на [0, 1], а $f(x)$ — произвольная п. в. конечная измеримая функция, то в системе $\{\varphi_n\}$ можно так переставить функции, что для вновь полученной системы $\{\varphi_{p_i}\}$ найдется ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_{p_i}(x) \qquad \left(\lim_{i\to\infty} c_i = 0\right),$$

который п. в. на [0, 1] суммируется к $f(x)$ любым методом Чезаро положительного порядка.

Более того, как недавно сообщил мне А. А. Талалян (см. еще работу [55*]), им получено, что если $\{\varphi_n\}$ — ОНПС, то можно найти ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{10.6}$$

такой, что для любой измеримой функции $f(x)$ существует переставленный ряд от (10.6), который п. в. на [0, 1] суммируется к $f(x)$ любым методом Чезаро положительного порядка.

А. А. Талаляном поставлена следующая проблема:

Если $\{\varphi_n\}$ — ОНПС, а $f(x)$ — почти везде конечная измеримая функция, то существует ли некоторый переставленный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_{\nu_k}(x),$$

который бы сходился к $f(x)$ п. в. на [0, 1]?

В поставленной проблеме можно, конечно, сходимость заменить суммируемостью методом, который существенно слабее всех методов Чезаро положительного порядка, а также слабее методов T' (см. об этом работу Талаляна [56*]).

ЛИТЕРАТУРА К ОСНОВНОМУ ТЕКСТУ

Принятые сокращенные наименования журналов

P. L. M. S. — Proceedings of the London Mathematical Society.
J. L. M. S. — Journal of the London Mathematical Society.
Q. L. M. (Oxford) — Quarterly Journal of Mathematics (Oxford series).
Trans. Camb. Phil. Soc. — Transactions of the Cambridge Philosophical Society.
P. Edin. M. S. — Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society.
Trans. Amer. M. S. — Transactions of the American Mathematical Society.
Amer. J. M. — American Journal of Mathematics.
Ann. M. — Annals of Mathematics.
Duke J. — Duke Mathematical Journal.
Bull. Amer. M. S. — Bulletin of the American Mathematical Society.
M. Ann. — Mathematische Annalen.
M. Z. — Mathematische Zeitschrift.
Crelle — Journal für reine und angewandte Math. (Crelle's Journal).
Gött. Nach. — Göttingen Nachrichten.
Mon. f. Math. und Phys. — Monatschafte für Mathematik und Physik.
Z. f. Math. und Phys. — Zeitschrift für Mathematik und Physik.
J. de M. — Journal de Mathématique (Liouville's Journal).
C. R. — Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris).
Ac. M. — Acta Mathematica.
Fund. Math. — Fundamenta Mathematicae.
Rend. di Palermo — Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo.
Rend dei Lincei — Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti.
Prace mat. fiz. — Prace matematyczno fizyczne.

Агнью (Agnew R. P.)
1. The behaviour of bounds and oscillations of sequences of functions under regular transformations, Trans. Amer. M. S., **32** (1930), 669—708.
2. On ranges of inconsistency of regular transformations and allied topics, Ann. M. (2), **32** (1931), 715—722.
3. On Riesz and Cesàro methods of summability, Trans. Amer. M. S., **35** (1933), 532—548.
4. Products of methods of summability, Bull. Amer. M. S., **42** (1936), 547—549.
5. Comparison of products of methods of summability, Trans. Amer. M. S. **43** (1938), 327—343.
6. Cores of complex sequences and of their transforms, Amer. J. M., **61** (1939), 178—186.
7. On oscillations of real sequences and of their transforms by square matrices, Amer. J. M., **61** (1939), 683—699.
8. The effects of general regular transformations on oscillations of sequences of functions, Trans. Amer. M. S., **33** (1931), 411—424.
9. Properties of generalized definitions of limit, Bull. Amer. M. S., **45** (1939) 689—730.
10. Summability of subsequences, Bull. Amer. M. S., **50** (1944), 596—598.

11. On equivalence of methods of evaluation of sequences, Tôhoku Math. J., **35** (1932), 244—252.
12. A simple sufficient condition that a method of summability be stronger than convergence, Bull. Amer. M. S., **52** (1946), 128—132.
13. Convergence fields of methods of summability, Ann. M. (2), **46** (1945) 93—101.
14. On cores of bounded divergent complex sequences and of their transforms by square matrices, Revista Ci., Lima, **47** (1945), 87—103.
15. No summability of multiple sequences, Amer. J. M., **56** (1934), 62—68.
16. Summability of power series, Amer. Math. Monthly, **53** (1946), 251—259.
17. Analitic extension by Hausdorff methods, Trans. Amer. M. S., **52** (1942), 217—237.
18. Euler transformations, Amer. J. M., **66** (1944), 313—338.
19. Methods of summability which evaluate sequences of zeros and ones summable (C, 1), Amer. J. M., **70** (1948), 75—81.
20. On sequences with vanishing even or odd differences, Amer. J. M., **66** (1944), 339—340.

Агнью и Хилл (Agnew R. P., Hill J. D.)
1. Summability of bounded sequences. Duke J., **11** (1944), 573—574.

Адамс (Adams C. R.)
1. On summability of double series, Trans. Amer. M. S., **34** (1932), 215—230.

