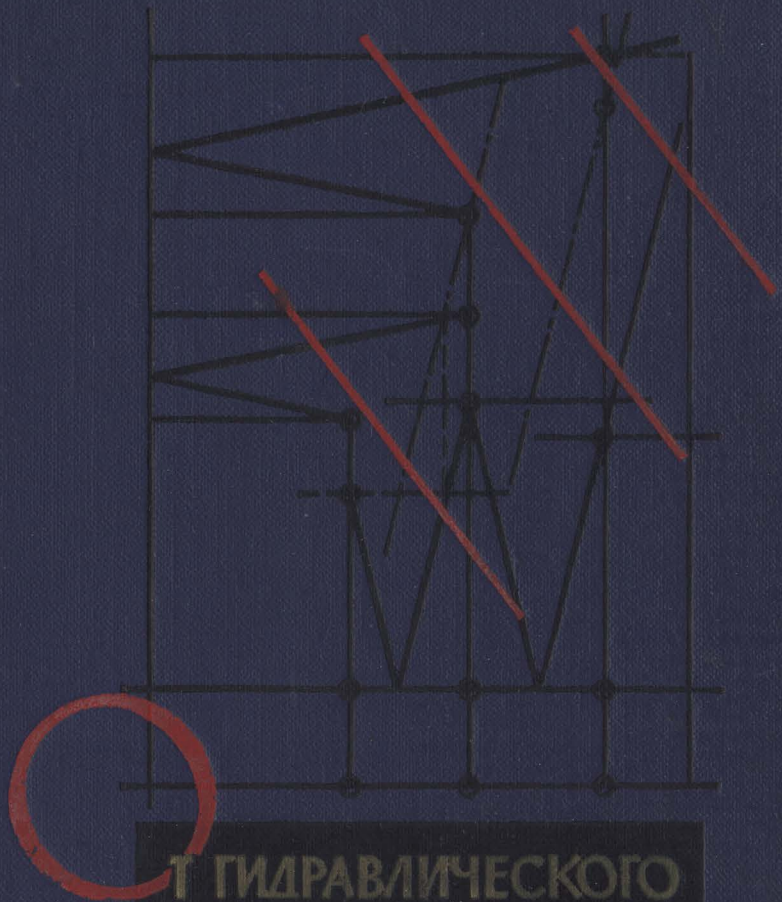


Л. БЕРЖЕРОН



О ГИДРАВЛИЧЕСКОГО  
УДАРА В ТРУБАХ  
ДО РАЗРЯДА  
В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ  
СЕТИ

МАШГИЗ



**МАШГИЗ**

**DU COUP DE BÉLIER**  
**EN HYDRAULIQUE**

**AU COUP DE Foudre**  
**EN ÉLECTRICITE**

**MÉTHODE GRAPHIQUE GÉNÉRALE**

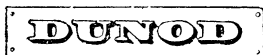
PAR

**L BERGERON**

INGÉNIEUR DES ARTS ET MÉTIERS

PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

PARIS



92 RUE BONAPARTE (VI)

1930

Л. БЕРЖЕРОН

ОТ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО  
УДАРА В ТРУБАХ  
ДО РАЗРЯДА  
В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

(ОБЩИЙ ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ)

Перевод с французского  
*С. Г. БАТЮШКОВОЙ*

под редакцией  
д-ра техн. наук В. А. АРХАНГЕЛЬСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1962

В книге изложен оригинальный и практически ценный графический метод, применяемый при определении возможных явлений удара в гидравлике, электротехнике и при конструировании разного рода машин, рабстающих на удар, в целях предотвращения аварии и наиболее эффективного использования систем и установок. Метод позволяет избегать больших и длительных расчетов, даже в самых сложных случаях, и получать оптимальные параметры графическим путем в сравнительно короткие сроки и силами специалистов средней квалификации.

Книга предназначена для инженерно-технических работников, научно-исследовательских организаций, конструкторских бюро и промышленных предприятий.

---

---

## ОТ РЕДАКТОРА

В предлагаемой читателю книге Л. Бержерона подведены итоги многолетних исследований как самого автора, так и ряда других, главным образом, французских исследователей — вопроса о распространении плоских волн в упругих жидких и твердых телах и системах таких тел. Основное содержание книги посвящено изложению графических методов решения дифференциальных уравнений распространения плоских волн. Решения, получаемые графическим методом, являются строгими в случае отсутствия распределенных сил трения, обуславливающих затухание колебаний. Предлагаемые автором решения при условном учете сил трения основаны на замене распределенных сопротивлений сосредоточенными и являются приближенными. Ценность графического метода, описываемого в книге, заключается при этом в возможности решать — хотя бы приближенно — такие сложные задачи, решение которых аналитическим путем представляет значительные трудности, практически иногда трудно преодолимые. В то же время в практике, как правило, инженеру приходится встречаться как раз с задачами большой сложности.

Результаты исследований в постановке, излагаемой в книге Бержерона, следует отнести уже к классическим. Однако, несмотря на значительную давность (подытоживающая книга Бержерона вышла в свет еще в 1950 г.), этот метод почти неизвестен в широких научно-технических кругах в Советском Союзе. В то же время, по указанному выше причинам, этот метод может как найти себе применение, так, возможно, и получить дальнейшую разработку в проектных и исследовательских организациях.

Особенно большое значение применение графического метода Бержерона может иметь для расчетов неустановившихся движений в напорных трубопроводах. Эта область применения метода освещается в книге Бержерона наиболее подробно. Уместно отметить, в связи с этим, что современные французские гидравлики (Л. Эсканд, Ж. Нугаро и др.) широко используют графический метод при расчетах весьма сложных напорных гидравлических систем, предлагая распространять его в известных условиях также на

случай безнапорного течения, возможность чего была показана также еще Бержероном в его книге.

Бержерон иллюстрировал изложение метода весьма большим числом примеров его применения к решению практических задач из различных областей механики. В русский перевод включена только часть примеров в количестве, необходимом для того, чтобы читатель усвоил сущность графических построений и смог приобрести необходимые навыки; другая часть — примеры расчета весьма сложных систем — не включена в перевод, поскольку сопутствующие этим случаям графические построения не содержат в себе принципиально новых элементов. Имея в виду читателей, которые, возможно, пожелают обратиться также и к материалам, содержащимся только в подлиннике, в части книги, даваемой в переводе с сокращениями, введена двойная нумерация параграфов, причем нумерация в скобках в переводе совпадает с порядковой нумерацией в подлиннике.

Как уже упоминалось, наиболее полно в книге Бержерона представлена задача неустановившегося движения в напорных трубопроводах, причем дается только приближенный учет гидравлических сопротивлений. Имея в виду помимо того специфические особенности, свойственные графическим методам вообще, признано целесообразным дополнить русский перевод книги Бержерона приложением. Приложение, написанное И. А. Чарным и Г. Д. Розенбергом, содержит краткое изложение основных современных аналитических методов теории неустановившегося движения (с малыми дозвуковыми скоростями) реальных сжимаемых жидкостей в трубах: метода характеристик, предложений по линейаризации уравнений и аналитических методов решения линейаризованных уравнений.

Приложение должно с одной стороны дать читателю более ясное представление о существовании упрощающих допущений, используемых в графическом методе, и с другой стороны — ознакомить его с современным развитием исследований, направленных на получение решений при отказе от названных допущений.

Объединение в одной книге графических и аналитических методов возможно несколько нарушает единство стиля, но это, по нашему мнению, вполне окупается более полным освещением затрагиваемых в книге вопросов и потому представляется, несомненно, полезным.

---

---

---

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ФРАНЦУЗСКОМУ ИЗДАНИЮ

Мысли человека с таким большим кругозором, как у Л. Бержерона, могли бы заполнить тома сочинений; Л. Бержерон опубликовал лишь результаты своих трудов, относящихся к последним годам его научной деятельности и посвященных вопросу о распространении волн в гидравлических устройствах, в частности, классическому случаю гидравлического удара.

После появления в 1931 г. первых работ Л. Бержерона я не скрыл от него, что заглавие «Графический метод» меня не удовлетворяет. Я находил, что в наше время, когда существует столь значительное количество графических методов, такой заголовок слишком скромен и является недостаточно конкретным; об этом мы говорили не раз. В конечном итоге указанный заголовок был сохранен для одной из основных работ; названием же всей книги, на котором Бержерон окончательно остановился, является то, под которым в данное время эта работа предлагается читателю. Этот заголовок отражает многогранность изысканий автора, углублявшего свой труд на протяжении 20 лет, начав с гидравлического удара и затронув самые разнообразные области, дойдя до такого, казалось бы, отдаленного вопроса, как разряд молнии.

Еще до Л. Бержерона задача о гидравлическом ударе привлекала внимание исследователей-аналитиков, но они встретились с большими трудностями; поэтому для достижения результатов часто представлялось необходимым вносить упрощения в исходные данные, тогда как метод Л. Бержерона позволяет этого избежать. Бержерон стремился к наглядному изображению явления. При помощи представления о перемещающихся наблюдателях ему удалось добиться визуализации явления во всех его деталях; даже в наиболее сложных случаях эти явления отображаются чертежом, дающим возможность проследить все развитие процесса.

«Человечки» Бержерона (слава Ампера не уменьшилась от выражения «человечки» Ампера) проникают сквозь любые запутанные сети и описывают поведение волн. Предвидение (количественное) возможности гидравлического удара оказывается теперь под силу персоналу конструкторских бюро производственного характера. Полезность метода доказана возможностью многочислен-



ных обобщений, вследствие чего в настоящее время вряд ли найдется труд по гидравлике, в котором не встретились бы диаграмма Бержерона.

Правда, и другие исследователи приходили к аналогичным методам до Бержерона или одновременно с ним, но никто не сумел так упростить, расширить и умножить практическое применение этого графического метода, как это сделано Бержероном с проявленным им необыкновенным искусством. Л. Бержерон поражал всех, кто присутствовал на его выступлениях, быстротой, с которой он несколькими карандашными штрихами решал поставленные перед ним задачи.

Цифровые таблицы были введены еще до Барема, но систематическое их применение последним привело к тому, что им было присвоено имя и теперь их называют просто «баремами». Почему не сделать того же и в отношении графического метода и не ввести наименование «бержерон»? В таком случае можно было бы говорить: «читать бержерон», как говорят обычно «читать чертеж», или «найти в бареме». Пожелаем, чтобы «бержерон» как имя нарицательное положило конец упомянутой выше дискуссии по единственному вопросу, по которому у нас отсутствовало единомыслие с автором.

Обо всем, что можно прочитать «на бержероне», читатель узнает из предлагаемого труда. Он может быть уверен, что в путешествиях по гидравлическим трубопроводам или вдоль электрических сетей, где Луи Бержерон будет ему гидом, шаг за шагом показывающим все детали протекающих в них процессов, он узнает много нового, а если он уже знаком с литературой, исследующей вопрос аналитическими методами, он получит удовлетворение, увидев явления представленными с такой наглядностью, какой они для него до этого не обладали.

Эта книга, предназначенная для инженеров, необходима всем, кто хочет быть в курсе прогресса в области гидравлики; другим она откроет возможности применения метода в смежных областях.

Положит ли метод Бержерона, с точки зрения запросов практики, конец героической эпохе истории гидравлического удара или же он обозначает только решающий поворот в данной области, скажет будущее.

Л. Бержерон четко определил основные гипотезы и сам предложил опыты, имеющие целью изучить возможность мгновенного закрытия. Война прекратила эти опыты. Сердце и ум истинных французов были направлены на другое, а Л. Бержерон был хорошим французом. Пожелаем, чтобы его опыты были продолжены и чтобы были умножены наблюдения за деформацией волн в ходе их распространения, поскольку с тех пор, как инженеры почувствовали уменьшение опасности гидравлического удара, активность исследователей в этой области снизилась. Труд Луи Бержерона будет несравненным путеводителем для тех, кто и впредь будет проводить такие исследования.

*Эмиль-Жорж* **БАРРИЛЛЬОН**  
Французская Академия Наук

Механика — область, в которой проявляется искусство инженера, состоит из двух основных разделов: статики и динамики. Динамика, в свою очередь, делится на две части: в одной рассматривается движение сравнительно небольших тел, не способных изменять свою форму и трактуемых как материальные точки, а в другой — тел относительно большой величины, которые под влиянием сил, определяющих их движение, деформируются, чем нельзя пренебречь и что может быть даже определяющим в исследуемом явлении.

Для иллюстрации этого различия рассмотрим в качестве примера кривошип, приводящий в движение шатун, который, в свою очередь, сообщает поршню возвратно-поступательное движение.

В одном случае шатун может быть коротким. Смещение поршня при этом передается пальцу кривошипа мгновенно. В каждое мгновение усилие во всех сечениях шатуна будет одинаковым и известным, поскольку можно принять, что его масса сконцентрирована в одной точке — центре тяжести. Это — пример обычной динамики.

В другом случае шатун может иметь большую длину. Тогда при смещении пальца кривошипа деформируется сначала ближайший к нему участок шатуна. Затем деформации распространяются дальше, но пока они достигнут поршня, палец кривошипа сместится уже столь существенно, что движения поршня и пальца не могут рассматриваться как синхронные; усилия в шатуне будут теперь переменными как по его длине, так и во времени. Это — пример из динамики упругих тел.

Среди тел или механизмов отличают такие, у которых может быть выделен один основной размер, который называют длиной, в то время как поперечными размерами по отношению к длине можно пренебречь. Такими телами являются: длинный стальной стержень, подвергаемый удару или кручению; натянутая струна, подверженная поперечным ударам; напорный трубопровод, заполненный водой; линия электропередачи, в которой течет электрический ток. Состояние в некотором сечении таких тел можно определить двумя величинами —  $h$  и  $v$ . Этим величинам соответствуют:

в случае металлического стержня — продольное напряжение и продольная скорость, или момент кручения и угловая скорость вращения;

в случае натянутой струны — поперечная сила и поперечная скорость;

в случае электрического провода — напряжение (вольты) и сила тока (амперы);

в случае напорного трубопровода, заполненного жидкостью, — давление и скорость течения (расход).

Изменение состояния, возникшее в каком-нибудь сечении такого тела, распространяется затем по одну и другую сторону этого сечения, оставаясь постоянным, если сохраняются неизменными основные параметры тела — его поперечные размеры и физические свойства<sup>1</sup>. Аналитически это выражается тем, что если мы будем наблюдать некоторое заданное состояние тела ( $h, v$ ) в зависимости от времени  $t$  и координаты расстояния  $x$ , то оказывается, что оно является функцией не  $x$  и  $t$ , но величин  $(x - at)$ , или  $(x + at)$ , т. е. такой функцией, величина которой остается неизменной для наблюдателя, перемещающегося вдоль тела со скоростью  $\pm a$ . Это физическое явление (полностью определяемое тем условием, что, возникнув в одном месте, оно распространяется, не претерпевая изменений) получило наименование волны; точнее его следовало бы называть фронтом волн, определяя волну в целом, как последовательность фронтов волн, проходящих через данное сечение.

Когда непрерывная последовательность во времени фронтов волн может быть описана синусоидой, что имеет место в акустике и нередко в электротехнике, закон их распространения выражается относительно простыми, достаточно известными формулами, частое употребление которых привело к отождествлению волны и синусоиды. Более того, поскольку эти законы в общем случае определялись только для одной из двух величин, характеризующих состояние тела, — в электротехнике, например, преимущественно для напряжения  $h$ , как более опасного параметра, — многие инженеры в конце концов стали упускать из виду, что и другая величина  $v$  также одновременно изменяется и что ее изменения распространяются с такой же скоростью. Неверные представления исчезают, если возвратиться к исходному определению «фронта волны», подразумевавшему распространение вдоль тела изменений одновременно двух параметров  $h$  и  $v$ , определяющих состояние тела в данном месте и в данное время.

В названных выше линейных телах фронтам волны присваивается наименование плоских для того, чтобы подчеркнуть, что при их распространении вдоль тела такие фронты волн остаются неизменными. Законы распространения фронта волн одинаковы для всех тел и к их исследованию применим единый метод, несмотря на все различие между, например, струной рояля и жидкостью, заключенной в напорном трубопроводе. В самом деле,

<sup>1</sup> Имеются в виду — хотя это и не оговорено специально — случаи, когда можно пренебрегать силами сопротивления при распространении возникших изменений состояния (Прим. ред.)

когда составляют уравнения движения этих разнообразных тел, то всегда приходят к одной и той же системе двух уравнений в частных производных для  $h$  и  $v$  по  $x$  и  $t$ , называемых уравнениями колебаний струны. Решением этой системы является, как это может быть легко показано, произвольная функция величины  $(x \pm at)$ , что и определяет, как указывалось выше, волновой характер явления. Это положение, которое подтверждается также экспериментально, может быть принято без каких бы то ни было дополнительных обоснований; его можно рассматривать не только как результат решения, но как физическое свойство упругих тел одного измерения. В этой конкретной концепции заключается реальная действительность, так как уравнения не создают явлений, но лишь переводят их на более ясный, условный язык. Физическое явление познается расчетным или экспериментальным путем, после чего это знание используют уже не как алгебраическое уравнение, а как применяемый на практике закон физики.

При изучении распространения плоских волн, т. е. изменений состояния или режима упругих линейных тел, возврат к физической конкретизации оказался исключительно плодотворным и позволил разработать графический метод исследования, точность, ясность и простота которого исключительно велики. Сложные проблемы, возникающие ежедневно при эксплуатации промышленных установок, в своем большинстве не представляющие ни в настоящем, ни в будущем возможности аналитического решения, могут быть решаемы этим методом с необходимой для практики точностью любым квалифицированным инженером, не требуя специальных математических познаний. Наконец само изложение метода достигло постепенно, без ущерба для строгости, больших лаконичности и простоты, поскольку применение его возможно при использовании лишь простейших законов механики, известные ученику хорошей профессионально-технической школы. Это является результатом удачной популяризации, которую самый требовательный ученый не смог бы квалифицировать как вульгаризацию<sup>1</sup>.

Конечно, представляет интерес изложение этого метода применительно к каждой отрасли механики, где он может найти приложение. Но наибольшую и важнейшую помощь этот метод оказывает бесспорно при решении гидравлических задач. Здесь любая установка машины, турбины или насоса выдвигает гидравлические проблемы, иногда необычайно сложные, часто связанные с вопросами безопасности. Излагаемый метод позволяет исследовать

---

<sup>1</sup> Мы считаем излишним приводить библиографические справки, которые показали бы историю развития метода, завершающуюся появлением настоящего труда. Это только загромодило бы книгу, не способствуя повышению интереса к ней. Тем не менее, нельзя не вспомнить с благодарностью одного из первых (по времени) авторов — г-на Лови, который еще в 1928 г. изложил обоснования метода в книге «Druckschwankung in Druckrohrleitung», а также автора, который впервые полностью показал практическую применимость метода в гидравлике — М. О. Шнидера, печатавшегося в швейцарских и немецких технических журналах.

здесь явления, которые раньше были загадочными. Мало сказать, что он приносит пользу, метод становится для этой области настоящим благодеянием, и, может быть, следовало бы посвятить эту работу полностью гидравлике.

Целью настоящей книги и является в первую очередь ознакомление гидравликов с новым методом расчета гидравлического удара, сделав это достаточно исчерпывающе с тем, чтобы даже у рядового инженера, который возьмет на себя труд его усвоить, не осталось бы в этой области никаких неясностей. Это ознакомление является содержанием первой части книги.

Вторая часть посвящена многочисленным примерам практического применения метода, которые взяты также из гидравлики.

Что касается других областей механики, включая электротехнику, им посвящена третья часть книги, в которой применительно к каждой из областей приводятся изложение метода и практические примеры, достаточно многочисленные, чтобы читатель мог руководствоваться ими в своей деятельности.

Таким образом, труд предназначается не только для гидравликов, но и для инженеров других специальностей, тем более, что единый метод делает возможным использование по аналогии примеров из одной области в других областях (сосредоточенная масса является аналогом индуктивной катушки, пружина или резервуар — аналогом конденсатора и т. д.).

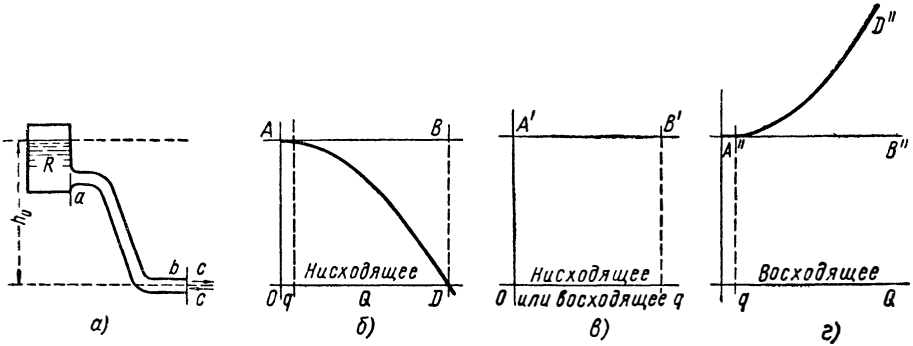
Работа в целом представляется автору синтезом ряда задач, относящихся к механике, гидравлике и электротехнике, решаемых единым графическим методом.

---

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ИЗМЕНЕНИЙ  
ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РЕЖИМА В НАПОРНЫХ  
ТРУБОПРОВОДАХ

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 1. Установившийся режим. Для того чтобы расход  $Q$  в напорном трубопроводе оставался постоянным, необходимо и достаточно поддерживать на концах трубопровода неизменную разность напора  $h$ ; величина последней зависит только от расхода  $Q$  и от конструкции трубопровода. Если нанести значения  $h$  на оси ординат и значения  $Q$  на оси абсцисс, получим кривую, которая харак-



Фиг. 1.

теризует данный трубопровод и носит поэтому название «характеристической кривой трубопровода».

Вне этой кривой установившийся режим невозможен.

Например, система, состоящая из резервуара  $R$  с постоянным уровнем воды в нем и трубопровода  $ab$ , в котором имеет место нисходящее течение (фиг. 1, *а*), имеет в качестве характеристической кривой в сечении  $b$  параболу (фиг. 1, *б*), которую можно получить, отнимая от отрезка  $OA = h_0$  потери напора между сечениями  $a$  и  $b$ . Точка  $D$  параболы является предельной, поскольку в этом случае весь напор  $h_0$  поглощается потерями.

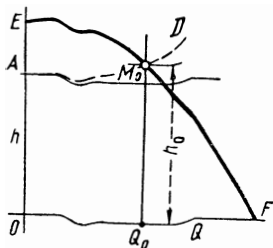
При малых изменениях расхода относительно его нулевого значения характеристическая кривая может быть заменена с достаточной точностью отрезком горизонтальной прямой  $A'B'$  (фиг. 1, *в*).

При восходящем потоке в том же трубопроводе характеристическая кривая для сечения  $b$  представляет собой параболу  $A''D''$

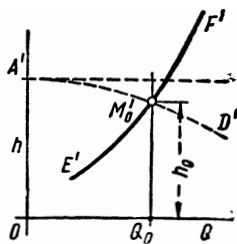
(фиг. 1, 2), симметричную параболу  $AD$  относительно горизонтали, проходящей через точку  $A$ .

Действительно, напор в сечении  $b$  должен в этом случае превышать напор  $h_0$  на величину потерь между сечениями  $b$  и  $a$ .

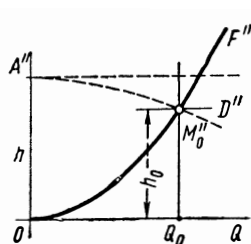
Все режимы, определяемые точками на характеристической кривой трубопровода, возможны, однако устанавливается только



Фиг. 2.



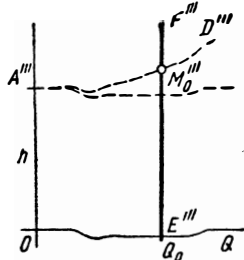
Фиг. 3.



Фиг. 4.

один из них, в зависимости от устройства, предназначенного для создания или поддержания нужного режима.

Для этого устройства, каково бы оно ни было (кран, турбина, насос), давление является функцией проходящего через него расхода, и кривая, которой изображается эта функция, характеризует устройство, т. е. является его характеристической кривой.



Фиг. 5.

Например, на фиг. 2 представлена характеристическая кривая  $EF$  центробежного насоса при постоянном числе оборотов; на фиг. 3 показана характеристическая кривая  $E'F'$  реактивной турбины с постоянным числом оборотов; линия  $OF''$  на фиг. 4 представляет собой характеристическую кривую отверстия с истечением в атмосферу или турбины Пельтона при некотором открытии иглы; наконец,  $E'''F'''$  на фиг. 5 представляет характер-

истическую кривую объемного насоса с постоянным числом оборотов, подающего постоянный расход воды  $OE'''$ , независимо от величины напора.

Для каждого из этих устройств возможными установившимися режимами работы ( $h, Q$ ) являются режимы, определяемые точками на характеристических кривых.

Отсюда следует, что при последовательном соединении трубопровода и регулирующего устройства режим их совместной работы должен определяться точкой пересечения характеристических кривых трубопровода и устройства, — единственной общей точкой этих двух кривых.

Это будет, например, точка  $M_0$  (фиг. 2) в случае центробежного насоса и точка  $M_0'''$  (фиг. 5) в случае объемного насоса, подающего воду в трубопровод, изображенный на фиг. 1; точка  $M_0''$

(фиг. 3) в случае реактивной турбины и точка  $M_0''$  (фиг. 4) в случае турбины Пельтона, установленной в конце того же трубопровода или в случае истечения через концевое сечение трубопровода.

Трубопровод и регулирующие аппараты могут быть более или менее сложными, но задача определения установившегося режима их совместной работы всегда сводится к изложенному, а именно, к нахождению характеристической кривой  $h$ ,  $Q$  трубопровода и характеристической кривой  $h$ ,  $Q$  аппарата или комплекса аппаратов, действующих одновременно. Точка пересечения обеих кривых определяет давление  $h_0$  в месте размещения регулирующего устройства и расход  $Q$  при установившемся режиме в системе.

**§ 2. Неустановившийся режим.** Если какое-нибудь из регулирующих устройств меняет режим своей работы во времени (происходит открытие или закрытие проходных отверстий затворов, уменьшение или увеличение угловой скорости вращения насоса, изменение открытия турбины, или в других случаях уменьшение давления в сжатом газе, изменение уровня воды в верхнем или нижнем бьефе и так далее) давление  $h$  и расход  $Q$  изменяются во времени, также и во всех точках системы. Точка, определяющая режим в сечении регулирующих устройств, меняет свое положение в координатном поле  $h$  и  $Q$  и ее перемещения могут описывать более или менее сложную кривую; в каждый отдельный момент времени она находится по-прежнему в пересечении характеристических кривых трубопровода и регулирующих устройств в данный момент, однако сами эти характеристические кривые будут переменными во времени.

Таким образом, задача, возникающая при неустановившемся режиме, приводится к той же постановке, как и в случае установившегося режима: необходимо иметь характеристические кривые трубопровода и регулирующих устройств, однако их необходимо знать для каждого момента времени; исследование неустановившегося режима в гидравлических установках сводится к получению этих характеристических кривых. В последующем мы проиллюстрируем применение таких кривых на многочисленных конкретных примерах, заимствованных из практики устройств, широко распространенных в промышленности.

В дальнейшей точке (в координатном поле  $h$ ,  $q$ ), которой определяется режим в данном сечении, в данный момент времени будем называть соответственной<sup>1</sup>.

**§ 3. Основные закономерности неустановившегося движения в напорных трубопроводах.** Составление условий динамического равновесия для бесконечно малого отрезка трубопровода и заключенной в нем жидкости приводит, как это было отмечено в предисловии, к получению системы двух дифференциальных уравнений в частных производных с независимыми  $x$  (простран-

<sup>1</sup> В подлиннике «point figuratif» (Прим. ред.)



ство) и  $t$  (время). Решение этих уравнений показывает, что неустановившееся движение жидкости выразится в форме распространения вдоль трубопровода фронтов волн давления и скорости. Фронты волн, так же как и скорость их распространения, не претерпевают изменений при перемещении вдоль трубопровода, если физические величины, характеризующие трубопровод и жидкость, остаются неизменными. Такие волны называются плоскими.

Можно принять как постулат физического порядка, что изменение режима, возникшее в некотором сечении трубопровода, распространяется в обе стороны от этого сечения в виде плоской волны.

Принятие этого постулата в качестве эмпирического закона оказывается достаточным для того, чтобы определить основные закономерности неустановившегося движения с помощью элементарных теорем механики, не прибегая к каким бы то ни было специальным математическим приемам.

Подобный способ изложения представляет значительный практический интерес, поскольку он не выходит за пределы физики явления и конкретных условий. Инженер-практик, знакомый с законами механики и умеющий ими пользоваться, сможет свободно проследить и понять закономерности, управляющие таким сложным явлением, как распространение волн, излагаемые со всей необходимой строгостью при исключительной простоте самого применяемого метода.

Рассмотрим бесконечный трубопровод постоянного диаметра  $D$ , имеющий стенки толщиной  $e$ , в котором первоначальный установившийся режим характеризуется скоростью течения  $c_0$  (фиг. 6,  $a$ ) и, следовательно, расходом  $q_0 = c_0 s$  (где  $s$  — площадь поперечного сечения), и пьезометрическим напором  $h_0$  в метрах столба жидкости, или давлением  $p_0 = \omega_0 h_0$ , где  $\omega_0$  — удельный вес жидкости.

Предположим, что в некотором сечении  $X$  произошло в течение времени  $t'$  по какой-либо причине изменение скорости от значения  $c_0$  до значения  $c_1$  и в результате этого также напора от значения  $h_0$  до  $(h_0 + F)$  (это может быть вызвано, например, закрытием вентиля, происходящим в течение промежутка времени  $t'$ ). Мы знаем, что это изменение режима распространяется по направлению к  $Y$  со скоростью  $a'$ . Возрастание давления  $F$  вызывает при этом увеличение диаметра трубы, которое (если пренебречь инерционностью) распространяется с той же абсолютной скоростью  $a'$ .

В некоторый момент времени  $\tau$  начало изменения режима будет приурочено, следовательно, к сечению  $B$  на расстоянии  $\overline{XB} = a'\tau$ , а окончание этого изменения к сечению  $A$  на расстоянии  $\overline{XA} = a'(\tau - t')$ .

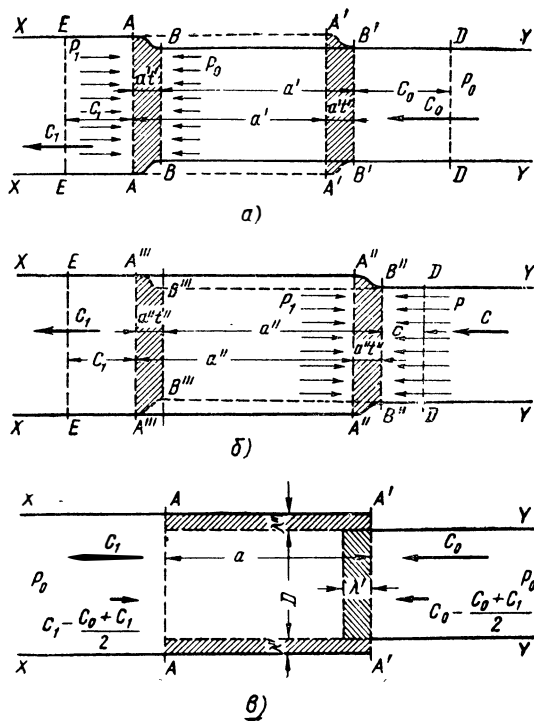
В результате, изменение режима в сечении  $X$ , происшедшее в течение отрезка времени  $t'$ , в дальнейшем распространяется

вдоль трубопровода в пределах отрезка длиной  $a'l'$ , называемого лобом волны, который перемещается со скоростью  $a'$ , не претерпевая изменений.

Спустя одну секунду лоб волны будет занимать положение  $A'B'$ , причем  $\overline{AA'} = \overline{BB'} = a'$ .

Применим к этому перемещению теорему количества движения в проекциях на ось трубы.

Рассмотрим объем жидкости, ограниченный с одной стороны сечением  $AA$ , а с другой — сечением  $DD$ , находящимся на рас-



Фиг. 6.

стоянии  $s_0$  от сечения  $B'B'$ . Через одну секунду частицы, находившиеся первоначально в этом объеме, заполняют объем, ограниченный сечением  $B'B'$  и сечением  $EE$ , находящимся на расстоянии  $s_1$  от  $AA$ . Действительно, сечение  $DD$  перемещается на протяжении этой секунды с первоначальной скоростью  $s_0$  и приходит в положение  $B'B'$  в то время, как сечение  $AA$  перемещается с измененной скоростью  $s_1$  и достигает положения  $EE$ .

Изменение количества движения воды в трубопроводе в течение этой единицы времени ограничивается изменением его в вышеуказанном объеме; это изменение равно сумме всех сил, приложен-

ных к данному объему, в проекциях на направление скорости; это и является содержанием теоремы.

Объем  $ABB'D$  включает в себя лоб волны  $AB$ , количество движения которого обозначим через  $M$ , затем объем  $(a' + c_0)s$ , все частицы которого имеют скорость  $c_0$ , и количество движения которого в проекции на ось трубопровода выражается как

$$[\rho_0 (a' + c_0) s] \cdot c_0, \quad (1)$$

где  $\rho_0 = \frac{\bar{\omega}_0}{g}$  — плотность при давлении  $p = \bar{\omega}_0 h_0$ .

Объем  $EA'B'$  включает в себя лоб волны  $A'B'$ , количество движения которого  $M$  сохраняется без изменения, и объем  $(c_1 + a')(s + ds)$ , частицы которого имеют скорость  $c_1$ , так что их количество движения составляет

$$[\rho_1 (a' + c_1) s] c_1, \quad (2)$$

где  $\rho_1$  — плотность при давлении  $p_1 = \bar{\omega}_1 h_1$  (поскольку изменение сечения  $ds$  является величиной второго порядка по сравнению с  $s$ , им можно пренебречь).

Изменение количества движения в проекциях на ось  $XU$  выразится, следовательно, как

$$s [a' (\rho_1 c_1 - \rho_0 c_0) - \rho_0 c_0^2 + \rho_1 c_1^2]. \quad (3)$$

Силами, приложенными к рассматриваемому объему воды, являются:

в сечениях  $AA$  и  $EE$  давление  $(-p_1)$  на площади  $s + ds$ ;

в сечениях  $DD$  и  $B'B$  давление  $(+p_0)$  на площади  $s$ .

Пренебрегая величиной  $ds$ , получим результирующую сил давления

$$(p_0 - p_1) s. \quad (4)$$

Приравнявая уравнения (3) и (4), производя сокращение на  $s$  и изменив знаки, получим

$$p_1 - p_0 = \bar{\omega}_1 h_1 - \bar{\omega}_0 h_0 = a' (\rho_0 c_0 - \rho_1 c_1) + \rho_0 c_0^2 - \rho_1 c_1^2. \quad (5)$$

Таково общее уравнение, связывающее изменения давления  $(p_1 - p_0)$  с изменениями скорости  $(c_1 - c_0)$ , полученное в предположении, что изменения режима распространяются с абсолютной скоростью  $a'$ . Следует отметить, что относительно жидкости, средняя скорость которой равна  $\frac{c_0 + c_1}{2}$ , скорость распространения составит

$$a = a' + \frac{c_0 + c_1}{2}. \quad (6)$$

Именно эта величина является постоянной для данных жидкости и трубопровода.

Скорость  $a$  представляет собой величину порядка 1000 м в секунду, в то время как  $c_0$  и  $c_1$  обычно не превышают нескольких метров в секунду. Поэтому можно пренебречь значениями  $\rho_0 c_0^2$  и  $\rho_1 c_1^2$  по сравнению с  $a' \rho_0 c_0$  и  $a' \rho_1 c_1$ , равно как величиной  $(c_0 + c_1)$  по сравнению с  $a$ . С другой стороны, плотность воды меняется весьма мало даже при изменениях давления значительно больших, чем обычно встречающиеся в практике, в силу чего можно полагать

$$\rho_0 = \rho_1 = \rho \text{ и } \bar{\omega}_0 = \bar{\omega}_1 = \bar{\omega} = \rho g.$$

С учетом этого уравнение (5) значительно упрощается, получая вид

$$h_1 - h_0 = \frac{a}{g} (c_0 - c_1) \quad (7)$$

или, обозначая изменение давления  $h_1 - h_0$  через  $F$ , вид

$$F = \frac{a}{g} (c_0 - c_1). \quad (8)$$

Этот простой результат является верным, впрочем, также и в том случае, когда скорость  $c$  не является малой по сравнению со скоростью  $a$ ; это показал Дарриэ, чье доказательство приводится в сноске<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Доказательство Дарриэ (Darrieus).

Если подставить выражение (6) для скорости относительно жидкости в уравнение (5), получим

$$p_1 - p_0 \left( a - \frac{c_0 + c_1}{2} \right) (\rho_0 c_0 - \rho_1 c_1) + \rho_0 c_0^2 - \rho_1 c_1^2$$

и далее

$$p_1 - p_0 = a (\rho_0 c_0 - \rho_1 c_1) + \rho_0 c_0^2 - \rho_1 c_1^2 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{2} c_1 c_0. \quad (1)_d$$

Обозначим

$$\Delta \rho = \rho_1 - \rho_0 \quad (2)_d \text{ и } \bar{\rho} = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}, \quad (3)_d$$

тогда

$$\rho_1 = \bar{\rho} + \frac{\Delta \rho}{2} \quad (4)_d \text{ и } \rho_0 = \bar{\rho} - \frac{\Delta \rho}{2}. \quad (5)_d$$

Внесем эти величины в уравнение (1)<sub>d</sub>, после чего оно примет следующий вид:

$$p_1 - p_0 = a \bar{\rho} (c_0 - c_1) + \bar{\rho} \frac{c_0^2 - c_1^2}{2} - a \Delta \rho \frac{c_0 + c_1}{2} - \Delta \rho \frac{(c_0 - c_1)^2}{4}. \quad (6)_d$$

Напишем теперь уравнение сохранения массы в объеме длины  $a'$  (фиг. 6, а): плотность этого объема меняется от  $\rho_0$  до  $\rho_1$  и изменение массы составит  $a'(\rho_0 - \rho_1)$ ; в то же время в этот объем через сечение  $B'B'$  поступает масса  $\rho_0 c_0 a'$ , а через сечение  $AA$  вытекает масса  $\rho_1 c_1 a'$ .

Отметив, что всякое изменение режима вызывает распространение волн, рассмотрим более сложный случай, когда одновременно с первой возникает вторая волна, распространяющаяся в направлении, противоположном направлению первой. Эта вторая волна, возникающая в связи с изменением режима пусть в сечении  $Y$ , вызывает переход созданных предыдущей волной скорости  $c_1$  и давления  $h_0 + F$  к их новым значениям  $c$  и  $(h_0 + F) + f$ . Определим величину  $f$ .

Пусть фронт волны, на котором величины  $c_1$  и  $(h_0 + F)$  меняются до значений  $c$  и  $(h_0 + F) + f$ , находится (в некоторый момент времени) на участке  $A''B''$  (фиг. 6, б); этот фронт перемещается в направлении сечения  $X$  с абсолютной скоростью  $a''$ , а относительно воды со скоростью

$$a = a'' - \frac{c_1 + c}{2}. \quad (9)$$

Из закона сохранения массы следует

$$a'(\rho_0 - \rho_1) + \rho_0 c_0 - \rho_1 c_1 = 0, \quad (7)_{d}$$

что может быть записано, имея в виду обозначения, данные выше, в виде

$$-\left(a - \frac{c_0 + c_1}{2}\right) \Delta \rho + \bar{\rho} (c_0 - c_1) - \Delta \rho \frac{c_0 + c_1}{2} = 0$$

или после упрощений

$$\dot{a} \cdot \Delta \rho = \bar{\rho} (c_0 - c_1). \quad (8)_{d}$$

Если это значение  $a \Delta \rho$  внести в третий член правой части уравнения (6)<sub>d</sub>, то этот член и второй взаимно уничтожатся.

С другой стороны, 4-й член приобретает благодаря  $\Delta \rho$  значение величины второго порядка и, благодаря  $\frac{(c_0 - c_1)^2}{2}$ , даже значение величины третьего порядка, так как величина  $a$  гораздо больше величины  $c_0$ . Следовательно, этим членом можно пренебречь, после чего уравнение принимает следующий вид:

$$p_1 - p_0 = a \bar{\rho} (c_0 - c_1) \quad (9)_{d}$$

или вводя среднюю величину  $\bar{\omega} = \bar{\rho} g$

$$h_1 - h_0 = \frac{a}{g} (c_0 - c_1), \quad (10)_{d}$$

что в точности соответствует уравнению (7) с оговоркой, однако, что величины  $h_1$  и  $h_0$  определены здесь по удельному весу  $\bar{\omega}$ , являющемуся средним из значений удельного веса при  $\rho_1$  и  $\rho_0$ . Поскольку, однако, удельный вес воды колеблется при изменении давления весьма мало, различие между уравнениями (7) и (10)<sub>d</sub> практически исчезает.

Таким образом, члены уравнения (5), содержащие  $c_0^2$  и  $c_1^2$  исчезают, если вводится скорость  $a$  вместо  $a'$ . Этот результат окончательно разрешает часто

возникающий вопрос о роли кинетической энергии воды  $\frac{c_0^2}{2g}$  в явлении распространения волны; эта роль, как очевидно, сводится к нулю. Мы считаем своей обязанностью отметить, что доказательство Дарри аннулирует выводы нашего исследования «Общий графический метод с учетом кинетической энергии», опубликованного в № 10 журнала «Revue générale de l'Hydraulique»; эти выводы следует, таким образом, считать ошибочными. Мы особенно благодарны Дарри за указание этой ошибки.

Рассмотрим жидкость, находящуюся в зафиксированный нами момент времени в объеме  $A'''A''B''D$ , ограниченном сечениями  $A'''A''$  с одной стороны и  $DD$  — с другой, причем последнее находится на расстоянии  $s$  от сечения  $B''B''$ . По истечении одной секунды эта жидкость заполнит объем  $EA'''B'''B''$ , ограниченный сечениями  $B''B''$  и  $EE$ , причем последнее сечение находится на расстоянии  $c_1$  от  $A'''A''$  (действительно, перемещаясь со скоростью  $c$ , сечение  $DD$  оказывается через единицу времени в  $B''B''$ , в то время, как  $A'''A''$ , перемещаясь со скоростью  $c_1$ , окажется в сечении  $EE$ ).

Количество движения объема  $A'''A''B''D$  включает в себя количество движения его доли  $A'''A''$ , имеющей объем  $a''s$  и движущейся со скоростью  $c_1$ , т. е.  $(\rho_1 a''s) c_1$ ;

количество движения лба волны  $A''B''$  — пусть  $M''$ ;

количество движения на участке  $B''D$  объема  $cs$ , имеющего скорость  $c$ , т. е.  $(\rho cs) c$ , где  $\rho$  — плотность при изменившемся давлении  $p$ .

Суммарное количество движения составляет

$$(\rho_1 a''s) c_1 + \rho c^2 s + M'' \quad (10)$$

По прошествии секунды количество движения тех же частиц, но уже в объеме  $EA'''B'''B''$ , включает в себя:

количество движения доли  $EA'''$  объема  $c_1 s$ , движущегося со скоростью  $c_1$ , т. е.  $(\rho_1 c_1 s) c_1$ ;

количество движения лба волны  $A'''B'''$ , равное количеству движения лба  $A''B''$ , т. е.  $M''$ ;

количество движения участка  $B'''B''$  объема  $a''s$ , который теперь имеет скорость  $c$  и плотность  $\rho$ ; это будет  $(\rho a''s) c$ .

Суммарное количество движения составляет

$$(\rho a''s) c + \rho c_1^2 s + M'' \quad (11)$$

Силы, действующие на рассматриваемый жидкий объем в течение единицы времени, составляют

$$- p_1 s \text{ в сечениях } A'''A'' \text{ и } EE,$$

$$+ ps \text{ в сечениях } DD \text{ и } B''B''.$$

Изменение количества движения равно сумме приложенных сил; сокращая на  $s$  и меняя знаки, получим

$$p_1 - p = \bar{\omega}_1 h_1 - \bar{\omega} h = a'' (\rho_1 c_1 - \rho c) + \rho c^2 - \rho_1 c_1^2 \quad (12)$$

В силу доказательства Дарриэ, или просто с учетом того, что величина  $c$  незначительна по сравнению с  $a''$  и также, что величина  $\rho$  меняется мало, выражение (12) приводится к виду

$$h_1 - h = \frac{a}{g} (c_1 - c) \quad (13)$$

или введя обозначение  $h = h_1 + f$  к виду

$$- f = \frac{a}{g} (c_1 - c) \quad (14)$$

Складывая между собой уравнения (8) и (14), найдем следующее фундаментальное соотношение:

$$F - f = \frac{a}{g} (c_0 - c). \quad (15)$$

Кроме того, из самого определения величин  $F$  и  $f$  следует

$$F + f = (h - h_0). \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) являются основными уравнениями неустановившегося движения в трубопроводах. Они в точности соответствуют решению уравнений в частных производных, о которых мы говорили выше, и могут быть сформулированы следующим образом:

1. Изменение напора в некотором сечении трубопровода в результате возмущений режима равняется сумме волн давления, распространяющихся вдоль трубопровода, накладывающихся друг на друга в рассматриваемом сечении.

2. Соответственно разность волн давления равняется увеличенному в  $\frac{a}{g}$  раз изменению скорости в рассматриваемом сечении.

3. Скорость  $a$  распространения волн  $F$  и  $f$  постоянна относительно воды; для получения абсолютной скорости относительно трубопровода к величине  $a$  надо прибавить или отнять от нее скорость течения воды.

**§ 4. Примечание I. (Потери напора).** В изложении выше не учтены потери напора на трение. Точно определить эти потери невозможно, однако в графическом методе, о котором будет идти речь далее, можно учесть эти потери с любой желаемой степенью точности.

**§ 5. Примечание II. (Физическая интерпретация величин  $F$  и  $f$ .)** Величины  $F$  и  $f$  в уравнениях (15) и (16) представляют собой изменения давления; эти изменения оказываются независимыми от начального давления в трубопроводе и от того, расположен ли трубопровод горизонтально или с уклоном.

При распространении волн эти величины сохраняют их значения неизменными; эти значения прибавляются к первоначальному давлению, существовавшему в данном сечении.

Необходимая оговорка относится только к случаю, когда  $(F + f)$  вызывает такое уменьшение давления, что после вычитания из величины начального давления это приводит к абсолютному вакууму, равному  $-h_a$  (где  $h_a$  обычно барометрическое давление, т. е. 10,33 м вод. ст.). В этом случае возникает нарушение сплошности, в результате чего жидкость в трубопроводе оказывается разделенной на два независимых отрезка.

**§ 6. Определение скорости распространения волн.** Рассмотрим движение волны  $F$  по отношению к осям координат, которые сами движутся со скоростью  $\frac{c_0 + c_1}{2}$ . По отношению к таким осям скорость фронта волны  $F$  будет как раз равна  $a$ , в то

время как скорости  $c_0$  и  $c_1$  превратятся соответственно в  $c_0 - \frac{c_0 + c_1}{2}$  и  $c_1 - \frac{c_0 + c_1}{2}$ .

С целью упрощения чертежа заменим участок лба волны сечением, в котором сконцентрируем резкое изменение давления и скорости, и пусть лоб находится в некоторый момент  $\tau$  в сечении  $AA$  (фиг. 6, в). Через секунду лоб волны займет положение  $A'A'$ , причем  $AA' = a$ ; одновременно будет происходить расширение трубы.

В течение секунды через сечение  $A'A'$  протекает количество жидкости, равное расходу  $\left(c_0 - \frac{c_0 + c_1}{2}\right)s$ , а через сечение  $AA$  протекает количество  $\left(c_1 - \frac{c_0 + c_1}{2}\right)(s + ds)$ . Накопление жидкости в цилиндре длиной  $AA'$  равняется (пренебрегая величиной  $ds$ , являющейся величиной второго порядка по сравнению с  $s$ )

$$V = (c_0 - c_1) s. \quad (17)$$

Под действием возрастания давления  $F$  трубопровод расширяется пусть на  $\lambda''$ , а длина призмы жидкости сокращается на  $\lambda'$ ; изменение объема, соответствующее количеству жидкости  $V$ , равняется

$$V = \pi D \lambda'' a + \lambda' s. \quad (18)$$

Определим величины  $\lambda''$  и  $\lambda'$ . В согласии с законами упругости удлинение  $\lambda$  некоторой призмы равно  $\lambda = \frac{PL}{SE}$ , где  $P$  — сила, действующая на призму,  $S$  — ее сечение,  $L$  — длина и  $E$  — коэффициент упругости материала (призмы).

Для призмы воды длиной  $a$ , подверженной действию добавочного давления  $F$ , т. е. силы  $\bar{\omega}F$  на единицу площади сечения, получим

$$\lambda = \frac{(\bar{\omega}F) a}{\varepsilon}, \quad (19)$$

где  $\varepsilon$  обозначает коэффициент упругости воды, а  $\bar{\omega}$  — ее удельный вес.

Напряжение в металле трубопровода от разрывающей силы, т. е. силы на единицу длины трубопровода, соответствующей давлению  $(\bar{\omega}F)$ , составляет  $\varphi = \frac{(\bar{\omega}F) D}{2e}$ , где  $e$  — толщина стенок трубопровода и  $D$  — его диаметр. Это напряжение приводит к удлинению кольца, равному:

$$2\pi\lambda'' = \frac{\bar{\omega}F \pi D^2}{2Ee};$$

отсюда 
$$\lambda'' = \frac{(\bar{\omega}F) D^2}{4Ee}. \quad (20)$$



Подставим выражения (19) и (20) в уравнение (18) и заменим  $\frac{\pi L^2}{4}$  на  $s$ ; тогда получим

$$V = s \bar{\omega} F a \left[ \frac{D}{Ee} + \frac{1}{\varepsilon} \right]$$

или после замены  $F$  согласно уравнению (8) § 3 и  $V$  согласно уравнению (17)

$$(c_0 - c_1) s = s \cdot \bar{\omega} \frac{a}{g} (c_0 - c_1) a \left[ \frac{D}{Ee} + \frac{1}{\varepsilon} \right].$$

Отсюда, после упрощений, скорость  $a$  определяется как

$$a = \sqrt{\frac{g}{\bar{\omega}} \frac{1}{\left( \frac{D}{Ee} + \frac{1}{\varepsilon} \right)}}. \quad (21)$$

Коэффициент упругости воды составляет

$$\varepsilon = 2,07 \times 10^8 \text{ кг/м}^2,$$

а коэффициент упругости ( $E$ ) стали примерно

$$E = 2,07 \times 10^{10} \text{ кг/м}^2.$$

Отношение  $\frac{D}{e}$  колеблется обычно, в зависимости от величины давления, в пределах между 40 и 150;  $\bar{\omega}$  равно  $1000 \text{ кг/м}^3$  и  $g = 9,81 \text{ м/сек}$ .

В соответствии с этим можно получить для величины  $a$  значения в пределах от 900 до 1200 м/сек.

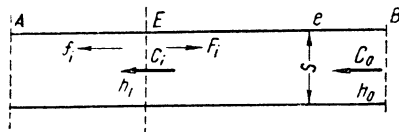
Поскольку  $s$  даже в самых редких случаях не превышает нескольких метров в секунду, скорость  $a$  относительно жидкости практически не будет отличаться от абсолютных скоростей значений  $a'$  и  $a''$ , взятых по отношению к трубопроводу. Одновременно подчеркнем еще раз, что в основное уравнение (15) входят множителем именно величина  $a$ , которую мы сейчас определили.

**§ 7. Характеристические кривые трубопровода при неустановившемся движении.** Рассмотрим трубопровод  $AB$  (фиг. 7), обозначив расстояния между сечениями  $A$  и  $B$  через  $L$ , поперечное сечение трубопровода через  $S$ , толщину стенок, одинаковую на всей длине трубопровода, через  $e$  и среднюю скорость течения в трубопроводе через  $c_0$ .

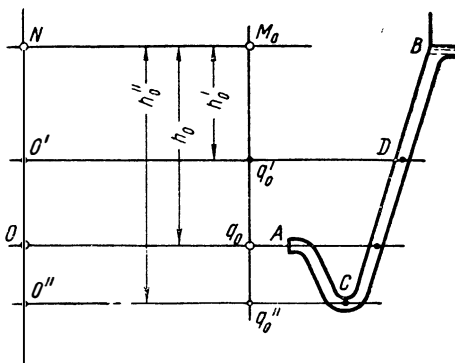
Если пренебрегать гидравлическими сопротивлениями, то характеристическая кривая трубопровода в сечении  $A$  при установившемся движении изображается горизонтальной прямой  $M_0N$  (фиг. 8), при начальной соответственной точке  $M_0$ , имеющей абсциссу, равную  $q = c_0 S$ , и ординату  $h_0$ , равную давлению в сечении  $A$  трубопровода. Если последний горизонтален, эта прямая годится в качестве характеристической кривой для сечений трубопровода на всем его протяжении. Если трубопровод имеет уклон,

можно сохранить в качестве характеристической кривой горизонтальную линию  $M_0N$ , при условии поднятия или опускания оси абсцисс на линии  $O'q'_0$  или  $O''q''_0$ , т. е. на величину отрезков  $OO'$  или  $OO''$ , равную разности уровней между точкой  $A$  и сечением, для которого ищется характеристическая кривая.

Для того чтобы иметь возможность проследить за процессами, которые будут про-



Фиг. 7.



Фиг. 8.

исходить в дальнейшем в трубопроводе (в сечениях  $A$  или  $B$  или между этими сечениями), необходимо уметь определять характеристические кривые в различных сечениях трубопровода в случае, если режим меняется во времени.

Рассмотрим, например, некоторое сечение  $E$  между  $A$  и  $B$  и пусть  $h_i$  — давление и  $q_i$  — расход в этом сечении в момент времени  $i$ , причем счет времени ведется с момента возникновения по какой-либо причине изменения режима в рассматриваемом сечении. Пусть точка  $i_E$  на фиг. 9 будет соответственной точкой этого режима.

Исходя из изложенного ранее, режим  $(h_i, q_i)$  возникает в результате встречи в сечении  $E$  волн, перемещающихся со скоростью  $a$ , из которых одна ( $F_i$ ) движется в направлении, противоположном течению потока, т. е. от  $E$  к  $B$  (фиг. 7), а другая ( $f_i$ ) по направлению течения потока, т. е. от  $E$  к  $A$ .

Уравнениями, связывающими напор  $h^*$  со скоростью потока и, следовательно, с расходом  $q = Sc$ , являются полученные в § 3 уравнения (15) и (16), которые воспроизведем здесь, заменив скорость  $c$  величиной  $\frac{q}{S}$ :

$$\frac{a}{gS} (q_0 - q) = F - f, \quad (1)$$

$$h - h_0 = F + f. \quad (2)$$

\* Под  $h$  следует подразумевать величину  $z + p/\gamma$  ( $h_0$  — напор для всех сечений при отсутствии движения); в то же время отклонения при неустановившемся движении значений  $p/\gamma$  или  $z + p/\gamma$  в сечении равны между собою. В подлиннике  $h$  называется всюду давлением; в переводе принят термин напор (Прим. ред.).

При помощи этих уравнений можно было бы определить режим  $(h_i, q_i)$  в сечении  $E$ , подставив для волн  $F$  и  $f$  их значения  $F_i$  и  $f_i$  в момент  $i$ . Однако обе эти волны изменяются во времени по некоторому неизвестному пока закону. Следовательно, уравнения (1) и (2) содержат четыре неизвестных  $(h, q, F, f)$ ; поэтому не представляется возможным извлечь отсюда зависимость только между величинами  $h$  и  $q$ , являющуюся искомой характеристической кривой.

Представим себе теперь наблюдателя, перемещающегося вдоль трубопровода со скоростью  $a$ . Пусть в момент времени  $i$  этот наблюдатель начинает двигаться из сечения  $E$  в направлении течения потока<sup>1</sup>;

в этом случае для него волна  $f$  будет сохранять постоянное значение  $f_i$ , а переменными будут величины  $h, q, F$ ; исключив же величину  $F$  при посредстве уравнений (1) и (2), можно получить закон, устанавливающий соотношение между переменными  $(h, q)$  и имеющий силу для любого сечения между  $E$  и  $A$ , которое проходит подвижный наблюдатель; получаемое таким образом соотношение между величинами  $h$  и  $q$  и является характеристической кривой, устанавливаемой подвижным наблюдателем.

Аналогично для наблюдателя, начавшего в момент  $i$  движение из сечения  $E$  со скоростью  $a$  по направлению к  $B$ , волна  $F$  сохраняет постоянное значение  $F_i$ . Имея три переменных  $h, q, f$  и исключая  $f$  при посредстве уравнений (1) и (2), можно определить зависимость между величинами  $h$  и  $q$ , которая является искомой характеристической кривой для сечений, через которые проходит наблюдатель, перемещаясь от сечения  $E$  к сечению  $B$ .

Из сказанного следует, что понятие «характеристическая кривая трубопровода при неустановившемся режиме» имеет в виду наблюдателя, перемещающегося вдоль трубопровода со скоростью

1 Разумеется, что перемещение наблюдателя является воображаемым и здесь не может ставиться вопрос об относительном движении. Можно было бы с одинаковым успехом предположить, что наблюдатель остается неподвижным и взглядом следит за волной  $f$ , с тем чтобы видеть ее постоянной, обладая к тому же способностью регистрировать расход и давление в каждой точке, проходимой волной.

1 Разумеется, что перемещение наблюдателя является воображаемым и здесь не может ставиться вопрос об относительном движении. Можно было бы с одинаковым успехом предположить, что наблюдатель остается неподвижным и взглядом следит за волной  $f$ , с тем чтобы видеть ее постоянной, обладая к тому же способностью регистрировать расход и давление в каждой точке, проходимой волной.

волны  $a$ ; эта кривая меняет вид в зависимости от направления перемещения наблюдателя.

Определим эту кривую сначала для случая, когда наблюдатель перемещается в направлении, противоположном направлению течения потока.

В этом случае волна  $F$  сохраняет постоянное значение. В сечении  $E$  в момент  $i$  выхода из него наблюдателя имеем

$$\frac{a}{gS} (q_0 - q_i) = F_i - f_i, \quad (3)$$

$$h_i - h_0 = F_i + f_i. \quad (4)$$

Поскольку на всем пути движения наблюдателя, перемещающегося со скоростью  $a^1$ , имеет место условие  $F = F_i$ , то для любого сечения будут справедливы уравнения

$$\frac{a}{gS} (q_0 - q) = F_i - f, \quad (5)$$

$$h - h_0 = F_i + f. \quad (6)$$

Исключая из этих уравнений при посредстве уравнений (3) и (4) величины  $q_0$  и  $h_0$ , можно получить

$$\frac{a}{gS} (q_i - q) = - (f - f_i), \quad (7)$$

$$h - h_i = (f - f_i), \quad (8)$$

откуда после исключения  $(f - f_i)$  следует

$$(h_i - h) = \frac{a}{gS} (q_i - q). \quad (9)$$

Уравнение (9) и является искомой зависимостью между  $h$  и  $q$ . Мы видим, таким образом, что характеристической кривой является прямая  $PR$  (фиг. 9), проходящая через соответственную точку  $i_E$ , характеризующую режим в сечении выхода наблюдателя в момент начала его движения и имеющая угловой коэффициент, равный  $+\frac{a}{gS}$ .

Определим теперь характеристическую кривую в случае, если наблюдатель перемещается в направлении течения потока.

В этом случае постоянное значение, равное  $f_i$ , будет иметь волна  $f$ . В любом месте прохождения наблюдателя во время его перемещения от  $E$  к  $A$  со скоростью  $a$  будут иметь место условия

$$\frac{a}{gS} (q_0 - q) = F - f_i, \quad (10)$$

$$h - h_0 = F + f_i. \quad (11)$$

<sup>1</sup> В действительности следовало бы вводить скорость  $a' = a - \frac{c_0 + c}{2}$ , но, как мы видели, величина  $c$  пренебрежимо мала по сравнению с  $a$  и можно приравнять  $a'$  к  $a$ .

Исключая из этих двух уравнений и уравнений (3) и (4) величины  $q_0$  и  $h_0$ , получим

$$\frac{a}{gS} (q_i - q) = F - f_i, \quad (12)$$

$$(h - h_i) = F - f_i, \quad (13)$$

откуда после исключения  $F - f_i$  следует

$$(h - h_i) = \frac{a}{gS} (q_i - q), \quad (14)$$

что является искомым соотношением, представлением которого является прямая  $P'R'$  (фиг. 9), проходящая через соответственную точку  $i_E$  режима в момент выхода наблюдателя из сечения  $E$  и имеющая угловой коэффициент  $\left(-\frac{a}{gS}\right)$ .

Эта прямая симметрична предыдущей относительно горизонтали, проходящей через соответственную точку  $i_E$ .

**§ 8. Основной принцип графических построений.** Для подвижного наблюдателя, перемещающегося со скоростью волны, характеристическая кривая трубопровода при неустановившемся режиме представляет собой, таким образом, прямую, угловой коэффициент которой зависит только от постоянных  $a$  и  $S$ , характерных для трубопровода, в то время, как знак зависит от направления перемещения наблюдателя.

Чтобы построить эту прямую, достаточно знать одну из точек на ней, например соответственную точку в момент начала движения наблюдателя в сечении, откуда он начинает движение.

Важно отметить, что эта прямая отражает реальный физический закон, который можно сформулировать следующим образом:

Наблюдатель, выбывающий из сечения  $E$  в момент времени  $i$ , когда режим здесь был  $h_i, q_i$  (соответственная точка  $i_E$ ) и перемещающийся со скоростью  $a$ , регистрирует при прохождении через любое сечение трубопровода напор  $h$  и расход  $q$ , которые связаны между собой линейной зависимостью, определяемой постоянными  $a$  и  $S$ , характерными для трубопровода, величинами  $h_i, q_i$  в пункте отправления наблюдателя и направлением, в котором наблюдатель перемещается.

Таким образом уже нет речи о волнах  $F$  и  $f$ , они исключились, однако именно факт их существования приводит к упомянутому выше линейному закону. Знание этого закона позволяет, следовательно (и мы это покажем в дальнейшем), находить соот-

ответственную точку режима в любом месте и для любого момента, не зная величины самих волн, создающих этот режим<sup>1</sup>.

**§ 9. Графическое определение величин  $F$  и  $f$ .** Если все же требуется установить величину обеих волн в любой момент и в любом месте, где известен режим, это осуществляется легко. Пусть известна, например, соответственная точка  $i_E$  в сечении  $E$  в момент времени  $i$ ; уравнения (3) и (4), решенные относительно  $F_i$  и  $f_i$ , дают

$$2F_i = (h_i - h_0) + \frac{a}{gS} (q_0 - q_i), \quad (15)$$

$$2f_i = (h_i - h_0) - \frac{a}{gS} (q_0 - q_i), \quad (16)$$

откуда легко установить (фиг. 9), что

$$2F_i = \overline{M_0 R}; \quad 2f_i = \overline{M_0 R'},$$

причем точка  $R$  определяется пересечением ординаты, проведенной через соответственную точку установившегося режима в начальный момент времени, и характеристической прямой  $PR$ , получаемой при следовании за волной  $F_i$ , а точка  $R'$  определяется пересечением той же ординаты и характеристической прямой  $P'R'$ , получаемой при следовании за волной  $f_i$ .

Этот пример следует рассматривать, впрочем, лишь как иллюстрацию, не представляющую интереса при решении практических задач; последнее может быть получено исключительно с помощью закона, выраженного уравнениями (9) и (14) при любой сложности задачи.

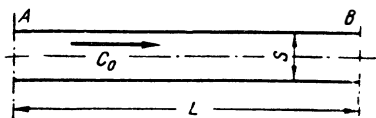
## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ РЕЖИМА В ТРУБОПРОВОДЕ

### А. Простой трубопровод

**§ 10. Начальные условия. Выбор единицы времени и обозначения.** Пусть имеется участок трубопровода (фиг. 10) длиной  $L$ , сечением  $S$ , скорость распространения фронта волн в котором равняется  $a$  и который снабжен на концах некоторыми регулирующими устройствами  $A$  и  $B$ . Пусть характеристические кривые последних  $\Psi_A$  и  $\Psi_B$ , переменные во времени, известны для каждого момента времени.

<sup>1</sup> Интересно отметить общность этого закона вне зависимости от среды распространения волн. Понятие волны всегда включает две переменные физические величины (в нашем случае  $h$  и  $q$ , в электричестве напряжение и силу тока и т. д.), и наблюдатель, перемещающийся со скоростью волн, установит, что эти величины в любом случае связаны между собой одним и тем же линейным законом. Поэтому выводы, к которым мы придем, могут быть применены в любой области физики; третья часть настоящего труда и посвящена вопросам этого применения в различных областях механики.

Примем за единицу время, затрачиваемое подвижным наблюдателем на перемещение со скоростью  $a$  от сечения  $A$  до сечения  $B$  и обозначим эту единицу через  $\tau$ ; таким образом,  $\tau = \frac{L}{a} = 1$ .

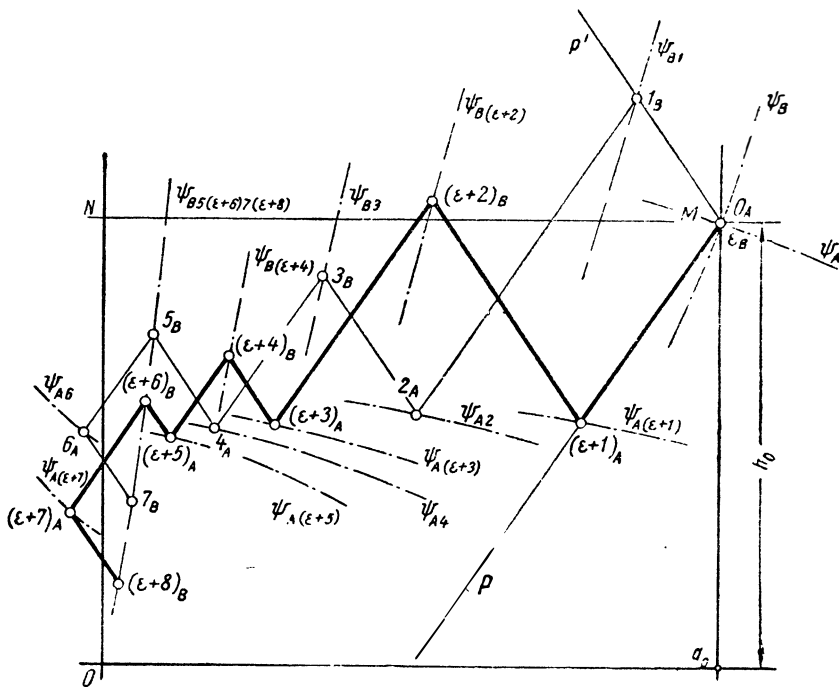


Фиг. 10.

За начало отсчета времени примем момент начала изменения режима в одном из двух регулирующих устройств, например, в  $A$ , и предположим, для общности, что изменения режима во втором регулирующем устройстве  $B$  возникают в момент времени, отличный

от нуля, например, в момент  $\varepsilon < \tau$ .

При установившемся режиме соответственной точкой для всего протяжения трубопровода от  $A$  до  $B$  является точка  $M$  пересечения характеристических кривых  $\Psi_A$  и  $\Psi_B$  обоих регулирующих устройств (фиг. 11). Этот смысл точки  $M$  сохраняется



Фиг. 11.

для всех наблюдателей, начинающих движение из  $B$  в моменты времени, предшествующие моменту  $+\varepsilon$ , и для наблюдателей, отправляющихся из сечения  $A$  в период времени, предшествующий нулю. С другой стороны, значение  $\tau = (-1)$  является последним мгновением отправления наблюдателя из сечения  $B$ , если он хо-

чет констатировать в  $A$  начальный режим (так как этот наблюдатель прибывает в сечение  $A$  в момент времени нуль). Точно также время  $(\varepsilon - 1)$  является последним мгновением для наблюдателя, который, направляясь из  $A$ , обнаруживает в сечении  $B$  еще начальный режим (прибывая сюда в момент времени  $\varepsilon$ ).

Для наглядности в графических построениях и лучшего понимания чертежей, которые мы будем получать, условимся о следующем обозначении соответственных точек.

Поскольку координатами соответственной точки являются напор и расход, устанавливаемые наблюдателем в данное время и в данном месте, обозначим эту точку буквой, которая показывает момент времени, и индексом, обозначающим соответствующее сечение трубопровода. Именно таким образом обозначена на фиг. 9 соответственная точка  $i_E$  режима в момент времени  $i$  для сечения  $E$ .

Это абсолютно необходимое и общее правило делает чертеж, не внося в него больших усложнений, значительно более ясным, так как дополняет его (в виде своего рода отметок) значениями обеих координат — времени и пространства.

**§ 11. Граничные режимы в концевых сечениях.** Проследим сначала за перемещением наблюдателя, выбывающего из сечения  $B$  в предельное время  $\varepsilon$ . Поскольку в момент его выбытия в сечении  $B$  еще сохранялся начальный режим, характеристической кривой для него будет прямая  $MP$  (фиг. 11), проходящая через точку  $M$  и имеющая угловым коэффициентом  $+\frac{a}{gS}$  (так как наблюдатель перемещается в направлении, противоположном течению). В момент прибытия наблюдателя в сечение  $A$  соответственная точка должна принадлежать как прямой  $MP$ , так и характеристической кривой  $\Psi_{A(\varepsilon+1)}$  регулирующего устройства  $A$  для этого же мгновения; следовательно, соответственная точка  $(\varepsilon + 1)_A$  определяется пересечением названных характеристических прямой и кривой.

Если наблюдатель совершает затем обратный путь от  $A$  к  $B$ , имея известным режим в сечении  $A$  в момент времени  $\varepsilon + 1$ , он установит, что новая характеристическая кривая трубопровода выразится прямой, проходящей через точку  $(\varepsilon + 1)$  с угловым коэффициентом  $(-\frac{a}{gS})$ , поскольку наблюдатель продвигается в направлении течения. Заметим, что эта прямая симметрична предыдущей относительно вертикали, проходящей через только что полученную соответственную точку  $(\varepsilon + 1)$ . Для наблюдателя, прибывающего в сечение  $B$  в момент времени  $(\varepsilon + 2)$ , соответственная точка режима будет находиться на этой прямой и на характеристической кривой  $\Psi_{B(\varepsilon+2)}$  регулирующего устройства  $B$  для того же момента времени, т. е. в точке их пересечения  $(\varepsilon + 2)_B$ .

Располагая знанием режима в сечении  $B$  в момент времени  $\varepsilon + 2$ , наблюдатель, выбывающий в направлении к сечению  $A$ ,



будет знать новую характеристическую прямую, которая пройдет через точку  $(\varepsilon + 2)_B$ , имея угловым коэффициентом  $+\frac{a}{gS}$  (поскольку наблюдатель перемещается в направлении, противоположном течению). Учтем, что эта прямая является симметричной предыдущей относительно вертикали, проходящей через соответственную точку  $(\varepsilon + 2)_B$ . Для сечения  $A$  в момент времени  $(\varepsilon + 3)$  прибытия туда наблюдателя соответственная точка будет определяться пересечением данной прямой и характеристической кривой  $\Psi_{A(\varepsilon+3)}$  регулирующего устройства  $A$  в тот же момент времени; это будет точка  $(\varepsilon + 3)_A$ .

Последующие перемещения наблюдателя от  $A$  к  $B$  и обратно будут отражаться на чертеже (фиг. 11) также в виде ломаной линии, вершины которой, попеременно расположенные на характеристических кривых регулирующих устройств  $A$  и  $B$ , соответствуют моментам, разделенным между собой временем  $\tau$ , когда наблюдатель меняет направление своего перемещения в  $A$  или  $B$ . Угловым коэффициентом сторон ломаной линии будет попеременно  $\pm \frac{a}{gS}$ , в зависимости от направления движения наблюдателя — от  $B$  к  $A$  или от  $A$  к  $B$ .

