УДК 512.7

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И СХЕМЫ

В. И. Данилов

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Этот обзор посвящен основаниям алгебраической геометрии, т. е. введению основных ее объектов и изложению главных их свойств. Грубо говоря, алгебраическая геометрия имеет дело с системами алгебраических уравнений и их решениями. При этом она интересуется сразу всей совокупностью решений, рассматривая ее как единый геометрический объект, снабжает его топологией, пучком функций и т. д. Отображения между такими объектами соответствуют алгебраическим преобразованиям решений.

Первоначально алгебраические многообразия (в аффинном или проективном варианте) рассматривались над полями вещественных или комплексных чисел; при этом широко использовались трансцендентные методы (см. исторический очерк в [15]). Параллели между теорией алгебраических кривых над **C** (римановых поверхностей) и теорией алгебраических чисел стимулировали поиски общего алгебраического фундамента.

После нескольких предварительных попыток (эволюцию понятия алгебраического многообразия см. в [4], [15], [28]) было выработано понятие схемы, позволяющее говорить на геометрическом языке о системах алгебраических уравнений над любыми коммутативными кольцами. И хотя схемами не исчерпываются объекты алгебраической геометрии (есть еще формальные схемы, алгебраические пространства и т. д.), это основное, центральное понятие современной алгебраической геометрии.

Тем не менее главное внимание мы уделяем не понятию схемы, а интуитивно более понятному и наглядному понятию алгебраического многообразия над алгебраически замкнутым полем. Теория таких многообразий в своей элементарной части строится параллельно теории дифференцируемых или аналитических многообразий, и в главе 1 мы акцентируем эти аналоги (атласы, морфизмы, векторные расслоения, пучки, дифференциальное исчисление). Однако многие понятия алгебраической геометрии специфичны именно для алгебраических многообразий; это понятия неприводимости, полноты, рационального отображения, размерности, особых точек. О них, а также более глубоких свойствах алгебраических многообразий рассказывается в главе 2. В главе 3 больше внимания уделяется проективной геометрии (степень, линейные сечения и проекции, линейные системы дивизоров, многообразие Чжоу); там же излагается теория пересечений. И только глава 4 посвящена собственно схемам. Она содержит главным образом определения и обобщения на схемы понятий и результатов, знакомых по трем предыдущим главам. Теориям когомологий на алгебраических многообразиях, которые также следует отнести к основаниям, будет отведена отдельная статья.

Предполагается, что читатель знаком с общематематическими понятиями множества, топологического пространства, поля и алгебры, векторного пространства и многочлена, меньше — категории и функтора (см. [14]). Желательно, хотя и не обязательно, знакомство с дифференцируемыми и аналитическими многообразиями и пучками. Большинство основных результатов мы пытались снабдить эскизами доказательств, полагая это необходимым для понимания теории.

Глава 1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Цель этой главы — придать точный смысл словам: алгебраическое многообразие — это объект, локально задаваемый полиномиальными уравнениями. Главное отличие алгебраических многообразий от многообразий дифференцируемых или комплексно-аналитических (о которых см. [13], [25], [50]) заключается в выборе локальных моделей. В дифференцируемом и комплексно-аналитическом случаях это открытые подмножества в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$. Локальная модель алгебраического многообразия — это подмножество координатного пространства, заданное полиномиальными уравнениями. Чтобы придать этому смысл, нужно зафиксировать поле коэффициентов K, над которым будут рассматриваться и многочлены, и решения. Чтобы максимально упростить алгебраическую сторону дела и сосредоточиться на геометрии, мы в первых трех главах предполагаем, что поле K алгебраически замкнуто. В этой главе мы обсудим также простейшие алгебро-геометрические понятия, имеющие прямые аналоги в дифференцируемом и аналитическом случаях.

§ 1. Аффинное пространство

1.1. Основное поле. При желании читатель может считать, что основное поле K — это поле комплексных чисел $\mathbf{C}$. Однако даже к комплексным числам мы будем подходить чисто алгебраически, т. е. аппелировать к операциям сложения и умножения, но не пользоваться понятиями предела и т. п. По этой причине наши рассуждения будут пригодны для любого поля. Здесь уместно вспомнить деление А. Вейлем методов на классические (зависящие от свойств поля действительных или комплексных чисел и берущих свое начало в топологии, анализе, дифференциальных уравнениях или теории аналитических функций) и абстрактные, основанные на алгебре и применимые при произвольном основном поле.

Имеются и более веские причины развивать теорию над произвольными полями, в том числе над полями положительной характеристики. Во-первых, это нужно для применений к теории чисел. Во-вторых, даже при доказательстве утверждений над полем $\mathbf{C}$ часто удобно пользоваться свойствами многообразий над конечными полями.

Единственное важное свойство поля $\mathbf{C}$, которое мы будем предполагать выполненным для K, — алгебраическая замкнутость. Это значит, что для K выполняется «основная теорема алгебры» — любой многочлен с коэффициентами в K разлагается на линейные множители (многомерное обобщение см. в 1.5). Отметим, что алгебраически замкнутое поле всегда бесконечно. По аналоги с $\mathbf{C}$, элементы K также называются числами, или константами.

1.2. Аффинное пространство. Пусть n — натуральное число. n-мерным (координатным) *аффинным пространством* называется K^n — n-я декартова степень K. Элементы K^n — это наборы $(x_1, \dots, x_n)$ из n чисел $x_i \in K$. Такие наборы можно покоординатно складывать или умножать на константы, так что K^n — векторное пространство над полем K. Однако алгебраическая геометрия снабжает K^n более слабой структурой, которая состоит в том, что среди отображений $K^n \to K$ (функций) выделяются т. н. алгебраические или регулярные функции[1].

Какие же функции на K^n естественно назвать алгебраическими? Прежде всего константы, отождествляемые с числами из K. Затем координатные функции, т. е. проекции $T_i : K^n \to K$, $T_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. И, наконец, функции, построенные из них в результате элементарных алгебраических операций сложения и умножения. Такие функции называются *регулярными* (чтобы отличать их от рациональных функций; рациональные функции обязательно появятся, но несколько позже). Таким образом, регулярные функции полиномиально выражаются через координатные функции T_i. Более того, в силу бесконечности поля K кольцо регулярных функций на K^n можно отождествить с кольцом многочленов $K[T_1, \ldots, T_n]$ от символов $T_1, \ldots, T_n$ с коэффициентами из K.

Можно было бы отнести к регулярным и функции вида $1/f$, где функция f регулярна и нигде не обращается в нуль. Однако такая функция f обязательно будет константой, и это ничего нового не дает. Здесь используется алгебраическая замкнутость K, ибо над $\mathbf{R}$ функция $1+t^2$ отлична от нуля при всех $t \in \mathbf{R}$.

1.3. Алгебраические подмножества. Алгебраические подмножества в K^n задаются системами алгебраических уравнений. Алгебраическое уравнение — это выражение $f=0$, где f — многочлен от $T_1, \ldots, T_n$. Если дано семейство $F=(f_r, r \in R)$ многочленов, *системой алгебраических уравнений* называется семейство уравнений $(f_r=0, r \in R)$ или коротко $F=0$. Решением (или нулем, или корнем) такой системы называется любая точка $x \in K^n$, для которой $f_r(x)=0$ при всех $r \in R$. Множество всех решений системы $F=0$ обозначается $V(F)$ или $[F=0]$.

Определение. Подмножество K^n называется *алгебраическим*, если оно имеет вид $V(F)$ для некоторого семейства F многочленов от $T_1, \ldots, T_n$.

Например, пустое подмножество, а также всё K^n — алгебраические (взять $F=\{1\}$ или $F=\{0\}$). Пересечение алгебраических подмножеств в любом числе снова алгебраическое, т. к. $\bigcap V(F_j) = V(\bigcup F_j)$. Объединение *конечного* числа аглебраических подмножеств тоже алгебраическое. В самом деле, $V(F_1) \cup V(F_2) = V(F_1 \cdot F_2)$, где $F_1 \cdot F_2$ состоит из произведений $f_1 f_2$, где

[1] Такой способ задания структуры довольно распространен в математике. Например, на множестве комплексных чисел $\mathbf{C}$ можно рассматривать все более общие множества функций: линейные, аффинные, полиномиальные, аналитические, дифференцируемые, непрерывные, измеримые и, наконец, произвольные. Соответственно $\mathbf{C}$ будет объектом линейной алгебры, аффинной геометрии, алгебраической или аналитической геометрии, гладким многообразием, топологическим или измеримым пространством и просто континуальным множеством.

$f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$. Напротив, дополнение к алгебраическому подмножеству $V \subset K_n$ не алгебраическое (кроме $V = \varnothing$. K^n).

Более конкретные примеры. Любая точка $x \in K_n$ является алгебраическим подмножеством. Множество нулей $V(f)$ одной (непостоянной) функции f называется алгебраической *гиперповерхностью*. Гиперповерхности в K^2 называются плоскими аффинными кривыми. Довольно условно такие кривые изображаются рисунками вроде рис. 1.

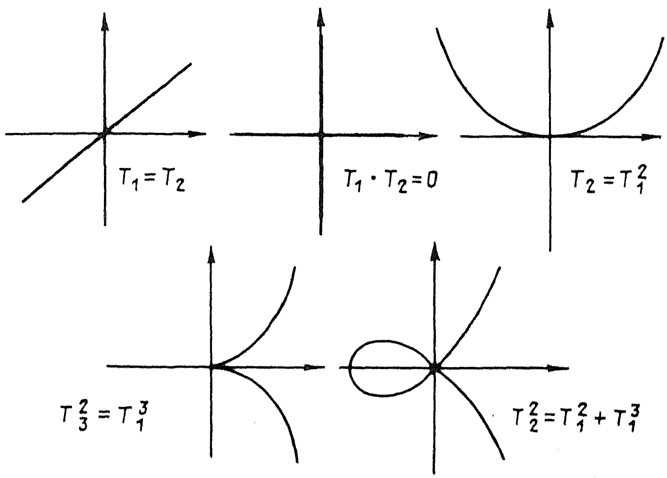


Рис. 1

1.4. Системы алгебраических уравнений и идеалы. Разные системы уравнений могут иметь одно и то же множество решений. В самом деле, если к системе F добавить многочлен $\Sigma f_j g_j$, где $f_j \in F$, а $g_j \in K[T_1, \ldots, T_n]$, множество решений не изменится. Скажем, что $\Sigma f_j g_j$ алгебраически выражается через семейство F. Назовем семейства F и F' эквивалентными, если любой член F алгебраически выражается через F', и наоборот. Ясно, что F и F' эквивалентны тогда и только тогда, когда они порождают один и тот же идеал в кольце $K[T_1, \ldots, T_n]$. Переход к идеалам полезен благодаря следующей *теореме Гильберта о базисе:*

Теорема. Любой идеал в кольце многочленов $K[T_1, \ldots, T_n]$ порождается конечным числом элементов.

Иначе говоря, кольцо многочленов над (любым) полем нётерово. Как следствие мы получаем, что любая система алгебраических уравнений эквивалентна *конечной* системе уравнений, или что любое алгебраическое подмножество является пересечением конечного числа гиперповерхностей.

Как уже говорилось, эквивалентные системы уравнений имеют одинаковые множества решений; однако и неэквивалентные системы могут давать одно и то же подмножество. Причина здесь крайне проста — нули у многочленов f, f^2, f^3 и т. д. одинаковы. Иначе говоря, извлечение корня также не меняет нулей. В этой связи скажем, что семейства F и F' слабо эквивалентны, если для любого элемента $f \in F$ некоторая его степень f^r алгебраически выражается через F', и наоборот. Слабо эквивалентные системы уравнений снова имеют одинаковые множества нулей. Как мы сейчас увидим, верно и обратное. В любом случае, для каждого алгебраического подмножества $V \subset K^n$ существует наибольший идеал, задающий V, — это идеал $I(V)$ всех регулярных функций, равных нулю во всех точках V.

1.5. Теорема Гильберта о нулях. Начнем с простейшего случая. Ясно, что единичный идеал $I = K[T_1, \ldots, T_n]$ задает пустое подмножество $V(I)$. Гораздо менее очевидно, что верно и обратное; это утверждение называется слабой *теоремой Гильберта о нулях.*

Теорема. *Если идеал $I \subset K[T_1, \ldots, T_n]$ отличен от единичного, подмножество $V(I)$ непусто.*

Здесь существенно, что поле K алгебраически замкнуто, ибо $1+t^2 \neq 0$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Так как эта теорема играет важную роль, наметим кратко ее доказательство. Можно считать, что идеал I максимальный (среди неединичных, как обычно). В этом случае факторалгебра $K[T_1, \ldots, T_n]/I$ является полем, содержащим K. Если мы покажем, что эти два поля совпадают, то, обозначая через t_i образы T_i в K, мы получаем, что точка $t = (t_1, \ldots, t_n)$ принадлежит $V(I)$. Итак, остается показать, что поле $K[T_1, \ldots, T_n]/I$ изоморфно K (это утверждение аналогично теореме И. М. Гельфанда и Мазура о максимальных идеалах банаховых алгебр). В силу алгебраической замкнутости K это утверждение следует из чисто алгебраической леммы:

Лемма. *Пусть K — произвольное поле, L — K-алгебра конечного типа. Если L является полем, то оно алгебраично над K.*

Доказательство леммы использует понятие целой зависимости, которое нам еще понадобится и с которым можно подробнее познакомиться в [19], [23], [65]. Пусть $A \subset B$ — два коммутативных кольца; элемент $b \in B$ называется *целым* над A, если он удовлетворяет уравнению целой зависимости $b^m + a_1 b^{m-1} + \ldots + a_m = 0$, $a_i \in A$. Здесь существенно, что старший коэффициент равен 1. Если все элементы B — целые над A, алгебра B называется *целой* над A. Суммы и произведения целых элементов снова целые, поэтому множество целых элементов в B является подалгеброй в B, которая называется *целым замыканием* A в B.

Перейдем к доказательству леммы. Пусть алгебра L порождается элементами $x, x_1, \ldots, x_n$. Так как L — поле, L содержит поле $K(x)$. По индуктивному предположению, примененному к $K(x)\subset L$, элементы $x_1, \ldots, x_n$ алгебраичны над $K(x)$. Если x алгебраичен над K, то все доказано. Предположим поэтому, что x трансцендентен над K, т. е. кольцо $K[x]$ изоморфно кольцу многочленов от x. Так как x_i алгебраичны над $K(x)$, существуют многочлены $f_i(T)$ с коэффициентами из $K[x]$, для которых $f_i(x_i)=0$. Обозначая через $g\in K[x]$ произведение старших коэффициентов f_i, мы получаем, что x_i — целые над кольцом $A=K[x][g^{-1}]$. Но тогда все L цело над A. Отсюда следует немедленно, что A тоже поле. В самом деле, пусть a — ненулевой элемент A; так как $a^{-1}\in L$, a^{-1} цел над A. Это значит, что $a^{-m}+a_1a^{-m+1}+\ldots+a_m=0$, где $a_j\in A$, т. е. $1+a_1a+\ldots+a_ma^m=0$, откуда $a^{-1}=-(a_1+\ldots+a_ma^{m-1})\in A$. С другой стороны, ясно, что A не поле, например, $1+g$ не обратимо в A. Это противоречие доказывает лемму и теорему.

Следствие (теорема Гильберта о нулях). Пусть I — идеал в $K[T_1, \ldots, T_n]$, и многочлен f обращается в нуль во всех точках множества $V(I)\subset K^n$. Тогда $f^r\in I$ для некоторого целого $r\geqslant 0$.

В пространстве K^{n+1} с координатами $T_0, T_1, \ldots, T_n$ рассмотрим подмножество $V'=K\times V$ нулей многочленов из I. Функция $1-T_0\cdot f$ отлична от нуля во всех точках V'. По предыдущей теореме $1-T_0f$ и I порождают единичный идеал в $K[T_0, T_1, \ldots, T_n]$. Записывая это и подставляя $1/f$ вместо T_0, мы и получим $f^r\in I$.

§ 2. Аффинные алгебраические многообразия

2.1. Аффинные многообразия. Идея алгебраических подстановок и преобразований решений алгебраических уравнений приводит к понятию отображений между алгебраическими множествами.

Пусть $V\subset K^n$ и $W\subset K^m$ — два алгебраических подмножества. Отображение $f: V\to W$ называется *регулярным* (или морфизмом), если оно задается m регулярными функциями $f_1, \ldots, f_m\in K[T_1, \ldots, T_n]$, т. е. если оно продолжается до регулярного отображения объемлющих пространств $K^n\to K^m$. Композиция регулярных отображений снова регулярное отображение. Таким образом алгебраические множества вместе с регулярными отображениями образуют категорию. Объекты этой категории называются *аффинными алгебраическими многообразиями* (или просто аффинными многообразиями). Так координатное пространство K^n, рассматриваемое как аффинное многообразие, обозначается $\mathbf{A}^n$ и называется n-мерным *аффинным пространством* (прямой и плоскостью при $n=1$ и 2).

Различные алгебраические множества (и даже вложенные в разные K^n) могут при этом оказаться изоморфными, т. е. одинаковыми в определенном смысле. Так «прямая» $T_2=T_1$ и «парабола» $T_2=T_1^2$ в K^2 изоморфны между собой, а также изоморфны аффинной прямой $\mathbf{A}^1$.

Регулярные отображения алгебраического множества V в K называются *регулярными функциями* на V. Регулярные функции можно складывать и перемножать, так что они образуют кольцо (и даже K-алгебру) $K[V]$. Для алгебраического подмножества $V\subset K^n$ алгебра $K[V]$ отождествляется с факторалгеброй $K[T_1, \ldots, T_n]/I(V)$. Вложение $V\subset K^n$ также восстанавливается по образующим $t_i=T_i|V$ алгебры $K[V]$.

Понятие морфизма легко переписывается в терминах регулярных функций. Отображение $f: V\to W$ регулярно тогда и только тогда, когда для любой регулярной функции $g\in K[W]$ функция $f^*(g)=g\circ f$ регулярна на V. Отображение $f^*: K[W]\to K[V]$ является в этом случае гомоморфизмом K-алгебр. Обратно, любой такой гомоморфизм $K[W]\to K[V]$ индуцируется морфизмом $V\to W$.

Взгляд на аффинное многообразие как на множество V с дополнительной структурой — алгеброй $K[V]$ регулярных функций на V — оказывается очень полезным в концептуальном отношении. В стиле Г. Вейля можно сказать, что формулу-уравнение $F=0$, которая могла бы соблазнить на механические вычисления, мы заменяем кольцом $K[V]$; так мы отвлекаемся от несущественных характеристик и принимаем во внимание в равной мере все уравнения, получающиеся из исходного путем рационального преобразования переменных.

2.2. Абстрактные аффинные многообразия. K-алгебра $K[V]$ регулярных функций на алгебраическом множестве V обладает двумя специфическими чертами. Во-первых, она порождается конечным числом образующих, т. е. имеет конечный тип. Во-вторых, будучи алгеброй функций со значениями в поле K, она не имеет нильпотентов (кроме 0), т. е. приведенная. Наконец, по теореме Гильберта о нулях сопоставление точке $x\in V$ максимального идеала $I(x)=\{f\in K[V],\ f(x)=0\}$ является биекцией между V и множеством $\operatorname{Specm} K[V]$ максимальных идеалов кольца $K[V]$.

Эти свойства позволяют дать абстрактное определение *аффинного многообразия* над K как тройки $(X, K[X], \varphi)$, где X — множество, $K[X]$ — приведенная K-алгебра конечного типа, а φ — биекция X на $\operatorname{Specm} K[X]$.

Элементы X называются при этом точками этого многообразия, а элементы $K[X]$ — регулярными функциями на нем. В самом деле, для $x\in X$ и $f\in K[X]$ имеет смысл $f(x)$ — значение f в точке x. По определению это образ f при композиции

$$K[X]\xrightarrow{\alpha} K[X]/\varphi(x)\overset{\beta}{\cong} K,$$

где α — проекция на факторалгебру, а β — структурный гомоморфизм K-алгебр, биективный в силу теоремы Гильберта о нулях. Биективность φ означает, что и точек, и функций достаточно много: функций — чтобы различать точки, точек — чтобы реализовывать все гомоморфизмы K-алгебр $K[X]\to K$. В дальнейшем мы не будем писать φ, подразумевая значения в точках.

В этих терминах *морфизмом* $(X, K[X])$ в $(Y, K[Y])$ называется пара (f, f^*), состоящая из отображения $f: X\to Y$ и гомоморфизма K-алгебр $f^*: K[Y]\to K[X]$, таких что $f^*(g(x))=g(f(x))$ для любых $g\in K[Y]$ и $x\in X$. Впрочем, f и f^* взаимно определяют друг друга.

Любое абстрактное аффинное многообразие $(X, K[X])$ изоморфно алгебраическому множеству в подходящем аффинном пространстве K^n. Для этого надо взять образующие $t_1, \ldots, t_n$ алгебры $K[X]$ и с их помощью вложить X в K^n.

2.3. Аффинные схемы. Если в определении абстрактного аффинного многообразия отбросить требование приведенности кольца $K[X]$, мы получим объект, который будем называть *аффинной алгебраической K-схемой* (коротко — аффинной схемой). Элементы $K[X]$ определяют, как и в 2.2, отображения $X\to K$, однако их уже нельзя в общем случае отождествлять с функциями. Дело в том, что ненулевые элементы $K[X]$ могут давать функции, тождественно равные нулю на X. Впрочем, по теореме Гильберта о нулях это может случиться лишь для нильпотентных элементов $K[X]$.

Морфизмы аффинных схем определяются дословно так же, как для аффинных многообразий в п. 2.2; однако теперь отображение f на точках уже не определяет f^*. Приведем несколько примеров схем.

Пример 1. Каждое аффинное многообразие является аффинной схемой. Обратно, с каждой аффинной схемой X канонически связано аффинное многообразие $X_{\mathrm{red}}=(X, K[X]/I(X))$. Здесь $I(X)$ — идеал элементов $K[X]$, равных нулю во всех точках X, т. е. идеал нильпотентов.

Пример 2. Пусть A — произвольная коммутативная K-алгебра конечного типа. С ней связана аффинная схема $(\mathrm{Specm}A, A)$, обозначаемая также $\mathrm{Specm}\,A$. Гомоморфизмы K-алгебр дают морфизмы (направленные в противоположную сторону) аффинных схем. Таким образом, категория аффинных схем антиэквивалентна категории K-алгебр конечного типа.

Пример 3. Пусть $(X, K[X])$ — аффинная схема, I — идеал в $K[X]$. Тогда подмножество $V(I)$ нулей I, снабженное кольцом $K[X]/I$, является аффинной схемой. Она называется *подсхемой* в X, заданной идеалом I. Например, подсхема в X, заданная идеалом $I(X)$, есть ассоциированное многообразие X_{red}.

Рассмотрим, например, подсхему прямой $\mathbf{A}^1$, заданную уравнением $T^2=0$ (или идеалом (T^2)). Ее кольцо $K[T]/(T^2)$ состоит из выражений $a+bT$, где a, $b\in K$. Эти выражения «помнят» не только значение функции в точке 0 (т. е. a), но и ее производную (т. е. b). Поэтому и в общем случае подсхему, заданную идеалом I, представляют как «инфинитезимальную окрестность» множества $V(I)\subset\mathbf{A}^n$.

Как и аффинные многообразия, аффинные схемы реализуются как подсхемы подходящих аффинных пространств $\mathbf{A}^n$. Мы не будем систематически пользоваться языком схем до главы 4, однако знать о нем надо. Многие естественные конструкции приводят именно к схемам, даже если мы исходим из многообразий. Конечно, всегда можно перейти к ассоциированному многообразию, но при этом может утеряться важная геометрическая информация. Недаром схемы появляются даже в таких далеких от них книгах, как [1] или [32].

Приведем несколько простых способов строить новые аффинные многообразия из уже имеющихся.

2.4. Произведения аффинных многообразий. Пусть X и Y — аффинные многообразия; тогда декартово произведение $X\times Y$ также обладает естественной структурой аффинного многообразия. Более точно, произведение естественно появляется как аффинная схема $(X\times Y,\ K[X]\otimes_K K[Y])$. И уже теоремой является утверждение, что эта схема — многообразие. Для этого надо проверить, что ненулевой элемент $\Sigma f_j\otimes g_j$ тензорного произведения $K[X]\otimes_K K[Y]$ дает ненулевую функцию $\Sigma f_j(x)g_j(y)$ на $X\times\times Y$. Функции f_j можно считать линейно независимыми; тогда если $y\in Y$ — точка, где некоторое $g_j(y)\neq 0$, то функция $\Sigma f_j g_j(y)$ на X отлична от нуля.

Например, $\mathbf{A}^n\times\mathbf{A}^m$ изоморфно $\mathbf{A}^{n+m}$.

Произведение $X\times Y$ обладает каноническими морфизмами— проекциями на X и Y и, вообще, является прямым произведением в категории аффинных многообразий. *Графиком морфизма* $f: X\to Y$ называется подмногообразие Γ_f в $X\times Y$, заданное уравнениями $1\otimes g=f^*(g)\otimes 1$, $g\in K[Y]$. Как множество Γ_f состоит из пар $(x, y)\in X\times Y$, для которых $f(x)=y$. В частности, *диагональ* $\Delta_X\subset X\times X$ (график тождественного морфизма $X\to X$) является подмногообразием в $X\times X$.

2.5. Пересечение подмногообразий. Пусть Y и Z — подмногообразия аффинного многообразия X; тогда пересечение $Y\cap Z$ также подмногообразие в X. Однако более естественно и правильно понимать это пересечение как *подсхему* в X, заданную идеалом $I(Y)+I(Z)$. При этом появление нильпотентов у схемы $Y\cap Z$ свидетельствует о нетрансверсальности Y и Z.

Пример 1. Пусть $X=\mathbf{C}^2$ с координатами T и S, Y — «парабола» $[S=T^2]$, Z — «горизонтальная» прямая $[S=0]$. Теоретико-множественное пересечение Y и Z состоит из одной точки. Схемное же пересечение устроено интереснее и задается идеалом $(S, S+T^2)=(S, T^2)$; в частности, оно изоморфно схеме из примера 3. Это связано с тем, что прямая Z касается кривой Y (см. рис. 2).

Если же вместо $\mathbf{Z}$ рассмотреть другую «горизонтальную» прямую $Z_y=[S=y]$, $y \in \mathbf{C}-\{0\}$, то пересечение $Y \cap Z_y$ состоит из двух точек $(\pm\sqrt{y}, y)$, даже в схемном смысле.

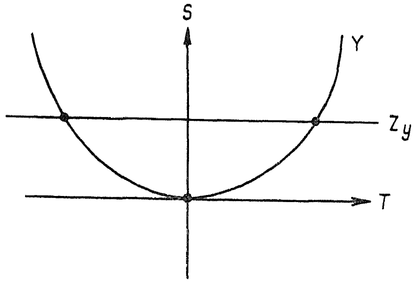


Рис. 2

Пример 2. Пусть Y — подмногообразие в X, а Y' — в X'. Пересечение $Y \times X'$ и $X \times Y'$ в $X \times X'$ является многообразием $Y \times Y'$. Это отвечает интуитивному чувству, что многообразия $Y \times X'$ и $X \times Y'$ расположены в $X \times X'$ трансверсально.

2.6. Слои морфизма. Пусть $f: X \to Y$ — морфизм аффинных многообразий. Образ $f(X)$ в общем случае не будет подмногообразием в Y. Пусть, например, $X=[T_1T_2=1]$ — «гипербола» в K^2, а f — проекция на ось T_1. Тогда $f(X)=K-\{0\}$ и не является алгебраическим подмножеством в K.

С прообразами дело обстоит лучше. Для точки $y \in Y$ подмножество $f^{-1}(y)=\{x \in X,\ f(x)=y\}$ является алгебраическим подмногообразием в X. Однако его снова лучше рассматривать как *подсхему* в X, заданную идеалом $f^*(m_y)K[X]$, где m_y — максимальный идеал точки $y \in Y$. Схема $f^{-1}(y)$ называется *слоем* морфизма f над точкой y; она изоморфна пересечению графика Γ_f с «горизонталью» $X \times \{y\}$ в $X \times Y$. Такая терминология вызвана тем, что многообразие X как бы расслаивается на многообразия (или схемы) $f^{-1}(y)$, где y пробегает точки Y.

Снова наличие нильпотентов в кольце схемы $f^{-1}(y)$ свидетельствует о какой-то особенности морфизма, ветвлении, кратных слоях и т. п. Так, на рис. 2 изображен график отображения $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(x)=x^2$. При $y \neq 0$ слой $f^{-1}(y)$ приведен и состоит из двух различных точек $\pm\sqrt{y}$; при $y=0$ эти две точки сливаются в одну «двойную» точку 0, из-за чего и появляются нильпотенты. Рассмотрим еще два примера.

Пример 1. Пусть $f: K \to K^2$ переводит точку t в точку (t^2, t^3). Его график Γ_f — кривая в K^3, заданная параметрически (t, t^2, t^3), $t \in K$, или уравнениями $T_1=T^2$. $T_2=T^3$. Образ f — кривая $C \subset K^2$ с уравнением $T_1{}^3=T_2{}^2$. Хотя f и задает биекцию между K и C, он не является изоморфизмом аффинных многообразий. Дело в том, что слой $f^{-1}(p)$ содержит нильпотенты (график Γ_f касается оси T); геометрически это проявляется в том, что точка P особа на C (см. рис. 3).

Пример 2. Еще более поразительный эффект бывает, когда поле K имеет положительную характеристику $p>0$. Пусть отображение $F:K\to K$ задается формулой $F(x)=x^p$ (или $S=T^p$); оно называется *морфизмом Фробениуса*. Теоретико-множественно оно взаимно однозначно (если $x^p=x'^p$, то $(x-x')^p=x^p-x'^p=0$ и $x=x'$), однако снова не изоморфизм. Более того, для любой точки $y\in K$ слой $F^{-1}(y)$ задается идеалом $(T^p-y)=(T-\sqrt[p]{y})^p$ и поэтому неприведен. Отображение F критическое во всех точках (это видно и из вычисления производной: $dT^p/dT=pT^{p-1}\equiv 0$); во всех точках график его касается горизонтали, и все же F не постоянно!

Вообще, пусть $f:X\to Y$ — морфизм аффинных многообразий, и $Z\subset Y$ — подсхема, заданная идеалом $J\subset K[Y]$. Схемным прообразом Z при f называется подсхема $f^{-1}(Z)$ в X, задаваемая идеалом $f^*(J)K[X]$. Например, пересечение подмногообразий Y

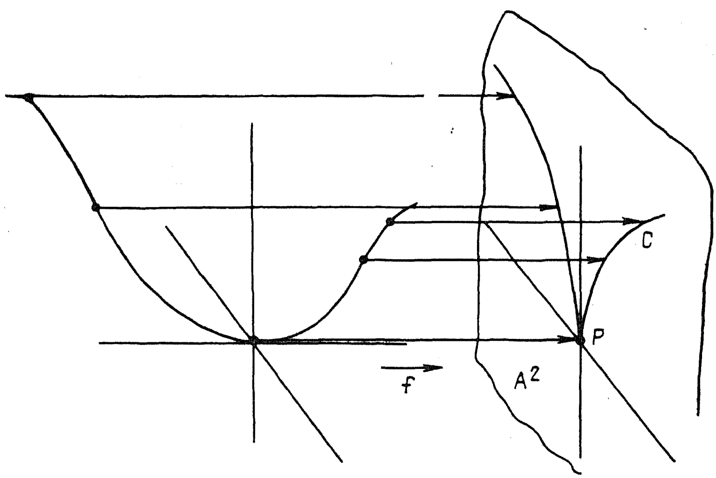


Рис. 3

и Z в X можно рассматривать как прообраз диагонали $\Delta_X\subset X\times\times X$ при вложении $Y\times Z\subset X\times X$, или как пересечение $Y\times Z$ с Δ_X в $X\times X$. Последний прием часто бывает полезен и называется *редукцией к диагонали*. График Γ_f — прообраз диагонали при морфизме $id\times f: X\times Y\to X\times X$. Связь операций произведения, пересечения и прообраза не случайна — это все частные случаи более общей операции расслоенного произведения, см. п. 4.2.

2.7. Топология Зарисского. Как в п. 1.3, алгебраическим подмножеством (или подмногообразием) аффинного многообразия X называется множество $Y(I)$ общих нулей функций из некоторого *идеала* $I \subset K[X]$. Как и раньше, алгебраические подмножества в X замкнуты относительно пересечений и конечных объединений. Поэтому их можно объявить замкнутыми множествами некоторой топологии на X, называемой *топологией Зарисского*.

Пусть $f: X \to Y$ — морфизм аффинных многообразий. Как мы видели, прообраз $f^{-1}(V)$ любого алгебраического подмножества $V \subset Y$ алгебраичен в X. Это значит, что отображение f непрерывно в топологии Зарисского. В частности, любая регулярная функция непрерывна. Обратно, топология Зарисского — слабейшая топология, в которой точки замкнуты, а регулярные функции непрерывны. Если Y — подмногообразие в X, то топология на Y совпадает с топологией, индуцированной с X.

Отметим, что образ аффинного многообразия не обязательно открыт или замкнут. В самом деле, рассмотрим пример морфизма $f: \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$, заданного формулой $f(x, y) = (x, xy)$ (см. рис. 4). Его образ состоит из точки $(0, 0)$ и открытого множества $U = \{(x, y), x \neq 0\}$. Это множество $U \cup \{(0, 0)\}$ не замкнуто, даже локально. Однако оно состоит из (двух) локально замкнутых кусков — точки $(0, 0)$ и U. Позже мы увидим, что похоже обстоит дело всегда: образ алгебраического многообразия является объединением конечного числа локально замкнутых кусков.

Топология Зарисского очень естественна, и в абстрактном случае трудно придумать что-то лучше. И все же во многих отношениях она выглядит непривычной по сравнению с обычной метрической топологией на $\mathbf{C}^n$. Полиномиальные функции

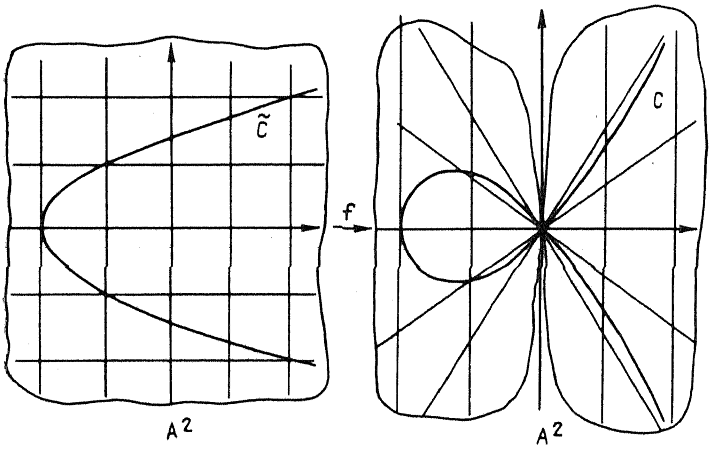


Рис. 4

на $\mathbf{C}^n$ конечно непрерывны в топологии, задаваемой евклидовой метрикой. Поэтому классическая топология на $\mathbf{C}^n$ сильнее, чем топология Зарисского. Иначе говоря, открытое (соответственно замкнутое) по Зарисскому подмножество будет открытым (соответственно замкнутым) в классической топологии. Обратное неверно; например, алгебраические подмножества в $\mathbf{C}$ исчерпываются конечными подмножествами (и всем $\mathbf{C}$). Таким образом, открытые по Зарисскому подмножества «очень большие», в частности, топология Зарисского сильно нехаусдорфова.

Другое отличие от классической топологии в том, что топология Зариского на произведении $X \times Y$ двух аффинных многообразий сильнее произведения топологий Зарисского на X и Y. Так, в $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1$ есть много алгебраических подмножеств, отличных от вертикальных и горизонтальных прямых (например, диагональ).

Хотя классическая топология далека от топологии Зарисского, их не разделяет непроходимая пропасть. Вот простейший связывающий мостик: если открытое $U \subset X$ плотно в топологии Зарисского, оно плотно и в классической топологии. Более тонким фактом является теорема о связности: из связности в топологии Зарисского следует связность в классической топологии. Подробнее о результатах такого рода говорится в статье о когомологиях алгебраических многообразий. Это позволяет применять к комплексным алгебраическим многообразиям методы алгебраической топологии (гомотопии, когомологии и т. д.) и анализа (периоды интегралов, теория Ходжа); представление о них дает книга [32]. Трансцендентные методы служат мощным стимулом для поиска их алгебраических аналогов и способствуют дальнейшему развитию абстрактной алгебраической геометрии.

2.8. Локализация. Топология Зарисского позволяет более локально определить понятие регулярной функции. Пусть $U \subset X$ открытое подмножество аффинного многообразия X, и функция $f \in K[X]$ отлична от нуля во всех точках U. Тогда функция $1/f$ определена во всех точках U и может считаться «регулярной» функцией на U в силу ее алгебраического происхождения (см. 1.2). Регулярными надо считать тогда и функции вида g/f, где $g \in K[X]$.

Вообще, скажем, что функция $h: U \to K$ *регулярна в точке* $x \in U$, если существуют функции f, $g \in K[X]$, такие что $f(x) \neq 0$ и $h = g/f$ в некоторой окрестности точки x. Более точно можно сказать, что h совпадает с g/f на множестве $U \cap \mathscr{D}(f)$, где $\mathscr{D}(f) = X - V(f) = \{x' \in X,\ f(x') \neq 0\}$. Множества вида $\mathscr{D}(f)$ называются *главными открытыми подмножествами* в X и образуют, очевидно, базу топологии Зариского на X.

Функции на U, регулярные во всех точках U, образуют кольцо, обозначаемое $\mathcal{O}_X(U)$. Если $U' \subset U$, то ограничение функций с U на U' дает гомоморфизм колец (или K-алгебр) $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U')$. Такой объект $\mathcal{O}_X$ в дальнейшем будет играть важную роль и называться структурным пучком колец на X. Ясно, что $K[X] \subset \mathcal{O}_X(X)$; на самом деле здесь равенство.

Предложение. $K[X] = \mathcal{O}_X(X)$ для аффинного многообразия X.

Действительно, пусть функция $h: X \to K$ регулярна в каждой точке $x \in X$. Тогда $h = g_x/f_x$ в $\mathcal{D}(f_x)$ и $f_x(x) \neq 0$. По теореме Гильберта о нулях функции f_x, $x \in X$, порождают единичный идеал в $K[X]$. Поэтому существует разложение $1 = \Sigma a_x f_x$, где $a_x \in K[X]$. Но тогда $h = h \cdot 1 = \Sigma a_x h f_x = \Sigma a_x g_x \in K[X]$.

В силу этого предложения можно не опасаться двусмысленности, говоря о регулярных функциях. Представление $1 = \Sigma a_x f_x$ играет роль, аналогичную разложению единицы в теории дифференцируемых многообразий.

2.9. Квазиаффинные многообразия. Пусть снова U — открытое подмножество аффинного многообразия X. В общем случае пара $(U, \mathcal{O}_X(U))$ не является аффинным многообразием. Во-первых, K-алгебра $\mathcal{O}_X(U)$ может не порождаться конечным числом элементов. Во-вторых, в U может оказаться «мало» точек, т. е. отображение $U \to \operatorname{Specm} \mathcal{O}_X(U)$ (см. п. 2.2) может быть не сюръективным.

Пример. Покажем, что $U = \mathbf{A}^n - \{0\}$ не аффинно при $n \geqslant 2$. Для этого проверим, что $\mathcal{O}_{\mathbf{A}^n}(U)$ совпадает с $K[\mathbf{A}^n]$. Иначе говоря, любая регулярная функция на $\mathbf{A}^n - \{0\}$ продолжается до регулярной функции на $\mathbf{A}^n$. Это свойство напоминает теорему Хартогса в теории аналитических функций и резко отличается от ситуации в дифференцируемом случае.

В самом деле, пусть функция f регулярна на U. Покроем U множествами $\mathcal{D}(T_i)$, где T_i — координаты на $\mathbf{A}^n$. Тогда ограничение f на $\mathcal{D}(T_i)$ имеет вид $g_i/T_i^{r_i}$, где $g_i \in K[T_1, \ldots, T_n]$, а $r_i \geqslant 0$; можно также считать, что g_i не делятся на T_i. Из совпадения на $\mathcal{D}(T_1) \cap \mathcal{D}(T_2)$ мы получаем $T_1^{r_1} g_2 = T_2^{r_2} g_1$. Из однозначности разложения на простые множители в кольце многочленов $K[T_1, \ldots, T_n]$ заключаем, что $r_1 = r_2 = 0$ и $g_1 = g_2 = f$.

Напротив, главные открытые множества $\mathcal{D}(f) \subset X$ являются аффинными многообразиями. Приведем еще два связанных с этим факта. Кольцо $\mathcal{O}_X(\mathcal{D}(f))$ регулярных функций на $\mathcal{D}(f)$ совпадает с кольцом $K[X][f^{-1}]$ дробей вида g/f^r, где $g \in K[X]$, $r \geqslant 0$. Топология Зарисского на $\mathcal{D}(f)$ индуцируется топологией Зарисского на X.

В любом случае открытые подмножества аффинных многообразий локально устроены как аффинные многообразия. Они называются *квазиаффинными алгебраическими многообразиями*.

2.10. Аффинная алгебраическая геометрия. Хотя алгебраическая геометрия главным образом имеет дело с проективными многообразиями, стоит отметить, что и аффинная алгебраическая геометрия имеет свои задачи, зачастую неожиданно трудные. Трудности возникают уже для простейших аффинных многообразий — аффинных пространств $\mathbf{A}^n$. Упомянем проблему Серра о векторных расслоениях на $\mathbf{A}^n$, решенную лишь сравнительно недавно (см. [12, 57]). Другая известная проблема: пусть многообразие $X \times \mathbf{A}^m$ изоморфно $\mathbf{A}^{n+m}$; верно ли, что X изоморфно $\mathbf{A}^n$? Утвердительный ответ очевиден при $n=1$ и лишь недавно был получен для $n=2$ (см. [51]); при $n>2$ вопрос открыт.

Возможно, причина затруднений состоит в том, что пространство $\mathbf{A}^n$ (во всяком случае при $n>1$) очень «гибкое». Как легко понять, автоморфизмы $\mathbf{A}^1$ имеют вид $T'=aT+b$, где a, $b \in K$ и $a \neq 0$. Автоморфизмов $\mathbf{A}^n$ при $n>1$ гораздо больше, как видно из примера треугольного преобразования

$$\begin{aligned} T_1' &= T_1 + f_0, \\ T_2' &= T_2 + f_1(T_1), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ T_n' &= T_n + f_{n-1}(T_1, \ldots, T_{n-1}), \end{aligned}$$

где $f_i \in K[T_1, \ldots, T_i]$. В частности, любое конечное подмножество $\mathbf{A}^n$ при $n>1$ можно перевести автоморфизмом в любое другое конечное подмножество той же мощности. При $n=2$ любой автоморфизм $\mathbf{A}^n$ порождается треугольными и линейными автоморфизмами. При $n>2$ это неизвестно и, скорее всего, неверно. К этим задачам близка проблема линеаризации действия алгебраических групп на $\mathbf{A}^n$.

Наконец, надо упомянуть т. н. проблему якобиана. Пусть отображение $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ задается многочленами $f_1, \ldots, f_n$ из $\mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$. Предположим, что якобиан $\det(\partial f_j / \partial T_i)$ нигде не обращается в нуль на $\mathbf{C}^n$ (можно считать, что он тождественно равен 1). Гипотеза якобиана состоит в том, что тогда f является изоморфизмом. Обсуждение этой проблемы см. [21].

§ 3. Алгебраические многообразия

Уже довольно давно было понятно, что рассматривая только аффинные многообразия, мы получаем неполную картину происходящего, видим лишь как бы только часть настоящего многообразия. Связано это с некомпактностью аффинного пространства, с тем, что не контролируется поведение «на бесконечности». Например, за исключением параллельных, любые прямые на аффинной плоскости пересекаются. Удобно предположить тогда, что и параллельные пересекаются, но в «бесконечно удаленной точке». Добавление таких точек к аффинному пространству $\mathbf{A}^n$ превращает его в проективное пространство

$\mathbf{P}^n$. Другое удобство проективной точки зрения в том, что такие аффинно разные кривые, как эллипс, парабола и гипербола есть просто разные аффинные части коники. По этой причине алгебраическая геометрия была и есть по преимуществу геометрия проективная. И нам нужно от аффинных многообразий переходить к более общим алгебраическим многообразиям.

3.1. Проективное пространство. Проще всего n-мерное *проективное пространство* $\mathbf{P}^n$ определить как множество прямых в векторном пространстве K^{n+1}. Каждая прямая, т. е. одномерное векторное подпространство $L \subset K^{n+1}$, задается ненулевым вектором $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1}$, рассматриваемым с точностью до умножения на ненулевую константу $\lambda \in \mathbf{K}^* = \mathbf{K} - \{0\}$. Поэтому можно сказать, что $\mathbf{P}^n$ есть факторпространство $K^{n+1} - \{0\}/K^*$.

Координатные функции $T_0, \ldots, T_n$ на K^{n+1} называются *однородными координатами* на $\mathbf{P}^n$. Стоит предостеречь, однако, что T_i не являются функциями на $\mathbf{P}^n$, как и любые многочлены от T_i (кроме констант, конечно). Выражения типа T_j/T_i можно рассматривать как функции, но не на всем $\mathbf{P}^n$, а лишь на части $U_i = \mathbf{P}^i - H_i$, где H_i состоит из точек $(x_0, \ldots, x_n)$ с $x_i = 0$. Иначе говоря, U_i состоит из прямых $L \subset K^{n+1}$, изоморфно проектирующихся на i-ю координатную ось. При фиксированном i функции $\xi_j^{(i)} = T_j T_i^{-1}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, задают взаимно однозначное соответствие U_i с аффинным подпространством $T_i = 1$ в K^{n+1}.

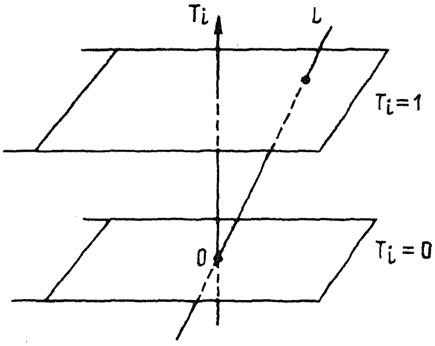


Рис. 5

При этом H_i состоит из прямых L, лежащих в гиперплоскости $T_i = 0$ и отождествляется с $\mathbf{P}^{n-1}$. В этом смысле $\mathbf{P}^n$ получается из аффинного пространства $U_i \simeq K^n$ прибавлением бесконечно удаленной гиперплоскости $H_i \simeq \mathbf{P}^{n-1}$.

Множества U_i образуют покрытие $\mathbf{P}^n$, и каждое U_i обладает естественной структурой аффинного многообразия $\mathbf{A}^n$. При этом на пересечениях $U_i \cap U_j$ эти структуры согласованы. В самом деле, $U_i \cap U_j$ можно рассматривать как главное открытое множество $\mathscr{D}(\xi_j^{(i)})$ в U_i, а также как главное открытое множество $\mathscr{D}(\xi_i^{(j)})$ в U_j. В первом случае кольцо регулярных функций порождается $\xi_0^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}$, $\xi_j^{(i)-1}$, во втором — $\xi_0^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}$, $\xi_i^{(j)-1}$. Но эти кольца совпадают. Например,

$$\xi_k^{(i)} = T_k/T_i = (T_k/T_j)(T_i/T_j)^{-1} = \xi_k^{(j)} \cdot \xi_i^{(j)-1}$$

и

$$\xi_j^{(i)-1} = (T_j/T_i)^{-1} = T_i/T_j = \xi_i^{(j)}.$$

Обратно, $\xi^{(j)}$ выражаются через $\xi^{(i)}$.

Таким образом, $\mathbf{P}^n$ локально устроено как аффинное многообразие. Поэтому можно говорить о регулярных функциях на $\mathbf{P}^n$ (правда, их мало — только константы), об алгебраических подмногообразиях $\mathbf{P}^n$ (их уже много), топологии Зариского и т. д. Подобные понятия применимы не только к $\mathbf{P}^n$, но и к любому геометрическому объекту, локально устроенному как аффинное многообразие. Возникающая при этом теория алгебраических многообразий во многом параллельна теории дифференцируемых или аналитических многообразий.

3.2. Атласы и многообразия. Пусть X — топологическое пространство. *Аффинной картой* в X назовем открытое подмножество $U \subset X$, снабженное структурой аффинного многообразия; при этом требуется, чтобы топология U совпадала с топологией Зариского. Карты U и U' в X называются *согласованными*, если для любого открытого $V \subset U \cap U'$ выполняется $\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}_{U'}(V)$.

Атласом на X называется семейство $\mathscr{A} = (U_i)_{i \in I}$ попарно согласованных аффинных карт, покрывающих X. Два атласа $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$ *эквивалентны*, если их объединение снова атлас, т. е. если карты из $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$ согласованные.

Структурой *алгебраического многообразия* на X называется класс эквивалентных атласов. В дальнейшем мы ограничимся только теми алгебраическими многообразиями, которые обладают *конечным* атласом. Картой на многообразии называется аффинная карта некоторого атласа, задающего структуру на X; у любой точки существует сколь угодно малая карта.

Любое аффинное многообразие является алгебраическим многообразием. Любое замкнутое подмножество $Y \subset X$ алгебраического многообразия снабжается канонической структурой алгебраического многообразия; говорят также, что Y — *подмногообразие* (или замкнутое подмногообразие) в X. Если $U \subset X$ — открытое подмножество, оно также обладает очевидной структурой алгебраического многообразия.