Аллен (Allen H. S.)
1. Projective convergence and limit in sequence spaces, P. L. M. S. (2), **48** (1944), 310—338.
2. T-transformations which leave the core of every bounded sequence invariant, J. L. M. S., **19** (1942), 42—46.

Альберт (Albert A. A.)
1. Modern higher Algebra (Cambridge), 1938.

Андреоли (Andreoli G.)
1. Funzioni di composizione ei 2^a specie, funzioni di matrici infinite, Rend. dei Lincei, 6^a serie (1936), 281.

Бак (Buck R. C.)
1. A note on subsequences, Bull. Amer. M. S., **49** (1943), 898—899.

Бак и Поллард (Buck R. C., Pollard H.)
1. Convergence and summability properties of subsequences, Bull. Amer. M. S., **49** (1943), 924—931.

Банах (Banach S.)
1. Théorie des opérations linéaires (Warsaw), 1932. Имеется перевод на украинском языке.

Барлаз (Barlaz J.)
1. On some triangular summability methods, Amer. J. M., **69** (1947), 139—152.

Бертуисл (Birtwistle G.)
1. The new Quantum mechanics (Cambridge), 1928.

Бозанкет (Bosanquet L. S.)
1. Note on convergence and summability factors, J. L. M. S., **20** (1945), 39—48.

Боннезен и Фенхель (Bonnesen T., Fenchel W.)
1. Theorie der Convexen Körper, vol. 3, I-st, part (Springer, Berlin), 1934.

Бор (Bohr H.)
1. Om en Udvidelse of en kendte Konvergenssaeting, Nyt Tidskrift for Matematik (Copenhagen), (B), **20** (1909), 1—4.

Борель (Borel E.)
1. Leçons sur les séries divergentes (Paris), 2nd ed., 1928.
2. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. di Palermo, **27** (1909), 247—271.

Брудно А. Л.
1. Суммирование ограниченных последовательностей матрицами. Матем. сборник, **16** (1945), 191—247.

Буль (Buhl A.)
1. Séries analytiques, Sommabilité Mémorial des Sciences Math., Fascicule VII (Paris), 1925.
Ватсон (Watson G. N.)
1. Theory of Bessel functions (Cambridge), 1922.
Вебер (Weber A.)
1. Isomorphismus maximaler Matrizenringe, Crelle, **171** (1934), 227—242.
Веддерберн (Wedderburn J. H. M.)
1. Lectures on Matrices, Amer. M. S. Colloquium Publications, **XVII** (1934).
Вейль (Weyl H.)
1. Singuläre Integralgleichungen, M. Ann., **66** (1909), 273—324.
2. Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist, Rend. di Palermo, **27** (1909), 373—392.
Вельштейн (Wellstein J.)
1. Die Dekomposition der Matrizen, Gott. Nach. (1909), 77—99.
Вермс (Vermes P.)
1. Product of a T-matrix and a γ-matrix, J. L. M. S., **21** (1946), 129—134.
2. On γ-matrices and their application to the binomial series, P. Edin. M. S. (2), **8** (1947), 1—13.
3. The application of γ-matrices to Taylor series, P. Edin. M. S. (2), **8** (1948), 43—49.
4. Absolutely equivalent and absolutely regular γ-matrices, P. Edin. M. S.
5. Series to series transformations and analytic continuation by matrix methods, Amer. J. M., **71** (1949), 541—562.
Винн (Winn C. E.)
1. Sur la relation entre une suite donnée et une autre suite derivée avec le même intervalle d'oscillation, C. R. **194** (1932), 2114—2115.
2. Sur la relation entre une suite donnée et une autre suite derivée avec le même intervalle d'oscillation, C. R., **196** (1933), 154—156.
Винтнер (Wintner A.)
1. Spektraltheorie der unendlichen Matrizen (Hirzel, Leipzig), 1929.
Виньо (Vignaux J. C.)
1. Sur une généralisation de la sommation des séries divergentes de M. Le Roy, Rend. dei Lincei, 6^a series, **18** (1933), 29—30.
Виссер (Visser C.)
1. The law of nought-or-one, Studia Math. **7** (1938), 143—149.
Вулих Б. З.
1. О линейных методах суммирования в абстрактных пространствах. Записки Ин-та матем. и мех. Харьк. ун-та и Харьк. матем. об-ва (4), т. **15** (1938), 65.
Гамильтон (Hamilton H. J.)
1. On transformations of double series, Bull. Amer. M. S., **42** (1936), 275—283.
2. Transformations of multiple sequences, Duke J., **1** (1935), 29—60.
3. Preservation of partial limits in multiple sequence transformations, Duke J., **5** (1939), 293—297.
4. Mertens' theorem and sequence transformations, Bull. Amer. M. S., **53** (1947), 784—786.
Гамильтон и Хилл (Hamilton H. J., Hill J. D.)
1. On strong summability, Amer. J. M., **60** (1938), 588—594.
Гарабедян (Garabedian H. L.)
1. Hausdorff matrices, Amer. Math. Monthly, **46** (1939), 390—410.
2. Hausdorff methods of summation which include all of the Cesàro methods, Bull. Amer. M. S., **48** (1942), 124—127.
Гарабедян, Хилле и Уолл (Garabedian H. L., Hille E., Wall H. S.)
1. Formulations of the Hausdorff inclusion problem, Duke J., **8** (1941), 193—213.