Таким же образом можно проследить за перемещением наблюдателя, начинающего движение из сечения  $A$  в момент времени нуль, для которого режим также известен, определяясь точкой  $M$ . Для этого наблюдателя характеристической кривой трубопровода будет прямая  $MP'$ , проходящая через точку  $M$ , соответствующую сечению к моменту начала движения и имеющая угловой коэффициент  $\left(-\frac{a}{gS}\right)$ , поскольку наблюдатель перемещается по направлению течения.

Соответственная точка режима для сечения  $B$  и времени, равного единицы (прибытия наблюдателя в это сечение), лежит, следовательно, на этой прямой, и одновременно на характеристической кривой  $\Psi_B$  регулирующего устройства  $B$  в данный момент, т. е. в точке  $1_B$  их пересечения.

Поскольку режим в сечении  $B$  для момента времени 1 определен теперь точкой  $1_B$ , характеристическая кривая трубопровода для наблюдателя, продолжающего далее движение по направлению к сечению  $A$ , будет представлена прямой, проходящей через точку  $1_B$  и симметричной предыдущей прямой. Соответственная точка для сечения  $A$  в момент времени 2 прибытия туда наблюдателя расположена на этой прямой и одновременно на характеристической кривой  $\Psi_{A_2}$  регулирующего устройства  $A$  для этого момента, т. е. в точке пересечения  $2_A$ .

Продолжая задавать перемещение наблюдателя туда и обратно, находят вторую ломаную линию, исходящую как и предыдущая, из точки  $M$  и имеющую вершины, расположенные на характеристических кривых регулирующих устройств  $A$  и  $B$  для мо-

ментов времени, разделенных интервалами  $2\tau$ . Режимы, определяемые соответственными точками в вершинах ломаных линий, разделены между собой, таким образом, интервалами времени попеременно  $(1 - \varepsilon)$  и  $(1 + \varepsilon)$  для сечения  $A$  и попеременно в  $(1 + \varepsilon)$  и  $(1 - \varepsilon)$  для сечения  $B$ .

Построения на фиг. 11 произведены в предположении, что, начиная от момента времени  $\varepsilon$ , характеристическая кривая регулирующего устройства  $B$  остается неизменной; построения продолжены до момента времени  $\varepsilon + 8$ .

В этих условиях оказывается, что соответственные точки  $b_A$  и  $(\varepsilon + 7)_A$  определяют в трубопроводе течение в направлении, противоположном первоначальному. Это не меняет, очевидно, общую закономерность, которую мы сейчас обнаружили и которая формулируется следующим образом:

для наблюдателя, перемещающегося в направлении, обратном его предшествующему перемещению, новая характеристическая прямая симметрична предыдущей по отношению к вертикали (или горизонтали), проходящей через соответственную точку режима в момент начала движения в обратном направлении.

**§ 12. Замечание по поводу прерывности в изменениях состояния среды.** Описанное построение отмечается большой наглядностью. Каждая сторона ломаных линий соответствует перемещению наблюдателя между концевыми сечениями  $A$  и  $B$ , а каждая вершина возврата линий на характеристической кривой регулирующего устройства соответствует обратному возвращению наблюдателя из сечения регулирующего устройства.

Таким образом, построение представляет собой больше, чем метод расчета; это скорее изображение самого явления, где излому линии на характеристической кривой соответствует действительное отражение волны в сечении регулирующего устройства.

Из рассмотрения построений на фиг. 11 можно вывести также некоторые заключения; первое из них сводится к тому, что в некоторый момент времени  $\varepsilon + n\tau$  режим в концевом сечении  $A$  определяется предшествующими режимами, числом  $n$ , разделенными интервалами времени  $\tau$ , в сечениях  $B$  и  $A$ , и только от этих режимов.

Иначе говоря, режимы, обязанные своим возникновением изменениям режима работы регулирующих устройств, хотя бы и непрерывными, определяются значениями последних, разделенными интервалами  $\tau$ , а никак не промежуточными. Найденные  $n$  точек остаются одними и теми же, если только для соответствующих моментов времени остаются неизменными характеристические кривые вне зависимости от того, как эти кривые меняются в промежутках (в частности, мгновенно или непрерывно). Отсюда следует, что состояние для некоторого момента времени среды, в которой распространяются волны, не зависит от состояния в бесконечно близкий предшествующий момент времени, как это имеет место для непрерывных процессов, а зависит только от режимов

в местах возникновения или отражения волн в моменты времени, разделенные интервалами  $\tau$ . Изменения режима ( $h, q$ ) могут быть, таким образом, определены дискретным образом также в случае, если режим работы регулирующих устройств меняется непрерывно.

§ 13. Замечания по поводу универсальности графического метода в сопоставлении с аналитическими методами. Режимы, определенные построениями на фиг. 11, можно назвать граничными, поскольку ими определяется во времени ряд режимов, обязанных возникновению возмущений либо в сечении  $B$  (в момент времени  $\varepsilon$  начала работы регулирующего устройства  $B$ ), обуславливая появление соответственных точек

$$M, (\varepsilon + 1)_A, (\varepsilon + 2)_B, (\varepsilon + 3)_A, (\varepsilon + 4)_B, (\varepsilon + 5)_A, (\varepsilon + 6)_B \dots,$$

либо в сечении  $A$  (в момент времени, совпадающий с началом работы устройства  $A$ ), что обуславливает появление цепи соответственных точек:

$$M, 1_B, 2_A, 3_B, 4_A, 5_B, 6_A \dots$$

Соответственные точки этих двух цепей являются особыми точками, так как они связаны с внезапным возникновением явления.

При сопоставлении этого метода с методом Аллиевии<sup>1</sup> можно видеть, что полученная цепь в виде ломаной линии (фиг. 11) соответствует цепным уравнениям для периодов, называемых «полными циклами», с той разницей, что каждое цепное уравнение дает отношение  $\zeta$  давления  $h$  к первоначальному давлению  $h_0$ , тогда как графическое построение дает давление  $h$ . Практическая ценность использования отношения величин вместо самих величин заключается в возможности классифицировать трубопроводы, группируя их по признаку одинакового  $\zeta$ , т. е. одинаковой относительной величины гидравлического удара.

Однако следует заметить, что уравнения Аллиевии могут быть составлены только в тех случаях, когда характеристической кривой регулирующих устройств является парабола с вершиной в начале координат, как это имеет место, например, в случае простого отверстия в сечении  $B$ , или если характеристическая кривая регулирующего устройства является горизонтальной линией, т. е. в случае наличия безграничного резервуара в конце  $A$  трубопровода.

В других работах<sup>2</sup> Аллиевии получил решение для случая, когда в конце трубопровода установлен центробежный насос, но он должен был заменить при этом реальную характеристическую кривую насоса близкой к ней параболой, что в известной степени снижает общность полученных результатов.

Наконец, во всех случаях цепные уравнения определяют лишь давление, но не дают значений расхода.

<sup>1</sup> Теория гидравлического удара, Л. Аллиевии, изд. Дюно (Париж).

<sup>2</sup> Arresto di una colonna liquida, L. Allievi, L' Electrotecnica, 25 oct., 1934.

Эти замечания показывают преимущества графического метода, приводящего к построениям на фиг. 11. Действительно:

этот метод применим при любых характеристических кривых регулирующих устройств  $A$  и  $B$  и нет необходимости в какой бы то ни было аппроксимации этих кривых, сохраняемых в их подлинном виде, что представляет определенный интерес;

метод определяет для каждого рассматриваемого момента одновременно расход и давление, а знание расхода часто также необходимо как и знание давления;

наконец, этот метод гораздо менее трудоемок, чем любой аналитический, поскольку даже в простых случаях, изученных Аллиеве, значения  $\zeta$  получаются из решения уравнения второго порядка, что значительно сложнее, чем нанесение на чертеже прямой линии и соответствующей характеристической кривой.

**§ 14. Промежуточные режимы в конечных сечениях.** Большой интерес представляет также получение в сечениях  $A$  и  $B$  значений режима для любого момента времени. Такие режимы мы будем называть промежуточными.

Граничные режимы устанавливаются наблюдателем, выбывающим из сечения  $B$  (или из сечения  $A$ ) в момент времени  $\varepsilon$  (или, соответственно, нуль). Если же наблюдатель отправляется из сечения  $B$  в момент времени, промежуточный между  $\varepsilon$  и  $(-1)$ , начальный режим будет также представляться точкой  $M$ . Характеристическая прямая будет в этом случае той же, что и для наблюдателя, выбывшего в момент времени  $\varepsilon$ , т. е. прямую  $MP$  (поскольку она должна проходить через точку  $M$  и иметь тот же угловой коэффициент); наблюдатель прибывает в сечение  $A$  в промежутке времени между  $(\varepsilon + 1)$  и нулем, и соответственная точка режима будет расположена на прямой  $MP$  и на характеристической кривой регулирующего устройства, соответствующей моментам прибытия наблюдателя.

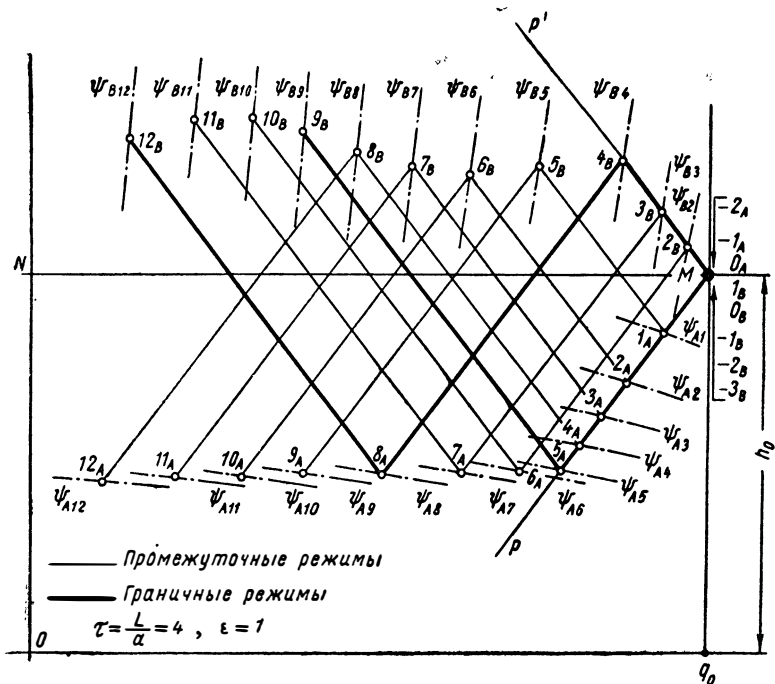
Таким образом, промежуточные точки в интервале времени между  $(\varepsilon + 1)$  и нулем будут находиться на прямой  $MP$  в пересечении с характеристическими кривыми регулирующего устройства. Если, например, характеристическая кривая регулирующего устройства  $A$  будет постепенно изменяться от  $\Psi_A$  к  $\Psi_{A(\varepsilon+1)}$ , все промежуточные соответственные точки будут находиться между  $M$  и  $(\varepsilon + 1)_A$  (фиг. 11).

Точно так же для наблюдателя, отправляющегося из  $A$  в моменты, предшествующие нулевому, а именно в интервалы времени между  $(\varepsilon - 1)$  и нулем, начальный режим определяется точкой  $M$ , характеристической кривой трубопровода будет прямая  $MP'$  и соответственные точки в  $B$  в интервале времени между  $\varepsilon$  и  $1$  будут определяться пересечением прямой  $MP'$  с характеристическими кривыми устройства  $B$  для соответствующих моментов времени.

Все промежуточные соответственные точки в  $B$  в период времени между  $\varepsilon$  и  $1$  находятся, следовательно, на прямой  $MP'$ .

Если характеристическая кривая устройства  $B$  меняется постепенно от  $\Psi_B$  до  $\Psi_{B1}$ , то эти точки будут находиться между  $M$  и  $1_B$  (фиг. 11).

Если наблюдатель будет продолжать движение в прямом и обратном направлениях, каждая из промежуточных точек окажется основой для новой ломаной линии, вершины которой также будут расположены на характеристических кривых сечений  $A$  и  $B$  и разделены во времени интервалами  $\tau$ . Для иллюстрации сказан-



Фиг. 12.

ного на фиг. 12 нанесены промежуточные точки для случая интервалов времени, равных  $\epsilon = \frac{\tau}{4}$ .

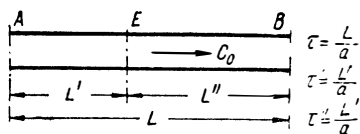
Для упрощения обозначения соответствующих точек за единицу времени примем величину  $\frac{\tau}{4}$  (т. е. положим  $\tau = 4$ ). Фиг. 12 построена в предположении монотонного перемещения характеристических кривых  $B$  и  $A$  в поле  $h, q$ , но оно может быть также любым, что не привело бы к усложнению графических построений: просто точки  $1_A, 2_A, 3_A, 4_A$  и  $2_B, 3_B$  были бы иначе расположены на прямых  $MP$  и  $MP'$ .

**§ 15. Режимы в промежуточных сечениях по длине трубопровода.** Предыдущие построения позволяют определить режимы в сечениях  $A$  и  $B$  в любой момент времени, требуя для этого един-

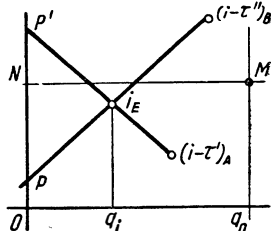
ственного условия — чтобы были известны характеристические кривые для соответствующего времени в этих сечениях.

Пусть теперь поставлена задача определения режима в некоторое время  $i$  в некотором сечении  $E$ , промежуточном между  $A$  и  $B$  (фиг. 13).

Обозначим через  $\tau' = \frac{L'}{a}$  время перемещения наблюдателя между сечениями  $A$  и  $E$ , а через  $\tau'' = \frac{L''}{a}$  — соответственно между сечениями  $B$  и  $E$  и пусть  $(i - \tau'')_B$  (фиг. 14) — соответственная точка для момента  $(i - \tau'')$  в сечении  $B$  (которая может быть найдена способом, изложенным выше), а  $(i - \tau')_A$  — соответственная точка для момента  $(i - \tau')$  в сечении  $A$ .



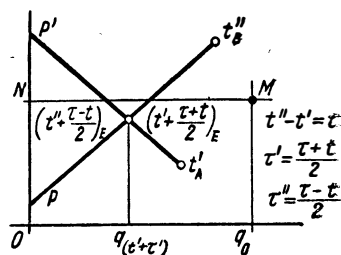
Фиг. 13.



Фиг. 14.

Для наблюдателя, отправляющегося в момент времени  $(i - \tau'')$  из  $B$  к  $A$ , т. е. в направлении, противоположном течению, характеристической прямой будет  $(i - \tau'')_B P$  (фиг. 14), проходящая через точку  $(i - \tau'')$  и имеющая угловой коэффициент  $+\frac{a}{gS}$ . Соответственная точка должна быть на этой прямой и тогда, когда наблюдатель проследует через сечение  $E$  в момент времени  $(i - \tau'') + \tau'' = i$ .

Для наблюдателя, отправляющегося из  $A$  по направлению к  $B$  в момент времени  $(i - \tau')$ , характеристической прямой является  $(i - \tau')_A P'$ . Она проходит через точку  $(i - \tau')$ , и имеет коэффициентом  $(-\frac{a}{gS})$ , поскольку перемещение наблюдателя происходит в направлении течения. Соответственная точка должна быть на этой прямой и тогда, когда наблюдатель пройдет сечение  $E$  в момент времени  $(i - \tau') + \tau' = i$ .



Фиг. 15.

Оба наблюдателя, встретившись в точке  $E$  в момент времени  $i$ , должны будут зафиксировать один и тот же режим, т. е. искомого режим будет выражен соответственной точкой  $I_E$  в пересечении прямых, связанных с этими двумя подвижными наблюдателями.

С другой стороны, если известны соответственные точки  $t''_B$  и  $t'_A$  в сечениях  $B$  и  $A$  (фиг. 15) (при условии, что  $t'' - t' = t < \tau$ ), то два наблюдателя, покинувшие сечение  $B$  в момент времени  $t''$  и

сечение  $A$  в момент времени  $t'$ , встретится в пункте  $E$  на расстоянии  $L'$  от  $A$  и  $L''$  от  $B$ , причем

$$t' + \frac{L'}{a} = t'' + \frac{L''}{a} \quad \text{и} \quad \frac{L'}{a} + \frac{L''}{a} = \tau.$$

Отсюда можно найти

$$L' = a \frac{\tau + t}{2} = L \frac{\tau + t}{2\tau}. \quad (1)$$

$$\tau' = \frac{\tau + t}{2}, \quad (2)$$

$$L'' = a \frac{\tau - t}{2} = L \frac{\tau - t}{2\tau}. \quad (3)$$

$$\tau'' = \frac{\tau - t}{2}. \quad (4)$$

Точка пересечения характеристических прямых, проходящих через  $t''_B$  и  $t'_A$ , является соответственной точкой режима в пункте  $E$ , определяемом уравнениями (1) и (3), в момент времени  $(t' + \tau')$  или  $(t'' + \tau'')$ , что то же самое.

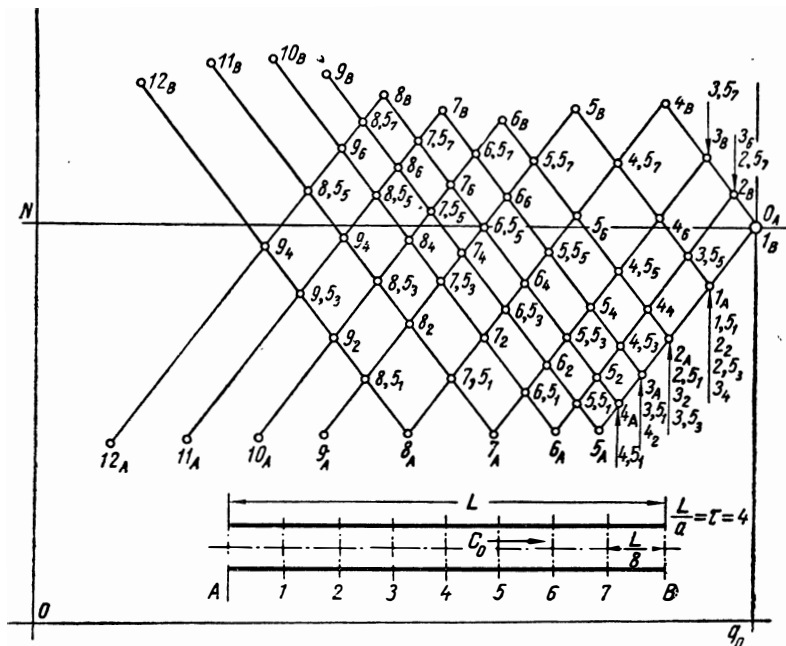
Используя этот результат, можно установить, что точки пересечения сторон ломаных линий, проходящих через промежуточные граничные точки эквидистантно во времени внутри периода  $\frac{2L}{a}$ , будут соответственными точками в  $n$  промежуточных сечениях, расположенных эквидистантно на длине трубопровода между сечениями  $A$  и  $B$ .

В самом деле, обратимся вновь к фиг. 12, где были определены промежуточные граничные точки для сечений  $A$  и  $B$  с интервалами по времени  $\frac{\tau}{4}$ ; таким образом, для периода времени  $2\tau$  движения волны в прямом и обратном направлениях были найдены 7 промежуточных граничных точек. Разделим длину  $L$  (фиг. 16) на 8 равных частей и обозначим цифрами 1, 2, 3...7 семь промежуточных сечений между  $A$  и  $B$ . Время, затрачиваемое наблюдателем для перемещения от одного сечения до другого, равно  $\frac{\tau}{8} = \frac{4}{8} = 0,5$ .

Отметим две какие-либо соответственные точки, например  $4_B$  в сечении  $B$  и  $1_A$  в сечении  $A$ ; таким образом имеем  $t'' = 4$ ,  $t' = 1$ ,  $t'' - t' = 3$ . Применяя уравнения (1) и (3), приведенные выше, можно установить, что точка пересечения прямой, имеющей угловой коэффициент  $+\frac{a}{gS}$  и проходящей через  $4_B$ , и прямой, проходящей через  $1_A$  и имеющей угловой коэффициент  $(-\frac{a}{gS})$ , определяет сечение, отстоящее от конца трубопровода  $A$

на расстояние  $L' = L \frac{4+3}{2 \cdot 4} = \frac{7}{8} L$ , и соответствует времени  $t' + \tau' = 1 + \frac{4+3}{2} = 4,5$ ; это и будет соответственная точка 4,5<sub>γ</sub>.

Продолжая вычисления таким же образом, можно без вычерчивания линий получить соответственные точки для сечений 1, 2, 3...7, просто пронумеровав надлежащим образом точки пересечения прямых, исходящих из соответственных точек для *B* и *A* в моменты времени  $t''$  и  $t'$  при условии, что  $t'' - t' < 4$  или  $t' - t'' < 4$ .



Фиг. 16.

Легко убедиться, что ломаные линии, соответствующие семи промежуточным граничным точкам внутри периода  $\frac{2L}{a}$ , действительно определяют соответственные точки для семи промежуточных сечений между *A* и *B* в моменты времени, разделенные интервалами  $\frac{1}{8} \cdot \frac{2L}{a}$ .

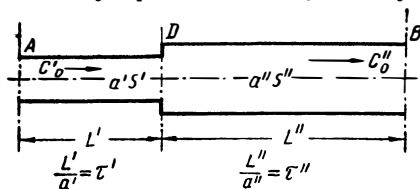
Нанося по оси ординат давления, снимаемые с соответственных точек для некоторого сечения, и по оси абсцисс время, можно проследить течение процесса в этом сечении во времени. Откладывая для некоторого момента времени на оси ординат давление, а на оси абсцисс — расстояния до сечений, где имеет место это давление, получим график распределения давления по длине трубопровода для фиксированного момента времени.



Интересно отметить, что для того чтобы получить возможность определить изложенным образом давление (или расход) в функции времени или пространства, оказалось нужным как раз исключить эти величины из начальных уравнений, сообщив наблюдателю движение, что свело процесс для него к изменениям давления в зависимости от расхода. В этом заключается суть графического метода, приложимая ко всем явлениям, связанным с распространением волн и позволяющая исследовать их во всех случаях одним и тем же способом.

## В. Сложный трубопровод

**§ 16. Общие положения.** Обычно в промышленных устройствах трубопровод никогда не состоит из одного участка с одинаковыми параметрами. Даже в том случае, когда между двумя регулирующими устройствами существует простой трубопровод, его диаметр и толщина стенок трубы



Фиг. 17.

могут оказаться различными; в этом случае переменность величин  $a$  или  $S$  приводит к значениям углового коэффициента  $\frac{a}{gS}$ , не одинаковым для всего протяжения трубопровода между двумя регулирующими устройствами.

Еще чаще система состоит не из одного простого трубопровода, а из сети труб с разветвлениями при неодинаковых сечениях и с различными регулирующими устройствами.

Как бы ни была сложна сеть, ее начальный режим в каждой точке должен быть известен. Совершенно очевидно, что без этого определение неустановившегося режима было бы невозможным. Поэтому основой расчета является условие, что начальный установившийся режим известен для всего сложного трубопровода и что так же, как и в случае простого трубопровода, должны быть известны характеристические кривые каждого регулирующего устройства для любого момента времени.

Это позволяет представить сложную сеть как совокупность взаимосвязанных простых трубопроводов, имеющих значения  $a$  и  $S$ , не меняющиеся в пределах каждого простого трубопровода. Каждый отдельный участок можно рассматривать как простой трубопровод; для места же стыка двух (или  $n$ ) участков в соответствии с условием сплошности необходимо, чтобы напор был одинаков для всех участков и сумма расходов, притекающих к месту стыка и оттекающих от стыка, взятых с соответственно противоположными знаками, равнялась нулю.

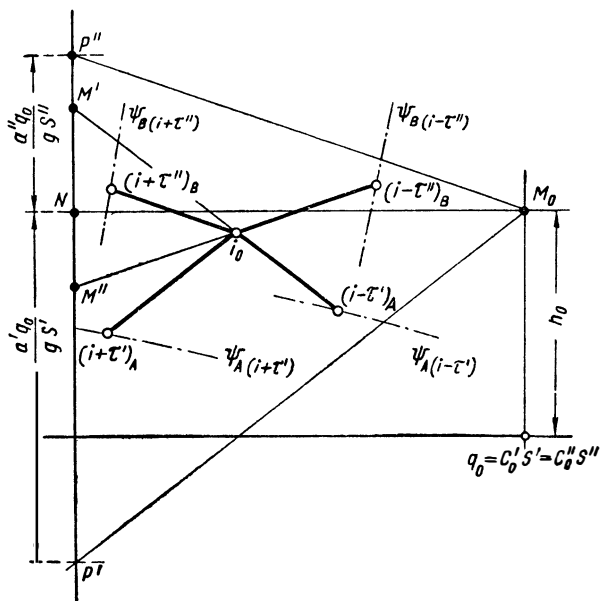
В дальнейшем мы увидим, как эти два условия учитываются при графических построениях.

**§ 17. Случай двух участков, соединенных последовательно.** Возьмем два следующих друг за другом участка  $AD$  и  $DB$  (фиг. 17) с различающимися конструктивными данными  $a'$ ,  $S'$ ,  $L'$

для участка  $AD$  и  $a''$ ,  $S''$ ,  $L''$  для участка  $DB$  и предположим, как и в предыдущем случае, что в сечениях  $A$  и  $B$  находятся регулирующие устройства с переменным режимом их работы.

Пусть  $(i - \tau')_A$  и  $(i - \tau'')_B$  (фиг. 18) будут соответственными точками режима в  $A$  в момент  $(i - \tau')$  и, соответственно, в  $B$  в момент  $(i - \tau'')$ , причем  $\tau' = \frac{L'}{a'}$  и  $\tau'' = \frac{L''}{a''}$ .

Характеристическая прямая трубопровода  $AD$  для наблюдателя, покинувшего сечение  $A$  в момент времени  $(i - \tau')$  и движущегося в направлении течения, будет  $(i - \tau')_A M'$ . Она прохо-



Фиг. 18.

дит через соответственную точку  $(i - \tau')_A$  и имеет угловой коэффициент  $(-\frac{a'}{gS'})$ . Эта прямая будет еще действительна при прибытии наблюдателя в сечение  $D$  в момент  $i - \tau' + \tau' = i$ .

Для второго наблюдателя, выбывшего из сечения  $B$  в момент времени  $(i - \tau'')$ , характеристическая прямая трубопровода будет  $(i - \tau'')_B M''$ . Она проходит через соответственную точку  $(i - \tau'')_B$  режима в момент выбытия и имеет угловой коэффициент  $\frac{a''}{gS''}$  (наблюдатель движется в направлении, противоположном течению). Эта прямая будет еще действительна по прибытии наблюдателя в сечение  $D$  в момент времени  $i - \tau'' + \tau'' = i$ .

Однако по условию сплошности давление и расход в точке  $D$  участков  $AD$  и  $DB$  должны быть одинаковыми. Поэтому режим в точке  $D$  в момент  $i$  определяется точкой  $i_D$  пересечения

характеристических прямых  $(i - \tau')_A M'$  и  $(i - \tau'')_B M''$ , так как эта точка отвечает названным выше условиям и находится на характеристических прямых, связанных в это мгновение с двумя подвижными наблюдателями.

Если наблюдатель, прибывший из сечения  $B$ , будет перемещаться в обратном направлении, характеристическая прямая пройдет через  $i_D$  и будет симметрична прямой  $(i - \tau'')_B$ . Для момента его прибытия в сечение  $B$  соответственная точка будет находиться на пересечении новой прямой и характеристической прямой  $\Psi_{B(i+\tau'')}$  регулирующего устройства  $B$  на этот момент, это будет точка  $(i + \tau'')_B$ .

То же имеет место в отношении наблюдателя, возвращающегося из сечения  $D$  в направлении к сечению  $A$ : новая характеристическая прямая будет симметрична прямой  $(i - \tau')_A i_D$ , проходя через точку  $i_D$ .

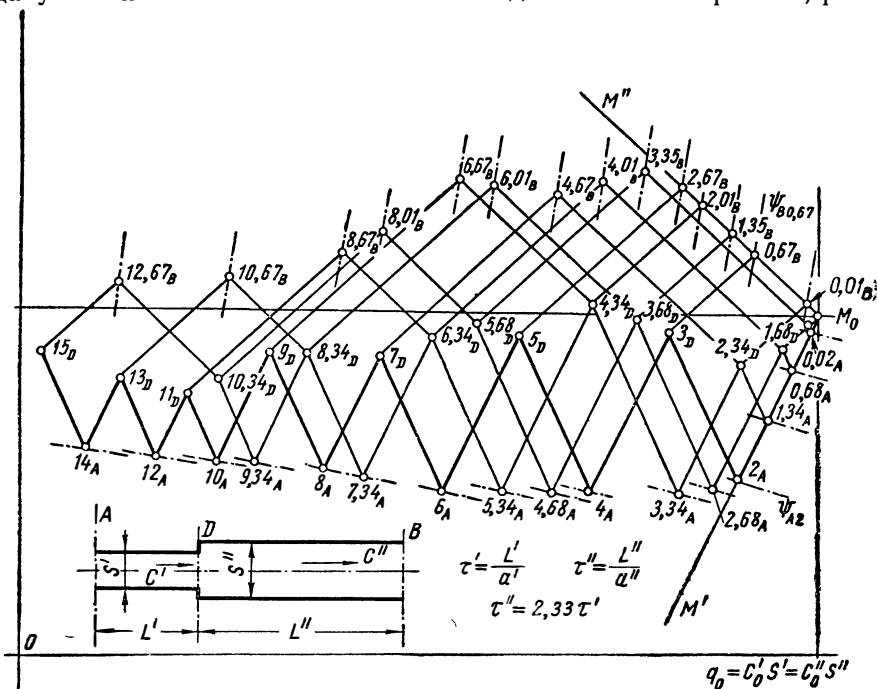
В этом случае в момент времени  $(i + \tau')$  возвращения наблюдателя в сечение  $A$  соответственная точка  $(i + \tau')_A$  окажется на пересечении названной прямой и характеристической кривой  $\Psi_{A(i+\tau')}$  регулирующего устройства  $A$ .

Следует отметить, что перемещение наблюдателя от  $B$  к  $A$  изображается на чертеже линией  $(i - \tau'')_B i_D (i + \tau')_A$ , угловой коэффициент которой претерпевает изменение в точке, соответствующей прохождению наблюдателя через сечение  $i_D$ ; случаю же возвращения наблюдателя из сечения  $D$  к  $B$  соответствует линия  $(i - \tau')_B i_D (i + \tau'')_B$ , состоящая из двух симметричных участков. При пересечении наблюдателем сечения  $D$  возникает своего рода „рефракция“ (преломление) прямой  $(i - \tau'')_B i_D$ , в то время как при возвратном движении имеет место „рефлексия“ (отражение). Эта аналогия с лучом света, симметрично отражающимся от границы, разделяющей разные среды и преломляющимися при ее пересечении, доказывает, насколько глубоко графический метод является «отображением явления». Действительно, в обоих случаях речь идет о распространении волны, и луч света, иллюстрирующий это явление, ведет себя аналогично прямой нашего чертежа. Это сопоставление придает еще большую наглядность графическому методу.

**§ 18. Построения в случае двух участков произвольной длины.** Излагая основы графических построений, мы предположили известными (фиг. 18) соответственные точки  $(i - \tau'')_B$  и  $(i - \tau')_A$ ; для их получения нужно, однако, как это было показано в § 10, исходить из соответствующим образом назначенного установившегося режима в начальный момент времени с тем, чтобы знать режимы в сечениях  $A$  и  $B$  именно через интервалы времени  $\tau'$  или  $\tau''$ .

Поскольку это требует известного углубленного внимания, проследим процесс построений на конкретном примере. Пусть  $M_0$  (фиг. 19) будет соответственной точкой начального режима; тогда характеристической прямой для наблюдателя, выбывающего из

сечения  $D$  по направлению к сечению  $A$ , будет  $M_0M'$ , а для наблюдателя, выбывающего из  $D$  по направлению к  $B$ , характеристикой будет прямая  $M_0M''$ . Для общности отрезки времени, затрачиваемые на перемещения от  $D$  до  $A$  и от  $D$  до  $B$ , т. е. интервалы  $\tau'$  и  $\tau''$ , предположим, не в простом соотношении между собой, а например, примем  $\tau = 2,32\tau'$ . Далее примем интервал времени  $\tau'$  за единицу, тогда  $\tau'' = 2,33$ . Поставим перед собой задачу найти соответственные точки в  $D$  для моментов времени, раз-



Фиг. 19.

деленных интервалами  $\tau'$ , предполагая, что режимы регулирующих устройств  $A$  и  $B$  начинают меняться в момент времени ноль.

Изменения режима в сечении  $D$  начинаются только в момент времени  $\tau' = 1$ ; следовательно, соответственной точкой для этого сечения в момент времени 1, а также во все время, предшествующее единице, будет  $M_0$ .

Мы ограничимся в дальнейшем только перечислением вершин ломаных линий для каждого участка, не входя в подробности построения, которое производится следуя методу, уже изложенному в § 10 и последующих применительно к случаю простого трубопровода.

Первый „рейс“ наблюдателя (в прямом и обратном направлениях), выбывающего в момент времени 1 из сечения  $D$  в направлении к  $A$ , дает ломаную линию  $1_D$  (т. е.  $M_0$ )  $2_A$   $3_D$ ; поскольку,

однако, положение точки  $3_D$  неизвестно, длина отрезка  $2_A 3_D$  остается пока неопределенной. Для нахождения точки  $3_D$  достаточно знать характеристическую прямую, связанную с другим наблюдателем, движущимся вдоль участка  $DB$  и прибывающим в сечение  $D$  в то же время  $3$ , что и первый. Этот наблюдатель должен проделать целое число перемещений туда и обратно между  $D$  и  $B$  и выбыть из  $D$  во время, когда начальный режим еще известен; исходя из этого может быть назначен момент начала движения второго наблюдателя; для этого достаточно отнять от времени прибытия  $\tau=3$  наименьшее число кратное  $2\tau''$  так, чтобы получающаяся разница была меньше единицы (последнего момента, для которого еще существует первоначальный установившийся режим в  $D$ ). При  $\tau''=2,33$  время выбытия этого наблюдателя будет  $3-2\tau''=(-1,66)$  и ломаная линия, соответствующая одному рейсу в прямом и обратном направлениях, будет  $(-1,66)$  (т. е.  $M_0$ )  $0,67_B 3_D$ . Последняя ее неопределенная сторона  $0,67_B 3_D$  пересечет прямую  $2_A 3_D$  в искомой точке  $3_D$ .

Следующее перемещение наблюдателя в двух направлениях между сечениями  $D$  и  $A$  дает ломаную  $3_D 4_A 5_D$ , длина стороны  $4_A 5_D$  которой пока не определена. Для определения положения точки  $5_D$  нужно знать последнюю сторону ломаной линии, связанной с перемещениями между сечениями  $D$  и  $B$  наблюдателя, выбывающего из  $D$  в момент времени  $5-2\tau''=0,34$ . Это будет линия  $0,34$  (т. е.  $M_0$ )  $2,67_B 5_D$ , последняя сторона которой определит соответственную точку  $5_D$  в месте пересечения с прямой  $4_A 5_D$ .

Третье перемещение наблюдателя между сечениями  $D$  и  $A$  дает ломаную линию  $5_D 6_A 7_D$ , где сторона  $6_A 7_D$  неизвестна по длине. Для определения точки  $7_D$  нужно знать последнюю сторону ломаной линии, связанной с движением между сечениями  $D$  и  $B$  наблюдателя, выбывающего из  $D$  в момент времени  $7-2(2\tau'')=-2,32$  (поскольку  $2$  является наименьшим числом перемещений в двух направлениях, при котором наблюдатель начинает движение в момент времени, меньший единицы). Эта ломаная линия начинается участком  $-2,32_D$  (т. е.  $M_0$ )  $0,01_B 2,34_D$ , но сторона  $0,01_B 2,34_D$  еще не определена, так как точка  $2,34_D$  неизвестна. Для того чтобы найти эту последнюю точку, нужно построить характеристику, связанную с наблюдателем, перемещающимся вдоль отрезка  $DA$  и прибывающим в сечение  $D$  в тот же момент времени  $2,34$ , т. е. наблюдателем, выходящим из  $D$  в момент времени  $2,34-2\tau' = 0,34$ , это будет ломаная линия  $0,34_D$  (т. е.  $M_0$ )  $1,34_A 2,34_D$ , вторая сторона которой  $1,34_A 2,34_D$  определяет точку  $2,34_D$  в пересечении с построенной ранее прямой  $0,01_B 2,34_D$ . После этого ломаная линия  $(-2,32_D) 0,01_B 2,34_D$  может быть продолжена как  $2,34_D 4,67_B 7_D$  и ее последняя сторона  $4,67_B 7_D$  определит точку  $7_D$  в пересечении с построенной ранее прямой  $6_A 7_D$ .

Продолжать описание построений нет необходимости; уже ясно, что получение каждой новой точки  $i$  в сечении  $D$  требует построения сперва двух элементов ломаной линии от  $(i-2)$  до  $i$ , которой отображается перемещение наблюдателя в двух направлениях между сечениями  $D$  и  $A$ , затем построения ломаной линии, отображающей перемещение второго наблюдателя между  $D$  и  $B$ . Эта линия отображает целое число  $n$  перемещений, определяемое из условия  $n \geq \frac{iv' - 1}{2\tau''}$  и для нахождения вершин этой линии в сечении  $D$  может возникнуть необходимость введения на участке между  $DA$  еще одного или нескольких добавочных наблюдателей.

Записи при построениях названных ломаных линий удобно свести в следующую таблицу.

									1 $D$
									2 $A$
								$-1,66_D \rightarrow 0,67_B \rightarrow$	3 $D$
									4 $A$
								$0,34_D \rightarrow 2,67_B \rightarrow$	5 $D$
								$1,34_A$	6 $A$
								$-2,32_D \rightarrow 0,01_B \rightarrow 2,34_D \rightarrow 4,67_B \rightarrow$	7 $D$
								$3,34_A$	8 $A$
								$0,32_D \rightarrow 2,01_B \rightarrow 4,34_D \rightarrow 6,67_B \rightarrow$	9 $D$
								$0,68_A$	10 $A$
								$-2,98_D \rightarrow 0,65_B \rightarrow 1,68_D \rightarrow 4,01_B \rightarrow 6,34_D \rightarrow 8,67_B \rightarrow$	11 $D$
								$2,68_A$	12 $A$
								$-0,98_D \rightarrow 1,35_B \rightarrow 3,68_D \rightarrow 6,01_B \rightarrow 8,34_D \rightarrow 10,67_B \rightarrow$	13 $D$
								$0,02_A$	14 $A$
								$4,68_A$	15 $D$
								$-5,64_D \rightarrow 1,31_B \rightarrow 1,02_D \rightarrow 3,35_B \rightarrow 5,68_D \rightarrow 8,01_B \rightarrow 10,34_D \rightarrow 12,67_B \rightarrow$	16 $A$
								$2,02_A$	17 $D$
								$6,68_A$	18 $A$
								$11,34_A$	19 $D$
								$-1,64_D \rightarrow 0,69_B \rightarrow 3,02_D \rightarrow 5,35_B \rightarrow 7,68_D \rightarrow 10,01_B \rightarrow 12,34_D \rightarrow 14,67_B \rightarrow$	20 $A$
								$4,02_A$	21 $D$
								$8,68_A$	22 $A$
								$13,34_A$	23 $D$
								$0,36_D \rightarrow 2,69_B \rightarrow 5,02_D \rightarrow 7,35_B \rightarrow 9,68_D \rightarrow 12,01_B \rightarrow 14,34_D \rightarrow 16,67_B \rightarrow$	24 $A$
								$1,36_A$	25 $D$
								$6,02_A$	26 $A$
								$10,68_A$	27 $D$
								$15,34_A$	28 $A$
								$-2,32_D \rightarrow 0,03_B \rightarrow 2,36_D \rightarrow 4,69_B \rightarrow 7,02_D \rightarrow 9,35_B \rightarrow 11,68_D \rightarrow 14,01_B \rightarrow 16,34_D \rightarrow 18,67_B \rightarrow$	29 $D$
									30 $A$

Числам, соединенным между собой стрелками, соответствуют на чертеже ломаные линии, первая вершина которых (всегда — точка  $M_0$ ) определяется первым числом вверху или слева колонки или строки. Колонки цифр соответствуют перемещениям наблюдателя между сечениями  $D$  и  $A$ , а строки — перемещениям на отрезке  $DB$ .

Числа в пересечениях колонок и строк определяют вершины ломаных линий, соответствующих перемещениям наблюдателя вдоль участков  $DA$  и  $DB$ , поскольку они соответствуют точкам пересечения последних сторон ломаных линий. Из таблицы видно, например, что для получения точки  $21_D$  необходимо провести 5 ломаных линий для участка между сечениями  $D$  и  $A$  и 10 ломаных линий для участка  $DB$ .

Чтобы найти последующие соответственные точки в сечении  $D$ , прежде всего, надо продолжить построение каждой из названных 15 ломаных линий; кроме того, для каждой последующей точки число ломаных линий увеличивается на одну соответствующую горизонтальной строчке (т. е. на ломаную линию между сечениями  $D$  и  $B$ ) и, наконец, для каждых двух последующих точек прибавляется еще одна дополнительная колонка цифр.

Таким образом, число ломаных линий, которые нужно строить, со временем все больше и больше возрастает. Это обстоятельство не вызывает особых затруднений; следует только во избежание загромождения чертежа время от времени продолжать построения на новом листе, на который достаточно перенести с предыдущего листа только последние точки.

Осложнение в построениях проистекает, однако, в основном из-за того, что мы исследовали общий случай, когда  $\tau'$  и  $\tau''$  не имеют простого общего сомножителя. При наличии общего сомножителя, принимаемого за единицу времени, построения чрезвычайно упрощаются, потому что при этом число ломаных линий сократится до  $n+m$ , если общий измеритель содержится  $n$  раз в  $\tau'$  и  $m$  раз в  $\tau''$ .

**§ 19. Случай, когда интервалы времени  $\tau'$  и  $\tau''$  имеют общий сомножитель.** На фиг. 20 представлена эпюра, при построении которой за единицу времени принято  $\frac{\tau'}{2} = \frac{\tau''}{3}$ . Соответственные

точки в сечении  $A$  определены для моментов времени, разделенных между собой интервалом времени  $\tau'$ , начиная с момента времени нуль, в предположении, что режим регулирующего устройства  $B$  начинает меняться также в момент времени нуль.

Построения производятся уже знакомым нам образом на основе положений, установленных выше, и не могут вызывать неясностей. Тем не менее полезно в целях тренировки читателя проследить за построением как этой, так и более сложных эпюр, которые встретятся в последующем.

Во избежание того, чтобы описание графических построений не привели к недопустимым длиннотам в изложении, мы будем

давать в дальнейшем эти описания в форме таблиц, построенных по следующему принципу.

Обозначения, содержащиеся в каждой строке таблицы, относятся к нахождению одной соответственной точки; эти обозначения надлежит объединить фразой, составленной при помощи заголовков колонн, прочитываемых слева направо; так, например, первую строку нижеследующей таблицы надо прочитывать следующим образом:

при достижении сечения  $A$  в момент времени  $2$  наблюдатель, начавший движение из пункта  $D$  в момент времени (нуль), установит, что искомая соответственная точка лежит на прямой с угловым коэффициентом  $+a':gS'$ , проходящей через соответственную точку  $M_0$  в момент начала движения и на характеристической кривой  $\Psi_{A2}$ , т. е. в точке пересечения  $2_A$  названных прямой и кривой.

Этой фразой дается вполне ясное представление о процессе построений, нужных для получения точки  $2_A$ .

Соответственные точки для сечения  $D$ , где нет заданной характеристической кривой, как в  $A$  или в  $B$ , должны находиться на пересечении прямых, являющихся характеристиками для двух подвижных наблюдателей, перемещающихся вдоль отрезка трубопровода. Эти точки можно отыскать, прочитывая в таблице к фиг. 20 две горизонтальные строчки, объединенные скобкой. Например, третья строчка таблицы прочитывается следующим образом: при достижении сечения  $D$  в момент времени  $4$  наблюдатель, начавший движение из сечения  $A$  в момент времени  $2$ , устанавливает, что соответственная точка находится на прямой с угловым коэффициентом  $-a':gS'$ , проходящей через точку  $2_A$ , а наблюдатель, начавший движение из пункта  $B$  в момент времени  $1$ , устанавливает, что соответственная точка находится на прямой с угловым коэффициентом  $+a'':gS''$ , проходящей через точку  $1_B$ , т. е. в точке  $4D$  пересечения двух названных прямых.

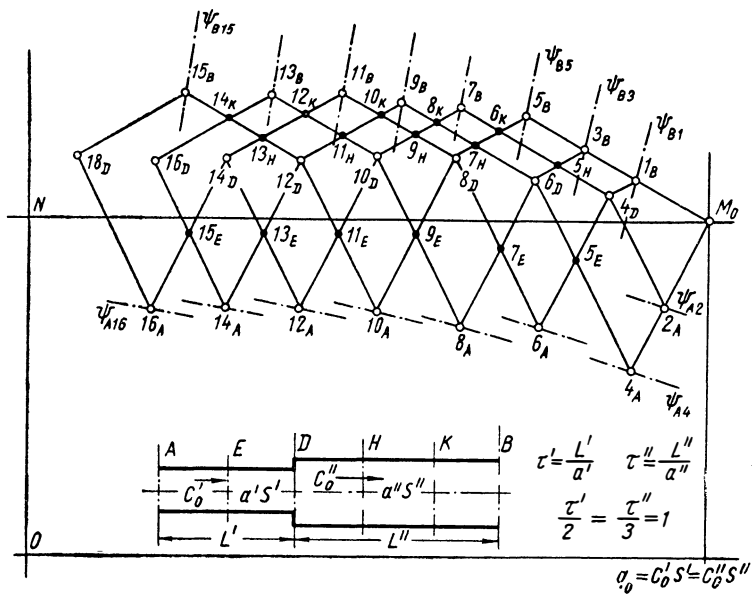
Таблица к фиг. 20 содержит описание построений для всех точек на фиг. 20 и соответствует их последовательности.

Характеристические кривые  $\Psi_A$  и  $\Psi_B$  регулирующих устройств показаны пунктиром с точкой, но обозначены не все, чтобы не усложнять чертежа. Впрочем, их обозначения понятны сами собой; так например, кривая  $12_A$  является, очевидно, кривой  $\Psi_{A12}$ , т. е. кривой  $\Psi$  для сечения  $A$  в момент времени  $12$ .

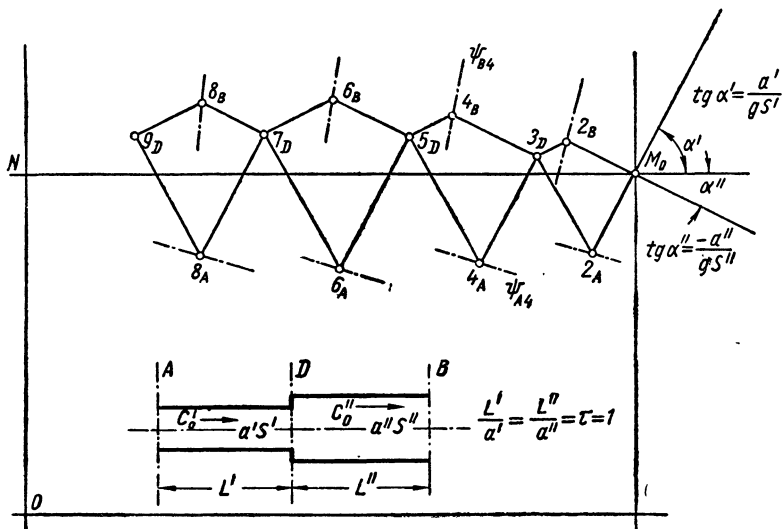
Построения на фиг. 20 гораздо проще предшествующего (фиг. 19); поэтому при конкретных практических расчетах целесообразно находить наибольший общий сомножитель между значениями времени пробега наблюдателя вдоль двух участков; при необходимости можно даже без большого ущерба для результатов расчета несколько изменить длины отрезков  $L'$  и  $L''$ .

Полученное таким образом построение имеет и другое очень важное преимущество: оно определяет соответственные точки





Фиг. 20.



Фиг. 21.

Таблица к фиг. 20

При достижении сечения	в момент времени	наблюдатель, начавший движение из пункта	в момент времени	установит, что искомая соответственная точка лежит на прямой с угловым коэффициентом	проходящей через соответственную точку в момент начала движения	и характеристической кривой	т. е. в точке пересечения
A	2	D	0	$+a' : gS'$	$M_0$	$\Psi_{A2}$	$2_A$
B	1	D	-2	$-a'' : gS''$	$M_0$	$\Psi_{B1}$	$1_B$
D	4	{ A B }	{ 2 1 }	{ $-a' : gS'$ $+a'' : gS''$ }	{ $2_A$ $1_B$ }		$4_D$
A	4	D	2	$+a' : gS'$	$M_0$	$\Psi_{A4}$	$4_A$
B	3	D	0	$-a'' : gS''$	$M_0$	$\Psi_{B3}$	$3_B$
D	6	{ A B }	{ 4 3 }	{ $-a' : gS'$ $+a'' : gS''$ }	{ $4_A$ $3_B$ }		$6_D$
A	6	D	4	$+a'$	$4_D$	$\Psi_{A6}$	$6_A$
B	5	D	2	$-a''$	$M_0$	$\Psi_{B5}$	$5_B$
D	8	{ A B }	{ 6 5 }	{ $-a'$ $+a''$ }	{ $6_A$ $5_B$ }		$8_D$
A	8	D	6	$+a'$	$6_D$	$\Psi_{A8}$	$8_A$
B	7	D	4	$-a''$	$4_D$	$\Psi_{B7}$	$7_B$
D	10	{ A B }	{ 8 7 }	{ $-a'$ $+a''$ }	{ $8_A$ $7_B$ }		$10_D$
A	10	D	8	$+a'$	$8_D$	$\Psi_{A10}$	$10_A$
B	9	D	6	$-a''$	$6_D$	$\Psi_{B9}$	$9_B$
D	12	{ A B }	{ 10 9 }	{ $-a'$ $+a''$ }	{ $10_A$ $9_B$ }		$12_D$
A	12	D	10	$+a'$	$10_D$	$\Psi_{A12}$	$12_A$
B	11	D	8	$-a''$	$8_D$	$\Psi_{B11}$	$11_B$
D	14	{ A B }	{ 12 11 }	{ $-a'$ $+a''$ }	{ $12_A$ $11_B$ }		$14_D$
A	14	D	12	$+a'$	$12_D$	$\Psi_{A14}$	$14_A$
B	13	D	10	$-a''$	$10_D$	$\Psi_{B13}$	$13_B$
D	16	{ A B }	{ 14 13 }	{ $-a'$ $+a''$ }	{ $14_A$ $13_B$ }		$16_D$
A	16	D	14	$+a'$	$14_D$	$\Psi_{A16}$	$16_A$
B	15	D	12	$-a''$	$12_D$	$\Psi_{B15}$	$15_B$
D	18	{ A B }	{ 16 15 }	{ $-a'$ $+a''$ }	{ $16_A$ $15_B$ }		$18_D$

не только в сечениях  $A$ ,  $B$  и  $D$ , но также и во всех сечениях, отстоящих друг от друга на расстоянии  $\frac{L'}{m}$  на участке трубопровода между  $A$  и  $D$  и на расстоянии  $\frac{L''}{n}$  на участке между  $D$  и  $B$ , т. е. например, в сечениях  $E$ ,  $H$  и  $K$  на фиг. 20 (это было показано в § 15). Так например, соответственная точка для сечения  $K$  в момент времени 8 находится на пересечении прямой  $6_D$   $9_B$ , вдоль которой следует наблюдатель, выбывающий из  $D$  в момент времени 6, и прямой  $7_B$   $10_D$  перемещения наблюдателя, вышедшего из  $B$  в момент времени 7, поскольку оба этих наблюдателя прибывают в  $K$  точно в момент времени 8. Соответственные точки для всех промежуточных сечений помечены их индексами на фиг. 20.

Разумеется, построение получается наиболее простым в случае, когда  $\tau' = \tau''$ , что явствует из фиг. 21. В данном случае достаточно двух ломаных линий для нахождения соответственных точек граничных режимов в  $A$ ,  $B$  и  $D$ , разделенных между собой интервалами времени  $\tau$ . Можно построить сверх того сколько угодно промежуточных точек, поступая в соответствии с изложенным в § 14.

**§ 20. Случай последовательного соединения  $n$  участков.** Рассматриваемый ниже случай не содержит ничего нового по сравнению с предыдущим, являясь просто его развитием; условие на стыке третьего и второго участков будет тем же, что на стыке второго и первого в предыдущем примере и так далее.

Построение на фиг. 22 выполнено, например, для случая пяти участков в предположении  $\frac{L'}{a'} = \frac{L''}{a''} = \frac{L'''}{a'''} = \frac{L^{IV}}{a^{IV}} = \frac{L^{-V}}{a^{-V}} = \tau$ ; регулирующее устройство в  $A$  начинает изменять свою характеристику в момент времени нуль, регулирующее устройство в  $B$  в момент времени 1; построения выполнены, имея в виду получение соответственных точек  $2_A$   $4_A$   $6_A$ , в сечении  $A$ . Проследим за построениями для получения нескольких первых точек.

Для наблюдателя, начавшего движение из сечения  $D$  в момент времени 1, когда в этом сечении еще существовал начальный режим  $M_0$ , характеристикой является прямая  $M_0 2_A$  с угловым коэффициентом  $-a' : gS'$  (перемещение совпадает с направлением течения). Когда наблюдатель прибывает в  $A$  в момент времени 2, соответственная точка будет находиться на пересечении названной прямой и характеристической кривой  $\Psi_{A_2}$  регулирующего устройства в  $A$  в этот момент времени; пусть это будет точка  $2_A$ .

Для того же наблюдателя, возвращающегося в направлении к сечению  $D$ , характеристикой будет прямая  $2_A$   $3_D$ , проходящая через точку  $2_A$ , симметричная предыдущей прямой и справедливая также для сечения  $D$ , куда наблюдатель прибывает в момент времени 3. Для наблюдателя, вышедшего в момент времени 2 из сечения  $E$ , когда там еще имел место режим  $M_0$ , характеристикой будет прямая  $M_0 3_D$ , имеющая угловой коэффициент  $-a'' : gS''$ ,

справедливая также для сечения  $D$  в момент времени 3 прибытия туда наблюдателя. Точка  $3D$  пересечения двух отмеченных прямых является соответственной точкой для сечения  $D$  в момент времени 3.

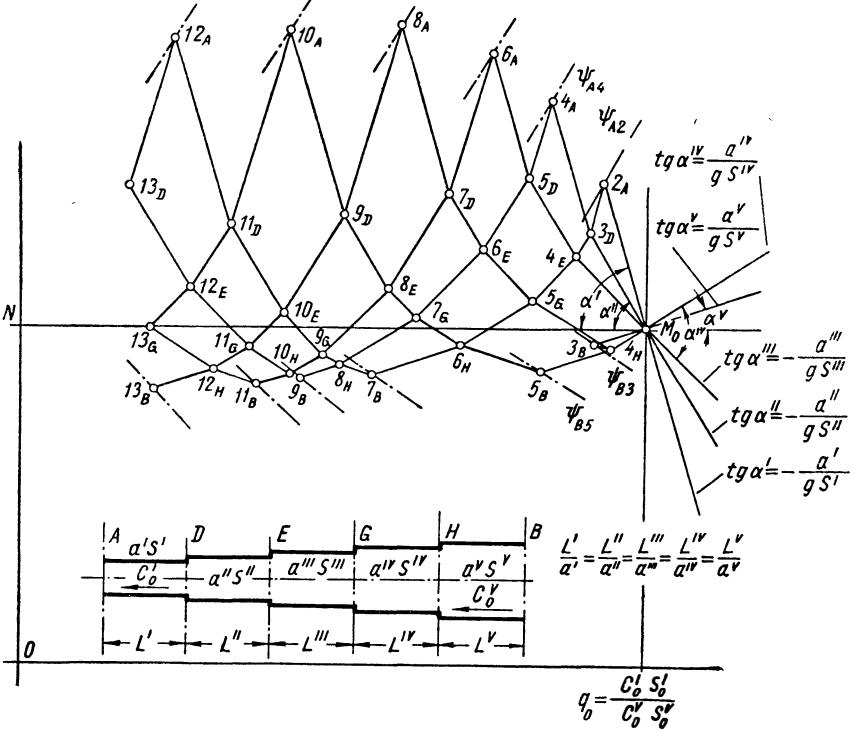
Аналогичным образом можно найти также соответственную точку  $4E$  на пересечении прямых  $3D4E$  и  $M_04E$ , причем вторая является характеристической прямой для наблюдателя, выбывшего из  $G$  в момент времени 3, когда в этом сечении еще сохраняется первоначальный режим  $M_0$  (поскольку режим регулирующего устройства в  $B$  начинает изменяться, в соответствии с нашим предположением, в момент времени 1).

Для определения соответственной точки  $5G$  нужно знать характеристические прямые, связанные с наблюдателями, один из которых выбывает из сечения  $E$  в момент времени 4, и другой из сечения  $H$  также в момент времени 4. Первой будет прямая  $4E5G$ , симметричная  $M_04E$  и проходящая через только что найденную точку  $4E$ , вторая же не может быть построена сразу, так как точка  $4H$ , через которую она должна пройти, еще неизвестна и ее еще предстоит определить. Для этого нужно знать характеристические прямые для наблюдателей, выбывших из  $G$  и из  $B$  в момент времени 3. Первой из этих прямых будет  $M_04H$ , поскольку момент времени 3 является последним, когда в сечении  $G$  еще сохраняется начальный режим  $M_0$ . Угловым коэффициентом этой прямой равен  $+a^{IV} : gS^{IV}$ . Вторая прямая должна пройти через неизвестную пока соответственную точку  $3B$ , еще подлежащую определению. Эта точка находится на пересечении характеристической кривой регулирующего устройства  $B$  в момент времени 3 и характеристической прямой, связанной с наблюдателем, выбывающим из  $H$  в момент времени 2. Этой последней будет прямая, имеющая угловым коэффициентом  $+a : gS^V$  и проходящая через  $M_0$ , поскольку в момент времени 2 в сечении  $H$  еще существует начальный режим  $M_0$ . Искомая соответственная точка  $3B$  находится на пересечении названной прямой и характеристической кривой. Вновь отправляясь от этой точки, можно найти аналогично тому, как это делалось ранее, точку  $5G$ . Дальнейшее построение эпюры следует продолжать в порядке, указанном в следующей таблице, где первые строчки соответствуют только что описанным построениям.

Из фиг. 22 можно видеть, что построение приводит к графикам, имеющим характер веревочных многоугольников, пять сторон которых соответственно параллельны прямым, имеющим угловые коэффициенты  $\frac{a'}{gS'}$ ,  $\frac{a''}{gS''}$ ,  $\frac{a'''}{gS'''}$ ,  $\frac{a^{IV}}{gS^{IV}}$ ,  $\frac{a^V}{gS^V}$  и им сим-

метричным; число сторон многоугольников равняется, таким образом, числу последовательно соединенных участков трубопровода. Многоугольник, например,  $2A 3D 4G 6H 7B$ , соответствует перемещению наблюдателя, выбывающего из сечения  $A$  в момент времени 2 и прибывающего в сечение  $B$  в момент времени 7, а его

продолжение — многоугольник  $7_B 8_H 9_G 10_E 11_D 12_A$  соответствует возвращению наблюдателя из  $B$  в  $A$ . Последующие многоугольники соответствуют перемещениям наблюдателей, выбывающих из  $A$  в моменты времени, разделенные интервалами  $2\tau$ , и накладываются на предыдущие. С учетом этого построение можно произвести очень быстро, действуя почти машинально; легко видеть, что увеличение количества участков не осложняет работу; веревочный



Фиг. 22.

многоугольник одинаково просто строится при двадцати сторонах, как и при пяти.

Если длина участков трубопровода не одинакова между собой, то построение не усложняется по существу, а только становится несколько более трудоемким, поскольку возрастает число соответственных точек, подлежащих определению. На фиг. 23 приводится случай, например, четырех участков различной длины, однако таких, что значения времени пробега  $\tau^I, \tau^{II}, \tau^{III}, \tau^{IV}$  волной отдельных участков имеют общий множитель, принимаемый за единицу, именно такой, как это имеет место при условии  $\frac{\tau^I}{2} = \frac{\tau^{II}}{3} = \frac{\tau^{III}}{2} = \frac{\tau^{IV}}{4} = 1$ ; предположено также, что изменения в режиме обоих регулирующих устройств  $A$  и  $B$  возникают в момент

Таблица к фиг. 22

По прибытии в сечение	в момент времени	наблюдатель, бывший из сечения	в момент времени	устанавливает, что соответственная точка находится на прямой с угловым коэффициентом	проходящей через соответственную точку	и на характеристической кривой	т. е. в точке пересечения
A	2	D	1	$-a' : gS'$	$M_0$	$\Psi_{A_2}$	$2_A$
D	3	A	2	$+a' : gS'$	$2_A$		$3_D$
		E	2	$-a'' : gS''$	$M_0$		
E	4	D	3	$+a'' : gS''$	$3_D$		$4_E$
		G	3	$-a''' : gS'''$	$M_0$		
B	3	H	2	$+a^V : gS^V$	$M_0$	$\Psi_{B_3}$	$3_B$
		B	3	$-a^V : gS^V$	$3_B$		$4_H$
H	4	G	3	$+a^{IV} : gS^{IV}$	$M_0$		
		E	4	$+a'''$	$4_E$		$5_G$
G	5	H	4	$+a^V$	$4_H$		
B	5	H	4	$+a^V$	$4_H$	$\Psi_{B_5}$	$5_B$
		G	5	$+a^{IV}$	$5_G$		$6_H$
H	6	B	5	$-a^V$	$5_B$		
B	7	H	6	$+a^V$	$6_H$	$\Psi_{B_7}$	$7_B$
		D	3	$+a'$	$3_D$	$A_4$	$4_A$
A	4	D	3	$-a''$	$3_D$		
		A	4	$+a''$	$4_A$		$5_D$
D	5	E	4	$-a'''$	$4_E$		
		D	5	$+a''$	$5_D$		$6_E$
E	6	G	5	$-a'''$	$5_G$		
		E	6	$+a'''$	$6_E$		$7_G$
G	7	H	6	$-a^{IV}$	$6_H$		
		G	7	$+a^{IV}$	$7_G$		$8_H$
H	8	B	7	$-a^V$	$7_B$		
B	9	H	8	$+a^V$	$8_H$	$\Psi_{B_9}$	$9_B$
		D	5	$-a'$	$5_D$	$\Psi_{A_6}$	$6_A$
A	6	D	5	$+a'$	$6_A$		
		E	6	$-a''$	$6_E$		$7_D$
D	7	A	6	$+a''$	$7_D$		
		G	7	$-a'''$	$7_G$		$8_E$
E	8	D	7	$+a'''$	$8_E$		
		E	8	$-a^{IV}$	$8_E$		$9_G$
G	9	H	8	$+a^{IV}$	$8_H$		

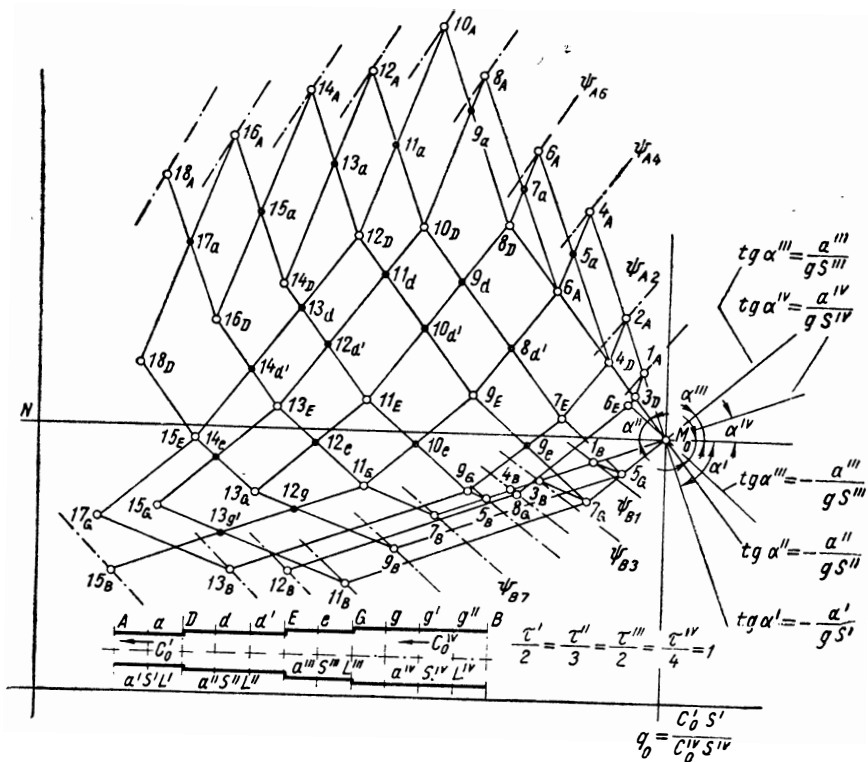
По прибытии в сечение	в момент времени	наблюдатель, вышедший из сечения	в момент времени	устанавливает, что соответственная точка находится на прямой с угловым коэффициентом	проходящей через соответственную точку	и на характеристической кривой	т. е. в точке пересечения
$H$	10	$G$ $B$	9 9	$+\alpha^{IV}$ $-\alpha^V$	$9_G$ $9_B$	$\Psi_{B11}$ $\Psi_{A8}$	$10_H$
$B$	11	$H$	10	$+\alpha^V$	$10_H$		$11_B$
$A$	8	$D$	7	$-\alpha'$	$7_D$		$8_A$
$D$	9	$A$	8	$+\alpha'$	$8_A$		$9_D$
$E$	10	$D$ $G$	9 9	$+\alpha''$ $-\alpha'''$	$9_D$ $9_G$		$10_E$
$G$	11	$E$ $H$	10 10	$+\alpha'''$ $-\alpha^{IV}$	$10_E$ $10_H$		$11_G$
$H$	12	$G$ $B$	11 11	$+\alpha^{IV}$ $-\alpha^V$	$11_G$ $11_B$		$12_H$
$B$	13	$H$	12	$+\alpha^V$	$12_H$		$13_B$

времени нуль. Построением определены граничные соответственные точки в сечении  $A$  для моментов времени, разделенных интервалами  $\tau'$ , т. е. точки  $2_A 4_A 6_A 8_A \dots$  и так далее. Таблица к фиг. 22 показывает, в каком порядке производятся построения, описания которого мы не даем, поскольку эти построения не отличаются от предыдущих.

При построениях, данных на фиг. 23, мы вновь встречаем верочные многоугольники, количество сторон которых равняется, как и в случае фиг. 22, числу участков трубопровода; однако на фиг. 23 некоторые стороны многоугольника делятся пересекающимися и симметричными сторонами других многоугольников на столько частей, сколько раз общий множитель содержится в длине участка, которому соответствует рассматриваемая сторона; места пересечения являются соответственными точками для промежуточных сечений этого участка.

Например, сторона  $11_E 14_D$ , соответствующая участку  $ED$ , пересечена стороной  $12_D 15_E$  в точке  $13_a$ , являющейся соответственной точкой для сечения в  $d$  в момент времени 13, и стороной  $10_D 13_E$  в точке  $12_a$ , являющейся соответственной точкой для сечения  $d$  в момент времени 12.

Это вытекает непосредственно из принципа, изложенного в § 15, и отмечалось ранее при построениях на фиг. 20.



Фиг. 23.

Таблица к фиг. 2

По прибы- тин в сече- ние	в мо- мент време- ни	наблю- датель, выбыв- ший из сече- ния	в мо- мент време- ни	устанавливает, что соответ- ственная точка находится на прямой с угло- вым коэффи- циентом	прохо- дящий через соот- ветст- венную точку	и на харак- терис- тической кривой	т. е. в точ- ке пере- сечения
A	2	D	Нуль	$-a' : g S'$	$M_0$	$\Psi_{A2}$	$2_A$
D	4	A	2	$a' : g S'$	$2_A$	$\Psi_{B1}$	$4_D$
		E	1	$-a'' : g S''$	$M_0$		$1_B$
B	1	G	-3	$+ a^{IV} : g S^{IV}$	$M_0$	$\Psi_{A4}$	$1_B$
G	5	B	1	$- a^{IV} : g S^{IV}$	$1_B$		$5_G$
		E	3	$+ a''' : g S'''$	$M_0$	$\Psi_{A4}$	$7_E$
E	7	D	4	$+ a'' : g S''$	$4_D$		$4_A$
		G	5	$- a''' : g S'''$	$5_G$	$\Psi_{A4}$	$6_D$
A	4	D	2	$- \alpha'$	$M_0$		$4_A$
D	6	A	4	$+ \alpha'$	$4_A$	$\Psi_{A4}$	$6_D$
		E	3	$- \alpha''$	$M_0$		



По прибы- тию в сече- ние	в мо- мент време- ни	наблю- датель, выбыв- ший из сече- ния	в мо- мент време- ни	устанавливает, что соответст- венная точка находится на прямой с угло- вым коэффи- циентом	прохо- дящий через соот- ветст- венную точку	и на харак- терис- тической кривой	т. е. в точ- ке пере- сечения
<i>B</i>	3	<i>G</i>	Нуль	$+ \alpha^{IV}$	$M_0$	$\Psi_B$	$3_B$
<i>G</i>	7	<i>B</i> <i>E</i>	3 5	$- \alpha^{IV}$ $+ \alpha'''$	$3_B$ $M_0$		$7_G$
<i>E</i>	9	<i>D</i> <i>G</i>	6 7	$+ \alpha''$ $- \alpha'''$	$6_D$ $7_G$		$9_E$
<i>A</i>	6	<i>D</i>	4	$+ \alpha'$	$4_D$	$\Psi_{A6}$	$6_A$
<i>D</i>	8	<i>A</i> <i>E</i>	6 5	$+ \alpha'$ $- \alpha''$	$6_D$ $M_0$		$8_D$
<i>B</i>	5	<i>G</i>	1	$+ \alpha^{IV}$	$M_0$	$\Psi_{B5}$	$5_B$
<i>G</i>	9	<i>B</i> <i>E</i>	5 7	$- \alpha^{IV}$ $+ \alpha'''$	$5_B$ $7_E$		$9_G$
<i>E</i>	11	<i>D</i> <i>G</i>	8 9	$+ \alpha''$ $- \alpha'''$	$8_D$ $9_G$		$11_E$
<i>A</i>	8	<i>D</i>	6	$- \alpha'$	$6_D$	$\Psi_{A8}$	$8_A$
<i>D</i>	10	<i>A</i> <i>E</i>	8 7	$+ \alpha'$ $- \alpha''$	$8_A$ $7_E$		$10_D$
<i>B</i>	7	<i>G</i>	3	$+ \alpha^{IV}$	$M_0$	$\Psi_{B7}$	$7_B$
<i>G</i>	11	<i>B</i> <i>E</i>	7 9	$- \alpha^{IV}$ $+ \alpha'''$	$7_B$ $9_E$		$11_G$
<i>E</i>	13	<i>D</i> <i>G</i>	10 11	$+ \alpha''$ $- \alpha'''$	$10_D$ $11_G$		$13_G$
<i>A</i>	10	<i>D</i>	8	$- \alpha'$	$8_D$	$\Psi_{A10}$	$10_A$
<i>D</i>	12	<i>A</i> <i>E</i>	10 9	$+ \alpha'$ $- \alpha''$	$10_A$ $9_E$		$12_D$
<i>B</i>	9	<i>G</i>	5	$+ \alpha^{IV}$	$5_G$	$\Psi_{B9}$	$9_B$
<i>G</i>	13	<i>B</i> <i>E</i>	9 11	$- \alpha^{IV}$ $+ \alpha'''$	$9_B$ $11_G$		$13_G$
<i>E</i>	15	<i>D</i> <i>G</i>	12 13	$+ \alpha''$ $- \alpha'''$	$12_D$ $13_G$		$15_E$

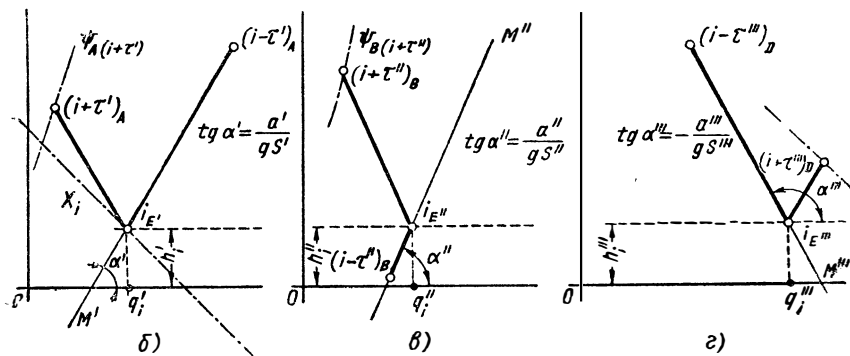
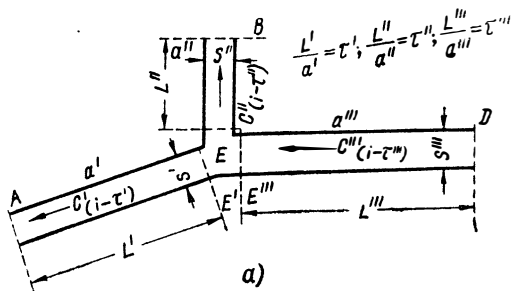
По прибы- тии в сече- ние	в мо- мент време- ни	наблю- датель, выбыв- ший из се- чения	в мо- мент време- ни	устанавливает, что соответст- венная точка находится на прямой с угло- вым коэффи- циентом	проходя- щей через соответст- венную точку	и на ха- ракте- ристиче- ской кривой	т. е. в точ- ке пере- сечения
Дополнительные точки							
<i>A</i>	1	<i>D</i>	-1	$-a'$	$M_0$	$\Psi_{A1}$	$1_A$
<i>D</i>	3	<i>A</i> <i>E</i>	1 1	$+a'$ $-a''$	1 $M_0$		$3_D$
<i>E</i>	6	<i>D</i> <i>G</i>	3 4	$+a''$ $-a'''$	$3_D$ $M_0$		$6_E$
<i>B</i>	4	<i>G</i>	Нуль	$+a^{IV}$	$M_0$	$\Psi_{B1}$	$4_B$
<i>G</i>	8	<i>B</i> <i>E</i>	4 6	$-a^{IV}$ $+a'''$	$4_B$ $6_E$		$8_G$

**§ 21. Случай простого разветвления. Принцип построения.** Пусть трубопровод состоит из трех участков *AE*, *BE*, *DE* (фиг. 24, *a*), соединяющихся в точке *E*; обозначим конструктивные характеристики отдельных участков через  $a'L'S'$ ,  $a''L''S''$ ,  $a'''L'''S'''$  и пусть  $\tau, \tau'', \tau'''$  — времена пробега волной соответственных участков. Пусть далее в концах сечений трубопровода установлены регулирующие устройства, характеристические кривые которых известны для каждого момента времени; в другом случае в сечениях *A*, *B*, *D* могут быть последовательно приключены дополнительные участки трубопровода, оканчивающиеся регулирующими устройствами с известными характеристическими кривыми. В последнем случае для названных участков могут быть сделаны построения, аналогичные описанным в предыдущих параграфах.