Покрытие U_i проективного пространства $\mathbf{P}^n$ является атласом и превращает $\mathbf{P}^n$ в алгебраическое многообразие. Вообще, если V — конечномерное векторное пространство над K, обозначим через $\mathbf{P}(V)$ множество прямых в V, проходящих через

0. Если $l: V \to K$ — ненулевой линейный функционал, пусть $H_l \subset \subset \mathbf{P}(V)$ состоит из прямых $L \subset \operatorname{Ker} l$. Тогда $U_l = \mathbf{P}(V) - H_l$ состоит из таких прямых L, что $l(L) = K$ и может быть отождествлен с аффинным подпространством $l^{-1}(1) \subset V$. Структуры на разных U_l согласованы и превращают $\mathbf{P}(V)$ в алгебраическое многообразие. Конечно, $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}(K^{n+1})$.

3.3. Склеивание. Эта операция позволяет получать новые многообразия из уже известных. Пусть (X_i) — конечное покрытие множества X, и на каждом X_i задана структура алгебраического многообразия. Предположим, что: а) для любых i, j $X_i \cap X_j$ открыто в X_i и X_j, б) структуры алгебраического многообразия на $X_i \cap X_j$ индуцированные с X_i и X_j, совпадают. Тогда на X существует и единственна структура алгебраического многообразия, для которой X_i — открытые подмногообразия. Говорят, что X получено *склеиванием* многообразий X_i.

Можно, например, представлять, что проективное пространство $\mathbf{P}^n$ склеено из аффинных пространств U_i, $i=0, 1, \ldots, n$. Вот другой пример. Пусть X_1 и X_2 изоморфны аффинной прямой $\mathbf{A}^1$, T_1 и T_2 — координаты на X_1 и X_2. Отождествим $X_1 - \{0\}$ с $X_2 - \{0\}$ при помощи $T_1 = T_2$. В результате получится «аффинная прямая с раздвоенной точкой 0». Такое многообразие естественно возникает как множество орбит действия $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda^{-1} y)$ группы K^* на плоскости K^2.

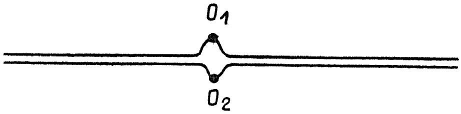


Рис. 6

Пример. Хорошее упражнение на тему склеивания представляет конструкция *торических многообразий*. Зафиксируем решетку M, т. е. свободную абелеву группу конечного типа (изоморфную $\mathbf{Z}^n$, но базис нам не нужен и даже отвлекает). Пусть $S \subset M$ — подмоноид, т. е. содержит 0 и замкнуто относительно сложения. Тогда можно образовать полугрупповую K-алгебру $K[S]$. Ее аддитивные образующие имеют вид x^m, где $m \in S$, а перемножаются они по правилу $x^m \cdot x^{m'} = x^{m+m'}$. Если моноид S порожден конечным числом элементов, K-алгебра $K[S]$ имеет конечный тип и определено аффинное многообразие $\operatorname{Specm} K[S]$. Например, если $S = M$, мы получаем n-мерный тор $\mathbf{T} = \operatorname{Specm} K[M] = \operatorname{Specm}[T_1, \ldots, T_n, T_1^{-1}, \ldots, T_n^{-1}]$.

Пусть теперь в двойственной решетке $M^* = \operatorname{Hom}(M, \mathbf{Z})$ задано множество B, дополняемое до базиса группы M^*. С ним можно связать следующий моноид в M:

$$B^{\perp} = \{m \in M,\ b(m) \geqslant 0\ \forall b \in B\};$$

соответствующее аффинное торическое многообразие $\mathrm{Specm}\, K[B^{\perp}]$ обозначим X_B. (Оно называется торическим, потому что на нем естественно действует тор $\mathbf{T}$). Если $B' \subset B$, то $B'^{\perp} \supset B^{\perp}$ и мы имеем естественный гомоморфизм K-алгебр $K[B^{\perp}] \to K[B'^{\perp}]$ и противоположный морфизм многообразий $X_{B'} \to X_B$. Нетрудно проверить, что $X_{B'} \to X_B$ является открытым вложением.

Если теперь в M^* задан набор Σ таких подбазисов B, многообразия X_B и $X_{B'}$ $(B, B' \in \Sigma)$ можно склеить по их открытым кускам $X_{B \cap B'}$ и получить торическое многообразие X_Σ. Например, $\mathbf{P}^n$ получается при $\Sigma = \{B_0, \ldots, B_n\}$, где $B_0 = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $B_i = \{e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_n, -e_1 - \ldots - e_n\}$ при $i = 1, \ldots, n$.

Интерес торических многообразий связан с тем, что различные объекты на X_Σ (обратимые пучки, их когомологии, формы и т. д.) удается описывать в комбинаторных терминах, связанных с Σ. Например, обратимые пучки изображаются многогранниками в $M \otimes \mathbf{R}$, а сечения их — целыми точками многогранников. Подробнее об этом см. [3].

3.4. Многообразие Грассмана. Пусть снова V — векторное пространство над K. Обозначим через $G(k, V)$ (или $G(k, n)$, если $n = \dim V$) множество k-мерных подпространств $W \subset V$; при $k = 1$ получаем $\mathbf{P}(V)$. Обобщая конструкцию проективного пространства, снабдим $G(k, V)$ структурой алгебраического многообразия, называемого *многообразием Грассмана.*

Пусть $V = V' \oplus V''$ — прямое разложение, причем $\dim V' = k$. С каждым таким разложением свяжем множество $U(V', V'')$, состоящее из подпространств $W \subset V$, которые изоморфно проектируются на V'. Такие подпространства можно отождествить с графиками линейных отображений V' в V''. Таким образом, $U(V', V'') \simeq \mathrm{Hom}_k(V', V'') \simeq V'' \otimes V'^*$ естественно отождествляется с векторным пространством размерности $k(n-k)$ и снабжается структурой аффинного многообразия. Можно непосредственно убедиться, что все эти карты $U(V', V'')$ согласованы и задают на $G(k, V)$ структуру алгебраического многообразия. Подробнее о грассманиане см. [32] и [33].

3.5. Проективные многообразия. Замкнутое подмножество проективного пространства называется *проективным многообразием.* Приведем общий способ задания таких многобразий.

Пусть V — векторное пространство над K. *Конусом* в V назовем алгебраическое подмногообразие $C \subset V$, инвариантное относительно гомотетий, т. е. умножений на константы. Свяжем с конусом C подмножество $\mathbf{P}(C) \subset \mathbf{P}(V)$, состоящее из прямых $L \subset C$. Множество $\mathbf{P}(C)$ замкнуто в $\mathbf{P}(V)$. В самом деле, при отождествлении карты U_l (где $l: V \to K$ линейный функционал) с аффинным подпространством $l^{-1}(1) \subset V$ множество $\mathbf{P}(C) \subset U_l$

отождествляется с пересечением $C \cap l^{-1}(1)$, очевидно замкнутым в $l^{-1}(1)$.

В координатах $T_0, \ldots, T_n$ на V конус C задается однородными уравнениями $f_j(T_0, \ldots, T_n)=0$, $j \in J$. Тогда $\mathbf{P}(C) \cap U_i$ задается уравнениями $f_j(T_0/T_i, \ldots, T_n/T_i)=0$. Уравнения $f_j=0$ называются *однородными уравнениями* $\mathbf{P}(C)$.

Обратно, любое проективное многообразие $X \subset \mathbf{P}(V)$ имеет вид $\mathbf{P}(C)$ для некоторого конуса $C \subset V$. В самом деле, пусть (U_i) — стандартный атлас $\mathbf{P}^n$, и $X \cap U_i$ задается уравнениями $f_j^{(i)}(T_0/T_i, \ldots, T_n/T_i)=0$, $j \in J_i$. Тогда для большого m $T_i^m f_j^{(i)}(T_0/T_i, \ldots, T_n/T_i)=g_j^{(i)}(T_0, \ldots, T_n)$ является однородной формой от $T_0, \ldots, T_n$, и уравнения $g_j^{(i)}=0$, $j \in J_i$, $i=0, 1, \ldots, n$, задают X в $\mathbf{P}^n$.

Наиболее простые проективные многообразия — линейные. Если $W \subset V$ — векторное подпространство, подмногообразие $\mathbf{P}(W) \subset \mathbf{P}(V)$ называется *линейным*. Если W — гиперплоскость в V, то $\mathbf{P}(W)$ называется *гиперплоскостью* в $\mathbf{P}(V)$. *Линейной оболочкой* множества называется пересечение всех линейных многообразий, содержащих множество; для двух разных точек x, y это проективная прямая $\overline{xy}$ и т. д. Задать гиперплоскость $W \subset V$ — то же, что задать прямую $W^{\perp}$ в двойственном пространстве V^* и обратно, поэтому множество гиперплоскостей в $\mathbf{P}(V)$ тоже является проективным пространством $\mathbf{P}(V^*)$.

Каждое векторное пространство V можно рассматривать как аффинную часть проективного пространства $\mathbf{P}(V \oplus K)$, а именно, как дополнение к гиперплоскости $\mathbf{P}(V) \subset \mathbf{P}(V \oplus K)$. Если $X \subset V$ — алгебраическое многообразие, то замыкание X в $\mathbf{P}(V \oplus K)$ является проективным многообразием. Это стандартный способ перехода от аффинных многообразий к проективным (зависящий, впрочем, от вложения $X \subset V$). В координатах $\xi_1, \ldots, \xi_n$ на V проективизация выглядит так. Пусть $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — многочлен степени d; назовем его гомогенизацией однородный многочлен степени d $\tilde{f}(T_0, \ldots, T_n)=T_0^d f(T_1/T_0, \ldots, T_n/T_0)$. Теперь если X задается уравнениями $f_j=0$, то проективизация $\overline{X}$ задается уравнениями $\tilde{f}_j=0$.

§ 4. Морфизмы алгебраических многообразий

4.1. Определения. Пусть X — алгебраическое многообразие с атласом (X_i), Y — аффинное многообразие. Отображение $f: X \to Y$ называется *регулярным*, если регулярно ограничение f на каждую карту X_i. В частности, мы получаем понятие регулярной функции. Для открытого $U \subset X$ обозначим через $\mathcal{O}_X(U)$ K-алгебру регулярных функций на U. Если $U' \subset U$, мы имеем гомоморфизм ограничения $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U')$.

Пусть теперь Y — произвольное алгебраическое многообразие. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется *морфизмом* (или регулярным отображением) *алгебраических многообразий*, если для любой карты $V \subset Y$ индуцированное отображение $f^{-1}(V) \to V$ регулярно. Иначе говоря, для любой регулярной функции g на открытом $V \subset Y$ функция $f^*(g) = g \circ f$ должна быть регулярной на $f^{-1}(V)$. Тем самым f^* задает гомоморфизм алгебр $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.

Композиция морфизмов снова морфизм, так что алгебраические многообразия образуют категорию. Каноническое вложение замкнутого подмногообразия является морфизмом; морфизм $Y \to X$ называется *замкнутым вложением,* если он осуществляет изоморфизм Y с замкнутым подмногообразием в X. Если $f: X \to Y$ — морфизм, а $Y' \subset Y$ — замкнутое подмногообразие, то $f^{-1}(Y')$ — замкнутое подмногообразие в X (см. п. 2.4). В частности, для точки $y \in Y$ многообразие $f^{-1}(y) \subset X$ называется *слоем морфизма* f над y.

Многообразие X, снабженное морфизмом $f: X \to Y$, называют иногда многообразием над Y, или Y-многообразием. При этом X представляют как семейство алгебраических многообразий $X_y = f^{-1}(y)$, параметризованное точками $y \in Y$. Морфизм Y-многообразий $f: X \to Y$ в $f': X' \to Y$ — это морфизм $\varphi: X \to X'$, такой что $f = f' \circ \varphi$. При этом слой $f^{-1}(y)$ отображается в слой $f'^{-1}(y)$, и мы получаем семейство морфизмов $\varphi_y: X_y \to X_y'$.

4.2. Произведения многообразий. Пусть X и Y — алгебраические многообразия с атласами (X_i) и (Y_j). Тогда $(X_i \times Y_j)$ является атласом для $X \times Y$, так что $X \times Y$ тоже алгебраическое многообразие. Легко проверить, что $X \times Y$ — прямое произведение X и Y в категории многообразий.

В частности, для любого многообразия X диагональное вложение $\Delta: X \to X \times X (\Delta(x) = (x, x))$ является морфизмом, хотя в общем случае не замкнутым вложением. Иначе говоря, диагональ в $X \times X$ может оказаться незамкнутой. Пример доставляет «аффинная прямая с раздвоенной точкой» из п. 3.3. Если все же диагональ в $X \times X$ замкнута, многообразие X называется *отделимым* (не путать с хаусдорфовостью X как топологического пространства!). Например, любое аффинное многообразие отделимо (см. п. 2.4). Класс отделимых многообразий замкнут относительно прямых произведений и перехода к подмногообразиям. Как мы проверим ниже, проективное пространство отделимо, откуда следует отделимость любых проективных многообразий. Поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться исключительно отделимыми многообразиями.

Неотделимость многообразия связана с тем, что склеивая его из аффинных кусков, мы склеиваем эти куски не до конца. А именно, имеет место следующий *критерий отделимости*: многообразие X с атласом (X_i) отделимо тогда и только тогда, когда образ $X_i \cap X_j$ при каноническом вложении в $X_i \times X_j$ замкнут. Действительно, образ $X_i \cap X_j$ в $X_i \times X_j$ есть пересечение $X_i \times X_j$ с диагональю в $X \times X$.

Применим этот критерий к стандартному атласу (U_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, проективного пространства $\mathbf{P}^n$ (см. п. 3.1). Как легко убедиться, образ $U_i \cap U_j$ в $U_i \times U_j$ задается уравнениями

$$\xi_k^{(i)} = \xi_j^{(i)} \xi_k^{(j)}, \quad \xi_k^{(j)} = \xi_k^{(i)} \xi_l^{(j)}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

откуда мы получаем отделимость $\mathbf{P}^n$.

Кроме прямых произведений, в категории алгебраических многообразий существуют расслоенные произведения, что выгодно отличает ее от категории дифференцируемых многообразий. Покажем это, ограничившись отделимыми многообразиями. Пусть $f: X \to Z$ и $g: Y \to Z$ — многообразия над Z; *расслоенным произведением* X и Y над Z называется подмногообразие

$$X \underset{Z}{\times} Y = \{(x, y) \in X \times Y, \; f(x) = g(y)\}$$

в $X \times Y$. Более правильно определить его как прообраз диагонали Δ_Z при морфизме $f \times g: X \times Y \to Z \times Z$; это сразу дает схемную структуру на $X \underset{Z}{\times} Y$. Частными случаями расслоенного произведения является прямое произведение (Z — точка), слой ($Y \to Z$ — вложение точки) и пересечение подмногообразий.

Коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \underset{Z}{\times} Y \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

называется *декартовым квадратом*. Глядя на него чуть несимметрично, можно сказать, что операция расслоенного произведения превращает Z-многообразие X в Y-многообразие $X \underset{Z}{\times} Y$; такая операция называется *заменой базы*. Слой f' над точкой $y \in Y$ изоморфен слою f над точкой $g(y)$; замена базы — это прямой аналог понятия индуцированного расслоения в топологии.

В частном случае, когда $g: Y \to Z = Y$ — тождественный морфизм, расслоенное произведение состоит из $(x, y) \in X \times Y$, для которых $f(x) = y$, и по понятным причинам называется *графиком* Γ_f морфизма $f: X \to Y$. Γ_f — замкнутое подмножество в $X \times Y$, если Y отделимо. Проекция $\Gamma_f \to X$ — изоморфизм, и любой морфизм $f: X \to Y$ разлагается на замкнутое вложение $X \xrightarrow{\sim} \Gamma_f \subset X \times Y$ и проекцию $X \times Y \to Y$.

4.3. Отношения эквивалентности. Двойственным к понятию расслоенного произведения является понятие амальгамированной суммы, т. е. универсальное дополнение диаграммы

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \dashrightarrow & X \coprod_R Y \end{array}.$$

Оно существует довольно редко. Мы обсудим кратко частный случай — отношения эквивалентности. *Отношением эквивалентности* на многообразии X называется замкнутое подмногообразие R в $X \times X$, которое теоретико-множественно есть отношение эквивалентности (мы оставляем читателю формулировку схемного варианта определения). Вопрос о существовании фактормногообразия X/R довольно деликатен и далек от решения; обсуждение его см. [18], [39], [52]. В одном простом случае ответ утвердителен — это когда обе проекции $R \rightrightarrows X$ являются локальными изоморфизмами; по существу, это склейка (см. п. 3.3).

Любое многообразие X можно представить как фактормногообразие U/R, где U — аффинное многообразие, а проекции $R \rightrightarrows U$ локальные изоморфизмы. Для этого надо взять атлас (U_i) и положить $U = \coprod_i U_i$, $R = U \times_X U$. Вообще, мы могли бы определить любое многообразие как пару (U, R), где U — аффинное многообразие, $R \subset U \times U$ — отношение эквивалентности на U, и проекции $R \rightrightarrows U$ — локальные изоморфизмы. Морфизмом пары (U, R) в пару (U', R') естественно считать морфизм $f: U \to U'$, такой что $(f \times f)(R) \subset R'$. Однако такое «простое» решение вопроса об определении многообразия было бы неправильным. Ведь задание пары (U, R) — это по существу задание атласа, а надо еще отождествить эквивалентные атласы (пп. 3.1 и 4.1). Оформление такого отождествления оставим заинтересованному читателю.

Если в определении многообразия как пары (U, R) условие «проекции $R \rightrightarrows U$ — локальные изоморфизмы» заменить более слабым «проекции $R \rightrightarrows U$ — этальные морфизмы» (см. § 5 главы 2), мы получим очень интересное понятие *алгебраического пространства*, обобщающего понятие алгебраического многообразия. Интерес алгебраических пространств в том, что многие алгебро-геометрические конструкции (вроде фактормногообразий, стягиваний, схем модулей) реализуются именно как алгебраические пространства, см. [18].

Схематично генезис понятия многообразия выглядит так. В исходном пункте мы имеем точку и аффинную прямую $\mathbf{A}^1$. Расслоенные произведения приводят к аффинным пространствам $\mathbf{A}^n$ и их подмногообразиям — аффинным многообразиям. Факторы по (локально изоморфным) отношениям эквивалентности на аффинных многообразиях дают алгебраические многообразия, а по этальным — алгебраические пространства.

4.4. Проектирование. Важные классы морфизмов доставляют операции линейной и полилинейной алгебры. Начнем с линейных. Пусть $\pi: \mathbf{A}^{n+1}-\{0\} \to \mathbf{P}^n$ — отображение, которое ненулевой точке $x \in K^{n+1}$ сопоставляет прямую $Kx \subset K^{n+1}$, т. е. точку $\mathbf{P}^n$. Ясно, что оно регулярно. Если f — регулярная функция на $\mathbf{P}^n$, то $\pi^*(f)$ регулярна на $\mathbf{A}^{n+1}-\{0\}$. Как мы видели в п. 2.9, такие функции отождествляются с многочленами от $T_0, \ldots, T_n$. Кроме того, $\pi^*(f)$ инвариантна относительно гомотетий, так что многочлен должен иметь нулевую степень, т. е. быть константой. Так мы получаем, что *любая регулярная функция на* $\mathbf{P}^n$ *постоянна*; этот простой результат — прообраз многочисленных теорем конечности для проективных многообразий.

Рассмотрим теперь проективный вариант проектирования. Пусть $H \simeq \mathbf{P}^n$ — гиперплоскость в $\mathbf{P}^{n+1}$ и p — точка, не лежащая на H. Для любой точки $x \in \mathbf{P}^{n+1}-\{p\}$ прямая $\overline{px}$ в $\mathbf{P}^{n+1}$ пересекает H в единственной точке $\pi_p(x)$. Так возникает отображение, очевидно, регулярное

$$\pi_p: \mathbf{P}^{n+1}-\{p\} \to H \simeq \mathbf{P}^n,$$

которое называется *линейной проекцией из точки* p. При отождествлении $\mathbf{P}^{n+1}-H$ с $\mathbf{A}^{n+1}$ мы получаем предыдущий пример.

Если подмногообразие $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$ не проходит через точку p, ограничение проекции на X дает морфизм $X \to \mathbf{P}^n$. Позже мы обсудим и тот случай, когда $p \in X$. Проектирование из точки можно итерировать, или сразу проектировать из линейного подмногообразия. Вообще, если $f: V \to W$ — гомоморфизм векторных пространств над K, то возникает естественный морфизм $\mathbf{P}(V)-\mathbf{P}(\operatorname{Ker} f) \to \mathbf{P}(W)$, называемый *коллинеацией*. В частности, автоморфизм V дает автоморфизм $\mathbf{P}(V)$. Позже мы увидим, что любой автоморфизм $\mathbf{P}^n$ является коллинеацией.

Операции полилинейной алгебры приводят к трем знаменитым морфизмам — Веронезе, Сегре и Плюккера.

4.5. Морфизм Веронезе. Если $W \subset V$ — векторные пространства, то переход к k-й симметрической степени дает вложение $\mathrm{Sym}^k W \subset \mathrm{Sym}^k V$, что можно интерпретировать как отображение соответствующих грассманианов. Наиболее интересен случай, когда W одномерно; в этом случае $\mathrm{Sym}^k W$ также одномерно и мы получаем *отображение Веронезе*

$$v_k: \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(\mathrm{Sym}^k V).$$

Чтобы убедиться в его регулярности, рассмотрим на V координаты $T_0, \ldots, T_n$, а на $\mathrm{Sym}^k V$ — координаты $T^a = T_0^{a_0} \ldots T_n^{a_n}$, где $a = (a_0, \ldots, a_n)$ — вектор с целыми неотрицательными координатами, и $\sum a_i = k$. Тогда v_k задается сопоставлением точке $x = (x_0, \ldots, x_n)$ точки $v_k(x)$ с координатами $(x^a = x_0^{a_0} \ldots x_n^{a_n})$.

Легко проверить, что v_k является замкнутым вложением; образ его задается квадратичными уравнениями $T^a T^b = T^{a'} T^{b'}$, где $a+b=a'+b'$. Образ $\mathbf{P}^1$ при отображении Веронезе $v_k: \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^k$ называется *рациональной нормальной кривой* степени k. При $k=2$ это коника с уравнением $T_0T_2=T_1^2$; при $k=3$ — кривая в $\mathbf{P}^3$ с уравнениями $T_0T_3=T_1T_2$, $T_0T_2=T_1^2$, $T_1T_3=T_2^2$. Проектируя ее из точки $p=(0, 1, 0, 0)$ на плоскость $\mathbf{P}^2$, мы получаем, по существу, пример 2.6.

Образ вложения $v_2: \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^5$ называется *поверхностью Веронезе*.

4.6. Морфизм Сегре. Если $W \subset V$ и $W' \subset V'$ — вложения векторных пространств, мы получаем вложение $W \otimes W' \subset V \otimes V'$, что опять дает отображение соответствующих грассманианов. В частности, если W и W' одномерны, то $W \otimes W'$ одномерно, и мы получаем *отображение Сегре*

$$s: \mathbf{P}(V) \times \mathbf{P}(V') \to \mathbf{P}(V \otimes V').$$

В координатах точкам $x=(x_0, \ldots, x_n)$ и $y=(y_0, \ldots, y_m)$ соответствует точка $s(x, y)$ с координатами (x_iy_j), $i=0, \ldots, n$, $j=0, \ldots, m$. Образ s задается в однородных координатах R_{ij} на $\mathbf{P}(V \otimes V')$ квадратичными уравнениями $R_{ij}R_{kl}=R_{il}R_{kj}$. Легко проверить, что отображение Сегре — замкнутое вложение. В частности, *произведение проективных многообразий проективно.*

Простейший случай — вложение $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ в $\mathbf{P}^3$; образ его — квадрика с уравнением $XY=ZT$. Так как при вложении Сегре слой $\mathbf{P}^1 \times \{y\}$ переходит в прямую в $\mathbf{P}^3$, то квадрика $S(\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1)$ заметается двумя семействами прямых, которое хорошо видно на однополостном гиперболоиде.

4.7. Морфизм Плюккера. Здесь используется внешняя степень. Если W — k-мерное подпространство векторного пространства V, то $\Lambda^k W$ — прямая в $\Lambda^k V$, и мы получаем *морфизм Плюккера*

$$p: G(k, V) \to \mathbf{P}(\Lambda^k V).$$

Снова можно убедиться, что p является замкнутым вложением, и что образ его задается квадратичными уравнениями (см. [32], [43]). Следствием этого является *проективность многообразий Грассмана.*

При $k=1$ мы получаем изоморфизм $G(1, V) \simeq \mathbf{P}(V)$. При $k=n-1$, благодаря изоморфизму $\Lambda^{n-1} V \simeq V^* \otimes \Lambda^n V \simeq V^*$, мы снова получаем изоморфизм $G(n-1, V) \simeq \mathbf{P}(V^*)$. Поэтому простейший нетривиальный пример — $G(2, 4)$, многообразие прямых в $\mathbf{P}^3$. Морфизм p вкладывает $G(2, 4)$ в $\mathbf{P}(\Lambda^2 K^4) \simeq \mathbf{P}^5$ как гиперповерхность с уравнением $T_{12}T_{34}-T_{13}T_{24}+T_{14}T_{23}=0$. Исследованию этого многообразия и его сечений посвящена глава 6 книги [32].

§ 5. Векторные расслоения

Алгебраические многообразия могут обладать дополнительной структурой, согласованной со структурой многообразия. Мы кратко обсудим понятие алгебраической группы и более подробно остановимся на векторных расслоениях.

5.1. Алгебраические группы. Пусть на множестве G заданы структура алгебраического многообразия и структура группы. Скажем, что эти две структуры согласованы (и задают на G структуру *алгебраической группы*), если отображение умножения $\mu : G\times G\to G$ и отображение обратного элемента $\iota : G\to G$ регулярны.

Например, множество невырожденных матриц $GL(n, K)$ является алгебраической группой, и даже аффинной как многообразие. В частности, $GL(1, K)=K^*$ называется *мультипликативной группой* и обозначается иногда G_m. Другой пример аффинной группы — *аддитивная группа* K со сложением в качестве группового закона; она обозначается иногда G_a. Совершенно другой пример доставляет групповой закон на плоской кривой третьей степени, который мы обсудим в главе 3; это частный случай т. н. *абелевых многообразий* (см. [54]).

Гомоморфизмом алгебраических групп называется гомоморфизм групп $f : G\to H$, одновременно являющийся морфизмом алгебраических многообразий. Его ядро $\operatorname{Ker} f=f^{-1}(e)$ снова является алгебраической группой. Например, умножение на константу задает гомоморфизм G_a в G_a. Если поле K имеет положительную характеристику p, морфизм Фробениуса $x \mapsto x^p$ также является гомоморфизмом алгебраических групп, причем инъективным. Гомоморфизмом будет и отображение Артина—Шрайера $x\mapsto x—x^p$, ядро которого отождествляется с простым подполем $\mathbf{F}_p\subset K$. Возведение в n-ю степень, $x\mapsto x^n$, является сюръективным гомоморфизмом $G_m\to G_m$. Ядро его, обозначаемое μ_n, изоморфно группе корней n-й степени из 1 в поле K.

В нашу задачу не входит изложение красивой и далеко продвинутой теории алгебраических групп (см. [22], [44], [62]). Два понятия все же надо упомянуть. Первое — понятие действия алгебраической группы G на алгебраическом многообразии X. Оно задается морфизмом многообразий $\rho : G\times X\to X$, удовлетворяющим двум требованиям: $\rho(e, x)=x$ и $\rho(g, \rho(g', x))=\rho(gg', x)$. Замечательно, что их можно записать как коммутативность некоторых диаграмм; например, второе требование выглядит как коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} G\times G\times X \arrow[r, "\mu\times id"] \arrow[d, "id\times\rho"] & G\times X \arrow[d, "\rho"] \\ G\times X \arrow[r, "\rho"] & X \end{tikzcd}$$

Второе понятие — алгебраическое семейство групп (G_x), параметризованное точками многообразия X, или «группа» в категории X-многообразия. Нас больше будет интересовать понятие семейства векторных пространств.

5.2. Векторные расслоения. *Векторным расслоением* над многобразием X называется X-многообразие $p: E \to X$, снабженное «нулевым» сечением $0: X \to E$, операцией «сложения», т. е. X-морфизмом $+: E \times E \to E$ и операцией «умножения на константы» $K \times E \to E^X$, тоже являющейся X-морфизмом. При этом сложение должно быть коммутативным и ассоциативным, умножение — дистрибутивным и т. д., как при определении векторного пространства. Для каждой точки $x \in X$ слой $E_x = p^{-1}(x)$ обладает структурой векторного пространства над K, поэтому векторное расслоение E можно понимать как семейство векторных пространств E_x, каждое растет над своей точкой $x \in X$.

Гомоморфизмом векторных расслоений называется морфизм X-многообразий, коммутирующий с операциями «нуля», «сложения» и «умножения». Иначе говоря, слой переходит в слой, и при этом является гомоморфизмом векторных пространств. Так возникает категория Vect_X векторных расслоений над X. Замена базы $f: X \to Y$ дает функтор $f^*: \mathrm{Vect}_Y \to \mathrm{Vect}_X$.

Приведем некоторые примеры. Каждое (конечномерное) векторное пространство V можно рассматривать как векторное расслоение над точкой. Для любого многообразия X расслоение $X \times V \to X$ называется *тривиальным* векторным расслоением (типа V, или ранга $\dim V$). Векторное расслоение $p: E \to X$ называется *локально тривиальным*, если существует атлас (X_i), такой что индуцированные расслоения $p^{-1}(X_i) \to X_i$ тривиальны. Такие расслоения известным способом задаются коциклами $g_{ij}: X_i \cap X_j \to \mathrm{Aut}\, V$. Для локально тривиального расслоения размерность слоя E_x локально постоянно зависит от x; для произвольного векторного расслоения это не так и размерность отдельных слоев может подскакивать.

Можно показать, что локально по базе любое векторное расслоение устроено как векторное подрасслоение тривиального векторного расслоения. Если $\varphi: E \to F$ — гомоморфизм векторных расслоений, то существует расслоение ядер $\mathrm{Ker}\,\varphi = \varphi^{-1}(0_F)$, где 0_F — нулевое сечение F. К сожалению, для коядер φ это уже не так, и факторрасслоение F/E можно определить не всегда. В этом одна из причин широкого привлечения когерентных пучков вместо векторных расслоений. Однако если E — локально тривиальное векторное подрасслоение в F, факторрасслоение F/E существует.

5.3. Тавтологические расслоения. Пусть $G(k, V)$ — многообразие Грассмана k-мерных векторных подпространств векторного пространства V. Рассмотрим подмножество S в

$G(k, V) \times V$, состоящее из пар (W, v), таких что $v \in W$. Легко понять, что это будет векторное подрасслоение тривиального векторного расслоения $V_{G(k, V)} = G(k, V) \times V$ над $G(k, V)$. Это расслоение называется *тавтологическим,* или *универсальным подрасслоением* над $G(k, V)$. Оно локально тривиальное ранга k. Факторрасслоение $Q = V_{G(k, V)}/S$ называется *универсальным факторрасслоением* над $G(k, V)$.

В частности, над проективным пространством $\mathbf{P}(V)$ имеется тавтологическое линейное расслоение S.

Позже мы с каждым многообразием свяжем касательное расслоение, играющее важную роль при исследовании многообразия.

5.4. Конструкции с расслоениями. Если E и F — векторные расслоения над X, их расслоенное произведение $E \underset{X}{\times} F$ как X-многообразие также будет векторным расслоением. Оно обозначается $E \oplus F$ и называется *прямой суммой* расслоений; послойно это действительно прямая сумма слоев $E_x \oplus F_x$. Я не знаю других общих конструкций для векторных расслоений. Однако для локально тривиальных расслоений проходят все естественные векторные конструкции: тензорные произведения $E \otimes F$, симметрические $\mathrm{Sym}^k E$ и внешние степени $\Lambda^p E$, двойственное расслоение $E^\vee$ и т. п. Подробнее см. [25], [50].

Имитируя конструкцию проективного пространства, для векторного расслоения $E \to X$, можно построить соответствующее проективное расслоение $\mathbf{P}_X(E) \to X$, слоями которого будут проективные пространства $\mathbf{P}(E_x)$. Можно также говорить о конических подрасслоениях в E, т. е. о подмногообразиях $C \subset E$, инвариантных относительно действия K на E. Такие конуса $C \subset E$ приводят к подмногообразиям $\mathbf{P}_X(C) \subset \subset \mathbf{P}_X(E)$, как в 3.5.

§ 6. Когерентные пучки

Альтернативный и более удобный способ задания линейных объектов доставляют когерентные пучки модулей. Ввиду их важности, скажем о них несколько слов, хотя это и отвлекает нас от геометрии. Подробнее о пучках см. [31], [41], [60].

6.1. Предпучки. Пусть X — произвольное топологическое пространство и $\mathrm{O}_p(X)$ — категория открытых подмножеств X. *Предпучком* множеств (групп, модулей или колец) называется контравариантный функтор F из категории $\mathrm{O}_p(X)$ в категорию множеств (групп, модулей или колец). Иначе говоря, для каждого открытого $U \subset X$ должно быть задано множество $F(U)$, а для каждого включения открытых множеств $V \subset U$ — отображение $\rho_{U,V} : F(U) \to F(V)$. При этом $\rho_{U,U}$ должно быть тождественным отображением, а $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} = \rho_{U,V}$.

Элементы $F(U)$ называют также сечениями F над U, а отображения ρ — отображениями ограничения и обозначают $\rho_{U,V}(s)=s/U$. Использование такой терминологии объясняет следующий пример. Пусть $f: Y \to X$ — некоторое многообразие над X; для открытого $U \subset X$ сечением f над U назовем морфизм $g: U \to Y$, такой что композиция $f \circ g$ есть каноническое вложение U в X. Множество всех сечений f над U обозначим $\widetilde{Y}(U)$; так мы получаем некоторый предпучок. В частности, предпучком является $\mathcal{O}_X$, построенный в 4.1.

Морфизмом предпучков $\varphi: F \to G$ называется набор отображений $\varphi_U: F(U) \to G(U)$, где U пробегает $O_p(X)$, согласованных с ограничениями. В частности, если $\varphi: Y \to Z$ — морфизм X-многообразий, мы получаем морфизм предпучков $\widetilde{\varphi}: \widetilde{Y} \to \widetilde{Z}$. Такой взгляд на многообразия как на предпучки оказывается полезным при поисках обобщений понятия алгебраического многообразия.

6.2. Пучки. Предпучок F на X называется *пучком,* если он удовлетворяет следующей аксиоме:

Пусть дано семейство (U_i) открытых подмножеств X и сечения $s_i \in F(U_i)$, согласованные на пересечениях (т. е. $s_i | U_i \cap U_j = s_j | (U_i \cap U_j)$ для любых i и j). Тогда существует, и при том единственное, сечение $s \in F(\bigcup U_i)$, такое что $s_i = s | U_i$ для всех i.

Например, построенный в п. 6.1 по X-многообразию Y предпучок $\widetilde{Y}$ является пучком. Пучком будет и предпучок $\mathcal{O}_x$ регулярных функций на алгебраическом многообразии X, а также предпучки гладких функций на дифференцируемом многоообразии, непрерывных функций на топологическом пространстве и т. д. Можно сказать, что пучки возникают там, где сечения задаются локальными условиями.

Конечно, не каждый предпучок является пучком. Например, постоянный предпучок, которы йкаждому U сопоставляет фиксированное множество A, очень редко бывает пучком. Однако с каждым предпучком F можно связать в некотором смысле ближайший к нему пучок F^+. Строится он так. Для открытого $U \subset X$ обозначим через $\mathrm{Cov}(U)$ множество всех открытых покрытий U. Для покрытия $\mathcal{U} = (U_i) \in \mathrm{Cov}(U)$ определим $F(\mathcal{U})$ как множество согласованных на пересечениях $U_i \cap U_j$ наборов $s_i \in F(U_i)$. Если покрытие $\mathcal{U}'$ вписано в $\mathcal{U}$, имеется каноническое отображение $F(\mathcal{U}) \to F(\mathcal{U}')$, и так возникает индуктивная система $F(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$. Определим теперь $F^+(U)$ как индуктивный предел этой системы. Легко проверить, что: а) F^+ является пучком, б) предпучок F естественно отображается в F^+, в) любой морфизм F в пучок G пропускается через F^+.

Эта операция позволяет переносить на пучки все операции с предпучками: надо сначала сделать операцию в категории предпучков, а затем применить переход к ассоциированному пучку. В частности, с пучками множеств можно делать все, что можно делать с множествами. Таким образом пучки множеств служат хорошей моделью для теории множеств, формализуя понятие «переменного множества». Нас, впрочем, больше будут интересовать пучки модулей.

6.3. Пучки модулей. Напомним, что структурный пучок $\mathcal{O}_X$ на алгебраическом многообразии X является пучком колец и даже K-алгебр. Поэтому можно рассматривать пучки модулей над $\mathcal{O}_X$. Некоторое время нам будет несущественно, что X — алгебраическое многообразие, и можно считать, что речь идет о любом топологическом пространстве X, снабженном пучком коммутативных колец $\mathcal{A}$. Такой объект называется *окольцованным пространством*. Прежде чем переходить к пучкам модулей, остановимся на пучковом определении алгебраического многообразия. В п. 2.8 аффинное многообразие было снабжено пучком K-алгебр; алгебраическое многообразие можно теперь определить как окольцованное пространство, локально изоморфное аффинному многообразию. Аналогичным образом можно определять дифференцируемые и аналитические многообразия, супермногообразия и т. п.

Ита, пусть $(X, \mathcal{A})$ — окольцованное пространство. Пучок F на X называется *пучком $\mathcal{A}$-модулей,* если для каждого открытого $U \subset X$ множество $F(U)$ снабжено структурой модуля над кольцом $\mathcal{A}(U)$, согласованой с отображениями ограничения. Все понятия теории модулей (гомоморфизмы, ядра, коядра, точные последовательности, прямые суммы, тензорные произведения и т. д.) переносятся на пучки модулей. Например, $F \otimes_A G$ есть пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto F(U) \otimes_{A(U)} G(U)$. Известная тонкость связана и с понятием коядра гомоморфизма пучков модулей $\varphi : F \to G$ — это снова пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto G(U)/\varphi(F(U))$. Поэтому точность последовательности пучков

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

означает лишь точность последовательности

$$0 \to F(X) \to G(X) \to H(X),$$

тогда как в общем случае $G(X) \to H(X)$ не эпиморфно. Отклонение от эпиморфности контролируется когомологиями пучка F.

Пучок $\mathcal{A}$-модулей $\mathcal{A}^{(I)}$, где I — произвольное множество, называется *свободным* ранга $\mathrm{Card}(I)$. *Локально свободным* называется пучок модулей, локально изоморфный свободному. Важную роль играют локально свободные пучки ранга один, т. е. пучки, локально изоморфные $\mathcal{A}$; они называются *обратимыми*. Тензорное произведение обратимых пучков $F \otimes_{\mathcal{A}} G$ снова обратимо, и $F \otimes_{\mathscr{A}} F^* \subset \mathscr{A}$, где $F^* = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F, \mathscr{A})$ — двойственный пучок. Поэтому множество $\mathrm{Pic}(X)$ классов обратимых $\mathscr{A}$-модулей с точностью до изоморфизма является абелевой группой и называется *группой Пикара* X.

Пусть теперь $f: X \to Y$ — морфизм многообразий, а F — пучок модулей на X. *Прямым образом* F при f называется пучок f_*F модулей на Y, который открытому $V \subset Y$ сопоставляет $F(f^{-1}(V))$. Чуть сложнее определить *обратный образ* f^*G для пучка $\mathcal{O}_Y$-модулей G. Предварительно определим предпучок $f^{\cdot}G$ на X. Для открытого $U \subset X$ положим $(f^{\cdot}G)(U) = \varinjlim G(V)$, где индуктивный предел берется по открытым $V \subset Y$, содержащим $f(U)$. Это предпучок моделей над $f^{\cdot}\mathcal{O}_Y$. Тогда f^*G — пучок модулей, ассоциированный с предпучком $f^{\cdot}G \otimes_{f^{\cdot}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. Локальная свободность, ранг обратимость сохраняются при f^*, в частности, f^* дает гомоморфизм групп Пикара $\mathrm{Pic}\, Y \to \mathrm{Pic}\, X$.

6.4. Когерентные пучки модулей. Вернемся теперь к алгебраическим многообразиям. Пучок модулей на многообразии называется *квазикогерентным* (соответственно *когерентным*), если локально он изоморфен коядру гомоморфизма свободных пучков (соответственно свободных пучков конечного ранга).

Пример 1. Пусть X — аффинное многообразие, M — модуль над кольцом $K[X]$. Полагая для открытого $U \subset X$ $\tilde{M}(U) = M \otimes_{K[X]} \mathcal{O}_X(U)$, мы получаем пучок модулей $\tilde{M}$ на X. Сопоставление $M \mapsto \tilde{M}$ сохраняет тензорное произведение, точность и т. п. В частности, $\tilde{M}$ квазикогерентный (и когерентный, если M конечного типа); более того, любой квазикогерент-той (когерентный) пучок модулей имеет такой вид.

Пример 2. Пусть $p: E \to X$ — векторное расслоение. Свяжем с ним пучок $\mathscr{L}_X(E)$ линейных форм на E; более точно, для открытого $U \subset X$ сечения этого пучка над U — это регулярные функции на $p^{-1}(U)$, линейные на слоях p. Получается когерентный пучок модулей, свободный (соответственно локально свободный, обратимый), если векторное расслоение E тривиальное (соответственно локально тривиальное, линейное).

В частности, для тавтологического линейного расслоения S над проективным пространством $\mathbf{P} = \mathbf{P}(V)$ обратимый пучок $\mathscr{L}_{\mathbf{P}}(S)$ обозначается $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ и называется *тавтологическим*, фундаментальным или скручивающим обратимым пучком на $\mathbf{P}$. Пространство его глобальных сечений $H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1))$ канонически изоморфно пространству V^* линейных форм на V. m-я тензоная степень $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ также обратима и обозначается $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(m)$.

Квазикогерентность и когерентность сохраняются при переходе к ядрам и коядрам гомоморфизмов пучков модулей, тензорном произведении, обратном образе. Прямой образ квазикогерентного пучка квазикогерентный. Однако прямой образ когерентного пучка вообще говоря не когерентен. Вот два типичных примера.

Пример 3. Пусть f — морфизм $\mathbf{A}^1$ в точку. Тогда $f_* \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}$ есть по существу пространство $H^0(\mathbf{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{A}^1}) = K[T]$, которое бесконечно над K; поэтому $f_* \mathcal{O}_X$ в данном случае некогерентен.

Пример 4. Возьмем вложение $\mathbf{A}^1 - \{0\}$ в $\mathbf{A}^1$. Прямой образ структурного пучка приводит к $K[T]$-модулю $K[T, T^{-1}]$, который также не имеет конечного типа.

В главе 2 мы познакомися с важным классом собственных морфизмов, сохраняющих когерентность при прямом образе. В следующем параграфе мы познакомимся еще с одним примером когерентных пучков — пучками дифференциальных форм.

6.5. Пучки идеалов. Еще один важный пример когерентных пучков доставляют пучки идеалов. Пусть Y — подмногообразие в X, а $J(Y)$ — подпучок в $\mathcal{O}_X$, состоящий из сечений, обращающихся в нуль на Y. Это когерентный пучок идеалов $\mathcal{O}_X$, причем факторпучок $\mathcal{O}_X/J(Y)$ изоморфен $\mathcal{O}_Y$.

Обратно, пусть $J \subset \mathcal{O}_X$ — когерентный пучок идеалов. Носитель факторпучка $\mathcal{O}_X/J$ (т. е. множество точек $x \in X$, где $J_x \neq \mathcal{O}_{X,x}$; здесь и далее F_x обозначает, как всегда, *слой пучка* F в точке x, т. е. $\varinjlim F(U)$ по всем окрестностям U точки x) является замкнутым подмножеством в X. В духе § 2 окольцованное пространство $(\operatorname{supp}(\mathcal{O}_X/J), \mathcal{O}_X/J)$ можно назвать *подсхемой* в X, заданной пучком идеалов $J \subset \mathcal{O}_X$.

Вообще, *алгебраической схемой* можно назвать окольцованное пространство, локально изоморфное подсхеме аффинного пространства. Откладывая систематическое рассмотрение схем до главы 4, скажем о них несколько слов. Алгебраические схемы отличаются от многообразий лишь тем, что могут иметь нильпотенты в структурном пучке. Поэтому их можно представлять как «инфинитезимальные утолщения» алгебраических многообразий. Уничтожая нильпотенты, т. е. редуцируя схему X, мы получаем алгебраическое многообразие X_{red} с тем же множеством точек. Как мы видели и еще увидим, многие естественные конструкции приводят именно к схемам и проходят для любых схем.

6.6. Конструкции многообразий. Одно из применений когерентных пучков относится к глобализации рассмотренных ранее локальных конструкций. Пусть дано алгебраическое многообразие X и квазикогерентный пучок $\mathcal{A}$ $\mathcal{O}_X$-алгебр конечного типа. Последнее означает, что локально $\mathcal{A}$ порождается конечным числом сечений. Глобализуя конструкцию аффинного многообразия Specm из § 2, мы построим схему $\operatorname{Specm}_X(\mathcal{A})$-$S$ вместе с морфизмом $\pi: \operatorname{Specm}_X(\mathcal{A}) \to X$. Делается это так. Предположим сначала, что X аффинное; тогда $\operatorname{Specm}_X(\mathcal{A}) =$

$=\mathrm{Specm}\mathscr{A}(X)$, а морфизм π дуален структурному гомоморфизму K-алгебр $K[X]\to\mathscr{A}(X)$. Если $\mathscr{D}(f)$ — главное открытое подмножество в X, то в силу квазикогерентности $\mathscr{A}$ имеем $\mathscr{A}(\mathscr{D}(f))=\mathscr{A}(X)\otimes_{K[X]}K[\mathscr{D}(f)]=\mathscr{A}(X)(f^{-1})$. Поэтому $\mathrm{Specm}\mathscr{A}(\mathscr{D}(f))$ отождествляется с открытым подмножеством $\pi^{-1}(\mathscr{D}(f))$. В общем случае надо взять атлас (X_i) многообразия X и склеить S из схем $\mathrm{Specm}\mathscr{A}(X_i)$. Заметим, что $\pi_*(\mathcal{O}_S)=\mathscr{A}$, так что сечения $\mathscr{A}$ реализуются регулярные функции на S. Морфизмы вида $\mathrm{Specm}_X(\mathscr{A})\to X'$ называются *аффинными*.

Два частных случая этой конструкции особенно важны. Первый — построение векторного расслоения $\mathbf{V}(F)$ по когерентному пучку модулей F. Для этого в качестве $\mathscr{A}$ надо взять пучок симметрических алгебр $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(F)$ пучка F. Эта конструкция коммутирует с заменой базы. В частности, для любой точки $x\in X$ слой $\mathbf{V}(F)$ над x отождествляется с векторным пространством $F(x)^*$, двойственным к $F(x)=F_x/\mathfrak{m}_xF_x$, где $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал $\mathcal{O}_{X,x}$. При этом сечения F реализуются как функции на $\mathbf{V}(F)$, линейные послойно, и более того, F изоморфен пучку $\mathscr{L}_X(\mathbf{V}(F))$ линейных форм на $\mathbf{V}(F)$ (см. § 5).

Другой частный случай полезен для конструирования проективных расслоений. Пусть пучок алгебр $\mathscr{A}$ градуированный, $\mathscr{A}=\bigoplus_{k\geqslant 0}A_k$, причем а) $\mathscr{A}_0=\mathcal{O}_X$, б) пучок $\mathscr{A}_1$ когерентный, в) $\mathscr{A}_1$ порождает $\mathscr{A}$ над $\mathscr{A}_0$. Канонический гомоморфизм пучков $\mathcal{O}_X$-алгебр $\mathrm{Sym}(\mathscr{A}_1)\to\mathscr{A}$ сюръективен, что дает замкнутое вложение X-схем $C=\mathrm{Specm}_X(\mathscr{A})\hookrightarrow\mathbf{V}(\mathscr{A}_1)$. В силу градуированности $\mathscr{A}$ подсхема C инвариантна при действии K гомотетиями на векторном расслоении $\mathbf{V}(\mathscr{A}_1)$, так что C представляет расслоение на конусы. Соответствующее проективное расслоение $\mathbf{P}_X(C)\to X$ (см. § 5) называется *проективным спектром* градуированого пучка алгебр $\mathscr{A}$ и обозначается $\mathrm{Proj}(\mathscr{A})$. Конструкция проективного спектра также коммутирует с заменой базы. Морфизмы вида $\mathrm{Proj}(\mathscr{A})\to X$ называются *проективными*. Подробнее см. [28], [34], [41], [53].

§ 7. Дифференциальное исчисление на алгебраических многообразиях

Понятия дифференциала отображения и касательного пространства — центральные в любой теории многообразий. Они служат инструментом линеаризации различных задач.

7.1. Дифференциал регулярной функции. Пусть $f(T_1,\ldots,T_n)$ — многочлен (или регулярная функция на $\mathbf{A}^n$); пользуясь обычными правилами дифференцирования суммы и произведения, можно без предельных переходов, чисто формально определить частные производные $\partial f/\partial T_i$. Это снова будут многочлены. *Дифференциалом* f в точке $x\in\mathbf{A}^n$ называется линейное отображение

$$d_x f : K^n \to K,$$

которое точку $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$ переводит в число $(d_x f)(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (\partial f / \partial T_i)(x) \xi_i$. Можно также сказать, что $d_x f$ — это линейная часть функции f в точке x, так как

$$f(x+\xi) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} (\partial f / \partial T_i)(x) \xi_i + \ldots$$

где $\ldots$ означает члены порядка $\geqslant 2$ по ξ. В силу полиномиальности $\partial f / \partial T_i$ отображения $d_x f$ склеиваются в одно регулярное отображение $df : K^n \times \mathbf{A}^n \to K$, $df(\xi, x) = (d_x f)(\xi)$.