Гёрр (Gurr C. E.)
1. The expression of an infinite lower semi-matrix in terms of its idempotent and nilpotent elements, P. Edin. M. S. (2), **6** (1939), 61—74.
Гиллеспи и Гурвиц (Gillespie D. C., Hurwitz W. A.)
1. On sequences of continuous functions having continuous limits, Trans. Amer. M. S., **32** (1930), 527—543.
Гильберт (Hilbert D.)
1. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 2nd ed., (Teubner, Leipzig), 1924.
2. Wesen und Ziele einer Analisis der unendlichvielen unabhängigen Variabeln, Rend. di Palermo, **27** (1909), 59—74.
Гобсон (Hobson E. W.)
1. The theory of functions of a real variable, vol I 3rd ed. (1927), and vol. II 2nd ed. (1926), (Cambridge).
Гомиш (Gomes R. L.)
1. Opérateurs linéaires, Matrices limitées, Rend. dei Lincei 6^a série, **17** (1933), 41—45.
Грам (Gram J. P.)
1. Über die Entwicklung reellen Funktionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, Crelle, **94** (1883), 41—73.
Гронуолл (Gronwall T. H.)
1. Summation of series and conformal mapping, Ann. M., (2), **33** (1932), 101—117.
Гурвиц В. (Hurwitz W. A.)
1. Report on topics in the theory of divergent series, Bull. Amer. M. S., **28** (1922), 17—36.
2. Some properties of methodes of evaluation of divergent sequences, P. L. M. S. (2), **26** (1927), 231—248.
3. The oscillation of a sequence, Amer. J. M., **52** (1930), 611—616.
Гурвиц Г. (Hurwitz H.)
1. Total regularity ot general transformations, Bull. Amer. M. S. **46** (1940), 833—837.
Даревский В. М.
1. О внутренне совершенных методах суммирования, Изв. АН СССР, **10** (1946), 97—104.
Дей (Dey M. M.)
1. Operations in Banach spaces, Trans. Amer. M. S., **51** (1942), 583—608.
Джеймс (James G.)
1. On the theory of summability, Ann. M. (2), **21** (1919), 120—127.
Динс (Dienes P.)
1. The Taylor. Series (Oxford), 1931.
2. Notes on linear equations in infinite matrices. Q. J. M. (Oxford), **3** (1932), 253—268.
3. The exponential function in linear algebras Q. J. M. (Oxford), **1** (1930), 300—309.
4. Lectures given at Birkbeck College (University of London).
5. Leçons sur les singularités des fonctions analytiques (Paris), 1913. (См. Кук и Динс).
Дэйл (Dale J.)
1. Some properties of the exponential mean, Amer. J. M., **47** (1925), 71—90.
Жордан (Jordan G.)
1. Traité des Substitutions (Paris), 1870.
Жулиа (Julia G.)
1. Introduction mathématique aux Théories Quantiques, Parts I and II (Paris), 1936—1938.
Зигмунд А.
1. Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939.

Кармайкл (Carmichael R. D.)
1. General aspects of the theory of summable series, Bull. Amer. M. S., **25** (1918—1919), 97—131.
Качмаж (Kaczmarz S.)
1. Notes on orthogonal series, I, Studia Math., **5** (1934), 24—28.
Качмаж С. и Штейнгауз Г.
1. Теория ортогональных рядов, Физматгиз, 1958.
Кембл (Kemble E. C.)
1. Fundamental principles of Quantum Mechanics (McGraw-Hill), 1937.
Кёте (Köthe G.)
1. Erweiterung von Linearfunktionen in linearen Räumen, M. Ann., **116** (1938—39), 719—732.
2. Die Teilräume eines Koordinatenräumes, M. Ann. **114** (1937), 99—125.
3. Lösbarkei thabedigungen für Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Crelle, **178** (1938), 193—213.
4. Das Reziprokentheorem für zeilenabsolute Matrizen, Mon. f. Math. und Phys., **47** (1939), 224—233.
Кёте и Теплиц (Köthe G., Toeplitz O.)
1. Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlichen Matrizen, Crelle, **171** (1934), 193—226.
2. Theorie der halbfiniten unendlichen Matrizen, Crelle, **165** (1931), 116—127.
Ковалевский (Kowalewski G.)
1. Einführung in die Determinantentheorie (Veit, Leipzig), 1909.
Когбетлянц (Kogbetliantz E.)
1. Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques (Paris), 1931.
Кожима (Kojima T.)
1. On generalized Toeplitz's theorems on limit and their applications, Tôhoku M. J. **12** (1917), 291—326.
2. On the theory of double sequences, Tôhoku M. J., **21** (1922), 3—14.
Колмогоров А. Н.
1. Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, Fund. Math., **5** (1924), 96—97.
Кук (Cooke R. G.)
1. A theorem in reciprocals J. L. M. S., **6** (1931), 269—272.
2. On the transformation of some classes of infinite matrices into diagonal matrices, J. L. M. S., **8** (1933), 167—175.
3. Some solutions of the matrix equation $AX-XA=J$, J. L. M. S., **8** (1933), 107—109.
4. A new method for the summability of divergent sequences, J. L. M. S., **12** (1937), 299—304.
5. On divergence and singularities of analitic functions, J. L. M. S., **12** (1937), 304—308.
6. On mutual consistency and regular T-limits, P. L. M. S., (2), **41** (1936), 113—125.
7. An extension of some recent results mutual consistency and regular T-limits, J. L. M. S., **12** (1937), 98—105.
8. A note on lower semi-matrices, J. L. M. S., **14** (1939), 154—157.
Кук и Барнетт (Cooke R. G., Barnett A. Mary)
1. The «right» value for the generalized limit of a bounded divergent sequence, J. L. M. S., **23** (1948), 211—221.
Кук и Динс (Cooke R. G., Dienes P.)
1. On the effective range of generalized limit processes, P. L. M. S. (2), **45** (1939), 45—63.
Купер (Cooper J. L. B.)
1. The spectral analysis of selfadjoint operators, Q. J. M. (Oxford), **16** (1945), 31—48.
2. Simmetric operators in Hilbert space, P. L. M. S. (2), **50** (1948), 11—55.