Соответственные точки для сечений *A*, *B*, *D* могут быть получены путем прослеживания перемещений наблюдателей вдоль соответствующих участков трубопровода. Для получения же соответственной точки в *E* для некоторого момента времени необходимо и достаточно, чтобы это был момент встречи трех наблюдателей, перемещающихся каждый вдоль известной характеристической прямой.

Действительно, пусть  $(i - \tau')_A$  на фиг. 24, *b* представляет соответственную точку для сечения *A* в момент времени  $(i - \tau')$ . Для наблюдателя, выбывающего из сечения *A* в это мгновение, характеристикой явится прямая  $(i - \tau')_A M'$ , проходящая через данную соответственную точку и имеющая угловым коэффициентом  $+\frac{a'}{gS'}$  (наблюдатель передвигается против течения). Эта прямая будет справедлива и при достижении наблюдателем в момент времени  $i - \tau + \tau' = i$  сечения *E'* непосредственно перед

точкой разветвления  $E$ . Точно так же для наблюдателя, выбывшего из  $B$  в момент времени  $(i - \tau'')$  и прибывающего в момент времени  $i - \tau'' + \tau''' = i$  в сечение  $E'''$ , непосредственно предшествующее точке ветвления  $E$ , будет справедлива характеристическая прямая  $(i - \tau''')_B M'''$  (фиг. 24, в) с угловым коэффициентом  $+\frac{a'''}{gS''}$  при условии, что точка  $(i - \tau'')_B$  является соответствующей точкой в сечении  $B$  в момент времени  $(i - \tau'')$ .



Фиг. 24.

Наконец, для наблюдателя, выбывшего из  $D$  в момент времени  $(i - \tau''')$ , характеристикой будет прямая  $(i - \tau''')_D M'''$  (фиг. 24, в), проходящая через соответственную точку  $(i - \tau''')_D$  и имеющая угловый коэффициент  $(-\frac{a'''}{gS''})$  (поскольку перемещение наблюдателя происходит в направлении течения). Эта прямая будет справедлива так же для сечения  $E'''$ , непосредственно перед местом ветвления, в момент времени  $i - \tau''' + \tau''' = i$ .

Для каждого из трех наблюдателей соответственная точка  $E$  в момент времени  $i$  будет на его характеристической прямой, соответствующая режиму  $q'_i h'_i$  в  $E'$ ,  $q''_i h''_i$  в  $E''$  и  $q'''_i h'''_i$  в  $E'''$ .

В соответствии с законом сплошности, упоминавшимся в § 16, должно быть

$$h'_i = h''_i = h'''_i, \quad (1)$$

$$q'_i = q''_i - q'''_i. \quad (2)$$

Это значит, что соответственные точки  $i_{E'}$ ,  $i_{E''}$ ,  $i_{E'''}$  должны иметь одинаковую ординату и удовлетворять отношению (2), какой бы ни была эта ордината. Вычтем поэтому из абсцисс прямой  $(i - \tau''')_{DM''}$  абсциссы прямой  $(i - \tau'')_{BM''}$ ; в результате будет получена прямая, нанесенная на фиг. 24, б, где она обозначена через  $X_i$ . Эта последняя прямая пересечет характеристическую прямую  $(i - \tau')_{AM'}$  в точке  $i_{E'}$ , которая и будет искомой соответственной точкой; действительно, значения расхода для этой точки и для точек  $i_{E''}$  и  $i_{E'''}$ , находящихся на той же горизонтали, удовлетворяют сформулированным выше условиям сплошности (1) и (2)\*.

Определив таким образом соответственную точку для сечения  $E$ , наблюдатели возвращаются каждый на противоположный конец своего участка, куда они прибывают в моменты времени  $(i + \tau')$  (сечение  $A$ ),  $(i + \tau'')$  (сечение  $B$ ) и  $(i + \tau''')$  (сечение  $D$ ). При этих перемещениях характеристиками будут прямые, симметричные предыдущим относительно вертикали, проходящей через соответственные точки  $i_{E'}$ ,  $i_{E''}$ ,  $i_{E'''}$ . Соответственные точки в сечениях  $A$ ,  $B$  и  $D$  определяются в пересечениях этих прямых с характеристическими кривыми регулирующих устройств для соответствующих моментов времени; это будут точки  $(i + \tau')_A$ ,  $(i + \tau'')_B$ ,  $(i + \tau''')_D$ .

Из изложенного следует, что построения должны производиться одновременно для трех участков и таким образом, чтобы всегда были известны характеристические прямые, связанные с перемещениями наблюдателей, встречающихся в сечении ветвления  $E$ .

Так же, как и в случае последовательного соединения участков трубопровода, построения будут тем проще, чем большим будет общий масштаб для величин времени пробега  $\tau'$ ,  $\tau''$ ,  $\tau'''$ ; однако такие случаи произвольных значений времени пробега не вызывают принципиальных затруднений при построениях.

\* При построениях для отдельных участков нет необходимости в установлении положительного направления для скорости. Это не представляло бы каких-либо преимуществ и иногда могло бы повести к путанице. Так, мы приняли за положительные все три скорости  $c(i - \tau')$ ,  $c(i - \tau'')$ ,  $c(i - \tau''')$  (фиг. 24, б, в, г), несмотря на то, что в двух первых случаях имеет место отток от ветвления, в третьем же приток к нему. При этом мы написали условие сплошности в сечении  $E$  в виде  $q'_i = q''_i - q'''_i$  вместо того, чтобы записать, что сумма расходов в сечении  $E$  равняется нулю. Выбор направления скорости лучше оставить произвольным, чем пытаться его систематизировать, так как в случае нескольких ветвлений систематизация становится невозможной: положительное направление для одного ветвления становится отрицательным на другом конце участка для следующего ветвления.

Мы продемонстрируем ход построений на примере случая, когда величины  $\tau', \tau'', \tau'''$  имеют общий множитель.

**§ 22. Построения в случае простого ветвления и когда величины  $\tau', \tau'', \tau'''$  имеют общий множитель.** Рассмотрим случай (фиг. 25, а), когда три участка образуют ветвление с параметрами отдельных участков  $a'L'S', a''L''S'', a'''L'''S'''$ , причем  $\frac{\tau'}{3} = \frac{\tau''}{2} = \frac{\tau'''}{4} = \tau$ . Величину  $\tau$  примем за единицу времени. Пусть на концах участков трубопровода в  $A, B, D$  установлены регулирующие устройства, характеристические кривые которых известны в любое время. Пусть, наконец, начальный установившийся режим характеризуется значениями расхода, например  $q'_0 = q''_0$  и  $q''_0 = 0$ ; это определяет соответственные точки:  $M'_0$  с абсциссой  $q'_0$  и  $h_0$  для сечений  $A$  и  $E$  (фиг. 25, б),  $M_0$  (фиг. 25, в) с ординатой  $h_0$  и абсциссой, равной нулю для сечений  $B$  и  $E$  и  $M''_0$  (фиг. 25, г), с абсциссой  $q''_0 = q'_0$  и ординатой  $h_0$  для сечений  $D$  и  $E'''$ .

Предположим, что характеристическая кривая регулирующего устройства  $A$  начинает меняться в момент времени нуль, характеристическая кривая  $\Psi_{A_0}$  устройства  $B$  представлена не меняющейся во времени параболой  $\Psi_{B_0}$ , причем ее правой ветвью в случае, когда расход имеет направление от  $B$  к  $E$ , и левой, когда течение направлено от  $E$  к  $B$ , и характеристической кривой устройства  $D$  является во все время одна и та же горизонтальная линия. Отметим, что в случае, когда характеристические кривые регулирующих устройств  $B$  и  $D$  также меняются во времени, их нужно было бы только вычерчивать вновь для разных моментов времени по мере надобности; принятые предположения имеют единственной целью упростить построения в рассматриваемом ниже конкретном случае. Этим случаем является выключение турбины в сечении  $A$  при наличии уравнительной башни с водосливом, т. е. при постоянном уровне в  $B$  и при наличии питающего бассейна с постоянным уровнем в  $D$ .

Мы будем определять режимы, разделенные между собой интервалами времени  $2\tau$ ; этому будут соответствовать в сечении  $B$  попеременно промежуточные или граничные режимы, в  $A$  в основном промежуточные, а через интервалы  $6\tau$  граничные, в  $D$  также в основном промежуточные, а через интервалы времени  $8\tau$  граничные.

Последним моментом времени, где в нашем примере еще существует первоначальный режим, является момент времени три для сечения  $E$ , момент пять для сечения  $B$  и семь для сечения  $D$ .

Для наблюдателя, начавшего движение из сечения  $E'$  в направлении к  $A$  в момент времени  $(-1)$ , характеристической прямой будет  $M'_0M'$  (фиг. 25, б), проходящая через начальную соответственную точку режима  $M_0$ , имея угловой коэффициент

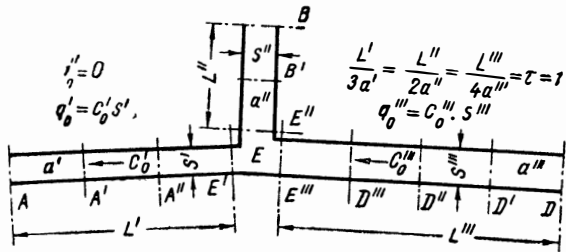
$\left(-\frac{a'}{gS'}\right)$ . Эта прямая будет справедлива при прибытии наблюдателя в сечение  $A$  в момент времени  $-1+3=2$  и соответственная точка  $2A$  будет находиться на пересечении прямой  $M_0M'$  и характеристической кривой  $\Psi_{A_2}$  регулирующего устройства  $A$ .

Та же прямая  $M_0M'$  остается справедливой для наблюдателей, отправляющихся из  $E'$  в момент времени  $+1$ , и в момент времени  $+3$  и соответственными точками по прибытии наблюдателей в  $A$  будут  $4_A$  и  $6_A$  (фиг. 25, б).

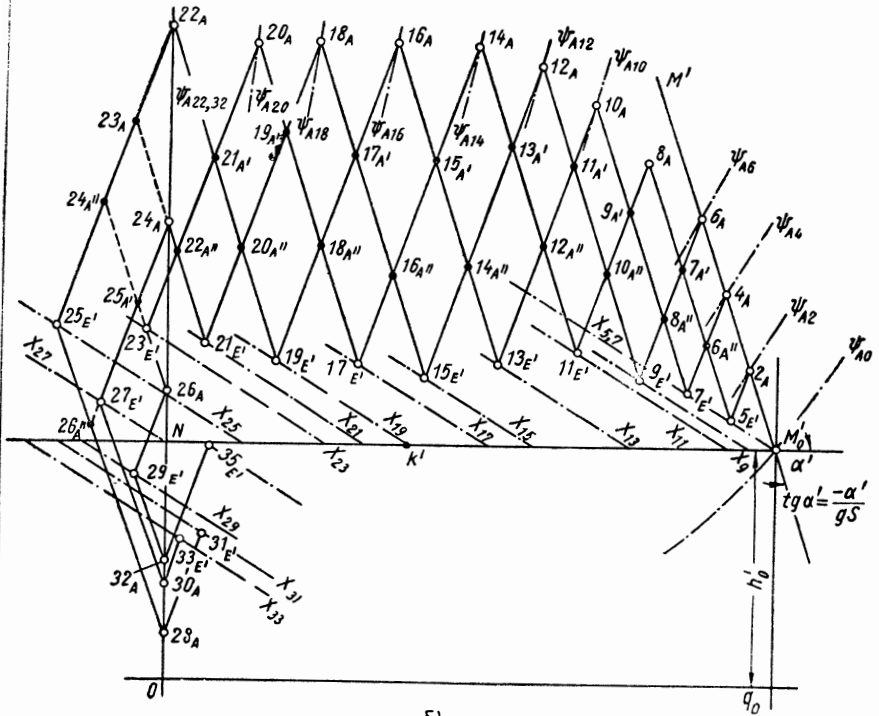
Для наблюдателя, выходящего из сечения  $A$  в направлении к  $E'$  в момент времени  $2$ , характеристической будет прямая  $2_A 5_{E'}$  симметричная  $M_0M'$ , проходящая через соответственную точку  $2_A$  и действительная во все время пробега, включая прибытие наблюдателя в момент времени  $5$  в сечении  $E'$ .

В этом месте данный наблюдатель встретит другого наблюдателя, отправившегося из  $D$  в момент времени  $1$ , для которого характеристической прямой является  $M_0''M'''$  (фиг. 25, з), проходящая через соответственную точку начального режима  $M_0''$  и имеющая угловым коэффициентом  $\left(-\frac{a''}{gS''}\right)$ , поскольку перемещение происходит здесь также в направлении скорости течения  $c_0''$ . Здесь же будет иметь место встреча с наблюдателем, выбывшим из сечения  $B$  в момент времени  $3$ . Условимся при рассмотрении течения на участке  $BE''$  полагать расход положительным, если течение происходит от  $B$  к  $E''$ . Тогда для наблюдателя, перемещающегося от  $B$  к  $E$ , характеристической прямой (фиг. 25, в) будет  $M_0''M''$ , проходящая через точку  $M_0''$  начального режима и имеющая угловой коэффициент  $\left(-\frac{a''}{gS''}\right)$  (эта прямая будет действительна также за точкой  $M_0''$  в области отрицательных расходов, что будет соответствовать течению от сечения  $E$  к сечению  $B$ ).

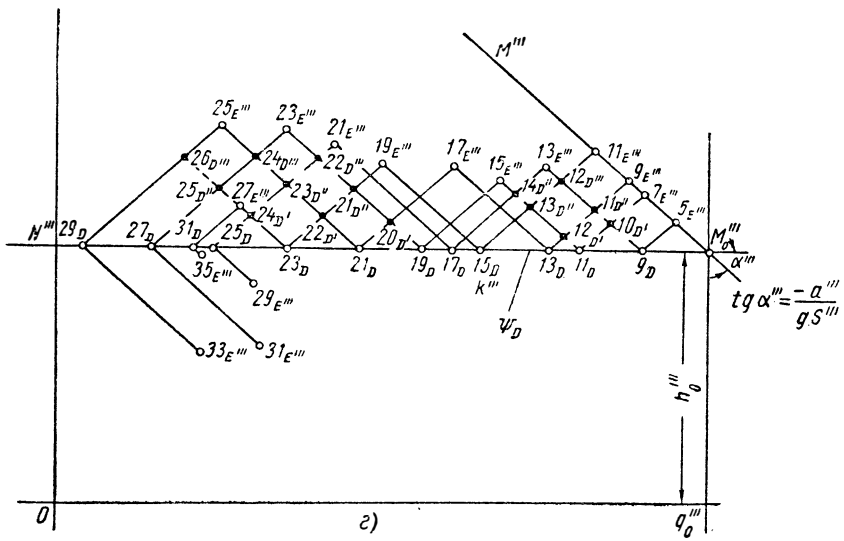
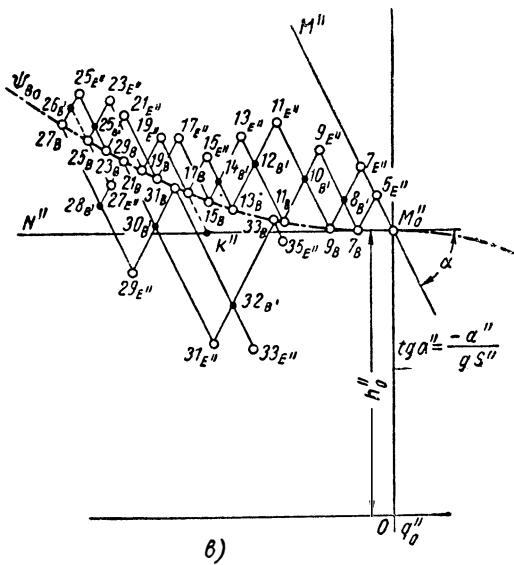
Теперь мы располагаем тремя характеристическими прямыми, связанными с наблюдателями, находящимися в момент времени  $5$  в сечении ветвления  $E$  (точнее в сечениях  $E'$ ,  $E''$ ,  $E'''$ ). Расходы, притекающие из участков  $BE$  и  $DE$ , складываются между собой. Сложив в силу этого абсциссы прямых  $M_0''M''$  (фиг. 25, в) и  $M_0''M'''$  (фиг. 25, з), можно получить прямую  $X_5$  (фиг. 25, б), пересечение которой с прямой  $2_A 5_E$  определяет искомую соответственную точку  $5_{E'}$ . Перенеся ординату этой точки на прямую  $M_0''M'''$  (фиг. 25, з), найдем соответственную точку  $5_{E''}$  режима в  $E''$ , определяющую отрицательный расход, чему соответствует течение, направленное от  $E$  к  $B$ . Перенося ту же ординату на прямую  $M_0''M''$  (фиг. 25, в), получим соответственную точку  $5_{E''}$  режима в  $E''$ . С подобным построением мы ознакомились уже в предыдущем параграфе.



a)



b)



Фиг. 25.



Таблица к фиг. 25 б, в, г

При достижении сечения	в момент времени	наблюдатель, начавший движение из пункта	в момент времени	установит, что истинная соответствующая точка лежит на прямой, с угловым коэффициентом	проходящей через соответствующую точку в момент начала движения	и на прямой	являющейся результирующей прямых	на характеристической кривой	т. е. в точке пересечения	чем определяют также точки
A E'' E''' E'	2 5 5 5	E' B D A	-1 3 1 2	- α' : gS' - α'' : gS'' - α''' : gS''' + α'	M'_0 M''_0 M'''_0 2_A	X_5	M''_0 5_{E''} M'''_0 5_{E'''}	Ψ_{A2}	2_A 5_{E'}	5_{E''} 5_{E'''}
A E'' E''' E'	4 7 7 7	E' B D A	1 5 3 4	- α' - α'' - α''' + α'	M'_0 M''_0 M'''_0 4_A	X_7	M''_0 7_{E''} M'''_0 7_{E'''}	Ψ_{A4}	4_A 7_{E'}	7_{E''} 7_{E'''}
A B E'' E''' E'	6 7 9 9 9	E' E'' B D A	3 5 7 5 6	- α' + α'' - α'' - α''' + α'	M'_0 5_{E''} 7_B M'''_0 6_A	X_9	7_B 9_{E''} M'''_0 9_{E'''}	Ψ_{A6} Ψ_B	6_A 7_B 9_{E'}	9_{E''} 9_{E'''}
A B E'' E''' E'	8 9 11 11 11	E' E'' B D A	5 7 9 7 8	- α' + α'' - α'' - α''' + α'	5_{E''} 7_{E'''} 9_B M'''_0 8_A	X_{11}	9_B 11_{E''} M'''_0 11_{E'''}	Ψ_{A8} Ψ_B	8_A 9_B 11_E	11_{E''} 11_{E'''}
A B E'' D E E'_{h'}	10 11 12 9 13 13	E' E'' B E D A	7 9 11 5 9 9	- α' + α'' - α'' + α''' - α''' + α'	7_{E''} 9_{E'''} 11_B 5_{E'''} 9_D 10_A	X_{13}	11 13 9_D 13_{E''}	Ψ_{A10} Ψ_B Ψ_D	10_A 11_B 9_D 13_{E'}	13_{E''}

При достижении сечения	в момент времени	наблюдатель, наблюдавший движение из пункта	в момент времени	установит, что истинная соответственная точка лежит на прямой, с угловым коэффициентом	проходящей через соответственную точку в момент начала движения	и на прямой	являющейся результирующей прямых	на характеристической кривой	т. е. в точке пересечения	чем определяют также точки
A	12	E'	9	- α'	9 <sub>E'</sub>	X <sub>15</sub>	13 <sub>B</sub> 15 <sub>E''</sub> 11 <sub>D</sub> 15 <sub>E'''</sub>	Ψ <sub>A12</sub>	12 <sub>A</sub>	15 <sub>E''</sub> 15 <sub>E'''</sub>
B	13	E''	11	+ α''	11 <sub>E''</sub>					
E''	15	B	13	- α''	13 <sub>B</sub>					
D	11	E'''	7	+ α'''	7 <sub>E'''</sub>					
E'''	15	D	11	- α'''	11 <sub>D</sub>					
E'	15	A	12	+ α'	12 <sub>A</sub>					
A	14	E'	11	- α'	11 <sub>E'</sub>	X <sub>17</sub>	15 <sub>B</sub> 17 <sub>E''</sub> 13 <sub>D</sub> 17 <sub>E'''</sub>	Ψ <sub>A14</sub>	14 <sub>A</sub>	17 <sub>E''</sub> 17 <sub>E'''</sub>
B	15	E''	13	+ α''	13 <sub>E''</sub>					
E''	17	B	15	- α''	15 <sub>B</sub>					
D	13	E'''	9	+ α'''	9 <sub>E'''</sub>					
E'''	17	D	13	- α'''	13 <sub>D</sub>					
E'	17	A	14	+ α'	14 <sub>A</sub>					
и так далее										
<i>Промежуточные точки</i>										
Участок AE'										
A'	11	{ A E' }	{ 10 9 }	{ + α' - α' }	{ 10 <sub>A</sub> 9 <sub>E'</sub> }				11 <sub>A'</sub>	
A''	12	{ A E' }	{ 10 11 }	{ + α' - α' }	{ 10 <sub>A</sub> 11 <sub>E'</sub> }				12 <sub>A'</sub>	
Участок BE''										
B'	10	{ E'' B }	{ 9 9 }	{ + α'' - α'' }	{ 9 <sub>E''</sub> 9 <sub>B</sub> }				10 <sub>B'</sub>	
Участок DE''										
D'	10	{ D E''' }	{ 9 7 }	{ - α''' + α''' }	{ 9 <sub>D</sub> 7 <sub>E'''</sub> }				10 <sub>D'</sub>	
D''	11	{ D E''' }	{ 9 9 }	{ - α''' + α''' }	{ 9 <sub>D</sub> 9 <sub>E'''</sub> }				11 <sub>D''</sub>	
D'''	12	{ D E''' }	{ 9 11 }	{ - α''' + α''' }	{ 9 <sub>D</sub> 11 <sub>E'''</sub> }				12 <sub>D'''</sub>	

Три наблюдателя, которые окажутся одновременно в сечении  $E$  в момент времени 7, должны совершить следующие перемещения: первый начинает движение от  $E$  к  $A$  в момент времени 1, что приводит к получению соответственной точки  $4_A$  (фиг. 25, б), затем в момент времени 4 этот наблюдатель начинает перемещение от сечения  $A$  к  $E$ , что приводит к характеристической прямой  $4_A 7_{E'}$ ; второй начинает перемещение из сечения  $B$  в момент времени 5, а третий из сечения  $D$  в момент времени 3, что приводит к получению тех же характеристических прямых  $M_0'' M''$  и  $M_0''' M'''$ , что и ранее. Таким образом, для сечения  $E'$  мы вновь находим ту же прямую  $X_5$  (фиг. 25, б), пересечение которой с прямой  $4_A 7_E$  определяет соответственную точку  $7_E$ . Точки, имеющие ту же ординату  $7_{E''}$  (фиг. 25, в) и  $7_{E'''}$  (фиг. 25, г), будут соответственными точками для сечений  $E''$  и  $E'''$  в момент времени 7.

При нахождении следующей точки для сечения  $E$  в момент времени 9 наблюдатель, перемещающийся вдоль отрезка трубопровода  $E'A$ , должен начать движение из  $E'$  в момент времени 3 — последний, когда еще имеет место режим  $M_0'$  — и характеристической прямой для него будет по-прежнему  $M_0' M'$ , дающая соответственную точку  $6_A$ ; при возвращении этого наблюдателя в направлении  $E'$  характеристической будет прямая  $6_A 9_E$ , справедливая при прибытии наблюдателя в  $E'$  в момент времени 9. Наблюдатель, перемещающийся вдоль отрезка  $E''B$ , должен начать движение в момент времени 5 из соответственной точки  $5_{E''}$ , найденной ранее, и характеристической прямой будет в этом случае  $5_{E''} 7_B$ , которая при пересечении ее с характеристической кривой  $\Psi_{B_0}$  определяет соответственную точку  $7_B$ ; затем при возвращении наблюдателя характеристической прямой будет  $7_B 9_{E''}$ , представляющая собой горизонтально перемещенную параллельно самой себе линию  $M_0'' M''$ . Для наблюдателя, перемещающегося в направлении от  $E'''$  к  $D$  и выбывающего из сечения  $D$  в момент времени 5, когда здесь еще имеет место режим  $M_0'''$ , сохранится прежняя характеристическая прямая, т. е.  $M_0''' M'''$ . Для того чтобы получить в  $E'$  расходы обоих участков  $E''B$  и  $E'''D$ , следует отнять от абсцисс прямой  $M_0'' M''$  абсциссы прямой  $7_B 9_E$ ; поскольку же последняя является просто горизонтально перемещенной прямой  $M_0'' M''$ , то искомую прямую  $X_9$  (фиг. 25, б) можно получить просто путем горизонтального смещения на ту же величину прямой  $X_5$ .

Прямая  $X_9$  определяет на пересечении с линией  $6_A 9_E$  искомую соответственную точку  $9_{E'}$ . Точки  $9_{E''}$  и  $9_{E'''}$ , имеющие такую же ординату (фиг. 25, в и 25, г), будут соответственными точками в  $E''$  и  $E'''$ .

Продолжать подробное описание дальнейших построений нет необходимости; они производятся без других изменений, кроме смещений в горизонтальном направлении характеристических прямых для сечений  $E''$  и  $E'''$ , влекущих соответствующие смещения их результирующих прямых  $X$  (фиг. 25, б).

Определение результирующей к тому же очень просто. Например, чтобы построить  $X_{19}$ , достаточно продолжить составляющие  $17_B$ ,  $19_{E''}$  и  $19_{E'''}15_D$  до места их пересечения с горизонтальной прямой  $M_0''N''$  в точке  $k''$  (фиг. 25, в) и соответственно с прямой  $M_0'''N'''$  в точке  $k'''$  (фиг. 25, з). Затем строится (фиг. 25, б) линия  $M_0'k' = M_0''k'' + M_0'''k'''$  и через полученную точку  $k'$  проводится линия, параллельная  $X_5$ . Это и будет искомой результирующей  $X_{19}$ .

Приводимая выше таблица позволяет проследить за порядком построений; записям, содержащимся в каждой строчке таблицы, соответствует новая прямая на чертеже. Эта последняя всегда проходит через уже найденную соответственную точку и служит для определения новой точки. Как и в предыдущих таблицах, заголовки столбцов образуют законченную фразу, если их прочитывать слева направо, включая обозначения, даваемые в строчках таблицы. Но так как в данном случае производятся одновременно три построения, то сначала следует прочитывать горизонтальные строчки, содержащие данные для построения характеристических прямых на фиг. 25, в и 25, з, затем, имея в виду построения на фиг. 25, б, прочитывают также данные, относящиеся к получению результирующих прямых. Вот как прочитывается, например, 18-я строчка таблицы: при достижении сечения  $E'$  в момент времени 11 наблюдатель, начавший движение из сечения  $A$  в момент времени 8, установит, что искомая соответственная точка лежит на прямой с угловым коэффициентом  $+a' : gS'$ , проходящей через соответственную точку в момент начала движения  $8_A$  и на прямой  $X_{11}$ , которая является результирующей прямых  $9_B11_{E''}$  и  $M_0'''11_{E'''}$ , т. е. в точке пересечения  $11_{E'}$ , что определяет также точки  $11_{E''}$  и  $11_{E'''}$ , имеющие ту же ординату.

Отметим, что прямые  $9_B$  и  $11_E$  и  $M_0'''11_E$  этой строчки таблицы найдены ранее (в 16-й и 17-й строчках), но там они фигурировали как лучи. Только в 18-й строчке на них определяются соответственные точки  $11_{E''}$  и  $11_{E'''}$  и одновременно точка  $11_{E'}$  на пересечении с результирующей.

Построения доведены до соответственной точки  $35_{E'}$ . Начиная с момента времени 22 предположено, что характеристической кривой в  $A$  является ось ординат, что соответствует полному закрытию трубы, так что расход в этом сечении остается впрямь нулевым и меняется только давление. Из построения на фиг. 25, в видно, что величина отрицательного расхода на участке  $E''B$

достигает максимума в момент времени 27 через отрезок времени  $\bar{\tau}$  после момента полного закрытия трубы в  $A$  и затем начинает уменьшаться. Что касается расхода на участке  $B''D$ , то из построений на фиг. 25,  $\bar{z}$  видно, что его величина уменьшается до момента времени 29, потом возрастает, а в дальнейшем снова уменьшается. Если продолжать построения, сохраняя характеристические кривые  $\Psi_A, \Psi_B, \Psi_D$  неизменными, можно установить, что путем затухающих колебаний расход делается равным нулю также в сечениях  $B$  и  $D$ .

Как уже ранее неоднократно было отмечено, те же построения определяют также соответственные точки для промежуточных сечений  $A'$  и  $A''$  на участке  $AE'$ ,  $B'$  — на участке  $BE''$ ,  $D', D''$  и  $D'''$  на участке  $DE'''$ , т. е. сечений, через которые наблюдатели проходят в моменты времени, разделенные интервалами  $\tau$ .

**§ 23. Случай сложного разветвления.** Рассмотрим случай (фиг. 26,  $a$ ) ветвления в сечении  $E$  с образованием пяти участков при наличии регулирующих устройств в пяти концевых сечениях  $A, B, D, G, H$ . Пусть отдельные участки характеризуются параметрами:  $a'L'S'$  — для участка  $AE'$ ;  $a''L''S''$  — для участка  $BE'''$ ;  $a'''L'''S'''$  — для участка  $DE$ ;  $a^{IV}L^{IV}S^{IV}$  — для участка  $GE^{IV}$ ;  $a^VL^VS^V$  — для участка  $HE^V$ , а время пробега волной

отдельных участков будет  $\frac{L'}{a'} = \tau', \frac{L''}{a''} = \tau'', \frac{L'''}{a'''} = \tau''', \frac{L^{IV}}{a^{IV}} = \tau^{IV}, \frac{L^V}{a^V} = \tau^V$ .

Предположим, что в результате уже выполненных построений известны: режим в сечении  $A$  для момента времени  $(i - \tau')$ , т. е. соответственная точка  $(i - \tau')_A$  (фиг. 26,  $b$ ) режим в сечении  $B$  для момента времени  $(i - \tau'')$ , т. е. соответственная точка  $(i - \tau'')_B$  (фиг. 26,  $в$ ); режим в сечении  $D$  для момента времени  $(i - \tau''')$ , т. е. соответственная точка  $(i - \tau''')_D$  (фиг. 26,  $г$ ); режим в сечении  $G$  для момента времени  $(i - \tau^{IV})$  и соответственная точка  $(i - \tau^{IV})_G$  (фиг. 26,  $д$ ) и, наконец, режим в сечении  $H$  для момента времени  $(i - \tau^V)$  и соответственная точка  $(i - \tau^V)_H$  (фиг. 26,  $е$ ).

Скорости течения  $c_{(i-\tau')}, c_{(i-\tau'')}, c_{(i-\tau''')}, c_{(i-\tau^{IV})}, c_{(i-\tau^V)}$ , направления которых показаны на фиг. 26,  $a$ , откладываются на фиг. 26,  $б, в, г, д, е$  вдоль положительных направлений оси абсцисс.

Наблюдатели, начавшие движение в названные выше моменты времени из сечений  $A, B, C, D, G, H$ , прибывают в сечение  $E$  одновременно в момент времени  $i$ . Для наблюдателя, выбывающего из сечения  $A$ , соответственная точка будет (фиг. 26,  $б$ ) находиться на характеристической прямой  $(i - \tau')_A M'$  с угловым коэффициентом  $\left(-\frac{a'}{gS'}\right)$ , поскольку перемещение наблюдателя совершается в направлении скорости  $c_{(i-\tau')}$ ; для наблюдателя,

выбывающего из сечения  $B$  — на прямой  $(i - \tau'')_{B}M''$  (фиг. 26, в) с угловым коэффициентом  $\left(-\frac{a''}{gS''}\right)$ ; для наблюдателя, выбывшего из сечения  $D$  — на прямой  $(i - \tau''')_{D}M'''$  (фиг. 26, г) с угловым коэффициентом  $+\frac{a'''}{gS'''}$ , поскольку перемещение происходит в направлении, противоположном течению  $c_{(i-\tau''')}$ ; для наблюдателя, выбывшего из сечения  $G$ , — на прямой  $(i - \tau^{IV})_{G}M^{IV}$  (фиг. 26, д) с угловым коэффициентом  $+\frac{a^{IV}}{gS^{IV}}$  (перемещение и скорость течения противоположны); наконец, для наблюдателя, отправляющегося из сечения  $H$ , — на прямой  $(i - \tau^V)_{H}M^V$  (фиг. 26, е) с угловым коэффициентом  $+\frac{a^V}{gS^V}$ .

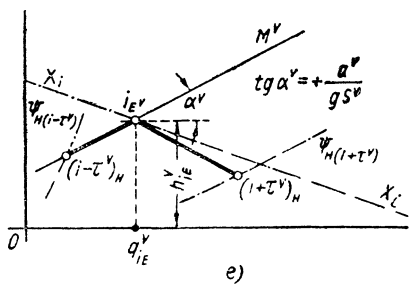
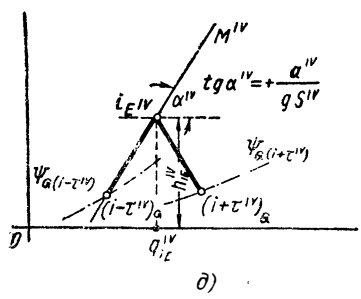
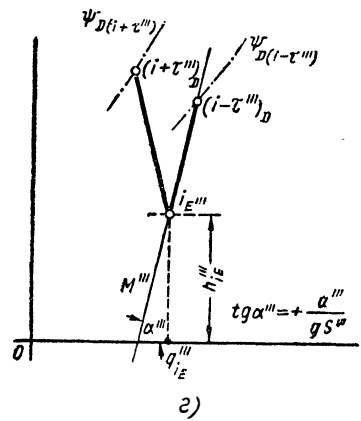
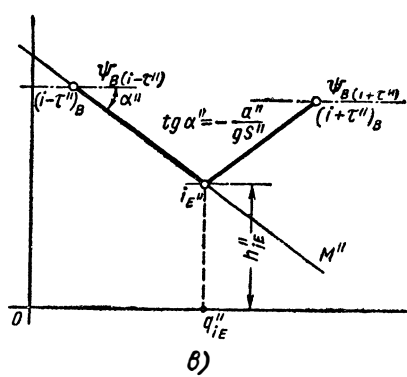
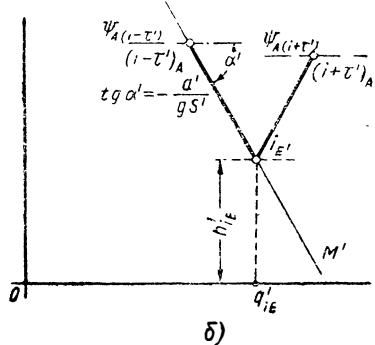
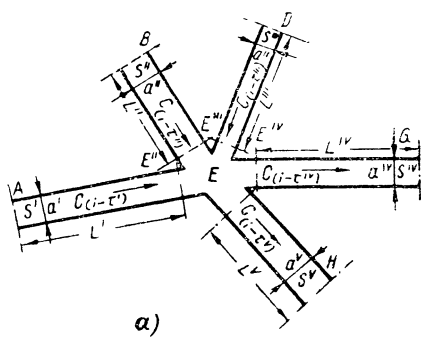
Из условия сплошности следует равенство давлений  $h'_{i_E} = h''_{i_E} = h'''_{i_E} = h^{IV}_{i_E} = h^V_{i_E}$  в сечениях  $E'$ ,  $E''$ ,  $E'''$ ,  $E^{IV}$ ,  $E^V$ ; следовательно, соответственные точки на фиг. 26 б, в, г, д, е должны иметь одну и ту же ординату; в то же время это условие в применении к расходам дает

$$q'_{i_E} + q''_{i_E} - q'''_{i_E} - q^{IV}_{i_E} - q^V_{i_E} = 0.$$

Вытекающее из этих двух отношений построение будет таким: из суммы абсцисс прямых  $(i - \tau')_{A}M'$  и  $(i - \tau'')_{B}M''$  надо вычесть абсциссы прямых  $(i - \tau''')_{D}M'''$  и  $(i - \tau^{IV})_{G}M^{IV}$ , что даст прямую  $X_i X_i$  (фиг. 26, е), пересекающую прямую  $(i - \tau^V)_{H}M^V$  в точке  $i^V_{E'}$ . Эта точка и точки  $i^V_{E''}$ ,  $i^V_{E'''}$ ,  $i^V_{E^{IV}}$  (фиг. 26, б, в, г, д), имеющие такую же ординату, будут соответственными точками для сечений  $E'$ ,  $E''$ ,  $E'''$ ,  $E^{IV}$  в момент времени  $i$ .

Для наблюдателя, проделывающего обратный путь, характеристическая прямая будет симметрична предыдущей, проходящей через уже найденную точку  $i_E$ , а соответственными точками для концевых сечений участков будут: в  $A$  —  $(i + \tau')_A$ , на пересечении с характеристической кривой  $\Psi_{A(i+\tau')}$ , для момента времени  $(i + \tau')$  (фиг. 26, б); в  $B$  — точка  $(i + \tau'')_B$  пересечения с характеристической кривой  $\Psi_{B(i+\tau'')}$  (фиг. 26, в); в  $D$  точка  $(i + \tau''')$  на пересечении с характеристической кривой  $\Psi_{D(i+\tau''')}$  (фиг. 26, г); в  $G$  — точка  $(i + \tau^{IV})$  — на пересечении с характеристической кривой  $\Psi_{G(i+\tau^{IV})}$ ; наконец, в  $H$  — точка  $(i + \tau^V)$ , на пересечении с характеристической кривой  $\Psi_{H(i+\tau^V)}$ .

Теперь можно сформулировать общий принцип построений в случае ветвления трубопровода.



Фиг. 26.

Построения производятся отдельно для каждого участка. В начале надо располагать соответственными точками для концевых сечений участков в такие моменты времени, чтобы наблюдатели, начинающие движение из этих сечений, оказались одновременно прибывающими в сечение ветвления: при этом характеристическая прямая каждого участка наносится на чертеже данного участка. Затем производится суммирование прямых для участков от 1 до  $(n - 1)$  и строится результирующая прямая на чертеже  $n$ -го участка; точка пересечения результирующей с характеристической прямой  $n$ -го участка и точки с той же ординатой на прочих характеристических прямых являются соответственными точками в момент встречи  $n$  наблюдателей в сечении ветвления.

Это изложение последовательности построений представляет собой только развитие того, что уже говорилось в связи с построениями на фиг. 25, *a, б, в, г*, не внося в вопрос существенно нового, поскольку построения в случае  $n$  участков производятся аналогично тому, как и в случае трех.

### С. Учет потерь напора

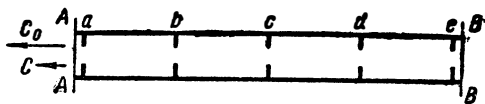
**§ 24. Общие положения.** Существование потерь напора, обусловливаемых трением, не меняет физической природы явления, заключающегося в простой и не имеющей исключений закономерности: возмущение, возникающее в некоторой точке среды, распространяется в пространстве с некоторой конечной скоростью.

Для сечения трубопровода, где в начале явления происходит изменение скорости от значения  $c_0$  до значения  $c$  (например, для концевое сечения  $A$ ), результаты, полученные ранее, сохраняются без каких-либо изменений. Но по мере того, как лоб волны, в котором произошло изменение скорости первоначально от  $c_0$  до  $c_1$  продвигается вдоль трубопровода со скоростью  $a$ , наличие сопротивлений обуславливает (в сечении прохождения лба) изменение давления, которое распространяется в направлении к сечению  $A$  в форме обратной волны, обуславливая изменения режима также в  $A$ . Продвижение основной прямой волны обуславливает, таким образом, непрерывное возникновение противоположно направленных волн, исходящих из каждого пункта, проходимого прямой волной. Иначе говоря, на каждом бесконечно малом участке, пробегаемом прямой волной, возникает перепад давления, аналогичный частичному отражению.

Потери напора по длине трубопровода можно представить как бесконечную сумму последовательно расположенных перепадов; учесть при решении всю эту бесконечность перепадов напора совершенно невозможно, но такое представление подсказывает решение, заключающееся в том, чтобы заменить бесконечно большое количество бесконечно малых изменений напора ограниченным количеством конечных, дающих такую же суммарную величину потерь напора.



Пусть имеем трубопровод (фиг. 27) постоянных параметров  $a$  и  $S$  длиной  $L$  между сечением  $A$ , где находится регулирующее устройство, и начальным сечением  $B$ . Если потери напора настолько велики, что ими нельзя пренебречь, их можно рассматривать сосредоточенными в  $n$  сечениях  $a, b, c, d, e, \dots$ , предположив здесь условно наличие диафрагм, а участки между диафрагмами предполагая лишенными сопротивления. Чем больше будет количество диафрагм, тем более близким к действительности будет решение;



Фиг. 27.

практически же увеличение их количества свыше трех или четырех уже не оказывает влияния на результат.

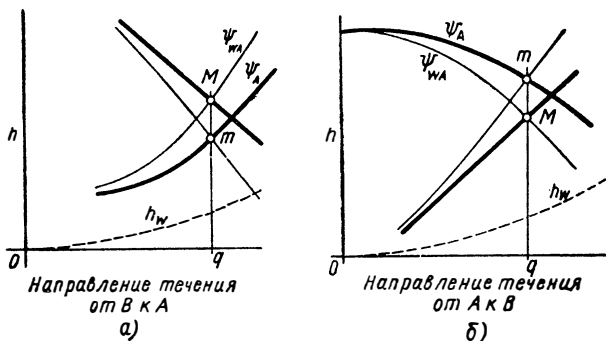
Посмотрим теперь, как эти диафрагмы или сосредото-

ченные перепады напора будут отражаться на построениях.

### § 25. Простейший случай одной диафрагмы в конечном сечении.

В этом случае диафрагма, создающая при начальной скорости течения  $c_0$  потери напора  $k \frac{q^2}{2g}$ , равные потерям на всей длине трубопровода от  $A$  до  $B$ , предполагается присоединенной к регулируемому аппарату в сечении  $A$ .

Пусть характеристической кривой регулирующего устройства в некоторый момент времени будет  $\Psi_A$  (фиг. 28, а). У регулирующего устройства, но за диафрагмой, т. е. уже в трубопро-



Фиг. 28.

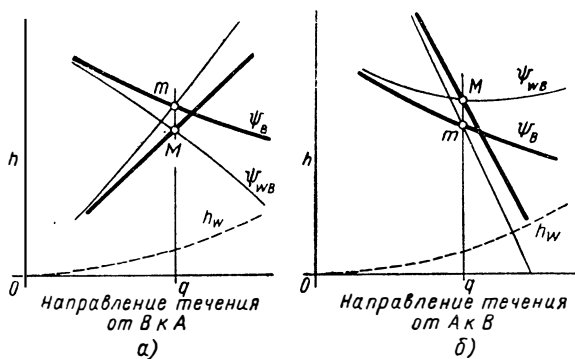
воде, напор  $h$  должен равняться напору в регулирующем устройстве, увеличенному на величину  $k \frac{q^2}{2g}$ , если направление течения будет в сторону сечения  $A$ , или уменьшенному на ту же величину, если течение направлено в сторону сечения  $B$ . Это приводит к простому увеличению или уменьшению ординат характеристической кривой  $\Psi_A$  регулирующего устройства на величину

ординат параболы, даваемой уравнением  $h_w = \frac{k}{2g} \cdot q^2$ , как это

показано на фиг. 28, а и 28, б. Поэтому при построениях должны использоваться теперь кривые  $\Psi_{wA}$ , аналогично тому, как ранее использовались кривые  $\Psi_A$ ; соответственные точки в сечении А трубопровода будут определяться теперь, следовательно, точками  $M$  на пересечениях характеристических прямых трубопровода и характеристических кривых  $\Psi_{wA}$  системы, состоящей из регулирующего устройства и диафрагмы.

В равной степени можно было бы производить вычитание или сложение (фиг. 28, б), ординаты кривой  $\frac{k}{2g} q^2$  и характеристических прямых трубопровода; тогда соответственная точка для регулирующего устройства в А определяется пересечением (точка  $m$ ) получаемой таким образом кривой и характеристической кривой  $\Psi_A$  регулирующего устройства. Вертикальная линия, проходящая через точку  $m$ , при ее пересечении с характеристической прямой трубопровода определяет соответственную точку  $M$  для трубопровода в сечении присоединения регулирующего устройства.

**§ 26. Случай, когда потери напора распределены поровну между двумя диафрагмами, расположенными у регулирующего устройства в сечении А и непосредственно за сечением В.** Учет наличия диафрагмы в А производится так же, как в предшествующем случае.



Фиг. 29.

Что касается диафрагмы непосредственно за сечением В, то ее эффект в отношении перепада напора в В будет аналогичен влиянию диафрагмы в А на характеристическую кривую регулирующего устройства. Если в какой-нибудь момент времени кривая  $\Psi_B$  является характеристической кривой для сечения В трубопровода в отсутствии диафрагмы, то при наличии последней напор уменьшается на потерю  $h_w = \frac{k}{2g} \cdot q^2$ , когда течение направлено от В к А или увеличивается на ту же величину в случае течения от А к В. Это приводит к необходимости вычитания или сложения ординаты кривой  $h_w$  потерь напора и ординат

кривой  $\Psi_B$ , после чего полученная кривая  $\Psi_{wB}$  используется при построениях аналогично тому, как ранее кривая  $\Psi_B$ . Соответственная точка для сечения трубопровода за диафрагмой определяется (фиг. 29, *а* и 29, *б*) пересечением  $M$  характеристической прямой трубопровода и характеристической кривой  $\Psi_{wB}$ , а точка  $m$  пересечения вертикали, проходящей через  $M$ , с характеристической кривой  $\Psi_B$  является соответственной точкой для сечения  $B$ .

Можно также производить сложение ординат кривой  $h_w$  с ординатами характеристической прямой трубопровода (фиг. 29, *а*) и тогда непосредственно определяется соответственная точка  $m$  для сечения  $B$ , а вертикаль, проходящая через эту точку, дает в пересечении с характеристической прямой трубопровода до сужения соответственную точку  $M$  для трубопровода перед диафрагмой. В случае, представленном на фиг. 29, *б*, где скорость имеет направление к сечению  $B$ , ордината  $h_w$  должна вычитаться.

**§ 27. Распределение потерь напора между  $n$  диафрагмами, размещенными на одинаковых взаимных расстояниях на длине трубопровода между сечениями  $A$  и  $B$ .** Размещение диафрагм на одинаковых взаимных расстояниях по длине трубопровода приводит к простым построениям; рассмотрим конкретный случай такого размещения. Пусть дан трубопровод с одинаковыми по его длине параметрами, примыкающий к резервуару  $B$  с постоянным уровнем в последнем и заканчивающийся в сечении  $A$  отверстием переменного сечения, соединенным с атмосферой.

Рассмотрим сначала случай одной диафрагмы посередине участка  $AB$  (фиг. 30, *а*). Отметим, что этот случай можно уже свести к тому, когда потери давления распределены на три диафрагмы, если предположить наличие еще двух диафрагм: одной при подходе к отверстию  $A$  и другой у выхода из резервуара  $B$  (распределение потерь между диафрагмами следует принять в этом случае не поровну, а следующим:  $\frac{1}{4}$  — в диафрагме  $A$ ,  $\frac{1}{2}$  — в диафрагме  $D$  и  $\frac{1}{4}$  — в диафрагме  $B$ ).

В § 26 было показано, как следует учитывать эффект наличия диафрагм в концевых сечениях  $A$  и  $B$ ; остается определить эффект наличия диафрагмы  $D$  посередине трубопровода.

Пусть (см. фиг. 30, *б*)  $M_A$  — соответственная точка начального режима ( $h_0q_0$ ) в сечении  $A$ ,  $H$  — полный перепад напора в трубопроводе,  $k_w$  — полная величина потеря напора, распределяющаяся следующим образом:  $\overline{M_A M_A'} = \frac{h_w}{4}$  в сечении  $A$ ;  $\overline{M_A' M_a} = \frac{h_w}{2}$  в сечении  $D$  посередине трубопровода и  $\overline{M_a M_B} = \frac{h_w}{4}$  — в сечении у резервуара. За единицу времени  $\tau$  примем время пробега волны между сечениями  $A$  и  $D$  таким образом, что  $\tau = \frac{L}{2a}$ .

Для наблюдателя, выбывающего из  $D$  (фиг. 30, б) в момент времени 1 (когда здесь еще существует начальный режим  $M_A$ ), характеристикой будет прямая  $M_A P_A$ , с угловым коэффициентом  $(-\frac{a}{gS})$ . Наблюдателя, прибывшего в  $A'$  в момент времени 2, соответственная точка будет на этой же прямой; для получения же соответственной точки в  $A$  ординаты этой прямой должны быть уменьшены на величину потерь напора в диафрагме, что дает параболу  $P_A M_A$ , в пересечении которой с характеристической кривой  $\Psi_{A2}$  отверстия  $A$  для того же момента времени и находится искомая соответственная точка  $2_A$ . С другой стороны диафрагмы в сечении  $A'$ , соответственной точкой будет  $2_{A'}$  на пересечении прямой  $M_{A'} P_{A'}$  и вертикали, проведенной через точку  $2_A$ . Длина отрезка  $2_A 2_{A'}$  является величиной потерь напора в диафрагме при расходе, соответствующем абсциссе точек  $2_A$  и  $2_{A'}$ . На обратном пути наблюдателя от  $A'$  к  $D$  характеристическая прямая будет симметрична предыдущей, выходя из соответственной точки  $2_{A'}$ . Эта прямая будет справедлива, когда наблюдатель прибывает в  $D$  в момент времени 3.

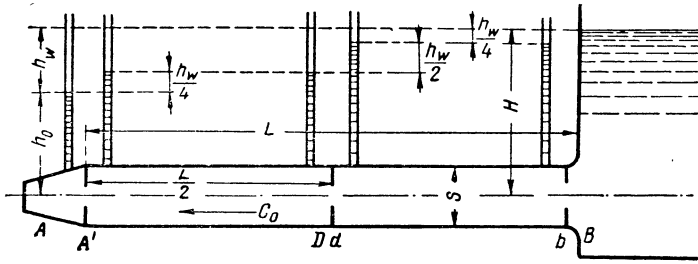
Для второго наблюдателя, выбывающего из  $b$  в момент времени 2, последний, когда здесь еще существует начальный режим  $M_d$ , — характеристической прямой будет  $M_d P_d$  с угловым коэффициентом  $(-\frac{a}{gS})$ , параллельная прямой  $M_A P_A$ , и соответственная точка при прибытии наблюдателя в сечение  $d$  в момент времени 3 будет на этой прямой. С другой стороны диафрагмы в  $D$  соответственная точка должна находиться на кривой, получаемой путем вычитания из ординат прямой  $M_d P_d$  потерь напора, т. е. на параболе  $P_d M_d$ .

Соответственная точка для двух наблюдателей в  $D$  в момент времени 3 будет находиться в точке  $3_D$  пересечения прямой  $2_A 3_D$  первого наблюдателя и параболы  $P_d M_d$  второго. В сечении  $d$  соответственной точкой будет  $3_d$  в пересечении вертикали, проходящей через точку  $3_D$ , и характеристической кривой  $P_d M_d$ ; отрезок  $3_D 3_d$  представляет величину потерь напора в диафрагме.

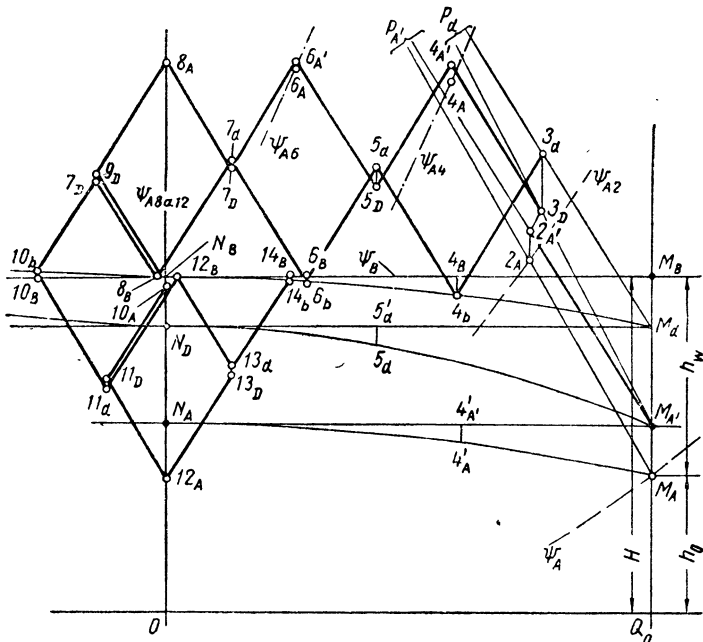
Для наблюдателя, отправляющегося из сечения  $d$  к сечению  $b$  в момент времени 3, характеристическая прямая  $3_d 4_b$ , проходящая через соответственную точку  $3_d$ , будет симметрична прямой  $M_d 3_d$ ; на этой прямой будет соответственная точка для сечения  $b$  в момент времени 4. Одновременно эта точка должна находиться на кривой, получаемой из характеристики резервуара в сечении  $B$ , т. е. горизонтальной прямой  $N_B M_B$ , уменьшением ее на величину потерь напора в диафрагме, т. е. на параболе  $N_B M_d$ . Следовательно, соответственная точка  $4_b$  будет в пересечении этой

параболы и прямой  $3_d4_b$ , а соответственная точка  $4_B$  — на вертикали  $4_b4_B$ .

Для наблюдателя, выбывающего из сечения  $D$  в направлении к  $A$  в момент времени 3, характеристическая прямая  $3_d4_{A'}$  будет



а)



б)

Фиг. 30.

симметрична прямой  $2_{A'}3_D$ , проходя через соответственную точку  $3_D$ . На этой новой прямой должна находиться соответственная точка наблюдателя, прибывшего в  $A'$  в момент времени 4. Соответственная точка в  $A$  для этого же момента времени должна находиться на кривой, получаемой из прямой  $3_D4_{A'}$  уменьшением ее ординат на величину потерь напора в диафрагме. Поскольку искомая точка должна находиться в то же время на характеристической кривой  $\Psi_{A4}$  отверстия, ее координаты определяются

Таблица к фиг. 30, б

При достижении сечения	в момент времени	наблюдатель, начавший движение из пункта	в момент времени	установит, что истинная соответственная точка лежит на прямой с угловым коэффициентом	проходящей через соответственную точку	уменьшенной на потери напора	увеличенной на потери напора	и на характеристической кривой,	т. е. в точке пересечения	которой определяется также точка
A	2	D	1	$-a: gS$	$M_{A'}$	в $A'$		$\Psi_{A2}$	$2_A$	$2_{A'}$
D	3	$\left\{ \begin{matrix} b \\ A' \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} -a: gS \\ +a: gS \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} Md \\ 2_{A'} \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} \text{в } d \\ \end{matrix} \right\}$			$3_D$	$3_d$
A	4	D	3	$-a$	$3_D$	в $A'$		$\Psi_{A4}$	$4_A$	$4_{A'}$
B	4	d	3	$+a$	$3_d$		в b	$\Psi_B$	$4_B$	$4_b$
D	5	$\left\{ \begin{matrix} A' \\ b \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} +a \\ -a \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} 4_{A'} \\ 4_b \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} \text{в } d \\ \end{matrix} \right\}$			$5_D$	$5_d$
A	6	D	5	$-a$	$5_D$	в $A'$		$\Psi_{A6}$	$6_A$	$6_{A'}$
B	6	d	5	$+a$	$5_d$		в b	$\Psi_B$	$6_B$	$6_b$
D	7	$\left\{ \begin{matrix} A' \\ b \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} 6 \\ 6 \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} +a \\ -a \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} 6_{A'} \\ 6_b \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} \text{в } d \\ \end{matrix} \right\}$			$7_D$	$7_d$
A	8	D	7	$-a$	$7_D$	нуль		$\Psi_{A8}$	$8_A$	
B	8	d	7	$+a$	$7_d$		нуль	$\Psi_B$	$8_B$	
D	9	$\left\{ \begin{matrix} A \\ b \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} 8 \\ 8 \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} +a \\ -a \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} 8_A \\ 8_B \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} \end{matrix} \right\}$	в d	$\Psi_{A10}$	$9_D$	$9_d$
A	10	D	9	$-a$	$9_D$	нуль		$\Psi_B$	$10_A$	
B	10	d	9	$+a$	$9_d$	в b			$10_B$	$10_b$
D	11	$\left\{ \begin{matrix} A \\ b \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} 10 \\ 10 \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} +a \\ -a \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} 10_A \\ 10_b \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} \end{matrix} \right\}$	в d		$11_D$	$11_d$
A	12	D	11	$-a$	$11_D$	нуль		$\Psi_{A12}$	$12_A$	
B	12	d	11	$+a$	$11_d$	нуль		$\Psi_B$	$12_B$	
D	13	$\left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} 12 \\ 12 \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} +a \\ -a \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} 12_A \\ 12_B \end{matrix} \right.$	$\left. \begin{matrix} \text{в } d \\ \end{matrix} \right\}$			$13_d$	$13_d$
B	14	d	13	$+a$	$13_d$		в b	$\Psi_B$	$14_B$	$14_b$

пересечением обеих кривых в точке  $4_A$ . Парабола, которую можно получить, уменьшая ординаты прямой  $3_D 4_{A'}$  на величину потерь напора в диафрагме, не показана на чертеже, так как ее построение практически не нужно. Действительно, искомая точка  $4_A$  очень близка к точке пересечения прямой  $3_D 3_{A'}$  с характеристической кривой  $\Psi_{A_4}$ . Поэтому, если взять ординату параболы  $N_A M_A$  в точке, абсцисса которой несколько меньше абсциссы, отмеченной выше точки пересечения, например ординату  $4'_A, 4''_A$ , ее можно полагать с достаточной степенью приближения равной величине потерь напора в диафрагме. Помещаая отрезок  $4'_A, 4''_A$  между прямой  $3_D 4_{A'}$  и характеристической кривой  $\Psi_{A_4}$ , точки  $4_A$  и  $4_{A'}$  определяются значительно быстрее, чем посредством построения параболы, и в то же время достаточно точно.

Продолжая задавать наблюдателям движение от  $A'$  к  $D$  и от  $d$  к  $b$  в прямом и обратном направлениях, можно найти таким же образом дальнейшие соответственные точки для сечений  $A, B$  и  $D$ ; каждая из них будет двойной в результате наличия диафрагмы, причем сдвоенные точки имеют одну и ту же абсциссу в то время, как их ординаты разнятся между собой на величину потерь напора в диафрагме.

Следующая таблица позволяет проследить от точки к точке построение в том порядке, в каком оно производится.

При построении принято, что, начиная с момента времени 8, характеристическая кривая отверстия  $A$  остается неизменной и совпадающей с осью ординат, что означает, что отверстие в  $A$  в этот момент закрывается полностью и остается закрытым и в дальнейшем. С этих пор, в моменты времени 8 в  $B$ , 9 в  $D$ , 10 в  $B$ , 11 в  $D$  течение становится обратным и потери напора в диафрагме должны меняться по знаку; разность ординат сдвоенных точек также меняет знак. В силу этого точки с индексом  $D$  оказываются теперь расположенными выше точек с индексом  $d$ , тогда как раньше было наоборот; то же имеет место в сечениях  $B$  и  $A$ . Учет этого обстоятельства не вызывает затруднений, так как в процессе построения ясно видно, будет ли точка пересечения характеристических прямых находиться в области положительных или в области отрицательных значений расхода.

Рассмотрим далее случай трех<sup>1</sup> равноотстоящих между собой диафрагм (фиг. 31, а). Такое размещение диафрагм, располагаемых теперь в сечениях  $D, E, F$  на расстояниях от сечения  $A$ , равных  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{3}{4}$  длины трубопровода, позволяет распределить общую величину потерь напора  $h_w$  на пять сосредоточенных перепадов, предполагая, как и ранее, наличие еще двух диафрагм около концевых сечений трубопровода  $A$  и  $B$ . В этом случае потери напора целесообразно распределить следующим образом:  $\frac{1}{8} h_w$  в диа-

<sup>1</sup> Не считая концевых (Прим. ред.).

фрагме  $A$ , по  $\frac{1}{4}h_w$  в диафрагмах  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $\frac{1}{8}h_w$  в диафрагме  $B$ . Построениями на фиг. 31, б определены соответственные точки для сечений  $A$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $B$  для моментов, разделенных интервалом времени  $\frac{L}{4a}$ , равным времени пробега волны между двумя диафрагмами, причем этот интервал времени принят за единицу.

Соответственными точками начального режима являются: точка  $M_0$  у отверстия  $A$ ; точка  $M_{A'}$  на участке от сечения  $A'$  до  $D$ ; точка  $M_D$  на участке от сечения  $d$  до  $E$ ; точка  $M_e$  на участке от  $e$  до  $F$ ; точка  $M_f$  на участке от  $f$  до  $b$ , и, наконец, точка  $M_B$  в сечении  $B$ ; при этом  $\overline{M_0M_{A'}} = \frac{h_w}{8}$ ,  $\overline{M_{A'}M_D} = \overline{M_DM_e} = \overline{M_eM_f} = \frac{h_w}{4}$ ;  $\overline{M_fM_B} = \frac{h_w}{8}$ .

Потери напора в диафрагмах в функции расхода представлены отрезками ординат, расположенных между горизонтальной линией  $N_{A'}M_{A'}$ , и параболой  $N_{A'}M_0$  для диафрагмы  $AA'$ ; горизонтальной линией  $N_dM_d$  и параболой  $N_dM_{A'}$  — для диафрагмы  $Dd$ ; горизонтальной линией  $N_eM_e$  и параболой  $N_eM_d$  — для диафрагмы  $Ee$ , горизонтальной линией  $N_fM_f$  и параболой  $N_fM_e$  — для диафрагмы  $Ff$ , и, наконец, горизонтальной линией  $N_BM_B$  и параболой  $N_BM_f$  — для диафрагмы в  $B$ .

Поскольку построения на фиг. 31, б не содержат ничего нового по сравнению с предшествующими, мы ограничимся пояснениями в виде таблицы, приводимой ниже, которая позволяет проследить за построениями в порядке, в каком они выполняются.

Само собой разумеется, что при построениях для области отрицательных значений расхода знак потерь напора в диафрагмах также должен измениться.

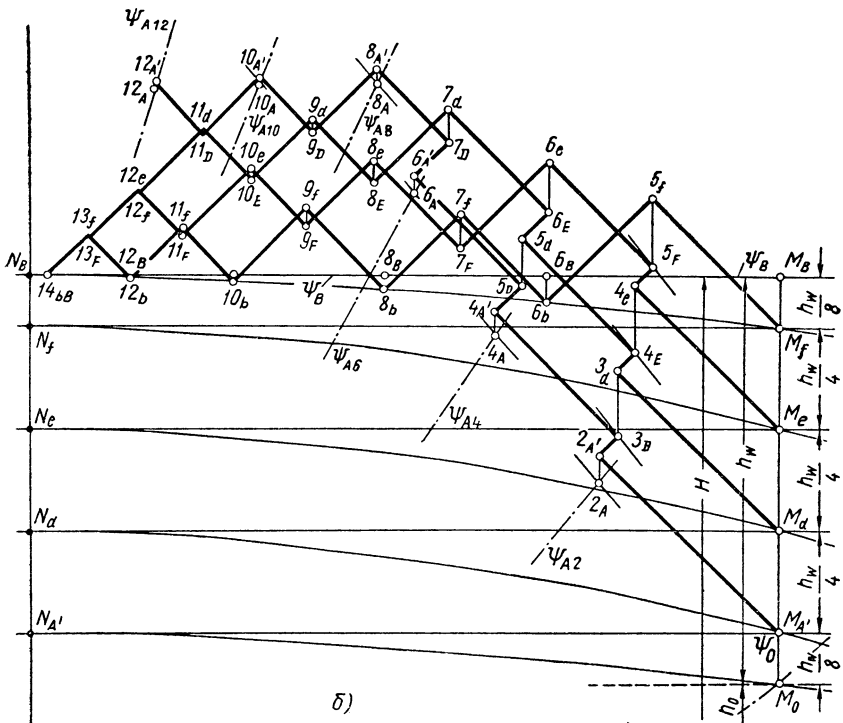
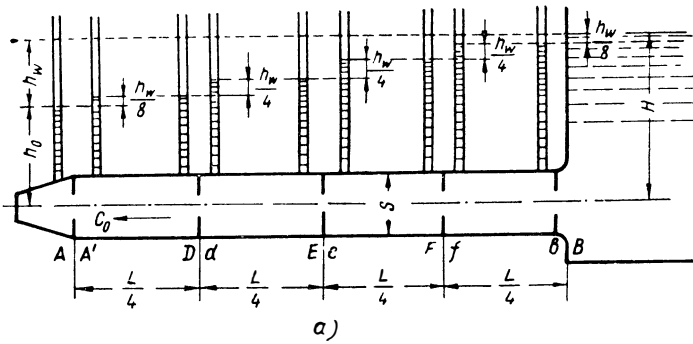
Применение большего количества диафрагм не меняет принципов графических построений. Практически это не сказывается также и на получаемых результатах, которые не меняются заметным образом при увеличении числа диафрагм выше четырех.

Распределяя потери напора между пятью диафрагмами, расположенными вдоль трубопровода, как это показано на фиг. 31, б, можно определить изменения режима также в пяти различных точках трубопровода; увеличивать более число сосредоточенных перепадов напора не имеет смысла.

Естественно, что поскольку излагаемый метод определяет для промежуточных сечений по две соответственные точки, в то время как в действительности в рассмотренных случаях разрывов напора не существует, то наиболее близким к давлениям, имеющим место в действительности, следует считать средние из значений давления, определяемых двоякими точками.

**§ 28. Случай, когда потери напора действительно сосредоточены в нескольких сечениях по длине трубопровода.** Представим себе случай, когда потерями напора на трение по длине





Фиг. 31.