Строение слоя $f^{-1}(f(x))$ вблизи точки x зависит от того, отличен от нуля дифференциал $d_x f$ или нет. Если $d_x f \neq 0$, многообразие $f^{-1}(f(x))$ устроено «похоже» на многообразие нулей дифференциала $d_x f$ и является «гладким» вблизи x. Линейное пространство нулей $d_x f$ естественно считать «касательным» к $f^{-1}(f(x))$ в x. Если же $d_x f = 0$, картина усложняется. Ниже нарисован график функции $f = T_1^2 + T_1^3 - T_2^2$ и его сечение нулевого уровня $f^{-1}(0)$. Дифференциал обращается в нуль лишь в начале координат, и в нем кривая $f^{-1}(0) = [T_2^2 = T_1^2 + T_1^3]$ имеет «особенность»; все остальные кривые равного уровня $f^{-1}(c)$ «гладкие».

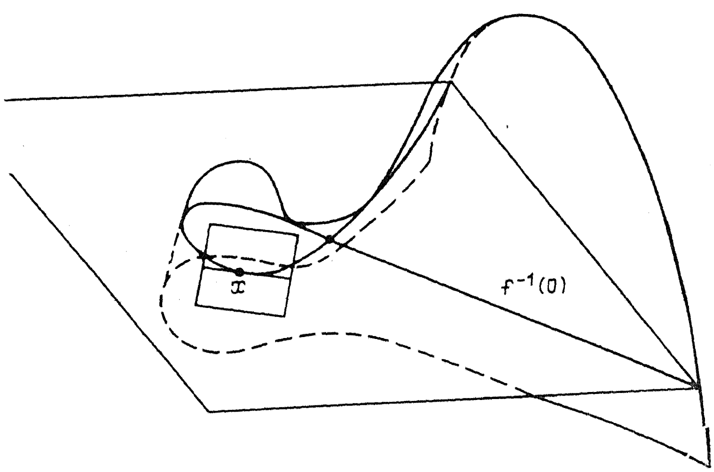


Рис. 7

Заметим сразу, что дифференциал может равняться нулю во всех точках, даже если f непостоянна (см. морфизм Фробениуса из § 2). Однако это бывает в очень специальных случаях:

Предложение. Пусть f — непостоянный многочлен и дифференциалы $d_x f$ равны нулю во всех точках $x \in f^{-1}(0)$. Тогда f есть p-я степень некоторого многочлена, где p — характеристика поля K. В частности, f приводим.

В самом деле, пусть f неприводим, и $\partial f / \partial T_i$ обращается в нуль в точках $f^{-1}(0)$. Из теоремы Гильберта о нулях $\partial f / \partial T_i$ делится на f. Но степень $\partial f / \partial T_i$ меньше степени f, так что многочлен $\partial f / \partial T_i$ нулевой. В нулевой характеристике отсюда следует постоянство f. В характеристике $p > 0$ можно утверждать лишь, что f зависит от $T_1^p, \ldots, T_n^p$. Но тогда $f = g^p$ для некоторого многочлена g.

7.2. Касательное пространство. Пусть теперь X — подмногообразие (или лучше подсхема) в $\mathbf{A}^n$, заданная идеалом $I \subset K[T_1, \ldots, T_n]$, и $x \in X$. Скажем, что вектор $\xi \in K^n$ касается X в точке x, если $(d_x g)(\xi) = 0$ для любой функции g из I (или только для образующих идеала I). Множество всех таких векторов образует векторное подпространство в K^n, которое обозначается $T_x X$ и называется *касательным пространством* к X в x.

Ясно, что каждая регулярная функция f на X имеет дифференциал $d_x f : T_x X \to K$. Вообще, если $f : X \to Y$ — морфизм аффинных многообразий, то определен дифференциал $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$, который K-линеен.

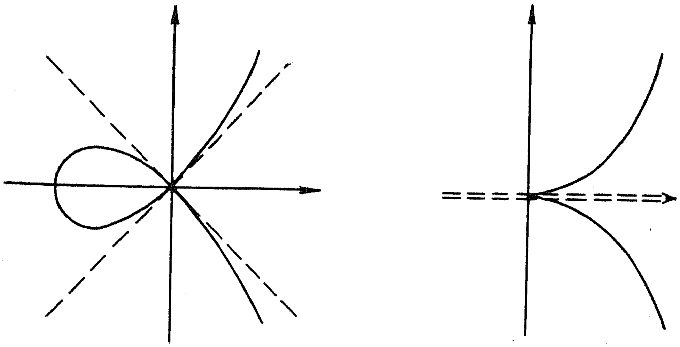
Приведенное определение касательного пространства довольно наглядно, однако аппелирует к вложению $X \subset \mathbf{A}^n$. Легко понять, как от этого избавиться. Пусть $\mathfrak{m}_x \subset K[X]$ — максимальный идеал функций, нулевых в точке $x \in X$. Сопоставляя функции ее дифференциал, мы получаем K-линейный гомоморфизм $\delta : \mathfrak{m}_x \to (T_x X)^*$. Легко понять, что он сюръективен, а его ядро совпадает с $\mathfrak{m}_x^2$. Это позволяет дать инвариантное определение $T_x X$ как пространства, двойственного к $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ (Зариский), а также «склеить» все касательные пространства $T_x X$ в одно касательное расслоение TX. Однако стоит немного задержаться еще на одном полезном понятии.

7.3. Касательный конус. С точкой x многообразия $X \subset \mathbf{A}^n$ можно связать т. н. касательный конус $C_x X$, лежащий в касательном пространстве $T_x X$. Интуитивно его можно представлять как предельные положения секущих $\overline{xx'}$, когда $x' \in X$ и стремится к x.

Снова надо начать с одной функции. Пусть $f = \sum_d f_d$ — разложение на однородные формы; ненулевая форма наименьшей степени f_d называется *начальной*, или ведущей формой.

Ясно, что поведение f вблизи начала координат определяется главным образом ее начальной формой. Подмногообразие (а точнее, подсхема) нулей f_{d_0} называется касательным конусом к гиперповерхности $[f=0]$.

Примеры. Пусть X — нулевая линия уровня функции $f=T_1^2+T_1^3-T_2^2$, как (на рис. 8а). Касательный конус в начале координат задается уравнением $T_1^2=T_2^2$ и распадается на две прямые $T_1=T_2$ и $T_1=-T_2$. Аналогично для кривой $T_2^2=T_1^3$ касательный конус задается уравнением $T_2^2=0$ и представляет удвоенную прямую $T_2=0$ (рис. 8b)).



a b

Рис. 8

Дадим теперь определение. Пусть подсхема $X\subset \mathbf{A}^n$ задается идеалом I и x — точка X, которую без ущерба для общности можно считать 0. *Касательный конус* C_xX — подсхема в K^n, заданная нулями начальных форм всех $g\in I$ (в общем случае одних образующих I уже недостаточно). Ясно, что C_xX лежит в касательном пространстве T_xX и порождает последнее как векторное пространство (точнее, касательное пространство к C_xX в нуле совпадает с T_xX). В каком-то смысле многообразие X вблизи x «похоже» на C_xX, хотя это и нельзя понимать буквально, как локальный изоморфизм (см. рис. 8b).

Для более инвариантного определения касательного конуса понадобится следующее алгебраическое понятие. Пусть $\mathfrak{A}$ — идеал в кольце A; градуированным кольцом пары $(A, \mathfrak{A})$ называется градуированное кольцо

$$\mathrm{gr}\,(A, \mathfrak{A})=\bigoplus_{k\geqslant 0}(\mathfrak{A}^k/\mathfrak{A}^{k+1}).$$

Подробнее об этом образовании см. [19], [23], [63], [65]. Можно показать, что в предыдущих обозначениях факторкольцо $K[T_1, \ldots, T_n]$ по идеалу ведущих форм I изоморфно

$\mathbf{gr}(K[X], \mathfrak{m}_x)$. Поэтому для произвольного многообразия X конус C_xX можно определить как $\operatorname{Specm}(\mathbf{gr}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x))$.

Касательный конус, как и касательное пространство — образования функториальные. Если $f: X \to Y$ морфизм, $x \in X$, то при линейном отображении $d_xf: T_xX \to T_{f(x)}Y$ конус C_xX отображается в конус $C_{f(x)}Y$.

7.4. Гладкие многообразия и морфизмы. Наиболее просто многообразия устроены в точках, где они похожи на касательное пространство.

Определение. Точка x на многообразии X называется *гладкой* (или неособой; или регулярной; говорят также, что X гладко в x), если $C_xX = T_xX$. В противном случае, точка x называется *особой*.

Как мы видели в п. 7.1, почти все точки гиперповерхности в $\mathbf{A}^n$ гладкие. Позже мы увидим, что это верно для любого многообразия, так что множество $\operatorname{Sing} X$ особых точек многообразия X замкнуто и нигде не плотно. Если $\operatorname{Sing} X$ пусто, то X называется *гладким*. Гладкие многообразия наиболее похожи на дифференцируемые или аналитические многообразия, гладкие по определению. Конечно, $\mathbf{A}^n$ — гладкое, как и $\mathbf{P}^n$, и многообразия Грассмана. Если X — гладкое многообразие и $f: X \to K$ — регулярная функция, то многообразие $f^{-1}(f(x))$ гладкое в тех точках x, где $d_xf \neq 0$. Понятно, как это обобщается на морфизмы гладких многообразий. Мы же дадим относительный вариант понятия гладкости для семейства многообразий.

Определение. Морфизм $f: X \to Y$ называется *гладким в точке* $x \in X$, если дифференциал $d_xf: C_xX \to C_{f(x)}Y$ устроен как проекция $V \times C_{f(x)}Y$ на второй сомножитель, где V — векторное пространство. В противном случае говорят, что f *вырождается* в x. Нигде не вырожденный морфизм называется *гладким*.

Приведем несколько простых свойств гладких морфизмов:

а) Если X и Y — гладкие, то гладкость f сводится к сюръективности отображений касательных пространств.

б) Многообразие X гладкое тогда и только тогда, когда гладко отображение X в точку.

в) Если Y — гладкое многообразие, а $f: X \to Y$ — гладкий морфизм, то многообразие X тоже гладкое.

г) Если $f: X \to Y$ — гладкий, то его слой $f^{-1}(y)$ гладкий. Утверждения в) и г) — частные случае более общего.

д) Гладкость сохраняется при композициях и замене базы.

7.5. Нормальное расслоение. Пусть $Y \subset X$ и оба многообразия гладкие и аффинные. Нормальным пространством к Y в X в точке $y \in Y$ естественно назвать факторпространство $N_{Y/X,y} = T_yX/T_yY$. Дифференциалы функций из идеала $I(Y)$ дают линейные функционалы на $N_{Y/X,y}$, нулевые для функций из $I(Y)^2$. Поэтому $N_{Y/X,y}$ двойственно к пространству $I(Y)/(I(Y)^2 + \mathfrak{m}_y)$. Это подсказывает способ склейки таких нормальных пространств в одно нормальное расслоение.

Пусть Y — уже произвольное подмногообразие (или подсхема) X, заданная пучком идеалов $J \subset \mathcal{O}_X$. Факторпучок $J/J^2 = J \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$ сосредоточен на Y и его можно рассматривать как когерентный пучок на Y; он называется *конормальным*. Векторное расслоение $\mathbf{V}(J/J^2)$ над Y, связанное с этим пучком (см. § 6), называется *нормальным* к Y в X и обозначается $N_{Y|X}$.

В духе п. 7.3 можно определить *расслоение нормальных конусов* $C_{Y|X}$ как $\operatorname{Specm}_Y(\operatorname{gr}(\mathcal{O}_X, J)) = \operatorname{Specm}_Y(\bigoplus_{k \geq 0} J^k/J^{k+1})$. Это замкнутая подсхема в $N_{Y|X}$.

7.6. Касательное расслоение. *Касательное расслоение* $TX \to X$ к многообразию X проще всего определить как нормальное расслоение к диагонали в $X \times X$. Слой этого расслоения TX над точкой x изоморфен $N_{x|X}$, т. е. T_xX. Если $f: X \to Y$ — морфизм, то $f \times f: X \times X \to Y \times Y$ переводит диагональ в диагональ и по функториальности дает гомоморфизм касательных расслоений $Tf: TX \to TY$, согласованный с f и послойно совпадающий с $d_xf: T_xX \to T_{f(x)}Y$.

Примеры. а) $T(X \times Y) \simeq TX \times TY$.

б) Если $Y \subset X$, то имеется каноническая точная последовательность векторных расслоений над Y

$$0 \to TY \to TX|_Y \to N_{Y|X}.$$

в) Касательное расслоение $TG(k, V)$ к многообразию Грассмана $G(k, V)$ отождествляется с расслоением $S^* \otimes Q$, где S и Q — универсальные под- и факторрасслоения на $G(k, V)$.

В частности, подкручивая на S^* последовательность

$$0 \to S \to V_{\mathbf{P}(V)} \to Q \to 0$$

на проективном пространстве $\mathbf{P}(V)$, мы получаем точную последовательность

$$0 \to K_{\mathbf{P}(V)} \to V_{\mathbf{P}(V)} \otimes S^* \to T\mathbf{P}(V) \to 0.$$

7.7. Пучки дифференциалов. Конормальный пучок к диагонали в $X \times X$, рассматриваемый как $\mathcal{O}_X$-модуль, называется *кокасательным*, или *пучком дифференциальных 1-форм* на X и обозначается Ω^1_X. Его сечения реализуются как (послойно) линейные функции на TX и называются *дифференциальными 1-формами*. Примерами 1-форм являются дифференциалы df функций на X. Для $x \in X$ дифференциал d дает изоморфизм $m_x/m_x^2 \simeq \Omega^1_X(x)$. Дифференциалы функториальны в том смысле, что морфизм многообразий $f: X \to Y$ дает гомоморфизм пучков $f^*: \Omega^1_Y \to \Omega^1_X$. Подробнее о пучках и модулях дифференциалов см. [8], [9], [36], [41].

Пример 1. Пучок $\Omega^1_{\mathbf{A}^n}$ свободный с образующими $dT_1, \ldots, dT_n$.

Пример 2. Для $\mathbf{P}^n$ есть точная последовательность пучков

$$0 \to \Omega^1_{\mathbf{P}^n} \to K^{n+1} \underset{K}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n} \to 0,$$

двойственная к последовательности расслоений из примера 8.6в).

Пример 3. Если $Y \subset X$ — подсхема с пучком идеалов $I \subset \subset \mathcal{O}_X$, имеется двойственная к примеру б) п. 7.6 точная последовательность *присоединения*

$$J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \to \Omega^1_Y \to 0.$$

Гомоморфизм δ индуцирован дифференцированием d и часто бывает инъективен (например, если X и Y гладкие).

Пример 4. Пусть $X \subset \mathbf{P}^2$ — гладкая кривая третьей степени. Тогда пучок идеалов J в X в $\mathbf{P}^2$ изоморфен $\mathcal{O}_P(-3)$, а $J/J^2 \simeq \simeq \mathcal{O}_X(-3)$. Поэтому $\Omega^1_X \otimes \mathcal{O}(-3)$ изоморфен второй внешней степени $\Omega^1_P \otimes \mathcal{O}_X$, т. е. ограничению $\Lambda^2 \Omega^1_{P^2}$ на X. Из примера 2 видно, что $\Lambda^2 \Omega^1_{P^2} \simeq \mathcal{O}_{P^2}(-3)$. Отсюда $\Omega^1_X \simeq \mathcal{O}_X$, так что на X есть нетривиальная регулярная дифференциальная 1-форма.

Конечно, эту форму можно написать явно. Рассмотрим в $\mathbf{A}^3$ три (рациональные) 1-формы

$$\omega_0 = \frac{T_1 dT_2 - T_2 dT_1}{\partial F/\partial T_0}, \quad \omega_1 = \frac{T_2 dT_0 - T_0 dT_2}{\partial F/\partial T_1}, \quad \omega_2 = \frac{T_0 dT_1 - T_1 dT_0}{\partial F/\partial T_2},$$

где $F(T_0, T_1, T_2)$ — однородный многочлен 3-й степени задающий X. Так как степени числителей и знаменателей ω_i равны 2, формы ω_i однородны и определяют 1-формы на $\mathbf{P}^2$, регулярные вне кривых $\mathcal{D}_i = [\partial F/\partial T_i = 0]$. Главное — формы ω_i совпадают при ограничении на X; это следует из того, что при ограничении на X обращаются в нуль

$$3F = \sum \frac{\partial F}{\partial T_i} T_i \text{ и } dF = \sum \frac{\partial F_i}{\partial T_i} dT_i.$$

Поэтому формы $\omega_i|X$ задают одну форму ω на X, регулярную так как D_i не пересекаются в точках X в силу гладкости X,

Заметим, что если степень d многочлена F будет $\geqslant 3$, формы ω_i можно умножить на любой однородный многочлен степени $d-3$ и по тем же причинам получить регулярную 1-форму на кривой $[F=0] \subset \mathbf{P}^2$. Поэтому на гладкой кривой степени d в $\mathbf{P}^2$ есть $\frac{(d-2)(d-1)}{2}$ регулярных дифференциальных форм.

Внешние степени $\Lambda^p(\Omega^1_X)$ пучка $\mathcal{O}_X$-модулей Ω^1_X обозначаются $\Omega^p{}_X$ и называются *пучками p-дифференциалов* на X. Как и пучки 1-дифференциалов, они ведут себя контравариантно. С ними можно делать обычные операции [25], [26]: а) операции внешнего умножения, б) сворачивания с векторными полями (т. е. сечениями касательного расслоения $TX \to X$), в) внешнего дифференцирования, $d:\Omega_X^p \to \Omega_X^{p+1}$.

Для алгебраических многообразий можно также рассматривать векторные поля, дифференциальные операторы, дифференциальные уравнения, связности и остальные дифференциально-геометрические понятия [25], [32], [64].

Глава 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ: ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

В главе 1 теория алгебраических многообразий развивалась параллельно теории дифференцируемых многообразий. В этой главе мы рассмотрим понятия и свойства, специфические именно для алгебраических многообразий и либо не имеющие дифференцируемых аналогов, либо требующие существенно иного подхода. К первым относятся понятия неприводимости, нормальности, рациональные отображения, раздутия. Ко вторым — понятия полноты, размерности, гладкости. Здесь же устанавливаются фундаментальные свойства алгебраических многообразий — теорема о размерности слоев, теорема о конструктивности образа, теорема о связности, основная теорема Зариского, полнота проективных многообразий, теорема конечности и т. д. Это требует чуть большего привлечения алгебры, нежели в главе 1.

§ 1. Рациональные отображения

1.1. Неприводимые многообразия. Начнем с плоской кривой $[T_1T_2=0]\subset \mathbf{A}^2$. Она явно состоит из двух кусков — прямых $[T_1=0]$ и $[T_2=0]$, пересекающихся в точке 0 (см. рис. 1). В свою очередь, эти прямые уже не разлагаются на более простые замкнутые подмножества. Оказывается, что и любое алгебраическое многообразие разлагается в объединение конечного числа неприводимых компонент.

Начнем с общего определения. Топологическое пространство X называется *неприводимым*, если оно не является объединением двух собственных замкнутых подмножеств. Или, что то же самое, любое непустое открытое подмножество плотно в X. В частности, неприводимое пространство связно, хотя обратное неверно, как видно из приведенного выше примера. Замыкание неприводимого подмножества неприводимо. Образ неприводимого множества при непрерывном отображении неприводим.

Алгебраическое многообразие называется *неприводимым*, если оно неприводимо в топологии Зариского.

Пример 1. Аффинное пространство $\mathbf{A}^n$ (а значит и $\mathbf{P}^n$) неприводимо. В самом деле, пусть $\mathbf{A}^n = V(f) \cup V(g)$; тогда $f \cdot g = 0$. Но кольцо многочленов $K[T_1, \ldots, T_n]$ целостно, поэтому либо f, либо g равно 0, т. е. либо $V(f)$, либо $V(g)$ совпадает с $\mathbf{A}^n$. Вообще, аффинное многообразие X неприводимо тогда и только тогда, когда кольцо $K[X]$ целостно.

Пример 2. Если многообразия X и Y неприводимы, то неприводимо и $X \times Y$. Для этого заметим, что образ любого открытого $U \subset X \times Y$ при проекции на Y открыт. В самом деле, проекция U совпадает с объединением открытых $V_x \subset Y$, $x \in X$, таких что $U \cap (\{x\} \times Y) = \{x\} \times V_x$.

Пример 3. Пусть $f \in K[T_1, \ldots, T_n]$ — неприводимый многочлен. Из теоремы Гаусса об однозначном разложении на множители в кольце $K[T_1, \ldots, T_n]$ легко получить, что гиперповерхность $V(f) \subset \mathbf{A}^n$ неприводима. Вообще, если $f = f_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{m_r}$ — разложение на неприводимые множители, то $V(f) = V(f_1) \cup \ldots \cup V(f_r)$ — разложение $V(f)$ на неприводимые компоненты.

Определение. *Неприводимой компонентой* многообразия X называется максимальное неприводимое подмножество X; ясно, что оно замкнуто.

Любое алгебраическое многообразие разлагается на конечное число неприводимых компонент. В самом деле, если X приводимо, разложим его на два меньших подмногообразия и т. д. То, что процесс закончится через конечное число шагов, гарантирует специфическое свойство топологии Зарисского — нётеровость.

1.2. Нётеровы пространства. Топологическое пространство X называется *нётеровым*, если любая убывающая последовательность замкнутых подмножеств $Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots$ в X стабилизируется, т. е. найдется r, что $Y_r = Y_{r+1} = \ldots$. Имеют место следующие простые факты (см., например, [23]):

а) Любое подпространство нётерова пространства нётерово.

б) Пространство X нётерово т. и т. т., когда любое его открытое подмножество U квазикомпактно (т. е. из любого открытого покрытия U можно выбрать конечное подпокрытие).

в) X нётерово, если оно покрывается конечнем числом нётеровых пространств.

Предложение. Алгебраическое многообразие нётерово.

Напомним, что мы ограничились многообразиями с конечным атласом. Поэтому в силу а) и в) достаточно проверить нётеровость аффинного пространства $\mathbf{A}^n$. Пусть $Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots$ — убывающая последовательность подмногообразий $\mathbf{A}^n$ и $I(Y_1) \subset \subset I(Y_2) \subset \ldots$ соответствующая возрастающая последовательность идеалов в $K[T_1, \ldots, T_n]$. По теореме Гильберта о базисе идеал $\bigcup_i I(Y_i)$ конечно порожден. Его образующие лежат в некотором $I(Y_r)$; тогда $I(Y_r) = I(Y_{r+1}) = \ldots$ и $Y_r = Y_{r+1} = \ldots$.

1.3. Рациональные функции. Рациональной функцией от переменных $T_1, \ldots, T_n$ называется отношение f/g двух многочленов f, g от $T_1, \ldots, T_n$, причем $g \neq 0$. Отметим, что она является функцией не на всем $\mathbf{A}^n$, а лишь на открытом подмножестве $\mathscr{D}(g) \subset \mathbf{A}^n$, где g отлично от нуля. При этом она однозначно определяется своим ограничением на любое непустое открытое $U \subset \mathscr{D}(g)$. Обратно, любая регулярная функция на открытом $U \subset \mathbf{A}^n$ представляется рациональной функцией.

Это подсказывает следующее обобщение на любое алгебраическое многообразие X. *Рациональной функцией* на X называется класс эквивалентности регулярных отображений $f: U \to K$, где U — открытое плотное подмножество в X. Два таких отображения $f: U \to K$ и $f': U' \to K$ считаются эквивалентными, если они совпадают на $U \cap U'$. Это действительно будет отношением эквивалентности, так как $U \cap U'$ также плотно в X. (Наивное определение рациональной функции как отношения двух регулярных функций мало интересно, так как на $\mathbf{P}^n$ мало регулярных функций.)

Рациональные функции можно складывать и перемножать, так что множество $K(X)$ всех рациональных функций на многообразии X является кольцом. Ясно, что $K(X)$ есть индуктивный предел $\varinjlim \mathcal{O}_X(U)$ колец $\mathcal{O}_X(U)$, когда U пробегает открытые плотные подмножества в X. Если X неприводимо, $K(X)$ является даже полем. В самом деле, если $f: U \to K$ — ненулевая функция, она обратима на непустом (следовательно, плотном) открытом подмножестве $U - f^{-1}(0)$. Далее, для неприводимого X поле $K(X)$ совпадает с полем частных целостного кольца $K[U]$, где U — любая аффинная карта X. Для произвольного X кольцо $K(X)$ есть прямая сумма полей $K(X_i)$, где X_i — неприводимые компоненты X.

1.4. Рациональные отображения. Совершенно аналогично определяется *рациональное отображение* многообразия X в *отделимое* многообразие Y как класс эквивалентности морфизмов $U \to Y$, где U открыто и плотно в X. Среди таких U существует наибольшее, которое называется *областью определения* рационального отображения f.

Пример. Рассмотрим преобразование $\mathbf{P}^n$ в себя, которое точку с однородными координатами $(x_0, \ldots, x_n)$ переводит в точку $(x_0^{-1}, \ldots, x_0^{-1})$. Оно определено, если все $x_i \neq 0$. Однако область его определения шире и включает точки, для которых лишь одно из x_i равно нулю; такая точка $(0, x_1, \ldots, x_n)$ переходит в $(1, 0, \ldots, 0)$. В частности, при $n=1$ это отображение определено всюду (и совпадает с $(x, y) \mapsto (y, x)$). При $n=2$ оно неопределено лишь в трех точках $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

Известный недостаток рациональных отображений в том, что их композиция определена не всегда; в самом деле, образ предыдущего отображения может оказаться целиком вне области определения последующего. Этого не случится, если образ любой компоненты плотен; такие отображения называются *доминантными*. Если $f: X \dashrightarrow Y$ доминантное рациональное отображение неприводимых многообразий, то поле $K(Y)$ вкладывается в поле $K(X)$.

Рациональное отображение $f: X \dashrightarrow Y$ неприводимых многообразий называется *бирациональным*, если оно обладает рациональным обратным $f^{-1}: Y \dashrightarrow X$; эквивалентно можно сказать, что f^* устанавливает изоморфизм полей $K(Y)$ и $K(X)$. Например, отображение $x \mapsto (x^2, x^3)$ устанавливает бирациональный изоморфизм прямой $\mathbf{A}^1$ и плоской кривой $C = [T_1{}^3 = T_2{}^2]$. Другой

Пример. Пусть $C \subset \mathbf{P}^2$ — неприводимая коника. Тогда стереографическая проекция (см. рис. 9), т. е. линейная проекция

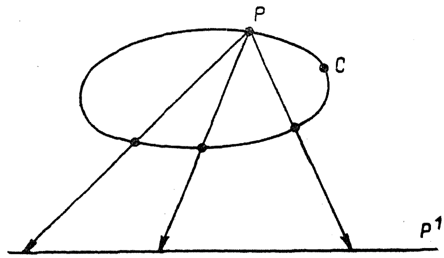


Рис. 9

из точки $p \in C$ задает бирациональный изоморфизм коники C и прямой $\mathbf{P}^1$. Вообще, если $X \subset \mathbf{P}^n$ — неприводимая гиперповерхность степени два, то линейная проекция из гладкой точки $p \in X$ задает бирациональный изоморфизм $X \dashrightarrow \mathbf{P}^{n-1}$. Как мы увидим позже, гладкая кубическая кривая в $\mathbf{P}^2$ уже бирационально не эквивалентна $\mathbf{P}^1$.

Бирациональная эквивалентность доставляет более слабое понятие эквивалентности, чем изоморфизм; в этом также специфика алгебраической геометрии. Изучение алгебраических многообразий с точностью до бирациональных преобразований и нахождение бирациональных инвариантов составляет предмет бирациональной геометрии.

1.5. График рационального отображения. Рациональное отображение $f: X \dashrightarrow Y$ можно еще одним способом представить морфизмом. Пусть f определено на открытом плотном $U \subset X$ и $\Gamma \subset U \times Y$ — его график (см. п. 4.3 главы 1). Замыкание Γ в $X \times Y$ называется *графиком рационального отображения* f и обозначается Γ_f. Проекция $p: \Gamma_f \to X$ является морфизмом, причем бирациональным, т. к. p изоморфизм над U. Если q — вторая проекция $\Gamma_f \to Y$, то f представляется как композиция

p^{-1} и морфизма q. Рациональное отображение f можно понимать как многозначное отображение, сопоставляющее точке x множество $f(x)=q(p^{-1}(x))$ (и однозначное почти всюду).

Вообще, алгебраическим *соответствием* между многообразиями X и Y называется замкнутое подмножество $T\subset X\times Y$; образом точки $x\in X$ при T называется подмножество $T(x)=$ $=q(p^{-1}(x))$ в Y, где p, q — проекции T в X и Y.

Пример. Рассмотрим график отображения проектирования $\pi:\mathbf{A}^{n+1}-- \to\mathbf{P}^n$ из п. 4.4 главы 1; оно определено вне начала координат $0\in\mathbf{A}^{n+1}$. График ограничения его на $\mathbf{A}^{n+1}-\{0\}$ состоит из пар (x, l), где x — ненулевая точка K^{n+1}, а l — прямая в K^{n+1}, проходящая через x, т. е. $l=Kx$. Замыкание его в $\mathbf{A}^{n+1}\times\mathbf{P}^n$ состоит из таких же пар (x, l), $x\in l$, только теперь x может и равняться 0. Оно задается уравнениями

$$T_iT'_j=T_jT'_i,\quad i, j=0, 1,\ldots, n, \tag{$*$}$$

где T_i — координаты на $\mathbf{A}^{n+1}$, а T'_i — однородные координаты на $\mathbf{P}^n$.

Обозначим получившееся многообразие (т. е. график π) через $\widetilde{\mathbf{A}}^{n+1}$ и посмотрим, как выглядит его проекция σ на $\mathbf{A}^{n+1}$. Для этого покроем $\widetilde{\mathbf{A}}^{n+1}$ картами $\widetilde{U}_i$, $i=0, 1,\ldots, n$, заданными условиями $T'_i\neq 0$ (иначе говоря, это прообразы карт U_i на $\mathbf{P}^n$, см. п. 3.1 главы 1). Пользуясь $(*)$, выразим T_j как $T_i\xi_j^{(i)}$, где $\xi_j^{(i)}=$ $=T'_j/T'_i$. Поэтому координатами на $\widetilde{U}_i$ служат T_i, а также $\xi_j^{(i)}$, $j\neq i$, и они задают изоморфизм $\widetilde{U}_i$ с $\mathbf{A}^{n+1}$. Отображение σ в этих координатах имеет вид

$$\sigma^*(T_i)=T_i,\quad \sigma^*(T_j)=T_i\xi_j^{(i)}\ \text{при}\ j\neq i.$$

Отсюда видно, что σ устанавливает изоморфизм $\widetilde{\mathbf{A}}^{n+1}-\sigma^{-1}(0)$ с $\mathbf{A}^{n+1}-\{0\}$ (впрочем, это следует из определения графика). Более важно, что $\sigma^{-1}(0)$ на карте $\widetilde{U}_i$ задается одним уравнением $T_i=0$.

Вообще, слой $\sigma^{-1}(0)$ состоит из пар $(0, l)$, где l — любая прямая $l\subset K^{n+1}$. Поэтому $\sigma^{-1}(0)$ изоморфен $\mathbf{P}^n$ и называется *исключительным подмногообразием* в $\widetilde{\mathbf{A}}^{n+1}$. Точка $0\in\mathbf{A}^{n+1}$ при σ^{-1} как бы раздувается, взрывается по всем направлениям, и каждому касательному направлению соответствует своя точка на исключительном многообразии $\sigma^{-1}(0)$ (см. рис. 10). По этой причине морфизм σ (а также многообразие $\widetilde{\mathbf{A}}^{n+1}$) называется *раздутием* $\mathbf{A}^{n+1}$, или *σ-процессом* с центром в точке 0.

Обратимся теперь ко второй проекции $\widetilde{\pi}:\widetilde{\mathbf{A}}^{n+1}\to\mathbf{P}^n$. Слой $\widetilde{\pi}$ над точкой $l\in\mathbf{P}^n$, т. е. над прямой $l\subset K^{n+1}$, состоит из точек x, лежащих на l, т. е. отождествляется с самой прямой l. Поэтому $\widetilde{\pi}$ может быть отождествлено с универсальным линейным рас-

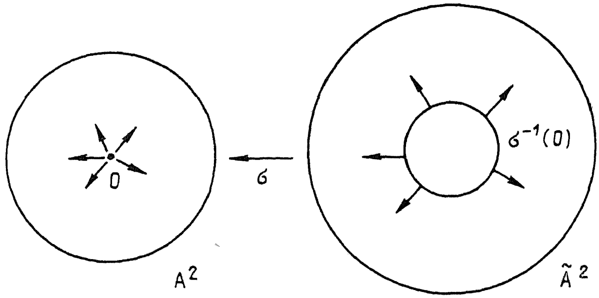


Рис. 10

слоением $S \to \mathbf{P}^n$ из п. 5.3 главы 1. Исключительное многообразие E отождествляется при этом с нулевым сечением S.

1.6. Раздутие точки. Обобщением предыдущей конструкции будет раздутие точки на любом многообразии. Предположим сначала, что X вложено в $\mathbf{A}^{n+1}$ и проходит через 0. Ограничим проектирование $\pi: \mathbf{A}^{n+1} \to \mathbf{P}^n$ на X и рассмотрим его график. Он называется снова *раздутием* X в точке 0 и обозначается $\tilde{X}$. Его можно понимать как замыкание в $\tilde{\mathbf{A}}^{n+1}$ множества $\sigma^{-1}(X - \{0\})$. Проекция $\sigma_X: \tilde{X} \to X$ задает поэтому изоморфизм $\tilde{X} - \sigma_X^{-1}(0)$ и $X - \{0\}$.

Посмотрим теперь, что происходит над точкой 0. Мы утверждаем, что слой $\sigma_X^{-1}(0)$ отождествляется с проективизацией $\mathbf{P}(C_0X)$ касательного конуса C_0X к X в точке 0. Это отвечает интуитивному представлению, что раздутие разводит касательные направления. Ограничимся случаем, когда X задается в $\mathbf{A}^{n+1}$ одним уравнением $f=0$, где $f \in K[T_0, \ldots, T_n]$. Пусть разложение $f = \sum_d f_d$ на однородные формы степени d начинается с f_{d_0}. Тогда на карте $\tilde{U}_i$ в $\tilde{\mathbf{A}}^{n+1}$ многообразие $\sigma^{-1}(X)$ задается нулями многочлена

$$\sigma^*(f) = f(T_i\xi_0^{(i)}, \ldots, T_i\xi_n^{(i)}) = T_i^{d_0}(\tilde{f}_{d_0} + T_i\tilde{f}_{d_0+1} + \ldots).$$

Поэтому полный прообраз $\sigma^{-1}(X)$ состоит из исключительного многообразия $E = \sigma^{-1}(0)$ (с кратностью d_0) и $\tilde{X}$, которое на карте $\tilde{U}_i$ задается уравнением

$$\tilde{f}_{d_0} + T_i\tilde{f}_{d_0+1} + \ldots = 0.$$

Видно также, что слой $\sigma_X^{-1}(0) = \tilde{X} \cap E$ задается на карте $\tilde{U}_i$ уравнениями $T_i = 0$ и $\tilde{f}_{d_0} = 0$, а на $E \simeq \mathbf{P}^n$ — начальной формой $f_{d_0} = 0$.

Рассмотрим, например, раздутие плоской кривой $C\subset\mathbf{A}^2$ с уравнением $Y^2=X^2+X^3$ (см. рис. 8а). Подставляя вместо Y выражение $X\xi$, мы получаем уравнение $X^2\xi^2=X^2+X^3$. Сокращая на X^2, (получаем уравнение $\xi^2=1+X$, задающее $\tilde{C}$ на одной из карт усм. рис. 4). Аналогично раздутие кривой $Y^2=X^3$ задается зравнением $\xi^2=X$.

Чтобы раздуть теперь точку x на произвольном многообразии X, надо некоторую окрестность U точки x вложить в $\mathbf{A}^{n+1}$ так, чтобы x попала в 0, и склеить $X-\{x\}$ с $\tilde{U}$ по открытым $U-\{x\}$ и $\tilde{U}-\sigma_U^{-1}(0)$. Получается X-многообразие $\sigma:\tilde{X}_x\to X$. При этом возникает вопрос о том, не будет ли конструкция зависеть от выбора U и вложения U в $\mathbf{A}^{n+1}$. Мы приведем другую конструкцию, инвариантную и более общую.

1.7. Раздутие подсхемы. Пусть $Y\subset X$ — подсхема, заданная пучком идеалов $I\subset\mathcal{O}_X$. Образуем градуированный пучок $\mathcal{O}_X$-алгебр $\mathcal{A}=\bigoplus\limits_{k\geqslant 0} I^k$. Проективный спектр этой алгебры $\sigma:\mathrm{Proj}(\mathcal{A})\to X$ (см. п. 6.6 главы 1) называется *раздутием* многообразия X вдоль подсхемы Y. В оправдание такого определения раздутия приведем три довода.

а) Пусть точка $x\in X$ не лежит на Y. Тогда вблизи x идеал I совпадает с $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{A}=\mathcal{O}_X[T]$ и его Proj изоморфен X. Поэтому σ является изоморфизмом над $X-Y$.

б) Посмотрим, что происходит над Y. В силу функториальности Proj подсхема $\sigma^{-1}(Y)$ устроена как Proj алгебры $\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_Y=\bigoplus\limits_{k\geqslant 0}(I^k/I^{k+1})=gr(\mathcal{O}_X, I)$. Таким образом $\sigma^{-1}(Y)\to Y$ устроено как проективизация нормального конуса $C_{Y/X}$. Важно отметить, что подсхема $\sigma^{-1}(Y)\subset\tilde{X}$ локально задается одним уравнением, как в п. 1.6; это свойство на самом деле характеризует раздутия (см. [41]).

в) В частном случае $X=\mathbf{A}^{n+1}$, $Y=\{0\}$, эта конструкция совпадает с рассмотренной в п. 1.6. В самом деле, пусть $T_0, \ldots, T_n$ — координаты на $\mathbf{A}^{n+1}$, а $T_0', \ldots, T_n'$ — образующие идеала $\mathfrak{m}_0$, рассматриваемые как элементы степени 1 в градуированном кольце $A=\bigoplus\limits_k \mathfrak{m}_0^k$. Эти элементы связаны соотношениями $T_iT_j'=T_jT_i'$, и мы приходим к (*).

Раздутия служат средством изучения локального строения многообразия X вблизи подмногообразия Y, позволяя как под увеличительным стеклом рассматривать особенности. Раздутия используются также для разрешения особенностей и устранения точек неопределенности рациональных отображений. Например, рациональное отображение $\mathbf{P}^2$ в себя, заданное формулой $(x, y, z)\mapsto(x^{-1}, y^{-1}, z^{-1})$, становится регулярным после раздутия трех точек $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$.

§ 2. Конечные морфизмы

2.1. Квазиконечные морфизмы. Простейшие многообразия — конечные. Прежде чем переходить к более глубокому изучению бесконечных многообразий, полезно остановиться на семействах конечных многообразий, т. е. на морфизмах с конечными слоями. Вопреки ожиданию, такие морфизмы называются *квазиконечными.* Термин «конечный морфизм» резервируется для морфизмов, удовлетворяющих дополнительному свойству замкнутости.

Пусть $f: X \to Y$ квазиконечный морфизм. Число элементов слоя $f^{-1}(y)$ может зависеть от точки $y \in Y$. Рассмотрим, к примеру, две плоские кривые C_1 и C_2 в $\mathbf{A}^2$, заданные уравнениями $Y^2 - XY = 0$ и $XY^2 - Y = 0$, и спроектируем их на ось x (см. рис. 11). При фиксированном x мы имеем квадратичное уравне-

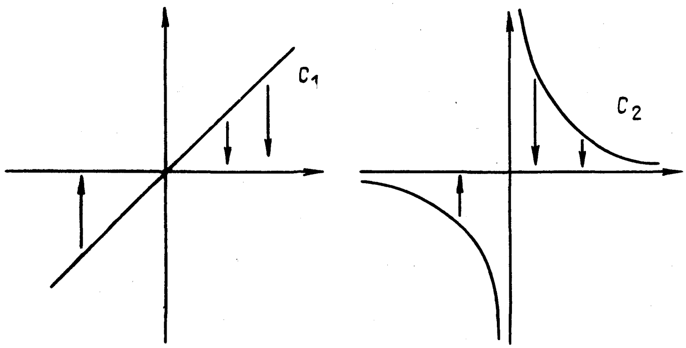


Рис. 11

ние относительно y, поэтому каждый слой содержит не более двух точек. Их действительно две, если $x \neq 0$. При $x = 0$ слой в обоих случаях состоит из одной точки, но по совершенно различным причинам. В первом случае при $x \to 0$ обе точки слоя сливаются в одну. Во втором случае одна из точек слоя «уходит на бесконечность». В первом случае морфизм считается конечным, во втором — нет. Чтобы дать общее определение, приходится прибегнуть к алгебраической терминологии.

2.2. Конечные морфизмы. Морфизм аффинных многообразий $f: X \to Y$ называется *конечным,* если кольцо $K[X]$ конечно порождено не только как алгебра над $K[Y]$, но и как $K[Y]$ — модуль (в этом случае говорят, что $K[X]$ является конечной $K[Y]$-алгеброй). По-другому можно сказать, что алгебра $K[X]$ целая над $K[Y]$ (см. § 1 главы 1). В самом деле, пусть $g \in K[X]$ и M_n — $K[Y]$-подмодуль в $K[X]$, порожденный $1, g, \ldots, g^{n-1}$. В силу конечности $K[X]$ над $K[Y]$ возрастающая последовательность модулей $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ стабилизируется, $M_r = M_{r+1}$ и

g^r выражается через $1, \ldots, g^{r-1}$ с коэффициентами из $K[Y]$. Поэтому g цел над $K[Y]$; обратное тоже очевидно.

Морфизм $f: X \to Y$ произвольных многообразий называется *конечным*, если для любой карты $V \subset Y$ многообразие $f^{-1}(V)$ аффинно, а морфизм $f^{-1}(V) \to V$ конечен. В этом случае пучок $\mathcal{O}_Y$-алгебр $\mathcal{A} = f_*(\mathcal{O}_X)$ когерентен, а Y-многообразие X совпадает с $\mathrm{Specm}(\mathcal{A})$. Обратно, для любого когерентного пучка $\mathcal{O}_Y$-алгебр $\mathcal{A}$ морфизм $\mathrm{Specm}_Y(\mathcal{A}) \to Y$ конечен.

Свойство конечности морфизма сохраняется при композиции и замене базы. Конечный морфизм квазиконечен: легко проверить, что конечная K-алгебра имеет лишь конечное число максимальных идеалов.

2.3. Замкнутость конечных морфизмов. Морфизм $f: X \to Y$ называется *замкнутым*, если для любого замкнутого подмножества $Z \subset X$ его образ $f(Z)$ замкнут в Y.

Теорема. Любой конечный морфизм замкнут.

При доказательстве можно считать Y аффинным, а $Z = X$. Покажем, что если $y \notin f(X)$, то найдется функция $g \in K[Y]$, такая что $g(y) = 1$ и $f(X)$ содержится в нулях g, т. е. $K[X]$ аннулируется умножением на $f^*(g)$. Пусть $A = K[Y]$, $B = K[X]$ и $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A, соответствующий точке y. По теореме Гильберта о нулях $y \notin f(X)$ тогда и только тогда, когда $f^*(\mathfrak{m})B = B$. В силу конечности B как модуля над A нужное нам утверждение следует из т. н. *леммы Накаямы*:

Лемма. Пусть M — модуль конечного типа над кольцом A, $\mathfrak{a} \subset A$ идеал. Если $\mathfrak{a}M = M$, то M аннулируется умножением на некоторый элемент из $1 + \mathfrak{a}$.

Индукцией по числу образующих M доказательство леммы сводится к случаю, когда M порождается одним элементом m. Но тогда $m = am$ для некоторого $a \in \mathfrak{a}$ и $(1 - a)m = 0$.

Обычно эта лемма применяется в ситуации, когда A — локальное кольцо, а $\mathfrak{a} \subset A$ — максимальный идеал. Тогда $\mathfrak{a}M = M$ (или $M \otimes_A (A/\mathfrak{a}) = 0$) влечет $M = 0$.

2.4. Применение к линейным проекциям. Пусть $X \subset \mathbf{P}^n$ — проективное многообразие, не проходящее через точку $p \in \mathbf{P}^n$. Тогда линейная проекция $\pi: X \to \mathbf{P}^{n-1}$ с центром в точке p будет конечным морфизмом.

Чтобы убедиться в этом, раздуем $\mathbf{P}^n$ в точке p и рассмотрим соответствующий морфизм $\tilde{\pi}: \tilde{\mathbf{P}}^n \to \mathbf{P}^{n-1}$. Можно считать, что X — подмногообразие в $\tilde{\mathbf{P}}^n$ и оно не пересекает исключительное многообразие $E \subset \tilde{\mathbf{P}}^n$. Мы уже видели в § 1, что $\tilde{\pi}$ — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathbf{P}^1$. Покажем вообще, что если $Z \to Y$ — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathbf{P}^1$ и замкнутое подмногобразие $X \subset Z$ не пересекается с каким-либо сечением E этого расслоения, то X конечно над Y.

Так как утверждение локально по Y, можно считать Y аффинным, $Z = \mathbf{P}^1 \times Y$ и $E = \{\infty\} \times Y$. Наше многообразие X лежит в $\mathbf{A}^1 \times Y = (\mathbf{P} \times Y) - E$ и задается некоторым идеалом $I \subset A[T]$, где $A = K[Y]$. Для многочлена $a_0 T^n + \ldots + a_n$ из $A[T]$ назовем a_0 старшим коэффициентом. Образуем идеал $I_0 \subset A$ старших коэффициентов многочленов из I. Легко понять, что идеал I_0 задает многообразие $X \cap (\{\infty\} \times Y)$, и так как последнее пусто, $I_0 = A$. Это значит, что I содержит многочлен вида $T^n + \ldots + a_n$. Но тогда A-модуль $K[X] = A[T]/I$ порождается элементами $1, T, \ldots, T^{n-1}$ и конечен над A. Это доказывает конечность X над Y.

2.5. Теоремы о нормализации. По теореме 2.3 множество $\pi(X)$ замкнуто в $\mathbf{P}^{n-1}$. Если оно отлично от $\mathbf{P}^{n-1}$, его снова можно спроектировать в $\mathbf{P}^{n-2}$ и т. д. В результате мы получим конечное и сюръективное отображение $X \to \mathbf{P}^m$ для некоторого m. Иначе говоря, любое проективное многообразие конечным образом отображается на некоторое проективное пространство. Например, любая проективная кривая может рассматриваться как конечное накрытие $\mathbf{P}^1$. Для нас более важен будет аффинный вариант:

Предложение. Для любого аффинного многообразия существует конечный сюръективный морфизм на аффинное пространство.

В самом деле, пусть $X \subset \mathbf{A}^n$ — аффинное многообразие Вложим стандартно $\mathbf{A}^n$ в $\mathbf{P}^n$, и пусть $\overline{X}$ — замыкание X в $\mathbf{P}^n$. Если $X \neq \mathbf{A}^n$, $\overline{X}$ не содержит бесконечно удаленную гиперплоскость $H = \mathbf{P}^n - \mathbf{A}^n$. Возьмем теперь центр проектирования на H, но вне $\overline{X}$. Тогда проектирование $\pi: X \to \mathbf{P}^{n-1}$ будет конечным морфизмом, причем $\pi^{-1}(\mathbf{P}^{n-1} - H) = X$. Поэтому конечным будет и $X \to \mathbf{P}^{n-1} - H = \mathbf{A}^{n-1}$. Образ его замкнут в $\mathbf{A}^{n-1}$, и процесс можно продолжить до тех пор, пока образ X не совпадет с $\mathbf{A}^m$.

Это предложение служит основным средством локального исследования алгебраических многообразий. Полезен также относительный вариант: для замкнутого подмногообразия $X \subset \mathbf{A}^n \times Y$ существует морфизм Y-многообразий $X \to \mathbf{A}^m \times Y$, конечный и сюръективный над некоторым непустым открытым $V \subset Y$. Для этого мы снова замкнем X в $\mathbf{P}^n \times Y \supset \mathbf{A}^n \times Y$, и в качестве центра проекции возьмем точку $p \in H$, для которой $\{p\} \times Y$ не лежит целиком в $\overline{X}$. Проекция получится конечной, но не всюду, а лишь над открытым множеством $V = \{y \in Y,\ (p, y) \notin \overline{X}\}$.

2.6. Теорема о конструктивности. В частности, из этого замечания видно, что образ $f(X)$ при доминантном морфизме $f: X \to Y$ содержит открытое непустое подмножество $V \subset Y$. Индукцией отсюда легко получить *теорему Шевалле о конструктивности*:

Теорема. Если $f: X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий, то образ $f(X)$ конструктивен в Y.

Конструктивным называется множество, полученное из открытых или замкнутых подмножеств при помощи конечного числа операций пересечения, объединения и дополнения; см. рис. 4.