Линделёф (Lindelöf E.)
1. Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions (Paris), 1905.
Лорд (Lord R. D.)
1. On some relations between the Abel, Borel and Cesàro methods of summation, P. L. M. S. (2), **38** (1935), 241—256.
Лоренц (Lorentz G. G.)
1. A contribution to the theory of divergent sequences, Ac. M., **80** (1948), 167—190.
2. Tauberian theoremes and Tauberian conditions, Trans. Amer. M. S. **63** (1948), 226—234.
3. Eine Bemerkung über Limitierungsverfahren, die nicht schwächer als ein Cesàro-Verfahren sind, M. Z., **51** (1944), 85—91.
4. Direct theorems of methods of summability, Canadian J. of M., **1** (1949), 305—319.
Мазур (Mazur S.)
1. Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren, Studia Math. **2** (1930), 40—50.
2. Über lineare Limitierungsverfahren. M. Z. **28** (1928), 599—611.
Мазур и Орлич (Mazur S., Orlicz W.)
1. Sur les methodes linéares de sommation, C. R., **196** (1933), 32—34.
Макфейл (Macphail M. S.)
1. Euler-Knopp summability of classes of convergent series, Amer. J. M., **68** (1946), 449—450.
Мальмквист (Malmquist J.)
1. Étude d'une fonction entière, Ac. M., 29 (1905), 203—215.
Меньшов Д. Е.
1. Суммирование рядов по ортогональным функциям линейными методами, Изв. АН СССР, серия матем. (1937), 203—229.
Миттаг-Леффлер (Mittag-Leffler G.)
1. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (cinquième note), Ac. M., **29** (1905), 101—181.
Морс (Morse D. S.)
1. Relative inclusiveness of certain definitions of summability, Amer. J. M., **45** (1923), 259—285.
Мур (Moore C. N.)
1. Application of the theory of summability to developments in orthogonal functions, Bull. Amer. M. S., **25** (1918—1919), 258, 276.
2. Types of series and types of summability, Bull. Amer. M. S., **37** (1931), 240—250.
3. Summable series und convergence factors, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, XXII (1938).
Нейман (Neumann J.)
1. Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, M. Ann. **102** (1929—1930), 49—131.
Нигам (Nigam T. P.)
1. Summability of multiple series, P. L. M. S. (2), **46** (1940), 249—269.
2. On γ-transformations of series, P. Edin. M. S (2), **6** (1939), 123—127.
Обрешков (Obrechkoff N.)
1. Sur la sommation des séries divergentes et le prolongement analytique, C. R., **182** (1926), 307—309.
Окада (Okada V.)
1. Über die Annäherung analitischer Funktionen, M. Z., **23** (1925), 62—71.
2. Uber die Annäherung analitischer Funktionen, II, M. Z., **27** (1928), 212—217.
3. Ein Beweis von einem Satz über Potenzreihen, Tôhoku M. J., **30** (1929), 476—477.
Пелл (Pell A. J.)
1. Biortogonal systems of functions, Trans. Amer. M. S., **12** (1911), 135—164.
2. A general systems of linear equations, Trans. Amer. M. S. **20** (1919), 343—355.