Таблица к фиг. 31, б

При достижении сечения	в момент времени	наблюдатель, наблюдающий движение из пункта	в момент времени	установит, что искомая соответственная точка лежит на прямой с угловым коэффициентом	проходящей через соответственную точку	уменьшенной на потери напора	увеличенной на потери напора	и на характеристической кривой	т. е. в точке пересечения	которой определяется также точка
A	2	D	1	- a : gS	M <sub>A'</sub>	B A'		Ψ <sub>A2</sub>	2 <sub>A</sub>	2 <sub>A'</sub>
D	3	E A'	2 2	- a : gS + a : gS	M <sub>d</sub> 2 <sub>A'</sub>	B d			3 <sub>D</sub>	3 <sub>d</sub>
E	4	F d	3 3	- a + a	M <sub>e</sub> 3 <sub>d</sub>	B e			4 <sub>E</sub>	4 <sub>e</sub>
F	5	b e	4 4	- a + a	M <sub>f</sub> 4 <sub>e</sub>	B f			5 <sub>F</sub>	5 <sub>f</sub>
B	6	f	5	+ a	5 <sub>f</sub>		B b	Ψ <sub>B</sub>	6 <sub>B</sub>	6 <sub>b</sub>
A	4	D	3	- a	3 <sub>D</sub>	A'		Ψ <sub>A4</sub>	4 <sub>A</sub>	4 <sub>A'</sub>
D	5	E A'	4 4	- a + a	4 <sub>E</sub> 4 <sub>A'</sub>	B d			5 <sub>D</sub>	5 <sub>d</sub>
E	6	F d	5 5	- a + a	5 <sub>F</sub> 5 <sub>d</sub>	B e			6 <sub>E</sub>	6 <sub>e</sub>
F	7	b e	6 6	- a + a	6 <sub>b</sub> 6 <sub>e</sub>	B f			7 <sub>F</sub>	7 <sub>f</sub>
B	8	f	7	+ a	7 <sub>f</sub>		B b	Ψ <sub>B</sub>	8 <sub>B</sub>	8 <sub>b</sub>
A	6	D	5	- a	5 <sub>D</sub>	B A'		Ψ <sub>A6</sub>	6 <sub>A</sub>	6 <sub>A'</sub>
D	7	E A'	6 6	- a + a	6 <sub>E</sub> 6 <sub>A'</sub>	B d			7 <sub>D</sub>	7 <sub>d</sub>
E	8	F d	7 7	- a + a	7 <sub>F</sub> 7 <sub>d</sub>	B e			8 <sub>E</sub>	8 <sub>e</sub>
F	9	b e	8 8	- a + a	8 <sub>b</sub> 8 <sub>e</sub>	B f			9 <sub>F</sub>	9 <sub>f</sub>
B	10	f	9	+ a	9 <sub>f</sub>		B b	Ψ <sub>B</sub>	10 <sub>B</sub>	10 <sub>b</sub>
A	8	D	7	- a	7 <sub>D</sub>	B A'		Ψ <sub>A8</sub>	8 <sub>A</sub>	8 <sub>A'</sub>
D	9	E A'	8 8	- a + a	8 <sub>E</sub> 8 <sub>A'</sub>	B d			9 <sub>D</sub>	9 <sub>d</sub>
E	10	F d	9 9	- a + a	9 <sub>F</sub> 9 <sub>d</sub>	B e			10 <sub>E</sub>	10 <sub>e</sub>
F	11	b e	10 10	- a + a	10 <sub>b</sub> 10 <sub>e</sub>	B f			11 <sub>F</sub>	11 <sub>f</sub>
B	12	f	11	+ a	11 <sub>f</sub>		B b	Ψ <sub>B</sub>	12 <sub>B</sub>	12 <sub>b</sub>

При сечении	в момент времени	наблюдатель, направление движения из пункта	в момент времени	установит, что искомая соответственная точка лежит на прямой с угловым коэффициентом	проходящей через соответственную точку	уменьшенной на потери напора	увеличенной на потери напора	и на характеристической кривой	т. е. в точке пересечения	которой определяется также точка
A	10	D	9	- $\alpha$	$9_D$	в A'		$\Psi_{A10}$	$10_A$	$10_{A'}$
D	11	E A'	10 10	- $\alpha$ + $\alpha$	$10_E$ $10_{A'}$	в d			$11_D$	$11_d$
E	12	F d	11 11	- $\alpha$ + $\alpha$	$11_F$ $11_d$	в e			$12_E$	$12_e$
F	13	b e	12 12	- $\alpha$ + $\alpha$	$12_b$ $12_e$	в f			$13_F$	$13_f$
B	14	f	13	+ $\alpha$	$13_f$		нуль	$\Psi_B$	$14_B$	
A	12	D	11	- $\alpha$	$11_D$	в A'		$\Psi_{A12}$	$12_A$	$12_{A'}$

трубопровода можно практически пренебречь, но при этом в сечениях *ADEFB* (фиг. 31, а) трубопровода в действительности находятся диафрагмы; в этом случае ничто не изменилось бы в построении на фиг. 31, б; таким образом, это построение соответствовало бы точному решению задачи для реального случая (оно является в то же время приближенным решением для другого реального случая, когда потери напора распределены на всей длине).

Не требуется доказательств для того, чтобы понять, что всякая потеря напора, сконцентрированная в сечении трубопровода (например: в месте установки диафрагмы, при внезапном изменении сечения, в сечении резкого поворота и тому подобное) равнозначна разрыву непрерывности, порождая частное отражение. Таким образом, построения на фиг. 30, б и 31, б соответствуют случаю *n* разрывов непрерывности, расположенных последовательно на таких взаимных расстояниях, что время пробега волны между двумя сечениями разрыва непрерывности одинаково для любой пары сечений. К стати, этот случай рассмотрен в § 20 (фиг. 22) применительно к разрывам непрерывности, возникающим в связи с изменением параметров *a* и *S*.

В обоих случаях построения производятся одинаковым образом, но на фиг. 22 каждое нарушение непрерывности приводило к изменению угла наклона характеристических прямых, в то время, как на фиг. 31, б эти нарушения обуславливают параллельное смещение прямых, поскольку каждая соответственная точка на фиг. 22 становится двоякой на фиг. 31, а.

Ничто не препятствует, впрочем, возможности возникновения обоих видов разрыва непрерывности в одном и том же сечении; действительно, такое положение обязательно возникает, например,

при внезапном увеличении сечения, что вызывает также возникновение местной потери напора. И в этом случае построения на фиг. 22 остаются без других изменений, кроме того, что все соответственные точки из простых превращаются в двоянные.

Если потери давления сосредоточены в нескольких сечениях на взаимных расстояниях, не эквивалентных по отношению к времени пробега волны, построение производится так, как это описано в § 18 (фиг. 19). Однако это построение сопряжено с известными трудностями, и следует посоветовать упрощать его путем введения наибольшей общей длины для отдельных участков; об этом подробно говорилось при описании построения на фиг. 23.

**§ 29. Выводы.** Мы умеем теперь определять неустановившийся режим в сети, включающей разрывы непрерывности любого рода (изменения сечений, ветвления, местные или распределенные потери напора, регулирующие устройства в любом количестве). Основой построений во всех случаях являются элементарные фигуры, аналогичные описанным в §§ 10 и 28; их комбинирование требует лишь вдумчивости, но не дополнительных знаний; таким образом, решение даже самых сложных задач доступно чертежнику, имеющему опыт таких построений.

#### **Д. Случай, когда режим в трубопроводе определяется дифференциальным соотношением между величинами $h$ и $q$ и временем**

**§ 30. Пояснение основных положений.** Во всех рассмотренных ранее случаях предполагалось, что неустановившееся движение определяется регулирующими устройствами в концевых сечениях трубопровода, причем для каждого момента времени известна явно выраженная зависимость  $h = \Psi(q)$ , между величинами  $h$  и  $q$  для этих регулирующих устройств; такую зависимость мы назвали «характеристической кривой» регулирующего устройства.

Но существуют регулирующие устройства такого рода, когда величина  $h$  зависит от изменений  $q$  во времени, или, наоборот, величина  $q$  зависит от изменений  $h$  во времени.

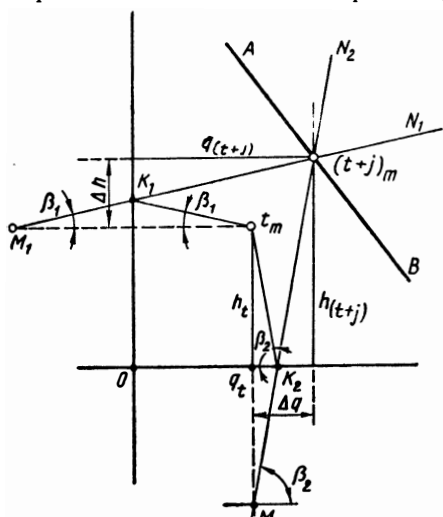
Для наблюдателя, прибывающего к такому регулирующему устройству в момент времени  $i$ , соответственная точка по-прежнему будет находиться на характеристической прямой трубопровода; но теперь вместо того, чтобы определяться пересечением этой прямой и кривой  $h = \Psi(q)$ , соответственная точка должна удовлетворять дифференциальному соотношению, связывающему величину  $h_i$  или  $q_i$  со значением  $h_{(i-dt)}$  или  $q_{(i-dt)}$ , имевшими место в сечении в момент времени  $i - dt$ .

Естественно, что графическое построение — так же, как, впрочем, и аналитический расчет — можно производить только конечноразностным методом. Единственным условием при графических построениях, практически обычно не вызывающим затруднений и являющимся в нужной мере точным, является принятие интер-

вала времени  $\Delta t$  достаточно малым, для того чтобы можно было полагать изменения величин  $h$  и  $q$  в этом интервале линейными.

Ознакомимся ближе с постановкой задачи.

Пусть известна соответственная точка  $t_m$  для сечения  $m$  в момент времени  $t$  (фиг. 32), и нужно найти соответственную точку  $(t+j)$  для того же сечения в момент времени  $(t+j)$  (где  $j = \Delta t$ ); после этого можно было бы продолжать дальнейшее построение для моментов времени, разделенных интервалами  $j$ .



Фиг. 32.

Для момента времени  $t+j$  характеристикой трубопровода будет прямая, справедливая для наблюдателей, которые в это время прибывают в  $m$ . Пусть это будет прямая  $AB$ , определенная из предшествующих построений; точка  $(t+j)$  должна находиться на этой прямой, имея напор измененным (против момента времени  $t$ ) на  $\Delta h$  и расход измененным на  $\Delta q$ .

Но мы предположили наличие в сечении  $m$  устройства, для которого  $h$  или  $q$  связаны с временем при посредстве дифференциального уравнения. В гидравлике возможны в некоторой точке только два вида связей между величинами  $h$ ,  $q$  и временем: случай  $a$  — когда в течение времени  $j$  расход  $q$  заполняет некоторую емкость  $q \times j = \Delta V$ , заставляя меняться давление; случай  $b$  — когда импульс давления  $(\omega h) \times j$  сообщает материальной массе количество движения, зависящее от расхода  $q$ .

Рассмотрим сначала случай  $a$ .

Поскольку изменение расхода  $q$  в интервале времени  $j$  можно полагать линейным, то средним значением расхода будет  $\frac{q_t + q_{(t+j)}}{2}$ , а соответствующий объем  $\Delta V$ , заполняемый жидкостью, составит

$$\Delta V = \frac{q_t + q_{(t+j)}}{2} j. \quad (1)$$

В зависимости от вида регулирующего устройства (резервуар различной формы, открытый или напорный) объем  $V$  связан с высотой (или напором)  $h$  некоторой заданной функцией  $V = \varphi(h)$ , что дает:

$$\Delta V = \frac{dV}{dh} \Delta h = \varphi'(h) \Delta h. \quad (2)$$

Подставляя уравнение (2) в уравнение (1) и разрешая относительно неизвестной  $q_{(t+j)}$ , получим

$$q_{(t+j)} = \left[ \frac{2}{j} \cdot \varphi'(h) \right] \Delta h - q_t. \quad (3)$$

Если величина  $\Delta h$  достаточно мала для того, чтобы можно было рассматривать  $\varphi'(h)$  как постоянную уравнению (3) соответствует прямая  $M_1N_1$ , проходящая через точку  $M_1$ , симметричную точке  $t_m$  относительно оси ординат  $h$  и имеющая угловой коэффициент

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{j}{2\varphi'(h)}. \quad (4)$$

Эту прямую можно строить следующим образом: сначала проводится прямая  $t_m K_1$ , составляющая с осью абсцисс угол  $(-\beta_1)$ , затем от точки  $K_1$  проводится прямая  $K_1 N_1$ , составляющая с той же осью угол  $\beta_1$ . Точка пересечения этой последней прямой и характеристической прямой  $AB$  трубопровода является искомой соответственной точкой  $(t+j)_m$ .

Интересно отметить, что такое построение воспроизводит в точности построения для получения характеристической прямой трубопровода. Действительно, оно производится таким образом, как если бы имело место перемещение фиктивного наблюдателя, выбывающего в момент времени  $t$  из  $m$  для того, чтобы подняться в резервуар; для этого наблюдателя величины  $h$  и  $q$  должны находиться на прямой, проходящей через соответственную точку  $t_m$  в момент и в месте его выбытия и имеющей угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \beta_1 = -\frac{j}{2\varphi'(h)}$ . Достигнув поверхности воды в резервуаре, наблюдатель констатирует расход, равный нулю, чем определяется на графике точка  $K_1$  (в пересечении прямой с осью ординат). При дальнейшем движении от  $K_1$  к сечению  $m$  зависимость  $h$  от  $q$  определяется прямой с угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \beta_1 = +\frac{j}{2\varphi'(h)}$ , проходящей через соответственную точку  $K_1$ . В дальнейшем при рассмотрении частных случаев мы убедимся в обоснованности этой аналогии.

Рассмотрим теперь случай *б*.

Поскольку изменение величины  $h$  линейно в интервале времени  $j$  импульс сил давления (на единицу площади) за это время, приравняемый изменению количества движения, приводит к выражению

$$\omega \frac{h_t + h_{(t+j)}}{2} j = \Delta(Mv). \quad (5)$$

Но количество движения  $(Mv)$ , воспринимаемое регулирующим устройством в  $m$ , связано с расходом зависимостью  $(Mv) = \varphi(q)$ ,

характер которой определяется видом регулирующего устройства; отсюда следует

$$\Delta(Mv) = \frac{d(Mv)}{dq} \Delta q = \varphi'(q) \Delta q. \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в уравнение (5) и разрешая относительно  $h_{(t+j)}$ , найдем

$$h_{(t+j)} = \left[ \frac{2}{\omega j} \cdot \varphi'(q) \right] \Delta q - h_i. \quad (7)$$

Если величина  $\Delta q$  достаточно мала для того, чтобы рассматривать  $\varphi'(q)$  как постоянную, то этому уравнению соответствует прямая  $M_2N_2$ , проходящая через точку  $M_2$ , симметричную точке  $t_m$  относительно оси абсциссы и имеющая угловой коэффициент

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{2}{\omega j} \varphi'(q). \quad (8)$$

Как и раньше, эту прямую можно получить, проведя через точку  $t_m$  прямую  $t_m K_2$ , образующую с вертикальной линией угол  $(-\beta_2)$ , а затем через точку  $K_2$  — искомую прямую  $K_2 N_2$ , образующую с вертикалью угол  $\beta_2$ . Последняя прямая пересечет характеристику трубопровода — прямую  $AB$  — в искомой точке  $(t+j)_m$ .

Как и в случае *a*, при этом построении проявляется аналогия с законом распространения волн в трубопроводе. Действительно, используя эту аналогию, можно сказать, что для наблюдателя, выбывающего из сечения  $m$  в момент времени  $t$  с тем, чтобы пройти регулирующее устройство на этом участке, зависимость напора  $h$  от расхода  $q$  будет выражена посредством прямой, проходящей через соответственную точку  $t_m$  в момент и в месте выбытия наблюдателя и имеющей угловой коэффициент  $\left( -\frac{2}{\omega j} \varphi'(q) \right)$ .

Достигнув конца устройства, наблюдатель устанавливает, что сила (т. е. напор  $h$ ) равна нулю, чему соответствует точка  $K_2$  пересечения с осью абсцисс; при возвращении в  $m$  зависимость между напором  $h$  и расходом была бы выражена посредством прямой  $K_2 N_2$ , проходящей через точку  $K_2$  и имеющей угловой коэффициент  $+\frac{2}{\omega j} \varphi'(q)$ . Мы увидим далее, что указанная аналогия вполне обоснована также и в данном случае.

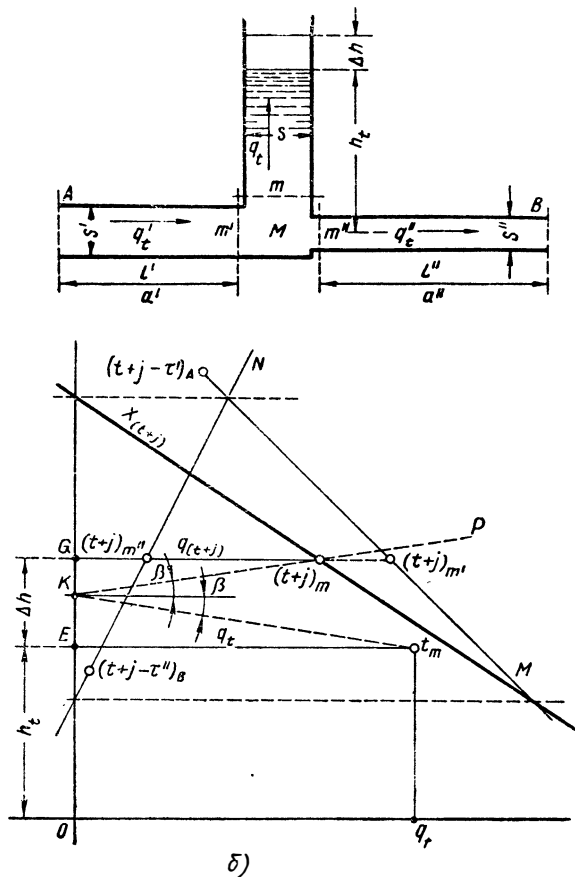
Изложенное дает способ изучать различные регулирующие устройства, процессы в которых протекают аналогично рассмотренным выше случаям «*a*» или «*b*». Каждое из этих устройств должно быть охарактеризовано при этом соответствующей ему функцией  $\varphi(h)$  или  $\varphi(q)$ .

### § 31. Резервуар конечных размеров (уравнительная башня).

Рассмотрим случай резервуара площадью сечения  $S$ , присоединенного к трубопроводу  $AB$  в пункте  $M$  (фиг. 33, *a*).

Это — случай ветвления, изученный в § 21. Чтобы проследить за тем, что происходит в точке  $M$ , надо представить себе двух

наблюдателей, встречающихся в этой точке в результате движения одного из них из сечения  $A$  и другого — из сечения  $B$ . Перемещению каждого наблюдателя соответствует своя характеристическая прямая; кроме того, надо учесть особенность, которая вносится ветвлением.



Фиг. 33.

Пусть известна соответственная точка  $t_m$  для сечения  $m$  в резервуаре в момент времени  $t$ , причем в этот момент в резервуаре имеет место восходящее течение с расходом  $q_t$ , равным притоку  $q'_t$ , поступающему из  $A$ , за вычетом оттока  $q''_t$  в направлении сечения  $B$ . Задача состоит в том, чтобы найти соответственную точку  $(t+j)_m$  для конца интервала времени  $\Delta t = j$  конечного, но достаточно малого (как на это уже указывалось) для того, чтобы можно было полагать внутри этого интервала времени расход изменяющимся линейно от значения  $q_1$  до значения  $q_{(t+j)}$



(что строго справедливо, конечно, только для дифференциала времени  $dt$ ).

Пусть  $(t+j-\tau')_A M$  и  $(t+j-\tau'')_B N$  характеристические прямые (фиг. 33, б) для наблюдателей, выбывающих из сечения  $A$  в момент времени  $(t+j-\tau')_A$  и из сечения  $B$  в момент времени  $(t+j-\tau'')$  и встречающихся в сечении  $M$  в момент времени  $(t+j)$ ; таким образом,  $\tau' = \frac{l'}{a'}$  и  $\tau'' = \frac{l''}{a''}$  соответствуют продолжительности перемещения наблюдателей вдоль участков  $AM$  и  $BM$

Эти прямые известны, определяясь предшествующим режимом. Как ранее указывалось, построения в случае разветвленного трубопровода целесообразно в целях большей ясности производить на отдельных чертежах для каждого из участков трубопровода. Однако в данном случае для удобства обозрения построения для всех участков объединены на одном чертеже.

Вычтем из абсцисс прямой  $(t+j-\tau')_A M$  абсциссы прямой  $(t+j-\tau'')_B N$ ; иначе говоря, от значений расхода, поступающего со стороны  $A$ , отнимем расход, оттекающий в направлении  $B$ ; полученная результирующая прямая  $X_{(t+j)}$  определяет зависимость в сечении  $m$  между напором и расходом для наблюдателя, прибывшего в это сечение; следовательно, искомая точка  $(t+j)_m$  должна находиться на этой прямой.

Ее положение может быть определено следующим графическим способом. В уравнильной башне происходит процесс, заключающийся в изменении положения открытой поверхности в зависимости от расхода. Действительно, за время  $dt$  при расходе  $q$  уровень подымается на  $dh$ , причем

$$S \cdot dh = qdt \quad (1)$$

это — дифференциальное уравнение, связывающее между собой величины  $q$ ,  $h$  и время.

Зависимость между объемом  $V$  воды в резервуаре и высотой  $h$  имеет вид

$$V = \varphi(h) = Sh,$$

отсюда

$$\varphi'(h) = S.$$

Это и есть рассмотренный выше случай  $a$ ; поэтому построения должны производиться следующим образом: через точку  $t_m$  проводится прямая  $t_m K$ , образующая с осью абсцисс такой угол  $\beta$ , что  $\operatorname{tg} \beta = \left(-\frac{j}{2S}\right)$ ; это определяет на оси ординат точку  $K$ , через которую проводится затем прямая  $KP$ , образующая такой угол  $\beta$ , что  $\operatorname{tg} \beta = \frac{+j}{2S}$ ; в пересечении последней прямой с прямой  $X_{(t+j)}$  находится соответственная точка  $(t+j)_m$ .

Проводя аналогию между этим построением, отражающим явление в резервуаре, и явлением распространения волн в трубе-

проводе, можно отметить, что во время движения наблюдателя от сечения  $m$  к свободной поверхности  $D$  в резервуаре наблюдатель перемещается в направлении течения, в силу чего угловой коэффициент прямой — отрицательный. При достижении наблюдателем сечения  $D$  он не отмечает здесь ни притока ни оттока воды, в силу чего естественно полагать здесь расход равным нулю, и соответственная точка должна находиться на оси ординат. При возвращении наблюдателя из  $D$  к  $m$  он перемещается против течения, и угловой коэффициент прямой становится положительным. Таким образом, устанавливается полная аналогия в порядке построений с случаем трубопровода.

Такое объяснение не является только абстракцией. Действительно, режим на участке  $l$  между сечениями  $m$  и  $D$  складывается также в результате прохождения волн при скорости  $a$ , имеющих временем пробега  $\tau = \frac{l}{a}$ . Построение, использующее эту единицу времени, было бы идентичным описанному выше, но включало бы в интервале  $j$  значительное число ломаных линий, стороны которых имели бы угловыми коэффициентами  $\pm \frac{a}{gS}$ . Вышеприведенное построение заменяет их двумя прямыми с угловым коэффициентом  $\pm \frac{j}{2S}$ , что закономерно, если интервал времени взят достаточно малым.

Эта аналогия имеет, впрочем, и более глубокое обоснование, которое было показано нами в другом месте<sup>1</sup>.

Для нахождения положения соответственной точки  $(t+j)_m$  можно применить также расчет последовательных приближений. Расход  $q_t$ , поступающий в уравнительную башню в начальный момент интервала времени  $j$ , известен; поскольку возникающее в результате изменение уровня  $\Delta h$  будет положительным, т. е. высота  $h_t$  увеличится, то  $q_{(t+j)}$  будет меньшим, чем  $q_t$ . Примем за среднее в интервале времени  $j$  значение расхода величину  $q_1$  несколько меньшую, чем  $q_t$ , и рассчитаем  $\Delta h$  с помощью уравнения (1). Проведя затем горизонтальную прямую, отстоящую на величину  $\Delta h$  от  $h_t$ , найдем на прямой  $X_{(t+j)}$  точку  $(t+j)_{m1}$ , определяющую расход  $q_{(t+j)1}$ . Найдем среднее значение

$$\frac{q_t + q_{(t+j)1}}{2} = q_2.$$

Величина  $q_2$  может быть:

равной  $q_1$ , что было бы удачным совпадением, в результате случайного точного задания среднего расхода; точка  $(t+j)_{m1}$  была бы тогда искомой точкой  $(t+j)_m$ ;

<sup>1</sup> Ingénieurs Civils, май—июнь, 1926 г. К теории гидравлического удара. Международный конгресс по общей механике в Льеже, 1930 г. К теории гидравлического удара.

отличной от  $q_1$ ; в этом случае повторяют вычисление величины  $\Delta h$  из уравнения (1), принимая за среднее значение расхода величину  $q_3$ , заключающуюся между  $q_1$  и  $q_2$ . Таким образом находят новые величины  $\Delta h_2$ ,  $q_{(t+j)_2}$  и затем

$$q_4 = \frac{q_t + q_{(t+j)_2}}{2}.$$

Если  $q_4 = q_3$ , точка  $(t + \frac{1}{2}j)_{m2}$  является искомой точкой  $(t + j)_m$ , в противном случае расчет повторяют далее.

На первый взгляд этот метод может показаться трудоемким и недостаточно надежным. Но стоит только его испробовать, чтобы неожиданно установить его простоту и точность, благодаря чему часто этот метод предпочитают построению, описанному ранее. Простота способа объясняется тем, что только первая точка  $j_m$  графика, получаемая исходя из точки  $O_m$ , должна быть угадана ошупью, так как еще нельзя себе представить характера чертежа. Но сразу после начала построений закономерность в интервалах  $O_m - j_m$ ;  $j_m - 2j_m$ ;  $2j_m - 3j_m$  и так далее, становится очевидной. С этого момента удается наметить последующее среднее значение расхода с такой точностью, которая почти исключает повторный подбор. Таким образом, этот способ (хотя и менее изящный) зарекомендовал себя так же положительно, как и полностью графический.

После нахождения с помощью одного из двух способов точки  $(t + j)_m$  на той же горизонтали получим: точку  $(t + j)_m$  на прямой  $(t + j - \tau')_A M$  и точку  $(t + j)_{m''}$  на прямой  $(t + j - \tau'')_B N$ . Это будут соответственные точки для сечений  $m'$  и  $m''$  трубопроводов  $AM$  и  $BM$  в момент времени  $(t + j)$ . Через них пройдут новые характеристические прямые, констатируемые наблюдателями, передвигающимися в направлениях к  $A$  и  $B$ . Затем построения продолжают аналогичным образом для получения точек  $(t + 2j)_m \times \times (t + 3j)_m$  и так далее.

В качестве дополнения к изложенному выше рассмотрим случай, когда поперечное сечение  $S$  уравнильной башни меняется по высоте.

Часто случается, что упоминавшийся выше резервуар, называемый в гидроэнергетическом строительстве уравнильной башней, имеет меняющееся на различных участках поперечное сечение, в то время как в пределах каждого отдельного участка сечение одинаково. Описанное выше построение сохраняется в силе также и в этом случае, но при переходе от одного участка к другому надо придавать углу  $\beta$  измененное значение.

Если сечение меняется в зависимости от  $h$  произвольно, но непрерывно, угол  $\beta$  также будет меняться непрерывно; его тангенс  $\frac{j}{2S}$  может быть найден для любого значения  $h$ , определяя площадь сечения  $S$  соответственно этой высоте и полагая интер-

вал времени  $j$  достаточно малым, с тем чтобы  $S$  могло быть принято в этом интервале постоянным.

Следует указать, что в этом случае применение последовательных приближений является более быстрым и практически более точным.

**§ 32. Случай пресса-аккумулятора на трубопроводе.** Рассмотрим трубопровод  $AMB$  с присоединенным к нему на ответвлении пресом, оборудованным тяжелым поршнем веса  $P$ , скользящим в цилиндре, площадью сечения  $S$  (фиг. 34,  $a$ ). При установившемся режиме поршень неподвижен и создает в сечении  $M$  давление, равное

$$\frac{P}{S} = \bar{\omega} h_0. \quad (1)$$

Это давление обычно значительно больше, чем давление столба воды под поршнем в цилиндре, и мы вправе пренебречь последним в дальнейших расчетах. Считая режим в сечении  $m$  для момента времени  $t$ , характеризуемый соответственной точкой  $t_m$  известным, равно, как и все предшествующие режимы, поставим задачу об определении режима в том же сечении в момент времени  $t+j$ , полагая интервал  $\Delta t = j$  достаточно малым, чтобы можно было считать изменение давления от значения  $h_t$  до значения  $h_{(t+j)}$ , происходящим по линейному закону.

Расход  $q_t$  в вертикальном цилиндре представляет собой разность между расходом  $q_t$  на участке  $AM$ , поступающим в направлении от  $A$  к  $M$ , и оттоком  $q_t''$  через сечение  $m''$  в направлении к  $B$ .

Как и в предыдущем случае, соответственная точка в момент времени  $t+j$  в сечении  $m'$  будет на характеристической прямой  $(t+j-\tau')_A M$ , устанавливаемой наблюдателем, выбывающим из  $A$  в момент времени  $(t+j-\tau')$ , а в сечении  $m''$  — на характеристической прямой  $(t+j-\tau'')_B N$ , устанавливаемой наблюдателем, выбывающим из  $B$  в момент времени  $(t+j-\tau'')$ ; при этом величины  $\tau' = \frac{l'}{a'}$  и  $\tau'' = \frac{l''}{a''}$  являются значениями времени пробега волной участков  $AM$  и  $DM$ .

Разность абсцисс прямых  $(t+j-\tau')_A M$  и  $(t+j-\tau'')_B N$  (т. е. расходов  $q'$  в сечении  $m'$  и  $q''$  в сечении  $m''$ ) определяет прямую  $X_{(t+j)}$ , справедливую для обоих наблюдателей при их встрече в сечении  $m$ . Следовательно, соответственная точка  $(t+j)$  должна быть на прямой  $X_{(t+j)}$ .

Теперь необходимо увязать изменения величин  $h_t$  и  $q_t$  в интервале времени  $\Delta t = j$  с законом движения поршня.

Если  $F$  — сила, приложенная к телу веса  $P$ , и  $v$  — скорость тела, то уравнение движения имеет вид

$$F = \frac{P}{g} \cdot \frac{dv}{dt}. \quad (2)$$

Если  $h$  — давление под поршнем в  $m$  водяного столба, т. е.  $\omega h$  — давление в килограммах (где  $\omega$  — удельный вес воды), то сила  $F$  определится из уравнения

$$F = (\omega h) S - P = \omega S (h - h_0). \quad (3)$$

Расход воды под поршнем составляет

$$q = vS, \quad (4)$$

откуда

$$dq = Sdv. \quad (5)$$

Подставляя уравнения (1), (3), (4), (5) в уравнение (2), получим:

$$(h - h_0) = \frac{dq}{dt} \cdot \frac{h_0}{gS}. \quad (6)$$

Это уравнение показывает, что между величинами  $h$  и  $q$  не существует явной зависимости; величина  $h$  связана зависимостью с изменениями величины  $q$  во времени.

Таким образом, мы имеем отмеченный выше случай «б». Импульс за время  $j$  сил, приложенных к массе поршня, равен

$$\left[ \omega \frac{(h_t - h_0) + (h_{(t+j)} - h_0)}{2} S \right] j. \quad (7)$$

Изменение количества движения  $\Delta(Mv)$  поршня записывается как  $\frac{P}{g} \Delta v$ , т. е. в соответствии с уравнением (5)  $\frac{P}{gS} \Delta q$  и в соответствии с уравнением (1)

$$\frac{\omega h_0}{g} \Delta q. \quad (8)$$

Приравнявая уравнение (7) уравнению (8) и разрешая относительно неизвестной  $(h_{(t+j)} - h_0)$ , получим

$$(h_{(t+j)} - h_0) = \frac{2h_0}{2Sj} \Delta q - (h_t - h_0). \quad (9)$$

На фиг. 34, б разности  $(h_t - h_0)$  соответствует отрезок  $t_m E$ , а уравнению (9) прямая  $KP$ , которую легко построить, учтя, что при ее продолжении она должна пройти через точку, симметричную  $t_m$  относительно оси абсцисс, образуя с горизонталью угол  $\beta$  такой, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2h_0}{gSj}, \quad (10)$$

тогда как прямая  $t_m K$  образует с горизонтальной линией угол  $(-\beta)$ .

Точка пересечения данной прямой  $KP$  с прямой  $X_{(t+j)}$  определяет искомую соответственную точку  $(t+j)_m$ .



условливаемая весом поршня  $P$ , чему соответствует (на фиг. 34, б) ордината  $h_0$  и чем определяется положение точки  $K$ . При перемещении наблюдателя в обратном направлении характеристическая прямая будет симметрична предыдущей и будет проходить через только что найденную соответственную точку  $K$ , т. е. это будет прямая  $KP$ . В сечении  $m$  этот наблюдатель должен отметить тот же режим, какой отмечают наблюдатели, перемещающиеся вдоль отрезков трубопровода и для которых результирующей характеристикой является прямая  $X_{(t+j)}$ . Поэтому соответственная точка в момент времени  $(t+j)$  в  $m$  должна находиться на пересечении двух названных прямых, т. е. в точке  $(t+j)_m$ .

Дальнейшее построение эпюры от точки  $(t+j)_m$  к точке  $(t+2j)_m$  осуществляется в том же порядке, как ранее от точки  $t_m$  к точке  $(t+j)_m$ .

Проводя через точку  $(t+j)_m$  горизонтальную линию, можно найти соответственные точки  $(t+j)_{m'}$  на прямой  $(t+j-\tau')_A M$  и  $(t+j)_{m''}$  — на прямой  $(t+j-\tau'')_B N$  для сечений  $m'$  и  $m''$  в момент времени  $(t+j)$ ; через эти точки будут проходить характеристические прямые для наблюдателей, отправляющихся из  $m'$  и  $m''$  в направлениях к  $A$  и  $B$ . Эти прямые позволяют определить режим в  $A$  и  $B$  соответственно для моментов времени  $(t+j+\tau')$  и  $(t+j+\tau'')$ .

**§ 33. Резервуар с поршнем и пружиной.** Пусть в сечении  $M$  трубопровода  $AB$  есть ответвление (фиг. 35, а), в котором смонтирован поршень с пружиной. Если напор под поршнем при установившемся движении равняется  $h_0$ , то сила, уравниваемая пружиной и поршнем, составляет

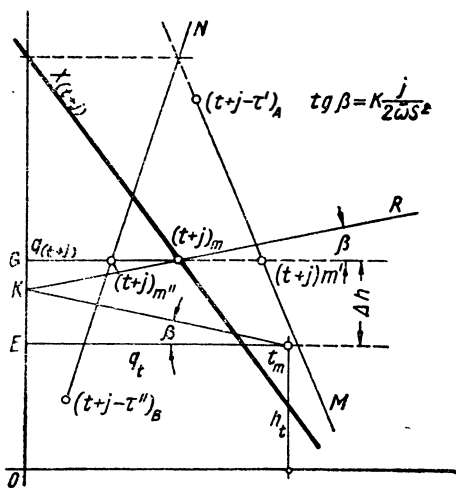
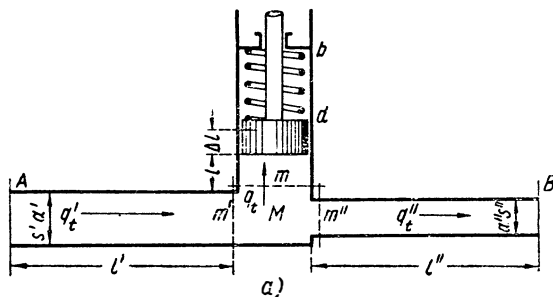
$$P_0 = (\bar{\omega}h_0) S. \quad (1)$$

Пусть доля давления в сечении  $m$ , обусловливаемая столбом жидкости  $l$  в цилиндре под поршнем, пренебрежимо мала по сравнению с величиной  $\bar{\omega}h_0$ . Массы поршня и пружины также будем предполагать достаточно малыми, так что весом и инерцией этих двух устройств можно пренебречь.

В этих условиях всегда будет существовать мгновенное равновесие между силой упругости пружины  $P_t$  и силой  $\bar{\omega}h_0 S$  давления на нижнюю поверхность поршня. Сила пружины  $P_t$  изменяется линейно в зависимости от хода поршня из расчета  $K$  килограмм на единицу длины смещения поршня ( $K$  — характеризует упругость пружины).

Поставим перед собой задачу — найти соответственную точку  $(t+j)_m$  для сечения  $m$  в момент времени  $(t+j)$  (причем  $j$  — достаточно малый промежуток времени, позволяющий считать изменения величины  $h$  внутри этого интервала линейными), исходя из определенной ранее точки  $t_m$  для момента времени  $t$  в том же сечении  $m$ , когда имели место напор  $h_t$ , также уравновешенный силой упругости пружины, и расход  $q_t$ , равный разности притока  $q'_t$

протекающего на отрезке трубопровода  $AM$  и оттока  $q_t''$  через сечение  $m''$  в участок трубопровода  $MB$ .



Фиг. 35.

Пусть за время  $j$  поршень переместится на  $\Delta l$ ; сила пружины увеличится при этом на величину  $K \cdot \Delta l$  и напор воды изменится на  $\Delta h$  в соответствии с условием

$$(\bar{\omega} \Delta h) S = K \Delta l. \quad (2)$$

Это соответствует описанному выше случаю «а» — заполнения емкости — с той разницей, что в данном случае давление связано зависимостью с перемещением  $\Delta l$  конца пружины.

Имея  $\Delta V = S \Delta l$  и подставляя взамен  $\Delta l$  его значение из уравнения (2), получим

$$\Delta V = \frac{\bar{\omega} S^2}{K} \Delta h, \quad (3)$$

и условие

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{jK}{2\bar{\omega} S^2} \quad (4)$$



определяет на графике (фиг. 35, б) угол с горизонталью прямых  $t_m K$  и  $KR$ , на второй из которых должна находиться искомая точка  $(t+j)_m$ .

С другой стороны, поскольку предшествующие режимы считаются установленными (методом, который мы в данное время отыскиваем), мы можем построить характеристические прямые  $(t+j-\tau')_A M$  и  $(t+j-\tau'')_B N$ , справедливые для наблюдателей, которые, начав движение из сечения  $A$  в момент времени  $(t+j-\tau')$  и из сечения  $B$  в момент времени  $(t+j-\tau'')$ , встречаются в  $M$  в момент времени  $(t+j)$ . Разность абсцисс прямой  $(t+j-\tau')_A M$  и прямой  $(t+j-\tau'')_B N$ , т. е. разность между расходом  $q'_t$  притока через сечение  $m'$  и  $q''_t$  — оттока через сечение  $m''$ , дает прямую  $X_{(t+j)}$ , справедливую для обоих наблюдателей после того, как они пересекли  $m''$  и  $m'$  и находятся в  $m$ ; искомая соответственная точка должна быть также на этой прямой, т. е. она должна находиться на ее пересечении  $(t+j)_m$  с построенной ранее прямой  $KR$ .

Легко заметить, что описываемое построение может быть произведено на основании гипотезы о перемещении подвижного наблюдателя в пружине. Его характеристическая прямая во время движения от  $d$  к  $b$  будет  $t_m K$ ; скорость в  $b$  будет равна нулю, что даст точку  $K$  (нулевой расход). При обратном перемещении в направлении к  $d$  характеристическая прямая будет симметрична предыдущей, проходя через точку  $K$ .

Проведенная через точку  $(t+j)_m$  горизонтальная линия в пересечениях с характеристическими прямыми  $(t+j-\tau')_A M$  и  $(t+j-\tau'')_B N$  дает соответственные точки  $(t+j)_{m'}$  и  $(t+j)_{m''}$  режима в  $m'$  и  $m''$  в момент времени  $(t+j)$ . Через эти точки пройдут характеристические прямые, справедливые для наблюдателей, перемещающихся вдоль участков  $AM$  и  $BM$  в направлениях к  $A$  и к  $B$ , что дает возможность продолжать построения.

**§ 34. Воздушный колпак.** Рассмотрим еще случай, когда в сечении  $M$  на ответвлении трубопровода установлен воздушный колпак (фиг. 36, а). Объем воздуха в колпаке при начальном установившемся режиме обозначим через  $V_0$ , а абсолютное давление здесь — через  $p_0$ . Если  $h_0$  является высотой столба воды, соответствующей этому режиму, то давление  $p_0$  будет выражено как  $p_0 = \bar{\omega}(h_0 + h_a)$ , где атмосферное давление определяется высотой столба воды  $h_a$ .

При неустановившемся режиме воздух в резервуаре расширяется или сжимается. При изотермическом процессе зависимостью между абсолютным давлением  $p$  и объемом  $V$  будет

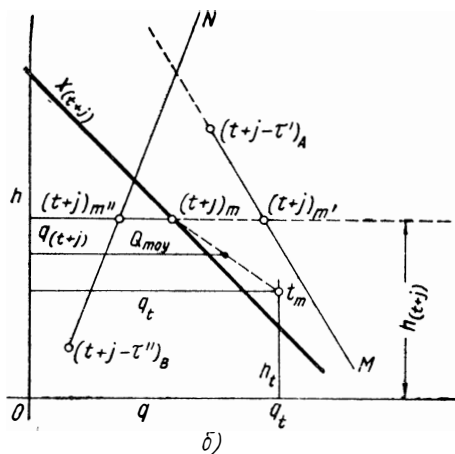
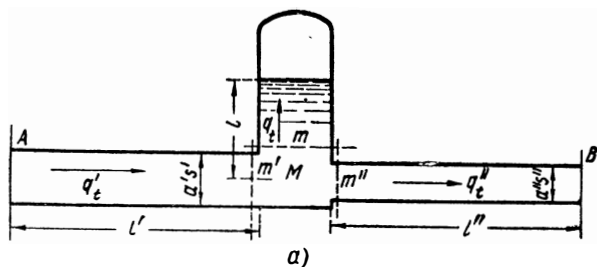
$$p_0 V_0 = p V, \quad (1)$$

а при адиабатическом

$$p_0 V_0^\gamma = p V^\gamma. \quad (2)$$

Показатель степени  $\gamma$ , выражающий отношение теплоемкостей при постоянном объеме и давлении, для воздуха равен 1,4. Если изменения режима происходят очень медленно, то справедливо уравнение (1); при очень быстрых изменениях режима — уравнение (2); практически справедливо промежуточное состояние между уравнениями (1) и (2).

Во всех практических случаях можно пренебрегать в сечении  $M$  давлением, обусловливаемым высотой столба воды по срав-



Фиг. 36.

нению с давлением  $p$  воздуха над поверхностью воды в колпаке (при необходимости можно легко учесть, как мы это увидим в дальнейшем, также и высоту этого столба).

Пусть  $t_m$  соответственная точка (фиг. 36, б) в сечении  $m$  для момента времени  $t$ , когда давление в этом сечении равняется  $\bar{\omega}(h_t + h_a)$ , определяясь давлением воздуха в колпаке, а расход равен разности между притоком  $q'_t$  через сечение  $m'$  со стороны  $A$  и оттоком  $q_t$  через сечение  $m''$  в направлении  $B$ ; ставится задача найти соответственную точку  $(t + j)$  для того же сечения  $m$  в момент времени  $(t + j)$ , где  $j$  является достаточно малым интервалом

времени, чтобы можно было предположить изменение расхода в интервале линейным.

Объем воздуха  $V_t$  в воздушном колпаке в момент времени  $t$  выражается уравнением (1) или (2); возьмем, например, уравнение (1), тогда получим

$$V_t(h_t + h_a) = V_0(h_0 + h_a). \quad (3)$$

С другой стороны, зная предшествующий режим, можно построить прямые  $(t + j - \tau')_A M$  и  $(t + j - \tau'')_B N$ , справедливые для наблюдателей, начавших движение в сечениях  $A$  и  $B$  и встречающихся в сечении  $M$  в момент времени  $(t + j)$ .

Как и в предыдущем случае, искомая точка  $(t + j)_m$  должна находиться на прямой  $X_{(t+j)}$ , получаемой в результате вычитания абсцисс прямой  $(t + j - \tau'')_B N$  из абсцисс прямой  $(t + j - \tau')_A M$ .

Для нахождения положения точки  $(t + j)_m$  на прямой  $X_{(t+j)}$  можно предложить два способа: аналитический способ последовательных приближений и графический. Рассмотрим сначала решение способом последовательных приближений.

По мере поступления воды в воздушный колпак объем воздуха в последнем уменьшается, а давление увеличивается, вследствие чего поступающий в резервуар расход начинает уменьшаться. Назначим среднее значение расхода  $Q'_{\text{ moy}}$  в интервале времени от  $t$  до  $(t + j)$  несколько меньшим, чем  $q_t$  (расход в начальный момент интервала  $j$ ). Поступивший в воздушный колпак за время  $j$  объем воздуха будет  $Q'_{\text{ moy}} j$ , и уравнение (1) дает

$$V_{(t+j)}(h_{t+j} + h_a) = V_t(h_t + h_a),$$

где

$$V_{(t+j)} = V_t - Q'_{\text{ moy}} j,$$

отсюда

$$h_{(t+j)} = \frac{V_t(h_t + h_a)}{V_t - Q'_{\text{ moy}} j}. \quad (4)$$

Так как  $h_t$  и  $V_t$  известны, то из уравнения (4) находится  $h_{(t+j)}$ ; искомой соответственной точкой  $(t + j)_m$  будет точка прямой  $X_{(t+j)}$ , имеющая ординатой  $h_{(t+j)}$ . Знание этой точки позволяет тотчас же найти расход  $q_{t+j}$  и действительный средний расход:

$$Q_{\text{ moy}} = \frac{q_t + q_{(t+j)}}{2}. \quad (5)$$

Найденная точка правильна, если  $Q_{\text{ moy}} = Q'_{\text{ moy}}$ . В противном случае расчет нужно повторить, задавшись в качестве средней величины расхода в интервале  $j$  значением, заключающимся между  $Q_{\text{ moy}}$  и  $Q'_{\text{ moy}}$ . Это уточняет ранее найденное положение точки  $(t + j)_m$  и дает новое значение  $Q_{\text{ moy}}$ , которое может совпасть с заданным значением  $Q'_{\text{ moy}}$ ; в противном случае продол-

жают подбор в той же последовательности до получения удовлетворяющего совпадения.

Этот способ представляется на первый взгляд громоздким и недостаточно точным. В действительности, он как уже отмечалось в § 31, практически точен и быстро приводит к результату. Это происходит от того, что последовательность точек  $t_m, (t+j)_m, (t+2j)_m, \dots$  подчиняется определенной закономерности, которая быстро становится очевидной. В силу этого обычно уже первый подсчет величины  $Q_{ moy}$  оказывается достаточно точным и почти никогда не требующим повторений; приближения приходится применять только при расчете для первого интервала времени  $j$  и очень редко для второго.

Перейдем теперь к изложению графического способа.

Поскольку воздушный колпак является емкостью, поочередно заполняемой или освобождаемой, мы имеем в этом примере рассмотренный ранее случай «а». Функцией, определяющей объем воздуха в зависимости от высоты или напора  $h$ , является в соответствии с уравнением (3), следующая

$$V = V_0 \frac{h_0 + h_a}{h + h_a} = \varphi(h). \quad (6)$$

Ее производная равна

$$\varphi'(h) = -V_0 \frac{h_0 + h_a}{(h + h_a)^2}. \quad (7)$$

Отсюда, согласно выведенному уравнению (4) в § 30, для определения угла  $\beta$  находим величину

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{j(h + h_a)^2}{2V_0(h_0 + h_a)}. \quad (8)$$

При адиабатическом процессе было бы

$$\varphi(h) = V_0 \frac{(h_0 + h_a)^{\frac{1}{\gamma}}}{(h + h_a)^{\frac{1}{\gamma}}} \quad \text{и} \quad \varphi'(h) = -V_0 \frac{(h_0 + h_a)^{\frac{1}{\gamma}}}{\gamma(h + h_a)^{\frac{1}{\gamma} + 1}}.$$

Таким образом,  $\operatorname{tg} \beta$  непрерывно меняется в зависимости от  $h$ , и надо начинать с того, чтобы построить угол  $\beta$  для значений  $h$ , в которых встретится необходимость. Это лучше всего сделать на отдельном листке кальки, нанеся, как это показано на фиг. 37, а, на оси ординат равные отрезки  $\Delta h$ , достаточно малые, с тем, чтобы величины  $\operatorname{tg} \beta$  незначительно отличались друг от друга. У основания каждого отрезка  $\Delta h$  откладывают параллельно оси абсцисс с одной и другой сторон от оси ординат отрезки

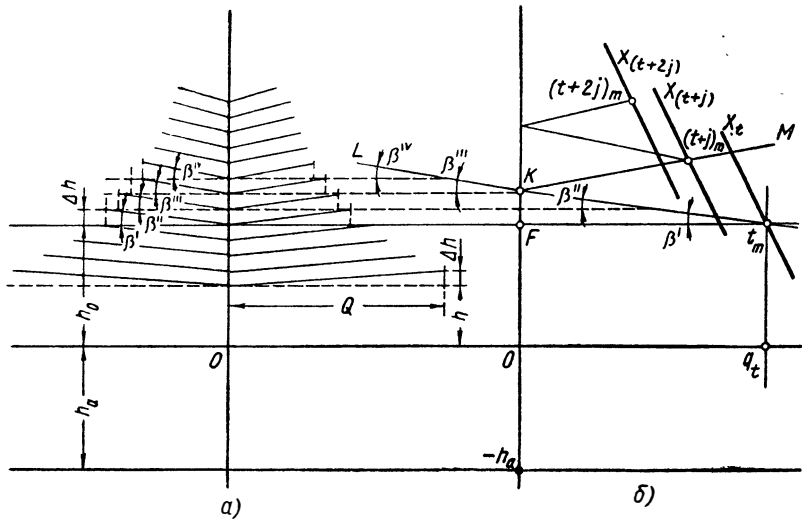
$$Q = \frac{2V_0(h_0 + h_a)}{j\left(h + h_a + \frac{\Delta h}{2}\right)^2} \Delta h, \quad (9)$$

где  $h + \frac{\Delta h}{2}$  является средней ординатой отрезка  $\Delta h$ .

Проведем прямые через концы отрезков  $Q$  и верхние концы участков  $\Delta h$  (фиг. 37, а); эти прямые образуют с осью абсцисс углы, тангенсами которых будут

$$\frac{\Delta h}{\pm Q} = \pm \frac{j(h_{ moy} + h_a)^2}{2V_0(h_0 + h_a)} = \pm \text{tg } \beta.$$

Целесообразно основные построения (фиг. 37, б) производить на кальке; подложенная под нее фиг. 37, а будет видна через прозрачную бумагу и это позволяет производить вычерчивание очень просто; через точку  $t_m$  проводится прямая, параллельная лучу на



Фиг. 37.

подложенном чертеже, имеющему ту же начальную ординату, что и точка  $t_m$ ; эта прямая проводится под углом  $-\beta$  к оси абсцисс и доводится до пересечения в точке  $K$  с осью ординат. Понятно, что если высота  $KF$  окажется больше, чем отрезок  $\Delta h$ , при котором произведено построение угла  $\beta$  на вспомогательном чертеже, то линия  $t_mKL$  будет не прямой, а ломаной, причем каждый элемент в интервале  $\Delta h$  должен быть параллельным соответствующему лучу на вспомогательном чертеже.

После получения точки  $K$  построение продолжают, нанося теперь отрезки прямых параллельно лучам на вспомогательном чертеже, образующим с осью абсцисс угол  $+\beta$ . Таким способом находят кривую  $KM$ , абсциссы которой определяют расход в воздушном колпаке в зависимости от напора  $h$ .

Искомая точка  $(t+j)_m$  будет находиться на пересечении этой кривой и полученной ранее прямой  $X_{(t+j)}$ .

Дальнейшие построения, базирующиеся на точке  $(t+j)_m$ , выполняют в том же порядке, как и построения для получения этой точки.

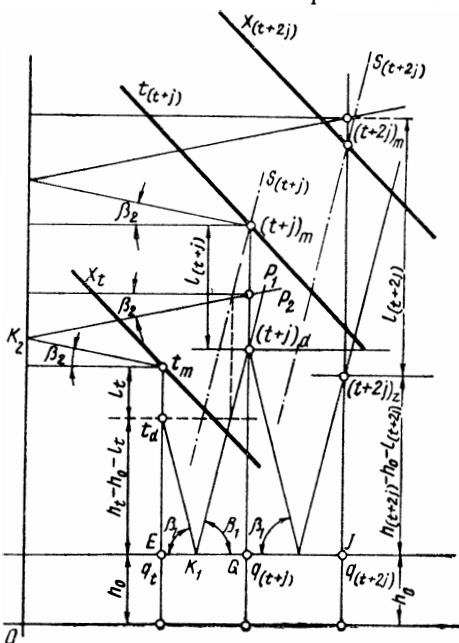
Из опыта применения установлено, что описанное графическое построение не является более точным или более быстро приводящим к результату, чем способ последовательных приближений; но изящность и общность графического способа придадут ему большую привлекательность.

**§ 35. Сложные случаи.** Как уже было отмечено в § 30, величины  $q$  и  $h$  могут меняться в зависимости от времени только в результате следующих процессов: изменения некоторой емкости или возникновения добавочного количества движения; других простых регулирующих устройств, являющихся возбудителями того или иного процесса, помимо рассмотренных в предыдущих параграфах, не существует.

Существуют, однако, сложные устройства, являющиеся возбудителями обоих процессов одновременно; это не вносит, впрочем, ничего нового в построения, так как оказывается возможным учитывать оба процесса раздельно.

Так, в случае с прессом, разобранным в § 32 (фиг. 34), имеет место также резервуар, который попеременно наполняется водой или освобождается от нее. Если высотой резервуара пренебречь нельзя, то надо комбинировать построения, описание которых приведено в §§ 31 и 32; это может быть сделано следующим образом (фиг. 38).

Как и ранее, для того, чтобы найти соответствующую точку режима  $(t+j)_m$ , нужно исходить из режима, известного на момент времени  $t$ , отраженного на графике соответственной точкой  $t_m$ . Но теперь напор  $h_t$  в сечении  $m$  включает также высоту  $l_t$ , обозначенную на фиг. 38 через  $t_d t_m$ , и напор в сечении  $d$  под поршнем равняется  $h_t - h_0 - l_t = E t_d$ . Поэтому прямую  $t_d K_1$  теперь следует проводить через точку  $t_d$  под углом  $-\beta_1$ , таким, что  $\operatorname{tg} \beta_1 = -\frac{2h_0}{gSj}$ . Далее строится прямая  $K_1 P_1$ , образующая угол  $\beta_1$ , такой что  $\operatorname{tg} \beta_1 = +\frac{2h_0}{gSj}$ . Эта последняя прямая определяет зависимость между давлением под поршнем и средним расходом в интервале времени  $j$ .



Фиг. 38.

Но участок резервуара между сечениями  $m$  и  $d$  заполняется водой и соответственно меняется напор в сечении  $m$ . Построения нужно производить поэтому в соответствии с описанием, данным в § 31, т. е. проводя прямую  $t_m K_2$ , для которой  $\operatorname{tg} \beta_2 = -\frac{j}{2S}$ , затем, проводя через точку  $K_2$  прямую  $K_2 P_2$  такую, что  $\operatorname{tg} \beta_2 = +\frac{j}{2S}$ . Ординаты прямой  $K_2 P_2$ , отсчитываемые от горизонтальной линии, проходящей через точку  $i_d$ , определяют величину  $l$  в зависимости от расхода. Так как расход в  $m$  равняется расходу в  $d$ , то, складывая ординаты прямой  $K_1 P_1$  и  $K_2 P_2$ , можно получить прямую  $S_{(t+j)}$ , которую определяет зависимость между полным напором и расходом в сечении  $m$ . Эта прямая пересечет прямую  $X_{(t+j)}$  в искомой точке  $(t+j)_m$ . В пересечении вертикали, проходящей через эту точку с прямой  $K_1 P_1$ , находится соответственная точка  $(t+j)_d$ , которая определяет давление в сечении  $d$ , равное  $G(t+j)_d$ .

Чтобы найти точку  $(t+2j)_m$ , следует принять за исходные точки  $(t+j)_d$  и  $(t+j)_m$  (аналогично тому, как для нахождения точки  $(t+j)$  мы исходили из точек  $t_d$  и  $t_m$ ). В такой последовательности продолжается построение и в дальнейшем с интервалом времени  $j$ .

В случае поршня с пружиной (фиг. 35) также может оказаться что давлением в сечении  $m$ , обусловливаемым столбом воды высотой  $l$ , пренебрегать нельзя, так же как нельзя пренебречь и весом поршня. Это будет тот же случай, как только что описанный, но с добавлением пружины. Построения будут такими же, как описанные, но угол  $\beta_2$  определяется из выражения

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \pm \left( K \frac{j}{2\omega S^2} + \frac{f}{2S} \right),$$

где первый член в правой части обусловлен наличием пружины, а второй соответствует наполнению резервуара на высоту  $l$ .

Также и в случае с воздушным колпаком (фиг. 36) может оказаться, что давлением в сечении  $m$ , обусловленном столбом воды, пренебречь нельзя.

Пусть в начале процесса глубина воды в резервуаре составляет  $l_0$  (фиг. 39, а), а давление воздуха  $h_0$ , что в общей сложности создает давление в сечении  $m$ , равное  $H_0 = l_0 + h_0$ . При построениях необходимо учитывать наряду с изменениями объема воздуха также колебания уровня воды в колпаке.

Для момента времени  $t$ , для которого соответственной точкой будет  $t_m$ , высота  $H_t$  расчленяется на составляющие:  $h_t$ , обусловливаемую наличием воздуха, и  $l_t$ , обусловливаемую присутствием воды. Изменения величины  $l$  лучше всего проследить на отдельном построении (фиг. 39, б).

Пусть на основном графике (фиг. 39, в) точка  $t_m$  представляет собой соответственную точку в сечении  $m$ , а  $t_d$  — соответственную

точку в сечении  $d$  на поверхности воды, и, следовательно,  $\bar{t}_m t_d = l_t$ . На вспомогательной эпюре (фиг. 39, б) также показана точка  $t_d$ , причем здесь ординатой этой точки является  $l_t$ .

Для нахождения соответственных точек в момент времени  $(t+j)$  следует на основной эпюре построить кривые  $t_d K_1$  и  $K_1 P_1$  в соответствии с указаниями, изложенными в § 34, затем на вспомогательном графике построить прямые  $t_d K_2$  и  $K_2 P_2$  так, чтобы было  $\text{tg } \beta_2 = \pm \frac{j}{2S}$ , где  $S$  — площадь сечения резервуара на высоте  $l_t$ .

Произведем сложение ординат линий  $K_1 P_1$  и  $K_2 P_2$ ; в результате получим кривую  $K_3 P_3$  давления в сечении  $m$ , пересекающую характеристическую прямую  $X_{(t+j)}$  трубопровода в искомой точке  $(t+j)_m$ . Проведя через эту точку вертикальную линию, найдем точки  $(t+j)_d$  на пересечении с кривой  $K_1 P_1$  и прямой  $K_2 P_2$ . От этих точек продолжаем построение эпюры в том же порядке, как ранее от точек  $t_m$  и  $t_d$ .

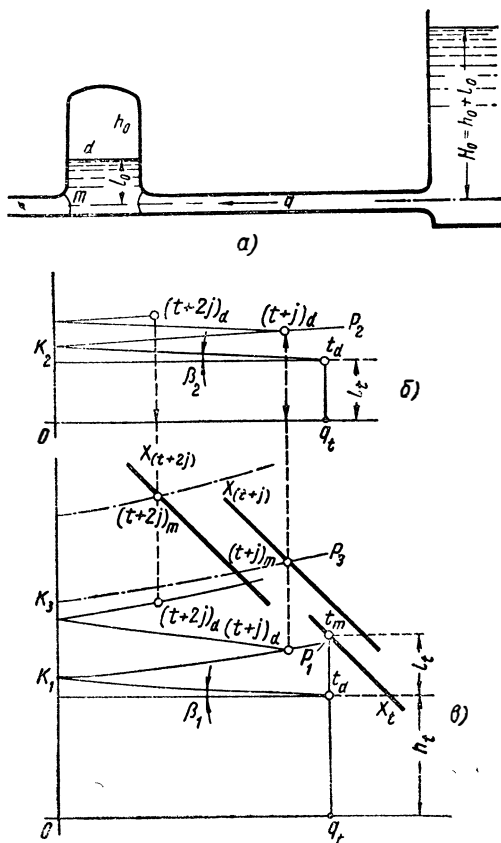
Можно создать также комбинации описанных выше результирующих устройств, но это не дало бы ничего принципиально нового в применении

описанных способов решения. Кроме того, это носило бы чисто абстрактный характер, так как в промышленной практике названные регулирующие устройства встречаются только раздельно.

Возвращаясь к рассмотрению построений в случае с воздушным колпаком (фиг. 37, а и б), отметим, что кривая  $Lt_m$  (построенная ее касательными) имеет по определению следующее уравнение

$$Q = \frac{2}{j} \varphi(h),$$

где  $\varphi(h)$  определяется уравнением (6).



Фиг. 39.





шее количество этих элементов не приводит к каким-либо новшествам или трудностям и обуславливает лишь необходимость большей тщательности при выполнении чертежей.

Своеобразием метода является то, что он базируется исключительно на физических представлениях и требует только внимательности и понимания, без необходимости изучения формальных или абстрактных понятий, для усвоения которых нужны иногда длительные усилия.

Перемещения условных наблюдателей со скоростью волн соответствуют реальным явлениям. В этом кроется причина автоматического устранения возможности ошибок в знаках в определении времени и т. д.; явления, связанные с движением волн, регистрируются на чертеже, и возможность пропуска не существует, так как это не позволило бы продолжать построения.

Наконец само по себе графическое построение представляет исключительно ясную картину явления, так как каждое перемещение наблюдателя (иначе говоря — волны) выражено в виде луча, который отражается, если волна встречает непреодолимое препятствие, и преломляется или смещается, если волна проходит сквозь препятствие. Аналогия с лучом света здесь настолько очевидна, что построения можно производить почти интуитивно, а наглядность устраняет возможные ошибки невнимания.

Подведем итог полученным результатам, являющимся основой данного метода:

при учете упругости воды и материала стенок трубопровода характеристическая кривая ( $hq$ ) трубопровода представляется для наблюдателя, перемещающегося вдоль трубопровода со скоростью  $a$ , прямой, имеющей угловой коэффициент  $+\frac{a}{gS}$  в случае перемещения против течения и  $(-\frac{a}{gS})$  при перемещении по течению и проходящей через точку  $i_E$ , являющуюся соответственной точкой для сечения  $E$  в момент прохождения наблюдателя через это сечение;

распределенные потери напора на трение вдоль трубопровода можно заменить одним или несколькими перепадами напора, сосредоточенными в некоторых сечениях; учитываемые таким образом потери (так же, как реальные потери, сосредоточенные в некотором сечении), определяют вертикальное смещение характеристических кривых, равное  $K \frac{q^2}{2gS^2}$ , где  $K$  — коэффициент, зависящий от рода потерь.

Теперь остается применить эти принципы к примерам, взятым из практики осуществленных промышленных установок.

**§ 37. Ценность и практическая значимость метода.** Нарочито конкретная манера изложения графического метода расчета в первой части настоящей книги дает любому инженеру возможность применять этот метод во всех, в том числе самых сложных случаях, даже не обращаясь к примерам, приводимым во второй части книги. Последние помогут, однако, читателю постепенно приобрести практические навыки в применении метода; внимательно проследив эти примеры, он сможет быстрее усвоить эти навыки и — что еще более существенно — получить реальные представления о физических процессах, происходящих в гидравлических установках.

Действительно, самым большим преимуществом графического метода является возможность точно проследить за изучаемым явлением во всей его полноте, воспроизвести его перед глазами изучающего как бы в процессе замедленного движения, имея возможность в любой момент беспрепятственно приостановить течение процесса и его проанализировать.

Ученый-электрик, член института Андре́ Blondель, правильно сказал об этом методе: «зачем называть его графическим методом? Это нечто гораздо большее; это — экспериментальный метод, в котором воспроизводится с помощью линейки и угольника сам процесс, избавляя от надобности прибегать к мелкомасштабным моделям».

Такое мнение оправдывается и обосновывается тем, что описываемый метод позволяет определить одновременно и давление и расход, а не только давление, как в случае использования аналитических методов расчета распространения волн.

Последние, имея целью исследование давления (или напряжения в электротехнике), привели к открытию правил отражения и прохождения волн давления, несомненно, очень полезных при расчетах, но создающих в результате игнорирования расхода (или напряжения) впечатление об отсутствии связи между давлением и расходом, что подчас приводит инженера к неверным выводам. Нам часто доводилось наблюдать, как лица, применяющие излагаемый графический метод, выражали подлинное и наивное удивление, восстановив в памяти, что волне давления сопутствует волна расхода, что только совокупность «давление—расход» образует волну и что их физически нельзя отделить одно от другого, несмотря на то, что аналитически это удается сделать.

Действительно, не давление или расход, но изменение состояния, определяемого совокупностью значений «давление—расход», происшедшее в некотором месте, перемещается, идентично воспроизводясь в каждом сечении прохождения этого изменения и представляя собой то, что называли волной, и что было бы правильнее называть «фронтом волны». Именно при распространении фронта волны связаны между собой линейной зависимостью две величины, определяющие состояние среды: давление и расход в гидравлике, вольты и амперы в электричестве, крутящий момент и угловая скорость в случае вращающегося вала машины, продольное усилие и скорость продольного смещения поперечного сечения металлического стержня, поперечная сила и скорость поперечного смещения оси натянутой струны (вибрирующая струна). Во всех этих случаях справедлив, как на это уже указывалось в § 9 и будет сказано подробнее в 3-й части книги, один и тот же закон.

Зная этот простой закон, можно, отправляясь от первоначального установившегося режима и мысленно перемещаясь со скоростью волны в среде, где происходит изучаемое явление, представить его графическими построениями, даваемыми как бы в четырех измерениях, поскольку координаты каждой точки дают (в гидравлике) значения давления и расхода, а отметки у точки обозначают время и место, соответствующие названным значениям. Это и превращает чертеж из графика в опыт на модели, как сказал А. Блондель.

Действительно, исполненное построение дает полную картину явления, а в процессе построения представляется возможность его детального анализа, причем не только в какой-нибудь одной точке, но во всей рассматриваемой области. При этой возможности иметь перед глазами изменения давления и расхода в каждой точке, вычерчивающий как бы воплощает явление, исследует его, как и в случае реального опыта. При известном навыке удается иногда предвидеть ход явления, и нередко в процессе построения приходят в голову те или иные изменения в устройствах, способствующие улучшению работы установки или получению экономии. В подтверждение этого можно было бы привести много примеров, когда сотрудники, не будучи ни учеными, ни дипломированными, только в процессе построений получали выводы, какие без этого никогда не пришли бы им в голову, и при том в вопросах такой сложности, какие никогда не удалось бы решить аналитически.

Бесспорно, никакой другой метод расчета не может притязать на такую воспитательную ценность и подобную плодотворность. Но мы настаиваем еще на том, что можно было бы назвать его могуществом.

Простота примененного принципа построений, заключающаяся в параллельности и симметричности прямых, всегда одних и тех же для каждого отдельного участка трубопровода, и возможность

использовать для регулирующих устройств реальные характеристические кривые, получаемые из опыта (без необходимости представлять их алгебраическими уравнениями), позволяет легко получать решения даже в самых сложных случаях. В случае, например, сложных сетей вводится одновременное построение нескольких графиков; любое регулирующее устройство или любой разрыв непрерывности в параметрах могут быть учтены без труда. Возможности применения метода можно считать почти неограниченными, и он позволяет решать задачи, которые иначе остались бы навсегда неразрешенными.

Наконец, ко всем этим преимуществам следует еще добавить быстроту построений, исключение возможности ошибок и числовую точность получаемых результатов.

Поскольку прямые всегда строятся параллельно, лучше всего для этой цели использовать рейсшину и транспортиры, установленные на требуемый угол, что обеспечивает быстрое вычерчивание прямых линий. Следует отметить, что такой транспортир позволяет одновременно чертить прямые под углом  $\alpha$  к вертикали и симметричных им прямых. В более сложном случае, когда требуются прямые различных уклонов, следует иметь транспортиры по числу уклонов; применение этих транспортиров позволяет выполнять чертежи очень быстро.

Невозможность ошибок обуславливается самим способом построений; поскольку вычерчивание производится последовательно, исходя от последней полученной точки, вся предшествующая часть эшюры, как бы она ни была сложна, ничем не затрудняет ее продолжения; если же последние точки окажутся в области построения, выполненного ранее, их достаточно перенести на новый лист, где и продолжать чертеж (например, для периодических процессов надо делать построения на отдельном чертеже для каждой половины периода).

В чем могут заключаться причины ошибок? В непараллельных прямых, но это сразу бросилось бы в глаза; в принятии одной точки за другую, но это немедленно же приведет к неправильной последовательности получаемых режимов, что также сразу бросилось бы в глаза; достаточно сделать самому один чертеж, чтобы быть уверенным в невозможности не заметить ошибку при построениях впоследствии.

Что же касается точности результатов, она превосходит желаемую. Приведем несколько убедительных примеров.

Буссинеск и Сен-Венан<sup>1</sup> аналитически изучали задачу о падении груза на сваю и довели изучение до точного конкретного решения, придя к следующим результатам: при отношении массы копровой бабы к массе сваи, соответственно 1,728; 4,151; 7,35,

<sup>1</sup> Théorie de l'élasticité des corps solides, de Glebsch, traduite par St. Venant. Note de St.-Venant, p. 480 k. (Dunod, 1883).

Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques de Boussinesq, p. 507 et suiv. Gauthier-Villars, 1885.

усилие между подошвой груза и вершиной сваи становится равным нулю после соответственно двух, трех и четырехкратного пробега волн вдоль сваи и обратно; названные ученые пришли к выводу, что на этом удар заканчивается.

Графические построения, выполненные для этих трех случаев в порядке проверки цитированного вывода, были сделаны на чертежах порядка  $250 \text{ мм}^2$ . Режим, получаемый после двух, трех и четырех движений волны в прямом и обратном направлениях, является результатом построения 20, 30 и 40 точек. Очевидно, что малейшая тенденция к накоплению ошибок привела бы к получению для последней точки ординаты в несколько миллиметров вместо ожидаемого нуля, особенно для третьего случая. Но оказалось, что последняя точка во всех случаях легла на ось абсцисс<sup>1</sup>; точность результата была абсолютной. Но к большому удивлению г-на Жугэ, члена института, по инициативе которого была организована эта проверка, эпюра показала, что усилие тотчас же вновь становится положительным и что удар заканчивается позже, когда усилие окончательно приводится к нулю; это находится в противоречии с тем, что определили Буссинеск и Сен-Венан. Продолжив расчет, который был прерван его авторами, не подозревая об этом, слишком рано, Жугэ нашел, что дело обстоит именно так, как показывал графический расчет. Это дало повод для новой проверки в части, касающейся величины скорости погружения вершины сваи в момент окончания удара. Измеренная на эпюре эта скорость оказалась такой же, как полученная расчетом с тремя значащими цифрами. Такая точность действительно неожиданна и свидетельствует о том, что способ построения не таит в себе опасности накопления ошибок или расхождений случайных отклонений в ходе графических построений.

Приведем еще два примера, теперь уже из области электротехники. Аналитический расчет передачи разряда молнии от воздушной линии на подземную потребовал целой недели работы в исследовательском бюро одного крупного электрического общества. Графическое построение на чертеже очень небольших размеров около  $250 \text{ мм}$  привело к тем же результатам, что аналитический расчет (с точностью до трех значащих цифр), заняв у чертежника всего полчаса. Наконец М. Бодиэ в своей докторской диссертации был вынужден затратить несколько месяцев труда, производя аналитические вычисления в очень сложной задаче о распространении волн вдоль воздушной линии передачи, а затем пришел к точно тем же выводам в результате графических построений, потребовавших не более одного дня работы.

Если учесть, что метод в том изложении, какое дано здесь, не требует специальных математических знаний и может быть понят и усвоен любым инженером или способным чертежником или

---

<sup>1</sup> См. чертежи в № 281 за XI—XII 1938 «Mécanique», стр. 227 и 228 и в 3-4 части настоящей книги, § 82.

даже выпускником обычного профессионального училища, знакомым с механикой, то становится очевидным большая помощь, которую этот метод может оказать практикам, которым он дает в руки возможность обследовать работу промышленных предприятий, безопасность которых зависит от решения этих проблем. Наконец, он может быть полезен и ученым, несмотря на то, что последние часто высказывают недовольство его простотой.

Областью промышленности, где возникает наибольшее количество задач, могущих быть решенными рассматриваемым методом, является гидравлика. Гидравлические машины (насосы, турбины) и вся аппаратура, применяемая в установках, где есть перемещение жидкости, непрерывно меняют режим в процессе эксплуатации. Конструкторы оборудования или аппаратуры и эксплуатационники должны быть заинтересованы возможностями, которые дает метод для изучения многочисленных происшествий, о которых они хранят подчас трагические воспоминания, и для исследований колебаний режима, могущих быть, как известно, причиной очень крупных аварий. Приводимые ниже примеры, взятые из этой области, достаточно разнообразны и многочисленны, так что всякий возможный конкретный случай может рассматриваться как их более или менее сложная комбинация. Все они взяты из практики эксплуатации, имея целью оказать помощь инженеру. Их выбор определялся также соображениями получения специальных разъяснений под углом зрения гидравлики; тем не менее мы признаемся, что, будучи поставленными перед разнообразными случаями, мы не нашли пути классификации для изложения примеров в их логической последовательности, которая поэтому не подчинена какой-либо подлинной связи, хотя и не является совсем уже случайной. Во всяком случае мы пытались в меру возможности сгруппировать их по однородности и по степени сложности (от более простых — к более сложным).