2.7. Нормальные многообразия. Аффинное пространство $\mathbf{A}^n$ обладает следующим важным качественным свойством. Если $X \to \mathbf{A}^n$ — конечный бирациональный морфизм, то он изоморфизм. В самом деле, покажем, что $K[X]=K[\mathbf{A}^n]$. В силу бирациональности любой элемент $r \in K[X]$ можно представить несократимой дробью f/g, где $f, g \in K[T_1, \ldots, T_n]$. В силу конечности r удовлетворяет уравнению $r^m + a_1 r^{m-1} + \ldots + a_m = 0$, где $a_i \in K[T_1, \ldots, T_n]$, или $f^m + a_1 f^{m-1} g + \ldots + a_m g^m = 0$. Если h — неприводимый множитель для g, то f^m делится на h, откуда (в силу однозначности разложения на множители в кольце многочленов) f делится на h. Это противоречит несократимости f/g. Значит, g — константа и $r \in K[\mathbf{A}^n]$.

Вообще, алгебраическое многообразие X называется *нормальным*, если любой конечный бирациональный морфизм $X' \to X$ является изоморфизмом. Нормальность — локальное свойство, и как мы увидим дальше, нормальные многообразия обладают рядом хороших свойств. Для аффинного многообразия X нормальность в точности означает целозамкнутость кольца $K[X]$ в поле частных $K(X)$ (говорят также, что кольцо $K[X]$ *нормально*). Приведенные выше аргументы показывают нормальность любого кольца с однозначным разложением на множители.

Кривая C из примера 1 п. 2.6 главы 1, ненормальна; именно приведенная там параметризация $\mathbf{A}^1 \to \mathbf{C}$ конечна и бирациональна, но не изоморфизм. Так как прямая $\mathbf{A}^1$ нормальна, морфизм $\mathbf{A}^1 \to C$ является нормализацией кривой C. Конечный бирациональный морфизм $X^н \to X$ называется *нормализацией*, если многообразие $X^н$ нормально. Ясно, что нормализация определена с точностью до изоморфизма; более важно, что она всегда существует. Конструкция нормализации основана на двух фактах коммутативной алгебры. Первый — простой — состоит в том, что целое замыкание коммутирует с локализацией. Поэтому можно нормализовать аффинные карты X и склеить затем получившиеся куски. Второй — более деликатный (см. [23, гл. V, § 3]): пусть A — целостная K-алгебра конечного типа с полем частных L, и $L \subset L'$ конечное расширение полей; тогда целое замыкание A в L' конечно над A.

2.8. Открытость конечных морфизмов. Морфизм $f: X \to Y$ называется *открытым*, если он переводит открытые подмножества X в открытые подмножества Y.

Теорема. Пусть $f: X \to Y$ — конечный доминантный морфизм, причем многообразие Y нормально. Тогда f открыт.

Уменьшая Y, можно считать Y и X аффинными. Пусть $\mathcal{D}(g) \subset X$ — главная окрестность точки $x_0 \in X$, где $g \in K[X]$; надо показать, что $f(\mathcal{D}(g))$ содержит окрестность точки $y=f(x_0)$.

Пусть $P(T)=T^m+a_1T^{m-1}+\ldots+a_m=0$ — минимальное уравнение для g над полем $K(Y)$. Мы утверждаем, что $a_i \in K[Y]$. Для этого используется

Лемма. Пусть A — целостное кольцо и элемент g — целый над A. Пусть $T^m+a_1T^{m-1}+\ldots+a_m=0$ — минимальный многочлен g над полем частных A. Тогда его коэффициенты $a_1, \ldots, a_m$ целые над A.

(В самом деле, если $g_1, \ldots, g_m$ — корни минимального многочлена, то они, как и g, целые над A. Но a_i представляются как симметрические многочлены от $g_1, \ldots, g_m$ и потому тоже целые над A.)

Пусть Z — подмногообразие в $Y \times \mathbf{A}^1$, заданное нулями $P(T)$. Конечный морфизм $(f, g): X \to Y \times \mathbf{A}^1$ пропускается через Z. В силу минимальности $P(T)$ многообразие X доминирует Z, поэтому согласно п. 2.3 X отображается на Z. Так как $g(x_0) \neq 0$, один из коэффициентов a_i отличен от нуля в точке y_0. Но тогда для любой точки $y \in Y$, где $a_i(y) \neq 0$, существует ненулевой корень уравнения $T+a_1(y)T^{m-1}+\ldots+a_m(y)=0$, а значит и $x \in X$ с $g(x) \neq 0$. Теорема доказана.

Нормальность Y существенна, как видно из нормализации «креста» $[T_1T_2=0]$. Впрочем, нормальность Y можно заменить однолистностью. Многообразие Y называется *однолистным*, если морфизм нормализации $Y^н \to Y$ биективен; тогда по теореме п. 2.3 он гомеоморфизм. Например, кривая на рис. 8b) однолистна, тогда как кривая рис. 8a) имеет две ветви в начале координат. Теоремы пп. 2.3 и 2.8 верны в общих алгебраических рамках и известны как теоремы Коэна—Зайденберга о подъеме и спуске простых идеалов (см. [23], [19], [65]).

§ 3. Полные многообразия и собственные морфизмы

3.1. Определения. Начнем с наводящих соображений. Над полем $\mathbf{C}$ проективное пространство $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ отличается от аффинного пространства $\mathbf{C}^n$ компактностью в классической топологии. Интуитивно чувствуется, что и в абстрактной ситуации $\mathbf{P}^n$ «более компактно», чем $\mathbf{A}^n$; можно ли придать этому точный смысл? В топологии Зариского любое многообразие квазикомпактно, поэтому здесь нужен другой подход. Основан он на понятии пополнения. Вложение $X \subset \bar{X}$ назовем пополнением, если X открыто и плотно в $\bar{X}$. Тогда $\mathbf{A}^n$ обладает нетривиальными пополнениями, например, $\mathbf{A}^n \subset \mathbf{P}^n$, тогда как $\mathbf{P}^n$ уже нельзя пополнить, по крайней мере, отделимым многообразием. Еще более сильное ограничение на X состоит в требовании замкнутости образа X при любом морфизме, или при любом алгебраическом соответствии $Z \subset X \times Y$. Так мы приходим к окончательному определению.

Определение. Многообразие X называется *полным*, если оно отделимо, и если для любого многообразия Y проекция $X\times Y\to Y$ является замкнутым морфизмом.

Здесь чувствуется некая аналогия со свойством замкнутости конечных морфизмов. Имеется более общее понятие, включающее как частные случаи понятия полного многообразия и конечного морфизма. Морфизм многообразий $f:X\to Y$ называется *собственным*, если он отделим (т. е. диагональное вложение $X\to X\times_Y X$ замкнуто) и универсально замкнут (т. е. при любой замене базы $Y'\to Y$ морфизм $f':X\times_Y Y'\to Y'$ замкнут). Отметим параллель такого определения со свойствами собственных отображений топологических пространств.

3.2. Свойства полных многообразий. В основном мы сделаем акцент на свойствах полных многообразий, так как перенесение их на собственные морфизмы проходит бесхитростно.

а) Замкнутое подмногообразие полного многообразия полное. Если $X\to Y$ — собственный морфизм, а Y — полное многообразие, то и X полное.

б) Прямое произведение полных многообразий полно. Собственность сохраняется при композиции и замене базы.

в) Образ полного многообразия при регулярном отображении является полным многообразием. В частности, регулярная функция на полном связном многообразии постоянна. В самом деле, ее образ — связное замкнутое подмножество в $\mathbf{A}^1$, отличное от $\mathbf{A}^1$ (ибо последнее не полно), т. е. одна точка. Над комплексным полем это можно получить из принципа максимума модуля.

г) Многообразие полно тогда и только тогда, когда полны все его неприводимые компоненты.

д) Над полем $\mathbf{C}$ многообразие полно тогда и только тогда, когда оно компактно в классической топологии.

Менее простым фактом является теорема Нагаты:

Теорема. Любое отделимое многообразие реализуется как открытое подмногообразие полного многообразия.

3.3. Полнота проективных многообразий. Наиболее важные примеры полных многообразий дают проективные многообразия.

Теорема. Любое проективное многообразие полно.

Следствие. Регулярная функция на связном проективном многообразии постоянна.

В силу свойства а) достаточно установить полноту $\mathbf{P}^n$. Раздувая точку на P_n, мы сводим дело к полноте $\mathbf{P}^n$. Оно же расслоено над $\mathbf{P}^{n-1}$ со слоем $\mathbf{P}^1$, поэтому все сводится к проверке полноты $\mathbf{P}^1$.

Пусть Z — замкнутое подмножество $\mathbf{P}'\times Y$; надо показать что $p(Z)$ замкнуто, где p — проекция на Y. Заменяя Y на $\overline{p}(Z)$, можно считать, что Z доминирует Y. Пересечение Z с сечением $\{\infty\}\times Y$ имеет вид $\{\infty\}\times F$, где F замкнуто в Y. Заменяя Y на

$Y-F$, можно считать, что Z не пересекается с сечением $\{\infty\}\times\times Y$. Но тогда морфизм $Z\to Y$ конечен (см. п. 2.4), следовательно, $p(Z)=Y$ (теорема п. 2.3). Теорема доказана.

Мы воспользовались здесь свойствами конечных морфизмов из § 2. По другому полноту $\mathbf{P}^n$ можно установить, пользуясь теоремой Гильберта о нулях ([15], [56]) или теорией результантов. Аналогично можно показать, что проективные морфизмы собственны. В частности, раздутия из п. 1.8 являются собственными морфизмами.

3.4. Пример полного непроективного многообразия. Хотя большинство встречающихся на практике полных многообразий проективны, существуют и непроективные полные многообразия. Приведем простейший пример такого многообразия, опуская детали. Возьмем сначала $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ и раздуем на нем точку $(0, 0)$. Получается линейчатая поверхность $\varphi: Y\to\mathbf{P}^1$ с одним вырожденным слоем над 0, который состоит из двух изоморфных $\mathbf{P}^1$ компонент F и G (см. рис. 12).

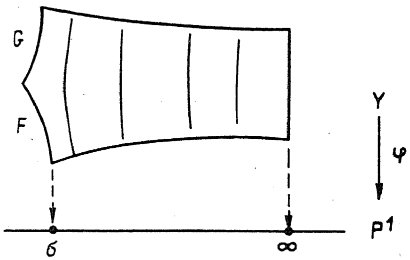


Рис. 12

Теперь возьмем еще один экземпляр такой поверхности $\varphi': Y'\to\to\mathbf{P}^1$ с вырожденным слоем $\varphi'^{-1}(0)=F'\cup G'$ и склеим Y с Y', отождествляя кривую F со слоем $\varphi'^{-1}(\infty)$ и F' со слоем $\varphi^{-1}(\infty)$. Полученная поверхность X, схематично изображена на рис. 13.

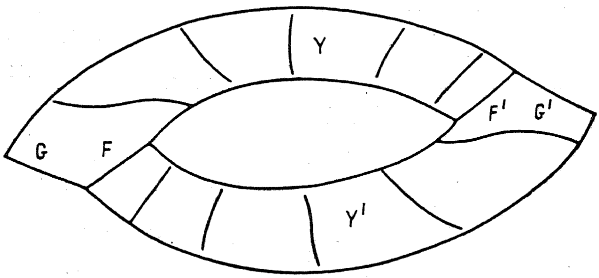


Рис. 13

Она состоит из двух компонент Y и Y', каждая из которых проективна, поэтому X полное. Однако X нельзя вложить в $\mathbf{P}^n$. В противном случае, возьмем гиперплоскость H в $\mathbf{P}^n$, которая трансверсально пересекает F, G, F' и G' соответственно в ν, μ, ν' и μ' точках. Так как слой $\varphi^{-1}(0)=F+G$ «непрерывно деформируется» в слой $\varphi^{-1}(\infty)=F'$, мы получаем $\nu+\mu=\nu'$. Аналогично $\nu'+\mu'=\nu$, откуда $\mu+\mu'=0$. Это значит, что гиперплоскость H не пересекается с кривыми G, G', т. е. они лежат в $\mathbf{P}^n—H$. Но $\mathbf{P}^n—H=\mathbf{A}^n$ — аффинное многообразие и оно не может содержать полных кривых.

Отметим, что поверхность X имеет особенности вдоль кривых F и F', и это не случайно. Можно показать, что любая гладкая полная поверхность проективна, как и любая полная кривая. В размерности три бывают гладкие полные непроективные многообразия. Интересно отметить следующее. Допустим, что мы отождествим кривую F на Y со слоем $\varphi^{-1}(\infty)$, например, в категории аналитических пространств. Получится объект, который не будет даже алгебраическим многообразием, а лишь алгебраическим пространством в смысле Артина и Б. Г. Мойшезона (см. п. 2.9 главы 1).

Все же полные многообразия близки к проективным, как показывает следующая *теорема Чжоу*.

Теорема. Полное многообразие есть образ проективного многообразия при собственном бирациональном морфизме.

Так, поверхность X из примера п. 3.4 есть образ несвязного объединения проективных поверхностей Y и Y'. Эта теорема Чжоу позволяет сводить многие вопросы о полных многообразиях к проективным многообразиям.

3.5. Теорема конечности. Сюжет, который естественно обсудить в связи с полнотой, — *теорема конечности* Серра.

Теорема. Пусть F — когерентный пучок на полном многообразии X. Тогда пространство $H^0(X, F)=F(X)$ глобальных сечений F конечномерно.

Для краткости обозначим $\mathcal{K}$ класс когерентных пучков с конечномерным пространством глобальных сечений. Следующее замечание тривиально: если G — подпучок F и G, $F/G\in\mathcal{K}$, то $F\in\mathcal{K}$.

По индукции можно считать, что теорема верна для любого подмногообразия в X, отличного от X. Из этого легко следует, что теорема верна для любого пучка с носителем, отличным от X. В самом деле, пусть Y — носитель F и $I=I(Y)$ — пучок идеалов Y в X. Тогда убывающая цепочка пучков $F\supset IF\supset I^2F\supset\ldots$ обрывается; действительно, локальное сечение F равно 0 вне Y и аннулируется умножением на I^r при большом r. Факторпучки $I^kF/I^{k+1}F$ аннулируются умножением на I и поэтому могут рассматриваться как когерентные пучки на Y. По индукции эти пучки попадают в $\mathcal{K}$, так что и $F\in\mathcal{K}$.

Что касается пучков с носителем X, то легко привести один такой пучок из $\mathcal{K}$. А именно, $F=\mathcal{O}_X$. В самом деле, сечения $\mathcal{O}_X$ — регулярные функции, а они постоянны на связных компонентах X (см. п. 3.2в). Поэтому $H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq K^{\pi_0(X)}$, где $\pi_0(X)$ обозначает, как обычно, множество связных компонент X. Оказывается, что этого уже достаточно для доказательства теоремы, ибо любой пучок отличается от свободного $\mathcal{O}_X^m$ на пучки с меньшим носителем. В самом деле, над некоторым открытым $U \subset X$ пучок F изоморфен $\mathcal{O}_X^m$. И хотя этот изоморфизм не всегда можно продолжить до вложения $\mathcal{O}_X^m$ в F, всегда найдется когерентный подпучок $G \subset \mathcal{O}_X^m$, совпадающий с $\mathcal{O}_X^m$ над U, который вкладывается в F. Так как очевидно $G \in \mathcal{K}$, а фактор-пучок F/G сосредоточен вне U, то $F/G \in \mathcal{K}$ и $F \in \mathcal{K}$. Теорема доказана.

Стоит сделать два дополнения. Во-первых, теорема конечности верна не только для глобальных сечений когерентных пучков, но и для любых когомологий. Во-вторых, она обобщается на любые собственные морфизмы $f: X \to Y$ и утверждает когерентность f_*F (а также пучков высших прямых образов $R^q f_* F$).

3.6. Теорема о связности. Следующая теорема лежит в основе многих дальнейших утверждений о связности.

Теорема. Пусть $f: X \to Y$ — собственный морфизм и $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. Тогда слои f связны.

В самом деле, предположим, что слой $f^{-1}(y)$ над точкой $y \in Y$ несвязен и разбит на два замкнутых непересекающихся множества A и B. Рассмотрим на $f^{-1}(y)$ функцию s_0, равную 0 на A и 1 на B. Предположим, что нам удалось продолжить ее до регулярной функции s на некоторой окрестности слоя $f^{-1}(y)$. По условию s имеет вид $f^*(s')$, где s' — регулярная функция в окрестности y, и такая функция не может принимать разные значения в слое. Противоречие.

Чтобы проверить продолжаемость функции s_0 до функции s, воспользуемся следующим фундаментальным результатом Гротендика. Он утверждает, в частности, что для продолжаемости s_0 на окрестность Зариского слоя $f^{-1}(y)$ необходимо и достаточно, чтобы s_0 продолжалась на любую инфинитезимальную окрестность слоя $f^{-1}(y)$. Последнее означает следующее. Пусть I — пучок идеалов подсхемы $f^{-1}(y)$ в X; требуется существование сечений s_k пучка $\mathcal{O}_X/I^{k+1}$, согласованных при гомоморфизмах $\mathcal{O}_X/I^m \to \mathcal{O}_X/I^n$ $(m \geqslant n)$. Так как для нашей функции s_0 условие инфинитезимальной продолжаемости очевидно выполнено, ее продолжение s существует. К сожалению, мы лишены возможности сказать подробнее о доказательстве теоремы Гротендика, ибо оно существенно опирается на когомологии, и отсылаем к [35], [41] или к обзору о когомологиях.

3.7. Разложение Штейна. Пусть $f: X \to Y$ — собственный морфизм. Пучок $\mathcal{O}_Y$-алгебр $f_*\mathcal{O}_X$ когерентен, поэтому Y-схема $Y' = \mathrm{Specm}_Y(f_*\mathcal{O}_X) \to Y$ конечна над Y. Ясно, что f разлагается в композицию

$$X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$$

и $f'_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{Y'}$. По теореме п. 3.6 слои морфизма f' связны и непусты. Такое разложение собственного морфизма называется *разложением Штейна*; слой $g^{-1}(y)$ состоит из связных компонент слоя $f^{-1}(y)$.

Следствием предыдущего является *теорема Зарисского о связности,* доказанная им без привлечения когомологий:

Теорема. Пусть $f: X \to Y$ — собственный доминантный морфизм, причем Y нормально, а слои f над некоторым непустым открытым подмножеством $U \subset Y$ связны. Тогда все слои f связны.

Пользуясь разложением Штейна, можно считать дополнительно, что f — конечный и бирациональный; тогда утверждение теоремы следует из определения нормальности. Как и в п. 2.8, вместо нормальности Y можно потребовать однолистность. Приведенная теорема представляет современную формулировку классического принципа Энриквеса, утверждающего, что при вариации связное многообразие специализируется в связное (см. [20]).

§ 4. Теория размерности

4.1. Комбинаторное определение размерности. Размерность многообразия — первый грубый численный инвариант многообразия. Очевидное как в дифференцируемом, так и в аналитическом случаях, это понятие менее тривиально для алгебраических многообразий. Конечно, естественно считать пространство A^n n-мерным, однако надо приписать размерность и каждому замкнутому подмножеству $X \subset \mathbf{A}^n$. Проще всего сделать это через степень трансцендентности поля $K(X)$ над K. Однако этот способ аппелирует к алгебре, скрывая геометрический смысл происходящего. Поэтому мы положим в основу комбинаторное определение через цепочки подобъектов. В этом стиле размерность векторного пространства есть длина наибольшего флага подпространств.

Размерностью многообразия X в точке $x \in X$ называется целое число $\dim_x X$, равное длине r наибольшей цепочки $\{x\} = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_r$ различных замкнутых неприводимых подмножеств X. Ясно, что $\dim_x X$ зависит лишь от локального строения X вблизи x. Кроме того, $\dim_x X$ есть максимум размерностей неприводимых компонент X, проходящих через x. По этой причине при изучении размерности часто ограничиваются неприводимыми аффинными многообразиями.

Из приведенного определения видно, что размерность $\mathbf{A}^n$ одинакова во всех точках в силу однородности $\mathbf{A}^n$ и $\geqslant n$, но совсем не видно почему она $\leqslant n$.

4.2. Размерность и конечные морфизмы.

Предложение. Пусть $f: X \to Y$ — конечный морфизм неприводимых многообразий, $x \in X$ и $y = f(x)$. Тогда $\dim_x X \leqslant \dim_y Y$, причем здесь равенство, если f доминантный.

Покажем сначала, что для неприводимого подмногообразия $X' \subset X$, отличного от X, $f(X') \neq Y$; утверждение $\dim X \leqslant \dim Y$ вытекает отсюда по индукции. Будем считать Y (значит, X и X') аффинными, и пусть g — ненулевая функция на X, обращающаяся в нуль на X'. В силу конечности X над Y мы имеем уравнение целой зависимости $g_n + a_1 g^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, где $a_i \in K[Y]$. Если $f(X') = Y$, то над любой точкой $y' \in Y$ найдется точка $x' \in X'$, откуда $a_n = 0$. Сокращая уравнение на g, мы получаем уравнение меньшей степени и в конце концов получаем $g = 0$. Противоречие.

Предположим теперь, что f доминантный морфизм. Проектируя Y на аффинное пространство (см. п. 2.5), можно считать $Y = \mathbf{A}^n$. Пусть Y' — неприводимое подмножество в Y, проходящее через y; в силу теоремы п. 2.8 любая неприводимая компонента X' многообразия $f^{-1}(Y')$, проходящая через x, доминирует Y'. Утверждение $\dim_x X = \dim_y Y$ следует отсюда по индукции.

Как следствие мы получаем, что размерность неприводимого многообразия X в любой его точке одинакова (обозначается $\dim X$). Для этого надо считать X аффинным и спроектировать его конечным образом на $\mathbf{A}^n$.

Следствие. $\dim \mathbf{A}^n = n$.

Надо проверить неравенство $\dim \mathbf{A}^n \leqslant n$; по индукции можно считать это доказанным для $\mathbf{A}^k$ при $k < n$. Пусть $Y \subset \mathbf{A}^n$ — неприводимое подмногообразие, отличное от $\mathbf{A}^n$. Подходящая линейная проекция дает конечный морфизм $Y \to \mathbf{A}^{n-1}$, так что мы получаем $\dim Y \leqslant n-1$ и $\dim \mathbf{A}_n \leqslant n$.

Следствие. Размерность неприводимого многообразия X равна степени трансцендентности поля $K(X)$ над K.

Следствие. $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

4.3. Размерность гиперповерхности. Пусть $Y = V(f) \subset \mathbf{A}^n$ — гиперповерхность; мы утверждаем, что размерность любой неприводимой компоненты Y равна $n-1$. Разлагая многочлен f на множители, можно считать f неприводимым. Пусть $\mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^{n-1}$ — линейная проекция, ограничение которой на Y конечно. Очевидно, что $Y \to \mathbf{A}^{n-1}$ доминантный морфизм, поэтому $\dim Y = n-1$.

Аналогичное утверждение верно для любых многообразий. Назовем *гиперповерхностью* в многообразии X множество нулей $V(f)$ регулярной функции $f: X \to K$. При переходе к гиперповерхности размерность может только уменьшиться, однако не более чем на единицу.

Теорема. Пусть Y — гиперповерхность в X. Тогда $\dim_y Y \geqslant \dim_y X - 1$ для любой точки $y \in Y$.

Можно считать X и Y неприводимыми и аффинными. Пусть $\pi: X \to \mathbf{A}^n$ — конечный сюръективный морфизм (см. п. 2.5) и $Y = V(f)$. Пусть $\varphi = (\pi, f): X \to \mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^1$; как мы видели в п. 2.8, образ $\varphi(X)$ задается в $\mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^1$ минимальным многочленом $T^m + a_1 T^{m-1} + \ldots + a_m$ для f; причем $a_i \in K[T_1, \ldots, T_n]$. Тогда Y есть прообраз гиперплоскости $[T=0]$. Поэтому $\dim Y \geqslant \dim \varphi(X) \cap [T=0]$. Последнее множество задается в $\mathbf{A}^n$ уравнением $a_m = 0$, и по предыдущему его размерность $\geqslant n-1$.

По индукции отсюда следует, что если подмногообразие $Y \subset X$ задается n уравнениями, то $\dim_y Y \geqslant \dim_y X - n$. Подытожим результаты теории размерности в следующем утверждении, обобщающим классический *принцип счета констант*.

4.4. Теорема о размерности слоев. Пусть $f: X \to Y$ — доминантный морфизм неприводимых многообразий. Интуитивно следует ожидать, что слои f имеют размерность $\dim X - \dim Y$, если и не все (см. отображение раздутия точки из п. 1.6), то хотя бы типичные. И это верно.

Теорема. Пусть $f: X \to Y$ как выше. Тогда

а) $\dim_x f^{-1}(f(x)) \geqslant \dim X - \dim Y$ для любой точки $x \in X$;

б) существует открытое непустое $V \subset Y$, для любой точки y которого $\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$.

При доказательстве а) можно считать Y аффинным. Проектируя Y конечно на $\mathbf{A}^n$, мы сводим а) к репетиции теоремы из п. 4.3. При доказательстве б) можно считать аффинным и X. Пользуясь относительным вариантом теоремы о нормализации п. 2.5 (и уменьшая Y, если нужно), мы получаем разложение $X \xrightarrow{g} \mathbf{A}^d \times Y \to Y$ морфизма f, где g — конечный и сюръективный. Отсюда видно, что слои f имеют размерность $d = \dim X - \dim Y$.

4.5. Теорема Шевалле о полунепрерывности.

Теорема. Для любого морфизма $f: X \to Y$ и целого числа k множество $X_k = \{x \in X, \dim_x f^{-1}(f(x)) \geqslant k\}$ замкнуто в X.

При доказательстве можно считать X и Y неприводимыми, а f доминантным. Пусть $d = \dim X - \dim Y$. Если $k \leqslant d$, то из а) теоремы п. 4.4 имеем $X_k = X$. Пусть теперь $k > d$ и $V \subset Y$, как в б) теоремы п. 4.4. Если обозначить $Y' = Y - V$, то $X_k \subset f^{-1}(Y')$ и замкнутость его следует по индукции из аналогичного утверждения о морфизме $f^{-1}(Y') \to Y'$.

Отметим три полезных следствия.

1. Множество точек $x \in X$, изолированных в слое $f^{-1}(f(x))$ (т. е. точек квазиконечности морфизма f), открыто в X.

2. Если морфизм f собственный, множества $Y_k = \{y \in Y,\ \dim f^{-1}(y) \geqslant k\}$ замкнуты в Y. В самом деле, $Y_k = f(X_k)$.

3. Пусть $f: X \to Y$ — собственный морфизм, все слои которого неприводимы и имеют одну размерность; тогда если Y неприводимо, то неприводимо и X.

Приведем еще два следствия теории размерности.

4.6. Размерность пересечений в аффинном пространстве. Пусть X и X' — подмногообразия в $\mathbf{A}^n$ и $x \in X \cap X'$. Тогда

$$\dim_x (X \cap X') \geqslant \dim_x X + \dim_x X' - n.$$

Согласно редукции к диагонали, $X \cap X'$ изоморфно пересечению $X \times X'$ с диагональю Δ в $\mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^n$. Но диагональ задается n уравнениями $T_i = T_i'$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому это неравенство следует из п. 4.3 и формулы для размерности $X \times X'$.

Следствие. Пусть X, $X' \subset \mathbf{P}^n$, причем $\dim X + \dim X' \geqslant n$. Тогда $X \cap X' \neq \varnothing$.

В самом деле, пусть $X = \mathbf{P}(C)$, $X' = \mathbf{P}(C')$, где C, C' — конусы в K^{n+1} (см. п. 3.5 главы 1). C и C' пересекаются в 0 и

$$\dim_0 (C \cap C') \geqslant \dim_0 C + \dim_0 C' - (n+1) =$$
$$= \dim X + 1 + \dim X' + 1 - (n+1) \geqslant 1.$$

Поэтому $C \cap C' \neq \{0\}$ и $X \cap X' \neq \varnothing$.

В частности, если $\dim X \geqslant 1$, то X пересекается с любой гиперплоскостью $H \subset \mathbf{P}^n$. Мы знаем это из другого соображения: $\mathbf{P}^n - H \simeq \mathbf{A}^n$ аффинно и потому любое полное подмногообразие в нем нульмерно. Другой полезный частный случай: при $k < n$ система из k однородных уравнений $f_1 = \ldots = f_k = 0$ от n переменных всегда имеет ненулевое решение.

4.7. Теорема об общей гладкости. Гладкость многообразия X в точке x определялась в главе 1 через совпадение касательного конуса $C_x X$ с касательным пространством $T_x X$. Это определение эквивалентно более привычному, аппелирующему к понятию размерности:

Предложение. Точка x на многообразии X гладкая тогда и только тогда, когда $\dim T_x X = \dim_x X$.

Предложение тривиально следует из более общего равенства $\dim C_x X = \dim_x X$. Чтобы установить его, рассмотрим раздутие $\sigma: \widetilde{X} \to X$ в точке x. Так как $\sigma^{-1}(x)$ локально задается в $\widetilde{X}$ одним уравнением (см. п. 1.8), то $\dim \sigma^{-1}(x) = \dim \widetilde{X} - 1$. Кроме того, $\sigma^{-1}(x) = \mathbf{P}(C_x X)$, так что $\dim C_x X = \dim \sigma^{-1}(x) + 1 = \dim \widetilde{X} = \dim X$.

Теорема. *Множество гладких точек любого алгебраического многообразия открыто и плотно.*

Иначе говоря, «общая» точка на многообразии гладкая. При доказательстве многообразие X можно считать неприводимым и аффинным. Применяя теорему о размерности слоев к $TX \to X$, мы видим, что множество гладких точек открыто. Остается показать, что оно непусто. Здесь мы впервые серьезно воспользуемся тем, что X — многообразие, а не произвольная алгебраическая схема. Пусть $X \subset \mathbf{A}^N$ и для любой точки $x \in X$ размерность $T_x X$ больше $n = \dim X$. Применяя общую линейную проекцию $\mathbf{A}^N \to \mathbf{A}^{n+1}$, можно считать, что X — гиперповерхность в $\mathbf{A}^{n+1}$. Но это противоречит предложению п. 7.1 главы 1.

Следствие. Любое однородное многообразие гладко.

§ 5. Неразветвленные и этальные морфизмы

5.1. Теорема о неявной функции. В дифференциальной и аналитической ситуации важную роль играет теорема о неявной функции. Простейшая ее форма такова. Пусть f — функция на $\mathbf{C}^n$, $f(0) = 0$ и $(\partial f/\partial T_n)(0) \neq 0$; тогда существует окрестность нуля $U \subset \mathbf{C}^{n-1}$ и функция $g: U \to \mathbf{C}$ соответствующей гладкости, такая что $g(0, \ldots, 0) = 0$ и $f(T_1, \ldots, T_{n-1}, g(T_1, \ldots, T_{n-1})) = 0$. В более общей форме она утверждает, что отображение многообразий $f: X \to Y$, индуцирующее изоморфизм касательных пространств $T_x X \to T_{f(x)} Y$, локально является изоморфизмом.

Ничего похожего нет для алгебраических многообразий и топологии Зарисского. Возьмем простейшую функцию $f = T^2$ на $\mathbf{A}^1$. В точке 1 производная $df/dT = 2T$ равна 2, однако никакое открытое по Зарисскому подмножество $\mathbf{A}^1$ не отображается инъективно при f.

И вообще, очень редко изоморфизм касательных пространств влечет локальный изоморфизм многообразий — слишком уж велики окрестности по Зарисскому. Тем не менее чувствуется, что это важный класс морфизмов, заслуживающий наименования. Их назвали этальными, или стелющимися. Гротендик пошел дальше и предложил объявить этальные морфизмы $U \to X$ «открытыми подмножествами» многообразия X в этальной топологии и таким образом восстановить справедливость теоремы о неявной функции в алгебраической ситуации. Этальная топология (см. обзор о когомологиях) является алгебраическим суррогатом классической топологии и позволяет в абстрактной ситуации говорить о гомотопических группах, когомологиях, числах Бетти, формуле Лефшеца и т. п.

5.2. Неразветвленные морфизмы. В приведенном выше примере функции $f = T^2$ две точки $\pm\sqrt{y}$ слоя $f^{-1}(y)$ сливаются в одну при $y \to 0$. Говорят также, что функция T^2 ветвится над 0. Неразветвленность означает отсутствие ветвлений. Дадим точное определение.

Пусть $f: X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий, $x \in X$, $y = f(x)$, $\mathfrak{m}_x$ и $\mathfrak{m}_y$ — максимальные идеалы локальных колец $\mathcal{O}_{X,x}$ и $\mathcal{O}_{Y,y}$ соответственно. Легко показать, что следующие утверждения эквивалентны:

а) $d_x f: T_x X \to T_y Y$ инъективен,

а′) $d_x f$ индуцирует вложение $C_x X$ в $C_y Y$,

б) $f^*: \Omega^1_Y(y) \to \Omega^1_X(x)$ сюръективно,

б) $f^*(\mathfrak{m}_y)$ порождает идеал $\mathfrak{m}_x$ в $\mathcal{O}_{X,x}$, в′) слой $f^{-1}(y)$ как схема совпадает с точкой x в окрестности x. Например, при импликации б)⇒в) используется лемма Накаямы.

В этом случае говорят, что морфизм f *неразветвлен в точке* x. Например, функция $f=T^2$ неразветвлена в точках, отличных от 0, и ветвится в 0 (если, конечно, характеристика K отлична от 2; если же характеристика равна 2, эта функция ветвится всюду). Морфизм f *неразветвлен*, если он неразветвлен во всех точках X.

Открытое вложение неразветвлено. Замкнутое вложение также неразветвленное; кроме того, оно инъективное и конечное. Оказывается, что эти три свойства характеризуют замкнутые вложения.

Предложение. Пусть морфизм $f: X \to Y$ инъективный, конечный и неразветвленный. Тогда это замкнутое вложение.

Вообще, если f — конечный, а слой $f^{-1}(y)$ как схема совпадает с x, то f является замкнутым вложением в некоторой окрестности y. При доказательстве Y и X можно считать аффинными с кольцами регулярных функций A и B соответственно. Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал точки y. Совпадение $f^{-1}(y)$ и x как схем означает, что $B/f^*(\mathfrak{m})B \cong A/\mathfrak{m}$. Так как B конечно над A, то по лемме Накаямы $f^*: A \to B$ сюръективно (быть может, Y придется заменить окрестностью y), т. е. $f: X \to Y$ замкнутое вложение.

5.3. Вложение проективных многообразий. В § 2 мы строили конечные морфизмы $\pi: X \to \mathbf{P}^{n-1}$, проектируя $X \subset \mathbf{P}^n$ из точки $p \in \mathbf{P}^n - X$. Пользуясь предыдущим критерием, можно проверить, будет ли π вложением, т. е. будет ли X изоморфно своему образу $\pi(X)$. Касательные пространства к $X \subset \mathbf{P}^n$ удобно при этом реализовывать как линейные подмногообразия в $\mathbf{P}^n$. Точнее, обозначим через $\overline{T}_x X$ то единственное линейное многообразие $L \subset \mathbf{P}^n$, для которого $T_x L$ совпадает с $T_x X$ в $T_x \mathbf{P}^n$. $\overline{T}_x X$ называется вложенным проективным касательным пространством.

Займемся сначала локальными вложениями. Пусть $x \in X$ и $n > \max(\dim_x X + 1, \dim T_x X)$. Тогда найдется точка $p \in \mathbf{P}^n$, проекция из которой $\pi: X \to \mathbf{P}^{n-1}$ будет замкнутым вложением некоторой окрестности точки x. В самом деле, множество хорд $\overline{xx'}$, когда x' пробегает $X - \{x\}$, заметает многообразие S_x размерности $\leqslant \dim X + 1$. Поэтому $S_x \cup \overline{T}_x X$ имеет размерность меньшую, чем $\mathbf{P}^n$. Если взять центр проекции p вне $S_x \cup \overline{T}_x X$, то слой проекции $\pi^{-1}(\pi(x)) \cong \overline{px} \cap X$ состоит из одной точки x ($p \notin S_x$) и совпадает с ней как схема ($p \notin \overline{T}_x X$). Остается применить предыдущий критерий.

В частности, окрестность точки x произвольного многообразия X можно реализовать как подмногообразие в $\mathbf{A}^r$, где $r=$

$=\max(\dim_x X+1,\ \dim T_x X)$. Если x — гладкая точка X, то локально X вкладывается в $\mathbf{A}^{n+1}$, $n=\dim X$. Любое неприводимое многообразие размерности n бирационально изоморфно гиперповерхности в $\mathbf{A}^{n+1}$.

Перейдем теперь к глобальным вложениям.

Предложение. Гладкое проективное многообразие размерности n можно вложить в $\mathbf{P}^{2n+1}$.

Пусть $X\subset\mathbf{P}^N$. Рассмотрим в $\mathbf{P}^N$ два подмножества, связанных с X. Первое — *многообразие секущих* $\operatorname{Sec} X$; это замыкание множества точек, лежащих на секущих или хордах $\overline{xx'}$, где x, x' — различные точки X. Второе — $\operatorname{Tan} X$ — объединение проективных касательных $\overline{T}_x X$, $x\in X$. Ясно, что $\dim \operatorname{Sec} X\leqslant 2n+1$, а $\dim \operatorname{Tan} X\leqslant 2n$. Поэтому при $N>2n+1$ найдется точка, не лежащая на $\operatorname{Sec} X\cup\operatorname{Tan} X$. Проекция $\pi: X\to\mathbf{P}^{N-1}$ из этой точки будет конечным неразветвленным инъективным морфизмом, т. е. замкнутым вложением.

Например, любая гладкая кривая вкладывается в $\mathbf{P}^3$, поверхность — в $\mathbf{P}^5$ и т. д. Если $\dim \operatorname{Sec} X\leqslant 2n$, можно вложить X в $\mathbf{P}^{2n}$, однако это бывает редко. Можно проектировать X и дальше, стараясь получать по возможности более простые особенности (см. [32, гл. 4, § 6]).

5.4. Этальные морфизмы.

Определение. Морфизм $f: X\to Y$ называется *этальным в точке* $x\in X$, если $d_x f$ индуцирует изоморфизм $C_x X\to C_{f(x)} Y$ касательных конусов как схем.

Можно также сказать, что этальный — это гладкий и неразветвленный морфизм.

Например, открытое вложение этально. Напротив, если замкнутое вложение этально в точке x, оно локально является изоморфизмом. Размерность, как и гладкость, сохраняются при этальных морфизмах.

Типичный пример. Пусть Y — аффинное многообразие, а $X\subset\mathbf{A}^1\times Y$ задается нулями многочлена $P\in K[Y][T]$. Если для точки $x\in X$ производная $(dP/dT)(x)\neq 0$, то X этален над Y в точке x.

На самом деле любой этальный морфизм локально устроен так же как в этом примере. Мы покажем это, предполагая X конечным над Y (что, впрочем, не умаляет общности в силу п. 7.2). Пусть X вложено в $\mathbf{A}^n\times Y$. Выбирая подходящую проекцию $\mathbf{A}^n\to\mathbf{A}^1$ и пользуясь неразветвленностью в x, можно считать, что X лежит в $\mathbf{A}^1\times Y$.

Рассмотрим теперь слой над точкой $y=f(x)$. Как подсхема в $\mathbf{A}^1=\mathbf{A}^1\times\{y\}$ он задается нулями многочлена $T^m+\bar{a}_1T^{m-1}+\ldots$ $\ldots+\bar{a}_m$ с коэффициентами из $K[Y]/\mathfrak{m}_y$. Значит, $1, T, \ldots, T^{m-1}$ порождают $K[X]$ по модулю $\mathfrak{m}_y$. По лемме Накаями они порождают $K[X]$ над $K[Y]$. Значит, в $K[X]$ выполняется соотношение $P(T)=T^m+a_1T^{m-1}+\ldots+a_m=0$, где $a_i\in K[Y]$, т. е. X лежит в многообразии $X' \subset \mathbf{A}' \times Y$ нулей многочлена P. В силу неразветвленности x — простой корень $\bar{P}$, так что $(dP/dT)(x) \neq 0$ и X' этально над Y в x. Но тогда этально и замкнутое вложение $X \subset X'$ и является изоморфизмом в окрестности x.

Как следствие мы получаем, что множество точек этальности морфизма $f: X \to Y$ открыто в X. Кроме того, видно, что этальность сохраняется при замене базы.

5.5. Этальные накрытия. Конечный этальный морфизм называется *этальным накрытием*. Над комплексным полем и в классической топологии такие морфизмы являются неразветвленными накрытиями, т. е. локально тривиальными расслоениями с конечными слоями. В частности, число точек слоя $f^{-1}(y)$ не зависит от $y \in Y$. Покажем, что последнее верно и в абстрактной ситуации.

Теорема о постоянстве. Пусть $f: X \to Y$ — этальное накрытие связного Y. Тогда число точек слоя $f^{-1}(y)$ не зависит от $y \in Y$.

В самом деле, рассуждая как в п. 5.4, мы получаем, что локально по Y многообразие X может быть задано в $\mathbf{A}^1 \times Y$ одним уравнением $T^m + a_1 T^{m-1} + \ldots + a_m = 0$, где $a_i \in K[Y]$. В силу этальности все корни уравнения $T^m + a^1(y) T^{m-1} + \ldots + a_m(y) = 0$ простые и их ровно m.

Аналогия этальных накрытий с неразветвленными накрытиями из топологии позволяет построить чисто алгебраическую теорию фундаментальной группы, тесно связанную с теорией Галуа. Отсылая за подробностями к [37], мы ограничимся одним определением. Связное многообразие X называется *односвязным*, если любое этальное накрытие $X' \to X$ со связным X' является изоморфизмом.

Например, как мы увидим позже, $\mathbf{P}^n$ односвязно.

5.6. Степень конечного морфизма. Из доказательства теоремы о постоянстве видно, что число точек в слоях этального накрытия $f: X \to Y$, которое естественно называть степенью f, равно размерности кольца $K(X)$ над полем $K(Y)$. Это подсказывает более общее определение степени.

Определение. Пусть $f: X \to Y$ — конечный доминантный морфизм. Размерность $[K(X) : K(Y)]$ кольца рациональных функций $K(X)$ над полем $K(Y)$ называется *степенью* f и обозначается $\deg f$.

Естественно задать вопрос — как связано число точек в слоях конечного морфизма f с $\deg f$.

Теорема. Пусть $f: X \to Y$ — конечный доминантный морфизм и Y нормально. Тогда $|f^{-1}(y)| \leqslant \deg(f)$ для любой точки $y \in Y$.

Это утверждение очевидно, если X задается в $\mathbf{A}^1 \times Y$ как множество нулей многочлена $T^m + a_1 T^{m-1} + \ldots + a_m \in K[Y][T]$. Общий случай сводится к этому при помощи линейных проекций и леммы из п. 2.8. Предположение о нормальности Y существеннс, как показывает пример нормализации плоской кривой $C=[T_2^2=T_1^3+T_1^2]$ (см. рис. 16 или 4).

5.7. Принцип постоянства. Уменьшение числа точек в слое $f^{-1}(y)$, по сравнению с $\deg f$, можно объяснять тем, что они получаются в результате слияния или слипания нескольких точек, что их нужно считать с некоторой кратностью, подобно тому, как это делают с корнями многочлена от одной переменной. Число корней многочлена с учетом кратностей равно степени многочлена. Аналогичный *принцип постоянства*, или непрерывности, состоит в том, что если правильно определить кратность или локальную степень $\deg_x(f)$ конечного морфизма f, то верна формула

$$\deg(f)=\sum_{x\in f^{-1}(y)}\deg_x(f),$$

которая обобщает теорему п. 5.5. Откладывая обсуждение общего случая до следующей главы, мы рассмотрим здесь один важный класс конечных морфизмов.

Определение. Конечный морфизм $f:X\to Y$ называется *локально свободным*, если пучок $f_*\mathcal{O}_X$ локально свободен над $\mathcal{O}_Y$. *Локальной степенью* такого морфизма f в точке x назовем

$$\deg_x(f)=\dim_K(\mathcal{O}_{X,x}/f^*(\mathfrak{m}_y)\mathcal{O}_{X,x}).$$

Принцип постоянства верен в этой ситуации. В самом деле, заменяя Y окрестностью y, можно считать Y аффинным, а $K[X]$ свободным $K[Y]$-модулем ранга $d=\deg f$. Поэтому и $K[Y]/\mathfrak{m}_y$-модуль $K[X]/\mathfrak{m}_yK[X]$ имеет ранг (или размерность) d. Но $K[X]/\mathfrak{m}_yK[X]=\bigoplus_{x\in f^{-1}(y)}\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}$, так что $d=$ $=\sum_{x\in f^{-1}(y)}\deg_x(f)$.

Пример 1. Этальное накрытие — локально свободный морфизм, причем все $\deg_x f$ равны 1. Мы снова получаем теорему п. 5.5. Обратно, если f локально свободен и $\deg_x(f)=1$, то f этален в точке x.

Пример 2. Пусть $f:X\to Y$ — конечный доминантный морфизм, а Y — гладкая кривая. Тогда f локально свободный морфизм.

В самом деле, пусть $u\in K[Y]$ — образующая максимального идеала точки $y\in Y$. Пусть $s_1, \ldots, s_m$ — элементы $K[X]$, дающие базис $K[X]$ по модулю u. По лемме Накаямы можно считать, что $s_1, \ldots, s_m$ порождают $K[Y]$-модуль $K[X]$; покажем, что они независимы над $K[Y]$. Пусть $\sum a_js_j=0$; из независимости s_j по модулю u все a_j делятся на u, $a_j=ua'_j$. Значит, и $\sum a'_j s_j = 0$, откуда $\sum a'_j s_j = 0$, a'_j делятся на u и т. д. Получается, что a_j делятся на любую степень u, т. е. равны 0.

Пример 3. Приведем пример, где наше наивное определение кратности не работает. Пусть V — плоскость в $\mathbf{A}^4$ с уравнениями $T_1 = T_3 = 0$, V' — плоскость с уравнениями $T_2 = T_4 = 0$ и $X = V \cup V'$. Пусть отображение $f : X \to \mathbf{A}^2$ задается функциями $T_1 + T_2$ и $T_3 + T_4$. Ограничение f на V или V' является изоморфизмом, так что степень f равна 2, как и мощность почти всех слоев. Однако $\deg_0(f) = 3$.

В самом деле, X задается в $\mathbf{A}^4$ идеалом $(T_1T_2, T_1T_4, T_3T_2, T_3T_4)$, подсхема $f^{-1}(0)$ — идеалом $(T_1T_2, T_1T_4, T_3T_2, T_3T_4, T_1 + T_2, T_3 + T_4)$, поэтому соответствующее факторкольцо 3-мерно с базисом 1, T_1 и T_3.

§ 6. Локальные свойства гладких многообразий

6.1. Гладкие точки. В главе 1 мы определили гладкие точки на многообразии X условием $C_xX = T_xX$, где C_xX — касательный конус, а T_xX — касательное пространство к X в точке x. В силу п. 4.7 это требование эквивалентно тому, чтобы размерность T_xX (или двойственного к нему векторного пространства $\Omega_X{}^1(x)$) равнялась $\dim_x X$. Наконец, гладкость X в x эквивалентна существованию окрестности $U \subset X$ точки x и этального морфизма $U \to \mathbf{A}^n$. В самом деле, если $u_1, \ldots, u_n$ — функции в окрестности точки x, для которых $du_1, \ldots, du_n$ образуют базис $\Omega_X{}^1(x)$, то $du : T_xX \to T_{u(x)}\mathbf{A}^n$ изоморфизм, так что $u : U \to \mathbf{A}^n$ этально в окрестности x.

Ясно, что множество гладких точек многообразия X открыто; согласно п. 4.7, оно всюду плотно. Таким образом, типичная или «общая» точка X гладкая, и естественно задаться простейшим вопросом — как устроено многообразие в окрестности гладкой точки. Интуитивно следует ожидать, что оно «похоже» на аффинное пространство T_xX. Конечно, как объяснялось в п. 5.1, похожесть нельзя понимать как локальный изоморфизм. Смысл ее в том, что локально гладкое многообразие обладает некоторыми важными качественными свойствами аффинного пространства.

6.2. Локальная неприводимость. Простейшее из свойств $\mathbf{A}^n$ — неприводимость. Покажем, что у гладкой точки $x \in X$ существует неприводимая окрестность $U \subset X$. Для этого возьмем две функции a и b на X, такие что $ab = 0$. Пусть $a \in \mathfrak{m}^i$ и $b \in \mathfrak{m}^j$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал точки x в кольце $K[X]$ и $\bar{a}$, $\bar{b}$ — их образы в $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ и $\mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{j+1}$. Раз $ab = 0$, то $\bar{a}\bar{b} = 0$ в кольце $\mathbf{gr}(K[X], \mathfrak{m})$. Но для гладкой точки $\mathbf{gr}(K[X], \mathfrak{m})$ — кольцо многочленов и не имеет делителей нуля. Значит, скажем, $\bar{a} = 0$ и $a \in \mathfrak{m}^{i+1}$. Повторяя это рассуждение, мы получим, что $a \in \mathfrak{m}^\infty =$

$=\bigcap\limits_{i\geqslant 0} \mathfrak{m}^i$. Остается показать, что $\mathfrak{m}^\infty=(0)$. Но идеал $\mathfrak{m}^\infty$ имеет конечный тип, и $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}^\infty=\mathfrak{m}^\infty$. Поэтому из леммы Накаямы $\mathfrak{m}^\infty=(0)$.

6.3. Факториальные многообразия. Есть более тонкое свойство аффинного пространства. А именно, если Y — подмногообразие $\mathbf{A}^n$ размерности $n-1$ (говорят также, что *коразмерность* Y равна 1; вообще, *коразмерностью* подмногообразия Y в X называют $\dim X - \dim Y$), то Y — гиперповерхность в $\mathbf{A}^n$. Более того, идеал $I(Y)$ — главный в кольце $K[\mathbf{A}^n]$.

В самом деле, можно считать Y неприводимым. Тогда существует неприводимый многочлен f, равный нулю на Y; покажем, что идеал $I(Y)$ порождается f. Пусть другой многочлен g нулевой на Y; тогда некоторая его степень делится на f. В силу однозначности разложения на множители в кольце многочленов g делится на f, что и требовалось доказать.