Перрон (Perron O.)
1. Zur Theorie der divergenten Reihen, M. Z., **6** (1920), 158—160, 286—310.
Пиранян (Piranian G.)
1. Seguences, cores and transformations, Engineering Research Institute, University of Michigan, Ann Arbor (U. S. Navy Dept. Office of Naval Research, 1948).
2. Nörlund transformations with a bounded base, Engineering Research Institute, University of Michigan Ann Arbor (U. S. Navy Dept., Office of Naval Research, 1949).
(См. Эрдёш и Пиранян.)
Пойа (Pólya G.)
1. Eine einfache, mit funktionentheoretischen Aufgaben verknüpfte hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit eines Systems unendlich vieler linearen Gleichungen, Commentarii Math. Helvetici, **11** (1938—1939), 234—252.
(См. Харди, Литтльвуд и Пойа.)
Радемахер (Rademacher H.)
1. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, M. Ann., **87** (1922), 112—138.
2. Über den Konvergenzbereich der Eulerschen Reihentransformation, Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, **21** (1922), 16—24.
Радо (Rado R.)
1. Linear transformations of sequences, Phil. Trans. Royal Soc., A, **235** (1936), 367—414.
Рафф (Raff H.)
1. Zur Theorie der linearen Transformationen, M. Z., **37** (1933), 572—577.
Рисс М. (Riesz M.)
1. Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, C. R., **152** (1911), 1651—1654.
2. Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation, P. L. M. S. (2), **22** (1923), 412—419.
(См. Харди и Рисс.)
Рисс Ф. (Riesz F.)
1. Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (Paris), 1913.
(См. Фейер и Рисс.)
Ричардсон (Richardson R. G. D.)
1. A new method in the equivalence of pairs of bilinear forms, Trans. Amer. M. S., **26** (1924), 451—478.
1. Relative extreme of pairs of quadratic and Hermitian forms, Trans. Amer. M. S., **26** (1924), 479—494.
Робисон (Robison G. M.)
1. Divergent double sequences and series, Trans. Amer. M. S., **28** (1926), 50—73.
Роджерс (Rogers C. A.)
1. Linear transformations which apply to all convergent sequences and series, J. L. M. S., **21** (1946), 123—128.
2. Addentum to «Linear transformations which apply to all convergent sequences and series», J. L. M. S., **21** (1946), 182—185.
Сарымсаков Т. А.
1. О последовательностях стохастических матриц, Доклады АН СССР, **47** (1945), 326—328.
Сас (Szász O.)
1. Brown University Lectures, 1934—1935.
(См. Сильверман и Сас.)
Сильверман (Silverman L. L.)
1. On the definition of the sum of a divergent series, University of Missouri Studies, Math. series, I, (1913), 1—96.
2. The equivalence of certain regular transformations, Trans. Amer. M. S., **26** (1924), 101—112.

3. Of the omission of terms in certein summable series, Матем. сборник, **33** (1926), 375—384.
(См. Гурвиц и Сильверман.)
Сильверман и Сас (Silverman L. L., Szász O.)
1. On a class of Nörlund matrices, Ann. M. (2), **45** (1944), 347—357.
Сильверман и Тамаркин (Silverman L. L., Tamarkin J. D.)
1. On the generalization of Abel's theorem for certein definitions of summability, M. Z., **29** (1928), 161—170.
Скотт и Уолл (Scott W. T., Wall H. S.)
1. Transformation of series and sequences, Trans. Amer. M. S., **51** (1942), 255—279.
Смэйл (Smail L. L.)
1. A general method of summation of divergent series, Ann. M. (2), **20** (1918), 149—154.
2. Summability of double series, Ann. M. (2), **21** (1920), 221—223.
3. History and synopsis of the theory of summable infinite processes, University of Oregon Publications, **2**, № 8 (1925).
Спенсер (Spencer H. E.)
1. On convergence and oscillation of transform of sequences of vectors, Amer. J. M., **56** (1934), 445—458.
Стоун (Stone M. H.)
1. Linear transformations in Hilbert space, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, **XV** (1932).
2. Hausdorff theorem concerning Hermitan forms, Bull. Amer. M. S., **36** (1930), 259—261.
Суноути (Sunouchi G.)
1. On a linear transformation of infinite sequences, Proc. Phys. Math. Soc. of Japan (3), **16** (1934), 161—163.
Такенака (Takenaka S.)
1. A general view of the theory of summability, I, Tôhoku M. J., **21** (1922), 193—221.
Тамаркин (Tamarkin J. D.)
1. On the notion of regularity of methods of summation, Bull. Amer. M. S., **41** (1935), 241—243.
(См. Сильверман и Тамаркин, а также Хилле и Тамаркин.)
Теплиц (Toeplitz O.)
1. Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace mat. fiz., **22** (1911), 113—120.
2. Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, M. Ann. **70** (1911), 351—376.
3. Zur Transformation der scharen bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Gött. Nach. (1907), 110—115.
4. Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer, M. Z., **2** (1918), 187—197.
5. Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Gött. Nach. (1910), 489—506.
6. Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Gött. Nach. (1907), 101—109.
(См. Хеллингер и Теплиц, а также Кёте и Теплиц.)
Тернбулл (Turnbull H. W.)
1. The theory of determinants, matrices, and invariants (Blackie), 1928.
2. Power vectors, P. L. M. S. (2), **37** (1934), 106—146.
3. Diagonal matrices, Proc. Camb. Phil. Soc., **29** (1933), 347—372.
4. The Geometry of Matrices, Phil. Trans. Royal Soc., A, **239** (1942), 233—267.
5. The invariant theory of a general bilinear form, P. L. M. S. (2), **33** (1932), 1—21.