Запутанный вид законченных чертежей не должен пугать читателя. Следует иметь в виду, что изготовить чертеж проще, чем затем его прочитать. Действительно, при построении эпюры всегда интересуются только последними полученными точками, являющимися отправными для достижения следующих точек и, таким образом, уже выполненная часть построения совершенно не стесняет расчетчика.

Гораздо сложнее следить глазами за какой-нибудь линией на запутанной сетке законченного построения. Большой интерес представляет возможность целиком проследить за построениями в каждом примере; это несложно благодаря форме таблиц, продемонстрированной в первой части книги. Мы напомним принцип составления этих таблиц. Заголовки колонок при их чтении подряд образуют фразу, поясняющую построение для получения соответственной точки, содержащейся в горизонтальной линии. Эти последние, просматриваемые сверху книзу, соответствуют порядку выполнения построения. Таблица прерывается в стадии,

когда последующее построение не содержит ничего нового и читатель сам может его продолжить.

Мы заканчиваем это вступление ко второй части работы (которая является также заключением первой) следующим важным замечанием. Излагаемый метод так же, как, впрочем, и аналитические методы, не дающие решений в законченном виде, не дает возможности выбрать регулирующие устройства априори, позволяя только произвести расчеты процесса при задании регулируемыми устройствами. Если выбор этих регулирующих устройств (воздушный колпак, резервуар для воздуха, уравнительная башня и т. д.) является целью расчета, следует первоначально задаться их размерами и посмотреть при построении эпюры, насколько они удовлетворяют требованиям. Подчас еще незаконченный чертеж уже выявляет и определяет изменения размеров регулирующих устройств, необходимые для достижения желаемых результатов. Таким образом, определение рассматриваемого регулирующего устройства возможно только путем последовательных попыток, но быстрота выполнения чертежа и его ясность представляют огромные преимущества также при этих вынужденных поисках и говорят в пользу практической ценности графического метода.

### **ПРОСТОЙ ТРУБОПРОВОД, ПРИСОЕДИНЕННЫЙ ОДНИМ КОНЦОМ К РЕЗЕРВАРУ С ПОСТОЯННЫМ УРОВНЕМ, И ИМЕЮЩИЙ НА ДРУГОМ КОНЦЕ ОТВЕРСТИЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ (ВЫКЛЮЧЕНИЕ ТУРБИНЫ)**

#### **А. Мгновенное перекрытие отверстия**

§ 38. Случай, когда потери напора и кинетическая энергия пренебрежимо малы. Схема установки представлена на фиг. 41, а. В резервуар практически бесконечного сечения с постоянным уровнем вмонтирован трубопровод, одинаковых (по длине) сечения и толщины стенок и имеющий на другом конце отверстие переменного сечения. На приведенной фигуре это отверстие предположено в виде инжектора турбины Пельтона, снабженного регулирующей иглой. Начальный установившийся режим определяется открытием выходного сечения  $s_0$ , величина которого зависит от положения иглы. Будем пренебрегать в данном и в последующих примерах потерями напора на трение в трубопроводе по сравнению с разностью уровней  $h_0$ . Равным образом пренебрежем кинетической энергией  $\frac{c_0^2}{2g}$ , обусловливаемой скоростью  $c_0$  воды в трубопроводе. Тогда напор будет равняться  $h_0$  на всей длине трубопровода в случае, если последний горизонтален; в противном случае напор в любом сечении  $m$  будет равен  $h_0 - h_m$ , где  $h_m$  — расстояние до центра сечения  $m$  от горизонтальной оси, проходящей через центр выходного сечения (при этом напор можно определять по избыточному давлению, так как атмосферное давление на поверхности



воды в резервуаре и в выходном отверстии равно и может быть не учитываемо).

В сечении  $s_0$  струи на выходе из отверстия давление будет нулевым и скорость потока  $v_0$  будет такой, что соответствующая кинетическая энергия будет равна энергии напора  $h_0$  в сечении  $A$  перед отверстием; таким образом

$$\frac{v_0^2}{2g} = h_0, \quad (1)$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{2gh_0}, \quad (2)$$

что дает величину расхода при начальном режиме

$$q_0 = s_0 \sqrt{2gh_0}. \quad (3)$$

Если  $h$  является переменной величиной, то функцией, связывающей  $h$  и  $q$  в сечении  $A$ , при величине выходного сечения  $s_0$ , будет

$$q = s_0 \sqrt{2gh}. \quad (4)$$

Это есть уравнение параболы  $\Psi_0$  (фиг. 41, б), точка пересечения которой с горизонтальной линией, имеющей ординатой  $h_0$ , определяет начальный установившийся режим, характеризуемый координатами  $h_0 - q_0$ .

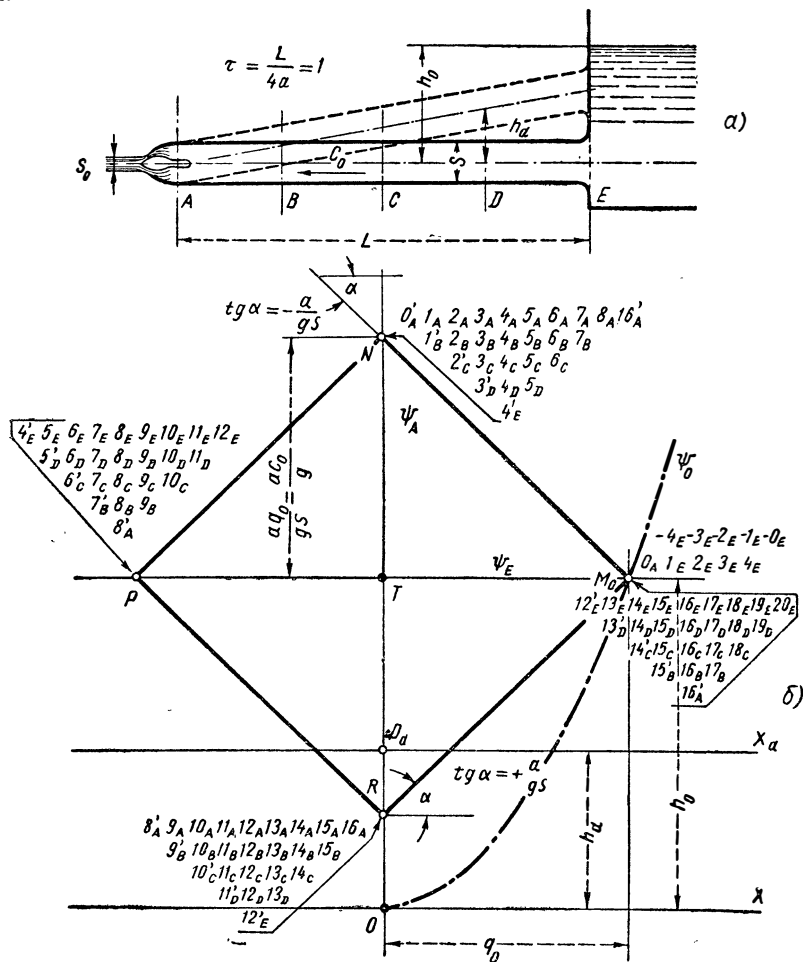
Для наблюдателя, начинающего движение в сечении  $E$  и перемещающегося в направлении сечения  $A$  со скоростью  $a$ , характеристической прямой будет проходящая через точку  $M_0$  прямая  $M_0N$  (фиг. 41, б) с угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{gS}$ . Эта характеристическая прямая отсекает на оси ординат (над горизонталью с ординатой  $h_0$ ) отрезок

$$\overline{TN} = \frac{a}{gS} q^0 = \frac{ac_0}{g}. \quad (5)$$

Представим себе, что как раз в момент прибытия наблюдателя в сечение  $A$  игла мгновенно и полностью перекрывает отверстие. Расход мгновенно делается при этом равным нулю, и соответственная точка мгновенно переместится вдоль прямой  $M_0N$  из  $M_0$  в  $N$ . Примем этот момент за начало отсчета времени; тогда в соответствии с установленными ранее обозначениями соответственная точка  $M_0$  для сечения  $A$  перед закрытием отверстия будет обозначаться как  $O_A$ ; точку  $N$  для того же сечения сразу после закрытия отверстия обозначим через  $O'_A$ .

За единицу измерения времени примем время, потребное для пробега волной четверти длины отрезка  $L$  трубопровода; таким образом  $\tau = \frac{L}{4a} = 1$ .

Так как в сечении  $A$  для момента времени, практически равного нулю, существуют два режима, предположим двух наблюдателей, один из которых начинает движение из сечения  $A$  тотчас после закрытия отверстия, а другой — непосредственно до закрытия.



Фиг. 41.

При перемещении первого наблюдателя от  $A$  до  $E$  соответственные точки будут находиться на прямой с угловым коэффициентом  $\text{tg } \alpha = +\frac{a}{gS}$ , проходящей через  $O'_A$  — пусть прямая  $NP$ . При достижении им в момент времени 4 сечения  $E$  напор должен равняться  $h_0$ , соответствующая постоянному уровню воды в резервуаре.

Соответственная точка должна находиться на пересечении  $P$  прямой  $MP$  с горизонтальной прямой, имеющей ординату  $h_0$ ; это будет точка  $4'_E$ . При последующем перемещении от сечения  $E$  к  $A$  характеристикой будет прямая, проходящая через  $4'_E$ , имеющая угловым коэффициентом  $-\frac{a}{gS}$ , пусть  $PR$ ; поскольку отверстие в  $A$  продолжает быть закрытым, а расход нулевым, соответственная точка в момент времени 8 в сечении  $A$  должна находиться на оси ординат; это будет точка  $8'_A$ . При новом возвращении наблюдателя из  $A$  к  $E$  характеристикой будет прямая, проходящая через точку  $8'_A$ , имеющая угловым коэффициентом  $+\frac{a}{gS}$ , пусть прямая  $RM_0$ . Прибывая в сечении  $E$  в момент времени 12, наблюдатель констатирует напор  $h_0$ , определяемый постоянным уровнем воды в резервуаре. Это даст в  $M_0$  соответственную точку  $12'_E$ . Наконец, возвращаясь из  $E$  в  $A$ , наблюдатель будет находиться на прямой, пусть  $M_0N$  — проходящей через точку  $12'_E$ , имеющей угловым коэффициентом  $-\frac{a}{gS}$ . При его прибытии в  $A$  в момент времени 16 соответственная точка  $16'_A$  совпадает с точкой  $O'_A$ , т. е. начальной точкой перемещения данного наблюдателя. Таким образом цикл замыкается и перманентно возобновляется с длительностью периода в  $\frac{4L}{a} = 16\tau$ .

Для второго наблюдателя, выбывающего из  $A$  по направлению к  $E$  при режиме  $O_A$ , характеристикой будет прямая  $M_0R$ , проходящая через точку  $O_A$  и имеющая угловым коэффициентом  $+\frac{a}{gS}$ .

Напор в сечении  $E$  в момент прибытия туда наблюдателя равен  $h_0$  и соответственной точкой  $4_E$  в момент времени 4 будет, следовательно, точка  $M_0$ . При обратном перемещении наблюдателя в направлении к  $A$  характеристикой будет прямая, проходящая через точку  $4_E$  и имеющая угловым коэффициентом  $(-\frac{a}{gS})$ , т. е. прямая  $M_0N$ . На фиг. 41, б соответственная точка  $8_A$ , определяемая нулевым значением расхода в момент времени 8, совпадает с точкой  $N$ . Затем при перемещении от  $A$  к  $E$  характеристикой будет прямая  $NP$ , а соответственной точкой  $12_E$  в сечении  $E$  в момент времени 12 будет точка  $P$ , определяемая значением напора  $h_0$ ; перемещению из  $E$  в  $A$  соответствует прямая  $PR$ , а точка нулевого расхода  $R$  в сечении  $A$  в момент времени 16 будет соответственной точкой  $16_A$ . На этом цикл построений замыкается.

Поскольку в обоих циклах отмечаются одни и те же сечения и одни и те же моменты времени, легко видеть, что:

в момент времени 4 в сечении  $E$  расход мгновенно меняется от величины  $+q_0$  до величины  $-q_0$ , т. е. поступление воды в трубопровод сменяется истечением из трубопровода в резервуар;

в момент времени 8 в сечении  $A$  давление резко переходит от повышенного на величину  $\overline{TN} = \frac{ac}{g}$  к пониженному на величину

$$\overline{TR} = \frac{ac_0}{g};$$

в момент времени 12 в сечении  $E$  расход резко меняется от  $-q_0$ , соответствующего истечению из трубопровода, до  $+q_0$ , соответствующего наполнению трубопровода;

в момент времени 16 в сечении  $A$  давление резко переходит от пониженного на величину  $\overline{TR}$  до повышенного на величину  $\overline{TN}$ .

Затем цикл воспроизводится до бесконечности. Отмеченные процессы, начинающиеся в момент времени нуль и повторяющие себя через интервалы  $\frac{2L}{a} = 8\tau$ , именуются „полными циклами“.

Чтобы получить дополнительные режимы, разделенные между собой интервалами времени  $\tau$ , надо отправлять наблюдателей из сечения  $E$  с интервалом в  $\tau$  в течение периода времени от  $-3$  до  $+3$ . Для всех этих наблюдателей при выбытии из сечения  $E$  режим здесь определяется начальным установившимся движением, выраженным точкой  $M_0$ , характеристической прямой трубопровода является  $M_0N$ , и при достижении сечения  $A$  отверстие оказывается перекрытым, чем обуславливается положение точки  $N$  на оси ординат и определяются промежуточные режимы соответственными точками  $1_A 2_A 3_A \dots 7_A$ , совпадающими с точками  $O'_A$  и  $8_A$ .

Возвращению этих семи наблюдателей в направлении к  $E$  соответствует прямая  $NP$  и точка  $P$  в сечении  $E$ ; промежуточные режимы  $5_E 6_E 7_E \dots 11_E$  будут совпадать с соответственными точками  $4_E$  и  $12_E$ .

Точно так же возвращению затем в  $A$  будет соответствовать характеристическая прямая  $PR$  и режим в сечении  $A$  будет выражен точкой  $R$ , т. е. соответственные точки для промежуточных режимов  $9_A 10_A 11_A \dots 15_A$  будут совпадать с граничными соответственными точками  $8'_A$  и  $16_A$ . Наконец, возвращаясь снова в сечение  $E$ , наблюдатели отметят соответственные точки  $13_E 14_E 15_E \dots 19_E$ , совпадающими с точкой  $M_0$  и граничными точками  $12'_E$  и  $20_E$ ; на этом цикл завершается.

Если мы хотим иметь также промежуточные режимы в сечениях трубопровода  $B, C, D$ , находящихся на равных взаимных расстояниях  $\frac{L}{4}$ , то надо определить точки пересечения характеристических прямых наблюдателей, отправляющихся один из сечения  $A$  и второй из сечения  $E$  в такие моменты времени, чтобы встретиться в названных выше сечениях.

Например, наблюдатель, отбывающий из сечения  $A$  в момент времени 2 (точка  $2_A$ ), перемещается вдоль характеристической прямой  $NP$ . В момент времени 3 он встретит в сечении  $B$  наблюдателя, вышедшего из сечения  $E$  в момент времени 0 и для кото-

рого характеристической прямой является  $M_0N$ . Пересечением этих двух прямых в точке  $N$  определяется промежуточный режим  $3_B$ . Тот же наблюдатель встречает в сечении  $C$  в момент времени 4 наблюдателя, выбывшего из сечения  $E$  в момент времени 2. Для последнего характеристикой будет прямая также  $M_0N$  и, следовательно, точка  $N$  будет определять также промежуточный режим  $4_C$ . Наконец, в сечении  $D$  в момент времени 5 он встретит наблюдателя, выбывшего в момент времени 4 из сечения  $E$  и следующего вдоль характеристической прямой также  $M_0N$ , в силу чего точка  $N$  определяет также промежуточный режим  $5_D$ . В качестве упражнения читатель может найти аналогичным образом другие промежуточные режимы, соответственные точки которых нанесены на фиг. 41.

Примечание. При горизонтальном положении трубопровода давление (избыточное) в любом сечении дается отсчитываемыми от оси абсцисс  $OX$  ординатами ломаной линии  $M_0NPR$ . При наклонном положении, как например в случае, изображенном пунктиром на фигуре 41,  $a$ , построение остается тем же самым, но для сечения, например  $D$ , положение которого характеризуется величиной  $h_d$ , давление (избыточное) будет определяться ординатами той же ломаной линии, но отсчитываемыми от горизонтальной линии  $O_dX_d$ , расположенной на расстоянии  $h_d$  от оси абсцисс. Таким образом, в этом случае давление в сечении  $D$  в момент времени 11, 12 и 13, определяемое точкой  $R$ , было бы отрицательным, и напор, равным по величине  $O_dR$ , тогда как в сечении  $A$  в момент времени от  $8'$  до 16 давление, определяемое той же точкой  $R$ , было бы положительным, причем его величина определялась бы исходя из напора, равного  $\overline{OR}$ .

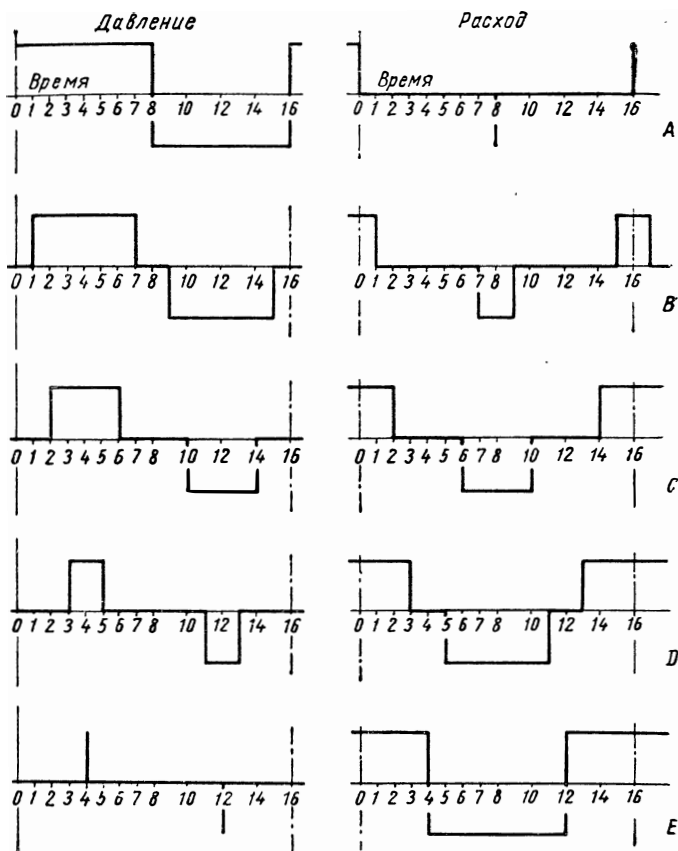
Следовательно, различия в профиле трубопровода не оказывают влияния на явление распространения волн, при одном, однако, условии, чтобы отрицательное давление, могущее появиться в результате расположения трубопровода определенным образом по высоте, численно не превышало атмосферное давление; противное означало бы абсолютный вакуум, невозможный в жидком теле.

Практически растворенный в воде воздух переходит в газообразное состояние уже при вакууме, равном 8,50 м. вод. столба, образуя разрывы сплошности, а при вакууме, достигающем 10,33 м, столб жидкости разрывается полностью.

Если положение трубопровода повышается в направлении к резервуару и в некотором сечении возникает такой абсолютный вакуум, столб жидкости, начиная от этого сечения, дробится, и продолжение расчета становится невозможным, так как в данном случае речь должна идти уже не об однородной жидкости, а о диспергированной или, возможно, переходящей в эмульсию.

На фиг. 41, б получены соответственные точки режимов в сечениях  $A, B, C, D, E$  для периода времени от 0 до 16. Можно со-

ставить себе очень ясное представление о процессе, используя эти точки для построений графиков давления или расхода в зависимости от времени или графиков тех же величин в зависимости от положения сечения (фиг. 42 и 43).



Фиг. 42.

Из рассмотрения графиков, дающих изменения величин во времени, следует:

В сечении *A* в момент времени 0 скачком возникает повышение давления, которое затем остается неизменным до момента времени 8, когда оно скачком же понижается на величину, равную удвоенному повышению, и потом снова остается неизменным до момента времени 16; после этого явление возобновляется. Расход же в момент времени 0 снижается также скачком до нуля и продолжает оставаться нулевым, восстанавливаясь как отрицательный в момент времени 8 и как положительный в момент времени 16; однако эти последние режимы являются фиктивными, так как их продолжительность равна нулю.

В сечении  $B$  в момент времени 1 повышение давления оказывается равным тому, которое возникло в сечении  $A$ ; это повышение остается неизменным до момента времени 7, исчезает в интервале времени от момента 7 до момента 9, затем сменяется понижением давления скачком в момент 9 и потом сохраняет свою величину до момента времени 15 с тем, чтобы стать равным нулю в интервале времени от 15 до 17, после чего цикл возобновляется. Расход становится равным нулю в момент времени 1; затем становится отрицательным в интервале времени от 7 до 9 и положительным в интервале от 15 до 17.

В сечениях  $C$ ,  $D$ ,  $E$  длительность существования повышенного давления сокращается до периода между моментами времени 2 до 6 в  $C$  до периода между 3 до 5 в  $D$ , а периоды понижения давления сокращаются от интервала времени 10—14 в сечении  $C$  до интервала 11—13 в сечении  $D$ , в сечении же  $E$  продолжительность повышения или понижения давления становится равной нулю (в моменты времени 4 и 12); продолжительность существования отрицательного расхода, наоборот, увеличивается от интервала времени 6—10 в  $C$  до интервала 5—11 в  $D$  и интервала 4—12 в  $E$ , и продолжительность существования положительного расхода возрастает от интервала 14—18 в  $C$  до 13—19 в  $D$  и 12—20 в  $E$ .

Поэтому в сечении  $E$  у резервуара можно констатировать попеременные отток воды из трубопровода или поступление в трубопровод по периодам времени  $\frac{2L}{a} = 8\tau$ ; в то же время расход на противоположном конце трубопровода в сечении  $A$  является нулевым. Таким образом, трубопровод работает как легкое, которое то раздувается в результате повышения давления, всасывая воду из резервуара, то сжимается в период понижения давления, возвращая воду в резервуар. Период этого „дыхания“ равен  $16\tau = \frac{4L}{a}$ .

Из графиков распределения давления и расхода вдоль трубопровода для моментов времени 2, 4, 6... 16 $\tau$  следует (фиг. 43):

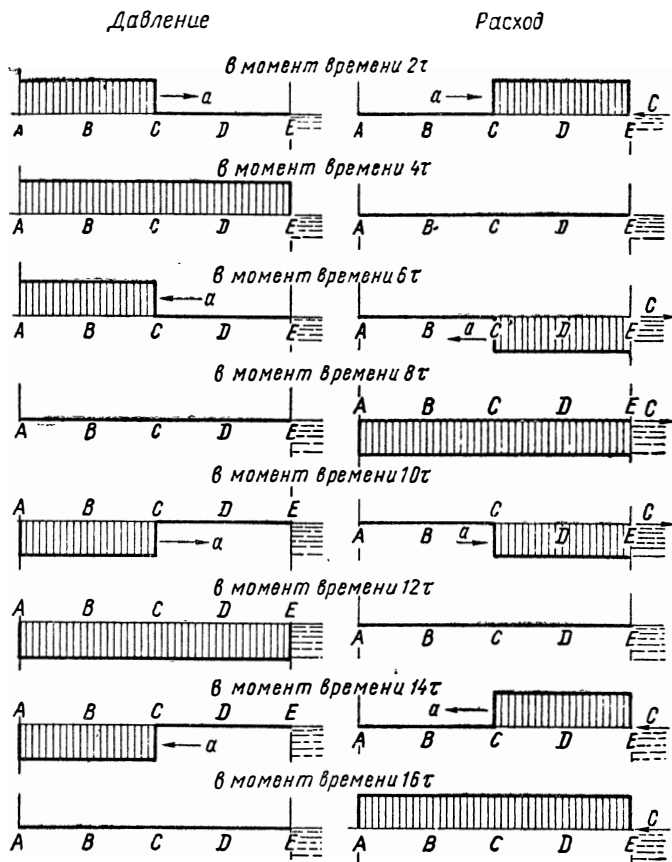
в момент времени  $2\tau$  вдоль отрезка  $AC$  имеет место повышенное давление и находящийся в  $C$  лоб волны продвигается со скоростью  $a$  от  $C$  к  $E$ ; на участке от  $A$  до  $C$  расход равняется нулю, но он имеет место в направлении от  $C$  до  $E$ ; фронт нулевого расхода распространяется от  $C$  к  $E$  со скоростью  $a$ ;

в момент времени  $4\tau$  повышенное давление распространяется на все протяжении от  $A$  до  $E$  и расход всюду равен нулю;

в момент времени  $6\tau$  повышение давления распределяется так же, как и в момент времени  $2\tau$ , но лоб волны теперь движется от  $C$  к  $A$ ; вдоль всего отрезка  $CE$  течение имеет направление, противоположное основному, и лоб волны расхода перемещается от  $C$  к  $A$  со скоростью  $a$ ;

в момент времени  $8\tau$  давление всюду равняется первоначальному и на всей длине трубопровода течение противоположно первоначальному;

в момент времени  $10\tau$  понижение давления, равное по величине предшествующему повышению, имеет место на участке от  $A$  до  $C$ , и его фронт продвигается в направлении  $E$ ; на участке от



Фиг. 45.

А до С расход равняется нулю, а на участке от С до Е течение продолжает быть противоположным основному направлению; лоб волны расхода продвигается от С по направлению к Е со скоростью  $a$ ;

в момент времени  $12\tau$  устанавливается пониженное давление и нулевой расход имеет место вдоль всего трубопровода;

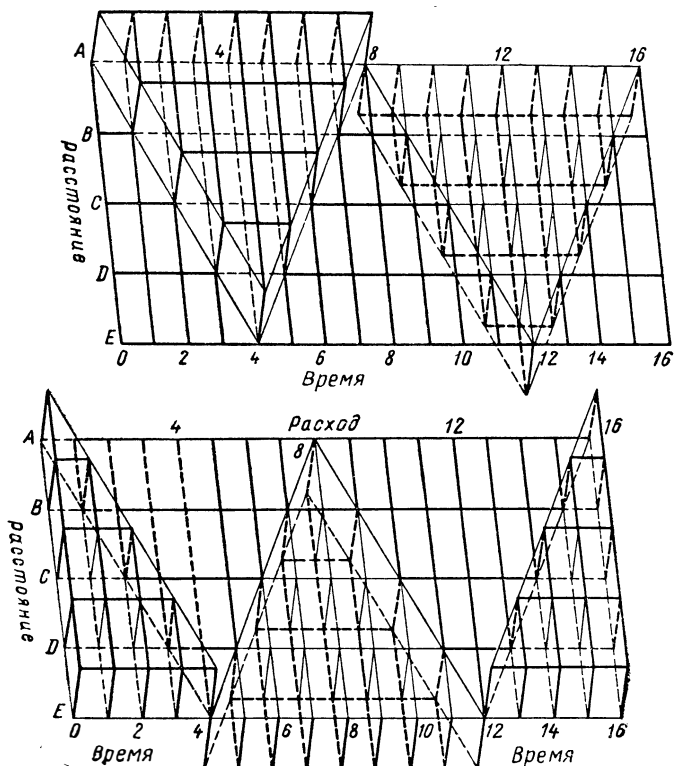
в момент времени  $14\tau$  пониженное давление существует на участке от С до А, распространяясь в направлении к А; течение имеет место в том же направлении на участке  $E-C$ ;



в момент времени 16т давление и начальный расход восстают вдоль всего трубопровода, но так как этот расход в сечении А приводится к нулю, то явление возобновляется.

Строя на одной и той же фигуре графики повышения (или понижения) давления в зависимости одновременно от положения

*Давление*



Фиг. 44.

сечения и от времени в форме перспективного чертежа, получим в объемном изображении весь процесс изменений давления (фиг. 44) или расхода.

§ 39. **Случай, когда нельзя пренебрегать изменениями кинетической энергии.** В этом случае начальный напор в трубопроводе при начальной скорости течения в нем  $c_0$  будет равен не  $h_0$ , а  $H_0 = h_0 - \frac{c_0^2}{2g}$ , а напор при некоторой скорости течения  $c$  будет равен

$$h = h_0 - \frac{c^2}{2g}, \quad (1)$$



Начальный установившийся режим определяется точкой  $M_0$  пересечения кривых  $\Psi_0$  и  $\Psi_E$ . Через эту точку должна проходить теперь характеристическая прямая, отмечаемая наблюдателями, выбывающими из сечения  $E$  в интервале между моментами времени от  $-4$  до  $+4$  и прибывающими в сечении  $A$  в интервале между моментами времени  $0$  и  $8$ .

Если по-прежнему предполагается, что имеет место полное и мгновенное перекрытие отверстия в  $A$  в момент времени  $0$ , то в пересечении  $N$ , названной прямой с осью ординат, будут находиться соответственные точки, начиная точкой  $O'_A$  и кончая  $8_A$ , в точке  $P$  на горизонтальной линии  $\Psi_E$  будут находиться соответственные точки от  $4'_E$  до  $12'_E$  и, наконец, в точке  $R$ , на оси ординат (при нулевом расходе), будут находиться соответственные точки от  $8'_A$  до  $16'_A$ . Соответственные же точки для сечения  $E$  в интервале времени от  $12$  до  $20$  будут совпадать с точкой  $s$  кривой  $\Psi_E$ . Эта точка не совпадает с начальным режимом  $M_0$ , как это было в случае построений на фиг. 41, *в* и определяет расход, меньший, чем при начальном режиме.

Дальнейшие задаваемые наблюдателям перемещения, начинающиеся из точки  $S$ , будут протекать уже по новому циклу, давая в сечении  $A$  точку  $16'_A$  на оси ординат, в сечении  $E$  точку  $20'_E$  на горизонтали  $\Psi_E$ , в сечении  $A$  точку  $24'_A$  на оси ординат и, наконец, в сечении  $E$  точку  $28'_E$  на параболе  $\Psi_E$ , соответствующую еще меньшему расходу, чем расход, определенный точкой  $12'_E$ .

Продолжая построения, легко убедиться, что последовательные циклы образуют спираль, сходящуюся к точке  $T$ ; колебания напора и расхода со временем затухают. Это объясняется тем, что кинетическая энергия  $\frac{c^2}{2g}$ , не являющаяся потерей ни в момент ее образования в сечении  $E$  при втекании воды в трубопровод, ни при перемене направления течения в трубопроводе, т. е. втекании воды в резервуар, целиком переходит в тепло. Таким образом эта энергия отнимается в каждом цикле от энергии упругих колебаний, истощая последнюю.

Если представить себе в сечении  $E$  безукоризненный диффузорный конус, который полностью трансформировал бы кинетическую энергию  $\frac{c^2}{2g}$  в напор, постепенно погашая скорость  $c$  до нуля, зависимость  $h$  и  $q$  в сечении  $E$  выразилась бы в виде параболы  $\Psi'_E$ , симметричной параболе  $\Psi_E$  (фиг. 45). В этом случае первый цикл завершился бы точками  $P'$  на  $\Psi'_E$ ,  $R'$  — на оси и начальной точкой  $M_0$  — на  $\Psi_E$ ; потерь энергии не было бы, и каждый цикл повторял бы ему предшествующий.

Отметим еще, что повышение давления против существовавшей в трубопроводе начальной его величины, возникающее в

момент закрытия сечения  $A$  сначала в этом сечении, а затем вдоль всего трубопровода до сечения  $E$  (в момент времени 4), равняется, как и в предыдущем случае  $\frac{ac_0}{g}$ , но превышение давления над статическим, соответствующим закрытому отверстию и равному  $h_0$ , составляет только

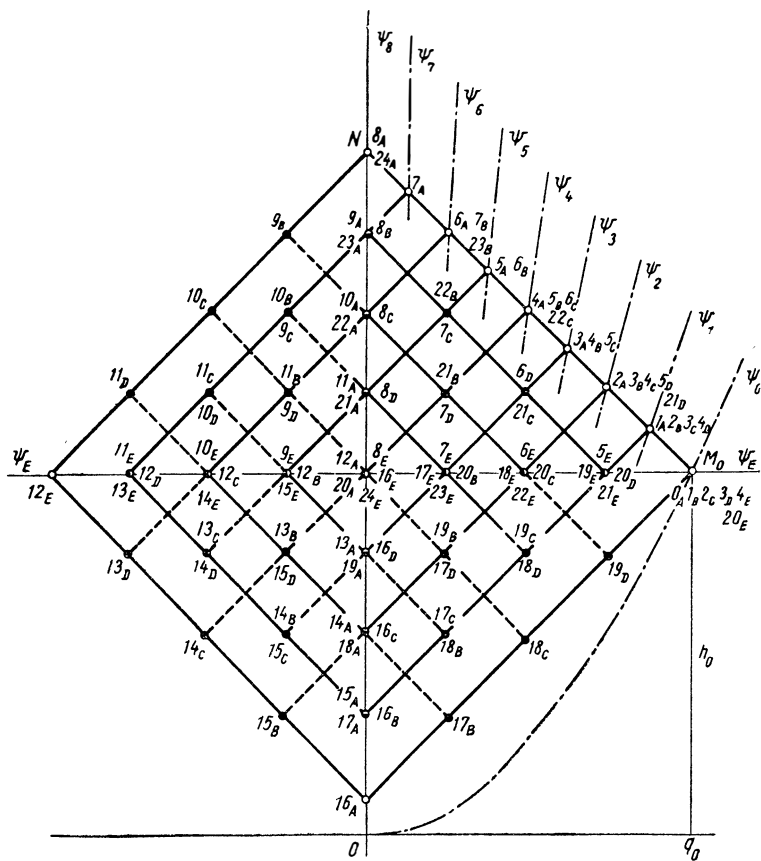
$$\frac{ac_0}{g} - \frac{c_0^2}{2g}.$$

## В. Линейное перекрытие расхода, происходящее в течение времени $\frac{2L}{a}$

§ 40. Решение задачи и сопоставление с предыдущим случаем. Пусть установка остается такой же, как на фиг. 41,  $a$ , но вместо того, чтобы быть перекрытым мгновенно в момент времени нуль, отверстие в сечении  $A$  перекрывается постепенно, достигая полного закрытия в момент времени  $8\tau = \frac{2L}{a}$ ; предположим, что процесс закрытия протекает таким образом, что в интервале времени от нуля до  $8\tau$  значение расхода в трубопроводе уменьшается по линейному закону.

Начальный режим  $h_0q_0$  определяется по-прежнему точкой  $M_0$  (фиг. 46) пересечения параболы  $\Psi_0$  (соответствующей начальному размеру  $s_0$  отверстия в сечении  $A$ ) с горизонталью  $\Psi_E$ , имеющей ординату  $h_0$ . Для наблюдателей, отбывающих из сечения  $E$  в интервале времени от  $-4\tau$  до  $+4\tau$ , режим в этом сечении определяется значениями  $h_0, q_0$ . Следовательно, характеристической для этих наблюдателей будет прямая, проходящая через точку  $M_0$  и имеющая угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{gS}$ ; пусть на фиг. 46 это будет прямая  $M_0N$ . Начиная с момента времени 0, когда точка отмечается наблюдателем, выбывающим из сечения  $E$  в момент времени  $(-4)$  до момента времени 8, в который соответственная точка отмечается наблюдателем, выбывающим из сечения  $E$  в момент времени  $+4$ , все соответственные точки для сечения  $A$  находятся на этой прямой, в точках  $O_A 1_A 2_A 3_A \dots 7_A 8_A$  ее пересечений с параболами  $\Psi_0 \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \dots \Psi_7 \Psi_8$ , соответствующими последовательности  $s_0 s_1 s_2 \dots s_7 s_8$  открытий выходного отверстия в  $A$ ; отметим при этом, что сечение  $s_8$  является нулевым и поэтому  $\Psi_8$  является осью ординат. Поскольку далее промежуточные сечения между  $s_0$  и  $s_8$  должны удовлетворять предположению о линейном изменении расхода во времени, то точки от  $1_A$  до  $7_A$  должны разделять отрезок  $M_0N$  на 8 равных частей. Это позволяет определить параболы от  $\Psi_1$  до  $\Psi_7$  и, соответственно, значения сечения отверстия (выходного) от  $s_1$  до  $s_7$  (при помощи уравнения  $q = s \sqrt{2gh}$ ).

Очевидно, что максимальное повышение давления, определяемое точкой  $N$ , равно, как и ранее,  $\frac{ac_0}{g}$  и имеет место в сечении  $A$  в момент времени  $8\tau$ . Но на этот раз оно не распространяется без изменения до сечения  $E$ ; для того, чтобы в этом убедиться, найдем режимы для сечений в  $ABCDE$ , производя построения в предположении перемещения восьми наблюдателей, начинающих движение из сечения  $A$  в направлении к  $E$  в моменты времени



Фиг. 46.

1, 2, 3...7, 8. Соответствующие характеристики пройдут через точки  $1_A 2_A 3_A \dots 7_A 8_A$ , имея все угловым коэффициентом  $+\frac{a}{gS}$ . Когда наблюдатели прибывают в сечение  $E$  в моменты времени 5, 6, 7...11, 12, соответственные точки  $5_E 6_E 7_E \dots 11_E 12_E$  определяются на пересечении этих характеристик с горизонталью  $\Psi_E$ . При обратном перемещении наблюдателей в направлении к сечению  $A$  характеристические прямые пройдут через названные со-

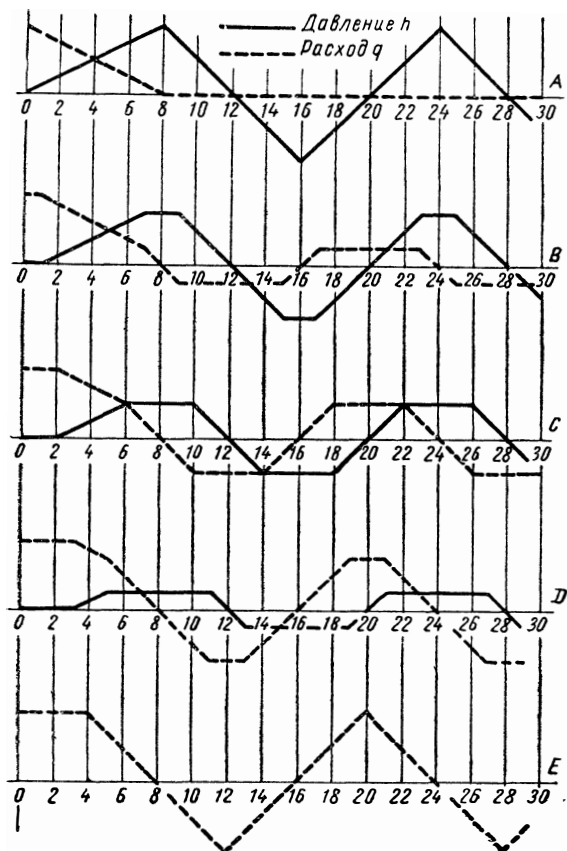
ответственные точки, имея угловым коэффициентом  $\left(-\frac{a}{gS}\right)$  и определяя в пересечении с осью ординат (при расходе нуль) соответственные точки  $9_A 10_A 11_A \dots 15_A 16_A$  для сечения  $A$  и моментов времени  $9, 10, 11 \dots 15, 16$ . При последующем перемещении из сечения  $A$  к сечению  $E$  характеристические прямые проходят через эти последние точки, вновь имея угловым коэффициентом  $+\frac{a}{gS}$  и определяя в пересечении с горизонталью  $\Psi_E$  соответственные точки  $13_E 14_E 15_E \dots 18_E 19_E$ . При новом обратном перемещении из сечения  $E$  к сечению  $A$  характеристические прямые с угловым коэффициентом  $\left(-\frac{a}{gS}\right)$  определяют в пересечении с осью ординат соответственные точки  $17_A 18_A 19_A \dots 22_A 23_A$ . Наконец, еще одно перемещение в направлении сечения  $E$  определяет соответственные точки  $21_E 22_E 23_E \dots$ , совпадающие с точками  $5_E 6_E 7_E \dots$ , полученными шестнадцатью единицами времени ранее. На этом завершается постоянно вновь возобновляющийся в дальнейшем цикл однотипных перемещений.

Определив режимы в сечениях  $A$  и  $E$ , можно найти режимы в сечениях  $B, C, D$ , не добавляя новых построений, а только расширявая точки пересечения уже построенных прямых с учетом перемещений наблюдателей, встречающихся в этих точках пересечения. Например, наблюдатель, отбывающий из сечения  $A$  в момент времени  $8$ , для которого характеристической прямой будет  $8_A 12_A$ , находит на этой прямой точку на пересечении с прямой  $6_E 10_A$  (продолженной), справедливой для наблюдателя, вышедшего из сечения  $E$  в момент времени  $6$ . Эта точка будет, следовательно, соответственной точкой  $9_B$  для сечения  $B$  в момент времени  $9$ . Затем он находит на пересечении с прямой  $8_E 12_A$  (сведенной к одной точке, но тем не менее существующей) с угловым коэффициентом  $\left(-\frac{a}{gS}\right)$  точку, справедливую для наблюдателя, для которого отправным сечением в момент времени  $8$  было сечение  $E$ ; таким образом, это будет соответственная точка  $10_C$  для сечения  $C$  в момент времени  $10$ . И, наконец, на пересечении с прямой  $10_E 14_A$  (продолженной), справедливой для наблюдателя, вышедшего из сечения  $E$  в момент времени  $10$ , определяется соответственная точка  $11_D$ . Дальнейшие примеры определения режимов в промежуточных точках не нужны, так как читатель затратит меньше времени на нахождение этих режимов на чертеже, чем на чтение нашего текста.

Зная режимы для ряда сечений между  $A$  и  $E$  и для ряда моментов времени, разделенных интервалом  $\tau$ , можно представить эти значения в виде графиков, что позволит лучше исследовать процесс и сопоставить его с предыдущим.

Отметим сначала выводы, какие можно получить из рассмотрения графиков (фиг. 47) изменений режима во времени в сечениях  $A, B, C, D$  и  $E$ .

В сечении  $A$  расход, начиная с момента времени нуль до момента времени  $8\tau$ , уменьшается по линейному закону, а с момента времени  $8$  равняется нулю (пунктирная линия). Превышение давления над первоначальным увеличивается линейно от нуля до значения  $+\frac{ac_0}{g}$ , достигаемого в момент времени  $8$  (сплошная



Фиг. 47.

линия); затем также линейно давление  $\frac{ac_0}{g}$  уменьшается до пониженного на величину  $(-\frac{ac_0}{g})$  в момент времени 16 с тем, чтобы снова линейно возрас ли до величины, имевшей место в момент 8. После этого повторяется цикл изменений давления с периодом  $16\tau = \frac{4L}{a}$ ; периодичность процесса имеет место, таким образом, только начиная с момента времени 8, т. е. момента закрытия отверстия в  $A$ .

В сечениях  $B$ ,  $C$  и  $D$  кривая изменений давления превращается из трехугольной, какой она была в сечении  $A$ , в трапецевидную.

Периодичность соответственно начинается в моменты времени 7, 6, 5, т. е. тем ранее, чем отдаленнее рассматриваемое сечение от сечения  $A$ . Это находит себе объяснение в интерференции волн, зарождающихся в сечении  $A$ , и волн, отраженных из сечения  $E$ , начиная с момента времени 4. Кривая расходов также трапециевидная и ее периодичность соответствует периодичности кривой давления. Интересным следствием интерференции является то, что расход, пришедший к нулю в сечении  $A$  в момент времени 8, делается равным нулю в этот момент также на всем протяжении трубопровода. Однако уменьшение расхода начинается в сечении  $B$  в момент времени 1, в сечении  $C$  в момент 2 и в сечении  $D$  в момент времени 3; расход, уменьшаясь, достигает значения, остающегося затем максимальным при периодических изменениях, в сечении  $B$  в момент времени 7, в сечении  $C$  в момент 6 и в сечении  $D$  в момент 5; максимумы давления в сечении уменьшаются по величине при переходе от сечения  $B$  к сечению  $D$ , в то время как максимумы расхода возрастают, причем линейно, в зависимости от расстояния, как это видно при рассмотрении кривых на фиг. 48.

В сечении  $E$  повышение давления не имеет места; расход же линейно уменьшается, начиная с момента времени 4, и достигает минимума, равного предшествующему повышенному его значению, в момент времени 12, после чего вновь возрастает, достигая прежнего повышенного значения в момент времени 20; после этого цикл изменений расхода возобновляется.

На фиг. 48 даны графики распределения расхода и напора по длине трубопровода для моментов времени 2, 4, 6, 8, ..., 20, 22; значения расхода показаны пунктирными линиями, а значения напора — сплошными.

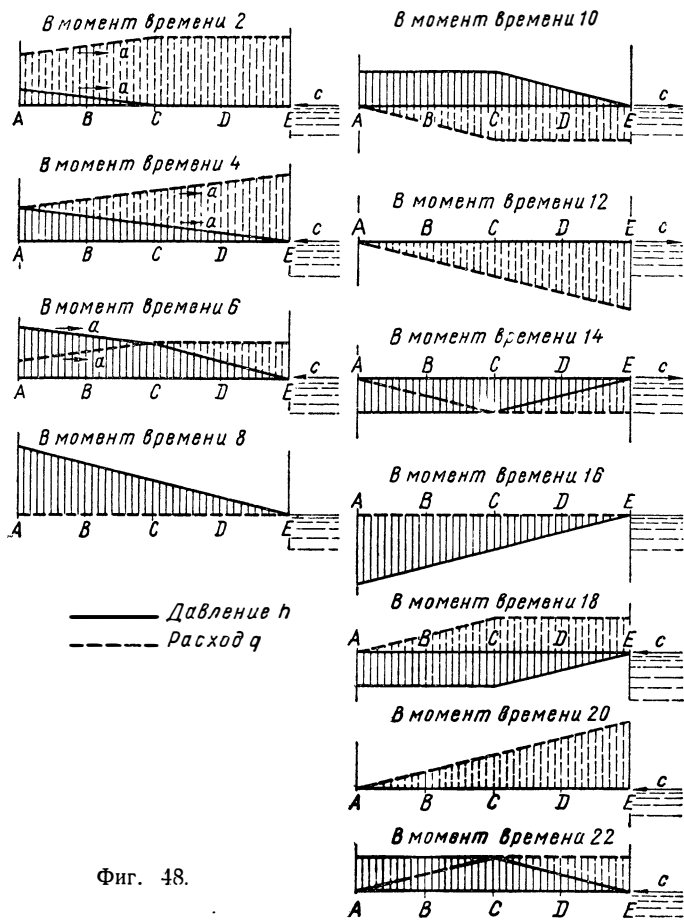
Из графиков видно, как фронт волны перемещается вдоль трубопровода до момента времени  $8\tau$ , причем происходит возрастание давления и уменьшение расхода; начиная же с момента времени 8 и в дальнейшем графики напора и расхода поворачиваются относительно оси абсцисс, имея циклом повторения режима интервал времени  $16\tau$ .

Действительно, повышение напора, достигающее максимального значения  $\frac{ac_0}{g}$  в сечении  $A$  в момент времени 8, оказывается линейно распределенным между сечениями  $A$  и  $E$ , в то время как расход в это время всюду равен нулю. В момент времени 16 понижение давления, достигающее в сечении  $A$  значения  $\left(-\frac{ac_0}{g}\right)$  так же линейно распределено от сечения  $A$  к  $E$ , а расход вдоль трубопровода равен нулю; в момент же времени 24 график будет таким же, что и для момента времени 8, после чего цикл возобновляется.

В момент времени 12 вдоль трубопровода давление равно первоначальному, а расход линейно возрастает от сечения  $A$  к  $E$ ,



причем течение также направлено от сечения  $A$  к  $E$ . В момент времени 20 расход в сечении  $E$  возвращается к своему первоначальному значению, так же и направление течения в трубопроводе совпадает с первоначальным; в то же время расход уменьшается по длине трубопровода линейно, равняясь нулю в сечении  $A$ .



Фиг. 48.

В промежуточные моменты времени 10, 14, 18, 22 графики давления и расхода срезаны горизонтальной линией на длине, соответствующей половине длины трубопровода.

Таким образом, линейное (по значениям расхода) перекрытие отверстия в конце трубопровода, происходящее в течение времени  $\frac{2L}{a}$ , вызывает в сечении  $A$  повышение давления в той же мере, как и мгновенное закрытие, но это повышение давления распределяется по длине трубопровода линейно вместо того, чтобы быть переданным полностью во все сечения; в этом заключается смысл постепенного перекрытия.

Откладывая значения напора, времени и расстояний по длине трубопровода вдоль трех осей на одном листе, можно получить перспективный чертеж, показанный на фиг. 49, дающий наглядное представление процесса изменений давления во времени и в пространстве. Фигура 49 построена таким способом, что дает значения расхода в зависимости от времени и положения сечения трубопровода.

**Примечание.** Из рассмотрения двух изученных выше случаев следует, что всегда в условиях, когда перекрытие происходит в течение времени  $\leq \frac{2L}{\tau}$  повышение давления в сечении  $A$  будет одним и тем же, равным по величине  $\frac{ac_0}{g}$ . Это повышение давления часто называют в литературе „гидравлическим ударом Алиеви“.

### С. Перекрытие, длительность которого превышает время $\frac{2L}{a}$

Рассмотрим в качестве примера случай, когда время перекрытия равняется утроенному времени пробега волной трубопровода от сечения  $A$  до  $E$  и обратно, т. е.  $\frac{6L}{a}$ . Очевидно, что повышение давления зависит не только от продолжительности отрезка времени, затрачиваемого на полное закрытие, но и от того, как происходит закрытие в течение этого отрезка времени. Мы ознакомимся с тремя различными процессами закрытия, что даст возможность сделать интересные сравнения.

**§ 41. Случай, когда размеры выходного отверстия изменяются линейно в зависимости от времени.** Построения для случая такого изменения выходного отверстия выполнены на фиг. 50 жирными линиями; в качестве единицы времени принято  $\tau = \frac{L}{a}$ ; закрытие отверстия происходит, следовательно, в течение отрезка времени  $6\tau$ .

Как было указано в § 39, зависимость между  $h$  и  $q$  в сечении  $A$  имеет вид

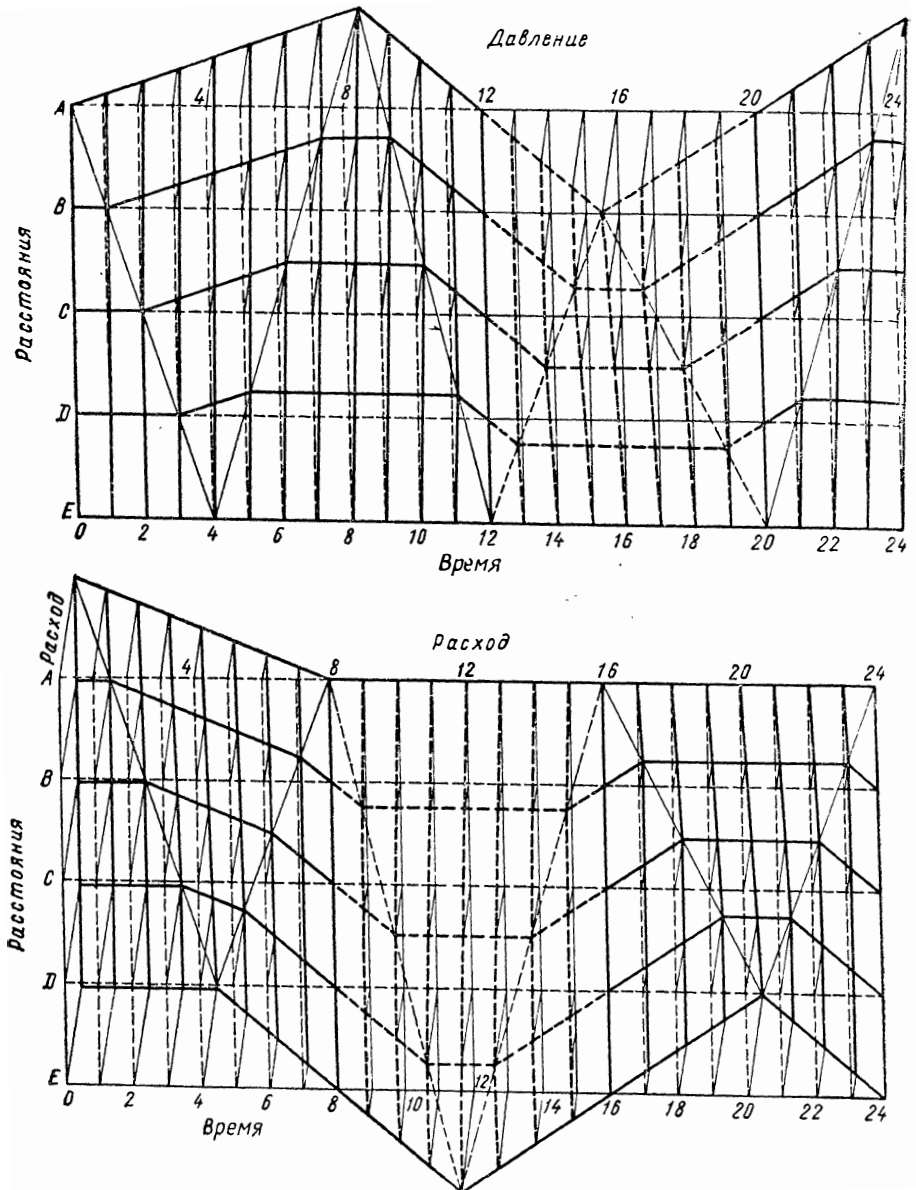
$$q = s \sqrt{2gh}, \quad (1)$$

где  $s$  — сечение потока в том месте, где струйки параллельны между собой; это по существу и является выходным сечением. Начальную величину сечения обозначим через  $s_0$ , тогда при линейном изменении во времени

$$s = s_0 \left(1 - \frac{t}{6\tau}\right). \quad (2)$$

Как и прежде, начальный режим определяется точкой  $M_0$  пересечения параболы  $\Psi_0$ , соответствующей уравнению  $q = s_0 \sqrt{2gh}$

и горизонтальной линии с ординатой  $h_0$ . Отметим, в соответствии с уравнением (1), что в случае  $h = \text{const}$  величина  $q$  пропорциональна величине сечения  $s$ . Отсюда следует, что точки пересечения парабол  $\Psi$  с горизонтальной прямой  $h = h_0$  опреде-



Фиг. 49.

ляют на оси абсцисс отрезки, пропорциональные величинам  $s$ ; таким образом, точке  $s'_1$  соответствует сечение  $s_1 = \frac{5}{6} s_0$ , расход  $\frac{5}{6} q_0$  и парабола  $\Psi'_1$ ; для момента времени  $\tau$ ; точке  $s'_2$  соответствует сечение  $s_2 = \frac{4}{6} s_0$ , расход  $\frac{4}{6} q_0$  и парабола  $\Psi'_2$  для момента времени  $2\tau$ . В момент времени  $6$  отверстие закрыто и зависимость  $\Psi'_6$  между  $h$  и  $q$  представляется осью ординат.

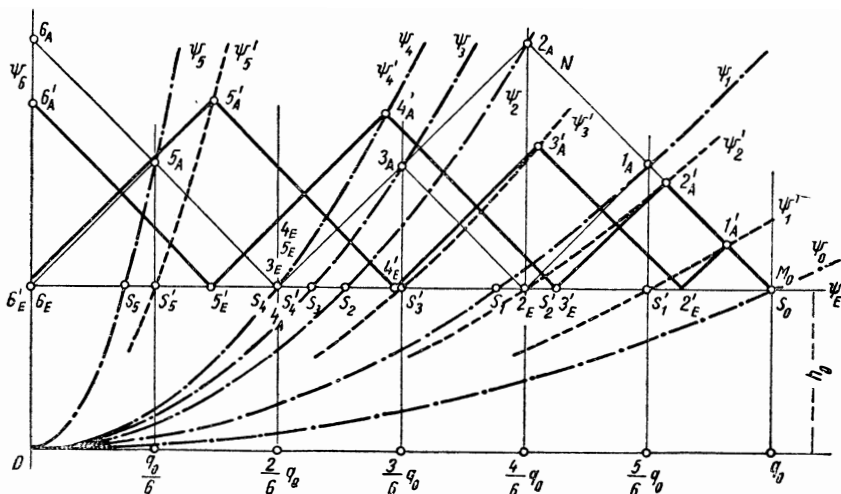
Будем определять режимы, разделенные между собой интервалами времени  $\tau$ . Для наблюдателя, выбывающего из сечения  $E$  в момент времени  $1$ , характеристикой трубопровода будет, как и прежде, прямая  $M_0N$ . Когда наблюдатель прибывает в сечение  $A$  в момент времени  $2$ , соответственная точка  $2'_A$  будет находиться в пересечении прямой  $M_0N$  и параболы  $\Psi'_2$ . Для наблюдателя, перемещающегося от сечения  $A$  к  $E$ , характеристикой будет прямая, проходящая через точку  $2'_A$ ; ее угловой коэффициент будет положительным, и режим в момент времени  $3$  в сечении  $E$  определится точкой  $3'_E$  пересечения этой прямой с горизонтальной линией  $\Psi_E$  ординаты  $h_0$ . При возвращении наблюдателя от сечения  $E$  к сечению  $A$  характеристическая прямая проходит через точку  $3'_E$ , причем ее угловой коэффициент будет иметь обратный знак, и режим в сечении  $A$  в момент времени  $4$  определяется пересечением этой прямой и параболы  $\Psi'_4$  (в точке  $4'_A$ ). Таким же образом находится на горизонтальной линии  $\Psi_E$  соответственная точка  $5'_E$  для момента времени  $5$  в сечении  $E$ , затем на оси ординаты точка  $6'_A$  — для момента, начиная с которого отверстие закрыто полностью. Таким образом, оказываются определенными режимы для одного цикла.

Перемещения в прямом и обратном направлениях наблюдателя, выбывающего из сечения  $E$  в момент времени нуль, позволят таким же образом получить ломаную линию, определяющую для сечения  $A$  промежуточные режимы  $1'_A$   $3'_A$   $5'_A$  на параболах  $\Psi_1\Psi_3\Psi_5$ , справедливые для сечений отверстия размерами  $s'_1s'_3s'_5$  и моментов времени  $1, 3, 5$  и режимы  $2'_E$   $4'_E$   $6'_E$  на горизонтальной линии  $\Psi_E$  для моментов времени  $2, 4, 6$  в сечении  $E$ , т. е. в резервуаре.

Произведенное построение показывает, что давление в сечении  $A$  сначала быстро увеличивается, до момента времени  $2$ , затем от момента  $2$  до момента  $6$  продолжает медленно вырастать и достигает максимальной величины в момент полного закрытия выходного отверстия.

Случай, когда расход меняется линейно в зависимости от времени. Соответственные точки для сечения  $A$  и моментов времени  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  в этом случае должны

находиться в силу принятого предположения на ординатах, проведенных через точки оси абсцисс  $\frac{5}{6} q_0$ ,  $\frac{4}{6} q_0$ ,  $\frac{3}{6} q_0$ ,  $\frac{2}{6} q_0$ ,  $\frac{q_0}{6}$  и нуль. Для моментов времени  $1_A$  и  $2_A$  они должны находиться, как и прежде, одновременно на прямой  $M_0N$ , т. е. это будут точки  $1_A$  и  $2$  (фиг. 50), через которые должны проходить также параболы  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  (нанесенные на чертеже пунктиром с точкой). Точки пересечения этих парабол с горизонталью, имеющей ординату  $h_0$ ,



Фиг. 50.

определяют аналогично тому, как прежде значения  $s_1$  и  $s_2$  сечения отверстия в моменты времени 1 и 2.

Для наблюдателя, выбывающего из сечения  $A$  в момент времени 2, соответственные точки должны лежать на прямой с положительным угловым коэффициентом, которая проходит через точку  $2_A$ . Для сечения  $E$  в момент времени 3 прибытия туда наблюдателя соответственная точка должна находиться на горизонтали  $\Psi_E$ ; это точка  $3_E$ , соответствующая расходу  $\frac{2}{6} q_0$ . При возвращении наблюдателя к сечению  $A$  характеристическая прямая проходит через эту точку, ее угловой коэффициент будет отрицательным по знаку; в момент времени 4 прибытия наблюдателя в сечение  $A$  расход должен быть равен по заданию  $\frac{3}{6} q_0$ , чему соответствует та же точка  $3_E$ , что и при выбытии наблюдателя из сечения  $E$ . Следовательно, соответственная точка  $4_A$  совпадает с точкой  $3_E$ . При последующем перемещении в направлении к  $E$  характеристическая прямая должна проходить через точку  $4_A$ , находящуюся уже на горизонтали  $\Psi_E$ , так что соответственная

точка  $5_E$  для сечения  $E$  в момент времени 5 прибытия туда наблюдателя, которая должна лежать на горизонтали  $\Psi_E$ , совпадает с точкой  $4_A$ . Наконец, при новом перемещении наблюдателя в направлении к сечению  $A$  характеристическая прямая пройдет через точку  $5_E$ , ее угловой коэффициент будет отрицательным, и поскольку соответственная точка для сечения  $A$  в момент времени 6 должна лежать на оси ординат, то это будет (фиг. 50) точка  $6_A$ .

Для наблюдателя, начинающего движение из сечения  $A$  в момент времени 1, соответственная точка  $2_E$  для сечения  $E$  в момент времени 2 должна лежать на прямой, проходящей через точку  $1_A$  и имеющей положительный угловой коэффициент, и на горизонтальной линии  $\Psi_E$ ; вследствие симметричности в построениях ломаных линий эта точка должна быть на той же вертикали, что и точка  $2_A$ . Для сечения  $A$  в момент времени 3 соответственная точка должна быть на прямой, проходящей через точку  $2_E$  при отрицательном угловом коэффициенте и на вертикали, проходящей через точку  $\frac{3}{6} q_0$ , оси абсцисс; это будет точка  $3_A$ , которая вследствие симметричности построений будет также на прямой  $2_A 3_E$ , так что соответственная точка  $4_E$  для сечения  $E$  в момент времени 4 совпадает с точками  $4_A$ ,  $3_E$ ,  $5_E$ . После этого могут быть найдены соответственная точка  $5_A$  для сечения  $A$  в момент времени 5, находящаяся на уже построенной прямой  $5_E 6_A$  и на вертикальной линии с абсциссой  $\frac{q_0}{6}$  и точка  $6_E$  на пересечении горизонтальной линии  $\Psi_E$  с осью ординат.

Параболы  $\Psi_3$  и  $\Psi_5$  пройдут через точки 3 и 5, определяя в пересечении с горизонталью ординаты  $h_0$  значения  $s_3$  и  $s_5$  площади сечения отверстия  $A$  для моментов времени 3 и 5.

Мы приходим теперь к следующему интересному результату: в то время, как линейное изменение площади сечения вызывало монотонное возрастание давления в сечении  $A$ , линейное изменение расхода обуславливает нарастание давления, отмечаемое до момента времени  $2\tau$ ; затем значение добавочного давления уменьшается, доходя в момент времени 4 до нуля; после этого давление вновь возрастает, достигая в момент  $6\tau$  полного закрытия отверстия максимального значения, равного давлению в момент времени  $2\tau$ .

Казалось бы, на первый взгляд, что нет никаких оснований предполагать, что сходные друг с другом условия истечения приводят к столь сильно различающимся между собой результатам. Но с другой стороны рассмотрение показанного на фиг. 52 пунктиром с точками закона изменения во времени площади отверстия  $s$  для случая, когда дебит меняется линейно, устанавливается своеобразие этого закона: очень быстрое уменьшение в течение

первой трети времени закрытия, малое — во второй трети и снова быстрое — в последней. Подобный закон трудно было бы реализовать, тем не менее его часто предполагают при рассмотрении вопросов регулирования турбин, имея в виду исследовать наибольшее возможное значение повышения давления при выключении турбины. Определим это повышение через время  $\frac{2L}{a}$  после момента начала закрытия отверстия, т. е. в конце времени пробега фронта волны в двух направлениях.

Если  $q$  является первоначальным расходом,  $q_2$  — расходом в момент времени  $2$  и с учетом того, что угловой коэффициент прямой  $M_0N$  (фиг. 50) равен  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{gS}$ , повышение давления оказывается равным

$$\frac{a(q_0 - q_2)}{gS}. \quad (1)$$

Пусть время полного закрытия будет

$$T = n \frac{2L}{a}. \quad (2)$$

Тогда при линейном законе изменения расхода получим

$$q_0 - q_2 = \frac{q_0}{n}. \quad (3)$$

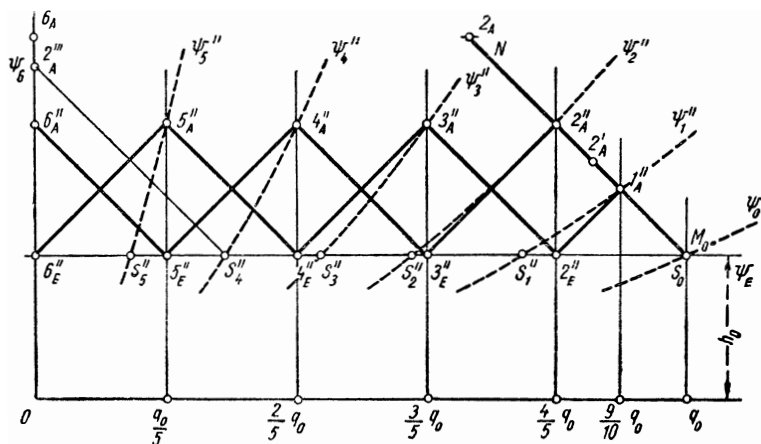
Обозначив начальную скорость в трубопроводе как  $\frac{q_0}{S} = c_0$  и заменяя  $n$  его значением из уравнения (2), найдем следующее окончательное выражение для повышения давления в сечении  $A$

$$\frac{ac_0}{gn} = \frac{2Lc_0}{gT}. \quad (4)$$

Эта формула называется „формулой Мишо“; она справедлива при  $T > \frac{2L}{a}$ , а при  $T = \frac{2L}{a}$  переходит в формулу Алиеви; последняя справедлива в пределах  $0 < T < \frac{2L}{a}$ .

Из фиг. 50 видно, что эта величина повышения давления больше, чем получаемая в случае линейного во времени перекрытия отверстия; с учетом этого линейное перекрытие отверстия является более выгодным. Отметим, однако, что сечение  $s_4$  отверстия, определяемое параболой  $\Psi_4$  и соответствующее моменту 4, т. е. началу последнего перемещения наблюдателя в прямом и обратном направлениях, будет в обоих случаях одним и тем же. Предположим теперь, что производится закрытие по линейному закону не всего отверстия  $s_0$ , а только его части  $s_4 = \frac{s_0}{n}$ . Тогда в обоих случаях начальный расход будет ра-

вен  $\frac{q_0}{n}$ . Так как закрытие происходит в течение времени  $\frac{2L}{a}$ , то повышение давления будет равно  $\frac{a}{gS} \cdot \frac{q_0}{n} = \frac{ac_0}{gn}$ , т. е. равно величине, определяемой из формулы (4) Мишо. Таким образом, если производится линейное закрытие отверстия, что осуществляется гораздо проще, то во время закрытия части отверстия  $\frac{s_0}{n}$  возникает все же повышение давления (гидравлический удар) такое же, как в случае линейного перекрытия расхода  $q_0$ . Вот почему следует производить расчет по формуле Мишо, и в этом ее смысл.



Фиг. 51.

Естественно поставить вопрос о том, можно ли найти простую закономерность закрытия, вызывающую в случае даже частичного линейного закрытия отверстия  $\frac{s_0}{n}$  гидравлический удар меньший, чем определяемый из формулы Мишо? Из примера, который приводится ниже, видно, что такая возможность существует. Случай, когда закрытие отверстия вызывает в сечении  $A$  повышение давления, сохраняющееся неизменным от момента  $\frac{2L}{a}$  до полного закрытия. Поскольку, по предположению, закрытие отверстия происходит монотонно, давление будет безусловно повышаться в течение первого пробега волны в прямом и обратном направлениях, и только в дальнейшем можно добиваться того, чтобы оно сохранялось неизменным. Из рассмотрения построения на фиг. 51 можно легко видеть, как можно добиться такого положения.

Пусть полное время закрытия равняется  $2n \frac{L}{a}$ ; разделим расход  $q_0$  на  $(2n - 1)$  равных частей, относя эти значения к моментам времени  $2\tau, 3\tau, 4\tau, 5\tau \dots (2n - 2)\tau, (2n - 1)\tau, 2n\tau$



(где  $\tau = \frac{L}{a}$ ). В момент времени  $\tau$  расход будет средней величиной между  $q_0$  и расходом в момент времени  $2\tau$ . Таким образом, оказывается, что интенсивность изменения расхода в период времени между  $2\tau$  и  $2n\tau$  будет вдвое большей, чем в интервале между нулем и  $2\tau$ .

Рассмотрим при этих условиях построение, показанное на фиг. 51. Прямая, имеющая угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{gS}$ , исходящая из соответственной точки  $M_0$  начального режима, дает при пересечении с вертикалью, имеющей абсциссой  $\frac{4}{5} q_0$ , соответственную точку  $2''_A$ . Затем ломаная линия, соответствующая перемещениям наблюдателя в прямом и обратном направлениях, проходит через точки:  $3''_E$  — на горизонтальной линии  $\Psi_E$ ;  $4''_A$  — на вертикали, имеющей абсциссу  $\frac{2}{5} q_0$ ,  $5''_E$  на  $\Psi_E$ ;  $6''_A$  — на оси ординат при нулевом расходе. Для момента времени  $\tau$  соответственная точка  $1''_A$  в сечении  $A$  находится на прямой  $M_0N$ , имея абсциссой величину  $\frac{9}{10} q_0$ ; затем ломаная линия продолжится через точки:  $2''_E$  — на  $\Psi_E$ ;  $3''_E$  — на вертикали, имеющей абсциссу  $\frac{3}{5} q_0$ ;  $4''_E$  — на  $\Psi_E$ ;  $5''_A$  — на вертикали, имеющей абсциссу  $\frac{q_0}{5}$ ;  $6''_E$  — на пересечении горизонтали  $\Psi_E$  и оси ординат.

Из построений на фиг. 51 видно, что повышение давления сохраняется постоянным с момента времени  $2$  до момента полного закрытия отверстия. Из чертежа следует также, что это повышение меньше, чем максимальное повышение давления в двух предшествующих случаях. Оно является в то же время минимальным из всех приращений давления, какие можно получать при любых возможных способах сведения к нулю начального расхода  $q_0$ . В самом деле, любой способ, дающий меньшее приращение давления в последний момент закрытия отверстия, даст большие значения этого приращения в процессе закрытия и, наоборот, как это можно констатировать для второго из рассмотренных нами случаев, когда приращение давления  $2'_A$  меньше, чем  $2''_A$ , но в то же время повышение давления  $6'_A$  больше, чем  $6''_A$ .

Проходящие через точки  $1''_A$   $2''_A$   $3''_A$  ...  $5''_A$  параболы  $\Psi''_1\Psi''_2\Psi''_3$  ...  $\Psi''_5$  определяют в пересечениях с горизонталью  $h_0$  величину площади  $s''_1s''_2s''_3$  ...  $s''_5$  сечения отверстия в  $A$  для соответствующих моментов времени.