Аналогичное свойство выполнено для любого аффинного многообразия X, кольцо которого $K[X]$ факториально, т. е. обладает свойством однозначности разложения на неприводимые множители (подробнее о таких кольцах см. [23]), но отнюдь не для любого многообразия. Однако если X — гладкое, это свойство выполняется локально. Это значит, что для любого подмногообразия $Y\subset X$ коразмерности 1 найдется аффинная окрестность U точки x, такая что идеал $I(Y\cap U)$ — главный в кольце $K[U]$. В таком случае будем говорить, что многообразие X — *факториально* в окрестности x.

Теорема. Любое многообразие факториально в окрестности гладкой точки.

При доказательстве можно считать (см. п. 5.3), что многообразие X вложено в $\mathbf{P}^{n+1}$, где $n=\dim X$. Кроме того, можно считать, что Y неприводимо и проходит через точку x, гладкую на X. Возьмем теперь точку $p\in\mathbf{P}^{n+1}$, чтобы: а) $p\notin X$, б) $p\notin \overline{T_xX}$, в) прямая $\overline{px}$ пересекала Y лишь в x; ясно, что такая точка найдется. Спроектируем из нее все на $\overline{T_xX}$. Переходя к аффинной карте $\mathbf{A}^{n+1}\subset\mathbf{P}^{n+1}$, мы получаем конечный сюръективный морфизм $\pi: X\to\mathbf{A}^n$, этальный в точке x. При этом Y проектируется на замкнутое подмножество $\pi(Y)\subset\mathbf{A}^n$ коразмерности 1, причем (см. п. 5.3) изоморфно в окрестности точки x. В силу факториальности $\mathbf{A}^n$ многообразие $\pi(Y)$ задается одним неприводимым многочленом $f\in K[T_1, \ldots, T_n]$. Остается показать, что $\pi^*(f)\in K[X]$ задает Y в окрестности x. Пусть $Y_1, \ldots, Y_k$ — компоненты $\pi^{-1}(\pi(Y))$, отличные от Y. Если мы покажем, что Y_i не проходят через x, то $X-\bigcup\limits_{i=1}^{k} Y_i$ — окрестность точки x, в которой Y задается функцией $\pi^*(f)$.

Именно в этом месте мы и воспользуемся гладкостью X. В координатах $T_1, \ldots, T_n$, T на $\mathbf{A}^{n+1}$ многообразие X задается нулями неприводимого многочлена $F=T^m+a_1T^{m-1}+\ldots+a_m$,

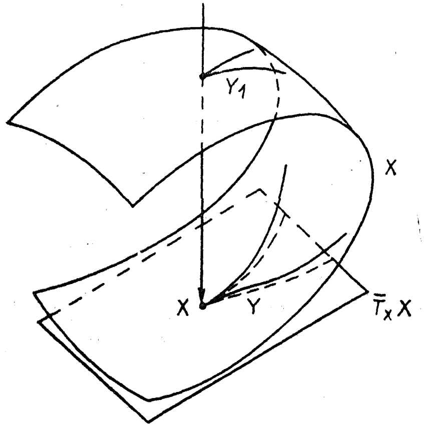


Рис. 14

$a_i \in K[T_1, \ldots, T_n]$, причем $\partial F/\partial T(x) \neq 0$. Будем считать, что x есть начало координат; тогда $a_m(0)=0$ и $a_{m-1}(0) \neq 0$. Пусть $A=K[T_1, \ldots, T_n]/(f)$ — кольцо функций на $\pi(Y)$; тогда $\pi^{-1}(\pi(Y))$ задается нулями многочлена $\overline{F}=T^m+\overline{a}_1T^{m-1}+\ldots+\overline{a}_m$, где $\overline{a}_i$ — образы a_i в A. Так как $Y \to \pi(Y)$ локальный изоморфизм, существует окрестность U точки 0 в $\pi(Y)$ и регулярная функция g на U, такая что $(t, g(t)) \in Y$ для любых $t \in U$. Тогда $\overline{F}(g)=0$ и $\overline{F}(T)=\overline{G}(T)(T-g)$, где $\overline{G} \in K[U]$. Так как $a_{m-1}(0) \neq 0$, то $\overline{G}(0) \neq 0$; но $\overline{G}$ обращается в нуль на $\bigcup Y_i$. Поэтому Y_i не проходят через $x=0$.

В частности мы видим, что гладкое многообразие нормально (см. п. 2.7).

6.4. Подмногообразия большей коразмерности. Пусть теперь $Y \subset X$ — подмногообразие коразмерности $p>1$; можно ли локально задать Y p уравнениями? (Если да, то говорят, что Y — *полное пересечение*). При этом задание уравнениями можно понимать теоретико-множественно, как $Y=V(f_1, \ldots, f_p)$, или схемно, как $I(Y)=(f_1, \ldots, f_p)$. Второй вариант более тонкий и из него следует первый. Однако бывают подмногообразия, не являющиеся полными пересечениями даже теоретико-множественно. Пусть например, $Y \subset \mathbf{A}^4$ — плоскость с уравнениями $T_1=T_3=0$, а $Y' \supset \mathbf{A}^4$ — уравнениями $T_2=T_4=0$. Тогда $Y \cup Y'$ нельзя задать двумя уравнениями в $\mathbf{A}^4$ (см. § 1 главы 3, а также [41, гл. III, упр. 4.9]).

Однако если подмногообразие $Y \subset X$ — гладкое, то локально оно является полным пересечением в схемном смысле. Это утверждает *якобиев критерий гладкости*:

Предложение. Подмногообразие Y коразмерности p на гладком многообразии X гладко в точке $x \in Y$ тогда и только тогда, когда в окрестности x оно может быть задано как множество нулей p функций $f_1, \ldots, f_p$, дифференциалы которых $d_x f_i$ линейно независимы.

Проверим сначала, что для одной функции f на X с $f(x)=0$ и $d_x f \neq 0$ подсхема $Y=f^{-1}(0)$ гладкая в точке x. В самом деле, $T_x Y$ задается как ядро ненулевого линейного функционала $d_x f : T_x X \to K$, так что его размерность равна $\dim T_x X - 1$. С другой стороны, $\dim_x Y = \dim_x X - 1$. Поэтому $\dim T_x Y = \dim_x Y$ и Y гладко. То, что Y является многообразием в окрестности x, устанавливается также, как в п. 6.2.

Гладкость Y в общем случае устанавливается с помощью индукции. Обратно, пусть Y гладко в x. Так как пространство $\Omega_Y^1(x)$ получается из $\Omega_X^1(x)$ факторизацией по подпространству, порожденному дифференциалами функций из $I(Y)$ (см. п. 7.6 главы 1), в $I(Y)$ найдутся p функций $f_1, \ldots, f_p$ с линейно независимыми дифференциалами в x. По предыдущему многообразие $Y' = V(f_1, \ldots, f_p)$ гладкое в x, неприводимое и коразмерность его равна p. Так как $Y \subset Y'$ и тоже коразмерности p, $Y = Y'$.

6.5. Пересечения на гладком многообразии.

Предложение. Пусть X гладкое n-мерное многообразие, Y и Y' — его подмногообразия. Тогда для любой точки $x \in Y \cap Y'$

$$\dim_x Y \cap Y' \geqslant \dim_x Y + \dim_x Y' - n. \qquad (*)$$

Как в п. 4.6, воспользуемся редукцией к диагонали. Так как диагональ Δ в $X \times X$ является гладким подмногообразием, то локально она задается n уравнениями.

Если в соотношении $(*)$ имеет место равенство, то говорят, что подмногообразия Y и Y' *пересекаются собственно* (или *правильно*) в точке x. Неправильность пересечения свидетельствует о специальном расположении Y и Y' друг относительно друга (например, $Y = Y'$). Еще более жесткое требование на расположение подмногообразий — трансверсальность. Говорят, что Y и Y' *пересекаются трансверсально* в точке $x \in X$, если они гладкие в точке x и векторные подпространства $T_x Y$ и $T_x Y'$ находятся в общем положении в $T_x X$. В этом случае многообразие $Y \cap Y'$ также гладкое и коразмерность его равна сумме коразмерностей Y и Y'.

Отметим, что утверждение п. 6.5 не выполняется для произвольных многообразий. Пусть Y и Y' — плоскости в $\mathbf{A}^4$, как в п. 6.4. Обе они лежат на трехмерном многообразии $X \subset \mathbf{A}^4$, заданном уравнением $T_1 T_2 = T_3 T_4$. Однако пересекаются Y и Y' лишь в начале координат.

6.6. Свойство Коэна—Маколея. Локальное кольцо гладкой точки обладает еще одним важным свойством, установленным

Маколеем для колец многочленов и Коэном для произвольных регулярных колец (подробнее см. [63], [65]).

Пусть $A=\mathcal{O}_{X,x}$ — локальное кольцо гладкой точки $x \in X$. Последовательность его элементов $a_1, \ldots, a_n$ (из максимального идеала) называется *регулярной*, если a_i не делит нуль в $A/(a_1, \ldots, a_{i-1})$ при $i=1, \ldots, n$ (при $i=1$ это означает, что a_1 не делитель нуля в A). Для такой последовательности $\dim_x V(a_1, \ldots, a_i)=\dim_x X-i$. В самом деле, a_i не обращается в нуль ни на какой компоненте $V(a_1, \ldots, a_{i-1})$, и поэтому размерность $V(a_1, \ldots, a_i)$ понижается ровно на единицу (см. п. 4.3). Замечательное свойство гладких точек состоит в том, что верно и обратное.

Теорема. При этих предположениях эквивалентны утверждения:

а) $\dim_x V(a_1, \ldots, a_n)=\dim_x X-n$,

б) $\dim_x V(a_1, \ldots, a_i)=\dim_x X-i$ при $i=1, \ldots, n$,

в) последовательность $(a_1, \ldots, a_n)$ регулярна в A.

Мы уже показали в)⇒б); эквивалентность а) и б) следует из теории размерности. Главное — показать а)⇒в); при этом мы можем считать $n=\dim X$. Размерность многообразия $V(a_1, \ldots, a_{n-1})$ равна 1, поэтому найдется функция f с $d_x f \neq 0$, такая что $V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cap V(f)=\{x\}$. Согласно п. 6.4, многообразие $V(f)$ гладкое и меньшей размерности; по индукции последовательность $a_1, \ldots, a_{n-1}$ регулярна в $A/(f)$, т. е. $(f, a_1, \ldots, a_{n-1})$ регулярна в A. Бесхитростно проверяется, что в любом нётеровом локальном кольце регулярность последовательности (a, b) эквивалентна регулярности (b, a). Отсюда следует регулярность $(a_1, f, \ldots, a_{n-1})$, и так далее, и в конце концов регулярность $(a_1, \ldots, a_{n-1}, f)$.

Пусть теперь $\bar{A}=A/(a_1, \ldots, a_{n-1})$; надо показать, что умножение на a_n в $\bar{A}$ инъективно. Дано, что $V(a_1, \ldots, a_n)=\{x\}$. Так как $f(x)=0$, то некоторая степень f попадает в идеал $(a_1, \ldots, a_n)$, так что $f^r=ga_n$ по модулю $(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Так как умножение на f (а значит и на f^r) инъективно в $\bar{A}$, то инъективно и умножение на a_n. Теорема доказана.

Свойство Коэна—Маколея предыдущей теоремы выполняется не только для гладких точек. Например, любая гиперповерхность (или схемное полное пересечение) в гладком многообразии обладает им. А вот пара плоскостей $Y \cup Y'$ из примера п. 6.4 не обладает свойством Коэна—Маколея. Приведем также следующий факт (ср. с примером 2 из п. 5.7).

Предложение. Пусть $f: X \to Y$ — конечный доминантный морфизм, причем многообразие Y гладкое. Эквивалентны утверждения:

а) морфизм f локально свободен (см. п. 5.7),

б) многообразие X обладает свойством Коэна—Маколея.

§ 7. Применение к бирациональной геометрии

7.1. Фундаментальные точки. Рассмотрим вопрос о том, как устроено множество точек неопределенности рационального отображения $f: X \to Y$. Мы будем отождествлять отображение f с его графиком (см. п. 1.5), замкнутым подмножеством $\Gamma \subset X \times \times Y$, проекция которого $p: \Gamma \to X$ является бирациональным морфизмом. Отображение f определено в точке $x \in X$, если p является изоморфизмом над окрестностью x; в противном случае говорят, что x — *точка неопределенности* или *фундаментальная* точка f.

Ограничимся случаем нормального X. Строение множества фундаментальных точек f сильно различается в случае аффинного Y и в случае полного Y. Начнем с первого случая, где утверждение напоминает принцип продолжения Хартогса из главы I § 2.

Предложение. Пусть X — нормальное многообразие, $F \subset X$ — замкнутое подмножество коразмерности $\geqslant 2$ и Y — аффинное многообразие. Тогда любой морфизм $f: (X - F) \to Y$ продолжается до морфизма $\bar{f}: X \to Y$.

При доказательстве можно считать $Y = \mathbf{A}^1$. Рассмотрим f как рациональное отображение X в $\mathbf{P}^1$ и пусть $\Gamma \subset X \times \mathbf{P}^1$ — его график. Множество $\Gamma \cap (X \times \{\infty\})$ содержится в $F \times \{\infty\}$, поэтому его размерность меньше $\dim X - 1$. С другой стороны, $X \times \{\infty\}$ локально задается одним уравнением в $X \times \mathbf{P}^1$, поэтому $\dim(\Gamma \cap (X \times \{\infty\})) \geqslant \dim \Gamma - 1 = \dim X - 1$. Значит, Γ не пересекается с $X \times \{\infty\}$, морфизм $\Gamma \to X$ конечный. Так как он бирациональный, то в силу нормальности X он изоморфизм.

7.2. Основная теорема Зарисского. Множество точек неопределенности при отображении в аффинное многообразие имеет коразмерность 1. Напротив, отображение в полное многообразие неопределено лишь в коразмерности $\geqslant 2$.

Теорема. Пусть $f: X \dashrightarrow Y$ — рациональное отображение нормального многообразия X в полное многообразие Y. Если x, над которой морфизм $\Gamma \to X$ конечен, значит, изоморфизм. Но тельную размерность.

Образно говоря, при рациональном отображении точка неопределенности раздувается в многообразие размерности $\geqslant 1$. Мы проверим теорему для проективного Y и даже для $Y = \mathbf{P}^n$. Предположим противное, что $f(x)$ конечно, и пусть $H \subset \mathbf{P}^n$ — гиперплоскость, не пересекающая $f(x)$. Множество $p(\Gamma \cap (X \times H))$ замкнуто и не содержит x. Дополнение к нему — окрестность x, над которой морфизм $\Gamma \to X$ конечен, значит, изоморфизм. Но тогда f определен в точке x.

Напомним, что к тому же $f(x)$ связно (см. § 3). На самом деле, Зариский доказал более тонкий факт, которому Гротендик придал следующий вид: для любого отделимого квазиконечного морфизма $X \to Y$ существует разложение $X \to X' \to Y$, где $X \to X'$ — открытое вложение, а $X' \to Y$ — конечный морфизм.

Следствие. В предположениях теоремы множество F точек неопределенности f имеет коразмерность $\geqslant 2$ в X.

В самом деле, с одной стороны, в силу теоремы $\dim p^{-1}(F) > \dim F$. С другой стороны, $p^{-1}(F)$ — собственное подмножество Γ.

7.3. Поведение дифференциальных форм при рациональных отображениях. Пусть $\omega \in H^0(Y, \Omega_Y^p)$ — регулярная дифференциальная форма на Y и $f: X \dashrightarrow Y$ — рациональное отображение, удовлетворяющее условиям теоремы п. 7.2. Поразительный факт состоит в том, что форма $f^*(\omega)$ также регулярна!

В самом деле, пусть Γ — график f, а p и q — проекции Γ на X и Y. Тогда форма $\omega' = q^*(\omega)$ регулярна на Γ. По теореме п. 7.2 p является изоморфизмом вне некоторого подмножества $F \subset X$ коразмерности $\geqslant 2$, так что $f^*(\omega) = (p^{-1})^* \omega'$ регулярна на $X - F$. Но тогда по принципу продолжения п. 7.1 она регулярна всюду на X.

Как следствие мы получаем, что для полного гладкого многообразия X размерность пространства $H^0(X, \Omega_X^p)$ регулярных дифференциальных p-форм является бирациональным инвариантом. Это же верно для любых пучков, построенных из Ω_X^p ковариантными тензорными операциями. Один случай наиболее важен.

Пусть X — гладкое n-мерное многообразие. Тогда пучок Ω_X^1 локально свободный ранга n. Его n-я внешняя степень $\Omega_X^n = \Lambda^n \Omega_X^1$ будет обратимым пучком; он называется *каноническим пучком* на X и обозначается ω_X. Размерность $H^0(X, \omega_X)$ называется *геометрическим родом* X и обозначается $p_g(X)$. Как мы видели в § 7 главы 1, $p_g(\mathbf{P}^n) = 0$; там же было показано, что для плоской гладкой кубической кривой род $\geqslant 1$, откуда следует ее нерациональность.

7.4. Исключительное многообразие бирационального морфизма. Пусть $p: \Gamma \to X$ — собственный бирациональный морфизм, X нормально и F — множество точек неопределенности p^{-1}. *Исключительным подмногообразием* p называется $p^{-1}(F)$. Как показано в п. 7.2, его размерность больше, чем размерность его образа F. Иначе говоря, при бирациональном морфизме некоторое подмногообразие «стягивается» в многообразие меньшей размерности. Если X — гладкое, то это утверждение можно уточнить:

Теорема (ван дер Варден). Пусть многообразие X — локально факториальное (например, гладкое), а $p: \Gamma \to X$ — бирациональный морфизм. Тогда любая компонента исключительного многообразия p имеет коразмерность 1 в Γ.

Пусть $x \in X$ — точка неопределенности p и $z \in p^{-1}(x)$. Регулярные функции на Γ можно рассматривать как рациональные функции на X. Так как x — точка неопределенности, то найдется регулярная функция u на Γ, $u(z)=0$, которая не регулярна в точке x. Пусть $u=a/b$ — несократимое представление, где a и b регулярны в x. Пусть $Z\subset\Gamma$ задается нулями функции $p^*(b)$; его коразмерность равна 1. Так как $p^*(a)=up^*(b)$, она тоже равна нулю на Z. Значит, $p(Z)$ лежит в нулях a и b и имеет коразмерность >1. Поэтому многообразие Z исключительное.

Пример. Если X — не гладкое, то исключительное многообразие может иметь коразмерность >1. Пусть X — конус в $\mathbf{A}^4$, заданный уравнением $T_1T_2=T_3T_4$. Это нормальное многообразие; это видно из того, что кольцо $K[X]$ есть пересечение двух нормальных колец $K[T_1, T_4/T_1, T_3/T_1]$ и $K[T_2, T_4/T_2, T_3/T_2]$ в поле $K(X)$. С другой стороны, пусть $f=T_1/T_3=T_4/T_2$ — рациональная функция на X и $p:\Gamma\to X$ ее график. В однородных координатах U и V на $\mathbf{P}^1$ график задается уравнениями $UT_3=VT_1$ и $UT_2=VT_1$. Проекция $p:\Gamma\to X$ является изморфизмом над $X-\{0\}$, тогда как исключительное многообразие $p^{-1}(0)=$ $=\{0\}\times\mathbf{P}^1$ имеет коразмерность 2 в Γ.

В частности, многообразие X не факториально.

7.5. Разрешение особенностей. *Разрешением особенностей* многообразия X называется собственный бирациональный морфизм $X'\to X$ с гладким X'. Например, морфизм $\Gamma\to X$ из предыдущего примера разрешает особенность конуса X. В связи с этим понятием встают два вопроса — существование и единственность разрешения. Первый более принципиален и, видимо, ответ на него утвердительный. Во всяком случае это так, если характеристика K равна 0 (теорема Хиронаки) или если $\dim X\leqslant 2$ ([16]).

Что касается единственности, ответ зависит от размерности. Если X — кривая, ее десингуляризация однозначна с точностью до изоморфизма (см. п. 7.2) и совпадает с нормализацией. В размерности $\geqslant 2$ гладкая модель не единственна. Дело в том, что, раздув на гладком многообразии точку, мы снова получим гладкое многообразие.

Предложение. Пусть $\sigma:\widetilde{X}\to X$ — раздутие гладкого многообразия вдоль гладкого подмногообразия Y. Тогда $\widetilde{X}$ — гладкое.

Действительно, в этом случае $C_{Y/X}=N_{Y/X}$ является локально тривиальным векторным расслоением над Y. Исключительное многообразие $E=\sigma^{-1}(Y)=\mathbf{P}_Y(N_{Y/X})$ тоже гладкое. С другой стороны, E локально задается одним уравнением. Отсюда легко следует гладкость $\widetilde{X}$ в точках E; в остальных точках $\widetilde{X}$ изоморфно X и тоже гладкое.

Все же для поверхностей однозначно определено минимальное разрешение особенностей (см. [15], [32], [41], [56]). В размерности 3 и выше уже и это не так. Пусть снова X — конус в $\mathbf{A}^4$, заданный уравнением $T_1T_2=T_3T_4$. Десингуляризация $p:\Gamma\to X$ (график T_1/T_3) минимальна; однако минимальна и

$p': \Gamma' \to X$ (график T_1/T_4), заданная в $X \times \mathbf{P}^1$ уравнениями $U'T_4 = V'T_1$, $U'T_2 = V'T_3$. Модели Γ и Γ' не изоморнфы как X-многообразия. В самом деле, плоскость $\mathbf{A}^2 \subset \Gamma$ с уравнениями $U=0$, $V=1$, $T_1=T_4=0$ переходит в поверхность $\widetilde{\mathbf{A}}_2 \subset \Gamma'$ с уравнениями $U'T^2 = V'T_3$, $T_1 = T_4 = 0$. Картина тут такая:

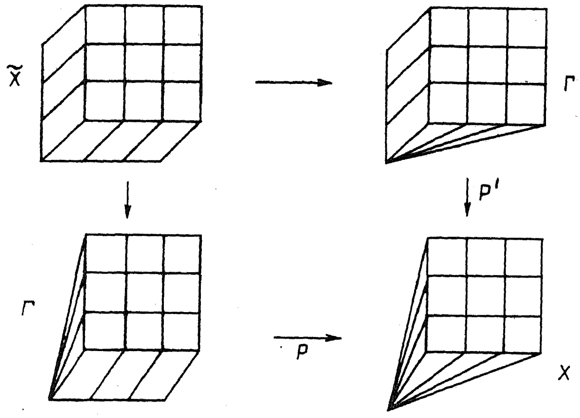


Рис. 15

Верхняя левая фигура $\widetilde{X}$ — еще одна десингуляризация X, изоморфная $\Gamma \times \Gamma'$. Ее можно получить, раздув на X точку 0.

7.6. Критерий нормальности. Начнем со следующего свойства нормального многообразия:

Предложение. Множество $\operatorname{Sing} X$ особых точек нормального многообразия X имеет коразмерность $\geqslant 2$.

Уменьшая X, можно считать подмногообразие $\operatorname{Sing} X$ гладким. Раз X не гладко в точках $\operatorname{Sing} X$, последнее не задается одним уравнением (даже локально) в X. Поэтому раздутие $\sigma: \widetilde{X} \to X$ вдоль $\operatorname{Sing} X$ не изоморфизм, $\operatorname{Sing} X$ фундаментально для σ^{-1} и, в соответствии с п. 7.2, имеет коразмерность $\geqslant 2$.

Следствие. Нормальная кривая гладкая.

Итак мы видим, что нормальное многообразие обладает двумя важными свойствами: свойством Хартогса (п. 7.1) и гладкостью в коразмерности 1. Мы утверждаем, что верно и обратное. В самом деле, пусть f — рациональная функция на X, целая над X. Так как $X - \operatorname{Sing} X$ нормально, f регулярна вне $\operatorname{Sing} X$. Но коразмерность $\operatorname{Sing} X$ больше 1, и по свойству Хартогса f регулярна всюду.

В связи с этим отметим, что свойство Коэна—Маколея влечет свойство продолжения Хартогса. Действительно, пусть коразмерность F в X больше 1, и рациональная функция a/b регулярна вне F. Пусть g — функция на X, такая что $V(g) \supset F$ и $V(g) \cap V(b)$ имеет коразмерность 2 в X. Так как на $X - V(g)$

функция a/b регулярна, $g^r a$ делится на b при некотором r. По свойству Коэна—Маколея g не делит нуль по модулю b. Значит, a делится на b и функция a/b регулярна всюду.

В частности, если X гиперповерхность в гладком многообразии и $\operatorname{Sing} X$ имеет коразмерность $\geqslant 2$, то X нормально. Это дает другое доказательство нормальности квадратичного конуса X из примера п. 7.5. Подобным образом можно проверить, что пара плоскостей $V \cup V'$ из примера 3 § 5 не является полным пересечением даже теоретико-множественно.

Глава 3

ГЕОМЕТРИЯ НА АЛГЕБРАИЧЕСКОМ МНОГООБРАЗИИ

Геометрия изучает свойства геометрических фигур и их взаиморасположение. Фигуры алгебраической геометрии — подмногообразия (или *алгебраические циклы*) фиксированного алгебраического многообразия, чаще всего проективного пространства. Обычно такие фигуры допускают непрерывные вариации, и центральным понятием этой главы будет понятие алгебраического семейства фигур. Простейшие фигуры — *дивизоры* (подмногообразия коразмерности 1) — локально задаются одним уравнением. *Линейные системы* дивизоров дают важнейшие примеры алгебраических семейств. Более сложные фигуры можно образовывать из более простых при помощи операций вроде пересечения или объединения; это предмет *теории пересечений*.

Некоторые инварианты фигур не меняются при непрерывных вариациях. Пример такого инварианта — *степень* проективной фигуры. Все фигуры данной размерности и степени параметризуются точками алгебраического многообразия — т. н. *многообразия Чжоу*.

§ 1. Линейные сечения проективного многообразия

1.1. Внешняя геометрия многообразия. Простейшее проективное многообразие — проективное пространство $\mathbf{P}^n$. Простейшие подмногообразия в $\mathbf{P}^n$ — линейные подмногообразия, т. е. подмногообразия вида $\mathbf{P}(\lambda)$, где λ — векторное подпространство в K^{n+1}. Вопросы о таких многообразиях элементарны и относятся скорее к линейной алгебре, чем к проективной геометрии. Напомним, что они параметризуются многообразиями Грассмана.

Пусть теперь $X \subset \mathbf{P}^n$ — произвольное проективное многообразие. До сих пор мы интересовались внутренними свойствами X, такими как размерность, особые точки и т. д. Теперь нас больше будет интересовать внешняя геометрия X, т. е. свойства X, связанные с вложением $X \subset \mathbf{P}^n$, или свойства пары $(X, \mathbf{P}^n)$. Можно сказать, что это свойства конуса $C \subset K^{n+1}$ такого, что $X = \mathbf{P}(C)$. Естественно начать внешнюю геометрию с изучения взаимодействия X с линейными подмногообразиями $\mathbf{P}^n$. Такая деятельность полезна даже в том случае, если нас интересуют внутренние свойства X. Например, при доказательстве нерациональности гладкой кубической гиперповерхности в $\mathbf{P}^4$ важную роль играет 2-мерное семейство прямых, лежащих на кубике ([12]). См. также более элементарный пример из § 3, где устанавливается нерациональность гладкой кубической кривой в $\mathbf{P}^2$.

Пересечение X с «общими» или типичными линейными подмногообразиями используется для построения проективных инвариантов, важнейшим из которых является степень. Здесь и далее в главе 3 термин «общее» линейное подпространство означает элемент из открытого плотного подмножества соответствующего грассманиана. Линейные подмногообразия, специальным образом расположенные относительно X (касательные, секущие, лежащие на X), также несут важную информацию и позволяют связывать с X новые многообразия. Здесь мы обсудим некоторые общие факты о пересечениях с линейными многообразиями; общая идеология заключается в том, что многие свойства многообразия X наследуются его линейным сечением $X \cap L$. Условно такие утверждения можно разделить на теоремы типа Бертини про общие сечения и теоремы типа Лефшеца о произвольных сечениях. Например, как мы видели в главе 2, если $\dim L = n - \dim X$, то $X \cap L$ не пусто; для общего L оно еще и конечно.

1.2. Универсальное линейное сечение. Часто полезно бывает иметь дело сразу со всеми линейными сечениями. Для этого мы зафиксируем целое число $m \geqslant 0$; пусть G обозначает многообразие Грассмана $G(n+1-m, n+1)$ векторных подпространств коразмерности m в K^{n+1} (или линейных подмногообразий коразмерности m в $\mathbf{P}^n$). Над G есть универсальное векторное (под)расслоение $S \subset K^{n+1} \times G$ (глава 1); проективизация его над G дает проективное подрасслоение $\mathbf{P}(S) \subset \mathbf{P}^n \times G$. Слой $\mathbf{P}(S)$ над точкой $\lambda \in G$ (т. е. векторным подпространством $\lambda \subset K^{n+1}$) есть линейное $\mathbf{P}(\lambda) \subset \mathbf{P}^n$.

Пусть теперь $X \subset \mathbf{P}^n$ — проективное многообразие (обычно неприводимое). Образуем многообразие инциденции IX как пересечение $X \times G$ и $\mathbf{P}(S)$ в $\mathbf{P}^n \times G$. Оно состоит из пар $(x, L) \in X \times G$, таких что $x \in L$. Пусть p и q — проекции IX на X и G. Расслоение $q: IX \to G$ назовем *универсальным линейным сечением* X коразмерности m. Слой его над точкой $L \in G$ изоморфен (схемно) $X \cap L$. Проекция $p: IX \to X$ играет вспомогательную роль. Для $x \in X$ слой $p^{-1}(x)$ состоит из линейных $L \in G$, проходящих через x, и изоморфен $G(n-m, n)$. В частности, слои p неприводимы и имеют размерность $m(n-m)$.

Обсудим подробнее случай $m=r=\dim X$, т. е. пересечения X с линейными пространствами дополнительной размерности. Обозначим через U (соответственно U_0) подмножество в G, состоящее из тех L, которые пересекают X в конечном числе точек (соответственно трансверсально пересекают X); ясно, что $U_0 \subset U$.

Т е о р е м а. Множества U и U_0 открыты и плотны в G. Для любого $L \in U$ число $|X \cap L|$ точек множества $X \cap L$ не превосходит $\deg(q)$ и равно $\deg(q)$ для $L \in U_0$.

В самом деле, в этом случае $\dim IX = \dim X + \dim G(n-m, n) = r + r(n-r) = \dim G$. Кроме того, как уже отмечалось, $X \cap L \neq \varnothing$ для любого $L \in G$, так что $q: IX \to G$ сюръективен. Из теоремы п. 4.5 главы 2 следует открытость и плотность U, а из теоремы п. 5.7 главы 2 неравенство $|X \cap L| \leqslant \deg q$. Перейдем теперь к трансверсальности. Пусть $F \subset IX$ состоит из пар (x, L), таких что L не трансверсально пересекает X в точке x. Это подмножество замкнуто в силу теоремы о размерности слоев и нигде не плотное из-за существования гладких точек на X. Поэтому $q(F)$ замкнуто в G и $\dim q(F) \leqslant \dim F < \dim IX = \dim G$. Это доказывает открытость и плотность $U_0 = G - q(E)$. Так как q этальный над U_0, то из теоремы о постоянстве $|X \cap L| = \deg q$ для $L \in U_0$.

Точно так же можно показать, что общее $L \subset \mathbf{P}^n$ коразмерности $m > r = \dim X$ не пересекается с X. Более точно, в этом случае проекция $q: IX \to G$ является (бирационально) вложением и $q(IX)$ имеет коразмерность $m-r$ в G.

Аналогично, если L — общее линейное коразмерности $m < \dim X$, то L трансверсально пересекает X во всех гладких точках X. Один частный случай мы рассмотрим подробнее.

1.3. Гиперплоские сечения. Пусть $m=1$; в этом случае $G = \mathbf{P}^*$ — проективное пространство, двойственное к $\mathbf{P} = \mathbf{P}^n$. Предположим, кроме того, что X — гладкое r-мерное. Тогда IX — тоже гладкое, размерности $r+n-1$ и $q: IX \to \mathbf{P}^*$ — морфизм гладких многообразий. Как уже говорилось, общий слой q, т. е. пересечение X с общей гиперплоскостью H, гладкий. Рассмотрим вырождения q.

Точки IX, в которых морфизм q не гладкий, — это пары (x, H), такие что гиперплоскость H касается X в точке x, т. е. $H \supset \overline{T}_x X$. Множество таких точек CX называется *конормальным* к X, а его образ $q(CX) = X^* \subset \mathbf{P}^*$ — многообразием, *двойственным* к X.

Эта терминология подразумевает, что двойственным к X^* снова будет X. Это почти всегда так, хотя надо сделать две оговорки. Первая: как правило, X^* имеет особенности, так что определения нужно слегка обобщить. Вторая: даже если X^* гладкое, то рефлексивность может нарушиться.

П р и м е р 1. Пусть характеристика K равна 2 и $C = [T_0 T_2 = T_1^2]$ гладкая коника в $\mathbf{P}^2$. Тогда все касательные к C

проходят через одну точку $P=(0,1,0)$ (ср. с примером 2 § 2 главы 1). Получаем, что C^* — прямая в $\mathbf{P}^{2*}$, и $C^{**}=P$.

Этот пример интересен еще вот чем: $q: IC \to \mathbf{P}^{2*}$ является двулистным накрытием, разветвленным над прямой C^*. Ограничение q на $\mathbf{P}^{2*} - C^*$ дает неразветвленное накрытие $\mathbf{A}^2$, так что $\mathbf{A}^2$ не односвязно!

Впрочем, в нулевой характеристике всегда $X^{**}=X$ ([47]).

Обращаясь к первой проекции $p: CX \to X$, легко понять, что CX — гладкое многообразие размерности $n-1$.

Пример 2. Пусть X — гиперповерхность в $\mathbf{P}$; тогда CX и X изоморфны. Отображение $q \circ p^{-1}: X \to \mathbf{P}^*$ называется *отображением Гаусса*. Если X задается формой $F(T_0, \ldots, T_n)$, то отображение Гаусса сопоставляет точке x точку $(\partial F / \partial T_0(x), \ldots, \partial F / \partial T_n(x))$.

Так как CX имеет меньшую размерность, чем $\mathbf{P}^*$, следует ожидать, что в типичном случае $CX \to X^*$ — бирациональный изоморфизм и $\dim X^* = n-1$. Отсылая за подробностями к [40], [47], приведем несколько фактов:

Предложение. а) Морфизм $CX \to \mathbf{P}^*$ неразветвлен в точке (x, H) тогда и только тогда, когда x — невырожденная квадратичная особенность $X \cap H$.

Если X — кривая, то морфизм $q: IX \to P^*$ конечен, так что так, если характеристика равна нулю и $\dim X^* = n-1$), то $CX \to X^*$ является изоморфизмом над $X^* - \mathrm{Sing}\, X^*$; для любой точки H, гладкой на X^*, $X \cap H$ имеет одну (невырожденную квадратичную) особую точку.

Если X — кривая, то морфизм $q: IX \to \mathbf{P}^*$ конечен, так что X^* имеет коразмерность 1 в $\mathbf{P}^*$. Это частный случай *теоремы Зарисского—Нагаты о чистоте ветвления* ([38]):

Теорема. Пусть $f: Y \to Z$ — конечный доминантный морфизм, Z гладкое, Y нормальное. Тогда множество ветвления f имеет коразмерность 1 в Z.

Полезно сравнить это утверждение с примером 3 § 5 главы 2, где ветвление происходит в коразмерности 2.

Пример 3. Бывает, что коразмерность X^* больше 1; в этом случае $H \in X^*$ касается X вдоль подмногообразия (в общем случае линейного) положительной размерности. Простейший нетривиальный пример — $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$, вложенное по Сегре в $\mathbf{P}^5$; оно самодвойственное.

1.4. Теорема о связности. Если коразмерность L меньше $\dim X$, то пересечение $X \cap L$ связно. Удобнее доказывать чуть более общее утверждение.

Теорема. Пусть $f: X \to \mathbf{P}^n$ — собственный морфизм, X — неприводимое многообразие, $L \subset \mathbf{P}^n$ — линейное подмногообразие коразмерности $< \dim X$. Тогда $X \cap L$ связно.

Наметим доказательство. Пользуясь разложением Штейна, можно считать f конечным. Пользуясь принципом связности Энриквеса—Зарисского, можно считать L общим. Проектируя линейно $f(X)$, можно считать f сюръективным. Наконец, можно считать $\dim L=1$. Возьмем точку $p\in\mathbf{P}^n$ и покажем, что для любой прямой L, проходящей через p, кривая $f^{-1}(L)$ связна. Пусть $\pi:\mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^{n-1}$ проекция из p; мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] & \widetilde{X} \arrow[l, "\sigma_X"'] \arrow[d, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "\pi_X"] & \\
\mathbf{P}^n & \widetilde{\mathbf{P}}^n \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[r, "\pi"] & \mathbf{P}^{n-1}
\end{tikzcd}$$

где σ (соответственно σ_X) — раздутие $\mathbf{P}^n$ в точке p (соответственно X в $f^{-1}(p)$). Надо показать связность кривых $\pi_X{}^{-1}(y)$, $y\in\mathbf{P}^{n-1}$. Фокус в том, что морфизм π_X обладает сечениями; а именно, для точки $x\in f^{-1}(p)$ сечением будет $\sigma_X{}^{-1}(x)=\{x\}\times\sigma^{-1}(p)$. Поэтому если разложить по Штейну морфизм $\pi_X:\widetilde{X}\to Z\to\mathbf{P}^{n-1}$, то Z также будет обладать сечением над $\mathbf{P}^{n-1}$. С другой стороны, Z неприводимо как образ неприводимого $\widetilde{X}$, так что $Z\to\mathbf{P}^{n-1}$ изоморфизм и слои $\pi_X{}^{-1}(y)$ связны.

Фултон и Хансен придали теореме о связности более мощную форму:

Теорема. Пусть X — полное неприводимое многообразие и $f:X\to\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^n$ — морфизм, такой что $\dim f(X)>n$. Тогда $f^{-1}(\Delta)$ связно, где Δ — диагональ в $\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^n$.

Она сводится к предыдущей теореме при помощи следующей простой, но полезной конструкции.

1.5. Линейное соединение. Пусть V, V' — векторные пространства над K, вложенные в $V\times V'$ как $V\times\{0\}$ и $\{0\}\times V'$. Тогда $\mathbf{P}(V)$ и $\mathbf{P}(V')$ — непересекающиеся линейные подмногообразия в $\mathbf{P}(V\times V')$, и любая точка из дополнения к ним лежит на единственной прямой, пересекающей $\mathbf{P}(V)$ и $\mathbf{P}(V')$.

Вообще, если X и X' — многообразия в $\mathbf{P}(V)$ и $\mathbf{P}(V')$ соответственно, то, соединяя прямыми точки X и X', мы заметаем некоторое подмногообразие в $\mathbf{P}(V\times V')$, которое можно назвать *линейным соединением* X и X' и обозначить $X*X'$. Например, соединение X с точкой есть конус с вершиной в этой точке и основанием X. Если $X=\mathbf{P}(C)$, $X'=\mathbf{P}(C')$, где C, C' — конусы в V, V', то $X*X'=\mathbf{P}(C\times C')$.

Как уже говорилось, $\mathbf{P}(V\times V')-(\mathbf{P}(V)\cup\mathbf{P}(V'))$ обладает естественной проекцией на $\mathbf{P}(V)\times\mathbf{P}(V')$ со слоем $\mathbf{A}^1-\{0\}$. Раздувая $\mathbf{P}(V)$ и $\mathbf{P}(V')$, мы получим настоящий морфизм

$$\rho:\widetilde{\mathbf{P}(V\times V')}\to\mathbf{P}(V)\times\mathbf{P}(V')$$

со слоем $\mathbf{P}^1$ и двумя каноническими сечениями.

Вернемся к теореме Фултона—Хансена. Пусть $V=V'=K^{n+1}$ и δ — диагональ в $K^{n+1}\times K^{n+1}$. Тогда $\mathbf{P}(\delta)\subset\mathbf{P}^{2n+1}=\mathbf{P}^n*\mathbf{P}^n$ изоморфно проектируется на диагональ $\Delta\subset\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^n$ при ρ. Образуем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle\tilde{f}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbf{P}^{2n+1} & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^n \end{array}.$$

Так как $f^{-1}(\Delta)=\tilde{f}^{-1}(\mathbf{P}(\delta))$, то все следует из первой версии теоремы о связности.

1.6. Применения теоремы о связности.

Теорема (Бертини). Пусть X — неприводимое подмногообразие в $\mathbf{P}^n$. Тогда для общего линейного $L\subset\mathbf{P}^n$ коразмерности $<\dim X$ пересечение $X\cap L$ неприводимо. Так, если $\dim X\geqslant 2$, общее гиперплоское сечение неприводимо.

Мы проверим это в крайнем случае, когда коразмерность L равна $\dim X-1$. Применяя теорему о связности к нормализации $f: X^H\to\mathbf{P}^n$, мы получаем связность кривой $f^{-1}(L)$ для общего L. С другой стороны, X^H гладко в коразмерности 1 (глава 2, § 7), поэтому для общего L кривая $f^{-1}(L)$ гладкая, следовательно неприводимая. Значит, неприводима и $X\cap L$ как образ $f^{-1}(L)$.

Теорема. Пусть $X, Y\subset\mathbf{P}^n$ неприводимы и $\dim X+\dim Y>n$. Тогда $X\cap Y$ связно.

Действительно, $X\cap Y$ есть пересечение диагонали с вложением $X\times Y\subset\mathbf{P}^n\times\mathbf{P}^n$.

Теорема. Пусть X — неприводимое многообразие, $f: X\to\mathbf{P}^n$ конечный неразветвленный морфизм. Если $2\dim X>n$, то f является замкнутым вложением.

В самом деле, неразветвленность f означает, что диагональ $\Delta_X\subset X\times X$ открыта и замкнута в $X\underset{\mathbf{P}^n}{\times}X=(f\times f)^{-1}(\Delta_{\mathbf{P}^n})$, связном по теореме Фултона — Хансена. Значит, $\Delta_X=X\underset{\mathbf{P}^n}{\times}X$, f инъективно и остается применить критерий из § 5 главы 2.

Следствие. Любое многообразие в $\mathbf{P}^n$ размерности $>n/2$ односвязно. В частности, односвязно $\mathbf{P}^n$.

Отметим, что $\mathbf{A}^n$ односвязно лишь в нулевой характеристике!

Теорема. Пусть X — нормальное проективное многообразие размерности $\geqslant 2$. Если гиперплоское сечение X односвязно, то односвязно и X.

В самом деле, пусть $f: X'\to X$ — этальное накрытие со связным X'. Из-за нормальности X многообразие X' неприводимо. По теореме о связности $f^{-1}(H)$ тоже связно; в силу односвязности $X\cap H$ степень X' над X равна 1.

Теорема (Ф. Л. Зак [5]). Пусть неприводимое многообразие $X\subset\mathbf{P}^n$ не содержится ни в какой гиперплоскости. Пусть

$L\subset\mathbf{P}^n$ — собственное линейное подмногообразие, касающееся X вдоль Y (так что для $y\in Y$ имеем $\overline{T}_yX\subset L$). Тогда $\dim Y\leqslant\leqslant\dim L-\dim X$.

Для доказательства возьмем линейное подмногообразие $M\subset\mathbf{P}^n$ размерности $n-1-\dim L$, не пересекающее L, и пусть $\pi_M:X\to L$ — линейная проекция с центром в M. В силу касания X и L вдоль Y эта проекция неразветвлена в точках M. Отсюда следует, что Y — связная компонента множества $\pi_M{}^{-1}(Y)=X\cap(Y*M)$. Предположим теперь, что $\dim Y>\dim L-\dim X$. Тогда $\dim(Y*M)+\dim X>n$, и по теореме о связности $X\cap(Y*M)$ связно. Поэтому $Y=X\cap(Y*M)$. А так как M произвольно, то $X=Y\subset L$. Противоречие!

Следствие. Если X гладкое, то $\dim X^*\geqslant\dim X$.

Следствие. Пусть X — гладкое подмногообразие в $\mathbf{P}^n$. Тогда любое гиперплоское сечение X приведено при $2\dim X>n$ и нормально при $2\dim X>n+1$.

(Воспользоваться критерием нормальности § 7 главы 2.)

Другие применения теоремы о связности и ссылки на литературу о наследовании свойств при переходе к гиперплоским сечениям можно найти в обзоре [30].

§ 2. Степень проективного многообразия

2.1. Определение степени. Степень проективного многообразия $X\subset\mathbf{P}^n$ — вторая по важности (после размерности) численная характеристика X, отражающая его расположение в $\mathbf{P}^n$. Если $r=\dim X$ (как правило, предполагается, что все компоненты X r-мерны), то *степень* $\deg X$ — это число точек пересечения X с общим линейным многообразием L размерности $n-r$ (см. теорему п. 1.2). Если X пересекается с $(n-r)$-плоскостью L более чем в $\deg X$ точках, то $X\cap L$ бесконечно.

Пример 1. Пусть X — линейное многообразие в $\mathbf{P}^n$; тогда $\deg X=1$. Верно и обратное.

Пример 2. Пусть X — гиперповерхность, заданная неприводимым однородным многочленом $F(T_0, \ldots, T_n)$. Тогда $\deg X=\deg F$.

Пример 3. Пусть $C\subset\mathbf{P}^n$ — неприводимая кривая степени два. Тогда она лежит в некоторой плоскости. В самом деле, возьмем на C три общие точки x, y, z и проведем через них плоскость $L=\overline{xyz}$. Так как $L\cap C$ бесконечно, $C\subset L$. Отметим, что неприводимость C существенна, как видно на примере двух скрещивающихся прямых в $\mathbf{P}^3$.

Пример 4. Степень пересечения X с гиперплоскостью H $\leqslant\deg X$ и равна $\deg X$, если H общая.

Пример 5. Пусть $X*Y$ — линейное соединение X и Y. Тогда $\deg X*Y=\deg X\cdot\deg Y$. В самом деле, пусть $L=\mathbf{P}(\lambda)$ — общее линейное многообразие, пересекающее X в $\deg X$ точках; аналогично $L'=\mathbf{P}(\lambda')$. Тогда линейное многообразие $L*L'=\mathbf{P}(\lambda\times\lambda')$

пересекает $X*X'$ по одномерному многообразию $(X\cap L)*(X'\cap L')$, состоящему из $\deg X\cdot\deg X'$ прямых. Теперь все должно быть ясным.

Над $K=\mathbf{C}$ степень можно интепретировать как объем, см. [32], [56].

2.2. Теорема Безу. Если все неприводимые компоненты $X_1, \ldots X_s$ многообразия X имеют одну размерность, то $\deg X = \deg X_1 + \ldots + \deg X_s$. Это можно рассматривать как аддитивность степени при объединении. Наиболее знаменитая теорема о степени — *теорема Безу* — утверждает мультипликативность степени при пересечении. Конечное, при этом надо предполагать, что пересекаемые многообразия расположены трансверсально или приписывать пересечениям некоторые кратности. Проблему кратностей мы обсудим в параграфе, посвященном общей теории пересечений, а сейчас приведем теорему Безу в той форме, которую ей придали Фултон и Макферсон [29].

Теорема. Пусть $X_1, \ldots, X_s$ — равноразмерные многообразия в $\mathbf{P}^n$ и $Z_1, \ldots, Z_t$ — неприводимые компоненты $X_1 \cap \ldots \cap X_s$. Тогда $\sum\limits_j \deg Z_j \leqslant \prod\limits_i \deg X_i$.

Например, если пересечение n гиперповерхностей $x_1 \ldots x_n$ в $\mathbf{P}^n$ конечно, оно содержит $\leqslant d_1 \ldots d_n$ точек, где $d_i = \deg X_i$. Собственно это и установил Безу.

При доказательстве можно считать X_i неприводимыми; кроме того, для простоты мы ограничимся пересечением двух многообразий. Воспользуемся проективным вариантом редукции к диагонали. Пусть δ — диагональ в $K^{n+1}\times K^{n+1}$. Линейное многообразие $\mathbf{P}(\delta)$ в $\mathbf{P}^n * \mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{2n+1}$ пересекает линейное соединение $X_1 * X_2$ как раз по $X_1 \cap X_2$. Пользуясь примером 5, мы видим, что X_2 можно считать линейным. Представляя линейное многообразие как пересечение гиперплоскостей, можно считать X_2 гиперплоскостью. Теперь все очевидно (см. пример 5).

Когда пересечения трансверсальные, можно утверждать больше. Скажем, что многообразия $X, Y \subset \mathbf{P}^n$ *пересекаются просто* (или с кратностью 1). Если на каждой компоненте $X\cap Y$ найдется точка, в которой X и Y пересекаются трансверсально. В этом случае X и Y пересекаются правильно в смысле размерностей (см. § 6 главы 2). Предыдущее рассуждение в случае простого пересечения дает равенство

$$\deg(X\cap Y) = \deg X\cdot\deg Y.$$

Пример. Пусть $C\subset\mathbf{P}^3$ — нормальная рациональная кривая степени 3. Тогда она не является полным пересечением, т. е. простым пересечением двух поверхностей. В самом деле, одна из них по теореме Безу должна быть плоскостью, а C не лежит ни в какой плоскости.

Другой простой факт, следующий из теоремы Безу, может удивить лишь тем, что не появился раньше.

Следствие. Автоморфизмы $\mathbf{P}^n$ переводят гиперплоскости в гиперплоскости и индуцируются линейными автоморфизмами K^{n+1}.