Фейер и Рисс Ф. (Fejér L., Riesz F.)
1. Über einige funktionentheoretische Ungleichungen, M. Z., **11** (1921), 305—314.
Фокс (Fox C.)
1. A class of null series, P. L. M. S. (2), **24** (1926), 479—493.
Форд (Ford W. B.)
1. Studies on divergent series and summability, University of Michigan, science Series, (**II**), New York.
2. A conspectus of the modern theory of divergent series, Bull. Amer. M. S., **25** (1918—1919), 1—15,
Фрагмен (Phragmen E.)
1. Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie

$$\int\limits_0^\infty F(ax)\,e^{-a}\,da,$$

C. R., **132** (1901), 1396—1399.
Френкель (Frenkel J.)
1. Wave Mechanics (2 vols.) (Oxford), 1934, 1936.
Фубини (Fubini G.)
1. Un' osservazione sulla transcendente $d(z)$ del Pincherle, Rend dei Lincei, 6ª serie, **1** (1925), 561—562.
Хагеман (Hagemann E.)
1. Das Reziprokentheorem in beliebigen linearen Koordinatenräumen, M. Ann., **114** (1937), 126—143.
Хан (Hahn H.)
1. Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Mon. f. Math. und Phys., **23** (1912), 161—224.
2. Über Folgen linearer Operationen, Mon. f. Math. und Phys., **32** (1922), 3—88.
Харди (Hardy G. H.)
1. Note on a theorem of Hulbert concerning series of positive terms, P. L. M. S. (2), **23** (1925).
2. On the summability of series by Borel's und Mittag-Leffer's methods, J. L. M. S., **9** (1934), 153—157.
3. Researches in the theory of divergent series and divergent integrals, Quarterly Journal, **35** (1904), 22—66.
Харди и Литтльвуд (Hardy G. H., Littlewood J. E.)
1. The relations between Borel's and Cesàro methods of summation, P. L. M. S., (2), **11** (1913), 1—16.
Харди, Литтльвуд и Пойа
1. Неравенства, ИЛ (1948).
Харди и Рисс М. (Hardy G. H., Riesz M.)
1. The general theory of Dirichlet's series (Cambridge), 1915.
Хаусдорф (Hausdorff F.)
1. Summationsmethoden und Momentfolgen, I and II, M. Z., **9** (1921), 74— 109 280—299.
2. Der Wertvorrat einer Bilinearform, M. Z., **3** (1919), 314—316.
3. Zur Theorie der linearen metrischen Räume, Crelle, **167** (1931), 294—311.
4. Mengenlehre (W. de Gruyter, Berlin and Leipzig), 1927.
Хейтлер (Heitler W.)
1. The Quantum of Radiation (Oxford), 1936.
Хелли (Helly E.)
1. Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Mon. f. Math. und Phys., **31** (1921), 60—91.

Хеллингер (Hellinger E.)
1. Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Crelle, **136** (1909), 210—271.
Хеллингер и Теплиц (Hellinger E., Toeplitz O.)
1. Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. Gött. Nach. (1906), 351—355.
2. Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen, M. Ann., **69** (1910), 289—330.
3. Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten (Teubner, Berlin), 1928.
4. Zur Einordnung der Kettenbruchtheorie in die Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Crelle, **144** (1914), 212—238, 318.
Хенсток (Henstckk R.)
1. The efficiency of matrices for Taylor series, J. L. M. S., **22** (1947), 104—107.
2. The efficiency of matrices for bounded sequences, J. L. M. S., **25** (1950), 27—33.
Хилл (Hill J. D.)
1. On perfect methods of summability, Duke J., **3** (1937), 702—714.
2. Some properties of summability, Duke J., **9** (1942), 373—381.
3. Nörland methods of summability that include the Cesàro methods of all positive orders, Amer. J. M., **67** (1945), 94—98.
4. Some properties of summability, II, Bull. Amer. M. S., **50** (1944), 227—230.
5. Summability of sequences of 0's and I's, Ann. M. (2), **46** (1945), 556—562.
(См. Агнью и Хилл, а также Гамильтон и Хилл.)
Хилле и Тамаркин (Hille E., Tamarkin J. D.)
1. Questions of relative inclusion in the domain of Hausdorff means, Proc. Nat. Acad. Sci., **19** (1933), 573—577.
2. On moment functions, Proc. Nat. Acad. Sci., **19** (1933), 902—908.
Хислоп (Hyslop J.)
1. A contribution to the theory of bounded matrices and quadratic forms with an infinity of variables, P. L. M. S. (2), **24** (1926), 264—304.
Шмидт (Schmidt E.)
1. Zur Theorie der linearen und nuchtlinearen Integralgleichungen. M. Ann. **63** (1907), 433—476.
Штейнгауз (Steinhaus H.)
1. Remarks on the generalization of the idea of limit (in Polich), Prace mat. fiz., **22** (1911), 121—134.
(См. Качмаж и Штейнгауз.)
Шур (Schur J.)
1. Über lineare Transformation in der Theorie der unendlichen Reihen, Crelle, **151**, (1920), 79—111.
2. Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen veränderlichen, Crelle, **140** (1911), 1—28.
Эрдёш и Пиранян (Erdös P., Piranian G.)
1. A. Note on transforms of unbounded sequences, Bull. Amer. M. S., **53** (1947), 787—790.
2. Convergence fields of row-finite and row-infinite Toeplitz transformations, Engineering Research Institute, University of Michigan, Ann. Arbor (U. S. Navy Dept., Office of Naval Research, 1949).
3. Topologizations of a sequences space by convergence fields of Toeplitz transformations, Canadian, J. of M.
4. Report on Laconic Toeplitz matrices, Engineering Research Institute, University of Michigan, Ann. Arbor (U. S. Navy Dept., Office of Naval Research, 1949).
Эрдёш и Розенблум (Erdös P., Rosenbloom P. C.)
1. Toeplitz methods which sum a given sequence, Bull. Amer. M. S., **52** (1946), 463—464.