На фиг. 52 по оси абсцисс отложены значения времени, отсчитываемые в единицах  $\frac{L}{a}$ , а на оси ординат значения площади

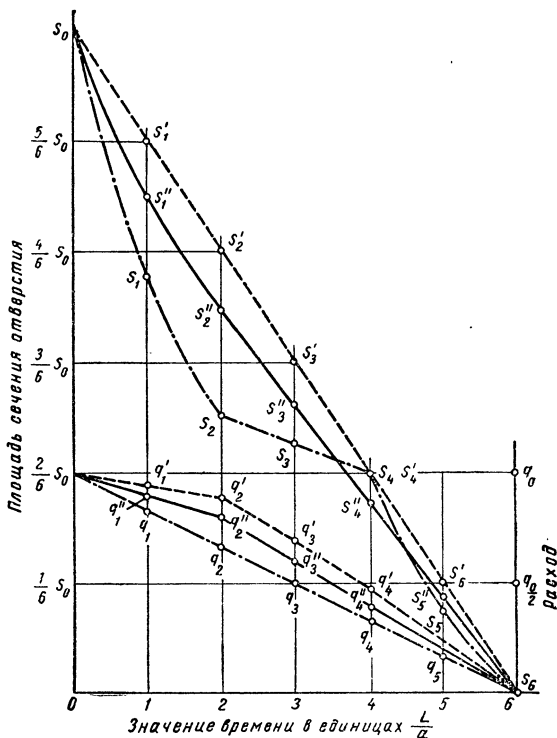
сечения  $s$  и расхода  $q$  для трех рассмотренных случаев; таким образом получены кривые;

штрих-пунктирной линией — для 1-го случая;

штриховой линией — для 2-го случая;

сплошными линиями — для 3-го случая.

Отметим, что в последнем случае, оптимальном с точки зрения получаемого при закрытии приращения давления, закономерность изменения площади сечения проста, хотя и в меньшей сте-



Фиг. 52.

пени, чем линейная, и легко осуществима: в начале закрытие происходит при большей (сравнительно) скорости, постепенно затем уменьшающейся и становящейся постоянной, начиная с момента времени  $2\tau$ .

Примечание. Следует отметить, что так же, как и во втором случае, наибольшее значение давления достигается не при полном закрытии расхода, но в случае закрытия отверстия размерами  $s_4''$  при такой же скорости, какая имела место при полном закрытии.

Действительно, пусть имеет место установившееся движение при открытии отверстия  $s_4''$ , чему соответствует парабола  $\Psi_4''$

(фиг. 51); соответственная точка этого режима находится на пересечении кривой  $\Psi_4''$  и горизонтальной линии  $h = h_0$ , т. е. это и будет точка  $s_4''$ . Если отверстие закрывают в течение времени  $\frac{2L}{a}$ , то превышение давления определится точкой  $2_A''$  пересечения оси ординат и прямой с угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{gS}$ ; в данном случае повышение давления будет больше, чем определяемое точкой  $6_A''$ , тем не менее, оно значительно меньше, чем полученное в двух предыдущих случаях, определяемое точкой  $6_A$ .

С учетом этого обстоятельства еще более удачным было бы закрывать отверстие таким образом, чтобы размеры  $s_3''$   $s_4''$   $s_5''$  отверстия для моментов времени 3, 4, 5 были бы еще несколько меньшими; хотя это и повело бы к увеличению давления в момент полного закрытия отверстия, но одновременно уменьшило бы приращение давления, имеющее место при закрытии части отверстия площадью сечения  $s_4''$ ; оптимальным был бы такой закон закрытия, при котором значения обоих этих приращений давления оказались бы равными между собой.

#### D. Внезапное закрытие отверстия, создающее кавитацию на конце трубопровода

**§ 42. Случай, когда потерями напора в трубопроводе можно пренебречь.** Этот случай идентичен рассмотренному в § 38 (фиг. 41, а, б), когда также производится мгновенное перекрытие отверстия первоначальной площадью сечения  $s_0$  на конце А трубопровода в момент времени нуль; но депрессия, которая следует за приращением давления, и должна быть численно равна последнему, на этот раз превышает абсолютное давление  $(h_0 + h_a)$ , и не может быть физически достигнута (это привело бы к отрицательному давлению, т. е. соответствовало бы растягивающему напряжению между молекулами жидкости, что невозможно).

Физическим пределом для депрессии будет значение  $(h_0 + h_a)$ , где  $h_a$  — атмосферное давление, приводящее к установлению барометрического вакуума в сечении, где такая депрессия возникает; точнее, этот предел выражается не вакуумом, но давлением паров, соответствующим температуре жидкости. Посмотрим, как следует учесть это новое условие задачи.

С этой целью проследим за явлением по построениям на фиг. 53, а, приняв за единицу времени  $\tau = \frac{L}{a}$ .

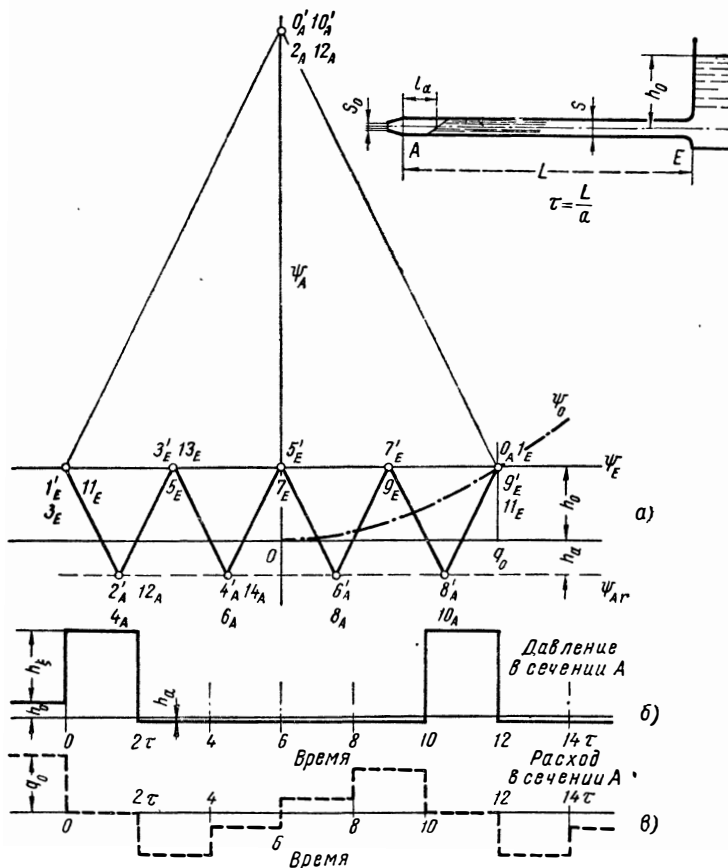
Первоначальный установившийся режим выражается, так же как на фиг. 41, а, соответственной точкой  $O_A$  на пересечении параболы  $\Psi_0$  и горизонтальной линии  $\Psi_E$ . Внезапное закрытие

отверстия в сечении  $A$  в момент времени  $O$  получает свое отражение (фиг. 53,  $a$ ) в соответственной точке  $O'_A$ , устанавливаемой наблюдателем, отправляющимся из сечения  $E$  в момент времени  $(-1)$ . Режим остается неизменным до момента времени  $2\tau$ , когда этот же режим будет зафиксирован вторым наблюдателем, начинающим движение из сечения  $E$  в момент времени  $1$ . При возвращении этих наблюдателей в сечение  $E$  соответственная точка будет одинакова для обоих; это будет точка  $1'_E$  и она же  $3_E$  на горизонтальной линии  $\Psi_E$ . При дальнейших перемещениях в направлении к сечению  $A$  соответственные точки должны находиться на прямой с угловым коэффициентом  $\left(-\frac{a}{gS}\right)$ , проходящей через точку  $1'_E$  ( $3_E$ ). Но теперь напор в сечении  $A$  может быть равен только нулю, и зависимость между  $h$  и  $q$  выражается, следовательно, горизонтальной линией  $\Psi_{Ar}$  ординаты  $(-h_a)$ ; соответственные точки должны находиться на этой горизонтальной линии; они совпадают для обоих наблюдателей, как это показано на фиг. 53,  $a$  (точка  $2'_A$ ,  $4_A$ ).

Таким образом, расход не будет нулевым, а будет иметь место обратное течение в направлении к сечению  $E$ . Величина расхода определяется абсциссой  $2'_A$   $4_A$ . Так как отверстие в сечении  $A$  закрыто, то в результате течения в направлении, противоположном основному, образуется область кавитации, объем которой будет возрастать до тех пор, пока расход в сечении  $A$  не станет равен нулю. Когда течение вновь получит основное направление, размеры кавитационной области начнут уменьшаться (очевидно, что поверхность раздела, ограничивающая эту область, будет неправильной формы и будет разрушаться под влиянием силы тяжести; все же приданная частицам скорость течения, противоположного основному, будет существовать в среднем, а объем области кавитации будет определяться расходом, величина которого получена при построении).

На поверхности, ограничивающей кавитационную область от воды в трубопроводе, давление равняется нулю; на остальном протяжении трубопровода область нулевого давления распространяется со скоростью  $a$ . Соответственные точки для наблюдателя, перемещающегося с этой скоростью, будут на прямой с угловым коэффициентом  $+\frac{a}{gS}$ , проходящей через точку  $2'_A$ . На протяжении всего пути перемещения наблюдателя эта точка  $2'_A$  сохраняется, но по прибытии в сечение  $E$ , где напор определяется уровнем  $h_0$  в резервуаре, соответственной точкой становится  $3'_E$  на пересечении характеристической прямой и горизонтальной линии  $\Psi_E$ . В соответствии с этим расход обратного течения внезапно принимает величину, выраженную абсциссой точки  $3'_E$ ; он остается таким же и для наблюдателя, выбываю-

щего из сечения  $A$  в момент времени 4 и прибывающего в сечение  $E$  в момент времени 5, а также для любого наблюдателя, выбывающего из сечения  $A$  в интервале времени от 2 до 4.



Фиг. 53.

Для всех этих наблюдателей, возвращающихся затем в сечение  $A$ , характеристическая прямая проходит через точку  $3'_E$  и имеет угловым коэффициентом величину  $(-\frac{a}{gS})$ . В момент прибытия в сечение  $A$  наблюдатели установят кавитацию, поскольку давление сохраняется здесь по-прежнему равным нулю; соответственные точки будут на пересечении характеристической прямой и горизонтальной линии  $\Psi_{Ar}$ , оставаясь без изменения до момента времени 6 (точка  $4'_A$ ,  $6_A$ ). В момент времени 4 расход внезапно принимает в сечении  $A$  величину, выраженную абсциссой точки  $4'_A$ , сохраняя ее от момента времени 4 до времени 6.

Построив графики зависимости напора и расхода от времени, получим ступенчатые линии, показанные на фиг. 53, б и 53, в, из которых следует, что к моменту времени  $t_6$  кавитационная область в сечении  $A$  достигнет длины  $l_a$ , определяемой условием

$$(q_{2'A} + q_{4'A}) \times 2\tau = l_a \times S. \quad (1)$$

Последующие перемещения наблюдателей в прямом и обратном направлениях отображаются ломаной линией  $4'_A 5'_E 6'_A 7'_E 8'_A 9'_E$ , последняя точка которой  $9'_E$  совпадает с точкой  $O_A$  начального режима (в силу того, что для упрощения построений мы предположили случай, когда точка  $5'_E$  расположена на оси ординат, что делает построения симметричными). Из графика расхода в зависимости от времени (фиг. 53, в) с очевидностью следует, что область кавитации достигает (при отмеченном упрощающем предположении) максимальных размеров в момент времени  $t_6$ ; ее величина в этот момент определяется из уравнения (1). В дальнейшем размеры области кавитации уменьшаются, так как течение принимает основное направление при расходе, определяемом сначала абсциссой точки  $6'_A$ , равной по величине абсциссе точки  $4'_A$ , затем — абсциссой точки  $8'_A$ , равной абсциссе  $2'_A$ ; заполняемый при этом объем определяется условием

$$(q_{6'A} + q_{8'A}) \times 2\tau. \quad (2)$$

Поскольку к моменту времени  $t_0$  этот объем становится равным объему, определяемому уравнением (1), то образовавшаяся в сечении  $A$  кавитационная область в этот момент исчезает, а расход становится равным нулю; это дает на графике точку  $10'_A$ , совпадающую с  $O'_A$ , после чего явление возобновляется.

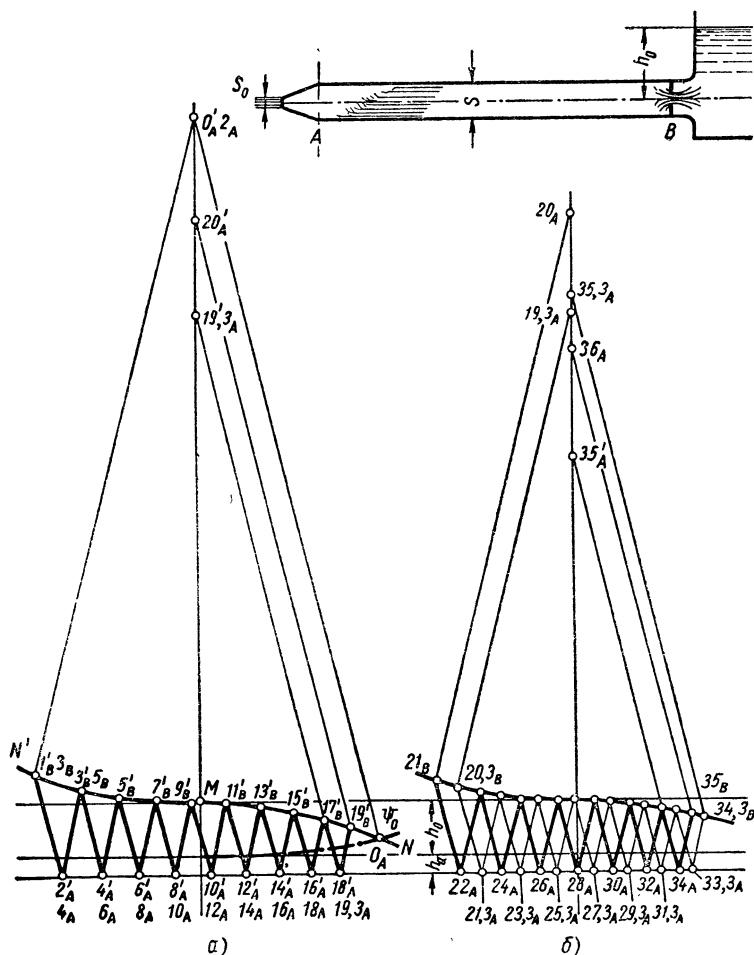
Таким образом, в сечении  $A$  в рассматриваемом случае будут чередоваться между собой давление, равное  $\frac{ac_0}{g}$  и имеющее место в интервале времени длительности  $2\tau$ , и давление, равное нулю, держащееся на этом уровне в интервале времени длительностью  $8\tau$ . В общем случае периоды образования и исчезновения кавитации не являются кратными  $2\tau$ ; также нельзя пренебрегать потерями напора вдоль трубопровода. Следующий пример учитывает эти два условия.

**§ 43. Случай, когда нельзя пренебрегать потерями напора в трубопроводе.** Предположим (фиг. 54) наличие диафрагмы в сечении  $B$  при выходе из резервуара, отнеся к этому сечению потери, фактически распределенные вдоль всего трубопровода. Отметим, что результаты в этом предположении будут верными для сечений  $A$  и  $B$ , и будут правильно отражать процесс затухания колебаний, но ни в какой мере не могут быть точными для любого сечения трубопровода (см. § 24 до 28).

Различие с предшествующим случаем заключается в том, что в сечении  $B$  вместо условия  $h = h_0 = \text{const}$  будет теперь иметь место зависимость между напором и расходом, выражаемая условием

$$h = h_0 \mp kq^2, \quad (1)$$

где знак минус относится к случаю, когда течение направлено от сечения  $B$  к  $A$ , а знак  $+$  к случаю противоположного направления течения. На фиг. 54,  $a$  условие 1 отображается параболой  $MN$  и  $N'M$ . Когда наблюдатели прибывают в сечение  $B$ , соответственные точки будут находиться на этих двух параболах, а пер-



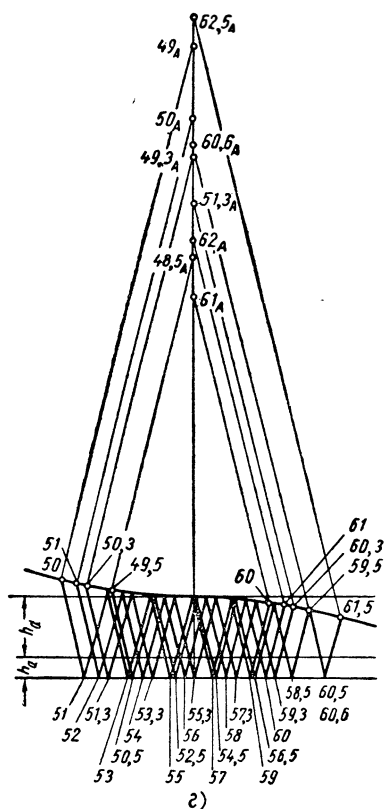
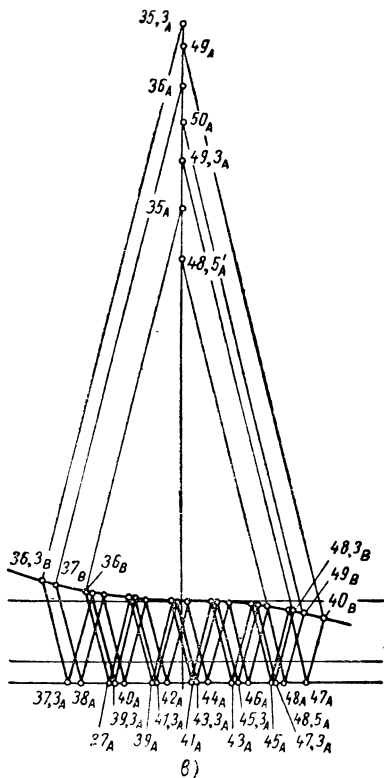
Фиг. 54.

Егоначальный режим определяется точкой  $O_A$  пересечения кривой  $MN$  с параболой  $\Psi_0$ , соответствующей уравнению

$$q = s_0 \sqrt{2gh}, \quad (2)$$

которым определяется расход в отверстии  $s_0$  на конце  $A$  трубопровода.

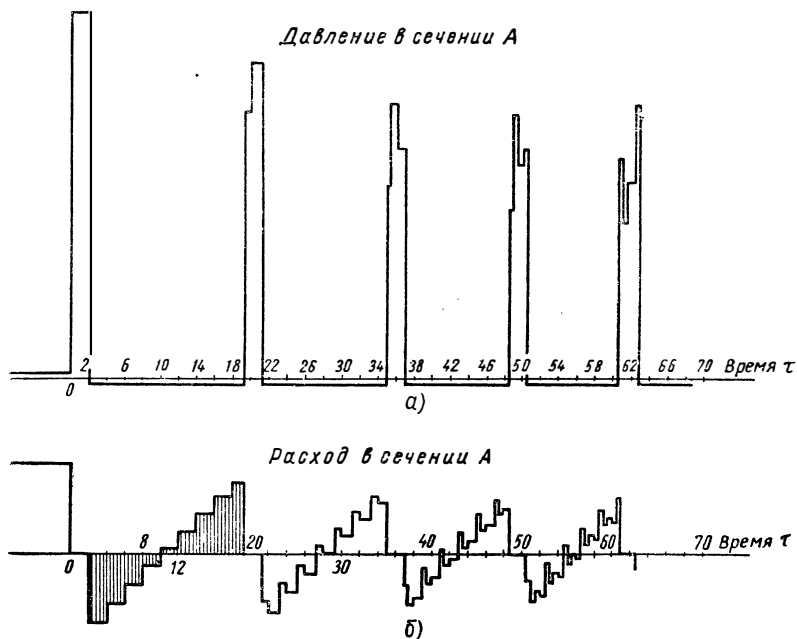
Нет необходимости давать описание построений на фиг. 54,  $a$ , которые производятся аналогично тому, как в ранее рассмотренном случае построений на фиг. 53,  $a$ . Перемещения вдоль трубопровода в одном и другом направлении наблюдателей, отбывающих из сечения  $B$  на отрезке времени от  $(-\tau)$  до  $+\tau$ , отображаются также ломаной линией  $O'_A 1'_B 2'_A 3'_B 4'_A 5'_B \dots 14'_A 15'_B 16'_A 17'_B 18'_A$ , позволяющей определить значения расхода и напора в сечении  $A$ , после чего эти значения можно нанести на графиках (фиг. 55,  $a$  и 55,  $b$ ). На фиг. 55,  $b$  видно, что график расхода обратного течения, возникающего в момент времени 2, изменяется ступеньками, достигая нуля в момент времени 10, а затем возрастают также ступеньками, когда течение полу-





чает первоначальное направление. В первом периоде размеры кавитационной области в конце  $A$  возрастают, а во втором — уменьшаются. Кавитация исчезает в момент, когда площади, заштрихованные на фигуре, равны между собой. Подсчет величин этих площадей прост: для этого нужно только составить таблицу расходов в сечении  $A$  и постепенно подводить итог; так как продолжительность каждого значения расхода равна  $2\tau$ , то произведение итога на  $2\tau$  даст объем области кавитации.

Производя такой подсчет, найдем, что при равной  $1,3\tau$  продолжительности существующего в момент времени  $18$  расхода  $q_{18A}$ ,



Фиг. 55.

кавитационная область исчезнет и, следовательно, расход становится равным нулю. Таким образом, наблюдатель, прибывающий в сечение  $A$  в момент времени  $19,3$ , установит, что соответственная точка будет находиться на оси ординат. Наблюдатели, вышедшие из сечения  $A$  на отрезке времени от  $18$  до  $19,3$ , констатируют в сечении  $B$  на отрезке времени от  $19$  до  $20,3$  режим, определяемый соответственной точкой  $19'_B$ , а возвращаясь в сечение  $A$ , они установят отсутствие кавитации, т. е. нулевое значение расхода, что получит отражение в виде точки  $20'_A$  на оси ординат. Это вызовет появление уступа на кривой давления на отрезке времени от  $20$  до  $21,3$ , как это отчетливо видно на фиг. 55,  $a$ .

Следующий цикл можно получить, предположив перемещения двух групп наблюдателей, начинающих движение из сечения  $A$ ,

одни на отрезке времени от 19,3 до 20, и вторые — на отрезке времени от 20 до 21,3. Перемещениям туда и обратно первой группы соответствует на фиг. 54, б ломаная линия  $19,3_A - 20,3_B - 21,3_A - 23,3_A - 25,3_A \dots 31,3_A$ , а перемещениям второй — ломаная линия  $20_A - 21_B - 22_A - 24_A - 26_A \dots 32_A - 34_A$ . На графике расхода (фиг. 55, б) появляется теперь уступ при каждом пробеге волны туда или обратно, и это несколько усложняет подсчет величины области кавитации.

Производя такой подсчет, можно установить, что объем области кавитации становится равным нулю, если значение расхода, имеющее место в момент 34, продолжается до момента 35. Расход  $q_{34A}$  в момент исчезновения кавитации внезапно становится равным нулю, а давление, сохраняясь неизменным до момента времени 35,3, определяется точкой  $35'_A$  на оси ординат. Затем наблюдатели, отбывающие из сечения  $A$  на отрезке времени от 33,3 до 34, устанавливают в сечении  $B$  режим, определяемый соответственной точкой  $34,3_B$ , а возвратившись в сечение  $A$ , где расход равняется нулю, устанавливают режим, выраженный соответственной точкой  $35,3_A$  на оси ординат, который сохраняется до момента времени 36. Наконец, наблюдатели, выбывшие из  $A$  на отрезке времени от 34 до 35, находят в сечении  $B$  режим, определяемый точкой  $35_B$ , и в сечении  $A$ , определяемый точкой  $36_A$ , последний режим держится до момента времени 37. В результате этого возникает двойной уступ (фиг. 55, а) на графике напора.

После этого следующий цикл (фиг. 54, в) получается с помощью трех групп наблюдателей, начинающих движение из сечения  $A$ :

перемещениям наблюдателей, выбывающих на отрезке времени от 35 до 35,3, соответствует ломаная линия  $35_A - 36_B - 37_A - 39_A - 41_A - 43_A - 45_A - 47_A$ ;

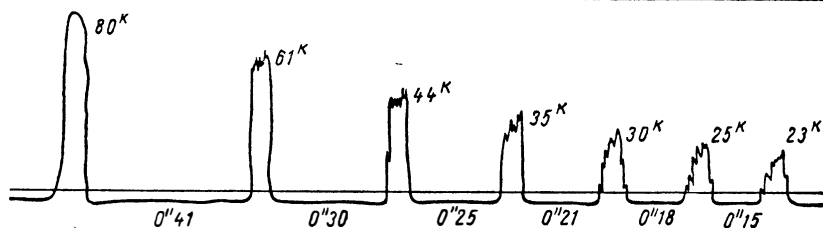
перемещениям наблюдателей, выбывающих на отрезке времени от 35,3 до 36, — ломаная  $35,3_A - 36,3_B - 37,3_A - 39,3_A - 41,3_A - 43,3_A - 45,3_A - 47,3_A$

и, наконец, перемещениям наблюдателей, выбывающих на отрезке времени от 36 до 37, — ломаная  $36_A, 37_B, 38_A, 37_A - 40_A - 42_A - 44_A - 46_A - 48_A$ .

Это создает на кривой расхода (фиг. 55, б) ступени, каждая из которых имеет по два уступа. Подсчет объема кавитационной области показывает, что она становится равной нулю, если расход  $q_{48A}$ , возникший в момент времени 48, удерживается до момента времени 48,5. В этот момент расход становится равным нулю, чем обусловливается на оси ординат появление соответственной точки  $48,5'_A$ ; определяемый ею режим будет существовать до момента времени 49. В этот момент в сечении  $A$  начинают прибывать наблюдатели, выбывшие отсюда раньше на отрезке времени от 47 до 47,3, которые констатировали в сечении  $B$  соответственную точку  $48,3_B$ , чем определяется в сечении  $A$  точка  $49_A$ , режим,

определяемый этой точкой, сохраняется до момента времени 49,3. Затем прибывают наблюдатели, выбывшие из сечения  $A$  на отрезке времени от 47,3 до 48, которые отметили в сечении  $B$  режим, определяемый точкой 48,3, что дает затем в  $A$  на оси ординат точку 49,3 $_A$ , определяющую режим до момента времени 50. Наконец, прибывают наблюдатели, выбывшие из сечения  $A$  в интервале времени от 48 до 48,5, которые наблюдают в  $B$  режим, определяемый точкой 49 $_B$ , а по прибытии в сечение  $A$  — режим, определяемый точкой 50 $_A$  (на оси ординат), продолжающийся до момента времени 50,5.

Это приводит к образованию на графике давления (фиг. 55, а) четырех уступов; в силу этого для следующего цикла (фиг. 54, з)



Фиг. 56.

надо прибегнуть к представлению о четырех группах подвижных наблюдателей, в результате чего каждая ступень графика расхода будет иметь по четыре уступа (фиг. 55, б).

Приведенные четыре цикла дают полное представление о ходе явления, и, так как последующее описание не даст читателю ничего нового, продолжать это описание нет надобности. Из построений видно, что потери обуславливают затухание колебаний давления, поскольку средние значения повышения давления в каждом последующем цикле становятся меньше; кроме того, потери приводят также к уменьшению размеров области кавитации, а это приводит к сокращению и общей продолжительности периода колебаний. То обстоятельство, что продолжительность колебаний не связана с длительностью пробега волны в трубопроводе от сечения  $A$  к  $B$  и обратно, является причиной возникновения в фазе повышенного давления зубцов на кривой давления, в постепенно возрастающем числе. Что же касается продолжительности периода повышенного давления, то оно остается неизменным, будучи равным  $\frac{2L}{a}$ .

Этот случай явился объектом очень интересных исследований М. А. Ланжевена<sup>1</sup>. Он использовал для измерения давления пьезоэлектрический кварц, что позволило получить осциллограммы, очень точно определяющие явление. На фиг. 56 показана одна

<sup>1</sup> См. A Langevin, Bulletin de l'Union Technique du Bâtiment année 1928.

из таких осциллограмм. Совпадение с результатами, полученными нами, поистине удивительно, вплоть до зубцов в фазах повышенного давления, причина возникновения которых здесь найдена. Простота построения такого сложного явления вновь подчеркивает достоинства графического метода.

### Е. Периодическое закрытие и открытие отверстия в концевом сечении трубопровода

§ 44. Периодические закрытие и открытие через интервалы времени  $\frac{4L}{a}$ . Рассмотрим случай, когда в конце трубопровода установлен механически управляемый клапан или вентиль, периодически открывающий и закрывающий отверстие.

Обозначим через  $O$  концевое сечение трубопровода, в котором установлен вентиль, и через 1 — сечение присоединения трубопровода к резервуару, где поддерживается постоянный напор  $h_0$  над осью трубопровода.

Зависимостью между  $h$  и  $q$  в сечении  $O$  при открытом отверстии будет

$$q = s_0 \sqrt{2gh}, \quad (1)$$

где  $s_0$  — площадь отверстия.

Эта зависимость представлена на фиг. 57, *a* параболой  $\Psi_0$ ; для сечения 1 соответствующая зависимость представляется горизонтальной линией ординаты  $h_0$ . Если исследование начинается при закрытом венти́ле, то соответственной точкой начального режима будет точка  $O_0'$  при дебите, равном нулю, и напоре, равном  $h_0$ .

Примем за единицу времени величину  $\frac{L}{a}$  и предположим, что открытия и закрытия отверстия происходят поочередно следующим образом: в начальный момент отверстие внезапно открывается, в момент времени 2 закрывается, в момент 4 вновь открывается и т. д.

В соответствии с этими характеристическими кривыми отверстия будут:

для моментов времени 2, 6, 10 и 14 — вертикальная прямая  $\Psi_{2, 6, 10, 14}$ ;

для моментов времени 0, 4, 8, 12 — парабола  $\Psi_{0, 4, 8, 12}$ . Характеристической кривой в сечении 1 у резервуара является горизонтальная линия  $NN$ .

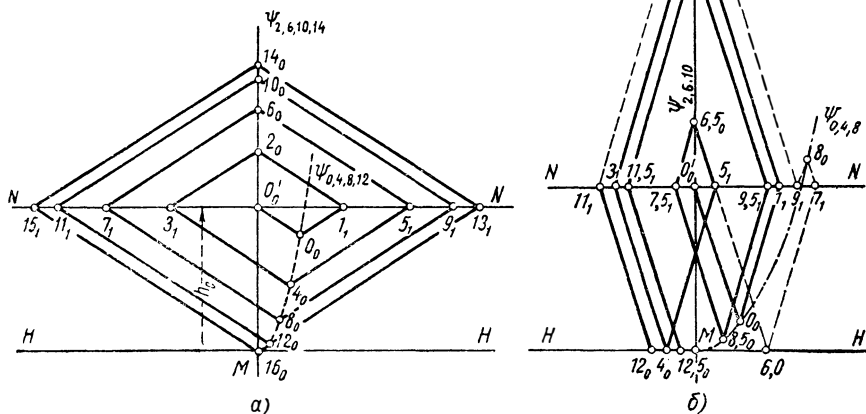
Перемещениям наблюдателей между отверстием  $O$  и резервуаром соответствует ломаная линия

$$O_0' O_0 1_1 2_0 3_1 4_0 5_1 6_0 7_1 8_0 9_1 10_0 \dots^1.$$

<sup>1</sup> Напомним, что режим  $O_0$  продолжается до момента времени 2; режим  $2_0$  — до момента 4; режим  $4_0$  — до момента 6 и т. д.

Вершины этой ломаной находятся попеременно на характеристических кривых  $\Psi$  отверстия  $O$  или на прямой  $MN$  резервуара, а ее стороны параллельны прямой, имеющей угловым коэффициентом  $\pm \frac{a}{gS}$  (где  $S$  — площадь сечения трубопровода).

Последняя точка  $16_0$  так близка к точке  $M$ , что их обе можно считать совпадающими; в силу этого в дальнейшем ломаная линия будет накладываться до бесконечности на стороны ромба  $M 13_1 14_0 15_2 M$ , так что повышение напора у вентиля будет периодически равно удвоенному значению напора  $h_0$ , независимо от площади сечения  $s_0$  отверстия, т. е. характера параболы  $\Psi_0$ . Этот результат уже давно известен и удвоенное значение первоначального напора рассматривается обычно, как максимальное возможное при гидравлическом ударе.



Фиг. 57.

Построим такой же график для случая, когда  $\frac{a}{gS}$  велико по сравнению с  $h_0$  (фиг. 57, б).

Ломаная линия проходит сначала через точки  $0_0' 0_0 1_1 2_0$ , отражая открытие отверстия в первый раз в момент времени нуль и закрытие его в первый раз в момент времени 2. Из графика видно, что напор, определяемый точкой 2, равняется теперь не двукратному, а почти трехкратному значению  $h_0$ . Но это еще не все: продолжая построение, найдем точку  $3_1$  для сечения у резервуара, затем прямую  $3_1 4_0$ , которая уже не пересекает параболу  $\Psi_4$ . Это означает, что при открытом вентиле в сечении  $O$  устанавливается атмосферное давление, и в трубопроводе будет иметь место течение в направлении к резервуару при расходе, равном  $\overline{M4_0}$ ; это течение будет продолжаться в пределах периода времени  $2\tau$ , вызывая отток воды от конца трубопровода.

В момент времени 5 наблюдатель окажется у резервуара, где режим будет определяться соответственной точкой  $5_1$ ; при возвращении к вентилю в момент времени 6 и наблюдатель найдет его закрытым, но образовавшееся воздушное пространство обуславливает здесь в первое время атмосферное давление, и соответственная точка  $6_0$  на горизонтальной линии  $HH$  определяет течение в направлении к отверстию при расходе, равном  $M6_0$ . Поскольку этот расход больше расхода  $M4_0$ , то остановка течения в сечении  $O$  произойдет ранее момента времени 8, когда вентиль откроется вновь. Пусть это произойдет в момент времени 6,5 (это время может быть определено достаточно точно, учтя величины расхода и сжимаемость воздуха при заполнении воздушного пространства); тогда соответственной точкой будет точка  $6,5_0$  на продолжении характеристической прямой  $5_1 6_0$ .

Представим себе теперь двух наблюдателей, начинающих движение от вентиля в направлении к резервуару: один — в момент времени 6, а другой — в момент 6,5; перемещениям второго будет соответствовать ломаная линия  $6,5_0 7,5_1 8,5_0 9,5_1 10,5_0 11,5_1 12,5_0$ , максимум которой — точка  $10,5_0$  — расположена ниже точки  $2_0$ , в то время как максимум  $10_0$  ломаной линии, соответствующей перемещениям первого наблюдателя (линия  $6_0 7_1 8_0 9_1 10_0 11_1 12_0$ ), расположен выше точки  $2_0$ . Точки  $12_0$  и  $12,5_0$  вновь соответствуют началу образования воздушного пространства в конце трубопровода, поэтому дальнейшие построения должны продолжаться аналогично тому, как это было только что показано.

Если бы исследуемый процесс имел в качестве начального установившийся режим при открытом отверстии и расходе  $q_0$ , то в случае малых значений величины  $\frac{a}{gS}$  может быть получен результат, идентичный полученному при построениях на фиг. 57, а. В случае же  $\frac{aq_0}{gS} > a$  максимальное повышение давления будет равно не  $2h_0$ , а самой величине  $\frac{aq_0}{gS}$ . Так же и в этом случае у отверстия будут периодически возникать воздушные полости, учет которых производится аналогично тому, как при построениях на фиг. 57, б; мы возвращаемся таким образом к случаю, описание которого было дано в §§ 42 и 43.

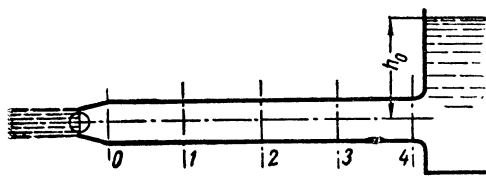
Если предполагать открытие и закрытие отверстия не мгновенными, построения на фиг. 57, а ни в чем не изменятся. На построениях же на фиг. 57, б это отразилось бы только в период формирования воздушных полостей, расчеты размера которых могут быть произведены только при условии определения промежуточных точек.

**§ 45. Периодические открытие и закрытие, длящиеся по  $\frac{2L}{a}$  времени каждое.** Рассмотрим случай, когда открытие и закрытие отверстия происходит с периодом  $\frac{2L}{a}$ , причем закрытие

постепенно в течение времени от нуля до  $\frac{L}{a}$ , а открытие — постепенно в течение времени от  $\frac{L}{a}$  до  $\frac{2L}{a}$  и т. д.

Пусть в конце трубопровода, присоединенного к резервуару, установлен вентиль (фиг. 58), меняющий площадь отверстия между двумя ее некоторыми крайними значениями в соответствии со сделанным выше указанием.

За единицу времени примем одну восьмую от величины  $\frac{2L}{a}$ .



Фиг. 58.

Характеристическими кривыми отверстия будут (фиг. 59) параболы:  $\Psi_0$  при максимальном открытии,  $\Psi_4$  — при минимальном и  $\Psi_2$  — при промежуточном. Первая парабола будет справедливой для моментов времени 0, 8, 16, 24, 32, 40 и т. д., вторая — для мо-

ментов времени 4, 12, 20, 28, 36 и т. д. и промежуточная парабола для моментов 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38 и т. д.

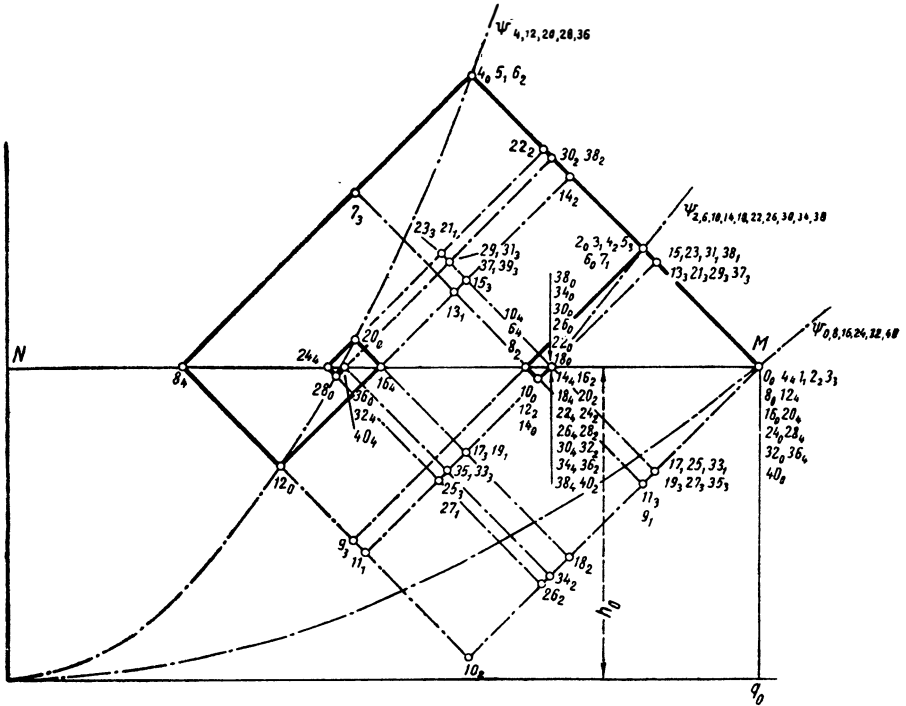
Поскольку продолжительность полного цикла маневрирования вентилем равна  $\frac{2L}{a}$ , наблюдатель, перемещающийся между сечениями 4 и 0 (у резервуара и у отверстия) со скоростью  $a$ , будет находить величину открытия вентиля одной и той же. Ломаная линия, отражающая его движение, будет иметь точки перелома (через одну) на одной и той же характеристической кривой отверстия.

Например, наблюдатель, выбывающий из сечения 4 у резервуара в момент времени 0, когда соответственной точкой здесь является точка  $M$ , прибывает в момент времени 4 к вентилю  $O$ , где характеристической кривой будет  $\Psi_4$ ; ломаная линия, отражающая его движение, проходит через точки  $M_{4_0}$   $8_4$   $12_0$   $16_4$   $20_0$   $24_4$   $28_0$   $32_4$ , которые находятся попеременно или на горизонтальной линии  $MN$  (характеристической кривой резервуара) или на той же кривой отверстия  $\Psi_{4,12,20,28,32}$ . Эта ломаная линия образует сначала сходящуюся спираль, а начиная от точки 32 все последующие точки для сечений 4 и 0 совпадают между собой; отметим, что точка 32 находится на пересечении линий  $\Psi_4$  и  $MN$ .

Точно также наблюдатель, выбывший из сечения 4 в момент времени —2, где соответственной точкой является также точка  $M$  прибывает в сечение отверстия в момент времени 2, где характеристической кривой будет парабола  $\Psi_2$ ; ломаной линией, отражающей перемещения этого наблюдателя, будет  $M_{2_0}$   $6_4$   $10_0$   $14_4$ ;

ее точки перелома находятся или на прямой  $MN$  или на кривой  $\Psi_{2, 10, 18}$ . Начиная от точки  $14_4$  все последующие ( $18_0$   $22_4$   $26_0$   $30_4$   $34_0$   $38_4$ ) совпадают между собой, поскольку точка  $14_4$  находится уже на пересечении прямой  $MN$  и характеристической кривой  $\Psi_2$ .

Ломаная линия, связанная с движением наблюдателя, выбывающего из сечения 4 в момент времени 2, накладывается на предыдущую; так как характеристическая кривая  $\Psi_6$  совпадает



Фиг. 59.

с кривой  $\Psi_2$ , но новая ломаная линия будет иметь обозначения точек  $M$   $6_0$   $10_4$   $14_0$   $18_4$  и совпадающие с последней  $22_0$   $26_4$   $30_0$   $34_4$   $38_0$ .

Из построений на фиг. 59 следует, что после некоторого количества перемещений в двух направлениях между сечениями 4 и 0 все наблюдатели отмечают постоянные в дальнейшем значения давления как в сечении 0 у вентиля, так и в сечении 4 у резервуара; несмотря на периодическое изменение площади сечения отверстия, повышение давления у вентиля более не наблюдается.

Возникает задача установить, что происходит вдоль трубопровода в сечениях 1, 2, 3. Это можно сделать, исключая произведенные построения и не прибегая к новым, за исключением необходимости иногда только продолжить уже существующие линии.



Исследуем, что происходит в какой-либо момент времени  $\tau$  в сечении 2. Соответственная точка должна находиться на пересечении прямой, связанной с наблюдателем, выбывающим из сечения  $O$  в момент времени  $(\tau-2)$ , и прямой, связанной с наблюдателем, выбывшим из сечения 4 в момент времени также  $(\tau-2)$ . Назначим, например  $\tau = 14$ ; соответственная точка  $14_2$  должна находиться на пересечении уже построенной прямой  $12_0 16_4$ , связанной с наблюдателем, выбывшим из сечения  $O$  в момент времени 12, и прямой, продолжающей линию  $12_4 16_0$  (точки  $12_4$  и  $16_0$  совпадают с точкой  $M$ , тем не менее линия  $12_4 16_0$ , связанная с наблюдателем, выбывающим из сечения 4 в момент времени 12, существует; она накладывается, на прямую  $M4_0$ ).

Поступая таким же образом для других моментов времени, разделенных между собой интервалами в две единицы, можно получить ломаные линии:

соответствующую перемещениям наблюдателя, выбывающего из сечения 2 в момент времени 2, линию  $2_2 4_0 6_2 8_0 10_4 12_0 14_2 16_0 18_2 20_0 22_2 24_0 26_2 28_0 30_2 32_0 34_2 36_0 38_2 40_0$

и соответствующую перемещениям наблюдателя, выбывшего из этого же сечения в момент времени 4, линию  $4_2 6_0 8_2 10_0 12_2 14_0 16_2 18_0 20_2 22_0 24_2 26_0 \dots$  (объединение двух точек скобкой указывает на то, что эти точки накладываются одна на другую).

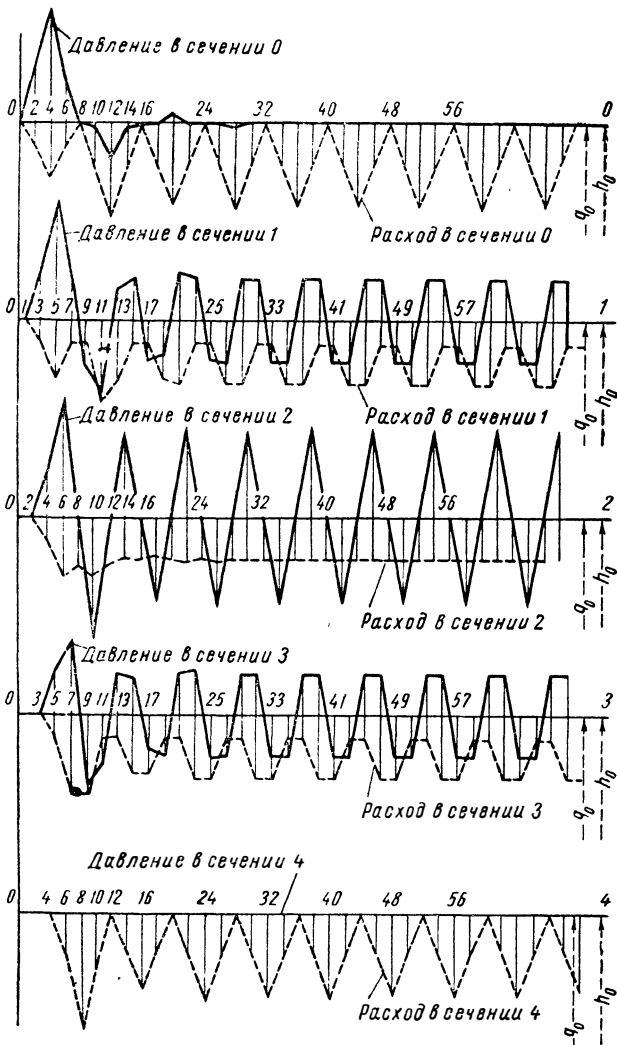
В сечении 3 соответственная точка в момент времени  $\tau$  должна находиться на пересечении прямых, из которых одна связана с наблюдателем, начинающим движение в момент времени  $(\tau-3)$  из сечения  $O$ , а вторая — с наблюдателем, начинающим движение из сечения 4 в момент времени  $(\tau-1)$ .

Например, в момент времени 31 соответственная точка  $31_3$  находится на продолжении прямой  $28_0 32_4$ , соответствующей перемещению наблюдателя, выбывающего из сечения  $O$  в момент времени 28, в пересечении с продолженной прямой  $30_4 34_0$ , связанной с наблюдателем, выбывающим из сечения 4 в момент времени 30 (точки  $30_4$  и  $34_0$  являются совмещенными, но тем не менее прямая существует, будучи параллельной  $M4_0$ ).

Аналогичным образом можно найти также соответственные точки для сечения 1.

Все эти точки обозначены на фиг. 51 и по ним могут быть построены графики зависимости от времени для давления и расхода в сечениях трубопровода 0, 1, 2, 3, 4 (фиг. 60). Из рассмотрения этих графиков следует, что после переходного периода, равного времени четырехкратного пробега волны участка между вентилем и резервуаром, режим становится во всех сечениях периодичным.

При этом в сечении I имеют место колебания расхода, в то время, как напор сохраняется постоянным и равным существующему в резервуаре;

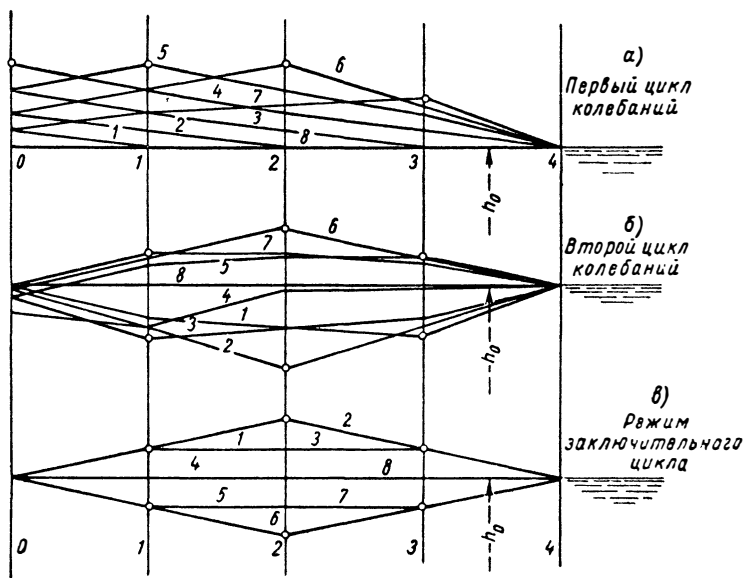


Фиг. 60.

в сечении 1 колебания расхода менее значительны, чем в сечении 0, и имеют место колебания давления, сдвинутые на четверть периода относительно расхода;

в сечении 2 колебания более значительны, чем в сечении 1, (причем фазы их совпадают) и имеет место постоянный расход, меньший первоначального;

в сечении 3 колебания давления идентичны, имеющим место в сечении 1; также идентичны (по величине) с сечением 1 колебания расхода, однако, при наличии сдвига на полпериода;



Фиг. 61.

в сечении 4 давление постоянно, а расход колеблется по тому же закону и при той же амплитуде, как в сечении 0, но при сдвиге на полпериода по сравнению с колебаниями в сечении 0.

Вне переходного периода максимум давления имеет место в сечении 2. Нужно отметить, однако, что в переходный период давление оказывается большим, чем в период устойчивого течения, причем наибольшие значения в переходном периоде оказываются одинаковыми в сечениях 0, 1 и 2.

Таким образом, бесконечные периодические колебания в трубопроводе создают максимум давления в его середине, однако менее опасный, чем давление, возникающее в переходном периоде. Это отчетливо показано на фиг. 61, а, б, в, где видно также становление режимов в трубопроводе.

На фиг. 61, а даны кривые распределения давления по длине трубопровода для моментов времени от 1 до 8 в течение первого цикла колебаний. На графике отчетливо видно перемещение

волны давления от сечения  $O$  к сечению 1 и одинаковые максимумы для сечений 0, 1 и 2.

Фиг. 61, б дает те же кривые в период второго цикла маневрирования вентиля. Здесь также видна волна, перемещающаяся теперь от сечения 4 к сечению  $O$ , имея отрицательный знак в моменты 1, 2 и 3.

На фиг. 61, в даны кривые давления вдоль трубопровода при устойчивых колебаниях.

Этот последний режим легко может быть найден расчетным путем; в то же время расчетом не удастся изучить переходные режимы, которые, как это показано, наиболее опасны. Более того, расчету поддается только случай, когда закон изменения расхода синусоидальный, графическим же путем можно решить задачу при любом произвольном законе (в рассмотренном примере он предполагается линейным).

**§ 46. Случай, когда период маневрирования вентиля меньше  $\frac{2L}{a}$ .** Построения в этом случае принципиально не отличаются от предшествующих, но для того чтобы хорошо проследить за явлением, необходимо рассматривать достаточно большое число промежуточных положений вентиля.

Если  $\tau$  — период маневрирования (суммарное время открытия и закрытия) вентиля, то стабильная волна будет иметь место (так же, как и в предшествующем случае) тогда, когда  $\tau = \frac{4L}{a2n}$ , и процесс будет протекать аналогично тому, как описано в § 44, если  $\tau = \frac{4L}{2n+1}$ , где  $n$  — некоторое целое число.

Во всех этих случаях сказывается превосходство графического метода перед расчетным методом при определении режимов в переходный период; преимущество становится еще более очевидным, когда величина  $\tau$  дробная. При этом условия расчеты становятся невозможными, в то время как графические построения лишь незначительно усложняются.

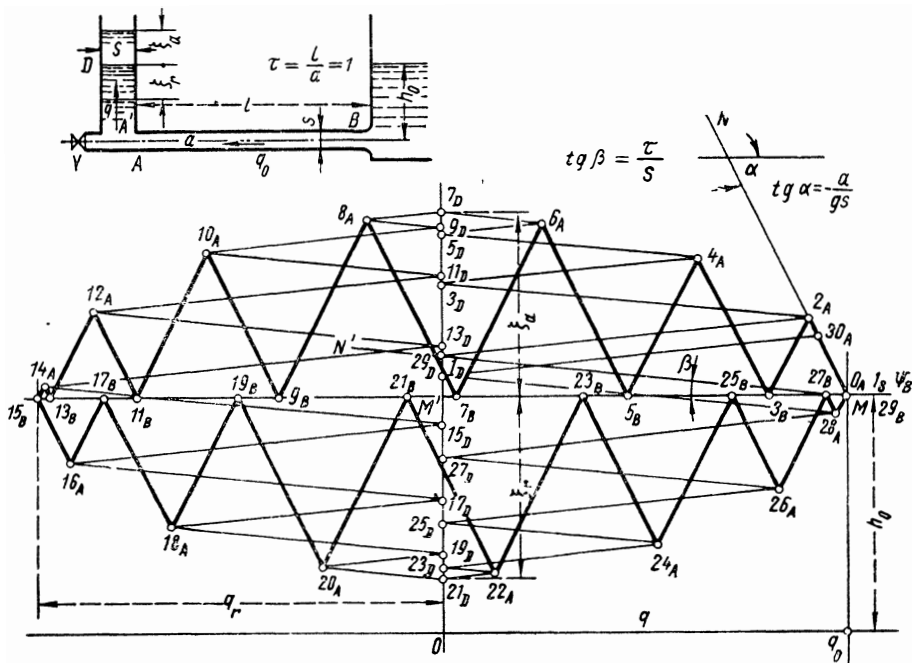
## **ПРОСТОЙ ТРУБОПРОВОД, ПРИСОЕДИНЕННЫЙ ОДНИМ КОНЦОМ К РЕЗЕРВАРУ С ПОСТОЯННЫМ УРОВНЕМ И ИМЕЮЩИЙ НА ДРУГОМ КОНЦЕ ОТВЕРСТИЕ С МЕНЯЮЩИМИСЯ РАЗМЕРАМИ СЕЧЕНИЯ И УРАВНИТЕЛЬНУЮ БАШНЮ**

### **А. Случай пренебрежения потерями в трубопроводе и у основания башни**

**§ 47. Случай мгновенного и постепенного закрытия затвора.** Схема установки приведена на фиг. 62. В конце  $A$  трубопровода установлен ventиль  $V$ , пропускающий при первоначальном режиме расход  $q_0$ . В том же месте присоединена уравнительная башня постоянного сечения  $S$ . Трубопровод длиной  $l$  постоянного сечения  $s$  примыкает в сечении  $B$  к резервуару, уровень в котором

сохраняется постоянным и равным  $h_0$  над осью трубопровода. Этот же уровень имеет место (сечение  $D$ ) при первоначальном установившемся течении и в уравнительной башне. Соответственной точкой первоначального режима является (фиг. 62) точка  $M$  абсциссы  $q_0$  и ординаты  $h_0$ .

Пусть в момент времени нуль вентиль  $V$  мгновенно закрывается; расход в сечении  $A$  в первое мгновение сохраняется, но будет поступать в уравнительную башню, уровень  $D$  в которой начнет повышаться.



Фиг. 62

Будем производить построение для полных циклов и примем за единицу времени величину  $\tau = \frac{l}{a}$ .

Для наблюдателей, отбывающих из сечения  $B$  в интервале времени от  $-1$  до  $+1$ , соответственные точки режима по прибытии в сечение  $A$  (в интервале времени от  $0$  до  $2$ ) будут находиться на характеристической прямой  $MN$ , имеющей угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{gS}$  и проходящей через точку первоначального режима  $M$ . С другой стороны, рассматривая отрезок времени  $2\tau$  достаточно малым для того, чтобы можно было считать изменения расхода в зависимости от времени в сечении  $A$  линейными, мы можем представить себе явление в урав-

нительной башне, протекающим следующим (условным) образом: для наблюдателя, выбывающего в момент времени 0 из сечения  $A$ , где режим в этот момент выражен еще точкой  $M$  в направлении к сечению  $D$ , характеристической будет прямая  $MN'$ , имеющая угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \beta = \frac{2\tau}{2S} = -\frac{\tau}{S}$  (см. § 31). При достижении этим наблюдателем в момент времени 1 сечения  $D$  режим характеризуется значением расхода равным нулю, вследствие чего соответственная точка  $1_D$  должна находиться на оси ординат и на прямой  $MN'$ . При возвращении наблюдателя из сечения  $D$  новая характеристическая прямая пройдет через только что найденную точку  $1_D$ , имея угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \beta = +\frac{\tau}{S}$ ; при достижении сечения  $A$  в момент времени 2 соответственная точка должна находиться на этой прямой и на характеристической прямой  $MN$ , соответствующей движению наблюдателя из сечения  $B$ ; это будет точка  $2_A$ .

Поскольку мы хотим определить лишь режимы для полных циклов, достаточно проследить перемещения двух наблюдателей, периодически встречающихся в сечении  $A$  после прохождения одним из них пути от сечения  $A$  к  $B$  и обратно, и другим — от сечения  $A$  к  $D$  и обратно. Таким образом, перемещение наблюдателя в одном и другом направлении вдоль трубопровода дает прямую  $2_A 3_B$ , которой определяется соответственная точка  $3_B$  в сечении  $B$  для момента времени 3 (на горизонтальной линии  $h_0 = \text{const}$ ) и затем прямую  $3_B 4_A$ , справедливую для наблюдателя прибывшего в сечение  $A$  в момент времени 4. Движение наблюдателя вдоль башни дает прямую  $2_A 3_D$  при перемещении от сечения  $A$  к  $D$ , затем прямую  $3_D 4_A$  при возвращении к сечению  $A$ . В момент прибытия наблюдателя в сечение  $A$  соответственная точка ( $4_A$ ) будет находиться на пересечении прямой  $3_D 4_A$  и прямой  $3_B 4_A$ .

Продолжая построение аналогичным образом, найдем ломаную линию, соответствующую перемещениям наблюдателя вдоль трубопровода, показанную на фиг. 62 сплошными толстыми линиями  $1_B 2_A 3_B 4_A \dots 11_B 12_A 13_B 14_A 15_B 16_A 17_B \dots 26_A 27_B 28_A 29_B 30_A$  и показанную тонкими линиями ломаную  $0_A 1_D 2_A 3_D 4_A 5_D 6_A 7_D 8_A 9_D 10_A \dots 17_D 18_A 19_D 20_A 21_D 22_A 23_D \dots 28_A 29_D 30_A$ , соответствующую перемещениям наблюдателя в башне. Вершины этих линий являются соответственными точками для полных циклов в сечениях  $B$  и  $A$ .

Примечание I. При рассмотрении полученного графика возникают несколько существенных замечаний. В интервале времени от 6 до 8 течение в сечении  $A$  получает обратное направление, после достижения уровнем в уравнивательной башне его максимального значения. В момент времени 15 в сечении  $B$  расход обратного течения достигает максимума, величина которого, замеренная на графике, точно совпадает с первоначальным расходом  $q_0$ .

Между моментами 20 и 22 уровень в башне снижается до минимума, причем снижение уровня  $\xi_r$  в точности равняется подъему  $\xi_a$ ; в момент времени 29 расход в сечении  $B$  достигает максимума, величина которого, определяемая с графика, точно равняется величине первоначального расхода.

Равенство между собой значений расхода обратного течения и первоначального, и также значений подъема и понижения уровня в башне, является следствием полной симметрии в колебаниях, обусловливаемой предположением об отсутствии потерь энергии. Но заслуживает подлинного удивления необыкновенная точность, с какой это обстоятельство констатируется при графическом построении. Это еще раз подтверждает высокую степень точности таких построений, соответствующую точности аналитических вычислений.

Примечание II. Решенная задача является задачей о колебаниях столба воды в уравнильной башне относительно среднего положения уровня  $D$ . Учтя массу воды в трубопроводе  $\frac{\rho}{g} Ls$  и силы давления  $\bar{\omega}hS$  в сечениях  $A$  и  $B$ , обусловливаемые значениями напора  $h$  в этих сечениях, можно составить дифференциальное уравнение движения воды в трубопроводе при первоначальном расходе  $q_0$  и расчетным путем определить величины  $\xi_r$  и  $\xi_a$ .

Обычно это явление и соответствующий расчет называют «колебанием масс» в башне, отделяя этот вопрос от колебаний давления, возникающих вследствие изменений расхода в том же трубопроводе, называемых ударной волной. Приведенное выше построение, точно воспроизводящее действительное явление, показывает, что такое деление процесса на два, предполагаемых независимыми, является надуманным.

Внезапное прекращение расхода в сечении  $A$  не может отразиться в трубопроводе  $AB$  иначе, как в виде распространения волны. Построение, дающее возможность проследить за этим распространением, показывает, что некоторому числу перемещений фронта волны от сечения  $A$  до  $B$  и обратно (в нашем случае это число равняется семи) соответствует половина ( $\xi_a$ ) амплитуды колебаний уровня в башне. Мы имеем здесь единое явление, параметром которого является число раз пробега фронта волны в двух направлениях, необходимое для того, чтобы течение изменило свое направление. В случае  $n = 1$  соответственные точки были бы на первой характеристической прямой вплоть до расхода, равного нулю, и превышение давления равнялось бы  $\xi_a = \frac{ac_0}{g}$ ; при увеличении  $n$  соответственные точки располагаются на довольно сложных кривых. При  $n = \infty$  соответственные точки оказались бы лежащими на контуре эллипса с большой полуосью ( $\pm q_0$ ) и малой ( $\pm \xi_a$ ), зависящий от величины  $S$ ; однако между этими двумя случаями не существует различий в физическом смысле, и разде-

ление их может только способствовать возникновению ненужных неясностей.

Заслуживает быть отмеченным, что дифференциальное уравнение, о котором упоминалось выше, соответствует как раз случаю  $n = \infty$ , или, переходя на язык физики, случаю бесконечной скорости распространения волн. Практически уже при  $n = 7$  точки расположены на контуре эллипса, и применение дифференциального уравнения (соответствующего, как указывалось, случаю  $n = \infty$ ) закономерно уже в этом случае.

Поэтому в данном простом случае может оказаться иногда более практичным решать уравнение, чем делать графическое построение. Но при учете потерь напора дифференциальное уравнение уже не имеет аналитического решения и графические построения опять обретают их преимущества.

Примечание III. *Промежуточные режимы.* Для определения промежуточных режимов для моментов времени  $\frac{2\tau}{n}$ ,  $(2\tau + \frac{2\tau}{n})$ ,  $(4\tau + \frac{2\tau}{n})$ ... , надлежит поступать следующим образом.

Характеристическая прямая башни имеет угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \beta = \pm \frac{j}{2S}$ , где  $j$  — время перемещения наблюдателя от сечения  $A$  до сечения  $D$  и обратно. Первая промежуточная точка ищется для момента времени  $\frac{2\tau}{n}$ ; это время должно равняться продолжительности первого перемещения наблюдателя в двух направлениях вдоль башни; следовательно, характеристическая прямая для этого наблюдателя будет иметь угловым коэффициентом

$$\operatorname{tg} \beta' = \pm \frac{\tau}{nS} = \frac{1}{n_j} \operatorname{tg} \beta.$$

Поскольку последующие значения интервалов равняются  $2\tau$ , характеристические прямые башни вновь получат значение угловых коэффициентов  $\operatorname{tg} \beta = \pm \frac{\tau}{S}$ .

В соответствии с этим произведено построение на фиг. 63.

Примечание IV. *Постепенное закрытие затвора.* В предыдущем примере мы предполагали закрытие затвора мгновенным. Можно поставить вопрос о том, как надлежит учитывать постепенное закрытие — например, производимое в течение времени, равного времени движения волны в прямом и обратном направлениях. Фиг. 64 показывает, как меняется построение в этом случае.

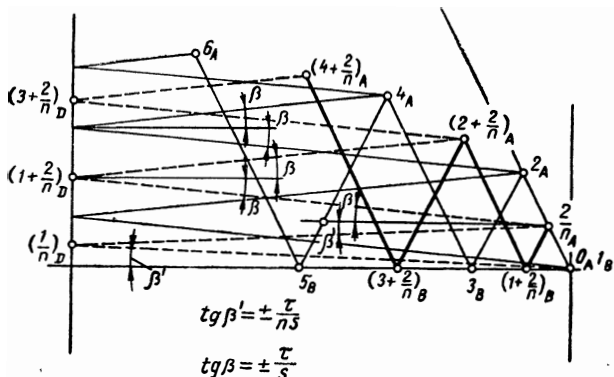
Характеристическая прямая  $MN$  трубопровода, справедливая в сечении  $A$  на отрезке времени от нуля до  $2$ , сохраняется без изменений, характеристическая же прямая башня изменяется и строится следующим образом.

Для наблюдателя, выбывающего из сечения  $A$  в направлении к  $D$  в момент времени нуль, характеристическая прямая проходит



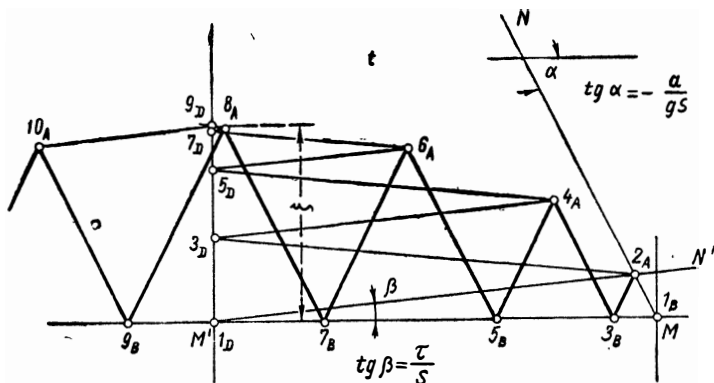
через соответственную точку для сечения в основании башни при расходе, равном нулю (так как затвор только начинает закрываться).

Этой точкой является, следовательно, точка  $M'$  на оси ординат. По прибытии в момент времени 1 в сечение  $D$  наблюдатель



Фиг. 63.

констатирует там расход, равный также нулю, и, следовательно, соответственная точка  $1_D$  совпадет с  $M'$ . При возвращении наблюдателя в направлении к  $A$  характеристикой будет прямая,

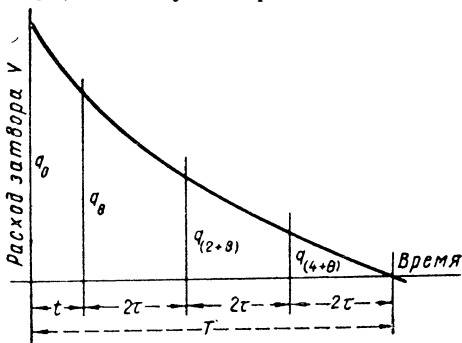


Фиг. 64.

проходящая через точку  $M'$  и имеющая угловым коэффициентом  $\text{tg } \beta = +\frac{\tau}{S}$ ; пусть это будет ~~прямая~~  $M'N'$ . Соответственной точкой  $2_A$  в момент времени 2 будет точка пересечения этой прямой и характеристики  $MN$  трубопровода. Дальнейшие построения производятся идентично построениям для предшествующего случая.

Предположим теперь, что закрытие затвора производится за некоторое время  $T$ , при некотором заданном законе изменения

расхода во времени, например, таком, как показано на фиг. 65. Для полной общности предположим  $T$  дробным по отношению к  $\tau$ , например, равным  $T = t + n2\tau$ , и поставим задачей нахождение соответственных точек для полных циклов с начала закрытия затвора. Разделим сначала отрезок  $T$  на доли величиной  $\tau$ ,  $2\tau$ ,  $2\tau \dots$  и обозначим расходы, соответствующие полученным моментам времени, через  $q_0, q_{2+\theta}, q_{4+\theta} \dots$ . Будем различать далее (фиг. 62) сечение  $A$  в конце трубопровода и сечение  $A'$  в основании башни. Расход  $q_{A'}$  в башне будет равен разности расхода  $q_A$  в трубопроводе и расхода  $q$ , пропускаемого затвором, напор же в сечениях  $A$  и  $A'$  будет одинаков.



Фиг. 65.

Примем за единицу измерения времени величину

$$\tau = \frac{l}{a}$$

и поставим задачей найти соответственные точки в сечении  $A$  для моментов времени

$$\left(\frac{t}{\tau}\right)_A = \theta_A; (2 + \theta)_A; (4 + \theta)_A; (6 + \theta)_A; (8 + \theta)_A; \dots (10 + \theta)_A.$$

В сечении  $A$  в момент времени  $\theta$  (фиг. 66) соответственная точка, как и прежде, будет находиться на прямой  $MN$ , проходящей через точку  $M$  первоначального режима  $q_0 h_0$  и имеющей угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{gS}$ .

В сечении  $A'$  в момент времени  $\theta$  соответственная точка будет находиться на прямой  $M'N'$ , проходящей через соответственную точку  $M'$ , или  $\left(\frac{\theta}{2}\right)_D$  для сечения  $D$  в момент времени  $\frac{\theta}{2}$ ; отметим, что точка  $M'$  одновременно будет точкой  $O_A$  для сечения  $A'$  в момент времени нуль; угловым коэффициентом прямой  $M'N'$  является  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau}{2S}$ .

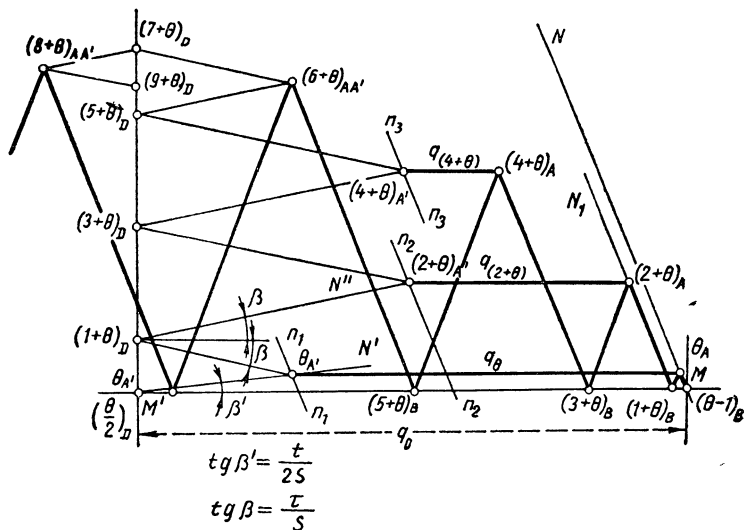
Проведем параллельно  $MN$  прямую  $n_1 n_1$ , отстоящую от  $MN$  на величину  $q_0$  расхода, пропускаемого затвором в момент времени  $t$ , определяемого с чертежа на фиг. 65; пересечение прямых  $n_1 n_1$  и  $M'N'$  определит искомую точку  $\theta'_{A'}$ . Действительно, если провести горизонтальную линию через эту точку и отметить в месте ее пересечения с  $MN$  точку  $\theta_A$ , то установим следующее:

$$q_{\theta_A} - q_0 = q_{\theta_{A'}}.$$

Возвращаясь из  $A$  в сечение  $B$ , куда он прибывает в момент времени  $(1 + \theta)$ , наблюдатель зафиксирует здесь соответственную

точку  $(1 + \theta)_B$  на прямой, проходящей через точку  $\theta_A$  и имеющей угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{gS}$ . Потом, возвращаясь к основанию башни  $A'$ , он прибывает туда в момент времени  $(2 + \theta)$ , и соответственная точка будет на прямой с угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{gS}$ , проходящей через  $(1 + \theta)_B$ , т. е. на прямой  $(1 + \theta)_B N_1$ .

Для наблюдателя, совершающего перемещения от  $A'$  к  $D$  и обратно, характеристическими прямыми будут  $\theta_A, (1 + \theta)_D$ , затем



Фиг. 66.

$(1 + \theta)_D N''$  с угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau}{S}$ . Проведя параллельно прямой  $(1 + \theta)_B N_1$  линию  $n_2 n_2$  на расстоянии  $q_{(2+\theta)}$ , устанавливаемом из графика на фиг. 65, найдем на прямой  $(1 + \theta)_D N''$  искомую точку  $(2 + \theta)_{A'}$ , режима в  $A'$ , а проведя горизонтальную линию через эту точку, найдем на прямой  $(1 + \theta)_B N_1$  соответственную точку  $(2 + \theta)_A$  в сечении  $A$ ; действительно имеем

$$q_{(2+\theta)_A} - q_{(2+\theta)} = q_{(2+\theta)_{A'}}$$

Таким же образом можно найти точки  $(4 + \theta)_{A'}$  и  $(4 + \theta)_A$  — отстоящие одна от другой на величину  $q_{(4+\theta)}$ , — построив две ломаные линии

$$(2 + \theta)_A (3 + \theta)_B (4 + \theta)_A \text{ и } (2 + \theta)_{A'} (3 + \theta)_D (4 + \theta)_{A'}$$

Наконец, в момент времени  $(6 + \theta)$  в соответствии с кривой (фиг. 65) расход, пропускаемый затвором, будет равен нулю.