В самом деле, пусть H — гиперплоскость в $\mathbf{P}$, а L — трансверсальная ей прямая. Если φ — автоморфизм $\mathbf{P}^n$, то $\varphi(H)$ и $\varphi(L)$ снова трансверсально пересекаются в единственной точке, откуда $\deg\varphi(H)=1$ и $\varphi(H)$ гиперплоскость.

2.3. Степень и коразмерность. Степень многообразия накладывает ограничения на размерность линейной оболочки многообразия. Пусть, к примеру, C — неприводимая кривая. Возьмем на C $\deg C+1$ точку и проведем через них линейное пространство L размерности $\leqslant \deg C$. Так как C и L пересекаются в этих точках, C лежит в L. Таким образом, любая неприводимая кривая лежит в пространстве размерности $\leqslant \deg C$. Пользуясь гиперплоскими сечениями, легко отсюда получить

Предложение. Любое неприводимое проективное многообразие X лежит в пространстве размерности $<\dim X+\deg X$.

Например, многообразие степени 2 лежит в пространстве размерности $\dim X+1$; для коники мы это уже видели. Можно также сказать, что коразмерность неприводимого многообразия в своей линейной оболочке меньше степени.

Пример 1. Пусть $C=v_n(\mathbf{P}^1)\subset\mathbf{P}^n$ — рациональная нормальная кривая степени n. Ясно, что $\langle C\rangle=\mathbf{P}^n$, так что оценка предложения точная. Напротив, пусть C — невырожденная (т. е. не лежащая в гиперплоскости) кривая в $\mathbf{P}^n$ степени n. Возьмем на ней $n-1$ точку $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Любая гиперплоскость H, проходящая через $x_1, \ldots, x_{n-1}$, пересекает C еще в одной точке $x_H\in C$. Это устанавливает изоморфизм $\mathbf{P}^1$ и C. Можно показать, что C имеет вид $v_n(\mathbf{P}^1)$.

Пример 2. Пусть $S\subset\mathbf{P}^5$ — поверхность Веронезе, т. е. образ плоскости $\mathbf{P}^2$ при вложении Веронезе $v:\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^5$. Представим общую 3-плоскость в $\mathbf{P}^5$ как пересечение двух гиперплоскостей H, H'. Прообразы H и H' при v — две коники на $\mathbf{P}^2$, и они пересекаются в 4 точках. Поэтому степень S равна 4 и тоже минимально возможная для поверхности в $\mathbf{P}^5$.

Поверхность Веронезе S обладает еще одним интересным свойством — ее многообразие секущих $\mathrm{Sec}S$ имеет размерность 4 вопреки ожидаемой 5. Дело в том, что любая прямая $l\subset\mathbf{P}^2$ при v переходит в кривую степени 2. Поэтому линейная оболочка $\langle v(l)\rangle$ является 2 — плоскостью. Так как $\mathrm{Sec}S$ заметается плоскостями $\langle v(l)\rangle$, когда l пробегает 2 — мерное семейство прямых в $\mathbf{P}^2$, то $\dim\mathrm{Sec}\,S=4$. С S можно связать еще одно 2-мерное семейство плоскостей — касательные к S; они заметают 4-мерное многообразие $\mathrm{Tan}S$. Так как $\mathrm{Tan}S$ содержится в $\mathrm{Sec}S$, то они совпадают.

Многообразия минимально возможной степени имеют довольно специальный вид и могут быть полностью описаны

[6], [59]. Многообразиям малой степени и коразмерности посвящена [42].

2.4. Степень линейной проекции. Многообразия большой коразмерности можно упрощать, пользуясь линейными проекциями в пространство меньшей размерности. Как ведет себя при этом степень? Например, если $X \subset \mathbf{P}^n$ и X не гиперповерхность, то при общей проекции степень сохраняется. Вообще, если X неприводимо и центр проекции не лежит на X, то проекция $\pi : X \to \pi(X)$ конечна и $\deg X = \deg(\pi)\deg \pi(X)$.

Более интересные вещи происходят, когда центр проекции лежит на X. Образ проекции $\pi(X)$ надо понимать тогда как $\widetilde{\pi}(\widetilde{X})$, где $\widetilde{X}$ — раздутие $\widetilde{X}$ в точке p. Степень образа при этом уменьшается!

Пример. Пусть $C \subset \mathbf{P}^3$ — рациональная нормальная кубическая кривая, заданная параметрически $\{(1, t, t^2, t^3)\}$, $t \in \mathbf{P}^1$. Если мы проектируем ее из точки $p \notin C$, то образом будет плоская кубическая кривая, причем непременно особая (см. рис. 16), так как неособая кубика нерациональна. Однако проекция из точки $p = (1, 0, 0, 0) \in C$ дает плоскую конику $\{(1, t, t^2)\}$, $t \in \mathbf{P}^1$.

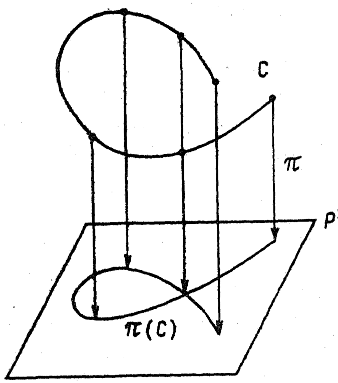


Рис. 16

Интуитивно ясно, что если p — гладкая точка X, то степень при проекции должна понижаться на единицу. В общем случае степень уменьшается на целое число $\mathrm{mult}_p X > 0$, называемое *кратностью* точки p на X. Интуитивно $\mathrm{mult}_p X$ — это кратность пересечения в точке p многообразия X с общим линейным многообразием дополнительной размерности, проходящим через p. Точный смысл этому можно придать, пользуясь универсальным линейным сечением и понятием локальной степени конечного морфизма из п. 5.8 главы 2. Имеет место (детали см. [56])

Предложение. Пусть неприводимое многообразие X не есть конус с вершиной в p и π — проекция из точки p. Тогда

$$\deg X = \mathrm{mult}_p X + \deg(\pi)\deg \pi(X).$$

2.5. Многочлен Гильберта. В принципе все проективные инварианты вложения $X \subset \mathbf{P}^n$ определяются конусом $C \subset K^{n+1}$, для которого $X = \mathbf{P}(C)$, или его координатным кольцом $R = K[C]$. Что при этом отвечает степени X?

Кольцо R обладает естественной градуировкой $R = \bigoplus_{k \geqslant 0} R_k$ как факторкольцо кольца многочленов $K[T_0, \ldots, T_n]$ по однородному идеалу $I(C)$. Простейшие инварианты, связанные с такой структурой, — размерности однородных компонент R_k как векторных пространств над K. Оказывается, что при больших k эти числа ведут себя достаточно регулярно.

Теорема (Гильберт). Существует многочлен $P_R \in \mathbf{Q}[T]$ степени $\leqslant n$, такой что для достаточно больших целых k

$$\dim R_k = P_R(k).$$

Аналогичное утверждение верно для любого градуированного $K[T_0, \ldots, T_n]$-модуля конечного типа и доказывается довольно просто индукцией по n [8], [41], [56], [63], [65]. Этот многочлен P_R (или P_X) называется *многочленом Гильберта* градуированного кольца R (или проективного многообразия X).

Пример. Пусть $R = K[T_0, \ldots, T_n]$. Тогда при $k \geqslant 0$ $\dim R_k =$ число мономов степени k от $T_0, \ldots, T_n = \binom{k+n}{n}$. Поэтому $P_{\mathbf{P}^n} = \frac{1}{n!}(T+n)\cdot\ldots\cdot(T+1) = \frac{T^n}{n!} + \ldots$.

Если $X \subset \mathbf{P}^n$ — гиперповерхность, задаваемая однородным многочленом F степени d, то при $k \geqslant d$

$$\dim (K[T_0, \ldots, T_n]/(F))_k = \binom{k+n}{n} - \binom{k+n-d}{n},$$

откуда $P_X = \frac{d}{(n-1)!} T^{n-1} + \ldots$.

В обоих случаях степень многочлена P_X совпадает с $\dim X$, а $\deg X$ входит в старший коэффициент P_X. Это не случайно.

Теорема. Пусть $X \subset \mathbf{P}^n$ — многообразие размерности r и степени d. Тогда $P_X = \frac{d}{r!} T^r + o(T^r)$.

Устанавливается это переходом к гиперплоскому сечению (см., например, [56] § 6В). Пользуясь тем, что $K[C \times C'] = K[C] \otimes K[C']$, отсюда можно еще раз получить формулу для степени линейного соединения, а тем самым и теорему Безу.

2.6. Арифметический род. Конечно, все коэффициенты многочлена P_X, а не только старший, являются проективными инвариантами $X \subset \mathbf{P}^n$ и допускают геометрическую интерпретацию (см. [20]). Однако наиболее важным из них является постоянный член P_X, т. е. $P_X(0)$. По историческим причинам чаще употребляется число

$$P_a(X)=(-1)^{\dim X}(P_X(0)-1),$$

которое называется *арифметическим родом* X. Оно всегда целое и зависит только от X, а не от вложения X в $\mathbf{P}^n$; это следует из когомологической интерпретации $P_X(0)$. На самом деле для гладкого многообразия над полем характеристики 0 арифметический род является даже бирациональным инвариантом [20], [41], [56].

Например, арифметический род $\mathbf{P}^n$ равен 0, как и род гиперповерхностей степени d в $\mathbf{P}^n$ при $d \leqslant n$. Род плоской кубической кривой равен 1, поэтому гладкая кубическая кривая нерациональна, что мы уже видели.

§ 3. Дивизоры

3.1. Дивизоры Картье. В предыдущих двух параграфах мы занимались геометрией на $\mathbf{P}^n$. Обратимся теперь к общим многообразиям и начнем с простейших его фигур, задаваемых (локально) одним уравнением.

Предположим, что X — гладкое многообразие, а Y — подмногообразие в X коразмерности 1. Как мы знаем из § 6 главы 2, локально Y задается одним уравнением. То есть существует открытое покрытие (U_i) многообразия X и регулярные функции g_i на U_i, такие что $Y \cap U_i$ (как подсхема U_i) задается уравнением $g_i=0$. На пересечениях $U_i \cap U_j$ функции g_i и g_j задают одну и ту же подсхему и поэтому g_i/g_j и g_j/g_i регулярны на $U_i \cap U_j$. Это приводит к общему

Определению. *Дивизором Картье* на многообразии X называется семейство (U_i, g_i), $i \in I$, где U_i — открытые в X, покрывающие X, а g_i — рациональные функции на U_i, такие что на пересечениях $U_i \cap U_0$ g_i/g_j регулярны. Функции g_i называются *локальными уравнениями* дивизора.

Точнее, дивизором Картье называется класс эквивалентности таких данных; два набора (U_i, g_i) и (U'_j, g'_j) эквивалентны, если объединение их снова дивизор. Дивизоры Картье можно складывать, перемножая локальные уравнения; они образуют группу, обозначаемую $\mathrm{Div}(X)$.

Пример 1. Если локальные уравнения g_i регулярны на U_i, то дивизор $\mathscr{D}$ называется *эффективным*, $\mathscr{D} \geqslant 0$. Подсхемы $[g_i=0]$ в U_i склеиваются в одну подсхему в X, которая также обозначается $\mathscr{D}$. Тем самым эффективные дивизоры Картье отождествляются с подсхемами в X, локально задаваемыми одним уравнением.

Пример 2. Ненулевая рациональная функция $f \in K(X)^*$ определяет дивизор Картье (X, f), который называется *глав-*

ным и обозначается $\operatorname{div}(f)$. Главные дивизоры образуют подгруппу в $\operatorname{Div}(X)$.

3.2. Дивизоры Вейля. *Носителем* дивизора Картье (U_i, g_i), $i \in I$, называется множество точек x, в которых локальные уравнения g_i обращаются в нуль или бесконечность. Это замкнутое подмножество коразмерности 1 позволяет более геометрично представить дивизор. Однако можно пойти дальше и приписать компонентам носителя некоторые кратности, отражающие кратность нуля или полюса локального уравнения.

Определение. *Дивизором Вейля* на X называется конечная целочисленная комбинация $\Sigma n_i F_i$, где F_i — неприводимые подмногообразия X коразмерности 1; группа таких дивизоров обозначается $\mathscr{Z}(X)$.

Таким образом, мы хотим сопоставить дивизору Картье $\mathscr{D}$ дивизор Вейля $[\mathscr{D}] = \Sigma \operatorname{ord}_F(\mathscr{D}) \cdot F$. Для этого надо определить порядок $\operatorname{ord}_F(\mathscr{D})$ дивизора $\mathscr{D}$ вдоль неприводимого $F \subset X$ коразмерности 1. Делается это в случае нормального X так. Пусть g — локальное уравнение $\mathscr{D}$ в общей точке F. Уменьшая X, можно считать, что идеал $I(F)$ — главный (§ 6 главы 2) и порождается функцией u_F. Поэтому $g = \alpha \cdot u_F{}^m$, где α обратимо вдоль F. Тогда $\operatorname{ord}_F(\mathscr{D}) = m$. Легко проверить, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора локального уравнения g, окрестности общей точки F и образующей u_F идеала $I(F)$. Получившийся гомоморфизм групп

$$\operatorname{Div}(X) \to \mathscr{Z}(X)$$

инъективен (для нормального X). В самом деле, на нормальном многообразии функция регулярна, если она регулярна вне подмножества коразмерности $\geqslant 2$ (см. § 7 главы 2). Если X локально факториально (например, гладкое), то группы $\operatorname{Div}(X)$ и $\mathscr{Z}(X)$ канонически изоморфны, и мы не будем делать различия между дивизорами Картье и Вейля. В общем случае они различны, однако дело даже не в этом. Дивизоры Картье контравариантны, тогда как дивизоры Вейля ковариантны. Дивизорам Вейля и их обобщениям на высшие коразмерности мы посвятим отдельный параграф, а пока продолжим изучение дивизоров Картье.

3.3. Дивизоры и обратимые пучки. Пусть $\mathscr{K}_X$ обозначает пучок рациональных функций на X; для открытого $U \subset X$ $\mathscr{K}_X(U) = K(U)$. Свяжем с дивизором Картье $\mathscr{D} = (U_i, g_i)_{i \in I}$ подпучок $\mathscr{O}_X(\mathscr{D})$ пучка $\mathscr{K}_X$; над U_i он равен $g_i^{-1}\mathscr{O}_{U_i}$. Так как на пересечениях $g_i^{-1}\mathscr{O}_{U_i}$ и $g_j^{-1}\mathscr{O}_{U_j}$ совпадают в силу обратимости g_i/g_j, эти пучки склеиваются в один пучок $\mathscr{O}_X(\mathscr{D}) \subset \mathscr{K}_X$. Например, $\mathscr{O}_X(0) = \mathscr{O}_X$ и $\mathscr{O}_X(\mathscr{D} + \mathscr{D}') = \mathscr{O}_X(\mathscr{D}) \cdot \mathscr{O}_X(\mathscr{D}')$.

Ненулевые сечения $\mathscr{O}_X(\mathscr{D})$ — это такие рациональные функции f на X, что функции $f \cdot g_i$ регулярны на U_i, т. е. дивизор

$\operatorname{div}(f)+\mathscr{D}$ эффективен. Если сам $\mathscr{D}$ эффективен, пучок $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})$ обладает каноническим сечением s_D, которое соответствует постоянной функции 1. Напротив, пучок $\mathcal{O}_X(-\mathscr{D})$ для эффективного $\mathscr{D}$ является пучком идеалов $\mathcal{O}_X$; задаваемая им подсхема в X и будет $\mathscr{D}$.

Пучки $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})$ обратимы; умножение на f_i задает изоморфизм $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}$. Сложению дивизоров соответствует тензорное произведение обратимых пучков. Это дает гомоморфизм

$$\delta : \operatorname{Div}(X) \to \operatorname{Pic}(X).$$

Ядро δ состоит из дивизоров $\mathscr{D}$, для которых пучок $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})$ изоморфен $\mathcal{O}_X$, т. е. из главных дивизоров. Гомоморфизм δ сюръективен. В самом деле, пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X и U — открытое плотное подмножество, такое что $\mathscr{L}|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$ Тогда этот изоморфизм продолжается до вложения $\mathscr{L} \hookrightarrow \mathscr{K}_X$ Этот факт специфичен для алгебраических многообразий; на комплексно-аналитических многообразиях дивизоров может оказаться существенно меньше, чем обратимых пучков (см. [15, гл. VIII]).

Сечения обратимых пучков задают дивизоры. Пусть $s \in H^0(X, \mathscr{L})$ — глобальное сечение обратимого пучка $\mathscr{L}$, не равное тождественно нулю на компонентах X. Выбрав тривиализации $\varphi_i : \mathscr{L}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}$ на покрытии (U_i), мы получаем эффективный дивизор $(U_i, \varphi_i(s_i))$, который обозначается $\operatorname{div}(s, \mathscr{L})$. Например, каноническое сечение s_D пучка $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})$ для эффективного $\mathscr{D}$ задает $\mathscr{D}$. Так мы получаем возможность задавать одним уравнением $s=0$ любой эффективный дивизор глобально, но за счет того, что s не функция, а сечение обратимого пучка. Если s' — другое ненулевое сечение $\mathscr{L}$, дивизоры $\operatorname{div}(s', \mathscr{L})$ и $\operatorname{div}(s, \mathscr{L})$ различаются на дивизор рациональной функции s'/s; говорят также, что они *линейно эквивалентны*. Подробнее об этом мы поговорим в следующем параграфе.

3.4. Функториальность. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм многообразий, $\mathscr{D}$ — дивизор на Y. Предположим, что никакая компонента $f(X)$ не содержится в носителе $\mathscr{D}$. Тогда на X определен дивизор $f^*(\mathscr{D})$, называемый *обратным образом* $\mathscr{D}$ при f. Делается это очевидным способом: если g_i — локальные уравнения $\mathscr{D}$ на покрытии V_i, то $f^*(\mathscr{D})$ задается уравнениями $f^*(g_i)$ (определенными и ненулевыми в силу $f(X) \not\subset \operatorname{supp} \mathscr{D}$) на покрытии $f^{-1}(V_i)$. В частности, если $f : X \to Y$ — доминатный, $f^*(\mathscr{D})$ определен для любого $\mathscr{D}$, и мы получаем гомоморфизм $f^* : \operatorname{Div}(Y) \to \operatorname{Div}(X)$, согласованный с обратным образом на группах Пикара Pic. Заметим, что на уровне Pic обратный образ всегда определен, и в этом еще одно из преимуществ обратимых пучков перед дивизорами.

3.5. Теорема о вырезании. При вычислении групп Пикара полезно следующее простое

Предложение. Пусть Y замкнуто в X и X факториально в точках из Y. Тогда точна последовательность.

$$\mathbf{Z}^k \to \operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(X-Y) \to 0,$$

где $\mathbf{Z}^k$ порождается неприводимыми компонентами Y, имеющими коразмерность 1 в X.

Пример 1. Группа Пикара $\mathbf{A}^n$ равна 0; это просто переформулировка факториальности кольца многочленов $K[T_1, \ldots, T_n]$. Позже мы дадим более геометрическое объяснение.

Пример 2. Найдем группу Пикара проективного пространства $\mathbf{P} = \mathbf{P}(V)$. Пусть H — гиперплоскость в $\mathbf{P}$; пользуясь тем, что $\mathbf{P} - H \simeq \mathbf{A}^n$, мы получаем, что группа $\operatorname{Pic}(\mathbf{P})$ порождается классом дивизора H. Гомоморфизм $\mathbf{Z} \to \operatorname{Pic}(\mathbf{P})$ инъективен. Это следует из теории степени или из общего замечания: на полном многообразии лишь нулевой дивизор может быть эффективным и главным. В самом деле, если $\operatorname{div}(g) \geqslant 0$, функция g регулярна, следовательно, постоянна.

Для любой гиперплоскости $H \subset \mathbf{P}$ обратимый пучок $\mathcal{O}_\mathbf{P}(H)$ изоморфен тавтологическому пучку $\mathcal{O}_\mathbf{P}(1)$ из § 7 главы 1. Сечения $\mathcal{O}_\mathbf{P}(H)$ имеют вид l/l_0, где $l \in V^*$, а $l_0 = 0$ — однородное уравнение гиперплоскости H. Сечения $\mathcal{O}_\mathbf{P}(1)$ отождествляются с V^*. Вообще, для любого $m \in \mathbf{Z}$

$$H^\circ(\mathbf{P}, \mathcal{O}_\mathbf{P}(m)) = \begin{cases} 0 & \text{при } m < 0, \\ \operatorname{Sym}^m(V^*) & \text{при } m \geqslant 0. \end{cases}$$

Как следствие этих вычислений мы снова получаем, что автоморфизмы $\mathbf{P}$ индуцируются автоморфизмами V. В самом деле, автоморфизм $\mathbf{P}$ индуцирует автоморфизм $\operatorname{Pic}(\mathbf{P}) \simeq \mathbf{Z}$. Поэтому образующая $\mathcal{O}_\mathbf{P}(1)$ переходит в $\mathcal{O}_\mathbf{P}(1)$ (ибо $\mathcal{O}_\mathbf{P}(-1)$ не имеет сечений), а гиперплоскости в гиперплоскости.

Пример 3. Аналогично легко показать, что группа Пикара произведения $\mathbf{P}(V) \times \mathbf{P}(W)$ изоморфна $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, а любой обратимый пучок на этом произведении имеет вид $\mathcal{O}(m_1, m_2) = p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)}(m_1) \otimes q^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(m_2)$. Пара целых чисел (m_1, m_2) называется *типом пучка*. Например, если $s: \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m \to \mathbf{P}^N$ — вложение Сегре, то $s^*\mathcal{O}(1)$ имеет тип $(1, 1)$. Диагональ на $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ тоже типа $(1, 1)$.

Пример 4. Многообразие Грассмана $G = G(k, n)$. Зафиксируем разложение $K^n = V \oplus W$, $\dim V = k$. Обозначим через Σ множество тех линейных пространств $L \in G$, для которых $L \cap W \neq (0)$. Дополнение к Σ в G — это «клетка» $U(V, W)$ (см. 3.4 главы 1), изоморфная $V^* \otimes W \simeq \mathbf{A}^{k(n-k)}$. Легко показать, что Σ бирационально изоморфно $\mathbf{P}(W) \times G(k-1, n-1)$, поэтому неприводимо и имеет коразмерность 1 в G. Из точной последовательности вырезания мы заключаем, что $\operatorname{Pic}(G)$ изоморфен $\mathbf{Z}$ и порождается классом Σ. Отметим, что $\mathcal{O}_G(\Sigma) \simeq p^*\mathcal{O}(1)$, где $p: G \to \mathbf{P}^N$ — вложение Плюккера.

3.6. Дивизоры на кривых. Конечно, вычислять группу Пикара при помощи вырезания можно только для простых многообразий вроде $\mathbf{P}^n$ или грассманианов. Для менее рациональных многообразий она устроена более сложно и может содержать «непрерывную» часть. Покажем это на примере эллиптической кривой. Пусть сначала C — полная гладкая неприводимая кривая; дивизор на C — это линейная комбинация точек $\Sigma n_i [x_i]$ с целыми n_i. *Степень* такого дивизора есть Σn_i. Из теоремы о постоянстве легко получить, что линейно эквивалентные дивизоры имеют одну степень. Поэтому гомоморфизм степени $\mathrm{Div}(C) \to \mathbf{Z}$ пропускается через $\mathrm{Pic}(C)$. Обозначим $\mathrm{Pic}^\circ(C)$ ядро $\mathrm{Pic}(C) \to \mathbf{Z}$ т. е. группу дивизоров степени 0 по модулю главных.

Пусть теперь C — гладкая кубика в $\mathbf{P}^2$. Зафиксируем на ней точку p и произвольной точке $x \in C$ сопоставим дивизор нулевой степени $[x]-[p]$. Получается отображение $\varphi: C \to \mathrm{Pic}^\circ(C)$. Мы утверждаем, что φ биективно; этот факт можно истолковывать двумя различными способами.

Во-первых, справа стоит группа $\mathrm{Pic}^\circ(C)$, поэтому и C снабжается структурой группы. Этот факт специфичен для кривой третьей степени, хотя в ослабленной форме проявляется и для кубических гиперповерхностей.

Во-вторых, слева стоит алгебраическое многообразие C, поэтому группа $\mathrm{Pic}^\circ(C)$ снабжается структурой алгебраического многообразия. Этот факт верен уже для любой кривой (по существу, с этого наблюдения и берет начало алгебраическая геометрия, см. исторический очерк в [15]) и приводит к понятию *якобиева многообразия* кривой. Размерность $\mathrm{Pic}^\circ(C)$ как алгебраического многообразия совпадает с родом кривой C (см. п. 7.3 главы 2), однако якобиан является гораздо более тонким инвариантом кривой, чем род (см. [55], [62]).

Вернемся, однако, к отображению $\varphi: C \to \mathrm{Pic}^\circ(C)$. Начнем с явного закона сложения точек C. Пусть $x, y \in C$; прямая $\overline{xy} \subset \mathbf{P}^2$ пересекает C в точках x, y и еще одной точке w. Теперь проведем прямую $\overline{pw}$ и пусть z — третья точка пересечения ее с C. Точка z и называется суммой x и y.

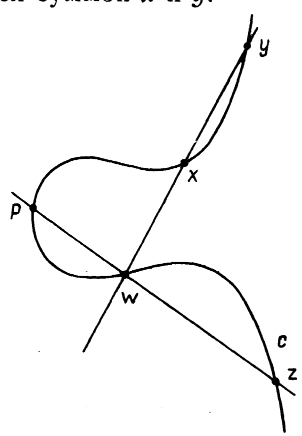


Рис. 17

Согласованность этой операции со сложением в $\mathrm{Pic}^0(C)$ видна из того, что дивизор $[x]+[y]+[w]$ линейно эквивалентен дивизору $[p]+[w]+[z]$, ибо оба они высекаются на C прямыми из $\mathbf{P}^2$. Поэтому $([x]-[p])+([y[-[p])\sim([z]-[p])$. Можно написать и явные формулы для операции сложения (см. [15, стр. 206]), откуда будет видна регулярность закона сложения.

Таким образом, $\varphi: C\to\mathrm{Pic}^0(C)$ — гомоморфизм групп, очевидно, сюръективный. Инъективность его следует из нерациональности C (§ 7 главы 2). В самом деле, если точки x и y переходят в одну, дивизор $[x]-[y]$ — главный и существует рациональная функция f на C с нулем в x и полюсом в y. Но тогда f задает изоморфизм $C \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1$.

Аналогично можно поступать и для особой кубики C, задавая групповой закон на множестве гладких точек $C-\mathrm{Sing}(C)$.

§ 4. Линейные системы дивизоров

4.1. Семейства дивизоров. В предыдущем параграфе дивизор рассматривался как индивидуальный объект. Теперь мы перейдем к «непрерывным» семействам дивизоров.

Определение. *Семейством дивизоров Картье* на многообразии X с базой S (где S тоже многообразие) называется дивизор Картье $\mathscr{D}$ на $X\times S$, носитель которого не содержит слоев проекции $X\times S\to S$.

Ограничивая $\mathscr{D}$ на каждый слой $X\times\{s\}$, мы получаем дивизор $\mathscr{D}_s$ на этом слое, или на X. Таким образом, $\mathscr{D}$ дает семейство $(\mathscr{D}_s)$, $s\in S$. Далее в основном нас будут интересовать эффективные семейства, когда $\mathscr{D}$ или все $\mathscr{D}_s$ эффективны.

С семействами дивизоров можно делать две вещи. Первая — ограничивать их на подмногообразие $Y\subset X$; это возможно, если Y не содержится в $\mathscr{D}_s$. Вторая — делать замену базы. Если $\varphi: T\to S$ — морфизм, то можно образовать индуцированное семейство $(\mathscr{D}_{\varphi(t)})$, $t\in T$, задающееся дивизором $(\mathrm{id}\times\varphi)^*\mathscr{D}$ на $X\times T$.

Пример. Вот наиболее важный и простой пример семейства дивизоров. Пусть V — векторное пространство, V^* — сопряженное к V. Пусть $\mathscr{H}\subset\mathbf{P}(V)\times\mathbf{P}(V^*)$ — дивизор нулей естественного спаривания $V\times V^*\to K$, $(v, l)\mapsto l(v)$. Для каждой точки $l\in\mathbf{P}(V^*)$ уравнение $l=0$ задает гиперплоскость H_l в $\mathbf{P}(V)$. Поэтому $\mathscr{H}$ — семейство гиперплоскостей на $\mathbf{P}(V)$, параметризованное точками $\mathbf{P}(V^*)$ (сравните с п. 1.2). Это семейство универсально в том смысле, что если $\mathscr{D}=(\mathscr{D}_s)$, $s\in S$, — любое семейство гиперплоскостей на $\mathbf{P}(V)$, то существует единственный морфизм $\varphi: S\to\mathbf{P}(V^*)$, такой что $\mathscr{D}=\varphi^*(\mathscr{H})$ (или $\mathscr{D}_s=H_{\varphi(s)}$). Впрочем, $\mathscr{H}$ можно рассматривать и как семейство гиперплоскостей на $\mathbf{P}(V^*)$, параметризованное $\mathbf{P}(V)$.

4.2. Линейные системы дивизоров. Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на неприводимом многообразии X. Как объяснялось в § 3, ненулевое сечение s пучка $\mathscr{L}$ дает эффективный дивизор $\operatorname{div}(s, \mathscr{L})$ на X. Если $V \subset H^0(X, \mathscr{L})$ — некоторое конечномерное подпространство сечений $\mathscr{L}$, то мы получаем «семейство» дивизоров $(\operatorname{div}(s, \mathscr{L}))$, $s \in V - \{0\}$. Так как при умножении s на константу $\operatorname{div}(s, \mathscr{L})$ не меняется, можно считать, что наше «семейство» параметризовано точками $\mathbf{P}(V)$.

Построенное семейство является таковым и в смысле п. 4.1. Укажем дивизор на $X \times \mathbf{P}(V)$, задающий это семейство. Для этого выберем базис $s_0, \ldots, s_n$ пространства V и зададим дивизор $\mathscr{D}$ уравнением $\sum_i s_i T_i = 0$, где $T_0, \ldots, T_n$ — однородные координаты на $\mathbf{P}(V)$. Такие семейства дивизоров называются *линейными системами*. Иначе говоря, линейная система в качестве базы имеет проективное пространство $\mathbf{P}^n$, но этого мало — она должна задаваться сечением обратимого пучка $\mathscr{L} \otimes q^* \mathcal{O}(1)$ на $X \times \mathbf{P}^n$.

Когда многообразие X полное, в качестве V можно взять все пространство $H^0(X, \mathscr{L})$ и получить так называемую *полную линейную систему*, которая обозначается $|\mathscr{L}|$ или $|\mathscr{D}|$, если $\mathscr{L} \cong \mathcal{O}(\mathscr{D})$. Любой эффективный дивизор, линейно эквивалентный $\mathscr{D}$, встречается в полной системе $|\mathscr{D}|$, причем один раз.

Приведенная в примере 4.1 система гиперплоскостей $\mathscr{H}$ является полной линейной системой как на $\mathbf{P}(V)$, так и на $\mathbf{P}(V^*)$. Если X — подмногообразие в $\mathbf{P}(V^*)$, то, ограничивая на X гиперплоскости, мы получим линейную систему на X. Оказывается, что в некотором смысле любая линейная система устроена так.

4.3. Свободные линейные системы. Пусть $\mathscr{D}$ — линейная система на X, соответствующая пространству $V \subset H^0(X, \mathscr{L})$. *Базисным множеством* (или подсхемой) называется пересечение $B(\mathscr{D}) = \bigcap_{s \in \mathbf{P}(V)} \mathscr{D}_s$ всех дивизоров из семейства $(\mathscr{D}_s)$, $s \in \mathbf{P}(V)$. Иначе говоря, точка x базисная, если $s(x) = 0$ для всех $s \in V$. Если базисное множество пусто, то говорят, что линейная система $\mathscr{D}$ *свободна*, или не имеет базисных точек; это эквивалентно тому, что V порождает $\mathscr{L}$. Например, система $|mH|$ на $\mathbf{P}$ свободна при $m \geqslant 0$.

Базисное множество $B(D)$ можно описать так же, как множество точек $x \in X$, для которых слой $\{x\} \times \mathbf{P}(V)$ содержится в дивизоре $D \subset X \times \mathbf{P}(V)$. Поэтому если $B(D)$ пусто, D можно понимать как семейство гиперплоскостей на $\mathbf{P}(V)$ с базой X. Но тогда оно индуцируется из универсального семейства $\mathscr{H} \subset \mathbf{P}(V) \times \mathbf{P}(V^*)$ при помощи морфизма $\varphi_D : X \to \mathbf{P}(V^*)$. Так получается

Предложение. Если линейная система $D = (D_s)$, $s \in \mathbf{P}(V)$, свободна, то существует единственный морфизм $\varphi_D : X \to \mathbf{P}(V^*)$, такой, что система (D_s) индуцирована гиперплоскостями на $\mathbf{P}(V^*)$.

В этом главный смысл линейных систем — они задают отображения в проективные пространства. Приведем еще одно описание $\varphi_{\mathscr{D}}$. Отождествляя слой $\mathscr{L}(x)$ с K, мы получаем линейное отображение $V \to K$, $s \mapsto s(x)$, т. е. точку V^*. Эта точка отлична от нуля в силу свободы $\mathscr{D}$ и определена с точностью до умножения на константу. Поэтому корректно определено отображение $X \to (V^* - \{0\})/K^* = \mathbf{P}(V^*)$, которое и есть $\varphi_{\mathscr{D}}$. Если $s_0, \ldots, s_n$ — базис V, то $\varphi_{\mathscr{D}}(x) = (s_0(x), \ldots, s_n(x))$.

Примеры. а) Полная линейная система $|mH|$ гиперповерхностей (а точнее, эффективных дивизоров) степени m на проективном пространстве $\mathbf{P}(V)$ параметризуется точками пространства $\mathbf{P}(\mathrm{Sym}^m V^*)$. Отображение $\varphi_{|mH|} : \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(\mathrm{Sym}^m V)$ есть не что иное, как отображение Веронезе (см. § 5 главы 1).

б) Вложение Сегре задается полной линейной системой дивизоров типа (1, 1) на $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$.

в) Вложение Плюккера $G(k, V) \to \mathbf{P}(\Lambda^k V)$ задается полной линейной системой $|\Sigma|$ (см. пример 4 из п. 3.5).

4.4. Обильные системы. Линейная система D называется *очень обильной*, если она свободна и задает вложение X в $\mathbf{P}^n$. Обратимый пучок L называется *очень обильным*, если такова полная линейная система $|L|$. Таким образом, очень обильная система состоит из всех гиперплоских сечений X при некотором вложении $X \subset \mathbf{P}^n$. Гиперплоскостей в каком-то смысле действительно много; во всяком случае, они разделяют точки (в том числе бесконечно близкие). Обратно, если линейная система $D = (D_s)$ разделяет точки, то φ_D вложение. В самом деле, $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ есть не что иное, как базисная подсхема линейной системы $D - x$ (т. е. подсистемы тех D_s, что $x \in D_s$), а она по предположению совпадает с $\{x\}$. Теперь можно применить п. 5.2 главы 2.

Дивизор D называется *обильным*, если при некотором $m > 0$ очень обильна система $|mD|$. Имеется численный критерий *обильности Накаи — Мойшезона*.

Теорема. Дивизор D на полном многообразии X обилен тогда и только тогда, когда для любого неприводимого подмногообразия $Y \subset X$ выполнено $(D^r \cdot Y) > 0$, где $r = \dim Y$.

Определение индексов пересечения $(D^r \cdot Y)$ будет дано в § 6; доказательство теоремы можно найти в [41], [45], [46]. В частности, на кривой дивизор обилен, если его степень положительна. На полной гладкой поверхности S дивизор D обилен, если $(D^2) > 0$ и для любой кривой $C \subset S$ $(D. C) > 0$.

4.5. Линейные системы и рациональные отображения. Даже если линейная система D имеет базисные точки, она задает отображение $X - B(D)$ в $\mathbf{P}(V^*)$, которое можно рассматривать как рациональное отображение X в $\mathbf{P}(V^*)$ (если, конечно, $B(D) \neq$

$\neq X$, т. е. система D непуста).

Пример 1. Пусть $D=|H-p|$ — линейная система гиперплоскостей в $\mathbf{P}^n$, проходящих через точку $p \in \mathbf{P}^n$. Отображение $\varphi_D : \mathbf{P}^n - \{p\} \to \mathbf{P}^{n-1}$ есть не что иное, как линейная проекция с центром в p.

Пример 2. Рассмотрим линейные системы коник на $\mathbf{P}^2$.

а) Пусть $D=|2H-a|$ — система коник, проходящих через точку a. Ее размерность равна 4 (всех коник — пятимерное семейство, прохождение через точку накладывает одно условие), поэтому φ_D отображает $\mathbf{P}^2 - \{a\}$ (или раздутие $\widetilde{\mathbf{P}}_a{}^2$) в $\mathbf{P}^4$. Легко понять, что это вложение и что степень образа равна $2 \cdot 2 - 1 = 3$. Это отображение можно понимать как композицию вложения Веронезе $v : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^5$ и линейной проекции $\mathbf{P}^5 \to \mathbf{P}^4$ с центром в точке $v(a)$. Это еще раз показывает, что многообразие секущих к $v(\mathbf{P}^2)$ отлично от $\mathbf{P}^5$ (см. п. 2.3).

б) Пусть $\mathscr{D}=|2H-a-b|$ — система коник, проходящи через точки a и b. Она отображает $\mathbf{P}^2 - \{a, b\}$ в $\mathbf{P}^3$, и в общем инъективно. В самом деле, если точка $x \in \mathbf{P}^2$ не лежит на прямой $\overline{ab}$, то базисное множество (подсхема) системы $|2H-a-b-x|$ есть $\{a, b, x\}$. Поэтому $\varphi_{\mathscr{D}}$ инъективно в точке x. Однако если точка x лежит на прямой $\overline{ab}$, то базисное множество системы $|2H-a-b-x|$ есть $\overline{ab}$, и вся эта прямая отображается в одну точку p. Легко понять, что образом $\varphi_{\mathscr{D}}$ будет гладкая квадрика в $\mathbf{P}^3$, и на ней лежат два трансверсальных друг другу семейства прямых, произошедших из пучков прямых $|H-a|$ и $|H-b|$ на $\mathbf{P}^2$. Можно показать, что обратное к $\varphi_{\mathscr{D}}$ отображение — это линейная проекция из точки p и что любая гладкая квадрика в $\mathbf{P}^3$ получается таким образом.

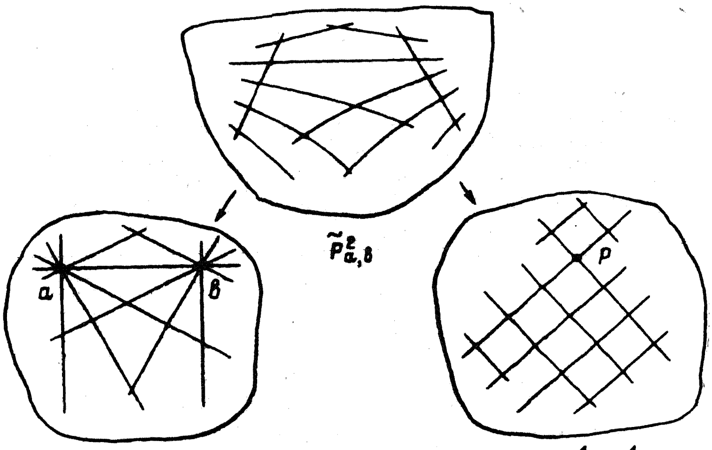


Рис. 18

в) Рассмотрим систему $|2H-a-b-c|$; размерность ее равна двум, а степень — единице. Поэтому она задает бирациональное отображение $\mathbf{P}^2$ в $\mathbf{P}^2$, неопределенное лишь в точках a, b и c.

Пример 3. Рассмотрим теперь системы кубик на $\mathbf{P}^2$. Размерность системы $|3H|$ всех кубик равна 9. Если взять систему $|3H-a_1-\ldots-a_6|$ кубик, проходящих через шестерку точек $a_1, \ldots, a_6$, находящихся в мало-мальски общем положении, она задает вложение $\widetilde{\mathbf{P}}^2_{a_1,\ldots,a_6}$ — раздутия $\mathbf{P}^2$ в этих точках — в $\mathbf{P}^3$ как поверхности 3-й степени. Более детальный анализ дает, что любая гладкая поверхность в $\mathbf{P}^3$ третьей степени получается таким образом.

Пусть C — кубическая кривая в $\mathbf{P}^2$; зафиксируем на ней восемь точек. Линейная система кубик, проходящих через эти точки, имеет размерность $9-8=1$; поэтому все эти кубики пересекаются еще в одной, девятой точке. Так мы приходим к классическому утверждению: если кубика C'' проходит через 8 точек пересечения кубик C и C', то она проходит и через девятую точку пересечения C и C'.

Следствие (теорема Паскаля). Пары противоположных сторон шестиугольника, вписанного в конику, пересекаются в трех коллинеарных точках.

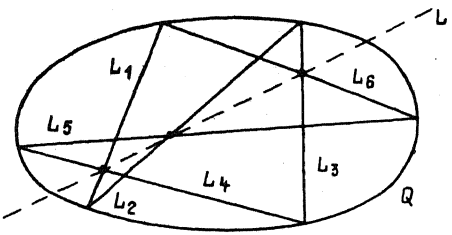


Рис. 19

В самом деле, пусть Q — коника, а $L_1, \ldots, L_6$ — стороны вписанного шестиугольника. Пусть $C=L_1+L_3+L_5$, $C'=L_2+L_4+L_6$ и $C''=Q+L$, где L — прямая, проходящая через точки p_{14} и p_{36}, где $p_{ij}=L_i \cap L_j$. Так как C'' проходит через 8 точек пересечения C и C', она проходит и через девятую точку p_{25}.

В качестве другого применения можно получить ассоциативность группового закона на кубике (см. п. 3.6). Многочисленные примеры линейных систем можно найти в [32, гл. 4 и 5.] Классический прием изучения алгебраических многообразий и их классификации состоит в использовании т. н. плюриканонических (рациональных) отображений $X \dashrightarrow \mathbf{P}^N$, заданных кратностями канонической линейной системы $|\omega_X^{\otimes n}|$ (см. [45]). Среди спектра возможных ситуаций приведем лишь крайние — многообразия общего типа (ω_X обилен) и многообразия Фано (ω_X^{-1} обилен).

4.6. Пучки. *Размерностью линейной системы* ($\mathscr{D}_s$), $s \in \mathbf{P}(V)$, называется размерность ее базы $\mathbf{P}(V)$. Линейная система размерности один называется *пучком* (pencil); она задается отображениями на $\mathbf{P}^1$. Слои этого отображения можно отождествить с дивизорами $\mathscr{D}_s$.

Пучками издавна пользовались, чтобы расслаивать многообразия на подмногообразия на единицу меньшей размерности и изучать их индуктивно. Простейший способ построения пучка на проективном многообразии $X \subset \mathbf{P}$ такой. Возьмем прямую l в двойственном пространстве $\mathbf{P}^*$; она и задает пучок гиперплоских сечений на X. Обычно стараются пучок выбрать так, чтобы его члены $X \cap H_s$, $s \in l$, были попроще.

Пусть, например, X — гладкое и $X^* \subset \mathbf{P}^*$ — многообразие, двойственное к X (см. § 1). Если прямая l не пересекает X^*, то все члены $X \cap H_s$ гладкие. Как мы знаем из § 1, такая идеальная ситуация бывает редко; как правило, X^* — гиперповерхность, l пересекает X^* и среди слоев пучка встречаются особые. Однако если прямая l трансверсально пересекает X^*, особенности $X \cap H_s$ будут простейшие (см. п. 1.3). Такие пучки называются *пучками Лефшеца* и издавна служат мощным средством индуктивного исследования многообразий (см. [27], [40]); можно сказать, что это аналог теории Морса.

4.7. Линейная и проективная нормальность. Пусть $X \subset \mathbf{P}$ — проективное многообразие. Ограничивая на X линейную систему $|mH| = |\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(m)|$, мы получаем на X линейную систему $L_X(m)$. Более точно, эта система задается образом гомоморфизма ограничения

$$H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(m)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(m)).$$

В общем случае этот гомоморфизм не сюръективный, т. е. система $L_X(m)$ не полна. Однако при больших m система $L_X(m)$ полна (см., например, [41], [53], [56]).

Заметим, что предложение п. 2.3 дает оценку сверху на размерность $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$: она не превосходит $\dim X + \deg X$. Аналогично можно оценить размерность $H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$, получив заодно другое доказательство конечномерности этого пространства.

Определение. Проективное многообразие $X \subset \mathbf{P}$ называется *линейно нормальным*, если система $L_X(1)$ полна.

Например, любая гиперповерхность в $\mathbf{P}^n$ ($n \geqslant 2$) линейно нормальна. Линейно нормальна и рациональная нормальная кривая $v_n(\mathbf{P}^1) \subset \mathbf{P}^n$ (она потому и называется нормальной). Проектируя многообразие в проективное пространство меньшей размерности, мы получаем линейно ненормальное многообразие. Таким образом линейная нормальность означает, что многообразие лежит в $\mathbf{P}$ наиболее свободным образом. Отвечая на вопрос Хартсхорна [42], Ф. Л. Зак [5] получил следующий факт:

Теорема. Пусть $X\subset\mathbf{P}^n$ — гладкое многообразие и $3\dim X>2(n-1)$. Тогда X линейно нормально.

Более сильное ограничение накладывает требование проективной нормальности. Пусть $X=\mathbf{P}(C)$, где C — конус в K^{n+1}. Многообразие X называется *проективно нормальным*, если конус C является нормальным многообразием (т. е. кольцо $K[C]$ нормально). Если многообразие X нормально, это эквивалентно полноте всех систем $L_X(m)$ (или линейной нормальности всех образов Веронезе $v_m(X)\subset\mathbf{P}_m^N$). Снова гладкая гиперповерхность в $\mathbf{P}^n$ проективно нормальна. Вот еще интересный

Пример. Пусть G — полупростая алгебраическая группа, V — неприводимое линейное представление группы G со старшим весом Λ, $v\in V$ — старший вектор. Тогда множество $Gv\cup\{0\}=C$ — замыкание орбиты старшего вектора — является конусом. В [2] показано, что конус C нормален, так что многообразие $\mathbf{P}(C)\subset\mathbf{P}(V)$ проективно нормально. В частности, проективно нормально многообразие Грассмана при вложении Плюккера.

§ 5. Алгебраические циклы

5.1. Определения. Перейдем теперь к фигурам коразмерности больше 1. Уже на примере дивизоров мы видели, что часто удобно иметь дело с подмногообразиями, снабженными «кратностями». Классики называли такие объекты виртуальными многообразиями; сейчас говорят об алгебраических циклах, подчеркивая аналогию с гомологиями.

Алгебраическим циклом размерности k (или k-циклом) на многообразии X называется конечная сумма $\alpha=\Sigma n_i[V_i]$, где $n_i\in\mathbf{Z}$, а V_i — неприводимые k-мерные подмногообразия в X. Цикл α *эффективен*, если все $n_i\geqslant 0$. *Носитель цикла* α — объединение V_i с ненулевыми n_i. Циклы можно складывать, и группа k-циклов на X обозначается $\mathscr{Z}_k(X)$.

Как правило, мы будем считать, что X неприводимо. Если $n=\dim X$, то группа $\mathscr{Z}_n(X)$ изоморфна $\mathbf{Z}$ и порождается $[X]$; $\mathscr{Z}_{n-1}(X)$ совпадает с группой $\mathscr{Z}(X)$ дивизоров Вейля.

5.2. Прямой образ цикла. Циклы — ковариантные объекты. Точнее, если $f: X\to Y$ собственный морфизм, то определен гомоморфизм прямого образа

$$f_*:\mathscr{Z}_k(X)\to\mathscr{Z}_k(Y).$$

По аддитивности, достаточно определить $f_*[V]$ для неприводимого k-мерного подмногообразия $V\subset X$. Если $\dim f(V)<k$, то $f_*[V]=0$. Если же $\dim f(V)=k$, то $f_*[V]=d\cdot[f(V)]$, где $d=[K(V):K(f(V))]$ — степень V над $f(V)$. Разумеется, если $g: Y\to Z$ также собственный, то $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$.

Напомним, что в п. 3.2 с каждым дивизором Картье $\mathscr{D}$ на нормальном n-мерном многообразии X был связан $(n-1)$-цикл $[\mathscr{D}]$. Теперь это можно сделать для любого многообразия X, полагая $[\mathscr{D}]=\pi_*[\pi^*(\mathscr{D})]$, где $\pi: X^H \to X$ — морфизм нормализации.

5.3. Рациональная эквивалентность циклов. Пусть S — гладкая неприводимая кривая. *Семейством k-циклов* на X с базой S называется $(k+1)$-цикл α на $X\times S$, носитель которого доминантно проектируется на S.

Такой цикл α на $X\times S$ называется семейством, потому что для каждой точки $s \in S$ он определяет k-цикл α_s на X (называемый *специализацией* α в точке s), который зависит от s «непрерывным образом». При определении специализации можно считать $\alpha=[V]$, где V — неприводимое подмногообразие в $X\times S$, доминирующее S. Рассмотрим точку $s \in S$ как дивизор Картье на S и положим $[V]_s=p_*[q^*(s)]$, где p и q — проекции V на X и S. Отметим, что если α эффективен, то специализации α_s тоже эффективны.

Циклы называются *алгебраически эквивалентными,* если они включаются в семейство циклов; если при этом базисная кривая S рациональна (обычно это $\mathbf{A}^1$ или $\mathbf{P}^1$), говорят, что циклы *рационально эквивалентны*. Легко убедиться, что рациональная эквивалентность $\sim$ действительно отношение эквивалентности и согласована со сложением в $\mathscr{Z}_k(X)$. Фактор-группа $\mathscr{Z}_k(X)/\sim$ называется *группой классов k-циклов* на X и обозначается $A_k(X)$.