ЛИТЕРАТУРА К ОБЗОРНОЙ СТАТЬЕ

1. Агнью (Agnew R.), Equivalence of methods for evaluation of sequences, Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1952), 550—565.
2. Агнью (Agnew R.), Inclusion relations among methods of summability compounded from given matrix methods, Arkiv för Math., **2** (1952), 361—374.
3 Агранович М. С., О совместности некоторых методов суммирования, Ученые записки МГУ (математика), т. VII (1954), 169—194.
4. Бак (Buck R. C.), An addentum, to «A note on subsequences», Proc. Amer. Math. Soc., **7**, № 6 (1956), 1074—1075.
5. Брудно А. Л., Нормы полей Теплица, ДАН СССР, **91** (1953), 11—14.
6. Брудно А. Л., Относительные нормы матриц Теплица, ДАН СССР, **91** (1953), 197—200.
7. Брудно А. Л., Пример двух матриц Теплица, ограниченно не противоречивых и ограниченно не покрываемых, Изв. АН СССР, серия матем., **22** (1958), 309—320.
8. Виланский (Wilansky A.), Convergence field of row-finite and row-infinite reversible matrices, Proc. Amer. Math. Soc., **3** (1952), 389—391.
9. Виланский (Wilansky A.), A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence, Bull. Amer. Math. Soc., **55** (1949), 914—916.
10. Виланский и Целлер (Wilansky A., Zeller K.), Summation of bounded divergent sequences topological methods, Trans. Amer. Math., Soc., **78** (1955), 501—509.
11. Волков И. И., Некоторые вопросы линейных матричных преобразований, ДАН СССР, **160** (1956), 591—594.
12. Волков И. И., Некоторые вопросы линейных матричных преобразований, Матем. сборник, **44** (1957), 85—112.
13. Волков И. И., О совместности двух методов суммирования, Успехи матем. наук, 1959.
14. Гофман и Питерсен (Goffman C., Petersen G.), Submethods of regular matrix summability methods, Canadian Jour. Math., **8** (1956), 40—46.
15. Даревский В. М., Внутренне совершенные методы суммирования, Изв. АН СССР, серия матем., **10** (1946), 97—103.
16. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939.
17. Калаби и Дворецкий (Calabi E., Dvoretzky A.), Convergence-and sum-factors for series of complex number, Trans. Amer. Math. Soc., **70** (1951), 177—194.
17а. Карамата и Томич (Karamata J. et Tomic M.), Sur la sommation des séries de Fourier, Глас Cpncke акад. наука, Од. природно-матем. наука, **5** (1953), 89—126.
18. Катнер (Kuttner B.), A note on some relations between methods of summability, Journ. London Math. Soc., **26** (1951), 111—116.
19. Катнер (Kuttner B.), On cores of sequences and of their transform by regular matrices, Proc. London Math. Soc., **6** (1956), 560—580.
20. Качмаж С. и Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, М., 1958.
21. Колмогоров А. Н., Une série de Fourier—Lebesgue divergente presque partout, Fund. Math., **4** (1923), 324—328.
22. Колмогоров А. Н., Une série de Fourier—Lebesgue divergente partout, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), **183** (1926), 1327—1328.
23. Колмогоров А. Н. и Меньшов Д. Е., Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales, Math. Zeit., **26** (1927), 432—441.
24. Кью и Питерсен (Keogh F. R., Petersen G. M.), A generalized Tauberian theorem, Canad. Journ. Math., **10**, № 1 (1958), 111—114.
25. Кью и Питерсен (Keogh F. R., Petersen G. M.), A universal Tauberian theorem, Journ. London Math. Soc., **33**, № 1 (1958), 121—123.