В этом случае точку  $(6 + \theta)_A$  можно найти, построив ломаные линии

$$(4 + \theta)_A(5 + \theta)_B(6 + \theta)_A \text{ и } (4 + \theta)_{A'}(5 + \theta)_D(6 + \theta)_{A'}.$$

При этом точки  $(6 + \theta)_A$  и  $(6 + \theta)_{A'}$  окажутся совмещенными в одну точку  $(6 + \theta)_{AA'}$ ; после этого построения производятся, как на фиг. 62.

## В. Случай пренебрежения потерями напора в трубопроводе, но учета потерь у основания уравнильной башни

**§ 48. Постепенное закрытие вентиля.** Схема устройства для данного случая аналогична рассмотренной в предыдущих случаях с той разницей, что в месте соединения уравнильной башни с трубопроводом имеется суженное сечение; при прохождении воды через это сечение имеет место перепад напора (потеря напора), в результате чего напор в трубопроводе в сечении  $A$  (фиг. 67) будет больше, чем напор у основания уравнильной башни в  $A_1$  в случае наполнения башни и меньше — в случае, когда происходит опорожнение башни. Эта потеря напора пропорциональна кинетической энергии воды в сужении, т. е. квадрату расхода, и выражается уравнением

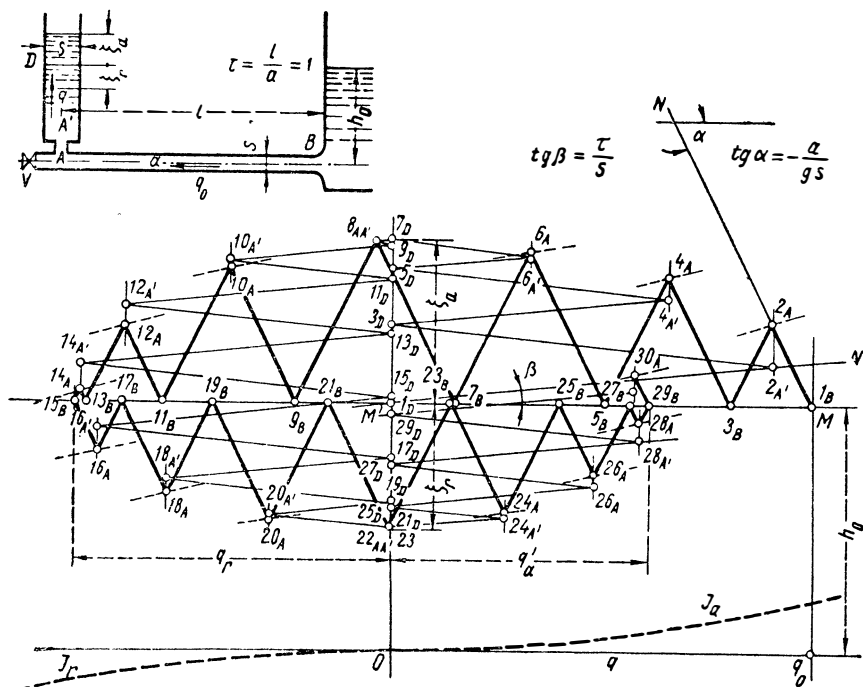
$$J = \zeta q^2,$$

которое может быть представлено параболой  $J_a$  для случая наполнения и параболой  $J_r$  — для случая опорожнения башни. Сужение может быть конструктивно оформлено таким образом, чтобы  $J_a$  было либо больше, либо меньше  $J_r$  в зависимости от того, что является более опасным — увеличение или снижение давления.

Предположим сначала закрытие вентиля, происходящим постепенно в течение времени  $2\tau$ . Мы установили ранее (фиг. 64), что для наблюдателя, прибывающего в сечение  $A'$  из  $D$  в момент времени  $2$ , соответственная точка будет на прямой  $M'N'$  (фиг. 67), имеющей угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau}{S}$ . Для наблюдателя же, который перемещается вдоль трубопровода и прибывает в момент времени  $2$  в сечение  $A$ , соответственная точка будет на прямой  $MN$ , проходящей через точку  $M$  первоначального режима  $h_0q_0$  и имеющей угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{gS}$ . Оба эти наблюдателя констатируют один и тот же расход, но напор в сечении  $A$  будет превышать напор в  $A'$  на величину  $J_A$ , равную потере напора. Перенесем поэтому ординаты параболы  $J_A$  выше прямой  $M'N'$  и построим только весьма небольшую часть этой кривой, которая пересечет прямую  $MN$ ; точка пересечения  $2_A$  будет искомой соответственной точкой для трубопровода, а

точка  $2_{A'}$  на той же вертикали и на прямой  $M'N'$  будет соответственной точкой для сечения  $A'$  у основания башни. Расстояние между точками  $2_A$   $2_{A'}$  равно ординате параболы  $J_a$  и, следовательно, точно соответствует потере напора, возникшей в сужении.

В полученной таким способом точке  $2_{A'}$  берет начало ломаная линия  $2_{A'} 3_D 4_{A'}$ , соответствующая перемещениям наблюдателя между сечениями  $A$  и  $D$  и обратно в уравнильной башне.



Фиг. 67.

В точке  $2_A$  берет начало ломаная линия  $2_A 3_B 4_A$  перемещений наблюдателя между сечениями  $A$  и  $B$  и обратно в трубопроводе (аналогично тому, как на фиг. 64). Но при этом снова надо добавить к ординатам прямой  $3_D 4_{A'}$  ординаты параболы  $J_a$ ; пересечение получаемой в результате кривой и прямой  $3_B 4_A$  определяет соответственную точку  $4_A$  в сечении  $A$  для момента времени  $t$ ; на той же вертикали будет находиться соответственная точка  $4_{A'}$  в сечении  $A'$  уравнильной башни.

Продолжать дальнейшее пояснение построений нет необходимости; оно производится аналогично тому, как в случае построений на фиг. 62, но в данном случае в сечении  $A$  всегда будут две точки, расстояние между которыми равно ординате параболы  $J_a$  в случае положительных расходов (наполнение башни), когда

точка для сечения  $A$  будет находиться выше, чем для сечения  $A'$ , или параболы  $J_p$  в случае отрицательных расходов (опорожнение башни), когда соответственная точка для сечения  $A$  будет ниже точки для сечения  $A'$ . Для нахождения этих точек достаточно производить построение очень короткого отрезка кривой, включающий в себя искомую точку пересечения. На фиг. 67 этот маленький отрезок везде выполнен пунктирными линиями.

Сопоставляя построения на фиг. 67 и 62, можно установить, что уровень  $\xi_a$  в уравнивательной башне достигает максимума в тот же момент времени  $7_D$ , как и прежде, но что он несколько ниже; расход при опорожнении башни достигает максимума также в момент времени  $15_B$ , но он значительно меньше первоначального расхода  $q_0$ . Аналогично понижение уровня  $\xi_r$ , достигнутое также в момент времени  $21_D$  меньше подъема  $\xi_a$ . Наконец, максимальный расход  $q'_a$  при наполнении башни имеет место также в момент времени  $29_B$ , но при меньшем значении, чем  $q_r$ . Следовательно, соответственные точки режима в сечении  $A$  уже не будут находиться на замкнутой бесконечно повторяющейся кривой, но на своего рода спирали, которая сходится к точке  $M$  нулевого расхода. Таким образом, колебания становятся затухающими, оставаясь синхронными с колебаниями в предшествующем случае. Эти результаты хорошо известны, поскольку можно, написав для этого случая соответствующие дифференциальные уравнения, решить их, например, графическим путем; однако описываемое здесь построение, значительно проще и выразительнее, чем любой расчет или какое-либо иное графическое решение дифференциального уравнения, поскольку одновременно с решением здесь воспроизводится все явление в целом.

**§ 49. Мгновенное закрытие вентиля.** Рассмотрим теперь мгновенное закрытие вентиля  $V$ ; построения для этого случая показаны на чертеже 68. Они могут быть сопоставлены с построениями на фиг. 62, выполненными для аналогичного случая, но пренебрегая потерями напора у основания уравнивательной башни.

При мгновенном закрытии вентиля сейчас же возникает течение воды сквозь диафрагму, что мгновенно создает избыточное давление в сечении  $A$  по отношению к давлению в сечении  $A'$ , равное потере напора, соответствующего этому расходу. Найдем соответственную точку для режима, который установится в момент времени нуль.

Прямая  $MN$ , которая проходит через соответственную точку начального режима  $O_A$  или  $1_B$ , будет справедливой для наблюдателей, прибывающих в сечение  $A$  в интервале времени от нуля до 2. Миновав суженное сечение, наблюдатели констатируют понижение напора в результате потерь, определяемых ординатами параболы  $J_a$ , поэтому зависимость между напором и расходом у основания уравнивательной башни  $A'$  представляется пунктирной кривой  $nt$ , получаемой вычитанием ординат  $J_a$  из ординат



прямой, имеющей угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \beta = -\frac{v}{S}$ , проходящей через соответственную точку  $O_{A'}$ . Соответственная точка  $1_D$  для момента времени  $1$  в сечении  $D$  должна находиться на ординате, соответствующей нулевому расходу; при возвращении из сечения  $D$  к  $A$  соответственные точки будут на прямой, имеющей угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \beta = +\frac{v}{S}$  и проходящей через точку  $1_D$ ;

в момент времени  $(2 - \varepsilon)$  прибытия наблюдателя в  $A'$  соответственная точка  $2_{A'}$  должна находиться на пересечении названной прямой и параболы  $mn$ , а режим в трубопроводе будет определяться точкой  $2_A$ , находящейся на вертикали, проходящей через  $2_{A'}$ . Но во время  $(2 + \varepsilon)$  режим в сечении  $A$  будет установлен наблюдателем, выходящим из  $A$  в момент времени  $(0 + \varepsilon)$ , для которого (наблюдателя) соответственные точки при его перемещении из  $A$  в  $B$  были на прямой, проходящей через  $O_{A'}$ , имеющей угловой коэффициент  $+\frac{a}{gS}$ , затем в точке  $1'_B$  при прибытии в сечение  $B$  в момент времени  $1$  и, наконец, при возвращении наблюдателя из сечения  $B$  и его прибытии в  $A$  в момент времени  $(2 + \varepsilon)$  — на прямой, имеющей угловой коэффициент  $-\frac{a}{gS}$  и проходящей через точку  $1'_B$ . Что касается режима в уравнительной башне, то он будет представляться параболой  $m'n'$ , получаемой при вычитании из ординат названной прямой ординат параболы  $J_a$ . Таким образом, в момент времени  $(2 - \varepsilon)$  режим в сечении  $A'$  у основания уравнительной башни определяется точкой  $2_{A'}$ , на параболе  $mn$ , но в момент времени  $(2 + \varepsilon)$  он определяется параболой  $m'n'$ . Так как  $\varepsilon$  является бесконечно малой величиной, уровень в башне за время от  $(2 - \varepsilon)$  до  $(2 + \varepsilon)$  практически не изменяется, следовательно, соответственная точка будет находиться на горизонтальной линии, проходящей через  $2_{A'}$ , т. е. это будет точка  $2'_A$ , на параболе  $m'n'$ ; на вертикали, проходящей через эту точку, будет находиться соответственная точка  $2'_A$  для трубопровода.

Построения будут идентичны описанным также при каждом последующем движении наблюдателя в прямом и обратном направлениях. В интервале времени от  $(2 + \varepsilon)$  до  $(4 - \varepsilon)$  перемещения наблюдателя в трубопроводе найдут отражение в виде ломаной линии  $2_A 3_B 4_{A'}$ , а перемещения в уравнительной башне дадут ломаную линию  $2'_A 3'_D 4_A$ , причем точки  $4_A$  и  $4_{A'}$  будут на одной вертикали, на взаимном расстоянии, равном ординате параболы  $J_a$ . Режим для момента времени  $(4 + \varepsilon)$  будет получен в результате вычерчивания ломаной линии  $2'_A 3'_B 4'_A$  и горизонтальной линии, проходящей через точку  $4_{A'}$ , что определяет точки  $4'_A$  и  $4'_B$  на одной вертикали, взаимно отстоящие на величину ординаты параболы  $J_a$ .



Также и в дальнейшем при каждом перемещении волны в прямом и обратном направлениях будет констатировано резкое изменение напора в трубопроводе в сечении  $A$  и резкое изменение расхода как в трубопроводе, так и в уравнильной башне.

### С. Случай учета потерь напора как в трубопроводе, так и у основания уравнильной башни

**§ 50. Режим на концах трубопровода.** Ограничимся задачей установления режимов только для концевых сечений трубопровода. В этом случае достаточно заменить потери напора, распределенные вдоль всего трубопровода перепадом напора, сосредоточенным в одном сечении, пусть, например, в сечении  $B$  непосредственно у резервуара. В этом случае построения не дадут возможности определить режимы в любом сечении между  $A$  и  $B$ , но в этих последних сечениях режим определится вполне строго (подразумевая под  $B$ , конечно, сечение в пределах между резервуаром и фиктивной диафрагмой, а не за последней, если смотреть со стороны резервуара). Схема установки и графические построения даны на фиг. 69.

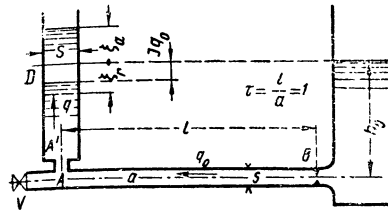
Потери напора вдоль трубопровода  $AB$ , равные сосредоточенным потерям в фиктивной диафрагме в сечении  $B$ , представлены параболой  $J_{AB}$ , имеющей ординату  $J_{q_0}$  при первоначальном расходе  $q_0$ . Для наблюдателей, которые прибывают в сечение  $B$ , зависимость между расходом и напором будет выражаться уже не горизонтальной линией с ординатой  $h_0$ , а ветвью параболы  $\Psi_B$ , получаемой вычитанием из  $h_0$  ординат параболы  $J_{AB}$  при течении от сечения  $B$  к сечению  $A$  или прибавлением этих ординат в случае, когда течение будет иметь направление от сечения  $A$  к сечению  $B$  (что дает ветвь параболы  $\Psi_B$  на левой стороне от оси ординат).

Соответственная точка начального режима  $M$  находится на пересечении параболы  $\Psi_B$  с ординатой абсциссы  $q_0$ . Характеристическая прямая  $MN$ , справедливая для всех наблюдателей, выбывающих из сечения  $B$  до момента времени  $\tau = \frac{L}{a}$ , проходит через эту точку и ее угловым коэффициентом является

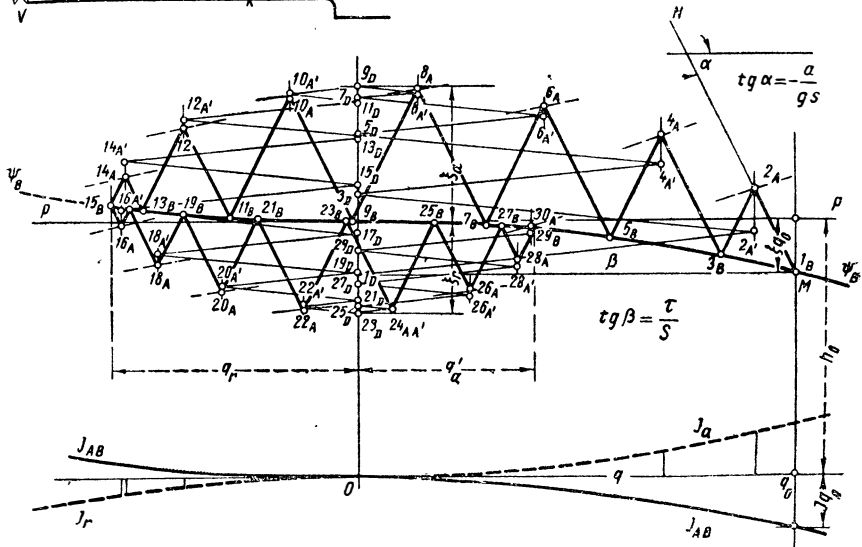
$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{gS}.$$

Рассмотрим случай постепенного закрытия вентиля  $V$  в течение времени  $\frac{2L}{a}$ , т. е. при тех же условиях, которые были приняты в § 48 и при построениях на фиг. 67. Единственной разницей при построениях на фиг. 67 и 69 является то, что соответственные точки для сечения  $B$  будут расположены теперь на параболе  $\Psi_B$  вместо того, чтобы быть на горизонтали с ординатой  $h_0$ . Таким образом, нет необходимости заново описывать

построения; отметим лишь, что ломаная линия, соответствующая перемещениям фиктивного наблюдателя в уравнильной башне между ее основанием  $A'$  и поверхностью воды в сечении  $D$ , исходит теперь из точки  $1_D$ , находящейся на оси ординат на высоте, равной ординате точки  $M$ . Действительно, уровень в уравнильной башне при начальном режиме ниже уровня в резервуаре на величину потерь  $J_{q_0}$  в трубопроводе.



Из сопоставления обеих чертежей видно, что отклонения  $\xi_a$  и  $\xi_r$  в уровне воды в башне стали во втором случае меньшими, равно как уменьшилось и значение расхода  $q_r$ , возвратного по-



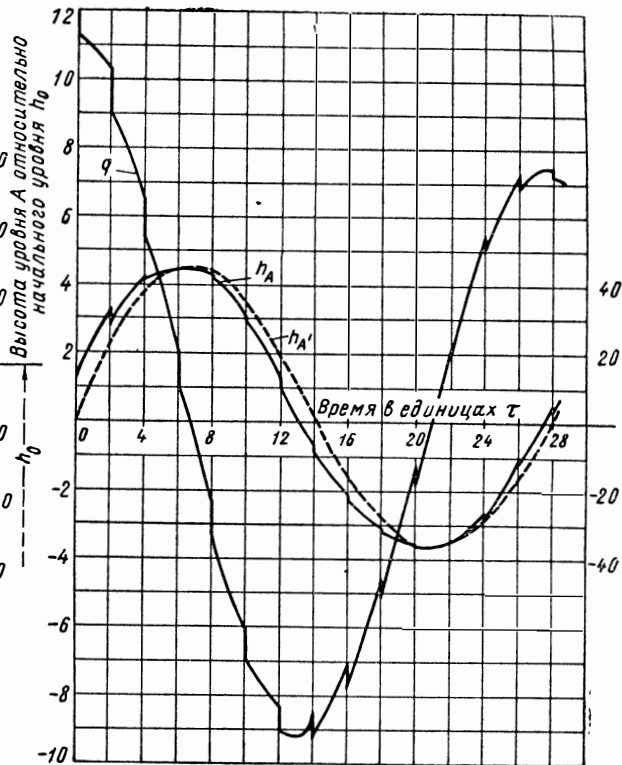
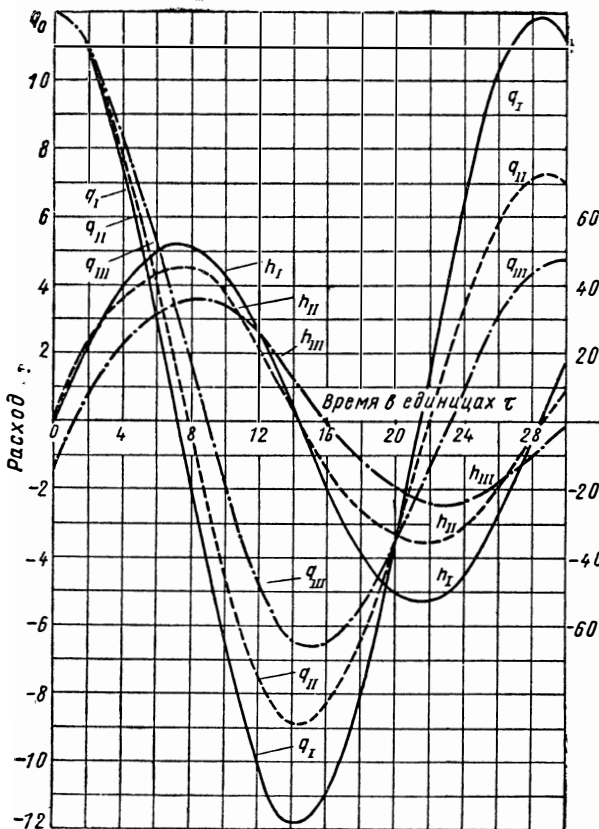
Фиг. 69.

тока и новое значение  $q'_a$  при течении в направлении к  $A$ ; полный цикл колебаний завершается за то же время  $30$ , но они значительно ослаблены.

§ 51. Графики сопоставления результатов построений, произведенных в §§ 47, 48, 49 и 50. Результаты трех построений, исполненных на фиг. 62, 67 и 69, сведены в графики на фиг. 70. Приведенные здесь кривые зависимости напора в сечении  $A$  и расхода в функции от времени дают возможность с одного взгляда сопоставить три исследованных случая и определить влияние установленной у основания уравнильной башни диафрагмы и влияние потерь напора в трубопроводе на режим в системе.

Фиг. 70. Случай закрытия вентиля в течение времени  $2\tau$ :

$q_I$  — расход в случае уравнительной башни без диафрагмы и без учета потерь напора в трубопроводе;  $h_I$  — давление в сечении А;  $q_{II}$  — расход при наличии диафрагмы в уравнительной башне, но без учета потерь напора в трубопроводе;  $h_{II}$  — давление в сечении А;  $q_{III}$  — расход при наличии диафрагмы в уравнительной башне и сосредоточенных в сечении В потерях напора в трубопроводе;  $h_{III}$  — давление в сечении А.

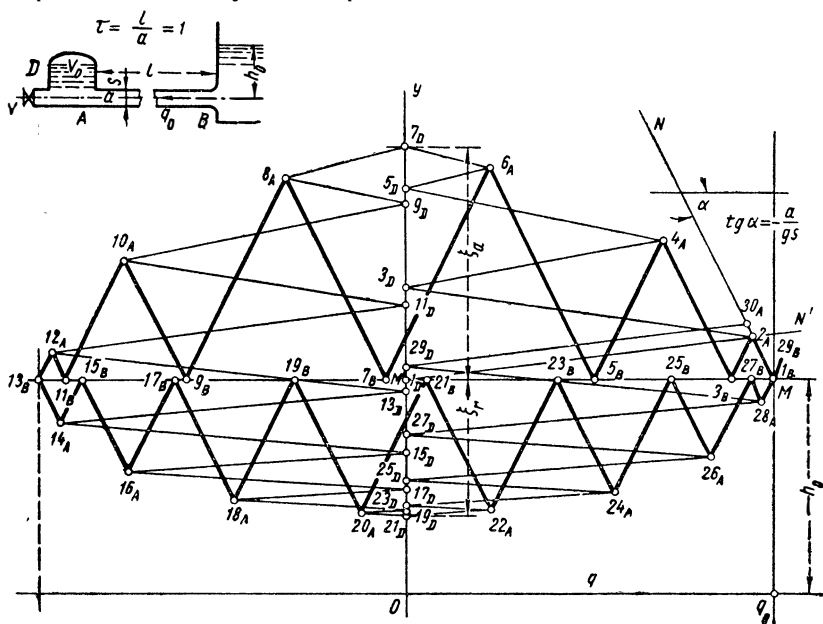


Фиг. 71. Случай мгновенного закрытия затвора:  $q$  — расход при наличии диафрагмы у основания уравнительной башни, но без учета потерь напора в трубопроводе;  $h_A$  — давление в сечении А;  $h_A'$  — давление в сечении А.

Случай внезапного закрытия затвора (фиг. 68) представлен отдельно на фиг. 71. На кривых этого графика можно видеть резкие скачки в значениях напора и расхода в сечении  $A$ , возникающие через интервалы времени  $\frac{2L}{a}$ ; эти скачки не оказывают, однако, влияния на кривую напора в сечении  $A'$  (т. е. на график уровня в уравнивательной башне), сохраняющую плавность.

### КОЛПАК СО СЖАТЫМ ВОЗДУХОМ НА КОНЦЕ ТРУБОПРОВОДА

§ 52. Случай соединения колпака со сжатым воздухом и питающего бассейна при посредстве простого трубопровода с постоянными характеристиками. На фиг. 72 приведена схема установки и построения для случая закрытия вентиля на конце трубопровода



Фиг. 72.

происходящего за время  $\frac{2l}{a}$ , где  $l$  — длина трубопровода между воздушным колпаком и питающим бассейном.

Потерями напора в коммуникации между воздушным колпаком и трубопроводом пренебрегается; также пренебрегается высотой столба воды в воздушном колпаке по сравнению с высотой  $h_0$  положения вентиля под уровнем в питающем бассейне. Установившийся начальный режим характеризуется значениями расхода  $q_0$  и напора  $h_0$ , которые являются координатами точки  $M$  на фиг. 72. За единицу времени при построениях принята величина  $\tau = \frac{l}{a}$ .

Как указывалось в § 34, ломаная линия, воспроизводящая процессы в воздушном колпаке, состоит из прямых, угловой коэффициент которых выражен уравнением (8) упомянутого выше параграфа 34 (которое мы здесь повторяем)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{j}{2} \cdot \frac{(h + h_a)^2}{V_0(h_0 + h_a)} = \frac{\Delta h}{Q}, \quad (1)$$

где  $V_0$  — первоначальный объем воздуха,  $j$  — время перемещения в прямом и обратном направлениях фиктивного наблюдателя в воздушном колпаке,  $h_a$  — атмосферное давление в м. вод. ст.; формула (1) предполагает также, что сжатие воздуха происходит изотермически. Как и в § 34, мы начнем с построения предварительного чертежа (фиг. 73), аналогичного фиг. 37, а, дающего углы  $\pm \beta$  для величины  $h$ , меняющейся от 0 до максимального значения, могущего встретиться при построениях. На фиг. 73 построены прямые для углов  $\beta$  при величине  $h$ , меняющейся через каждые  $\Delta h = 0,5$  в пределах от  $h = 1,5$  до  $h = 5$  и через  $\Delta h = 1$  в пределах от  $h = 5$  до  $h = 15$ . Каждая из прямых получена посредством исчисления абсциссы  $Q$  с помощью следующего уравнения, вытекающего из уравнения (1):

$$Q = - \left[ \frac{2V_0(h_0 + h_a)}{j \left( h + h_a + \frac{\Delta h}{2} \right)^2} \right] \Delta h, \quad (2)$$

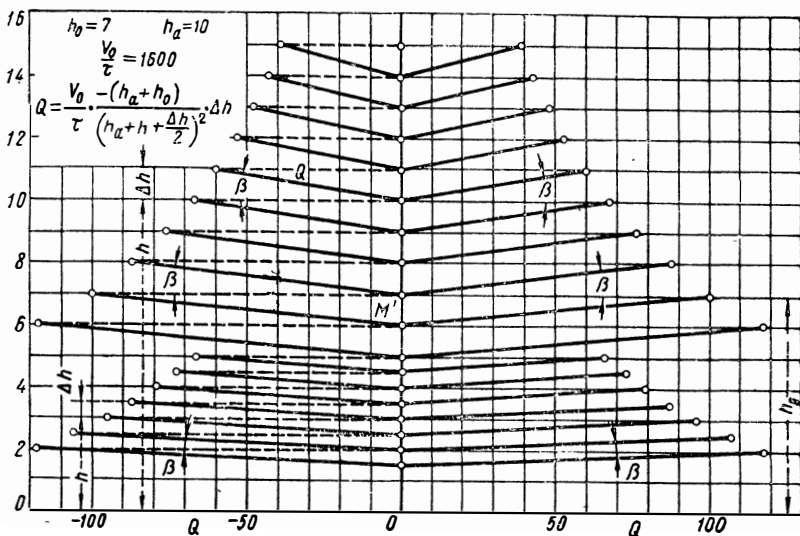
где  $h + \frac{\Delta h}{2}$  — средняя высота элемента соответствующей прямой.

В нашем примере мы поставим задачей нахождение соответственных точек для полных циклов, т. е. с интервалом времени  $\frac{2t}{a}$ , чему соответствует  $j = 2$ . Внесем это в уравнение (2) и внесем также числовые значения  $V_0 = 1.600$ ,  $h_0 = 7$  и  $h_a = 10$ , которые мы примем в рассматриваемом примере. Фиг. 73 подкладывается под фиг. 72, выполняемую на кальке; благодаря этому все прямые на фиг. 73 будут видны и могут быть соответствующим образом расположены по отношению к началу 0 координат.

Для наблюдателя, который прибывает в сечение  $A$  в момент времени 2, характеристической прямой трубопровода будет  $MN$  (фиг. 72), имеющая угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{gS}$  и проходящая через точку  $M$ , являющуюся соответственной точкой начального режима, существующего еще во время его выбытия из сечения  $B$  в момент времени 1.

Для фиктивного наблюдателя, перемещающегося в воздушном колпаке и прибывающего в сечение  $A$  в момент времени 2, характеристическая прямая проходит через точку  $M'$ , определяемую нулевым значением расхода и напором  $h_0$  в сечении  $D$  на поверхности воды в резервуаре в момент времени 1. Угловым коэффициентом этой прямой будет угловой коэффициент луча на фиг. 73, проходящего через ту же точку  $M'$ . Отметим, что данная прямая,

построенная до  $h = 8$ , еще не встречает прямую  $MN$ , поэтому следует продолжить построение за точку  $h = 8$ , проводя через последнюю другую прямую, угол которой  $\beta$  должен равняться углу луча, проходящего через точку  $h = 8$  на нижнем (т. е. подложенном под кальку) чертеже фиг. 73. Таким образом создается не одна прямая, но начало многоугольника, или вернее, как это уже было отмечено в § 34, кривая, представленная отрезками касательных. Эта кривая пересекает характеристическую прямую  $MN$  в точке  $2_A$ , которая будет соответственной точкой для сечения  $A$  в момент времени 2.



Фиг. 73.

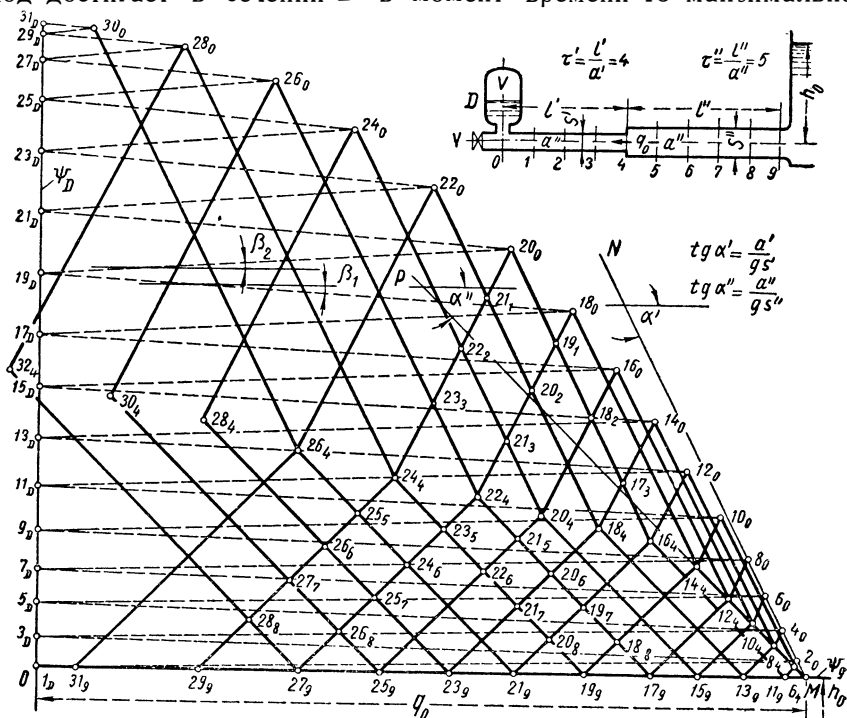
Следующее перемещение наблюдателя в прямом и обратном направлениях внутри воздушного колпака представляется ломаной линией  $2_A 3_D 4_A$ , где элементы  $2_A 3_D$  и  $3_D 4_A$  параллельны лучам чертежа, подложенного под фиг. 73, проходящим через те же точки  $h$ , что на верхнем чертеже.

Ломаная линия  $2_A 3_B 4_A$  соответствует перемещению наблюдателя от сечения  $A$  к  $B$  и обратно, причем точка  $4_A$  определяется пересечением стороны многоугольника  $3_D 4_A$  с прямой  $3_B 4_A$ , имеющей угловой коэффициент  $(-\frac{a}{gS})$ .

По существу построения в данном случае полностью совпадают с построениями на фиг. 64 и 62 с той разницей, что нанесение ломаных линий, дающих возможность проследить за явлением в воздушном колпаке, производится при посредстве прямых с переменным углом  $\beta$ , устанавливаемым на фиг. 73 не при постоянном значении угла  $\beta$ , как это имеет место в случае уравнивающей башни постоянного сечения. Поэтому нет необходимости продол-

жать описание построений; представляет интерес сопоставить результаты этих построений с построениями на фиг. 62.

Из рассмотрения фиг. 72 следует, что давление в воздушном колпаке достигает максимума, а расход равняется нулю в момент времени 7. После этого течение изменяет свое направление и расход достигает в сечении  $B$  в момент времени 13 максимальной



Фиг. 74.

величины, равной начальному расходу (такое совпадение закономерно, если вспомнить, что потери напора не учитываются). Затем воздух в воздушном колпаке начинает расширяться, давление в колпаке уменьшается и становится ниже первоначальной величины, определяемой напором  $h_0$ , и достигает минимального значения в сечении  $D$  в момент времени 21, когда расход снова становится равным нулю. Вслед за этим течение снова получает первоначальное направление, и в момент времени 29 в сечении  $B$  расход вновь достигает своей первоначальной величины, после чего цикл возобновляется.

В данном случае мы имеем те же закономерности процесса, что и в случае построений на фиг. 62; однако оказывается, что при наличии колпака со сжатым воздухом максимальное избыточное давление  $\xi_a$  значительно больше максимального значения понижения давления  $\xi_r'$ , что объясняется сжимаемостью воздуха.

Таблица к фиг. 74

Прибыль в сечении	в момент времени	наблюдатель, вышедший из сечения	в момент времени	устанавливает, что соответственная точка находится на прямой с угловым коэффициентом	проходящей через точку	и на прямой	т. е. в точке пересечения
0	2	4	-2	$-\operatorname{tg} \alpha'$	$M$		$2_0$
0	2		1	$+\operatorname{tg} \beta$	$1_p$		
$D$	3	0	2	$-\operatorname{tg} \beta$	$2_0$	$\Psi_D$	$3_D$
0	4	$D$	3	$+\operatorname{tg} \beta$	$3_D$		$4_0$
0	4	4	0	$-\operatorname{tg} \alpha'$	$M$		
$D$	5	0	4	$-\operatorname{tg} \beta$	$4_0$	$\Psi_D$	$5_D$
0	6	$D$	5	$+\operatorname{tg} \beta$	$5_D$		$6_0$
0	6	4	2	$-\operatorname{tg} \alpha'$	$M$		
$D$	7	0	6	$-\operatorname{tg} \beta$	$6_0$	$\Psi_D$	$7_D$
0	8	$D$	7	$+\operatorname{tg} \beta$	$7_D$		$8_0$
0	8	4	4	$-\operatorname{tg} \alpha'$	$M$		
$D$	9	0	8	$-\operatorname{tg} \beta$	$8_0$	$\Psi_D$	$9_D$
4	6	0	2	$+\operatorname{tg} \alpha'$	$2_0$		$6_4$
4	6	9	1	$-\operatorname{tg} \alpha''$	$M$		
0	10	$D$	9	$+\operatorname{tg} \beta$	$9_0$		$10_0$
0	10	4	6	$-\operatorname{tg} \alpha'$	$6_0$		
$D$	11	0	10	$-\operatorname{tg} \beta$	$10_0$	$\Psi_D$	$11_D$
4	8	0	4	$+\operatorname{tg} \alpha'$	$4_0$		$8_4$
4	8	9	3	$-\operatorname{tg} \alpha''$	$M$		
0	12	$D$	11	$+\operatorname{tg} \beta$	$11_D$		$12_0$
0	12	4	8	$-\operatorname{tg} \alpha'$	$8_4$		
$D$	13	0	12	$-\operatorname{tg} \beta$	$12_0$	$\Psi_D$	$13_D$
4	10	0	6	$+\operatorname{tg} \alpha'$	$6_0$		$10_4$
4	10	9	5	$-\operatorname{tg} \alpha''$	$M$		
0	14	$D$	13	$+\operatorname{tg} \beta$	$13_D$		$14_0$
0	14	4	10	$-\operatorname{tg} \alpha'$	$10_4$		
$D$	15	0	14	$-\operatorname{tg} \beta$	$14_0$	$\Psi_D$	$15_D$
4	12	0	8	$+\operatorname{tg} \alpha'$	$8_0$		$12_4$
4	12	9	7	$-\operatorname{tg} \alpha''$	$M$		
0	16	$D$	15	$\operatorname{tg} \beta$	$15_D$		$16_0$
0	16	4	12	$-\operatorname{tg} \alpha'$	$12_4$		
$D$	17	0	16	$-\operatorname{tg} \beta$	$16_0$	$\Psi_D$	$17_D$
4	14	0	10	$+\operatorname{tg} \alpha'$	$10_0$		$14_4$
4	14	9	9	$-\operatorname{tg} \alpha''$	$M$		
0	18	$D$	17	$+\operatorname{tg} \beta$	$17_D$		$18_0$
0	18	4	14	$-\operatorname{tg} \alpha'$	$14_4$		

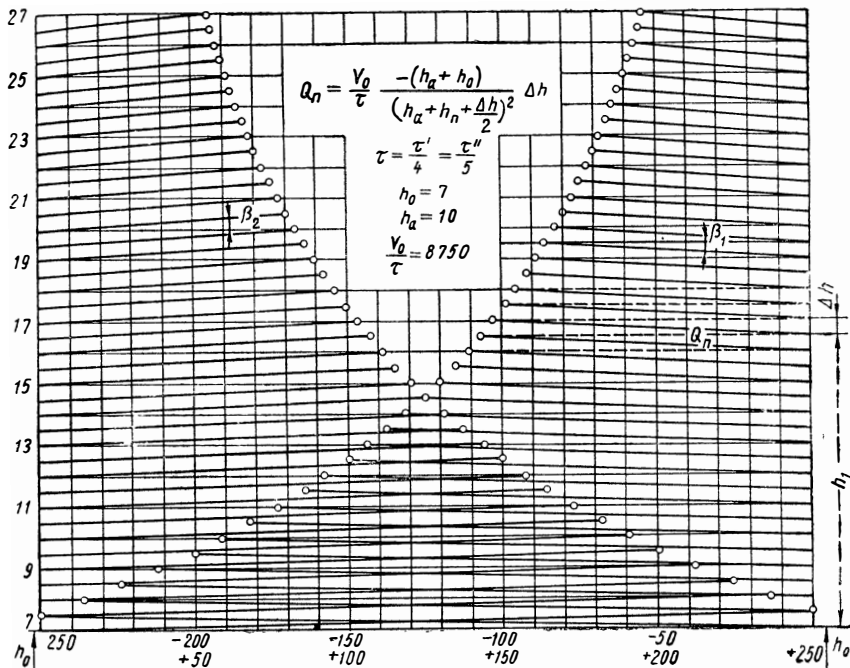


Прибыв в сечения	в момент времени,	наблюдатель вышедший из сечения	в момент времени,	устанавливает, что соответственная точка находится на прямой с угловым коэффициентом	проходящей через точку	и на прямой	т. е. в точке сечения
$D$	19	0	18	$-\operatorname{tg} \beta$	$18_0$	$\Psi_D$	$19_D$
9	11	4	6	$+\operatorname{tg} \alpha''$	$6_4$	$\Psi_9$	$11_9$
4	16	9	11	$-\operatorname{tg} \alpha''$	$11_9$		$16_4$
4	16	0	12	$+\operatorname{tg} \alpha'$	$12_0$		
0	20	$D$	19	$+\operatorname{tg} \beta$	$19_D$		$20_0$
0	20	4	16	$-\operatorname{tg} \alpha'$	$16_4$		
$D$	21	0	20	$-\operatorname{tg} \beta$	$20_0$	$\Psi_D$	$21_D$
9	13	4	8	$+\operatorname{tg} \alpha''$	$8_4$	$\Psi_9$	$13_9$
4	18	9	13	$-\operatorname{tg} \alpha''$	$13_9$		$18_4$
4	18	0	14	$+\operatorname{tg} \alpha'$	$14_0$		
0	22	$D$	21	$+\operatorname{tg} \beta$	$21_D$		$22_0$
0	22	4	18	$-\operatorname{tg} \alpha'$	$18_4$		
8	18	9	17	$-\operatorname{tg} \alpha''$	$17_9$		$18_8$
8	18	4	14	$+\operatorname{tg} \alpha''$	$14_4$		
7	19	9	17	$-\operatorname{tg} \alpha''$	$17_9$		$19_7$
7	19	4	16	$+\operatorname{tg} \alpha''$	$16_4$		
3	21	4	20	$-\operatorname{tg} \alpha'$	$20_4$		$21_3$
3	21	0	18	$+\operatorname{tg} \alpha'$	$18_0$		
2	22	4	20	$-\operatorname{tg} \alpha'$	$20_4$		$22_2$
2	22	0	20	$+\operatorname{tg} \alpha'$	$20_0$		

**§ 53. Случай, когда трубопровод, соединяющий колпак со сжатым воздухом и питающий бассейн, имеет переменное сечение.** Этот случай не добавляет ничего существенного к ранее описанному и мы приводим его только ради ознакомления читателя с возможными осложнениями, какие могут встретиться при расчетах для промышленных установок. Схема установки и построения для рассматриваемого случая даны на фиг. 74; мы ограничимся рассмотрением случая двух участков трубопроводов, из которых один, большей площади сечения  $s''$ , длиной  $l''$ , примыкает к питающему бассейну, и второй — меньшей площадью сечения  $s'$  — к колпаку со сжатым воздухом. Значения скорости распространения волн примем соответственно  $a''$  и  $a'$  и предположим, что время прохождения волны вдоль отрезков  $l'$  и  $l''$  имеет общий множитель  $\tau$ , содержащийся 4 раза в  $\tau' = \frac{l'}{a'}$  и 5 раз в  $\tau'' = \frac{l''}{a''}$ . Этот множитель мы принимаем за единицу измерения времени при построениях.

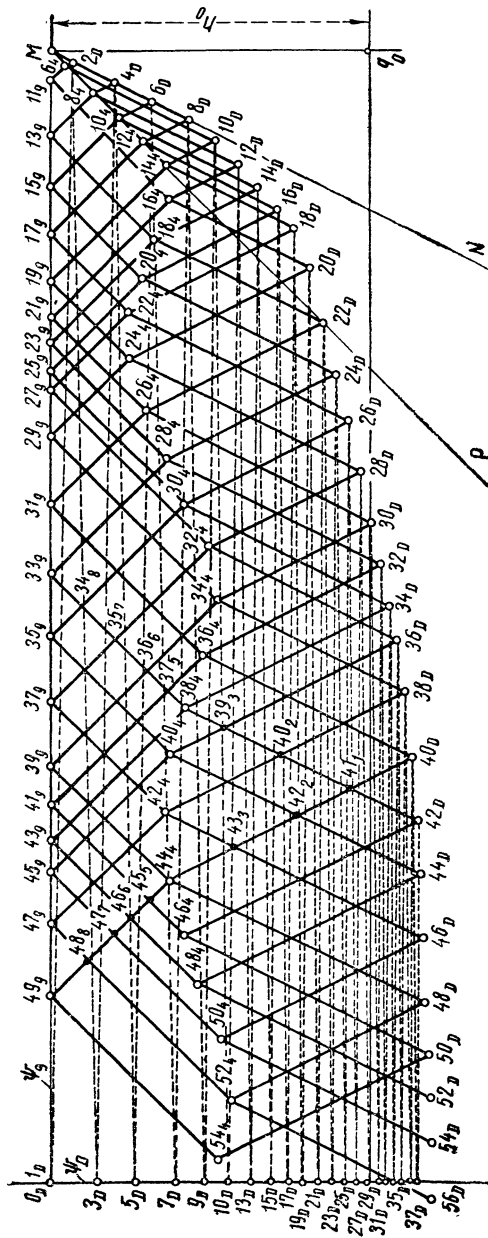
Наконец будем пренебрегать потерями напора вдоль отрезков  $l'$  и  $l''$  и в месте присоединения воздушного колпака к трубопроводу; числовые значения величин сохраним теми же, что и ранее для величин  $h_0 = 7$  и  $h_0 = 10$ , но первоначальный расход положим равным 250 и положим  $V_0 = 8750$ .

Построение на фиг. 74 отображает явление на отрезке времени от начала закрытия вентиля, происходящего в течение интер-



Фиг. 75.

вала  $2\tau$ , до момента, когда расход в воздушном колпаке уменьшается до нуля, а избыточное давление здесь достигает максимальной величины. Значения угла  $\beta$ , используемые при построениях в связи с процессами в воздушном колпаке, нанесены на фиг. 75 для значений  $h$ , меняющихся через интервалы  $\Delta h = 0,5$ ; чертеж фиг. 75 подкладывается под построения фиг. 74, выполняемые на кальке. Линии, соответствующие процессам в воздушном колпаке, параллельные лучам на подложенной фиг. 75, показаны на фиг. 74 пунктиром; линии, относящиеся к трубопроводу, выполнены сплошными. Режимы в воздушном колпаке определены через интервалы  $2\tau$ , но этот же чертеж дает значения вдоль трубопровода в сечениях на взаимном расстоянии  $l_1 = a'\tau$  на отрезке с поперечным сечением  $s'$  и  $l_2 = a''\tau$  на участке с поперечным сечением  $s''$ .

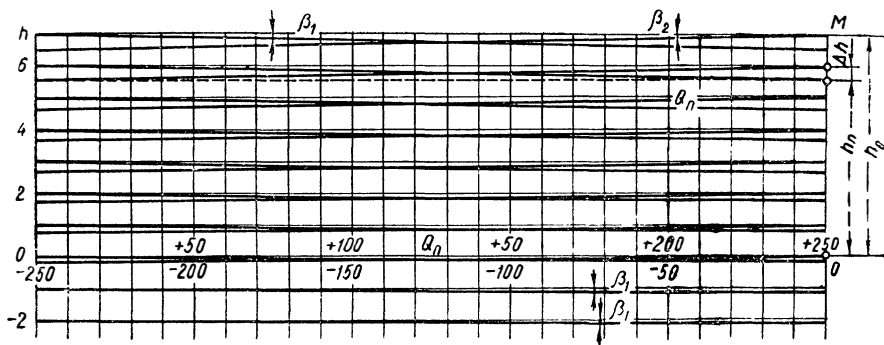


Фиг. 76.

На графике фиг. 74 эти сечения помечены цифрами 1, 2, 3... 7, 8, сечение присоединения воздушного колпака обозначено через 0, а примыкания к питающему бассейну — цифрой 9. Соответственная точка начального режима обозначена буквой *M*. Характеристикой, справедливой для всех наблюдателей, прибывающих к воздушному колпаку в точку *O* ранее момента времени 8, т. е. для наблюдателей, выбывающих из сечения 4 до момента времени 4τ, когда здесь еще сохраняется начальный режим, — будет прямая *MN*, имеющая угловой коэффициент  $\text{tg } \alpha' = \left(-\frac{a'}{gs'}\right)$ . Характери-

$$Q_n = \frac{V_0}{\tau} \times \frac{-(h_a + h_0)}{\left(h_a + h_n + \frac{\Delta h}{2}\right)^2} \times \Delta h$$

$$\tau = \frac{\tau'}{4} = \frac{\tau''}{5} \quad h_0 = 7 \quad h_a = 10 \quad \frac{V_0}{\tau} = 8750$$



Фиг. 77.

стикой, справедливой для наблюдателей, прибывающих в сечение 4 ранее момента времени 4 (т. е. выбывающих из сечения 9 до момента времени 9τ, когда первоначальный режим здесь еще справедлив), будет прямая *MP*, имеющая угловой коэффициент  $\text{tg } \alpha'' = -\frac{a''}{gs''}$ .

На фиг. 74 можно проследить последовательно построения до точки 22<sub>0</sub>. При этом мы установим, что, начиная от точки 20<sub>0</sub>, каждая последующая соответственная точка для сечения *O* требует построения шести линий.

Соответственные точки для сечений от 1 до 8 находятся просто; например, на пересечении луча, выходящего из точки 20<sub>0</sub> и имеющего угловой коэффициент  $+\text{tg } \alpha'$ , и прямых, имеющих угловой коэффициент  $-\text{tg } \alpha'$ , проходящих через точки 18<sub>4</sub>, 20<sub>4</sub>, 22<sub>4</sub>, находятся точки 21<sub>1</sub>, 22<sub>2</sub>, 23<sub>3</sub>. На прямой с угловым коэффициентом  $-\text{tg } \alpha''$ , проходящей через точку 19<sub>0</sub>, находятся соответственные точки 20<sub>0</sub>, 20<sub>7</sub>, 22<sub>6</sub>, 23<sub>5</sub>, в пересечении с прямыми с угловым коэффициентом  $+\text{tg } \alpha''$ , проходящими через точки 14<sub>4</sub>, 16<sub>4</sub>, 18<sub>4</sub>, 20<sub>4</sub> и 22<sub>4</sub>.

Построение доведено до того момента, когда расход в сечении  $O$  становится равным нулю. Если продолжить построение, оказалось бы, что затем начинается течение в обратном направлении, причем расход этого обратного течения со временем становится равным первоначальной величине  $q_0$  (что естественно, поскольку потери напора не учитываются); затем этот отрицательный расход постепенно уменьшается до нуля, создавая депрессию в воздушном колпаке. Эта часть процесса отражена в построениях на фиг. 76.

Первоначальный расход  $q_0$  рассматривается здесь как отрицательный, уменьшаясь до нуля в результате закрытия вентиля, происходящего в течение времени  $2\tau$ .

Углы  $\beta$  вспомогательных прямых



Фиг. 78.

для построений, относящихся к движению в воздушном колпаке, соответствуют значениям  $h$ , меняющимся с интервалом в единицу, до значения  $h = -2$ ; чертеж с этими построениями (фиг. 77), будучи вспомогательным, подкладывается под чертеж на фиг. 76.

С помощью таблицы к фиг. 74 можно легко прочесть также и этот чертеж, для этого достаточно только изменить знак угловых коэффициентов прямых.

Напор и расход в сечениях  $O$  и  $4$ , полученные построениями на вышеупомянутых фигурах, представлены графиками зависимости от времени на фиг. 78. В сечении  $O$  кривые достаточно плавны, тогда как кривые в сечении  $4$  имеют волнообразные очертания, в результате интерференции волн, исходящих из сечения  $O$  и отражаемых в сечении  $9$ .

Мы не будем рассматривать случаи, когда потерями напора нельзя пренебречь, будь то у ветвления резервуара, присоединенного к трубопроводу, или вдоль последнего, так как это явилось

бы повторением уже известного случая с уравнильной башней, с которым мы ознакомились в §§ 48, 49 и 50. Разница заключается лишь в том, что  $\operatorname{tg} \beta$  уже не является теперь постоянным, что, однако, не сказывается на принципах построений.

### СЛОЖНЫЕ СЛУЧАИ

§ 54(60). **Случай турбины, питаемой от напорного трубопровода с уравнильной башней на нем.** Схема установки в рассматриваемом случае представлена на фиг. 79. В конце  $A$  напорного трубопровода турбина на чертеже представлена как отверстие, сечение которого по сравнению с сечением трубопровода очень невелико и является переменным в зависимости от времени; это в действительности соответствует случаю установки с турбиной Пельтона. Тип турбины, если бы она была другой, не влияет на построения, поскольку единственным различием будет только то, что при турбине Пельтона функциями  $\Psi$  для сечения  $A$  являются параболы, вершины которых находятся в начале координат  $O$  в то время, как при реактивных турбинах положение вершин парабол зависит от коэффициента быстроходности турбины.

Построения произведены без учета потерь напора в трубопроводе и не предполагая сжатия на входе в уравнильную башню. Пусть  $a', s', l'$  и  $a'', s'', l''$  — скорость распространения волн, сечение и длина соответственно в подводящем трубопроводе  $BM$  и напорном трубопроводе  $MA$ ,  $S$  — сечение уравнильной башни, являющееся постоянным<sup>1</sup>,  $h_0$  — постоянная разность напора, под которой работает система трубопроводы—турбина.

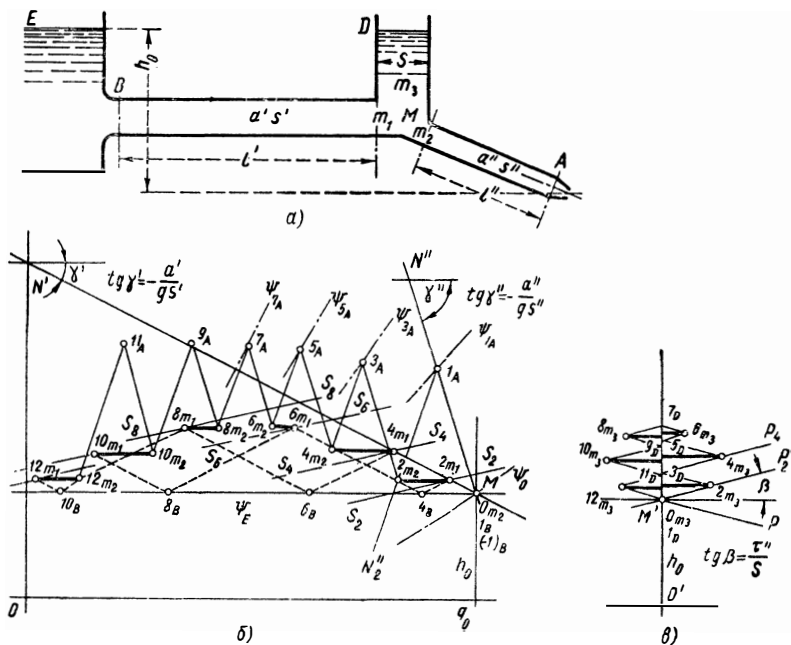
Соответственная точка  $M$  начального режима для трубопроводов  $BM$  и  $MA$  имеет ординату  $h_0$  и абсциссу  $q_0$  (фиг. 79, б), а соответственная точка  $M'$  для уравнильной башни — ординату  $h_0$  и абсциссу нуль (фиг. 79, в).

После возникновения в сечении  $A$  изменений режима соответственные точки в период первого движения волны от сечения  $A$  к ветвлению  $M$  и от  $M$  в сечение  $B$  будут находиться на прямых  $MN''$  и  $MN'$  (см. фиг. 79, б), имеющих угловые коэффициенты  $\operatorname{tg} \gamma'' = \left(-\frac{a''}{gs''}\right)$  и  $\operatorname{tg} \gamma' = \left(-\frac{a'}{gs'}\right)$ , и проходящих через точку  $M$ . Для уравнильной башни соответственные точки будут находиться на прямой  $M'P$  на фиг. 79, в, проходящей через точку  $M$  и имеющей угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \beta = \left(-\frac{\tau''}{S}\right)$  в соответствии с тем, что построения производятся для полных циклов применительно к трубопроводу  $AM$ , т. е. при интервалах времени  $2\tau''$ , поэтому время пробега фиктивной волны в двух направ-

<sup>1</sup> В некоторых устройствах это сечение изменяется либо уступами, либо постепенно. В этих случаях просто изменяется угол  $\beta$  в зависимости от напора  $h$ , как это было сделано для воздушного колпака со сжатым воздухом в §§ 52 и 53

лениях в уравнильной башне также равно  $2\tau''$ , и прямая  $M'P$  будет иметь угловой коэффициент, равный  $\frac{j}{2S} = \frac{2\tau''}{2S} = \frac{\tau''}{S}$ .

Обозначим через  $m_1, m_2, m_3$  сечения участков  $BM, AM, DM$  на подходе к точке ветвления  $M$ . Значения напора в этих трех сечениях будут всегда равными между собой, определяясь уровнем в уравнильной башне, а сумма расходов будет всегда равна нулю. Эти два условия должны быть соблюдены при построениях.



Фиг 79.

Для упрощения чертежа, как уже было выше сказано, режимы в  $M$  определяются только для полных циклов  $\frac{2l''}{a''} = 2\tau''$  в трубопроводе  $AM$ ; кроме того, предполагается, что  $\tau' = \frac{l'}{a'}$  является кратным  $\tau''$ , равным  $2\tau''$ ; за начало отсчетов времени принят момент начала изменений режима в сечении  $A$ .

Для наблюдателей, отбывающих в этот момент из сечения  $M$ , соответственные точки будут находиться на прямой  $MN''$  для трубопровода  $AM$  и прямой  $M'P$  — для уравнильной башни. Первый наблюдатель, прибыв в сечение  $A$  в момент времени 1, констатирует, что режим работы турбины определяется кривой  $\Psi_{1A}$ , что дает соответственную точку  $1_A$ ; второй, прибыв в сечение  $D$ , фиксирует нулевой расход, что определяет соответственную

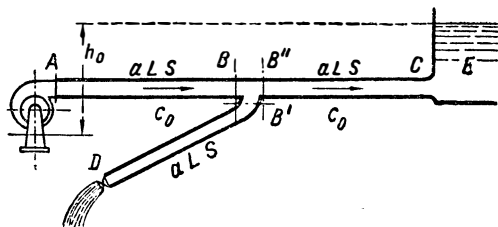
Таблица к фиг. 79

Порядковые номера прямых	При прибытии в сечение	в момент времени	наблюдатель (или наблюдатели), выбывший из сечения	в момент времени	видит соответственную точку на прямой, имеющей угловой коэффициент	проходящей через точку	видит соответственную точку на результирующей прямой	и на характеристической кривой турбины	и на горизонтальной линии, проходящей через точку	и на вертикали, проходящей через точку	и на прямой	т. е. в точке пересечения
1	A	1	$m_2$	0	$-tg\alpha''$	M	2 и 3	$\Psi_{1A}$	$2m_1$	M'	$S_2S_2$	1A
2	$m_2$	2	A	0	$+tg\alpha''$	1A						
3	$m_3$	2	D	1	$+tg\beta$	M'	т. е. $S_2S_2$	$\Psi_{3A}$	$2m_1$	M'	$S_2S_2$	$2m_2$
4	$m_1$	2	D и A	1	$+tg\beta$	3A						
5	$m_1$	2	B	0	$-tg\alpha'$	M	9 и 11, т. е. $S_4S_4$	$\Psi_{5A}$	$4m_1$	M'	$S_4S_4$	$4m_1$
6	$m_2$	2	A	1	$+tg\alpha''$	1A						
7	$m_3$	2	D	1	$+tg\beta$	M'	3D		$4m_1$	M'	$S_4S_4$	$4m_2$
8	A	3	$m_2$	2	$-tg\alpha''$	$2m_2$						
9	$m_2$	4	A	3	$+tg\alpha''$	3A	3D		$4m_1$	M'	$S_4S_4$	$4m_3$
10	D	3	$m_3$	2	$-tg\beta$	$2m_3$						
11	$m_3$	4	D	3	$+tg\beta$	3D	3D		$4m_1$	M'	$S_4S_4$	$4m_3$
12	$m_1$	4	D и A	3	$+tg\beta$	3D						
13	$m_1$	4	B	2	$-tg\alpha'$	M	3A		$4m_1$	M'	$S_4S_4$	$4m_2$
14	$m_2$	4	A	3	$+tg\alpha''$	3A						
15	$m_3$	4	D	3	$+tg\beta$	3D	5A		$4m_1$	M'	$S_4S_4$	5A
16	A	5	$m_2$	4	$-tg\alpha''$	$4m_2$						
17	$m_2$	6	A	5	$+tg\alpha''$	5A	5D		$4m_1$	M'	$S_4S_4$	5D
18	D	5	$m_3$	4	$+tg\beta$	$4m_3$						



Порядковые номера прамык	При приближении	в момент	наблюдатель (или наблюдатели), выходящий из сечения	в момент	в момент	видит соотвественную точку на прямой, имея коэффициент	проходящей через точку	видит соотвественную точку на поверхности прямую-зудящую	и на характерной кривой типа	и на горизонтальной линии, проходящей через точку	и на вертикальной, проходящей через точку	и на прямой	т. е. в точке пересечения
19	$m_3$	6	$D$	5	$+ \operatorname{tg} \beta$	$5D$	17 и 19, т. е. $S_6 S_6$			$M$		$S_6 S_6$	$4B$ $6m_1$
20	$m_1$	6	$D$ и $A$	5									$6m_2$ $6m_3$
21	$B$	4	$m_1$	2	$+ \operatorname{tg} \alpha'$	$2m_1$				$6m_1$			$7A$
22	$m_1$	6	$B$	4	$- \operatorname{tg} \alpha'$	$4B$							$7D$
23	$m_2$	6	$A$	5	$+ \operatorname{tg} \alpha''$	$5A$				$6m_1$			
24	$m_3$	6	$D$	5	$+ \operatorname{tg} \beta$	$5D$				$6m_1$			
25	$A$	7	$m_2$	6	$- \operatorname{tg} \alpha''$	$6m_2$							
26	$m_2$	8	$A$	7	$+ \operatorname{tg} \alpha''$	$7A$							
27	$D$	7	$m_3$	6	$-\beta$	$6m_3$							
28	$m_3$	8	$D$	7	$+ \operatorname{tg} \beta$	$7D$							
29	$m_1$	8	$D$ и $A$	7									
30	$B$	6	$m_1$	4	$+ \operatorname{tg} \alpha'$	$4m_1$				$M$			$6B$
31	$m_1$	8	$B$	6	$- \operatorname{tg} \alpha'$	$6B$							$8m_1$
32	$m_2$	8	$A$	7	$+ \operatorname{tg} \alpha''$	$7A$				$8m_1$			$8m_2$
33	$m_3$	8	$D$	7	$+ \operatorname{tg} \beta$	$7D$				$8m_1$			$8m_3$

точку  $1_D$ , совпадающую с  $M'$ . При возвращении этих наблюдателей к ветвлению  $M$  соответственные точки режима будут находиться на прямых симметричных первым, проходящих через  $1_A$  и  $M'$ , пусть  $1_A N_2''$  и  $1_D P_2$ , которые будут справедливы для сечений  $m_2$  и  $m_3$  в момент времени 2. Пусть  $S_2 S_2$  на фиг. 79, б, прямая суммарного расхода, определяемая в результате сложения абсцисс прямых  $1_A N_2''$  и  $1_D P_2$ . На линии  $S_2 S_2$  должна находиться соответственная точка для сечения  $m_1$  в момент времени 2 при совместной работе трубопровода  $MA$  и уравнительной башни  $MD$ . В то же время для наблюдателя, выходящего из сечения  $B$  в момент времени нуль и прибывающего в сечение  $m_3$  в момент времени также 2, соответственная точка должна находиться на прямой  $MN'$ . Следовательно, она должна находиться в точке  $2m_1$  пересечения этой прямой и результирующей  $S_2 S_2$ . В сечениях  $m_2$  и  $m_3$  напор будет тем же, что и в сечении  $m_1$ , и соответственные точки для этих сечений находятся на горизонтальной линии, проходящей через точку  $2m_1$  и на прямой  $1_A N_2''$  для сечения  $m_2$  (точка  $2m_2$ ) и  $1_D P_2$  для сечения  $m_3$  (точка  $2m_3$ ).



Фиг. 80.

Зная режимы в сечениях  $m_1 m_2 m_3$  в момент времени 2, наблюдателям задается последующее движение, поскольку известны характеристики для каждого из участков. Читатель может последовательно проследить за дальнейшими построениями по табл. к фиг. 79, вплоть до момента времени 8, когда расход в уравнительной башне меняет направление после достижения уровнем в башне максимального значения в момент времени 7.

Затем построения продолжают аналогичным (предшествующим) образом.

**§ 55(61). Внезапное открытие и медленное закрытие отверстия на отводе от трубопровода.** На фиг. 80 показан центробежный насос  $A$ , подающий воду в резервуар  $E$  по трубопроводу  $AC_1$  и отвлечению  $B'D$ , первоначально закрытое в сечении  $D$ . Пусть отверстие  $D$  внезапно открывается и затем постепенно закрывается (подобно случаю разрыва трубопровода и последующего медленного закрытия предохранительного клапана). Мы предположим все три участка трубопровода  $AB$ ,  $B'D$ ,  $B''C$  одинаковых длины, сечения и конструктивного оформления. Эти условия, не нарушая общих принципов построений, облегчают прослеживание их исполнения. Установившийся начальный режим характеризуется расходом  $q_0$  при напоре  $h_0$ , создаваемом насосом, и соответственной точкой для этого режима будет точка  $M$  (фиг. 81, а)

на пересечении с характеристической кривой насоса и характеристической кривой трубопровода, которая представлена горизонтальной линией  $NM$  ординаты  $h_0$  (поскольку пренебрегается потерями напора). В сечении  $B$  соответственная точка будет той же, что в сечении  $A$ , т. е. это будет также точка  $M$  также в сечении  $B''$  непосредственно у ветвления и в сечении  $C$  на выходе из резервуара соответственная точка начального режима  $M''$  (фиг. 81, б) имеет те же абсциссу  $q_0$  и ординату  $h_0$ , что и точка  $M$ , но в сечении  $B'$  у ветвления расход равен нулю, и соответственная точка первоначального режима  $M'$  (фиг. 81, в) имеет абсциссой нуль и ординатой  $h_0$ .

Примем за начало отсчетов времени момент начала открытия отверстия в сечении  $D$  и пусть характеристической кривой отверстия является парабола  $\Psi_D$  (фиг. 81, в); за единицу времени примем время  $\frac{L}{a}$  пробега волной участка  $DB'$  (или, что то же,  $BA$ , или  $B''C$ , равных  $DB'$ ).

Момент времени 1 является тем, когда волна, появившись у сечения  $D$  в момент времени нуль, достигает сечения  $B'$ . Следовательно, соответственной точкой для этого сечения в момент времени 1 еще является  $M'$  (фиг. 81, в), обозначаемая, как обычно, через  $1_{B'}$ . Если наблюдатель в это мгновение выбывает из  $B'$ , характеристической прямой для него на всем пути между сечениями  $B'$  и  $D$  будет прямая  $P'M'$ , проходящая через точку  $1_{B'}$  и имеющая угловой коэффициент  $-\frac{a}{gS}$  (так как наблюдатель перемещается по течению). Наблюдатель, прибывший в  $D$  в момент времени 2, найдет на пересечении этой прямой с характеристической кривой  $\Psi_D$  отверстия соответственную точку  $2_D$ . На обратном пути характеристической для него становится прямая, симметричная прямой  $1_{B'} 2_D$ , проходящая через только что полученную точку  $2_D$ , пусть  $2_D S$  — и при его возвращении в сечение  $B_1$  в момент времени 3 соответственная точка должна находиться на этой прямой.

Проследим теперь за наблюдателем, выбывающим из сечения  $A$  в момент времени 2; так как в этот момент в сечении  $A$  еще существует первоначальный режим, соответственная точка  $2_A$  совпадает с точкой  $M$  (фиг. 81, а), и характеристической прямой для наблюдателя будет прямая  $MP$ , проходящая через эту точку и имеющая угловой коэффициент  $-\frac{a}{gS}$  (наблюдатель перемещается в направлении течения). В момент времени 3, по прибытии наблюдателя в сечение  $B$ , соответственная точка будет на этой прямой.

Для третьего наблюдателя с исходным сечением  $C$  в момент времени 2, когда здесь еще справедлив первоначальный режим, перемещающегося в направлении к  $B''$ , характеристической будет прямая  $M''P''$  (фиг. 81, б). Эта прямая проходит через соответ-

ственную точку  $2c$  (совпадающую с  $M''$ ) и имеет угловой коэффициент  $+\frac{a}{gS}$  (наблюдатель перемещается в направлении, противоположном течению). Соответственная точка будет находиться на этой прямой в момент времени 3 прибытия наблюдателя в сечение  $B''$ .

Таким образом, все три наблюдателя встречаются у ветвления  $VB'B''$  в один и тот же момент времени 3 и соответственная точка, будучи расположенной на прямой каждого наблюдателя, должна отвечать следующим условиям:

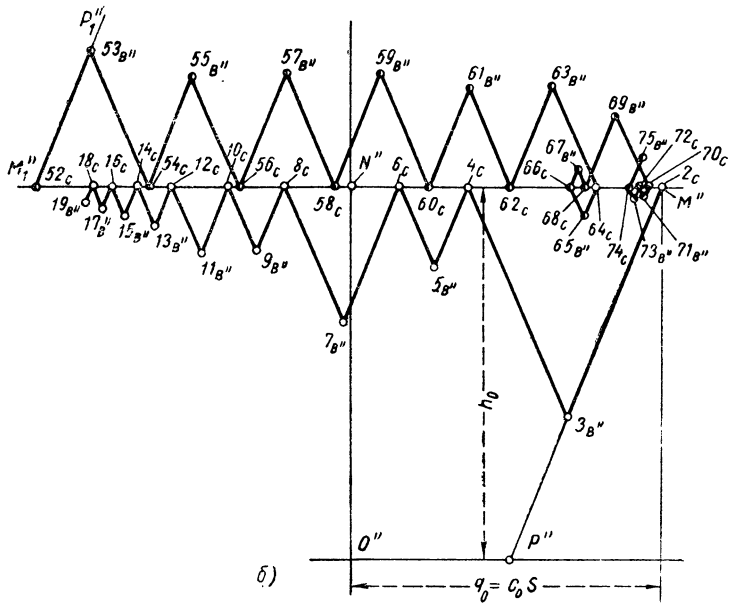
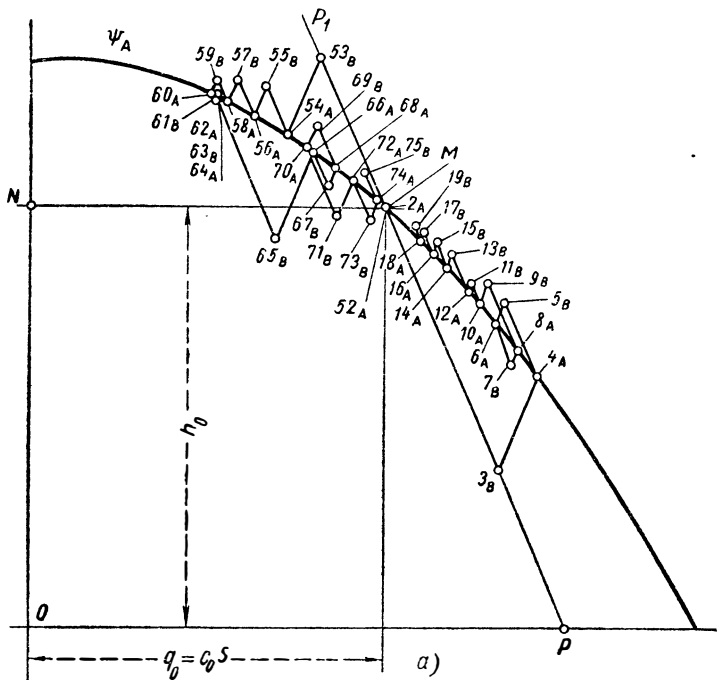
все три наблюдателя констатируют одинаковое значение напора;

расход, констатируемый наблюдателем, прибывшим в сечение  $B''$ , должен равняться разности расходов, устанавливаемых двумя другими наблюдателями.

Беря поэтому разность абсцисс прямых  $MP$  и  $M''P''$ , получим результирующую прямую  $M'R$  или  $X_3$  (фиг. 81, в), которая пересечет прямую  $2D'S$  в точке  $3_{B'}$ , являющейся соответственной точкой режима в  $B'$  в момент времени 3. Перенеся ординату этой точки на прямую  $M''P''$  (фиг. 81, б), мы получим точку  $3_{B''}$ , которая будет соответственной точкой режима в сечении  $B''$  в момент времени 3; перенеся ту же ординату на прямую  $MP$  (фиг. 81, а), получим точку  $3_B$ , которая будет соответственной точкой режима для сечения  $B$  в момент времени 3. Действительно, эти точки  $3_B$   $3_{B'}$   $3_{B''}$  отвечают вышеуказанным двум условиям — одинаковому для них всех значению напора и непрерывности расхода в месте ветвления в  $B$ .