Пример. Покажем, что $A_k(\mathbf{A}^n)=0$ при $k<n$ (ср. с примером 1 из п. 3.5). Пусть V — подмногообразие в $\mathbf{A}^n$ размерности $<n$. Сдвигая V, можно считать, что $0 \notin V$. Гомотетия $V_t=t^{-1}V$ при $t\to 0$ вытесняет V_t на бесконечность, так что $[V]\sim 0$.

Предложение. Гомоморфизм прямого образа согласуется с рациональной эквивалентностью и задает $f_*: A_k(X)\to A_k(Y)$.

В самом деле, пусть $f: X\to Y$ — собственный морфизм, и α-семейство циклов на X с базой S. Тогда $\beta=(f\times id)_*\alpha$-семейство циклов на Y с той же базой, и остается проверить, что $\beta_s=f_*(\alpha_s)$ для любой точки $s \in S$. Вспоминая определение специализации цикла, мы сводим все к так называемой формуле проекции.

Формула проекции. Пусть $g: V\to W$ — доминантный морфизм многообразий одной размерности, $\mathscr{D}$ — дивизор Картье на W. Тогда

$$g_*[g^*(\mathscr{D})]=\deg(g)\cdot[\mathscr{D}].$$

При доказательтве можно выбрасывать из W подмножества коразмерности $\geqslant 2$, поэтому g можно считать конечным. Нормализуя V и W, можно считать их нормальными и даже гладкими. Но тогда g локально свободный морфизм (см. предложение п. 6.6 главы 2) и формула проекции следует из принципа постоянства.

Степенью 0-цикла $\alpha=\Sigma n_i[x_i]$ называется целое число $\deg(\alpha)=\Sigma n_i$ (ср. с п. 3.6). Как следствие предыдущего предложения или из теоремы о постоянстве мы получаем, что на полном многообразии степень 0-цикла сохраняется при рациональной или алгебраической эквивалентности.

5.4. Теорема о вырезании. Пусть Y — подмногообразие в X. Тогда точна последовательность

$$A_k(Y)\xrightarrow{i_*}A_k(X)\xrightarrow{j^*}A_k(X-Y)\to 0,$$

где i — вложение $Y\subset X$, а j^* — ограничение цикла на $X-Y$.

Эта последовательность (ср. с п. 3.5) позволяет находить A_* для некоторых простых многообразий. Например, по индукции легко показать, что $A_k(\mathbf{P}^n)$ — свободная абелева группа, порожденная классом k-плоскости L^k. Нетривиальность $m[L^k]$ следует из теории степени.

Аналогично можно вычислять A_* для произведений проективных пространств, и, вообще, для многообразий, обладающих «клеточным разложением». Последнее означает наличие фильтрации

$$X=X_n\supset X_{n-1}\supset\ldots\supset X_0=\varnothing$$

замкнутыми подмножествами, причем каждое X_i-X_{i-1} представляет объединение нескольких экземпляров $\mathbf{A}^i$ («клеток»). Тогда $A_k(X)$ порождается замыканиями k-мерных клеток. Вот наиболее важный

Пример. Пусть $G=G(k, V)$ — многообразие Грассмана k-мерных векторных подпространств n-мерного пространства V. Для построения клеточного разложения G зафиксируем флаг подпространств $0=V_0\subset V_1\subset\ldots\subset V_n=V$, $\dim V_i=i$. Для каждой последовательности целых чисел $a=(a_1,\ldots,a_k)$, такой, что $n-k\geqslant a_1\geqslant\ldots\geqslant a_k\geqslant 0$, положим

$$W_a=\{L\in G,\ \dim(L\cap V_{n-k+i-a_i})=i\}.$$

Можно проверить, что W_a изоморфно аффинному пространству размерности $k(n-k)-(a_1+\ldots+a_k)$; его замыкание в G

$$\overline{W}_a=\{L\in G,\ \dim(L\cap V_{n-k+i-a_i})\geqslant i\}$$

называется *многообразием Шуберта* типа a. Клетки W_a покрывают G и $A_*(G)$ порождается (причем свободно) *циклами Шуберта* $\sigma_a=[\overline{W}_a]$ (см. [29], [32]).

Например, цикл $\overline{W}_{(1,0,\ldots,0)}$ имеет коразмерность 1 в G и состоит из тех L, для которых $L\cap V_{n-k}\neq 0$, так что это просто дивизор Σ из примера 4 § 3.

5.5. Пересечения циклов с дивизорами. Важнейшей структурой на циклах является операция пересечения с дивизорами и действие $\mathrm{Pic}(X)$ на $A_*(X)$. Пусть $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X, а $[V]$ — простой k-цикл на X. Ограничение $\mathscr{L}|_V$ пучка $\mathscr{L}$ на V является обратимым пучком на V и потому определяет класс дивизоров Вейля $[\mathscr{L}|_V]$ на V, который обозначается $\mathscr{L}\cap[V]$.

Продолжая по линейности, получаем билинейное действие

$$\cap : \mathrm{Pic}(X)\times\mathscr{Z}_k(X)\to A_{k-1}(X).$$

Для дивизора $\mathscr{D}$ на X мы пишем также $\mathscr{D}\cap[V]$ вместо $\mathcal{O}_X(\mathscr{D})\cap[V]$.

Более точно, если подмногообразие V не содержится в носителе $\mathscr{D}$, можно указать конкретный цикл $\mathscr{D}\cdot[V]=[\mathscr{D}|_V]$ в группе $\mathscr{Z}_{k-1}(V\cap\mathrm{supp}\,\mathscr{D})$. Если же $V\subset\mathrm{supp}\,\mathscr{D}$, $\mathscr{D}\cdot[V]$ определен лишь с точностью до рациональной эквивалентности.

Вот важнейшие свойства действия $\mathrm{Pic}(X)$ на циклы:

а) если $\alpha\sim 0$, то $\mathscr{L}\cap\alpha=0$; поэтому определено действие $\mathrm{Pic}(X)\times A_k(X)\to A_{k-1}(X)$;

б) если $f:X\to Y$ — собственный морфизм, а $\mathscr{L}\in\mathrm{Pic}(Y)$, то $f_*(f^*\mathscr{L}\cap\alpha)=\mathscr{L}\cap f_*(\alpha)$ (формула проекции);

в) $\mathscr{L}\cap(\mathscr{L}'\cap\alpha)=\mathscr{L}'\cap(\mathscr{L}\cap\alpha)$ для $\mathscr{L},\mathscr{L}'\in\mathrm{Pic}(X)$.

Главную роль при их выводе играет утверждение $\mathscr{D}\cdot[\mathscr{D}']=\mathscr{D}'\cdot[\mathscr{D}]$ для дивизоров $\mathscr{D},\mathscr{D}'$ на X. Эта формула непосредственно проверяется, когда $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ пересекаются просто, и очевидна при $\mathscr{D}=\mathscr{D}'$. Общий случай сводится к этим двум посредством раздутия $\mathscr{D}\cap\mathscr{D}'$ на X.

5.6. Классы Сегре векторных расслоений. Не только линейные, но и любые локально свободные векторные расслоения порождают серию операторов на $A_*(X)$. Пусть $p:E\to X$ — векторное расслоение ранга $e+1$, $q:\mathbf{P}_X(E)\to X$ — соответствующее проективное расслоение с тавтологическим пучком $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbf{P}_X(E)$. Морфизм q локально тривиальный со слоем $\mathbf{P}^e$, и можно определить гомоморфизм

$$q^*:A_k(X)\to A_{k+e}(\mathbf{P}_X(E)),$$

полагая $q^*[V]=[q^{-1}(V)]$ для подмногообразий $V\subset X$. Определим теперь для целого $i\geqslant -e$ операторы

$$s_i(E):A_k(X)\to A_{k-i}(X),$$

полагая $s_i(E)\cap\alpha=q_*(\mathcal{O}(1)^{e+i}\cap q^*(\alpha))$, где $\mathcal{O}(1)^{e+i}$ означает итерированное действие обратимого пучка $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbf{P}_X(E)$. Операторы $s_i(E)$ называются *классами Сегре* E. Подробнее об их свойствах и о построении на их основе классов Чжэня см. [29]; нам же понадобятся следующие простые замечания.

Из соображений размерности $s_i(E)=0$ при $i<0$; почти столь же очевидно, что $s_0(E)$ — тождественный оператор на $A_*(X)$. Делается это так. Надо проверить, что $s_0(E)\cap[V]=[V]$; ограничивая E на V, можно считать $X=V$. Заменяя X открытым подмножеством, можно считать расслоение E тривиальным. Остается заметить, что e-кратное пересечение гиперплоскости в $\mathbf{P}^e$ есть точка.

Следствие. Гомоморфизм $q^*: A_k(X) \to A_{k+e}(\mathbf{P}_X(E))$ инъективен.

5.7. Принцип расщепления. Этот принцип позволяет сводить вопросы о векторных расслоениях к линейным расслоениям. Из § 5 главы 1 мы знаем, что на $\mathbf{P}_X(E)$ существует точная последовательность векторных расслоений $0 \to S \to q^*E \to Q \to 0$. Поднимаясь на $P_{\mathbf{P}_X(E)}(Q)$, мы получаем линейное подрасслоение у Q и т. д. В конце концов мы получаем морфизм $f: X' \to X$ такой, что:

а) гомоморфизм $f^*: A_*X \to A_*X'$ инъективен (см. предыдущее следствие),

б) векторное расслоение f^*E обладает **флагом** подрасслоений $f^*E = E_{e+1} \supset E_e \supset \ldots \supset E_1 \supset E_0 = 0$ с линейными факторами E_i/E_{i-1}.

Теорема. Пусть $p: E \to X$ — векторное расслоение ранга $e+1$. Тогда гомоморфизм $p^*: A_k(X) \to A_{k+e+1}(E)$ биективен.

Инъективность p^* устанавливается в три шага. Если E — линейное расслоение, то пересечение $p^*(\alpha)$ с нулевым сечением (которое является дивизором на E) возвращает нас к α. Если E обладает флагом подрасслоений, рассуждаем по индукции. Наконец в общем случае используется принцип расщепления.

Установим теперь сюръективность p^*, т. е. что любой цикл $[V]$ на E эквивалентен $p^*(\alpha)$. Пользуясь вырезанием (и уменьшая, если надо, X), можно считать, что V не пересекается с некоторым сечением E. Тогда рассуждая как в случае $\mathbf{A}^n$ (см. п. 5.3), мы выталкиваем V на бесконечность.

Гомоморфизм, обратный к p^*, естественно трактовать как пересечение цикла β на E с нулевым сечением E; это частный случай гомоморфизма Гизина.

§ 6. Теория пересечений

6.1. Пересечение циклов. Пусть для простоты X — гладкое n-мерное многообразие, Y и Z — подмногообразия X. Как было показано в § 6 главы 2, $\dim(Y \cap Z) \geqslant \dim Y + \dim Z - n$. Если здесь равенство, т. е. многообразия Y и Z пересекаются правильно, теория пересечений приписывает каждой компоненте W пересечения $Y \cap Z$ некоторую кратность $i(W; Y, Z)$ и называет пересечением Y и Z цикл $Y \cdot Z = \sum_W i(W; Y, Z) \cdot [W]$. В общем случае, когда Y и Z пересекаются неправильно, предлагается «пошевелить» их, заменив рационально эквивалентными циклами Y' и Z', которые пересекаются уже правильно. В этом случае $Y \cdot Z$ определено уже как класс циклов. Такое пересечение превращает $A_*(X)$ в кольцо, называемое кольцом Чжоу.

До недавнего времени эти два шага делались отдельно и выглядели достаточно громоздко. Фултону в [29] удалось добиться замечательного упрощения в основах теории пересечения, и мы следуем ему в этом и предыдущем параграфах. Ключевая идея состоит в том, что многообразие X в «окрестности» своего подмногообразия Y устроено как нормальный конус $C_{Y/X}$ (§ 7 главы 1).

6.2. Деформация к нормальному конусу. Предположим сначала, что Y — точка, а X вложено в аффинное пространство $\mathbf{A}^n$ так, что Y помещается в начале координат. Для каждого $t \in K^*$ положим $X_t = t^{-1} \cdot X$, т. е. X_t получено в результате растяжения X в t^{-1} раз. Так получается семейство подмногообразий X_t, $t \in K - \{0\}$. Оказывается, что при $t \to 0$ это семейство имеет предел X_0, который есть в точности касательный конус $C_0 X$.

Эта конструкция может быть глобализована и в результате дает семейство вложений $(Y_t \subset X_t)$, $t \in \mathbf{A}^1$, такое что при $t \neq 0$ пара (Y_t, X_t), изоморфна (Y, X), а при $t=0$ изоморфна вложению нулевого сечения в нормальный конус $C_{Y/X}$. Делается это крайне просто.

Пусть $X \times \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1$ — тривиальное семейство и $\widetilde{X \times \mathbf{A}^1}$ — раздутие $X \times \mathbf{A}^1$ вдоль подмногообразия $Y \times \{0\}$. Слой $\widetilde{X \times \mathbf{A}^1}$ над $t=0$ состоит из двух компонент: $\widetilde{X}$ — раздутия X вдоль Y и замыкания нормального конуса $\overline{C}_{Y/X}$. Положим теперь $\mathscr{X} = \widetilde{X * \mathbf{A}^1} - \widetilde{X}$ и пусть $\rho : \mathscr{X} \to \mathbf{A}^1$ — проекция на $\mathbf{A}^1$. Слои ρ над $t \neq 0$ изоморфны X, в то время как слой $\mathscr{X}_0 \simeq C_{Y/X}$. Подмногообразие Y вкладывается в каждый слой $\mathscr{X}_t$, причем вложение Y в $\mathscr{X}_0 = C_{Y/X}$ есть вложение нулевого сечения (см. рис. 20).

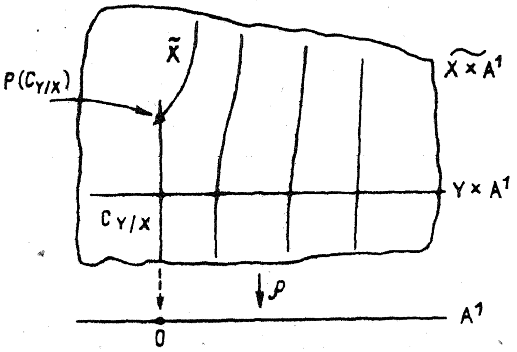


Рис. 20

Вообще, пусть V — подмногообразие в X; проделывая с парой $(V, V\cap Y)$ ту же операцию, мы получаем подмногообразие $\mathscr{V}\subset\mathscr{X}$; если угодно, это замыкание $V\times(\mathbf{A}^1-\{0\})$ в $\mathscr{X}$. Пусть $\rho_V:\mathscr{V}\to\mathbf{A}^1$ — индуцированный морфизм; слой ρ_V над 0 изоморфен $C_{V\cap Y/V}$. Для нас важно, что его можно понимать как цикл $[\rho_V^*(0)]$ на $\mathscr{X}_0\cap\mathscr{V}$; этот цикл называется *специализацией* V в нормальный конус $C_{Y/X}$ и обозначается $\sigma[V]$. Отметим, что $\sigma[V]$ — эффективный цикл.

Продолжая по линейности, мы получаем гомоморфизм специализации $\sigma: Z_k(X)\to Z_k(C_{Y/X})$. Специализация согласована с рациональной эквивалентностью и дает $\sigma: A_k(X)\to A_k(C_{Y/X})$.

6.3. Гомоморфизм Гизина. Предположим теперь, что Y — гладкое подмногообразие гладкого многообразия X. Тогда расслоение нормальных конусов $C_{Y/X}$ превращается в нормальное расслоение $N=N_{Y/X}$. Вспоминая изоморфизм $p^*: A_k(Y)\to A_{k+r}(N)$ п. 5.7, где r — коразмерность Y в X, мы можем определить гомоморфизм

$$A_k(\mathrm{X})\xrightarrow{\sigma}A_k(N_{Y/X})\xrightarrow{(p^*)^{-1}}A_{k-r}(Y).$$

Он называется *гомоморфизмом Гизина* вложения $i: Y\to X$ и обозначается $i^*: A_k(X)\to A_{k-r}(Y)$; его действие интерпретируется как пересечение цикла на X с Y.

Отметим, что, хотя цикл $\sigma[V]$ эффективен на N, его пересечение с нулевым сечением N может оказаться неэффективным (см. доказательство теоремы п. 5.7). Однако если V правильно пересекает Y, пересечение $Y\cdot[V]$ определено как эффективный цикл на $Y\cap V$. Это значит, что $Y\cdot[V]$ имеет вид $\Sigma m_W[W]$, где W пробегает неприводимые компоненты $Y\cap V$. Целые положительные числа m_W и называются *кратностями пересечения* Y и V вдоль W.

6.4. Кольцо Чжоу. Перейдем теперь к пересечению произвольных циклов, но на гладком n-мерном многообразии X; мы ограничимся пересечением двух циклов α и β. Здесь снова используется редукция к диагонали. Пусть $\delta: X\to X\times X$ — диагональное вложение, и диагональ гладкая на гладком $X\times X$. Поэтому определен гомоморфизм Гизина δ^*, и можно положить $\alpha\cdot\beta=\delta^*(\alpha\times\beta)$.

Здесь удобно перейти к коразмерностям, положив $A^p=A_{n-p}$ и $A^*(X)=\bigoplus\limits_p A^p(X)$. При пересечении циклов коразмерности складываются, и $A^*(X)$ является градуированым коммутативным ассоциативным кольцом, называемым *кольцом Чжоу*. В каком-то смысле оно аналогично кольцу когомологий и обладает похожими функциональными свойствами.

Пусть $f: X\to Y$ — морфизм гладких многообразий. Для класса циклов $\alpha\in A^p(Y)$ можно пересечь $X\times\alpha$ с графиком f в $X\times Y$;

полученный класс циклов $f^*(\alpha)\in A^p(X)$ называется *обратным образом* α при f. Обратный образ коммутирует с пересечениями, т. е. является гомоморфизмом градуированных колец

$$f^* : A^*(Y) \to A^*(X).$$

Формула проекции связывает f^* с f_*: если f — собственный, **то** $f_*(f^*(\alpha)\cdot\beta)=\alpha\cdot f(\beta)$. В частности, если многообразие X полное и гладкое, а циклы α и β имеют дополнительную размерность, то степень 0-цикла $\alpha\cdot\beta$ называется *индексом пересечения* α и β на X и обозначается $(\alpha\cdot\beta)_X$ или $(\alpha\cdot\beta)$.

Важный частный случай представляют пересечения дивизоров. Если n эффективных дивизоров $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ на X имеют точку P изолированной точкой $\mathcal{D}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{D}_n$, то кратность пересечения $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ в P равна $\dim \mathcal{O}_{X,P}/(f_1, \ldots, f_n)$, где f_i — локальные уравнения $\mathcal{D}_i$ в точке P. Надо сказать, что пересечение n дивизоров можно определить на любом (не обязательно главном) многообразии X как пересечение диагонали в X^n с произведением $\mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$. В самом деле, $\Pi\mathcal{D}_i$ — локально полное пересечение в X^n и нормальный конус снова будет нормальным расслоением, так что можно рассуждать как в п. 6.3. Заметим, впрочем, что если X не обладает свойством Коэна—Маколея, кратность пересечения $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ в точке P уже отличается от размерности $\mathcal{O}_{X,P}/(f_1, \ldots, f_n)$.

Приведем два примера вычисления кольца Чжоу.

6.5. Кольцо Чжоу проективного пространства. *Степенью* k-цикла α на $\mathbf{P}^n$ назовем индекс пересечения его с $[H]^k$; это определение согласуется с определением степени § 2. Из п. 5.4 видно, что $\alpha \sim \deg(\alpha)[L^k]$, так что кольцо Чжоу $A^*(\mathbf{P}^n)$ изоморфно $\mathbf{Z}[\zeta]/(\zeta^{n+1})$, где $\zeta\in\mathbf{A}^1(\mathbf{P}^n)$ — класс гиперплоскости $[H]$. В частности, мы получаем общую формулировку *теоремы Безу*: если $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — циклы коразмерности $p_1, \ldots, p_r$ и $\Sigma p_i \leqslant n$, то

$$\deg(\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_r) = \deg(\alpha_1) \cdot \ldots \cdot \deg(\alpha_r).$$

Аналогично легко показать, что

$$A^*(\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m) = \mathbf{Z}[\zeta, \xi]/(\zeta^{n+1}, \xi^{m+1}),$$

где ζ, ξ — классы гиперплоскости в $\mathbf{P}^n$ и $\mathbf{P}^m$. Например, диагональ Δ в $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ записывается как $\zeta^n + \zeta^{n-1}\xi + \ldots + \xi^n$, откуда $(\Delta.\Delta) = n+1$. Или пусть $I \subset \mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^{n*}$ — дивизор инциденции, $I = \{(x, H), x\in H\}$. Тогда в кольце Чжоу на $\mathbf{P} \times \mathbf{P}^*$ мы имеем $[I] \sim \zeta + \xi$, так что $(I^{2n}) = \binom{2n}{n}$.

Вычисления колец Чжоу проективизированных расслоений и раздутий гладких многообразий см. в [9], [29].

6.6. Кольцо Чжоу грассманиана. Пусть $G = G(k, n)$ — многообразие Грассмана. Как показано в п. 5.4, $A^*(G)$ порождается классами циклов Шуберта σ_a. Имеются изящные формулы умножения циклов σ_a (см. [29], [32], [43]). В частности, σ_a полиномиально выражаются через циклы $\sigma_{(a, 0, \ldots, 0)}$, которые называются специальными. Мы приведем здесь лишь простейшую формулу пересечения циклов дополнительной размерности. Для набора $a=(a_1, \ldots, a_k)$, как в п. 5.4, обозначим через a^* набор $(n-k-a_k, \ldots, n-k-a_1)$. Тогда цикл σ_{a^*} имеет дополнительную к σ_a размерность, и для двух циклов дополнительной размерности имеем $(\sigma_a, \sigma_b)=\delta_{a,b^*}$.

Остановимся подробнее на простейшем грассманиане $G(2,4)$ — грассманиане прямых в $\mathbf{P}^3$. Здесь есть такие циклы Шуберта:

$\sigma_{1,0}=\sigma_{1,0}(L)=\{l,\ l\cap L\neq\varnothing\}$ состоит из прямых, пересекающих фиксированную прямую L; $\dim \sigma_{1,0}=3$.

$\sigma_{2,0}=\sigma_{2,0}(P)=\{l,\ P\in l\}$ состоит из прямых, проходящих через фиксированную точку P, $\dim \sigma_{2,0}=2$.

$\sigma_{1,1}=\sigma_{1,1}(H)=\{l,\ l\subset H\}$ состоит из прямых, лежащих в фиксированной плоскости H; $\dim \sigma_{1,1}=2$.

$\sigma_{2,1}=\sigma_{2,1}(P, H)=\{l,\ P\in l\subset H\}$ состоит из прямых, лежащих в плоскости H и проходящих через точку $P\in H$; $\dim \sigma_{2,1}=1$.

Пересечения находятся тут легко. Например, если плоскости H и H' различны, циклы $\sigma_{1,1}(H)$ и $\sigma_{1,1}(H')$ трансверсально пересекаются в одной точке — прямой $H\cap H'$, и поэтому $(\sigma_{1,1}^2)=1$. Аналогично $(\sigma_{2,0}^2)=1$ и $(\sigma_{2,0}, \sigma_{1,1})=0$. Найдем теперь $\sigma_{1,0}^2$. Для этого возьмем две прямые L и L', пересекающиеся в точке P. Тогда $\sigma_{1,0}(L)\cap\sigma_{1,0}(L')$ состоит из прямых l, пересекающих как L, так и L'. Такая прямая либо лежит в плоскости $\widetilde{LL'}$, либо проходит через точку P. Поэтому $\sigma_{1,0}^2=\sigma_{2,0}+\sigma_{1,1}$ и $(\sigma_{1,0}^4)=2$. Последнее видно также из того, что G — квадрика в $\mathbf{P}^5$ (см. п. 5.7 главы 1), а $\sigma_{1,0}=\Sigma$ — гиперплоское сечение G.

6.7. Пересечения на поверхностях. Пусть S — гладкая проективная поверхность. Индекс пересечения $A^1(S)\times A^1(S)\to\mathbf{Z}$ является симметричным билинейным спариванием на $A^1(S)$.

Пусть H — класс гиперплоского сечения S; тогда $(H\cdot H)=(H^2)>0$. Если кривая C на S достаточно подвижна (т. е. существует эффективный цикл $C'\sim C$, правильно пересекающий C), то $(C^2)\geqslant 0$. Однако бывают и такие кривые C, для которых $(C^2)<0$. Такими являются, например, исключительные кривые раздутий. Скажем об этом подробнее.

Пусть $\sigma\colon\tilde{S}\to S$ — раздутие поверхности S в точке $p\in S$. Мы знаем, что $\tilde{S}$ — снова гладкая поверхность, и что кривая $E=\sigma^{-1}(p)$ изоморфна $\mathbf{P}^1$. Найдем индекс самопересечения $(E^2)_{\tilde{S}}$. Для этого возьмем кривую $C\subset S$, проходящую через p и гладкую в p. Ясно, что $\sigma^*(C)=\tilde{C}+E$, где $\tilde{C}$ — собственный прообраз C (т. е. замыкание в $\tilde{S}$ кривой $\sigma^{-1}(C-\{p\})$). Кривая $\tilde{C}$ трансверсально пересекает E в одной точке (соответствующей касательному направлению $T_pC \subset T_pS$). Так как $\sigma_*(E)=0$, по формуле проекции получаем

$$0=(\sigma_*(E)\,C)_S=(E\sigma^*(C))_{\tilde{S}}=(E^2)_{\tilde{S}}+(E\tilde{C})_{\tilde{S}},$$

откуда $(E^2)=-1$. В частности, кривую E (или ее кратность) нельзя пошевелить в эффективную кривую на $\tilde{S}$, почему она и называется исключительной. Попутно получаем, что $(\tilde{C}^2)_{\tilde{S}}=(C^2)_S-1$, так, что при раздутии точки на кривой ее индекс самопересечения уменьшается на единицу (если раздувается гладкая точка на C; в общем случае он уменьшается на $\mathrm{mult}_p C$). Поэтому любую кривую можно сделать исключительной, раздувая на ней достаточно много точек.

Можно показать, что если E — кривая на поверхности S', изоморфная $\mathbf{P}^1$ и $(E^2)=-1$, то E можно стянуть в гладкую точку (теорема Кастельнуово). Точнее, существует поверхность S, гладкая точка p на ней и изоморфизм S' с $\tilde{S}$ — раздутием S в точке p, такой, что $E\simeq\sigma^{-1}(p)$. Например, раздувая две точки на прямой L в $\mathbf{P}^2$, мы получаем кривую $\tilde{L}$ в $\tilde{\mathbf{P}}_{xy}$ с индексом самопересечения -1. Стягивая $\tilde{L}$ в точку p, мы получаем поверхность S, изоморфную квадрике $Q\subset\mathbf{P}^3$. Построенное отображение $\mathbf{P}^2 \dashrightarrow Q$ обратно к линейной проекции $Q \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ из точки $p\in Q$.

Наиболее глубоким фактом о пересечениях на поверхностях является *теорема Ходжа об индексе*. Пусть $\mathcal{D}$ — дивизор на S, имеющий нулевой индекс пересечения с гиперплоским сечением S. Тогда $(\mathcal{D},\mathcal{D})\leqslant 0$, причем если $(\mathcal{D},\mathcal{D})=0$, то $\mathcal{D}$ принадлежит ядру спаривания. Доказательство можно найти в [32], [41], [45], [53]. Различные следствия этой теоремы, включая доказательство гипотезы А. Вейля для кривых, можно найти в любом курсе, посвященном алгебраическим поверхностям; см. также обзор о когомологиях в 37 томе серии.

§ 7. Многообразие Чжоу

7.1. Циклы на $\mathbf{P}^n$. Мы покажем в этом параграфе, что эффективные циклы на $\mathbf{P}^n$ фиксированной размерности и степени параметризуются точками некоторого алгебраического многообразия. Мы уже видели это для многообразий степени 1, которые по определению параметризуются многообразиями Грассмана. По существу, мы видели это для циклов коразмерности 1, которые параметризуются полными линейными системами. Скажем об этом подробнее.

Эффективные дивизоры степени m на проективном пространстве $\mathbf{P}(V)$ образуют линейную систему $S_m=|mH|$, параметризованную точками проективного пространства $\mathbf{P}(\mathrm{Sym}^m V^*)$. Соответствующий дивизор $S_m\subset\mathbf{P}(V)\times\mathbf{P}(\mathrm{Sym}^m V^*)$ задается как дивизор нулей функции $\Phi: V\times \mathrm{Sym}^m V^* \to K$, которая точке $v\in V$ и форме $F\in \mathrm{Sym}^m V^*$ сопоставляет $F(V)$. Эта система универсальна в том смысле, что для любого семейства эффективных дивизоров $(\mathscr{D}_t)$, $t\in T$, на $\mathbf{P}(V)$ степени m существует единственный морфизм $\varphi: T\to \mathbf{P}(\mathrm{Sym}^m V^*)$, такой что $\mathscr{D}_t=(S_m)\varphi(t)$. Конечно, «общий» дивизор из нашей системы будет простой и даже гладкий, однако при $m\geqslant 2$ будут встречаться и дивизоры с кратными компонентами.

Пример 1. Дивизоры степени 2 на прямой $\mathbf{P}^1$ параметризуются точками плоскости $\mathbf{P}^2$. В координатах T_0, T_1 на $\mathbf{P}^1$ форма степени 2 имеет вид $aT_0^2+bT_0T_1+cT_1^2$, и a, b и c надо понимать как однородные координаты на $\mathbf{P}^2$. Слившиеся (двойные) точки соответствуют формам с нулевым дискриминантом b^2-4ac; такие точки в $\mathbf{P}^2$ образуют кривую C второй степени, двойственную к кривой Веронезе. Универсальное семейство $S_2\to\mathbf{P}^2$ — двулистное накрытие с ветвлением над кривой C. Несложно убедиться, что $S_2=\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ и что над C лежит ровно диагональ.

Отметим, что в характеристике 2 уравнение кривой C приобретает вид $b^2=0$ и поэтому она является двойной прямой. Это имеет два геометрических следствия. Во-первых, все касательные к конике пересекаются в одной точке. Во-вторых, существует этальное накрытие аффинной плоскости $(\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1-\Delta)\to(\mathbf{P}^2-C)=\mathbf{A}^2$ (сравни с примером из п. 1.3).

Пример 2. Дивизоры третьей степени на $\mathbf{P}^1$ параметризуются пространством $\mathbf{P}^3$ форм $aT_0^3+bT_0^2T_1+cT_0T_1^2+dT_1^3$. Накрытие третьей степени $S_3\to\mathbf{P}^3$ ветвится над поверхностью $W\subset\mathbf{P}^3$, отвечающей дивизорам вида $2P+Q$. Явное уравнение для W такое: $b^2c^2-4ac^3-4b^3d-27a^2d^2+18abcd=0$, откуда $\deg W=4$. Дивизоры вида $3P$ образуют кривую $C\subset W$ степени 3. Можно показать, что W заметается касательными к C.

Пример 3. Дивизоры степени 2 на плоскости $\mathbf{P}^2$, т. е. плоские коники. Они параметризуются точками $\mathbf{P}^5$. Вырожденные коники — это пары прямых, они параметризуются некоторым 4-мерным подмногообразием $W\subset\mathbf{P}^5$. В самом деле, W — это фактормногообразие $\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^2$ по действию группы второго порядка, переставляющей сомножители, ибо пары прямых неразличимы между собой. Найдем степень W. Для этого возьмем «общий» пучок коник $\overline{QQ'}\subset\mathbf{P}^5$. Коники Q и Q' пересекаются в четырех точках p, q, r и s, и пучок $\overline{QQ'}$ состоит из коник, проходящих через эти четыре точки. Степень W — это число вырожденных коник в этом пучке. Но их ровно три: $\overline{pq}+\overline{rs}$, $\overline{pr}+\overline{qs}$ и $\overline{ps}+\overline{qr}$. Поэтому $\deg W=3$.

Приведенные коники, т. е. двойные прямые в $\mathbf{P}^2$, параметризуются поверхностью Веронезе $S\subset\mathbf{P}^5$; конечно, $S\subset W$. Более того, как легко видеть, любая хорда к S также целиком лежит в W. Это согласуется с примером 2 из п. 2.3.

7.2. От циклов к дивизорам. Перейдем теперь к циклам на $\mathbf{P}^n$, степень и коразмерность которых больше 1. Оказывается, их можно превращать в дивизоры на многообразии Грассмана и последние можно параметризовать подмножеством соответствующей полной линейной системы.

Пусть $G=G(k, n+1)$ — многообразие Грассмана, состоящее из $(k-1)$-мерных линейных подмногообразий в $\mathbf{P}^n$, обозначаемых L. Обозначим через $\Psi=\{(x, L), x\in L\}$ множество инциденций в $\mathbf{P}^n\times G$. Мы будем понимать Ψ как соответствие из $\mathbf{P}^n$ в G, которое точке $x\in\mathbf{P}^n$ сопоставляет множество $\Psi(x)=\{L, x\in L\}\cong G(k-1, n)$. В частности, любому подмножеству $Z\subset\mathbf{P}^n$ можно сопоставить множество

$$\Psi(Z)=\bigcup_{x\in Z}\Psi(x)=\{L\in G, L\cap Z\neq\varnothing\}.$$

$\Psi(Z)$ замкнуто, если замкнуто Z, неприводимо, если таково Z, и коразмерность его в G равна 1, если $\operatorname{codim}(Z, \mathbf{P}^n)=k$. Заметим, наконец, что и «степень» $\Psi(Z)$ в G равна $d=\deg Z$. Под «степенью» мы понимаем здесь индекс пересечения $\Psi(Z)$ с 1-мерным циклом Шуберта $\sigma=\sigma_{(n+1-k, \ldots, n-k)}$; в этом случае $\Psi(Z)$ линейно эквивалентен $d[\Sigma]$ (см. п. 6.6). В самом деле, пусть M — k-мерное линейное многообразие в $\mathbf{P}^n$, трансверсально пересекающее Z в $\deg Z$ точках. Если теперь σ — пучок подпространств $L\subset M$, то ровно $\deg Z$ из них пересекается с Z и поэтому $(\Psi(Z)\sigma)_G=d$.

Продолжая по линейности, мы получаем отображение

$$\Psi\colon \mathscr{Z}_+^r(\mathbf{P}^n)\to \operatorname{Div}_+(G),$$

сохраняющее степень. Мы утверждаем, что Ψ инъективно, т. е. Z восстанавливается по дивизору $\Psi(Z)$. Для этого есть явная формула: $Z=\{x\in\mathbf{P}^n, \Psi(x)\subset\Psi(Z)\}$. Включение $\subset$ очевидно, а включение $\supset$ следует из того, что для каждой точки $x\notin Z$ существует $L\in G$, содержащее x и не пересекающее Z.

7.3. От дивизоров к циклам. Нам осталось описать образ u и показать, что он замкнут в пространстве $\mathbf{P}(H^0(G, \mathcal{O}_G(d)))$, параметризующем все эффективные дивизоры на G степени d. Для этого мы с любым эффективным дивизором $\mathscr{D}\subset G$ свяжем множество $Z_{\mathscr{D}}=\{x\in\mathbf{P}^n, \mathrm{u}(x)\subset\mathscr{D}\}$. Мы утверждаем, что оно замкнуто в $\mathbf{P}^n$. Для этого мы рассмотрим в $\mathbf{P}^n\times G$ многообразие $\Phi=\mathrm{u}\cap(\mathbf{P}^n\times\mathscr{D})$. Слой Φ над точкой $x\in\mathbf{P}^n$ изоморфен $\mathrm{u}(x)\cap\mathscr{D}$, и размерность его $\leqslant\dim\mathrm{u}(x)=(k-1)(n+1-k)$, причем равна $\dim\mathrm{u}(x)$ в точности тогда, когда $\mathrm{u}(x)\subset\mathscr{D}$. По теореме о размерности слоев, примененной к морфизму $\Phi\to\mathbf{P}^n$, мы получаем замкнутость $Z_{\mathscr{D}}=\{x, \dim\Phi(x)\geqslant(k-1)(n+1-k)\}$.

Ясно, что $\mathcal{D}\supset\Psi(Z_{\mathcal{D}})$, и $\mathcal{D}$ принадлежит образу Ψ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}=\Psi(Z_{\mathcal{D}})$, ибо в этом случае $Z_{\mathcal{D}}$ имеет коразмерность k. Так как условие принадлежности образу Ψ носит характер совпадения двух соответствий, это условие выделяет замкнутое подмножество в пространстве всех дивизоров. Детали мы опускаем. Полученное многообразие S_d^k, параметризующее циклы степени d и коразмерности k в $\mathbf{P}^n$, называется *многообразием Чжоу*. Вычисление его в некоторых простейших случаях приведено в [15].

7.4. Циклы на произвольных многообразиях. Предыдущая конструкция позволяет дать параметризацию эффективных циклов на любом проективном многообразии $X\subset\mathbf{P}^n$. В самом деле, k-мерный цикл Z на X можно рассматривать как цикл на $\mathbf{P}^n$. Обратно, если $Z\subset X$, его можно рассматривать как цикл на X. Условие $Z\subset X$ можно переписать как $\dim(Z\cap X)\geqslant k$, поэтому циклы, лежащие в X, параметризуются замкнутым подмножеством многообразия Чжоу циклов в $\mathbf{P}^n$.

Это очень важное качественное свойство. Получается, что все подмногообразия заданной степени в X параметризуются конечным числом алгебраических многообразий. Эта теорема конечности играет важную роль в арифметической теории многообразий.

Более удовлетворительная и современная конструкция многообразия Чжоу дана в [17]. Близко к нему и понятие схемы Гильберта [4].

7.5. Исчислительная геометрия. Она занимается нахождением числа геометрических фигур, удовлетворяющих заданным геометрическим условиям [7]. Обычно такие задачи сводятся к вычислению индексов пересечений на многообразиях, параметризующих такие фигуры. Проиллюстрируем ее задачи и методы на трех примерах: бесчисленное количество других примеров можно найти в [32], [43], [47], [59].

Первый пример совсем простой: даны четыре прямые в $\mathbf{P}^3$, находящиеся в «общем» положении; сколько прямых пересекает их? Прямые в $\mathbf{P}^3$ параметризуются многообразием Грассмана $G(2, 4)$. Прямые, пересекающие заданную прямую L_4, образуют цикл Шуберта $\sigma_1(L)$. Интересующее нас множество $\bigcap\limits_{i=1} \sigma_1(L_i)$ имеет поэтому мощность $(\sigma_1^4)=2$. Вообще, если даны 4 кривые $C_1, \ldots, C_4$ в $\mathbf{P}^3$ в «общем положении», их пересекает $2\cdot\deg(C_1)\cdot\ldots\cdot\deg(C_4)$ прямых.

7.6. Прямые на кубике. Сколько прямых лежит на кубической поверхности в $\mathbf{P}^3$? Пусть $X\subset\mathbf{P}^3$ — наша кубика и $H_1, \ldots$ $\ldots, H_4$ — четыре «общих» плоскости в $\mathbf{P}^3$; $C_i=X\cap H_i$. Степени C_i равны 3, поэтому существует $2\cdot 3^4$ прямых в $\mathbf{P}^3$, проходящих через $C_1, \ldots, C_4$. Найдем число прямых, пересекающих $\bigcup C_i$ в четырех точках; так как эти четыре точки принадлежат X, такая прямая обязана лежать на кубике X. Заметим, что C_1 пересекается с C_2 в трех точках, аналогично C_3 и C_4. Соединяя первые три точки со вторыми, мы получаем 9 прямых. Аналогично, соединяя $C_1 \cap C_3$ с $C_2 \cap C_4$, или $C_1 \cap C_4$ с $C_2 \cap C_3$, мы получаем, что 27 из наших прямых пересекают $\bigcup C_i$ в двух точках. Снова возьмем точку пересечения $C_1 \cap C_2$; проектируя из нее на $\mathbf{P}^2$, мы получаем кривые третьей степени $\pi(C_3)$ и $\pi(C_4)$, которые пересекаются в 9 точках. Три из них нас не интересуют, ибо они произошли из $C_3 \cap C_4$, а остальные дают 6 прямых. Можно шестью способами выбрать пару кривых C_i, C_j, тремя способами — точку их пересечения, поэтому мы имеем $6 \cdot 3 \cdot 9$ прямых, пересекающих $\bigcup C_i$ в трех точках. Вычитая теперь из $2 \cdot 3^4$ $27 + 6 \cdot 27$, мы получаем 27 прямых, пересекающих X в четырех точках. Подробнее о них см. [32], [56].

7.7. Задача о пяти кониках. Даны пять коник $C_1, \ldots, C_5$ на $\mathbf{P}^2$ в «общем» положении; сколько коник касается этих пяти?

Все коники образуют $\mathbf{P}^5$, коники, касающиеся заданной коники C, образуют гиперповерхность W_C в $\mathbf{P}^5$. Довольно легко понять, что $\deg W_C = 6$. Казалось бы, теперь ясно, что 6^5 коник касаются $C_1, \ldots, C_5$. Однако это заключение ошибочно, ибо гиперповерхности W_{C_i} пересекаются неправильно. В самом деле, любая W_C содержит поверхность Веронезе $S \subset \mathbf{P}^5$ двойных прямых. Двойная прямая, геометрически никак не касаясь C, пересекает C в двух двойных точках и считается «касающейся». Надо исключить двойные прямые.

Правильный ответ получится, если перейти на $\tilde{\mathbf{P}}^5$—раздутие $\mathbf{P}^5$ вдоль S. Геометрически это означает, что вместо двойной прямой $2l$ мы рассматриваем более тонкий объект — двойную прямую $2l$ с парой точек p, p' на ней. Считается, что такой объект касается коники C, если либо l касается C, либо p или p' лежит на C. Если $\tilde{W}_{C_i}$ — собственные прообразы W_{C_i}, то остается найти индекс пересечения $\tilde{W}_{C_1}, \ldots, \tilde{W}_{C_5}$ на $\tilde{\mathbf{P}}^5$.

Здесь снова используется трюк. Представим, что коника C вырождается в пару прямых l и l', пересекающихся в точке P. Тогда гиперповерхность W_C вырождается в гиперповерхность $W_l + W_{l'} + 2W_P$, где W_l — множество коник, касающихся прямой l, а W_P — множество коник, проходящих через точку P. Конечно, W_P — гиперплоскость в $\mathbf{P}^5$, а W_l — гиперповерхность степени два. На $\tilde{\mathbf{P}}^5$ дивизор $\tilde{W}_C$ эквивалентен $2\tilde{W}_l + 2\tilde{W}_P$, и мы приходим к вычислению индекса пересечения

$$(2W_l + 2W_p)^5 = 32\,(\tilde{W}_p^5 + 5\tilde{W}_p^4\tilde{W}_l + 10\tilde{W}_p^3\tilde{W}_l^2 + \\ + 10\tilde{W}_p^2\tilde{W}_l^3 + 5\tilde{W}_p\tilde{W}_l^4 + \tilde{W}_l^5).$$

Индексы пересечения $\tilde{W}_p^i\tilde{W}_l^{5-i}$ интерпретируются как числа коник проходящих через i «общих» точек и касающихся $5-i$ «общих» прямых. Ясно, что $\widetilde{W}_p^5=1$ и $\widetilde{W}_p^4\widetilde{W}_l=2$. $\widetilde{W}_p^3\widetilde{W}_l^2=W_p^3W_l^2=4$. Остальные индексы находятся по двойственности $\widetilde{W}_p^2\widetilde{W}_l^3=\widetilde{W}_p^3\widetilde{W}_l^2=4$, $\widetilde{W}_p\widetilde{W}_l^4=2$ и $\widetilde{W}_l^5=1$. Окончательный ответ

$$32\ (1+5\cdot 2+10\cdot 4+10\cdot 4+5\cdot 2+1)=32\cdot 102=3264$$

был получен Шалем еще в 1864 г. Здесь предполагалось, что характеристика K отлична от 2. Подробнее см. [29], [32].

Мы закончили изложение общей теории алгебраических многообразий и хотели бы отметить поразительную вещь. Мы узнали много тонких и глубоких фактов о многообразиях над полем K, по существу ничего не зная о самом поле K. В следующей главе, посвященной схемам, мы увидим, что во многих вопросах не нужно и поле K, не говоря уже о его алгебраической замкнутости.

Глава 4

СХЕМЫ

В этой главе мы займемся распространением геометрического языка на алгебраические уравнения над произвольными полями и кольцами. Соответствующий геометрический объект, обобщающий алгебраическое многообразие, называется схемой. Подобно многообразиям, схемы склеиваются из локальных кусков, называемых аффинными схемами. Поэтому основное внимание мы уделим локальным вопросам, так как в остальном все делается так или почти так, как в случае многообразий.

Теория схем объединяет Геометрию и Арифметику и реализует цель, намеченную Кронекером [48]: «...задача здесь заключается в том, чтобы для образов самого общего типа, принадлежащих одновременно арифметике и теории функций, т. е. зависящих от любых заданных алгебраических чисел и алгебраических функций от каких угодно параметров, достигнуть в общем случае такой же степени законченности и полноты, какой в той или иной степени обладают простейшие полученные результаты.

Перед нами здесь открывается необъятный простор в области чистой теории; царящая здесь всеобъемлющая закономерность придает ей высшую степень стройности и красоты. Следует заметить, впрочем, что эта область пока далека от практических применений, хотя в будущем положение может измениться».

§ 1. Алгебраические уравнения

Этот параграф носит вводный характер. Его задача — подготовить и мотивировать понятие аффинной схемы.

1.1. Вещественные уравнения. Главу 1 мы начинали с алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем K. Теперь мы рассмотрим уравнения над произвольным полем K и начнем с простейшего (или наиболее привычного) поля $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Пусть $X=(F_j=0,\ j\in J)$ — система алгебраических уравнений над $\mathbf{R}$, т. е. F_j — многочлены от $T_1, \ldots, T_n$ с вещественными коэффициентами.

Обозначим через $X(\mathbf{R})$ множество вещественных решений нашей системы, т. е. таких наборов $(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbf{R}^n$, что $F_j(x_1, \ldots, x_n)=0$ для любых $j\in J$. Однако даже если нас интересуют лишь вещественные решения, полезно знать о том, что существуют комплексные решения и представлять строение множества $X(\mathbf{C})$ всех комплексных решений системы X. Прежде всего потому, что именно многообразие $X(\mathbf{C})$ дает правильную картину происходящего. Понимание того, что корни уравнения $T^2+a=0$ при $a>0$ не исчезают, но переходят в комплексную область, — одно из величайших достижений математики.

Вещественные точки (или решения) выделяются среди комплексных тем, что они инвариантны при комплексном сопряжении. В частности, невещественные решения встречаются парами. Уже это тривиальное замечание позволяет иногда устанавливать существование вещественных решений. Например, по теореме Безу число решений системы однородных уравнений нечетной степени нечетно, и значит, обязательно содержит вещественное решение. Отсюда можно получить, что размерность алгебры с делением над $\mathbf{R}$ есть степень двойки (см. [15, стр. 273]). Другой пример на эту тему доставляет теорема Харнака о максимальном числе овалов вещественной кривой (см. [15, гл. VII, § 4]).

1.2. Уравнения над полем. Аналогично обстоит дело для любого поля K. Если $X=(F_j=0)$ — система алгебраических уравнений над K, то главную роль играет множество $X(\overline{K})$ всех $\overline{K}$-значных решений этой системы, где $\overline{K}$ — алгебраическое замыкание поля K. Это множество является алгебраическим многообразием над $\overline{K}$, т. е. объектом изучения предыдущих глав. Однако то обстоятельство, что уравнения заданы над K, дает дополнительную структуру: для каждого промежуточного поля $K\subset K'\subset\overline{K}$ выделяется подмножество $X(K')\subset X(\overline{K})$ решений со значениями в K'. Образно говоря, точки многообразия $X(\overline{K})$ различаются по своей „близости" к основному полю K, как звезды на небе по своей яркости. По другому дополнительная структура задается действием группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ на множестве $X(\overline{K})$ (но не на $\overline{K}$-многообразии $X(\overline{K})$), и снова точки различаются величиной своих стабилизаторов. Получающиеся объекты мы временно будем называть K-многообразиями.

1.3. Уравнения над кольцами. Пусть теперь K — кольцо, коммутативное и с единицей, например, кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$. Для любой K-алгебры L, т. е. коммутативного кольца L, снабженного кольцевым гомоморфизмом $\varphi : K \to L$, обозначим через $X(L)$ множество L-значных решений системы $X = (F_j = 0,\ j \in J)$, т. е. наборов $(x_1, \ldots, x_n) \in L^n$, таких что $F_j(x_1, \ldots, x_n) = 0$ для любых $j \in J$. Заметим, что любой гомоморфизм K-алгебр $\psi : L \to L'$ индуцирует отображение $X(L) \to X(L')$.

Вкладывая кольцо $\mathbf{Z}$ в поле $\mathbf{R}$ мы видим, что если $X(\mathbf{R}) = \varnothing$, то и $X(\mathbf{Z}) = \varnothing$. На самом деле для подобных целей годится любой гомоморфизм $\mathbf{Z} \to L$; чаще всего в качестве L берут кольцо вычетов $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ по целому модулю m. Например, уравнение $y^2 = 3x^2 + 3$ не имеет решений по модулю 4, поэтому не имеет и целых решений.