26. Лоренц и Робинсон (Lorentz G., Robinson A.), Core-consistency and total inclusion for methods of summability, Canadian Journ. Math. **6** (1954), 27—34.
27. Лоренц и Целлер (Lorentz G., Zeller K.), Über Paare von Limitierungsverfahren, Math. Zeit. **68** (1958), 428—438.
28. Мазур и Орлич (Mazur S., Orlicz W.), On linear methods of summability, Studia Math., **14** (1954), 129—160.
29. Мейер-Кёниг и Целлер (Meyer-König W., Zeller K.), Inäquivalensätze bei Limitierungsverfahren, Math. Zeit., **59** (1953), 200—205.
30. Меньшов Д. Е., Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales, Compt. Rend. Acad. Sci., **180** (1925), 2011—2013.
31. Меньшов Д. Е., Sur les séries de fonctions orthogonales, I, Fund. Math., **4** (1923), 82—105; II, **8** (1926), 56—108; III, **10** (1927), 375—420.
32. Надь (Nady B. Sz.), Méthodes de sommation des séries de Fourier, I, Acta Sci. Math. Szeged, XII, pars B (1950), 204—210.
33. Натансон И. П., Sur la représentation des fonctions aux points de continuité approximative par des intégrales singulières, Fund. Math., **18** (1931), 99—109.
34. Натансон И. Г., Теория функций вещественного переменного, М., 1957.
35. Никольский С. М., О линейных методах суммирования рядов Фурье, Изв. АН СССР, серия матем., **12** (1948), 259—278.
36. Огиевецкий И. И., К теории суммирования ограниченных последовательностей матрицами Теплица, Изв. высш. учебн. заведений (математика), **2** (1959), 183—187.
37. Олевский А. М., О линейных методах суммирования, ДАН СССР, **120** (1958), 701—703.
38. Олевский А. М., Безусловная суммируемость функциональных рядов, ДАН СССР, **125**, № 2 (1959), 269—272.
39. Орлич (Orlicz W.), Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen, Studia Math. **4** (1933), 27—32.
40. Орлич (Orlicz W.), Über Folgen lienearer Operationen, die von einem Parameter abhängen, Studia Math., **5** (1934), 160—170.
41. Орлич (Orlicz W.), Über die unabhängig von der Anordnung fast überall konvergenten Funktionenreihen, Bull. de l'Acad. Polonaise (1927), 117—125.
42. Орлич (Orlicz W.), Funktionalanalysis und allgemeine Theorie der lienearen Transformationen, Colloque sur la theorie des suites tenu a Bruxelles, Dezembre 1957.
43. Питерсен (Petersen G.), Summability methods and bounded sequences, Journ. Lond. Math. Soc., **31** (1956), 324—326.
44. Питерсен (Petersen G.), Consistent summability methods, Journ. Lond. Math. Soc., **32** (1957), 62—65.
45. Питерсен (Petersen G.), Unclusion between limitation methods, Math. Zeit., **65** (1956), 494—496.
46. Питерсен (Petersen G.), Sets of consistent summation methods, Journ. Lond. Math. Soc., **32** (1957), 377—378.
47. Робертсон (Robertson A. P.), On rearrangements of infinite series, Proc. Glasqow Math. Assoc., **3**, № 4 (1958), 182—193.
48. Робинсон (Robinson A.), On functional transformations and summability, Proc. Lond. Math. Soc., **52** (1950), 132—160.
49. Роджерс (Rogers C.), The transformation of sequences by matrices, Proc. Lond. Math. Soc., **52** (1951), 321—364.
50. Романовский П. И., Quelques considérations sur lathéorie des intégrales singulières, Math. Zeit., **34**, № 1 (1931), 35—49.
51. Сидон (Sidon S.), Über Fourier-Koeffizienten, Journ. Lond. Math. Soc., **13** (1938), 181—183.

52. Стечкин С. Б., О билинейных формах, ДАН СССР, **71**, № 2 (1950), 237—240.
53. Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение), Изв. АН СССР, серия матем., **19** (1955), 221—246.
54. Стечкин С. Б., Несколько замечаний о тригонометрических полиномах. Успехи матем. наук, **10**, вып. 1 (1955), 159—166.
55. Талалян А. А., О рядах по базисам пространства L_p, универсальных относительно перестановок, ДАН Арм. ССР, **28** № 4 (1959), 145—150.
56. Талалян А. А., Суммирование рядов по базисам пространства $L_p(a, b)$, $p > 1$, методами Чезаро, ДАН СССР, **124**, № 5 (1959), 987—989.
57. Троппер (Tropper M.), A sufficient condition for a regular matrix to sum a bounded divergent sequence, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 671—677.
58. Тиман А. Ф., О линейных процессах приближения алгебраическими многочленами, функциях Лебега и некоторых приложениях к рядам Фурье, ДАН СССР, **101**, № 2 (1955), 221—224.
59. Ульянов П. Л., О рядах по переставленной тригонометрической системе, Изв. АН СССР, серия матем., **22**, № 4 (1958), 515—542.
60. Ульянов П. Л., О безусловной сходимости и суммируемости. Изв. АН СССР, серия матем., **22**, № 6 (1958), 811—840.
61. Ульянов П. Л., Безусловная суммируемость, Изв. АН СССР, серия матем., **23**, № 5 (1959), 781—808.
62. Ульянов П. Л., Сходимость и суммируемость, Труды Моск. матем. об-ва, **9** (1960), 373—399.
63. Фаддеев Д. К., О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Лебега, Матем. сборник, **1** (1936), 351—368.
64. Целлер (Zeller K.), Merkwürdigkeiten bei Matrixverfahren; Eeifolgenverfahren, Arch. der Math., **4** (1953), 1—5.
65. Целлер (Zeller K.), Allgemeine Eigenschaffen von Limitierungsverfahren, Math. Zeit., **53** (1951), 463—487.
66. Шур (Schur L.), Oscillation of sequences in linear transformation, Riveon Lematematika, **4** (1950), 29—34.
67. Эрдёш и Пиранян (Erdös P., Piranian C.), Convergence fields of row-finite and row-infinite Toeplitz transformations, Proc. Amer. Math. Soc., **1** (1950), 397—401.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Кук Ричард.

Бесконечные матрицы
и пространства последовательностей.

Редактор *А. Н. Копылова.*
Техн. редактор *Е. А. Ермакова.*
Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 23/II 1960 г. Подписано к печати 11/VIII 1960 г. Бумага $60 \times 92/_{16}$. Физ. печ. л. 29,5. Условн. печ. л. 29,5. Уч.-изд. л. 26,59. Тираж 7000 экз. Т-10186. Цена книги 14 руб. 80 коп. С 1/I 1961 г. цена 1 р. 48 к. Заказ 1223.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.