Так и в общем случае уравнения над кольцом K естественно пощупать всевозможными гомоморфизмами $\varphi : K \to L$, где L — поле. Заменяя коэффициенты уравнений F_j при помощи φ, мы получаем систему $X_\varphi = (\varphi(F_j) = 0)$ алгебраических уравнений над полем L, а значит, и соответствующее L-многообразие, которое мы также обозначим X_φ. Итак, для каждого гомоморфизма $\varphi : K \to L$ в поле L (мы их будем называть точками кольца K) мы получаем алгебраическое многообразие X_φ. Это наводит на мысль связать с системой X геометрический объект, слой которого над точкой φ будет многообразием X_φ. В таком случае решения $X(K)$ представлялись бы как сечения этого расслоения.

Предварительно сделаем одно замечание. Не все точки кольца K представляют одинаковый интерес. Если точка $\varphi' : K \to L'$ пропускается через точку $\varphi : K \to L$, т. е. индуцируется вложением полей $L \subset L'$, многообразие $X_{\varphi'}$ не несет новой информации, по сравнению с X_φ. Существенными являются лишь минимальные, или простые в указанном смысле точки K. Простота точки $\varphi : K \to L$ означает, что L как поле порождается $\varphi(K)$. Отсюда видно, что каждая точка пропускается через единственную простую точку. В терминах кольца K простая точка $\varphi : K \to L$ задается своим ядром $\varphi^{-1}(0)$, который является простым идеалом. Обратно, любой простой идеал $\mathfrak{p} \subset K$ (отличный от K) задает простую точку $K \to k(\mathfrak{p})$, где $k(\mathfrak{p})$ — поле частных целостного кольца $K/\mathfrak{p}$ (т. н. поле вычетов точки $\mathfrak{p}$).

1.4. Простой спектр. *Простым спектром* кольца K называется множество простых точек, или простых идеалов K; обозначается оно $\operatorname{Spec}(K)$. Оправдание терминологии и связь с понятием спектра оператора можно найти в [24]. Например, $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ состоит из точки $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ (идеала (0)) и точек $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (идеалов (p)) для простых чисел p. Конечно, спектр поля K состоит из единственной точки $K \xrightarrow{\mathrm{id}} K$.

Конструкция Spec функториальна: с каждым гомоморфизмом колец $\varphi : A \to B$ связано отображение в обратную сторону

$\operatorname{Spec}(\varphi):\operatorname{Spec}(B)\to\operatorname{Spec}(A)$. Устроено оно так. Если $\psi:B\to L$ — простая точка B, то $\operatorname{Spec}(\varphi)(\psi)$ — та единственная простая точка A, через которую пропускается точка $A\xrightarrow{\varphi}B\xrightarrow{\psi}L$. В терминах простых идеалов все выглядит еще проще: $\operatorname{Spec}(\varphi)$ переводит простой идеал $\mathfrak{a}\subset B$ в простой идеал $\varphi^{-1}(\mathfrak{a})\subset A$.

Теперь уже очень просто связать с системой уравнений $X=(F_j=0,\ j\in J)$ геометрический объект. Для этого надо взять $\operatorname{Spec}(A_X)$, где $A_X=K[T_1,\dots,T_n]/(F_j)_{j\in J}$. Структурный гомоморфизм $K\to A_X=K[T]/(F)$ приводит к отображению $\operatorname{Spec}(A_X)\to\operatorname{Spec}(K)$, слои которого в некотором смысле есть многообразия X_φ. Мы еще вернемся к этому.

Видно, что конечность числа неизвестных $T_1,\dots,T_n$ тут ни при чем, как и сами неизвестные. Важно лишь то, что с каждым коммутативным кольцом A можно связать множество $\operatorname{Spec}A$. В следующем параграфе мы снабдим его топологией и пучком колец, как в главе 1 было сделано для многообразий. Однако предварительно стоит обсудить, как конструкция Spec связана с многообразием, когда K — алгебраически замкнутое поле.

1.5. Сравнение с многообразиями. Пусть K — алгебраически замкнутое поле, X — система уравнений над K, которую мы будем отождествлять с соответствующим аффинным многообразием. Как же множество X связано со $\operatorname{Spec}(K[X])$?

Конечно, каждая точка $x\in X$ определяет простую точку $\varphi_x:K[X]\to K$, $\varphi_x(f)=f(x)$. Однако $\operatorname{Spec}K[X]$ содержит много других точек. А именно, каждое неприводимое подмногообразие $Y\subset X$ дает точку $K[X]$ либо как простой идеал $I(Y)$, либо как гомоморфизм $K[X]\to K[Y]\to K(Y)$. Так получаются уже все точки $\operatorname{Spec}(K[X])$. В самом деле, простой идеал $\mathfrak{p}\subset K[X]$ имеет вид $I(Y)$ для неприводимого $Y=V(\mathfrak{p})$. Точки X соответствуют при этом максимальным идеалам кольца $K[X]$.

Возникает вопрос — почему в общем случае нельзя обойтись лишь максимальными идеалами вместо простых? Этому есть несколько причин. Первая — зачем при исследовании уравнений над кольцом K игнорировать точки типа $\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$? Вторая — функториальность: прообраз максимального идеала может оказаться немаксимальным даже в столь простом случае, как вложение $\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$. Третья — в общем случае максимальных идеалов «мало», чтобы по значениям в них судить о поведении функций. Для алгебраических многообразий их хватало благодаря теореме Гильберта о нулях, факту, специфическому для колец конечного типа над полем. Наконец, даже в случае алгебраических многообразий новые точки естественно интерпретируются как общие точки неприводимых подмногообразий и это часто бывает удобно.

§ 2. Аффинные схемы

2.1. Функции на спектре. В предыдущем параграфе с каждым кольцом A было связано множество $\mathrm{Spec}(A)$ его простых точек $\varphi: A \to k(\varphi)$. Элементы кольца A при этом интерпретируются как функции на $\mathrm{Spec}(A)$. Единственная новость здесь в том, что значение функции $a \in A$ в точке φ принимается не в фиксированном поле K, а в поле $k(\varphi)$, своем для каждой точки φ. При этом значение a в точке φ есть просто $\varphi(a)$. Вот как выглядят числа 3, 5 и 6 как «функции» на $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$:

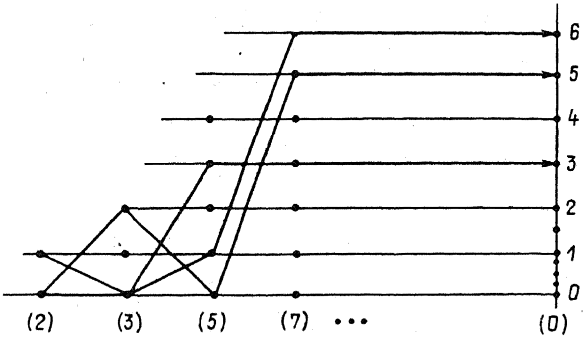


Рис. 21

Впрочем, как и в п. 2.3 главы 1, представление элементов A функциями на $\mathrm{Spec}\,A$ страдает одним недостатком: ненулевые элементы кольца A могут приводить к нулевым функциям. Однако как и для многообразий, это может случиться лишь для нильпотентных элементов. Причем если в случае многообразий мы извлекали это из теоремы Гильберта о нулях, то теперь это почти тавтологичный факт, что нильрадикал кольца есть пересечение всех его простых идеалов (см. [19, гл. 1]). Все это показывает, что более правильно элементы кольца A представлять как сечения некоторого пучка колец на $\mathrm{Spec}\,A$, а для этого нужна топология.

2.2. Топология на спектре. Как и в случае многообразий, замкнутыми подмножествами $\mathrm{Spec}\,A$ объявляются «нули функций» $a \in A$. Иначе говоря, замкнутые множества *топологии Зарисского* на $\mathrm{Spec}\,A$ имеют вид $V(I)$, где I — подмножество A, а $V(I)$ состоит из точек φ, таких что $\varphi(a)=0$ для всех $a \in I$.

Как и в случае многообразий, топология $\mathrm{Spec}\,A$ в общем случае нехаусдорфова. Более того, некоторые точки могут оказаться незамкнутыми. Например, если точка соответствует неприводимому подмногообразию Y многообразия X, то замыкание ее содержит все точки Y. По этой причине ее называют общей точкой подмногообразия Y. Вообще, если некоторая точка ξ всюду плотна в $\operatorname{Spec} A$, она называется *общей точкой*. Например, точка $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$, соответствующая нулевому идеалу $\mathbf{Z}$, общая. Замкнутые точки, напротив, соответствуют максимальным идеалам кольца A. Вообще, если точка x принадлежит замыканию точки y, говорят, что x — *специализация* y и изображают это стрелкой $y \to x$.

2.3. Структурный пучок. Строится он по существу так же, как для многообразий в п. 2.8 главы 1. Для открытого U в $\operatorname{Spec} A$ положим

$$S[U] = \{a \in A,\ \varphi(a) \neq 0\ \forall \varphi \in U\}.$$

Очевидно, подмножество $S[U]$ в A мультипликативно. Положим $\tilde{A}(U)$ равным кольцу частных A относительно $S[U]$. Иначе говоря, $\tilde{A}(U)$ состоит из дробей вида a/s, где $a \in A$, а $s \in S[U]$. Если $U \subset U'$, то $S[U'] \subset S[U]$ и мы получаем гомоморфизм колец $\tilde{A}(U') \to \tilde{A}(U)$. Тем самым мы получаем предпучок колец $\tilde{A}$ на $\operatorname{Spec}(A)$. Как в предположении п. 2.8 главы 1 показывается, что $\tilde{A}$ является пучком; он обозначается также $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$ или просто $\mathcal{O}$ и называется *структурным пучком* на $\operatorname{Spec}(A)$.

Окольцованное пространство $(\operatorname{Spec}(A), \tilde{A})$ называется *аффинной схемой*, соответствующей кольцу A, и также обозначается $\operatorname{Spec}(A)$. Эта схема уже несет всю информацию о кольце A, так как $A = \tilde{A}(\operatorname{Spec} A)$. Таким образом мы можем работать не с кольцом, а с более геометрическим объектом — аффинной схемой.

Модуль M над кольцом A приводит, как в п. 6.4 главы 1, к пучку $\tilde{M}$ модулей на $\operatorname{Spec} A$. Таким образом теория модулей над кольцами превращается в теорию квазикогерентных пучков. Отметим еще, что пучок колец $\tilde{A}$ обладает тем свойством, что его слой $\tilde{A}_\varphi$ в любой точке $\varphi \in \operatorname{Spec} A$ является локальным кольцом. В самом деле, это кольцо дробей вида a/b, где $b(\varphi) \neq 0$; его единственный максимальный идеал $\mathfrak{m}_\varphi$ состоит из таких дробей, у которых $a(\varphi) = 0$. Поле вычетов локального кольца $\tilde{A}_\varphi$ есть в точности $k(\varphi)$.

2.4. Функториальность. Пусть $\psi: A \to B$ — гомоморфизм колец. Как легко проверить, отображение $\operatorname{Spec}(\psi): \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ непрерывно. Более того, ψ индуцирует естественный гомоморфизм пучков колец $\psi^{\#}: \tilde{A} \to (\operatorname{Spec} \psi)_* \tilde{B}$, так что $f = \operatorname{Spec}(\psi)$ является морфизмом окольцованных пространств и даже локально окольцованных пространств. Последнее означает, что гомоморфизмы локальных колец $\tilde{A}_{f(\varphi)} \to \tilde{B}_\varphi$ локальны, т. е. переводят максимальные идеалы в максимальные. Оказывается, верно и обратное, т. е. любой морфизм локально окольцованных пространств $f: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ имеет вид $\operatorname{Spec}(\psi)$ для некоторого гомоморфизма колец $\psi: A \to B$. Таким образом, категория коммутативных колец двойственна к категории аффинных схем, и любое утверждение о кольцах и модулях получает геометрическое истолкование в терминах аффинных схем и пучков модулей над ними.

2.5. Пример—аффинная прямая. Для любого кольца R спектр кольца многочленов $R[T]$ называется *аффинной прямой* над R и обозначается $\mathbf{A}^1_R$. Во всяком случае эта терминология согласуется с прежней, когда $R=K$ — алгебраически замкнутое поле. Пусть теперь K — произвольное поле; посмотрим, как прямая $\mathbf{A}^1_K$ устроена как множество. Прежде всего она содержит общую точку, соответствующую нулевому идеалу кольца $K[T]$. Далее, $K[T]$ является кольцом главных идеалов, поэтому остальные простые идеалы максимальны и имеют вид (f), где f — неприводимый многочлен. Рассматривая корни f в алгебраическом замыкании $\bar{K}$ поля K, мы видим, что замкнутые точки $\mathbf{A}^1_K$ отождествляются с орбитами действия группы Галуа $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ на $\bar{K}$. См. также п. 4.2.

В случае общего кольца R воспользуемся структурным морфизмом $p:\mathbf{A}^1_R\to\mathrm{Spec}\,R$, соответствующим вложению колец $R\to R[T]$. Для каждой простой точки $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\,R$ слой p над ней изоморфен аффинной прямой $\mathbf{A}^1_{k(\mathfrak{p})}$ над полем $k(\mathfrak{p})$. Таким образом, $\mathbf{A}^1_R$ представляет семейство прямых $\mathbf{A}^1_{k(\mathfrak{p})}$, где $\mathfrak{p}$ пробегает $\mathrm{Spec}\,R$. Главное, что все эти прямые не разрознены, а сцеплены в единое целое. Рассмотрим, например, прямую над $\mathbf{Z}$ (см. рис. 21). Над каждым простым числом p расположена прямая $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}$. Однако есть ещё и прямая $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}$ над общей точкой $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$; точки этой прямой и связывают все предыдущие слои. В самом деле, замыкание в $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Z}}$ точки из прямой $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}$ — это подмножество в $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Z}}$, конечнократно накрывающее базу $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$. Читателю рекомендуется самому нарисовать, как выглядит замыкание точек $1/2$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{-1}$.

Спектр кольца многочленов $R[T_1, \ldots, T_n]$ называется *n-мерным аффинным пространством* над R и обозначается $\mathbf{A}^n_R$.

2.6. Пример — абстрактный вектор. Даже если $\mathrm{Spec}\,A$ состоит из одной точки, наличие нильпотентов в кольце A (или структурном пучке, что в данном случае по существу то же самое) сказывается на морфизмах этой схемы в другие схемы. Рассмотрим простейший, но очень важный пример.

Простейшая алгебра с нильпотентами — алгебра дуальных чисел $K[\varepsilon]$, где K — поле, а $\varepsilon^2=0$. Иначе говоря, ее элементы имеют вид $a+b\varepsilon$, где $a, b\in K$. Теоретико-множественно $\mathrm{Spec}\,K[\varepsilon]$ состоит из одной точки $*$ (соответствующей простому идеалу (ε) или гомоморфизму колец $\delta: K[\varepsilon]\to K$,

$\delta(a+b\varepsilon)=a)$. Пусть теперь X — аффинное многообразие над K. Задать морфизм схем $f: \mathrm{Spec}\, K[\varepsilon] \to X$ (точнее, морфизм K-схем, см. 3.3) — значит задать гомоморфизм K-алгебр $\psi: K[X] \to K[\delta]$. Последний определяется максимальным идеалом $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(\delta \circ \psi)$ (т. е. точкой $f(*) = x \in X$) и K-линейным отображением векторных пространств $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to K\varepsilon \cong K$ (т. е. касательным вектором к X в точке x, см. п. 7.2 главы 1). Таким образом, $\mathrm{Spec}\, K[\varepsilon]$ надо представлять себе как точку, снабженную торчащим из нее вектором.

Другой тип нильпотентов дает кольцо $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, у которого нильпотенты идут в «арифметическом направлении».

§ 3. Схемы

3.1. Определения. *Схемой* называется окольцованное пространство $X = (\mathrm{sp}\, X, \mathcal{O}_X)$, локально изоморфное аффинной схеме.

Иначе говоря, схема X состоит из топологического пространства $\mathrm{sp}\, X$ (часто обозначаемого просто X) и пучка коммутативных колец $\mathcal{O}_X$ на нем. При этом каждая точка X обладает открытой окрестностью U, такой что пара $(U, \mathcal{O}_X|U)$ изоморфна аффинной схеме (а именно, $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_X(U)$). Пучок $\mathcal{O}_X$ называется *структурным пучком* схемы; слой его $\mathcal{O}_{X,x}$ в любой точке $x \in X$ является, как видно из п. 2.3, локальным кольцом.

Морфизмом схем называется морфизм их как локально окольцованных пространств. Иначе говоря, морфизм $f: X \to Y$ схемы X в схему Y состоит из непрерывного отображения $\mathrm{sp}\, f: \mathrm{sp}\, X \to \mathrm{sp}\, Y$ и гомоморфизма пучков колец $f^{\#}: \mathcal{O}_Y \to (\mathrm{sp}\, f)_* \mathcal{O}_X$. При этом для любой точки $x \in X$ и сечения s пучка $\mathcal{O}_Y$ в окрестности точки $f(x)$ соотношение $s(f(x)) = 0$ влечет $(f^{\#}s)(x) = 0$. Локально любой морфизм схем имеет вид $\mathrm{Spec}(\varphi): \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ для гомоморфизма колец $\varphi: A \to B$. Вообще, для любой схемы X и кольца A морфизмы $X \to \mathrm{Spec}\, A$ находятся во взаимно однозначном соответствии с кольцевыми гомоморфизмами кольца A в $\mathcal{O}_X(X)$.

3.2. Примеры. а) Каждая аффинная схема является схемой.

б) Если U — открытое подмножество схемы X, то пара $(U, \mathcal{O}_X|U)$ также схема и называется *открытой подсхемой* схемы X. Морфизм схем $Y \to X$ называется *открытым вложением,* если он осуществляет изоморфизм Y с открытой подсхемой $\widetilde{X}$. Например, для любого элемента $a \in A$ схема $\mathrm{Spec}\, A[a^{-1}]$ отождествляется с открытой подсхемой $\mathrm{Spec}\, A$, индуцированной на дополнении к замкнутому подмножеству $V(a)$.

в) Морфизм $f: Y \to X$ называется *замкнутым вложением,* если $\mathrm{sp}\, f$ отождествляет Y с замкнутым подмножеством X, а гомоморфизм пучков $\mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_Y$ сюръективен. Например, если

$\mathfrak{A}$ — идеал в кольце A, то сюръекция $A \to A/\mathfrak{A}$ дает замкнутое вложение $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$.

Квазикогерентный пучок идеалов $J \subset \mathcal{O}_X$ задает замкнутую подсхему $(\mathrm{supp}\, \mathcal{O}_X/J,\ \mathcal{O}_X/J)$, и такое сопоставление осуществляет биекцию между идеалами $\mathcal{O}_X$ и замкнутыми подсхемами X. В частности, убывающая цепочка пучков идеалов $J \supset \supset J^2 \subset \ldots \subset J^{n+1}$ приводит к возрастающей цепочке замкнутых подсхем $Y \supset Y^{(2)} \supset \ldots \supset Y^{(n)}$. Хотя пространство $\mathrm{sp}\, Y^{(n)}$ у всех этих подсхем одно и то же, с ростом n подсхема $Y^{(n)}$ все более точно отражает строение X в инфинитезимальной окрестности Y. Индуктивный предел $Y^{(\infty)} = \lim Y^{(n)}$ играет ту же роль, что и ряд Тейлора дифференцируемой функции. Строго говоря, $Y^{(\infty)}$ — уже не схема, а т. н. формальная схема; в каком-то смысле она заменяет понятие трубчатой окрестности Y в X.

г) Обычно более сложные схемы склеивают из более простых в духе п. 3.3 главы 1. Так можно получить относительное аффинное пространство $\mathbf{A}^n_X$ над любой схемой X или относительное проективное пространство $\mathbf{P}^n_X$. В духе п. 6.7 главы 1 для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{O}_X$-алгебр $\mathcal{A}$ можно построить схему $\mathrm{Spec}\, \mathcal{A} \to X$. Аналогично, для градуированного пучка $\mathcal{O}_X$-алгебр $\mathcal{A} = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathcal{A}_i$ можно построить проективный спектр $\mathrm{Proj}(\mathcal{A}) \to X$ и, в частности, говорить о раздутиях схем вдоль подсхем.

3.3. Относительные схемы. Теорию схем, как и теорию алгебраических многообразий, отличает широкое использование относительных понятий. Зафиксируем схему S; *S-схемой, или схемой над S*, называется схема X, снабженная (т. н. структурным) морфизмом $f: X \to S$. Морфизмом S-схемы X в S-схему Y называется морфизм $X \to Y$, коммутирующий со структурными морфизмами. Такой морфизм S-схем называют также X-значной точкой S-схемы Y; множество всех таких точек обозначается $Y(X)$ (ср. с п. 1.3).

Как для многообразий, для схем существуют расслоенные произведения. Для S-схем X и Y их произведением называется S-схема $X \times_S Y$ вместе с проекциями на X и Y, такая что

$$(X \times_S Y)(Z) = X(Z) \times Y(Z)$$

для любой S-схемы Z. В случае аффинных схем такое произведение двойственно тензорному произведению колец, т. е.

$$\mathrm{Spec}\, A \times_{\mathrm{Spec}\, C} \mathrm{Spec}\, B = \mathrm{Spec}(A \otimes_C B).$$

Как для многообразий, расслоенные произведения позволяют делать замены базы. В частности, для точки $s \in S$ расслоенное произведение $X \times_S \mathrm{Spec}(k(s)) = X_s$ называется *слоем* морфизма $f: X \to S$ над s. Такое название оправдано тем, что теоретико-множественно X_s совпадает с $f^{-1}(s)$. Тем самым относительную схему $X \to S$ можно представлять как семейство $k(s)$-схем X_s, параметризованное точками $s \in S$.

Любую схему X можно рассматривать как схему над Spec $\mathbf{Z}$. Это позволяет рассматривать семейства многообразий (или схем) X_p ($p=0, 2, 3, 5, \ldots$), определенных над полями различной характеристики p, переходить от положительной характеристики к нулевой и обратно. В этом главная польза схем.

3.4. Свойства схем. В основном это те же свойства, что и для многообразий. Так, схема X называется *неприводимой,* если неприводимо топологическое пространство sp X. Схема X *приведенная,* если структурный пучок $\mathcal{O}_X$ не содержит нильпотентов. Для любой схемы X существует приведенная замкнутая подсхема с тем же пространством sp X; она обозначается X_{red} и задается пучком идеалов $J \subset \mathcal{O}_X$, состоящим из сечений, нулевых во всех точках X.

Понятия *нормальной схемы* и *нормализации* приведенной схемы вводятся также как для многообразий. Например, схема Spec $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ ненормальна и ее нормализацией будет Spec $\mathbf{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$.

Размерностью схемы X в точке $x \in X$ называется максимум длин цепочек $x = x_0 \leftarrow x_1 \leftarrow \ldots \leftarrow x_n$ различных точек; обозначается он $\dim_x X$. По существу, это определение использовалось длин многообразий. Например, размерность Spec $\mathbf{Z}$ равна 1 и поэтому Spec $\mathbf{Z}$ следует рассматривать как «кривую». Аффинную прямую $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Z}}$ над $\mathbf{Z}$ следует рассматривать как «арифметическую поверхность», ибо размерность ее в замкнутых точках равна 2. Следует предостеречь, что для общих схем размерность ведет себя не так идеально, как в случае многообразий.

В случае многообразий мы часто пользовались теоремой Гильберта о базисе, т. е. нётеровостью колец конечного типа над полем. В случае схем это надо специально требовать. Схема X называется *нётеровой,* если существует *конечное* открытое покрытие X спектрами нётеровых колец. Топологическое пространство sp X нётеровой схемы X нётерово, так что нётерова схема квазикомпактна и разлагается на конечное число неприводимых компонент. Однако существует более тонкое, чисто схемное разложение нётеровой схемы на примарные компоненты, учитывающее нильпотенты (см. [8]).

В дальнейшем мы ограничимся в основном нётеровыми схемами; помимо многообразий, к ним относится спектр $\mathbf{Z}$ и, вообще, спектр кольца целых алгебраических чисел. Для любой точки x нётеровой схемы X размерность $\dim_x X$ конечна. Если функция f не делит нуль в кольце $\mathcal{O}_{X,x}$, то $\dim_x V(f) = \dim_x X - 1$, как и для многообразий (п. 4.3 главы 2).

3.5. Свойства морфизмов. Как правило, каждое свойство схем имеет свой относительный аналог, свойство морфизма. Грубо говоря, этим свойством должны обладать все слои морфизма.

Например, морфизм $f: X \to S$ называется *аффинным*, если для любой аффинной карты $U \subset S$ схема $f^{-1}(U)$ аффинна. Любой такой морфизм имеет вид $\operatorname{Spec}(\mathscr{A}) \to S$, где $\mathscr{A} = f_*(\mathcal{O}_X)$ — квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_S$-алгебр. Аффинный морфизм $f: X \to S$ называется *конечным,* если пучок $f_*(\mathcal{O}_X)$ когерентен над $\mathcal{O}_S$. Все, что говорилось о конечных морфизмах в § 2 главы 2, переносится на схемы.

Наиболее важно понятие морфизма конечного типа. Предположим сначала, что база $S = \operatorname{Spec} A$ аффинна. В этом случае S-схема X имеет конечный тип, если существует *конечное* открытое покрытие X аффинными картами $\operatorname{Spec} B_i$, такое что A-алгебры B_i порождаются конечным числом элементов. В общем случае морфизм $f: X \to S$ (или S-схема X) имеет *конечный тип,* если для любой аффинной карты $U \subset S$ морфизм $f^{-1}(U) \to U$ имеет конечный тип. Например, конечный тип имеют такие S-схемы, так аффинное пространство $\mathbf{A}_S^n$ или проективное пространство $\mathbf{P}_S^n$ а также их замкнутые подсхемы. Как правило, все действия в алгебраической геометрии происходят в рамках схем конечного типа над нётеровой базой.

Морфизм конечного типа называется *собственным,* если он отделим и универсально замкнут; все, что говорилось о собственных морфизмах в § 3 главы 2, переносится на схемы.

3.6. Регулярные схемы. Понятие гладкого многообразия имеет два обобщения — на схемы и на морфизмы. Сейчас мы остановимся на первом, а о втором скажем в следующем параграфе. Нётерова схема X называется *регулярной в точке* x, если размерность векторного пространства $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ над полем вычетов $k(x)$ равна $\dim_x X$ (здесь $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал локального кольца $\mathcal{O}_{X,x}$). Нётерова схема называется *регулярной,* если она такова во всех (или только в замкнутых) точках. Подробнее о свойствах регулярных схем и колец см. [36], [63], [65].

Для многообразий над алгебраически замкнутым полем регулярность совпадает с гладкостью. Как и для многообразий, регулярность схемы влечет ее приведенность, нормальность, факториальность и свойство Коэна—Маколея. Для одномерных схем регулярность совпадает с нормальностью, снова как для многообразий. Однако есть и различия. Так схема может быть нерегулярной во всех точках, как $\operatorname{Spec} K[\varepsilon]$; конечно, это связано с нильпотентами. Кроме того, множество точек регулярности нётеровой схемы не всегда открыто.

3.7. Плоские морфизмы. Это новое для нас понятие, не встречавшееся ранее, хотя очень важное и для многообразий.

Несмотря на довольно алгебраическое определение, плоские морфизмы играют важную роль в алгебраической геометрии, позволяя формализовать интуитивное представление о «непрерывных» алгебраических семействах схем и многообразий (см. п. 4.4).

Алгебра B над кольцом A называется *плоской*, если для любой точной последовательности A-модулей $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ точна последовательность $0 \to M' \otimes_A B \to M \otimes_A B \to M'' \otimes_A B \to 0$. Достаточно, впрочем, потребовать инъективность отображения $\mathfrak{A} \otimes_A B \to B$ для любого идеала $\mathfrak{A} \subset A$. Подробнее о плоских кольцах и модулях см. в [23].

Морфизм схем $f: X \to S$ называется *плоским в точке* $x \in X$, если кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ плоско над $\mathcal{O}_{S,f(x)}$. Морфизм f называется *плоским*, если он таков во всех точках X. Например, морфизм $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ плоский тогда и только тогда, когда A-алгебра B плоская. В частности, открытые вложения являются плоскими морфизмами; напротив, замкнутые вложения очень редко бывают плоскими (только если они еще и открытые). Плоский и структурный морфизм $\mathbf{A}_S^n \to S$. Плоскостность морфизма сохраняется при композициях и заменах базы.

Конечный морфизм $X \to S$ плоский тогда и только тогда, когда он локально свободен (см. п. 5.7 главы 2); для таких морфизмов остается верен принцип постоянства.

§ 4. Алгебраические схемы и их семейства

4.1. Алгебраические схемы. *Алгебраической схемой* называется схема конечного типа над полем. Такие схемы наиболее близки к алгебраическим многообразиям. Можно даже сказать, что алгебраическое многообразие — это приведенная алгебраическая схема над алгебраически замкнутым полем. Системы алгебраических уравнений над K с конечным числом неизвестных приводят к алгебраическим схемам, и поэтому стоит остановиться на них подробнее.

Стоит сразу сказать, что топологическое пространство $\operatorname{sp} X$ алгебраической схемы X не всегда дает о ней правильное представление. Например, для любого конечного расширения полей $K \subset K'$ K-схема $\operatorname{Spec} K'$ состоит из одной точки, но как они различны! Понять, что за объект перед нами, помогает операция *геометризации*.

4.2. Геометризация. Под этим мы понимаем переход от алгебраической K-схемы X к $\bar{K}$-схеме $\bar{X} = X \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} \bar{K}$, где $\bar{K}$ — алгебраическое замыкание поля K. Если забыть про нильпотенты $\overline{X}$, мы получаем многообразие над $\overline{K}$, т. е. объект, хорошо понятый из предыдущих глав. Схемы X и $\overline{X}$ связаны морфизмом проекции $\pi : \overline{X} \to X$. Для каждой точки $x \in X$ слой $\pi^{-1}(x) = \operatorname{Spec}(k(x) \otimes_K \overline{K})$ — непустая нульмерная схема. В частности, π сюръективен, и X надо представлять как фактор-пространство $\overline{X}$ (сравни с п. 1.2).

Кроме того, морфизм $\pi : \overline{X} \to X$ — плоский и по существу конечный; поэтому размерности X и $\overline{X}$ совпадают и теория размерности для алгебраических схем выглядит как для многообразий. Так, если схема X неприводима, размерность ее во всех *замкнутых* точках одинакова и равна степени трансцендентности поля $k(\xi)$ над K, где ξ — общая точка X.

Стоит сделать одно предостережение. Мы говорили об алгебраическом замыкании $\overline{K}$ как будто это каноническая конструкция. Конечно, все замыкания поля K изоморфны, но не канонически! Например, нет способа выделить один из корней $\sqrt{-1}$ в $\mathbf{C}$. Это сказывается в том, что при геометризации неизоморфные схемы могут стать изоморфными (говорят тогда, что они — *формы* друг друга). Например, $\mathbf{R}$-схемы, заданные уравнениями $T^2 = 1$ и $T^2 = -1$, различны, но становятся изоморфными над $\mathbf{C}$. Аналогично обстоит дело с вещественными кониками $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ и $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$.

4.3. Геометрические свойства алгебраических схем. При геометризации неприводимая и приведенная схема может стать приводимой и (или) неприведенной. Вот простейший пример. Рассмотрим $\mathbf{R}$-схему $X = \operatorname{Spec}(\mathbf{C})$, это точка. Однако, $\overline{X} = \operatorname{Spec}(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$ состоит из двух точек. Впрочем, здесь схема $\overline{X}$ приведена; в характеристике $p > 0$ могут появиться и нильпотенты. Пусть $\alpha \in K$ не является p-й степенью, $K' = K(\alpha^{1/p})$ и $X = \operatorname{Spec} K'$. Тогда $\overline{X}$ — спектр кольца $K' \otimes_K \overline{K} = \overline{K}[T]/(T^p - \alpha) = \overline{K}[T]/(T - \alpha^{1/p})^p \simeq \overline{K}[S]/(S^p)$, где $S = T - \alpha^{1/p}$.

Если все же некоторое свойство схем верно для геометризации $\overline{X}$, говорят, что K-схема X обладает этим свойством *геометрически*. Так X называется *геометрически неприводимой* (соответственно *геометрически приведенной*, *геометрически нормальной*, *геометрически регулярной*), если $\overline{X} = X \otimes_K \overline{K}$ неприводима (соответственно приведенная, нормальная, регулярная); в этом случае X также неприводима (приведена и т. д.). Обратное, как мы видели, верно не всегда; однако если поле K совершенное, а X приведенная (соответственно нормальная или регулярная) K-схема, то такой же будет и ее геометризация $\overline{X}$.

Отметим, что геометрически регулярная K-схема X называется также *гладкой*, ибо это эквивалентно гладкости многообразия $\overline{X}$.

4.4. Семейство алгебраических схем. Пусть $f: X \to S$ — морфизм конечного типа. Тогда для каждой точки $s \in S k(s)$-схема $X_s = f^{-1}(s) = X \times_S \operatorname{Spec} k(s)$ алгебраическая. Поэтому морфизмы конечного типа можно представлять себе как семейства алгебраических схем, параметризованные точками S. При этом специальные члены такого семейства могут довольно сильно отличаться от «общих». Заметим, что теперь понятию «общий» слой можно придать смысл слоя над общей точкой базы S (когда S неприводима, что часто молчаливо предполагается). Как правило, свойства общего слоя наследуются для слоев над точками из некоторой окрестности общей точки S, особенно если речь идет о геометрических свойствах. Например, если общий слой геометрически неприводим, то и «близкие» слои геометрически неприводимы и имеют ту же размерность; размерность «далеких» слоев может при этом подскакивать, как мы видели в главе 2.

Таких скачков размерности не происходит, если морфизм $f: X \to S$ плоский; в этом случае все слои X_s имеют одинаковую размерность, которая обозначается $\dim(f)$ и называется относительной размерностью f. Если морфизм f вдобавок проективный, то от $s \in S$ не зависит степень X_s, а также другие численные инварианты типа многочлена Гильберта, арифметического рода и т. п. Все это дает основания считать, что слои плоского морфизма конечного типа варьируются «непрерывно». Важно отметить, что такое понимание «непрерывности» имеет смысл и хорошо работает и в том случае, когда база S имеет нильпотенты (например, когда S — спектр локального артинова кольца, что позволяет построить теорию деформации схем и многообразий).

Даже при анализе одного конкретного многообразия его полезно бывает включать в семейство. Так, включая особенность в версальное семейство деформаций, мы как бы расправляем эту особенность, что позволяет более детально проследить ее генезис и строение [1]. Другой пример: пусть дано многообразие $X_{\mathbf{Q}}$ над полем $\mathbf{Q}$; тогда существует схема конечного типа X над $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}$, слой которой над общей точкой изоморфен $X_{\mathbf{Q}}$. Здесь многообразие $X_{\mathbf{Q}}$ раздвигается в арифметическом направлении. Применение к такой арифметической схеме X понятий и методов алгебраической геометрии, особенно теории пересечений и теории когомологий, приводит к различным интересным теоретико-числовым следствиям.

4.5. Гладкие семейства. Морфизм конечного типа $f: X \to S$ называется *гладким*, если он плоский и если все слои его — гладкие алгебраические схемы. Гладкий морфизм относительной размерности 0 называется *этальным*. Если схема S регулярна, а морфизм $X \to S$ гладкий, то схема X также регулярна.

Гладкие морфизмы обладают следующим свойством инфинитезимального подъема. Пусть дана S-схема Y и ее замкнутая подсхема Y_0 с тем же топологическим пространством, что и Y. Тогда если морфизм $f: X \to S$ гладкий, то любой S-морфизм $Y_0 \to X$ продолжается локально до S — морфизма $Y \to X$). Более точно, если схема Y аффинна, любой $Y_0 \to X$ продолжается до $Y \to X$. Такое продолжение единственно, если $f: X \to S$ этальный.

Как и в случае многообразий, гладкость морфизма тесно связана с его дифференциальными свойствами. Видимо нельзя сказать, что такое дифференциальная форма (или касательное расслоение) на произвольной схеме. Однако для относительных схем эти понятия имеют смысл и вводятся так же, как для многообразий (см. п. 7.7 главы 1). Пусть дана S-схема конечного типа X; *пучком относительных дифференциалов* X над S называется конормальный пучок к диагонали в $X \times_S X$. Обозначается он как $\Omega^1_{X/S}$; при естественном отождествлении диагонали с X пучок $\Omega^1_{X/S}$ — когерентный пучок на X. Конструкция Ω^1 коммутирует с заменой базы и контравариантна. Пучки высших дифференциалов $\Omega^p_{X/S}$ строятся, как обычно, с помощью внешних степеней.

Для алгебраической K-схемы X гладкость ее над $\operatorname{Spec} K$ эквивалентна тому, что пучок $\Omega^1_{X|K}$ как $\mathcal{O}_X$-модуль локально свободен ранга $\dim X$. Поэтому гладкость морфизма $f: X \to S$ равносильна выполнению двух свойств: f плоский и $\Omega^1_{X|S}$ — локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль ранга $\dim(f)$.

ЛИТЕРАТУРА

В настоящее время имеется несколько современных изложений основ алгебраической геометрии, и каждое из них по своему хорошо. Прежде всего надо назвать грандиозный по замыслу, но так и оставшийся незавершенным труд Гротендика «Элементы алгебраической геометрии», или EGA [33]—[36]; из запланированных 13 глав вышли лишь 4, заняв при этом 8 книг. Впрочем, многие не вошедшие в EGA темы, разбираются в SGA (см. [37]—[40], а также библиографию к [41]). В EGA изложение ведется на языке схем и в максимальной общности. Более облегченные введения в теорию схем представляют [8], [28], [45], [53].

Изложение алгебраической геометрии с большим акцентом на алгебраические многообразия и классические вопросы имеется в [15], [41]. Алгебраическим многообразиям над полем комплексных чисел и применению, наряду с алгебраическими, аналитических и трансцендентных методов посвящены книги [32], [56]. Близко к ним стоит [13], где рассказывается о комплексно-аналитических множествах. Как примеры книг догротендиковского периода приведем [20], [43], [49], [58], [59].

Некоторые книги из списка литературы посвящены более специальным вопросам. По теории пересечений появилась книга [29]; близкая к ней K-теория излагается в [9]. С уклоном в бирациональную геометрию написана [45]. В [22], [44], [62] рассказывается про алгебраические группы, в [54],

[55] — про абелевы многообразия. Книги [19, 23, 65] содержат все нужные сведения из коммутативной алгебры. Дифференциальное исчисление на многообразиях излагается в [25], [26], [50], [64].

1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.,* Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982, 302 с.
2. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.,* Об одном классе квазиоднородных аффинных многобразий. Изв. АН СССР, сер. мат., 1972, *36,* № 4, 749—764
3. *Данилов В. И.,* Геометрия торических многообразий. Успехи мат. наук, 1978, *33,* № 2, 85—135
4. *Долгачев И. В.,* Абстрактная алгебраическая геометрия. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. 1972, *10,* 46—112
5. *Зак Ф. Л.,* Проекции алгебраических многообразий. Мат. сб., 1981, *116,* № 4, 593—602
6. *Исковских В. А.,* Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат.: 1979, *12,* 59—157
7. *Манин Ю. И.,* К пятнадцатой проблеме Гильберта. В кн. «Проблемы Гильберта». М.: Наука, 1969, 175—181
8. —, Лекции по алгебраической геометрии. Ч. I, Аффинные схемы. М.: МГУ, 1970, 133 с.
9. —, Лекции по алгебраической геометрии. Ч. 2, К-функтор в алгебраической геометрии. М.: МГУ, 1971, 86 с.
10. —, Новые размерности в геометрии. Успехи мат. наук, 1984, *39,* № 6, 47—74
11. *Суслин А. А.,* Проективные модули над кольцом многочленов свободны. Докл. АН СССР, 1976, *229,* № 5, 1063—1066
12. *Тюрин А. Н.,* Средний якобиан трехмерных многообразий. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат.: 1979, *12,* 5—57
13. *Чирка Е. М.,* Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985, 272 с.
14. *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат.: Фундам. направления, 1986, *11,* 290 с.
15. —, Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972, 567 с.
16. *Abhyankar S. S.,* On the problem of resolution of singularities. В кн. «Труды международного конгресса математиков, 1966». М. 1968, стр. 469—480
17. *Angéniol B.,* Familles de Cycles Algébriques—Schema de how. Berlin; Springer, 1981, 140 p.
18. *Artin M.,* Algebraic Spaces. Yale Math. Monographs 3, New Haven: Yale Univ. Press, 1971 (Пер. на рус. яз.; *Артин Ж.,* Алгебраические пространства. Успехи мат. наук, 1980, *26,* № 1, 181—205)
19. *Atiyah M., Macdonald I.,* Introduction to Commutative Algebra, Mass.: Addison—Wesley, 1969 (Пер. на рус. яз.: *Атья М., Макдональд И.,* Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972, 160 с.)
20. *Baldassarry M.,* Algebraic varieties. Berlin: Springer, 1956, 195 p. (Пер. на рус. яз.: *Бальдассарри М.,* Алгебраические многообразия. М.: ИЛ, 1961, 315 с.)
21. *Bass H., Connell E. H., Wright D.,* The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse. Bull. Amer. Math. Soc., 1982, *7,* 287—330
22. *Borel A.,* Linear algebraic groups. N.-Y.: Benjamin, 1969, 398 p. (Пер. на рус. яз.: *Борель А.,* Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972, 269 с.)
23. *Bourbaki N.,* Algèbre Commutative. Paris: Hermann, 1961—1965 (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.,* Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971, 707 с.)
24. —, Theory spectrales. Paris: Hermann, 1967, 166 p. (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки Н.,* Спектральная теория. М.: Мир, 1972, 183 с.)

25. —, Variétés différentielles et analytiques. Paris: Hermann, 1967—1971 (Пер. на рус. яз.: *Бурбаки М.*, Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. М.: Мир, 1975, 220 с.)
26. *Cartan H.*, Calcul différentiel. Formes différentielles. Paris, 1967, 178 p. (Пер. на рус. яз.: *Картан А.*, Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971, 392 с.)
27. *Deligne P.*, La conjecture de Weil, *1.* Publ. Math. IHES, 1974, *43*, 273—307 (Пер. на рус. яз.: *Делинь П.*, Гипотеза Вейля, *1.* Успехи мат. наук, 1976, *30*, вып. 5, 157—190)
28. *Dieudonne J.*, Algebraic geometry. Adv. Math., 1969, 3, 233—321 (Пер. на рус. яз.: *Дьедонне Ж.*, Алгебраическая геометрия. Математика, Сб. перев. ин. статей, 1962, *9*, № 1, 54—126)
29. *Fulton W.*, Intersection theory. Berlin; Springer, 1984, 470 p.
30. —, *Lazarsfeld R.*, Connectivity and its applications in algebraic geometry. In «Algebraic Geometry», Berlin: Springer, 1981, 26—92
31. *Godement R.*, Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris: Hermann, 1958, 283 p. (Пер. на рус. яз.: *Годеман Р.* Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961).
32. *Griffiths Ph.*, *Harris J.*, Principles of algebraic geometry. N.-Y.: Interscience, 1978, 813 p. (Пер. на рус. яз.: *Гриффитс Ф.*, *Харрис Дж.*, Принципы алгебраической геометрии, М.: Мир, 1982)
33. *Grothendieck A.*, *Dieudonne J.*, Eléments de géometrie algébrique. I. Heidelberg: Springer, 1971, 466 p. (Пер. на рус. яз. Успехи мат. наук., 1972, *27*, № 2, 135—148)
34. —, —, Eléments de géometrie Algébrique. II. Publ. Math. IHES, 1961, *8*, 222 p.
35. —, —, Eléments de geométrie algébrique. III. Publ. Math. IHES, 1961—1963, *11*, *17*.
36. —, —, Elements de geométrie algébrique. IV. Publ. Math. IHES, 1964, *20*, 1965, *24*; 1966, *28*; 1967, *32*.
37. —, *SGA 1*, Revêtements étale et groupe fondamental. Berlin: Springer, 1971, 447 p.
38. —, *SGA 2*, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théoremes de Lefschetz locaux et globaux. Amstr.: North-Holland, 1968, 287 p.
39. —, *Demazure M.*, *SGA 3*, Schémas en groupes. I. Berlin: Springer, 1977, 562 p.
40. —, *Deligne P.*, *Katz M.*, *SGA 7*, Groupes de Monodromie en Geométrie Algébrique. Berlin: Springer, 1973, 438 p.
41. *Hartshorne R.*, Algebraic geometry. N.-Y.: Springer, 1977, 496 c. (Пер. на рус. яз.: *Хартсхорн Р.*, Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981, 599 с.)
42. —, Varieties of small codimension in projective space. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, *80*, 1017—1032.
43. *Hodge W. V. D.*, *Pedoe D.*, Methods of algebraic geometry, *V. 2.* Cambr. Univ. Press, 1952 (Пер. на рус. яз.: *Ходж В.*, *Пидо Д.*, Методы алгебраической геометрии. Т. *2.* М.: ИЛ, 1954)
44. *Humphreys J. E.*, Linear algebraic groups. N.-Y.: Springer, 1975, 248 p. (Пер. на рус. яз.: *Хамфри Дж.*, Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980)
45. *Iitaka S.*, Algebraic geometry. An introduction to birational geometry of algebraic varieties, N.-Y.: Springer, 1982, 357 p.
46. *Kleiman S. L.*, Towards a numerical theory of ampleness. Ann. Math., 1966, *84*, 293—344
47. —, The enumerative theory of singularities. In «Real and Complex Singularities», Oslo: Sijthoff and Noordhoff, 1977, 297—396 (Пер. на рус. яз.: *Клейман С. Л.*, Численная теория особенностей, Успехи мат. наук, 1980, *35*, вып. 6, 69—148)
48. *Klein F.*, Vorlesungen über die Sntwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil 1. Berlin, 1926, 385 p. (Пер. на рус. яз.: *Клейн Ф.*, Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: Гостехиздат, 1937)

49. *Lang S.,* Introduction to algebraic geometry. N.-Y.: Interscience publ., 1958, 260 p.
50. —, Introduction to differentiable manifold. N.-Y.: Interscience, 1962, 126 p. (Пер на рус яз.: *Ленг С.,* Введение в теорию дифференцируемых многообразий, М.: Мир, 1967, 203 с.)
51. *Miyanishi M.,* Non-complete algebraic surfaces. Berlin: Springer, 1981, 244 p.
52. *Mumford D.* Geometric invariant theory. Heidelberg: Springer, 1965, 146 p. (Пер. на рус. яз. в книге: *Дьедонне Ж., Кэролл Дж., Мамфорд Д.,* Геометрическая теория инвариантов. М.: Мир, 1974, 125—256)
53. —, Lectures on curves on an algebraic surface. Princeton; Univ. Press, 1966, 200 p. (Пер. на рус. яз.: *Мамфорд Д.,* Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М.: Мир,1968, 236 с.)
54. —, Abelian varieties. Oxford: Univ. Press, 1970, 300 p. (Пер. на рус. яз.: *Мамфорд Д.,* Абелевы многообразия. М.: Мир, 1971, 299 с.)
55. —, Curves and their Jacobians. Ann Arbor: Univ. Michigan Press, 1975
56. —, Algebraic geometry. *1.* Complex projective varieties. Berlin: Springer, 1976, 186 c. (Пер. на рус. яз. *Мамфорд Д.,* Алгебраическая геометрия, *1.* Комплексные проективные многообразия. М.: Мир, 1979, 256 с.)
57. *Quillen D.,* Projective modules over polynomial rings. Invent. math., 1976, *36,* 167—171
58. *Samuel P.,* Méthodes d'algebre abstraite en géometrie algebrique. Heidelberg: Springer, 1955, 133 p.
59. *Semple J. G., Roth L.,* Introduction to algebraic geometry. Oxford: Univ. Press, 1949
60. *Serre J.-P.,* Faisceaux algébriques cohérents. Ann. Math., 1955, *61,* 197—278 (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.,* Когерентные алгебраические пучки. В сб. «Расслоенные пространства и их приложения», М.: ИЛ, 1958, стр. 372—458)
61. —, Geométrie algébrique et géometrie analytique. Ann. Inst. Fourier, 1956, *6,* 1—42
62. —, Groupes algébriques et corps de classes. Paris: Hermann, 1959, 202 p. (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.,* Алгебраические группы и поля классов. М.: Мир, 1968, 285 с.).
63. —, Algebre locale. Multiplicités. Berlin: Springer, 1965, 190 p. (Пер. на рус. яз.: *Серр Ж.-П.,* Локальная алгебра и теория кратностей. Сб. перев. ин. статей «Математика», 1963, *7,* № 5, 3—93)
64. *Wells R. O.,* Differential analysis on complex manifolds. N.-Y.: Prentice-Holl, 1973, (Пер. на рус. яз.: *Уэллс Р.,* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976, 284 с.)
65. *Zariski O., Samuel P.,* Commutative algebra. V. *1, 2.* Princeton: van Nostrand, 1958, 1960 (Пер. на рус. яз.: *Зарисский О., Самюэль П.,* Коммутативная алгебра. Т. *1, 2.* М.: ИЛ, 1963, 373, 438 с.)

УДК 512.772+515.17.32

В. В. Шокуров, Римановы поверхности и алгебраические кривые (с предисловием И. Р. Шафаревича). «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 23 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 5—171

Обзор посвящен вводным идеям, примерам, основным понятиям и результатам теории римановых поверхностей и теории алгебраических кривых. Обсуждаются теоремы существования, численная геометрия кривых, абелевы многообразия и якобианы, тэта-функции. Библ. 75.

УДК 512.7

В. И. Данилов. Алгебраические многообразия и схемы. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 23 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 172—302

Вводятся основные понятия алгебраической геометрии: алгебраического многообразия, морфизма, рационального отображения, гладкости, полноты. Для проективных многообразий излагаются степень многообразия, линейные системы, теория пересечений, многообразия Чжоу. В последней главе предыдущие понятия и результаты переносятся на схемы. Библ. 65.