На обратном пути из сечения  $B$  к  $A$  наблюдатель констатирует, что характеристикой на участке будет прямая, симметричная  $MP$ , проходящая через только что полученную точку  $3_B$ . В пересечении этой прямой с характеристической кривой насоса должна находиться соответственная точка  $4_A$  для сечения  $A$  в момент времени 4. Перемещаясь из сечения  $A$  к сечению  $B$ , наблюдатель констатирует, что характеристикой будет прямая симметричная  $3_B 4_A$ , проходящая через точку  $4_A$  (только что полученную), пусть  $4_A 5_B$  (неопределенной длины, так как точка  $5_B$  еще неизвестна).

Для наблюдателя, выбывающего из сечения  $B''$  в момент времени 3, характеристикой будет прямая симметричная  $M''P''$ , проходящая через только что полученную точку  $3_{B''}$ . При его прибытии в сечение  $C$  в момент времени 4 соответственная точка режима будет  $4_C$  на пересечении этой прямой с горизонтальной линией  $M''N''$ , являющейся характеристической кривой резервуара. Возвратившись к сечению ветвления, наблюдатель установит, что характеристикой будет прямая симметричная  $3_{B''} 4_C$ , проходящая через только что полученную точку  $4_C$ , пусть  $4_C 5_B$  (неопределенной длины, так как точка 5 еще неизвестна).



Фиг. 81.



Продолжая задавать наблюдателям, каждому на его отрезке трубопровода, перемещения в прямом и обратном направлениях найдем:

для участка  $DB'$  ломаную линию

$$1_{B'} 2_D 3_{B'} 4_D 5_{B'} 6_D 7_{B'} 8_D 9_{B'} \dots$$

построение которой произведено нами до точки  $19_{B'}$ , но которая асимптотически стремится к точке  $M'_1$  пересечения характеристической кривой отверстия и горизонтальной линии с ординатой  $h_0$ ; вершины этой ломаной линии находятся попеременно на кривой  $\Psi_D$  и на прямых  $X_3 X_5 X_7 X_9 \dots X_{19}$ , являющихся результирующими характеристических прямых для сечений  $B$  и  $B'$  в моменты времени 3, 5, 7, 9...19;

для участка  $AB$  ломаную линию

$$2_A 3_B 4_A 5_B 6_A 7_B 8_A 9_B \dots$$

построение этой линии на чертеже нами доведено до точки  $19_B$ , но асимптотически она стремится к точке  $M$  первоначального режима;

для участка  $CB''$  ломаную линию

$$2_C 3_{B''} 4_C 5_{B''} 6_C 7_{B''} 8_C 9_{B''} \dots$$

построение этой линии доведено на чертеже до точки  $19_{B''}$ , но асимптотически она стремится к точке  $M''_1$ , соответствующей противоположному направлению течения (иначе говоря — отрицательному расходу).

Предположим теперь, что в момент времени, например 50, начинается закрытие отверстия в сечении  $D$ , которое полностью закончится к моменту времени 62, и пусть  $\Psi_{52} \Psi_{54} \Psi_{56} \dots$  (фиг. 81, в) являться характеристическими кривыми отверстия в моменты времени 52, 54, 56.

В момент времени 51 в сечении  $B$  еще существует ранее достигнутый режим, и соответственная точка  $51_B$  совпадает с точкой  $M'_1$  (фиг. 81, в), поэтому для наблюдателя, выбывающего в этот момент из сечения  $B$  в направлении сечения  $D$ , характеристикой будет прямая  $M'P'_1$ , проходящая через точку  $51_B$  и имеющая угловой коэффициент  $-\frac{a}{gS}$  (поскольку наблюдатель перемещается по течению); когда наблюдатель прибывает в сечение  $D$  (в момент времени 52) соответственная точка здесь будет находиться на характеристической кривой  $\Psi_{52}$  отверстия для момента времени 52. На обратном пути наблюдателя характеристической прямой будет прямая неопределенной длины  $52_D 53_{B'}$ .

В момент времени 52 в сечении  $C$  режим определяется еще точкой  $M_1$  (фиг. 81, б) и характеристической прямой для наблюдателя, продвигающегося к сечению  $B''$ , будет прямая  $M''_1 P''_1$  имеющая угловой коэффициент  $+\frac{a}{gS}$ , проходящая через точку  $52_C$  (иначе говоря — точку  $M''_1$ ).

Наконец в момент времени  $52$  в сечении  $A$  режим еще определяется точкой  $M$  (фиг. 81,  $a$ ) и характеристической прямой для наблюдателя, выбывающего в направлении к  $B$  будет  $MP_1$ . Она пройдет через точку  $52_A$ , т. е.  $M$ , имея угловой коэффициент  $-\frac{a}{gS}$ .

При встрече трех наблюдателей в момент времени  $53$  в сечениях  $BB'B''$  результирующей прямых  $MP_1$  и  $M_1P_1'$  будет  $X_{53}$  (фиг. 88,  $c$ ), определяющая в ее пересечении с ранее найденной прямой  $52_D$   $53_{B'}$  соответственную точку  $53_{B'}$ .

Произведя построения, аналогичные предыдущим, находим: для участка  $DB'$  ломаную линию

$$51_{B'}52_D53_{B'}54_D55_{B'}56_D \dots;$$

эта линия построена до точки  $75_{B'}$ , но она стремится путем асимптотических колебаний к точке  $M'$  нулевого расхода; вершины этой кривой расположены попеременно на характеристических кривых  $\Psi_{52}\Psi_{54}\Psi_{56}$  отверстия и на результирующих  $X_{53}X_{55}X_{57}$  характеристических прямых для сечений  $B$  и  $B''$ ;

для участка  $AB$  ломаную линию

$$52_A53_B54_A55_B56_A \dots,$$

построенную до точки  $75_B$ , но которая в дальнейшем асимптотически стремится к точке  $M$  первоначального режима;

наконец для участка  $CB''$  ломаную линию

$$52_C53_{B''}54_C55_{B''}56_C \dots,$$

построенную до точки  $75_{B''}$ , но которая в дальнейшем стремится к точке  $M''$  начального режима.

Легко заметить, что, если параметры отдельных участков трубопровода неодинаковых между собой и различные угловые коэффициенты характеристических прямых, метод построения сохраняется без изменений. Если же различно время перемещения наблюдателей на разных участках трубопровода, то всегда можно назначать моменты начала их движения с таким расчетом, чтобы они встречались между собой в сечении ветвления, на чем основан весь метод построения. Построения упрощаются, если принимать за единицу времени наибольший множитель значений времени пробега наблюдателями трех участков. Практически можно, несколько меняя исходные данные, делать так, чтобы общий наибольший множитель оказался равен возможно большей доле пробега самого короткого участка трубопровода, например, одной его трети, половине, или что лучше всего этому времени целиком.

Более сложная сеть трубопроводов, состоящая из  $n$  участков, потребовала бы просто увеличить число наблюдателей до  $n$ , в то



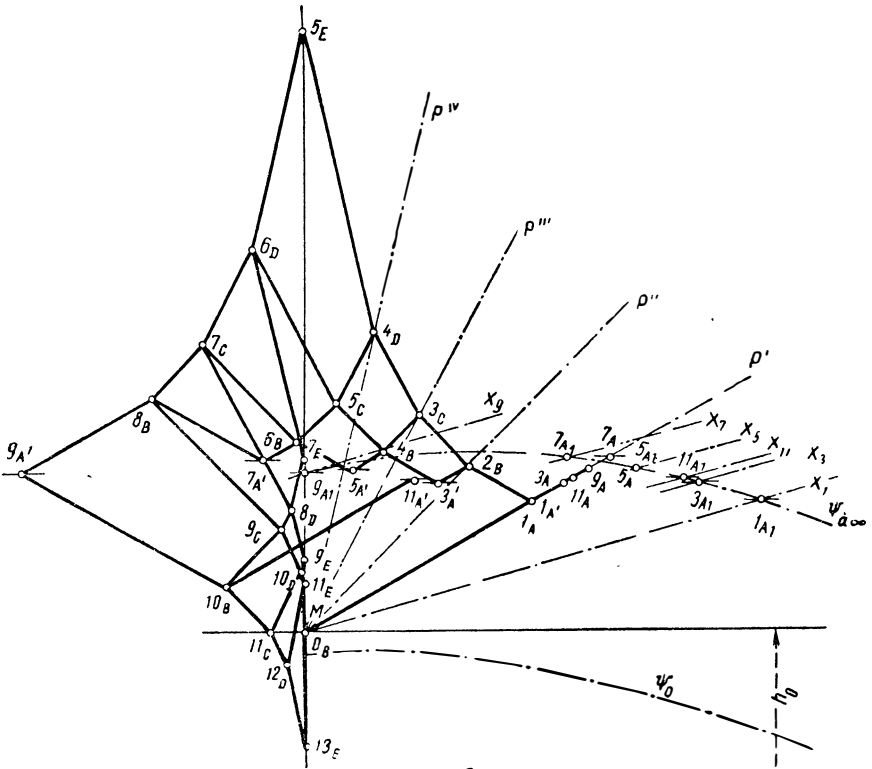
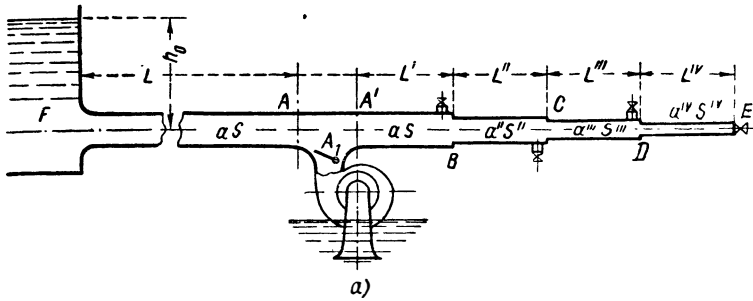
время, как метод построений остается прежним, состоя в том, что перемещения наблюдателей следует назначать так, чтобы последние встречались между собой в определенных сечениях сети, где всегда должны быть соблюдены условия равенства суммарного расхода нулю (непрерывность расхода), и одинакового значения напора, констатируемого каждым наблюдателем.

§ 56(62). **Внезапное включение центробежного насоса.** Рассмотрим случай насоса, присоединенного к сети (фиг. 82, а), состоящей из трубопровода постоянного диаметра, соединяющего насос с резервуаром  $F$  и последовательности  $A'BCDE$  труб городской водопроводной сети с постепенно уменьшающимися значениями диаметра. Предположим быстрое включение насоса, в то время, как боковые отводы в сечениях  $B_1C_1D$  так же, как и концевое сечение водопровода  $E$ , закрыты и пусть  $aL'S$ ,  $a''L''C''$ ,  $a'''L'''S'''$ ,  $a^{IV}L^{IV}S^{IV}$  будут для участков  $A'B$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  константами. Для простоты и ясности построений рассмотрим случай, когда

$$\frac{L'}{a} = \frac{L''}{a''} = \frac{L'''}{a'''} = \frac{L^{IV}}{a^{IV}},$$

причем эту величину примем за единицу измерения времени. Пусть  $\Psi_0$  характеристическая кривая насоса в момент времени нуль, причем будем предполагать, что насос в это время еще не набрал полностью обороты; предположим также, что насос достигает нормальной скорости вращения в момент времени 1, и его характеристической кривой в это время будет  $\Psi_1$  (фиг. 82, б).

Для наблюдателя, выбывающего из сечения  $B$  (фиг. 82, а) в момент времени нуль, когда режим здесь определяется соответственной точкой  $M$  (фиг. 82, б) при расходе нуль и напоре  $h_0$ , характеристикой будет прямая  $MP'$ , имеющая угловой коэффициент  $-\frac{a}{gS}$ , справедливая в момент времени 1 для сечения  $A'$ . Для наблюдателя, начинающего движение от резервуара, характеристической прямой, справедливой в сечении  $A$  в тот же момент времени 1, также будет  $MP'$ , так как в данном случае константы участков трубопровода от резервуара  $F$  до сечения  $A$  и от сечения  $B$  до сечения  $A'$  предположены одинаковыми. Расход в насосе будет равен сумме расходов в сечениях  $A$  и  $A'$ . Это значит, что характеристическая прямая для насоса может быть получена путем сложения абсцисс прямых для сечений  $A$  и  $A'$ . Следовательно, абсциссы прямой  $MP$  должны быть удвоены, что даст прямую  $X_1$ , в пересечении которой с характеристической кривой  $\Psi_1$  насоса находится точка  $1_{A1}$ , являющаяся соответственной точкой режима в  $A_1$  в момент времени 1. Принадлежащая прямой  $MP'$  точка  $1_{A'}$  той же ординаты, что и  $1_{A1}$ , является соответственной точкой для сечения  $A'$  и так как характеристической прямой для сечения  $A$  тоже будет  $MP'$  эта точка явится соответственной точкой  $1_A$  режима также в сечении  $A$ .



Фиг. 82

При перемещении от  $A'$  к  $B_1$  характеристической для наблюдателя будет прямая  $1_{A'} 2_B$ , симметричная прямой  $M_B 1_{A'}$ , справедливая для сечения  $B$  в момент времени 2. В это же время для наблюдателя, выбывшего из сечения  $C$  в момент времени 1, характеристикой в сечении  $B$  будет прямая  $MP''$ , имеющая угловой коэффициент  $\frac{a''}{gS''}$ . Соответственная точка  $2_B$  должна быть, следовательно, на пересечении двух названных прямых.

При движении наблюдателя из сечения  $B$  в направлении сечения  $C$  характеристикой будет симметричная прямой  $M_2 B$  прямая, проходящая через точку  $2_B$ , пусть  $2_B 3_C$ , справедливая в сечении  $C$  в момент времени 3. В этот же момент времени и в этом месте характеристикой для наблюдателя, выбывшего из сечения  $D$  в момент времени 2, будет прямая  $MP'''$ , имеющая угловой коэффициент  $\frac{a'''}{gS'''}$ . Соответственная точка  $3_C$  будет расположена на пересечении двух названных прямых.

Для наблюдателя, начинающего движение в момент времени 3 из сечения  $C$  в направлении к  $D$ , характеристическая прямая будет симметрична  $M_3 C$ , проходя через точку  $3_C$ ; пусть это будет прямая  $3_C 4_D$ ; она будет справедлива для сечения  $D$  в момент времени 4. В то же время при движении наблюдателя, начинающегося из сечения  $E$  в момент времени 3, характеристикой будет прямая  $MP^{IV}$ , имеющая угловой коэффициент  $\frac{a^{IV}}{gS^{IV}}$ , справедливая в сечении  $D$  также в момент времени 4. Соответственная точка  $4_D$  в сечении  $D$  в этот момент времени должна находиться на пересечении двух названных прямых.

Наконец для наблюдателя, выбывающего из сечения  $D$  в момент времени 4, характеристикой будет прямая, симметричная прямой  $M_4 D$ , проходящая через точку  $4_D$ ; это — прямая  $4_D 5_E$ , справедливая для сечения  $E$  в момент времени 5. Но в этом сечении характеристической кривой будет ось ординат (поскольку расход здесь равен нулю). Соответственная точка  $5_E$  будет находиться, следовательно, в пересечении двух названных прямых.

Таким образом, оказывается, что у закрытого конца трубопровода  $E$  имеет место повышение давления, измеряемое отрезком  $M_5 E$ , которое в рассматриваемом случае в 4,7 раза больше повышения давления в сечении  $A$ . Сама форма цепного многоугольника  $1_{A'} 2_B 3_C 4_D 5_E$  уже показывает, что при наличии большего числа последовательно соединенных участков трубопровода с уменьшающимися значениями диаметра последующие стороны многоугольника оказывались бы более круто поднимающимися, и последняя сторона достигла бы оси ординат значительно выше. Следовательно, повышение давления у конца трубопровода может быть неограниченным, завися только от количества участков и от констант  $a$  и  $S$  этих участков.

Городская сеть, а иногда даже домовая, часто имеет такую телескопическую форму. Поэтому незначительное повышение давления, возникающее в начале трубопровода, может значительно увеличиться к концевому сечению. Простое включение центробежного насоса, порождающего самое незначительное повышение давления, может привести к разрыву трубопровода в отдельном сечении, несмотря на наличие, казалось бы, надежного резервуара-амортизатора.

Заметим, однако, что для этого нужно, чтобы повышение давления было бы внезапным, т. е. происходило бы в течение интервала времени, меньшего или равного  $\frac{L^{IV}}{a^{IV}}$ , что, к счастью, редко

имеет место. Построения на фиг. 82, б произведены до момента времени  $t_1$  для сечения  $A'$ , предполагая, что до этого момента времени ни одна волна, отразившаяся от резервуара, не достигла сечения  $A'$ . Построение состоит из последовательности цепных многоугольников, стороны которых параллельны прямым  $MP'$ ,  $MP''$ ,  $MP'''$ ,  $MP^{IV}$  или им симметричным.

Сторона многоугольника  $2_B 3_{A'}$  симметрична прямой  $1_{A'} 2_B$  и, будучи сложена с прямой  $MP'$ , образует прямую  $X_3$ , которая определяет в пересечении с  $\Psi_1$  соответственную точку  $3_{A'}$ , и, следовательно, также точку  $3_{A'}$ . Проходящая через последнюю точку прямая  $3_{A'} 4_{B'}$ , симметричная  $2_B 3_{A'}$  в пересечении с прямой  $3_C 4_B$ , симметричной  $2_B 3_C$ , определяет соответственную точку  $4_B$ .

Далее прямая  $4_B 5_C$ , симметричная  $3_C 4_B$  и прямая  $4_D 5_C$ , симметричная  $3_C 4_D$  определяют в их пересечении соответственную точку  $5_C$ . Тем же порядком получают соответственную точку  $6_D$ , отправляясь от точек  $5_C$  и  $5_E$ , и соответственную точку  $7_E$ , отправляясь от точки  $6_D$ .

Возвращаясь к точке  $4_B$ , можно видеть, что прямая  $4_B 5_{A'}$ , симметричная  $3_{A'} 4_B$ , будучи сложена с  $MP'$ , даст прямую  $X_5$ , пересекающую  $\Psi_1$  в соответственной точке  $5_{A'}$ , что определяет также соответственную точку  $5_{A'}$  на прямой  $4_D 5_{A'}$ . Исходя из этой точки, можно построить многоугольник  $5_{A'} 6_B 7_C 8_D 9_E$  и т. д.

Таким образом, движение наблюдателя на участке трубопровода от  $A'$  до  $B$  и обратно отображается ломаной линией

$$M1_{A'} 2_B 3_{A'} 4_B 5_{A'} 6_B 7_{A'} 8_B 9_{A'} 10_B 11_{A'},$$

стороны которой параллельны или симметричны  $MP'$ .

Движение наблюдателя на участке  $BC$  отражается ломаной линией,

$$M2_B 3_C 4_B 5_C 6_B 7_C 8_B 9_C 10_B,$$

стороны которой параллельны или симметричны  $MP''$ .

Движение наблюдателя на отрезке трубопровода  $CD$  отражается ломаной линией.

$$M3_C 4_D 5_C 6_D 7_C 8_D 9_C 10_D 11_C 12_D,$$

стороны которой параллельны или симметричны  $MP'''$ .

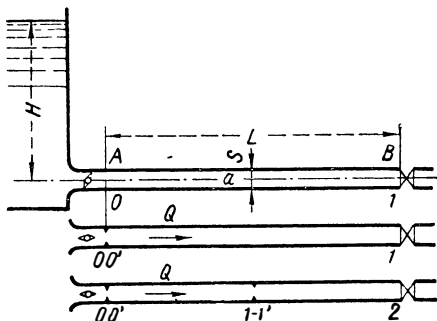
Наконец движение наблюдателя на участке трубопровода  $DE$  отражается на чертеже ломаной линией

$$M4_D5_E6_D7_E8_D9_E10_D11_E12_D,$$

стороны которой параллельны или симметричны  $MP^{IV}$ .

Отметим, что невозможность аналитического решения подобных задач не нуждается в доказательствах.

**§ 57(63). Задача о включении напорного трубопровода в условиях, когда нельзя пренебрегать потерями напора.** Предыдущий



Фиг. 83.

пример показывает, что самое обычное включение насоса в водопроводную сеть не является безопасным. Продолжим изучение этого случая, но введя учет потерь на трение. Мы воспользуемся этим так же для того, чтобы пояснить значение увеличения числа фиктивных диафрагм, какими заменяются при построениях равномерно распределенные потери напора. Итак, рассмотрим (фиг. 83) трубопровод

длиной  $L$ , площадью сечения  $S$ , закрытый у концевого сечения  $B$  и снабженный в начальном сечении  $A$  дроссельным клапаном, внезапное открытие которого вызывает резкое повышение напора в этом сечении до величины  $H$ .

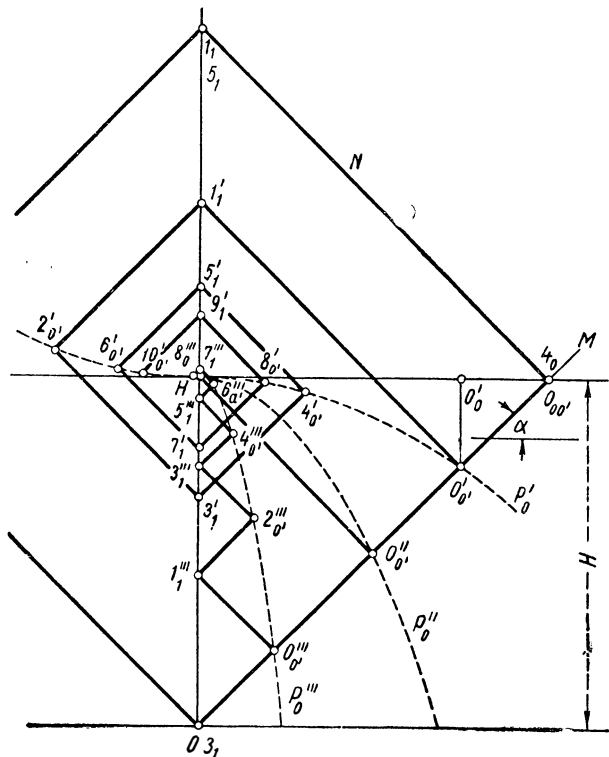
Соответственная точка первоначального режима определяется расходом и напором, равным нулю, т. е. является началом координат (фиг. 84). Для наблюдателя с исходным сечением  $B$  соответственная точка должна быть расположена на прямой  $OM$ , проходящей через начало координат и имеющей

угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \alpha = + \frac{a}{gS}$ .

Если наблюдатель прибывает в сечение  $A$  в момент времени, когда открывается дроссельный клапан (т. е. в момент нуля), то при пренебрежении потерями на трение и кинетической энергией, соответственной была бы точка  $O_{00}'$ , имеющая ординату  $H$ , равную напору при выходе из резервуара, и расход в сечении  $A$  определяется абсциссой этой точки. Этот расход распространяется в направлении к сечению  $B$  со скоростью  $a$ . Для следующего в этом направлении наблюдателя соответственная точка режима будет на прямой  $O_{00}'N$ , имеющей угловой коэффициент отрицательного знака. Когда наблюдатель прибывает в сечение  $B$  в момент времени соответственная точка  $1_1$  будет находиться на оси ординат (так как расход здесь равняется нулю) и напор оказывается рав-

ным удвоенной величине  $H$ . Дальнейшее построение приведет к бесконечному получению одного и того же ромба, так что напор в сечении  $B$  будет меняться в пределах от нуля до  $2H$ , а расход в сечении  $A$  в пределах от  $Q$  до  $-Q$ .

Теперь рассмотрим, что изменится, если ввести учет потерь на трение. Предположим сначала, что все потери сосредоточены в одной диафрагме, установленной в сечении  $A$ ,



Фиг. 84.

отметив сечение, предшествующее диафрагме (если смотреть по направлению от резервуара), как  $O$ , и следующую за нею, как  $O'$ . Пусть ординаты параболы  $P_0'$ , отсчитываемые от горизонтальной линии  $NN$ , представляют собой потери напора при прохождении потока через диафрагму. Соответственная точка режима в сечении  $O'$  в момент времени нуль должна находиться на этой параболе. Так как эта точка находится также на прямой  $O_0M$ , то ее положение определяется пересечением упомянутой параболы и прямой  $O_0M$ . Таким же, очевидно, будет расход также в сечении  $O$ , в то время, как напор здесь равен  $H$ , что дает соответствующую точку  $O_0'$ . Для наблюдателя, начинающего движение

из точки  $O'_0$ , характеристикой будет прямая  $O'_0 1'_1$ , которая определяет в сечении  $B$  при расходе, равном нулю, соответствующую точку  $1'_1$ . При возвращении к сечению  $A$  соответственные точки должны находиться на прямой  $1'_1 2'_0$ , и при достижении наблюдателем сечения  $O'$  — в пересечении  $2'_0$  с параболой  $P'_0$ , продолженной симметрично по отношению к точке  $H$ , так, чтобы ее ординаты были положительными (поскольку имеет место обратное течение). Построения продолжают в том же порядке, так что вершины ломаной линии располагаются попеременно на оси ординат и на параболе  $P'_0$ , что дает точки  $3'_1 4'_0 5'_1 6'_0 7'_1 8'_0 9'_1 10'_0 \dots$ , образующие своего рода спираль, асимптотически свертывающуюся к точке  $H$ . Таким образом наличие потерь напора уменьшает повышенное давление в сечении  $B$  и приводит к затуханию колебаний. Эти два обстоятельства усиливаются, если увеличиваются потери напора. Если эти потери, например, выражены параболой  $P''_0$  (фиг. 84), будет получена ломаная линия  $O''_0 1''_1 2''_0 3''_1 4''_0 5''_1 6''_0 7''_1 8''_0$ , вершины которой, находящиеся на оси ординат, до момента времени  $7$  оказываются расположенными ниже ординаты  $H$ . После этого момента, когда имеет место очень незначительное повышение напора, ломаная линия вновь принимает форму спирали, асимптотически стремящейся к точке  $H$ . Между этими двумя можно отметить промежуточный случай, когда потери выражаются параболой  $P''_0$ , при которой напор в сечении  $O'$  в момент времени нуль равняется  $\frac{H}{2}$ . Тогда напор в конечном сечении  $B$  в момент времени  $1$  будет равняться  $H$ , т. е. этот напор  $H$  будет достигнут здесь так же, как и на всем протяжении трубопровода, без перехода через стадию затухающих колебаний.

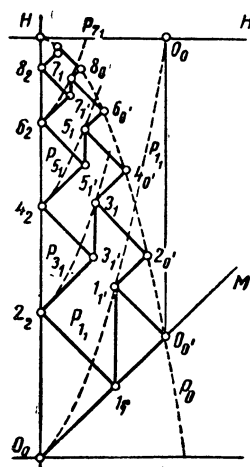
Замена равномерно распределенных между сечениями  $A$  и  $B$  потерь напора одной диафрагмой в сечении  $A$  дает возможность качественной оценки процесса. Количественно данные, получаемые для сечений  $O$  и  $1$  и по всей длине трубопровода, являются лишь грубым приближением к действительности. Для того чтобы получить их более точными, необходимо увеличивать число диафрагм на трубопроводе, имея его в виду, в пределе, равным бесконечности.

Примем за единицу измерения времени время пробега волной расстояния между двумя диафрагмами; при этом условии на фиг. 85 представлены построения для случая двух диафрагм до момента времени  $8$  (это значит, до  $4 \frac{L}{a}$ ); на фиг. 86 даны построения для случая четырех диафрагм, произведенные до момента времени  $18$  (т. е. до  $4,5 \frac{L}{a}$ ), и, наконец, на фиг. 87 даны

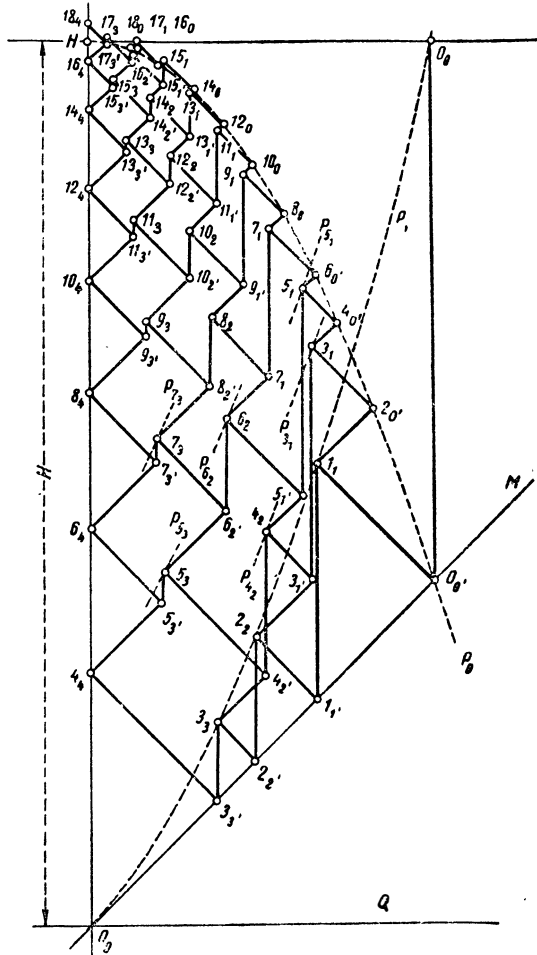
построения до момента времени  $\frac{L}{a}$  для случаев, когда число диафрагм равно 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Обозначим каждую диафрагму порядковым номером, ведя отсчет в направлении от сечения  $A$  без апострофа для лицевой и с апострофом — для обратной стороны, т. е. через 1—1', 2—2', 3—3' и т. д. В каждой диафрагме имеют место потери напора, равные  $\frac{1}{n}$  части общих потерь ( $n$  — число диафрагм). Построения выполнены, предполагая потери во всех случаях одинаковыми и представляемыми параболой  $P_0''$ .

Проследим за построениями на фиг. 85 для случая двух диафрагм. Потери напора в каждой



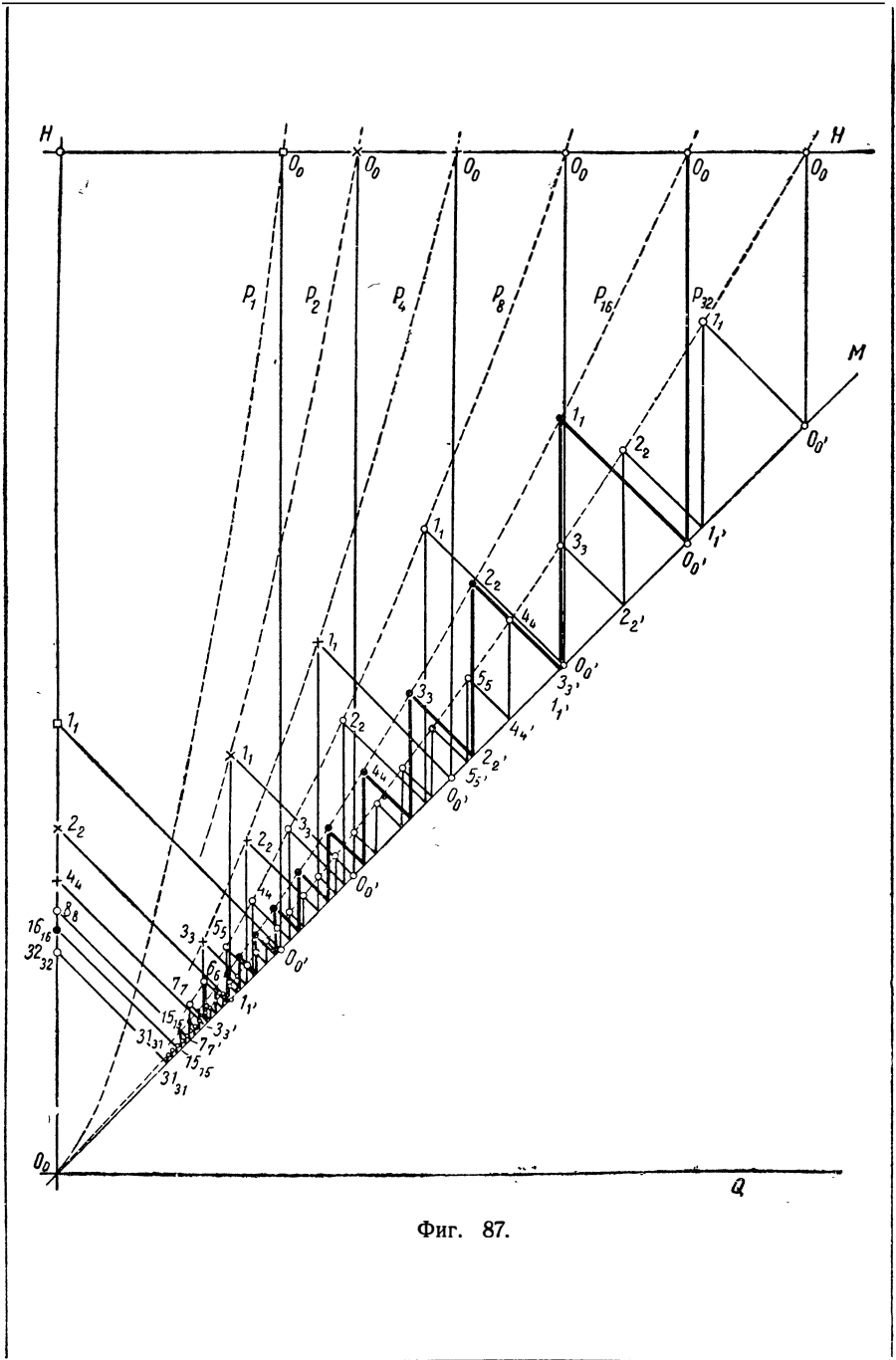
Фиг. 85.



Фиг. 86.

диафрагме изображаются параболой  $P_0$ , ординаты которой (отсчитываемые по-прежнему от горизонтальной линии  $HN$ ) составляют половину ординат параболы  $P_0''$  на фиг. 84. В момент времени нуль в  $O'$  соответственной точкой будет  $O_0'$  на пересечении параболы  $P_0$  и прямой  $O_0M$ . Затем при возвращении наблюдателя соответственные точки будут находиться на прямой  $O_0'1'$ , симметричной  $O_0M$ . Достигнув сечения 1 в момент времени 1, первый наблюдатель встретится





со вторым, выбывшим из сечения 2 в момент времени нуль, для которого характеристикой является прямая  $O_0M$ . Пройдя диафрагму, этот наблюдатель констатирует увеличение напора в результате потерь, что приводит к получению параболы  $P_{1_1}$ . Соответственная точка для сечения 1 в момент времени 1 должна находиться на пересечении  $1_1$ \* этой параболы и прямой  $O_0$   $1_1$ .

Для обоих наблюдателей, продолжающих обратный путь, соответственные точки будут находиться на прямых  $1_1$   $2_0'$  и  $1_1$   $2_2$  и в момент их прибытия в сечения  $O'$  и 2 это будут соответственно точки  $2_0'$  на параболе  $P_0$  и точка  $2_2$  на оси ординат.

При возвращении к сечению 1 соответственные точки для двух наблюдателей будут находиться на прямых  $2_2$   $3_1'$  и  $2_0'$   $3_1'$ . Прибывая в сечение установки диафрагмы 1—1' в момент времени 3, наблюдатель, начавший движение в сечении 2, пройдя через диафрагму, констатирует увеличение напора в результате потерь, что приводит к получению параболы  $P3_1$ , в пересечении которой с прямой  $2_0'$   $3_1$  находится соответственная точка  $3_1$  режима в сечении 1 в момент времени 3 и т. д. В результате сравнения можно видеть, что напор в сечении оказывается в рассматриваемом случае менее значительным, чем в случае одной диафрагмы.

На фиг. 86, соответствующей случаю четырех диафрагм, ординаты параболы  $P_0$  потерь напора в четыре раза меньше ординат параболы  $P_0''$  на фиг. 84. Соответственная точка  $1_1'$  для момента времени 1 у первой диафрагмы 1 находится так же, как и в предыдущем случае. Но наблюдатель, возвращающийся от диафрагмы 1 к диафрагме 2, встречается здесь с наблюдателем, который выбыл из сечения 3 в момент времени 1, и для которого еще справедлива характеристическая прямая  $O_0M$ ; последняя, будучи увеличенной на ординаты параболы  $P_0$ , даст также параболу  $P_1$ , в пересечении которой с прямой  $1_1$   $2_2$  определается соответственная точка  $2_2$  в сечении 2 в момент времени 2. Затем наблюдатель, прибывший из сечения 3 и возвращающийся туда же с целью прибыть обратно в это сечение в момент времени 3, будет видеть соответственные точки на прямой  $2_2$   $3_3$ ; он встретится там с наблюдателем, выбывшим из сечения 4 в момент времени 2, для которого характеристикой является прямая  $O_0M$ ; последняя, будучи увеличена на ординаты параболы  $P_0$ , даст снова параболу  $P_1$ , в пересечении которой с прямой  $2_2$   $3_3$  находится соответственная точка  $3_3$  режима для сечения 3 в момент времени 3. Наконец, для наблюдателя, возвращающегося от диафрагмы 3 по направлению к диафрагме 4, режим представляется прямой  $3_3$   $4_4$  и в сечении 4, где расход равен нулю, соответственная точка  $4_4$  будет находиться на оси ординат.

\* На фиг. 85 помеченной ошибочно как  $1_1'$  (Прим. ред.).

Существенно отметить, что в начале построений соответственные точки для сечений 1, 2, 3 в момент прихода сюда волны, возникшей в сечении  $O$  в момент времени нуль, принадлежат одной и той же параболе  $P_1$ , получаемой сложением ординат параболы  $P_0$  и прямой  $O_0M$ . Это примечание справедливо независимо от общего числа диафрагм.

Построения на фиг. 86 для случая четырех диафрагм продолжается затем в следующем порядке:

находится соответственная точка  $2_0'$  в пересечении прямой  $1_1$   $2_0'$  с параболой  $P_0$ ;

затем соответственная точка  $3_1$  в пересечении прямой  $2_0'$   $3_1$  с параболой  $P_{3_1}$ , получаемой в результате сложения ординат  $P_0$  с ординатами прямой  $2_2$   $3_1'$ ;

соответственная точка  $4_2$  на пересечении прямой  $3_1$   $4_2$  с параболой  $P_{4_2}$ , получаемой сложением ординат  $P_0$  с ординатами прямой  $3_3$   $4_2'$ ;

соответственная точка  $5_3$  в пересечении прямой  $4_2'$   $5_3$  с параболой  $P_{5_3}$ , получаемой сложением ординат параболы  $P_0$  и прямой  $4_4$   $5_3'$ ;

соответственная точка режима  $6_4$  — в пересечении прямой  $5_3'$   $6_4$  с осью ординат.

После этого таким же способом находятся соответственные точки

$$4_0' \ 5_1 \ 6_2 \ 7_3 \ 8_4$$

$$6_0' \ 7_1 \ 8_2 \ 9_3 \ 10_4 \text{ и так далее.}$$

На чертеже можно видеть постепенное увеличение напора вдоль трубопровода.

Для случаев, когда число диафрагм равняется 8, 16 и 32, мы ограничимся нахождением соответственных точек при первом пробеге от сечения  $A$  к сечению  $B$  волны, возникшей в сечении  $A$  в момент времени нуль. В соответствии со сделанным выше примечанием все эти точки будут принадлежать одной и той же параболе, получаемой (фиг. 87) путем сложения ординат прямой  $O_0M$  с ординатами параболы потерь напора в одной диафрагме. Мы нанесли на этой фигуре также параболы для случаев одной, двух и четырех диафрагм.

Таким образом построены параболы  $P_1$   $P_2$   $P_4$   $P_8$   $P_{16}$   $P_{32}$  при суммарной потере напора между сечениями  $A$  и  $B$ , равной  $\xi$ .

Значение напора в сечении  $B$  в момент времени ( $L : a$ ) с увеличением числа диафрагм становится меньше, стремясь в то же время к некоторому пределу при  $n = \infty$ , зависящему, очевидно, от  $\xi$ . Для сравнения результатов они представлены в виде кривых (фиг. 88) распределения напора по длине трубопровода; при построении этих графиков применена следующая интерпретация: в сечении установки каждой диафрагмы построение приводит к двум значениям напора, одному перед и другому за диафрагмой. В действительности этот перепад напора распределяется на последующем участке трубопровода. Поэтому можно принять, что средняя величина



напора соответствует середине названного участка трубопровода; так например, средняя величина напора  $Z_3 - Z'_{3'}$ , найденного для момента времени  $Z$  в сечениях у диафрагмы № 3, отнесена к середине участка 3—4. Таким способом и получены кривые на фиг. 88.

Очевидна быстрая сходимость этих кривых. В данном случае использован пример, где потери напора очень велики по сравнению с первоначальным напором  $H$ ; но даже в этом случае принятие числа диафрагм равным восьми дает уже результаты достаточной точности с точки зрения инженерных расчетов.

Можно полагать, что при обычных для гидравлических установок значениях потерь напора замена действительного распределения напора вдоль трубопровода перепадами, сосредоточенными в четырех диафрагмах, позволит определять искомое распределение с достаточной степенью точности.

---

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА В ДРУГИХ  
ОБЛАСТЯХ МЕХАНИКИ

---

---

В механике мы встречаемся с одного и того же рода задачами, к которым применимы, следовательно, также одни и те же методы решения в следующих различных случаях:

металлического стержня малых по сравнению с длиной поперечных размеров, подвергаемого переменным продольным усилиям; такого же стержня, подвергаемого переменному кручению; натянутой струны, подверженной воздействию переменной поперечной силы (вибрирующая струна);

линии электропередачи рассматриваемой как проводник, работающий под переменным напряжением.

В каждом из этих случаев изменение состояния распространяется также с постоянной скоростью, и закономерности в этом распространении могут быть установлены с помощью самых элементарных познаний в области механики или упругости. Кроме того, эти закономерности приводят к применению одного и того же графического метода, как и могут быть решены всевозможные практические задачи механики для названных случаев.

В предлагаемой третьей части излагаются для каждого случая основные положения и даются примеры практического применения в количестве, достаточном для ознакомления читателя с методом.<sup>1</sup>

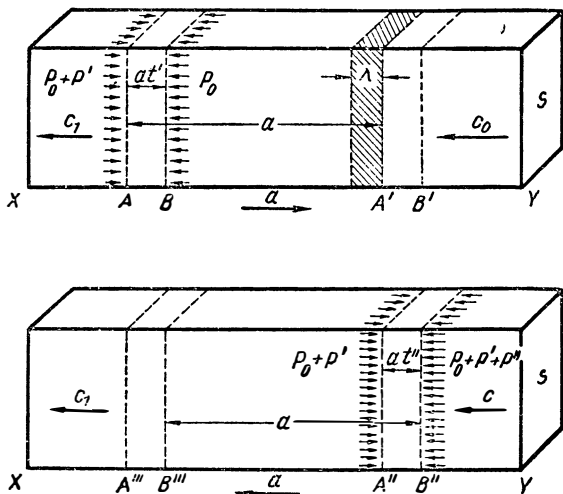
**МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ СТЕРЖНИ, ПОДВЕРГАЕМЫЕ ПРОДОЛЬНОМУ  
УСИЛИЮ**

**§ 58(73). Вывод общих законов.** Пусть стержень постоянного сечения перемещается в направлении своей оси со скоростью  $c_0$ , будучи подвержен внутреннему напряжению  $P_0$  (в частном случае последнее может быть равно нулю). Предположим, что в силу какой то причины в сечении  $X$  возникает некоторая сила  $P'$  и одновременно новая скорость  $c_1$ . Это изменение состояния будет распространяться вдоль стержня от сечения  $X$  к сечению  $Y$  с постоянной скоростью  $a$ ; если требуется время  $t'$  для того, чтобы изменение закончилось в сечении  $X$ , то в каждое некоторое мгновение оно

---

<sup>1</sup> Это изложение и большая часть примеров уже были опубликованы в следующей технической литературе: Bulletin des Ingenieurs Civils de juillet-août, 1937; Bulletin de la Société Française des Electriciens, octobre, 1937; Revue „Mécanique“ de „Sciences et Industrie“, novembre—décembre, 1938, mai—juin, 1939; Technique Moderne, 1-er avril, 1937.

будет захватывать участок стержня длиной  $at'$ , пусть например, между сечениями  $A$  и  $B$  на фиг. 89; через одну секунду участок изменения состояния будет занимать положение  $A'B'$  на расстоянии  $a$  метров от участка  $AB$ . Скорость  $c_1$  существует первоначально в участке стержня между сечениями  $X$  и  $A$ , а скорость  $c_0$  — между сечениями  $B$  и  $Y$ ; через секунду скорость  $c_1$  будет иметь место также между сечениями  $A$  и  $A'$ ; таким образом масса цилиндра  $AA'$ , равная  $\frac{\omega}{g} as$  (где  $\bar{\omega}$  — удельный вес материала стержня) изменит свою



Фиг. 89.

скорость от  $c_0$  до  $c_1$ ; этот процесс будет воспроизводиться каждую секунду на протяжении  $a$  метров стержня.

Напомним теорему количества движения: приращение количества движения тела в единицу времени равняется сумме внешних сил, приложенных к телу.

Мы только что констатировали, что изменение количества движения тела  $XU$  за секунду составляет  $\left(\frac{\bar{\omega}}{g} as\right) \cdot (c_1 - c_0)$ . Силами, приложенными к телу слева, являются  $(P_0 + P')$  и справа  $(+P_0)$ , что дает в сумме  $P'$ .

Поэтому применение теоремы количества движения приводит к следующему выражению

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{g} as\right)(c_0 - c_1) = P'. \quad (1)$$

В наиболее общем случае, кроме того, может иметь место изменение состояния также в сечении  $Y$  в результате приложения также здесь некоторой силы  $P''$ , в результате чего произой-

дет в интервале времени  $t''$  изменение скорости до значения  $c$ . Это изменение скорости будет распространяться в направлении от сечения  $Y$  к сечению  $X$  с той же скоростью  $a$ , происходя на отрезке стержня длиной  $at''$  и если сначала наблюдается (фиг. 89), например, на участке между сечениями  $A''B''$ , то через секунду будет наблюдаться между сечениями  $A'''$  и  $B'''$ , на расстоянии  $a$ . Изменение количества движения будет равно  $\frac{\omega}{g} as (c - c_1)$ , приложенными силами являются слева  $(P_0 + \bar{P}'')$  и справа  $+(P_0 + P' + P'')$ , что в совокупности дает  $+P''$ . Та же теорема при этом даст

$$\left(\frac{\omega}{g} as\right)(c_1 - c) = -P'' \quad (2)$$

Таким образом, силы  $P'$  и  $P''$  вызывают волны, которые распространяются со скоростью  $a$  в противоположных друг другу направлениях, что приводит в результате сложения (1) и (2) к выражению

$$\left(\frac{\omega}{g} as\right)(c_0 - c) = P' - P'' \quad (3)$$

Сверх того, конечное значение силы будет равно

$$P = P_0 + P' + P'',$$

откуда следует

$$P - P_0 = P' + P'' \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4), которые выражают законы распространения упругих волн в стержне  $XY$ , идентичны с уравнениями (15) и (16), полученными в §3 для движения жидкости в напорных трубопроводах.

Рассмотрим теперь некоторое сечение  $M$  стержня  $XY$  (фиг. 90), в котором встречаются упругие волны  $P_i''$  и  $P_i'$  в момент времени  $i$ , так что режим здесь будет  $P_i C_i$ , применение общих уравнений (3) и (4) даст (см. § 7):

для сечения  $M$  в момент времени  $i$

$$\left(\frac{\omega}{g} as\right)(c_0 - c_i) = P_i' - P_i'' \quad (5)$$

$$P_i - P_0 = P_i' + P_i'' \quad (6)$$

для наблюдателя, выбывающего из сечения  $M$  в момент времени  $i$  и перемещающегося со скоростью  $a$ , следуя за упругой волной  $P_i'$ , остающейся неизменной

$$\left(\frac{\omega}{g} as\right)(c_0 - c) = P_i' - P'' \quad (7)$$

$$(P - P_0) = P_i' + P'' \quad (8)$$





Следует отметить, что для наблюдателя, перемещающегося в направлении скорости  $c_0$ , угловой коэффициент будет иметь отрицательный знак, а для наблюдателя, перемещающегося в противоположном направлении, — положительный знак. При этом положительное значение силы  $P$  соответствует сжатию стержня.

Мы пришли, таким образом, в случае распространения упругих волн в стальном стержне также к прямым, аналогичным найденным ранее (фиг. 9) для случая распространения волн в трубопроводах. Прежде чем применить этот результат к решению конкретных задач, необходимо определить скорость  $a$  распространения упругих волн.

**§ 59(74). Определение скорости  $a$  (распространения упругих волн).** При возрастании усилия в стержне на величину  $P'$  длина участка стержня  $AA' = a$  (фиг. 89) сокращается в соответствии с законами упругости на величину

$$\lambda = \frac{P'a}{sE}, \quad (13)$$

где  $s$  — поперечное сечение стержня и  $E$  — коэффициент упругости.

Сокращение длины  $a$  выражается в том, что в течение одной секунды плоскость сечения  $A$  продвигается со скоростью  $c$ , а плоскость сечения  $A'$  — со скоростью  $c_0$ , так что эти две плоскости сближаются между собой на величину

$$\lambda = (c_0 - c_1); \quad (14)$$

оба значения  $\lambda$  равны между собой, так как в течение времени прохождения волны от сечения  $A$  к сечению  $A'$  масса цилиндра  $AA'$  не изменилась. Приравнявая уравнения (13) и (14) и заменяя  $P'$  его выражением (1), найдем

$$a = \sqrt{\frac{g}{\omega} E}. \quad (15)$$

## Приложения

В качестве примера рассмотрим сначала различные случаи соударения двух стержней; при этом мы будем называть периодом время, затрачиваемое наблюдателем на перемещение вдоль стержня и обратно со скоростью распространения волны.

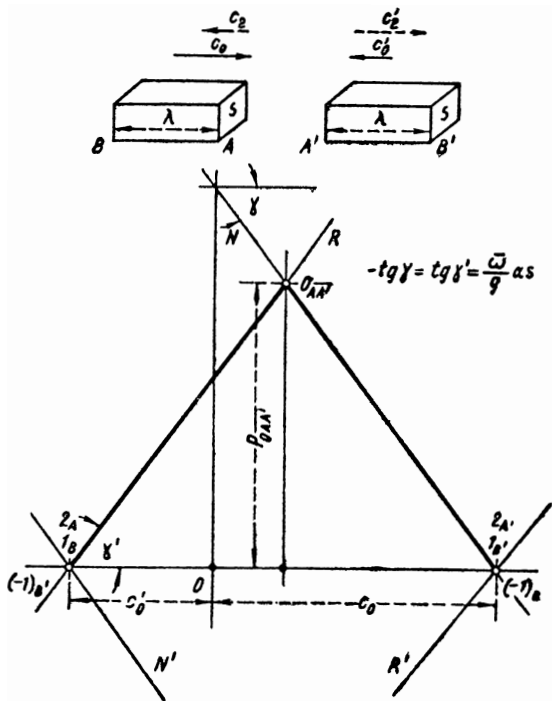
**§ 60(75). Соударение двух стержней одинаковых удельного веса поперечного сечения и периода, движущихся с разными скоростями  $c_0$  и  $c_0'$**  (фиг. 91). Момент соударения стержней обозначим через нуль, а за единицу времени примем полупериод  $\tau = \frac{\lambda}{a}$  (где  $\lambda$  — длина стержней). В соответствии с предположениями

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}' \quad a = a' \quad s = s',$$

откуда угловой коэффициент  $\frac{\bar{\omega}'as}{lg}$  характеристических прямых

тела  $AB$  равен угловому коэффициенту  $\frac{\bar{\omega}'a's'}{g}$  характеристических прямых тела  $A'B'$ .

До соударения, в момент времени, например  $(-1)$ , соответственной точкой для концевое сечения  $B$  тела  $AB$  будет  $(-1_B)$  с абсциссой  $c_0$ , а для концевое сечения  $B'$  тела  $A'B'$   $(1_{B'})$  с абсциссой  $c'_0$ .



Фиг. 91.

Наблюдатели, выбывающие в этот момент времени из названных концевых сечений, прибывают: один в сечении  $A$ , другой — в сечении  $A'$  в момент времени  $(-1 + \frac{\lambda}{a}) = 0$ , иначе говоря, в момент соударения. Для первого наблюдателя, перемещающегося в направлении скорости  $c_0$ , принимаемом за положительное, характеристическая прямая  $(-1_B)N$  имеет угловой коэффициент  $-\frac{\bar{\omega}as}{g}$  и проходит через точку  $(-1_B)$ . Для второго наблюдателя, движущегося в противоположном направлении, характеристическая прямая  $(-1_{B'})R$  имеет угловой коэффициент  $+\frac{\bar{\omega}}{g}as$  и проходит через точку  $-1_{B'}$ . Соответственной точкой в момент времени нуль встречи наблюдателей будет точка  $O_{AA'}$ ,

на пересечении этих двух прямых, что дает скорость  $\frac{c_0 - c'_0}{2}$  и сжимающее усилие  $P_0 \frac{\bar{\omega}}{g} as = \frac{c_0 + c'_0}{2}$ .

Для наблюдателя, проделывающего обратный путь из сечения  $A$  к  $B$ , характеристика, проходящая через точку  $O_{AA'}$ , будет симметричной прямой  $(-1_B)N$ , следовательно, она совпадает с  $(-1_{B'})R$ . Прибывая в сечение  $B$ , где усилие равно нулю, наблюдатель определит соответственную точку  $1_B$ , совпадающую с  $(-1_{B'})$ ; таким образом скорость сечения  $B$  будет обратного знака и равна  $c'_0$ .

При дальнейшем перемещении этого же наблюдателя от сечения  $B$  к сечению  $A$ , характеристикой будет  $1_{B'}N'$ , симметричная прямой  $1_B R$ , проходящая через точку  $1_B$ . Когда наблюдатель прибывает в сечение  $A$ , где не может быть растягивающего напряжения, наблюдатель констатирует силу, равную нулю, чем определяется соответственная точка  $2_A$ , совпадающая с точкой  $1_B$ . Таким образом, брус  $AB$  приобретает движение в обратном направлении при скорости  $c_2 = c'_0$ .

Точно также для наблюдателя, проделывающего обратный путь от сечения  $A'$  к  $B'$ , характеристикой будет прямая, проходящая через точку  $O_{AA'}$ , симметричная прямой  $(-1_{B'})$ , совпадающая с предыдущей прямой  $(-1_B)N$ , а в момент прибытия наблюдателя в сечение  $B'$ , где напряжение равно нулю, соответственной точкой будет точка  $1_{B'}$ , совпадающая с  $(-1_B)$ . Скорость сечения  $B'$  изменит свое направление и будет равна  $c_0$ .

Для того же наблюдателя, возвращающегося из сечения  $B'$  к  $A'$ , характеристикой будет прямая  $(1_{B'})R'$ , симметричная прямой  $(1_{B'})N$ . Она проходит через точку  $1_{B'}$ ; при достижении наблюдателем сечения  $A'$  ввиду невозможности здесь растягивающих напряжений усилие в стержне оказывается равным нулю, что даст точку  $2_{A'}$ , совпадающую с точкой  $1_{B'}$ . После этого тело  $A'B'$  получает движение в обратном направлении со скоростью  $c'_2 = c_0$ .

Таким образом, тела в момент соударения получили скорость  $\frac{c_0 - c'_0}{2}$ , а сжимающая сила оказывается равной  $\frac{\bar{\omega}}{g} as \frac{c_0 + c'_0}{2}$ .

Такой режим продолжается в течение времени  $\frac{2\lambda}{a}$ , т. е. одного периода, после чего оба тела, обменявшись скоростью, разъединятся.

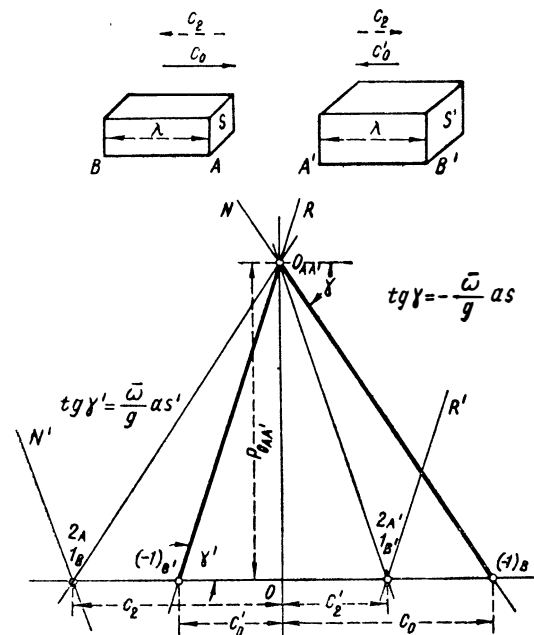
**§ 61 (76). Соударение двух тел одинаковых удельного веса и скорости распространения упругих волн и периода, но сечения  $s$  и  $s'$  обратно пропорциональны скоростям  $c_0$  и  $c'_0$  (фиг. 92). В соответствии со сделанными предположениями имеем**

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{g} as\right) c_0 = \left(\frac{\bar{\omega}}{g} as'\right) c'_0. \quad (16)$$

Для наблюдателей, выбывающих, из сечений  $B$  и  $B'$  в момент времени  $(-1)$ , характеристиками будут прямая  $(-1_B)N$ , имеющая угловой коэффициент  $\left(-\frac{\bar{\omega}}{g}as\right)$  и прямая  $(-1_{B'})R$ , имеющая угловой коэффициент  $+\frac{\bar{\omega}}{g}as'$ . При встрече наблюдателей в мо-

мент времени нуль столкновения граней  $A$  и  $A'$ , соответственная точка должна находиться на пересечении этих двух прямых. С учетом уравнения (16) эта точка должна быть на оси ординат, что определяет сжимающее усилие  $\frac{\bar{\omega}}{g}asc_0$  и скорость, равную нулю<sup>1</sup>.

При обратном перемещении наблюдателей в направлении сечений  $B$  и  $B'$  характеристики будут проходить через точку  $O_{AA'}$ ; они будут симметричными, предшествующим прямым, определяя в сечениях  $B$  и  $B'$ , где усилия равны нулю, соответственные точки  $1_B$  и  $1_{B'}$ , показывающие, что скорости



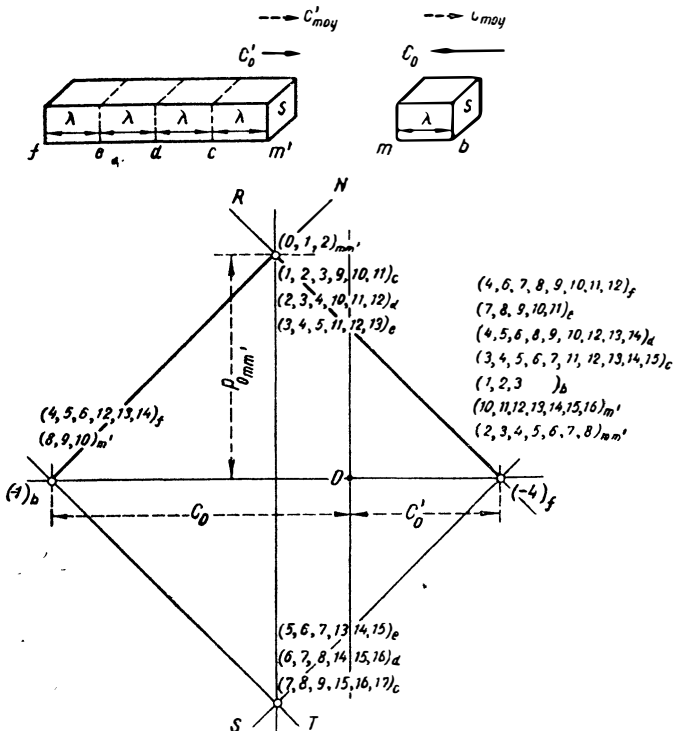
Фиг. 92.

брусков получили обратные предшествующим направления. Для наблюдателей, проделывающих обратный путь в направлении сечений  $A$  и  $A'$ , характеристиками будут прямая  $1_B N'$ , проходящая через точку  $1_B N'$  и симметричная  $O_{AA'} 1_B$ , и прямая  $1_{B'} R'$ , проходящая через точку  $1_{B'}$  и симметричная  $O_{AA'} 1_{B'}$ . Когда наблюдатели прибывают в сечения  $A$  и  $A'$ , где (вследствие невозможности возникновения растяжения) усилие равняется нулю, соответственными точками будут  $2_A$  и  $2_{A'}$ , совпадающие с точками  $1_B$  и  $1_{B'}$ .

Таким образом стержни  $AB$  и  $A'B'$  сохраняют каждый свою начальную скорость  $c_0$  и  $c'_0$ , но в противоположном направлении (а не обмениваясь скоростями, как в предшествующем случае).

<sup>1</sup> Это предполагает сжимающее усилие распределенным по всей площади сечения  $s'$ , хотя оно больше, чем сечение  $s$ ; это не вполне строго, но практически в достаточной мере точно, если сечения  $s$  и  $s'$  не очень различаются между собой.

§ 62 (77). Соударение двух тел одинакового удельного веса, скорости распространения упругих волн и поперечного сечения  $S$ , но имеющих разные значения периода и разные скорости (фиг. 93). Пусть скорость тела  $tb$  будет  $c_0$ , а время пробега волны в этом теле будет  $\frac{\lambda}{a} = \tau$ ; этот интервал мы примем за единицу времени. Для тела  $m'f$  время пробега пусть будет



Фиг. 93.

$\frac{\lambda'}{a} = 4\tau$ , а скорость примем равной  $c'_0 = \frac{c_0}{2}$ ; величина  $\frac{\bar{\omega}}{g} \alpha S$  (касательная угла  $\gamma$  характеристической прямой) одинакова для обоих тел.

Так же, как и в случае, описанном в § 60 (75), для наблюдателей, начинающих движение из сечений  $b$  и  $f$ , характеристики образуют с осью абсцисс одинаковый по величине угол  $\pm \gamma$ . Для того же, чтобы наблюдатели встретились в сечениях  $m$  и  $m'$  в момент времени нуль соударения тел, один из них должен начать движение из сечения  $b$  в момент времени  $(-1)$ , а другой из сечения  $f$  в момент времени  $(-4)$ , чем определяются прямые  $(-1)_b N$  и  $(-4)_f R$ . Соответственная точка в момент времени нуль будет находиться на пересечении этих двух прямых

в  $O_{mm'}$ , определяя общую скорость обеих стержней, равную  $\frac{c_0 - c'_0}{2}$  и сжимающее усилие  $\frac{\bar{\omega}}{g} as \frac{c_0 + c'_0}{2}$ .

Затем наблюдатель, возвращающийся из  $m$  к  $b$ , отмечает характеристическую прямую, симметричную предыдущей и совпадающую с прямой  $(-4)_f R$ , проходящую через точку  $O_{mm'}$ . В момент 1 прибытия в сечение  $b$  соответственной точкой будет  $1_b$ , определяемая тем, что здесь не может быть растягивающих усилий; эта точка определяет скорость  $c'_0$ . Для наблюдателя, возвращающегося в направлении к сечению  $m$ , характеристикой будет прямая  $1_b S$ , параллельная прямой  $(-1)_b N$ . В сечении  $m$  этот наблюдатель встретит другого наблюдателя, выбывшего из сечения  $f$  в момент времени  $(-2)$ ; характеристическая прямая для этого наблюдателя совпадает с прямой  $(-4)_f R$ ; в момент встречи наблюдателей соответственная точка будет находиться на пересечении обеих прямых в  $2_{mm'0}$ , совпадая с точками  $(-4)_f$  и  $1_b$ .

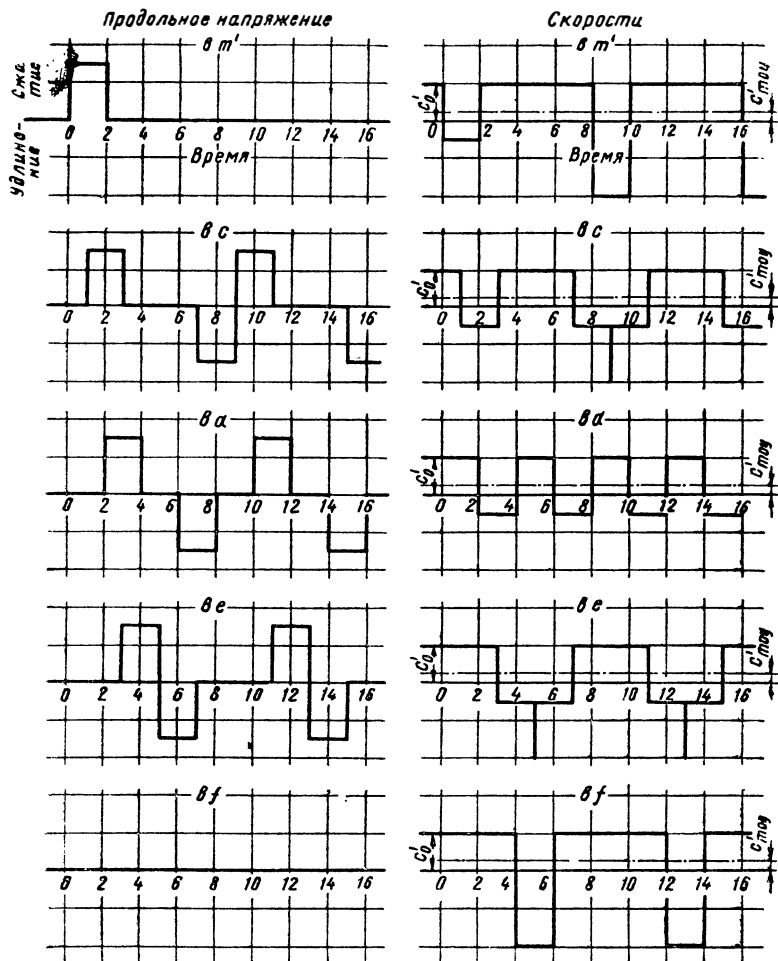
При возвращении наблюдателя к сечению  $b$  характеристикой будет прямая, симметричная  $1_b S$ , проходящая через точку  $2_{mm'}$ , совпадающая с прямой  $(-4)_f R$ ; соответственной точкой, положение которой определяется невозможностью возникновения растягивающего усилия, будет  $3_b$ , совпадающая с предшествующей точкой  $2_{mm'}$ .

Так будет продолжаться в сечении  $mm'$  до момента времени 8. Тот же наблюдатель, который перемещается в теле  $mb$ , еще встретит в сечении  $m$  наблюдателей, выбывающих из сечения  $f$  в моменты времени нуль, два и четыре, и для которых характеристическая прямая совпадает с прямой  $(-4)_f R$ , так как начальный режим при выбытии наблюдателей будет характеризоваться скоростью  $c'_0$  и усилием, равным нулю. Скорость сечений  $mm'$  в период времени от момента 2 до момента 8 равняется скорости тела  $mb$  до момента соударения, и тело  $mb$  целиком воспринимает эту скорость.

В теле  $m'f$  изменение состояния распространяется, начиная от момента времени нуль, но начинает давать себя чувствовать в сечении  $m'$  только с момента времени 8. Действительно, для наблюдателя, выбывающего из сечения  $m'$  в направлении к  $f$ , в момент времени нуль, характеристикой будет прямая, проходящая через точку  $O_{mm'}$ , симметричная прямой  $(-4)_f R$  и совпадающая с прямой  $(-1)_b N$ ; соответственная точка  $4_f$  для сечения  $f$ , совпадающая с точкой  $(-1)_b$ , определяется из условия невозможности здесь растягивающего усилия. При возвращении наблюдателя к сечению  $m'$  характеристикой будет прямая  $4_f T'$ , симметричная предыдущей и проходящая через точку  $4_f$ . Поскольку в сечении  $m'$  не может быть растягивающего усилия, соответственной точкой здесь в момент прибытия наблюдателя будет точка  $8_{m'}$ , совпадающая с  $4_f$ ; отсюда следует, что в мо-

мент времени 8 скорость в сечении  $m_1$  резко изменяется от значения  $c'_0$  до значения  $(-c_0)$ .

Продолжать описание построений нет необходимости; из уже сказанного очевидно, что, используя перемещения наблюдателей,



Фиг. 94.

начинающих движение из сечения  $m'$  в моменты времени 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, можно определить режимы в сечениях  $m'$  и  $f$ , разделенные интервалами времени  $\tau$ .

Следует отметить, что, имея определенными режимы в сечениях  $m'$  и  $f$ , можно, не производя дополнительных построений, найти режимы в сечениях  $c$ ,  $d$ ,  $e$  на взаимных расстояниях  $\lambda$ .



Пусть, например, надо найти режим в сечении  $c$  в момент времени 14; он будет отмечен наблюдателем, выбывающим из сечения  $f$  в момент времени 11, и характеристикой будет уже построенная ранее прямая  $11_f 15_{m'}$ , совпадающая с прямой  $(-4)_f R$ . Равным образом данный режим будет отмечен также наблюдателем, выбывающим из  $m'$  в момент времени 13; для этого наблюдателя характеристикой будет построенная ранее прямая  $13_{m'} 17_f$ , совпадающая с прямой  $(-4)_f S$ . Искомая соответственная точка для сечения  $c$  в момент времени 14 должна находиться на пересечении  $14_c$  прямых  $11_f 15_{m'}$  и  $13_{m'} 17_f$ , совпадая с начальной точкой  $(-4)_f$ .

Соответственные точки для всех сечений  $m'cdef$  отмечены на чертеже; по этим точкам можно построить (фиг. 94) графики зависимости скорости от времени для названных сечений. Из рассмотрения этих графиков следует, что средняя скорость тела  $m'f$  составляет одну четвертую часть от начальной. Отсюда следует, что кинетическая энергия обоих брусков, определяемая по средней скорости, значительно меньше, чем до удара, несмотря на то, что мы не учитывали никаких потерь. Это становится понятным, если учесть, что внутри тела  $m'cdef$  скорость и напряжение находятся в состоянии бесконечных колебаний, в силу чего имеет место общий запас кинетической и потенциальной энергии, сохраняющийся постоянным, и равный в данном случае трем четвертым от начальной кинетической энергии тела  $mb$  и пятнадцати шестнадцатых первоначальной энергии тела  $m'cdef$ .

**§ 63 (78). Удар призмы о неограниченную плиту, испытывающую местную деформацию.** Условие неограниченности в данном случае можно считать выдержанным, если масса плиты будет в 10--20 раз больше массы ударяющего тела, так как дальнейшее увеличение не будет уже влиять на результаты. Но как бы велика ни была масса плиты, площадь, испытывающая влияние ударяющего тела, будет ограниченной; напряженность в теле, подвергаемом удару, не имеет прямой связи с массой этого тела и соизмерима с напряженностью в ударяющем теле. В действительности на поверхности тела, испытывающего удар, возникают деформации на площади  $mt$  (фиг. 95), имеющей практически конечное значение; эту деформацию можно представить как получаемую при условии, что усилие от удара распределяется равномерно на площади  $ns$ , несколько превосходящей площадь сечения ударяющего тела (равной, может быть,  $3s$  или  $4s$ , что может быть установлено опытным путем).

Поэтому случай удара о бесконечную плиту может быть сведен к построениям на фиг. 95. Прямая  $(-1)_B R$ , имеющая угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{\omega}{g} as$ , справедлива для наблюдателя, выбывающего из сечения  $B$ , где в момент времени  $(-1)$  существовала скорость  $c_0$ , и прибывающего в сечение  $A$  в момент времени  $0$  — момент удара. Второй наблюдатель, перемещаю-



и угловой коэффициент  $\frac{\bar{\omega}}{g} a' (ns)$ , определяющий жесткость тела, испытывающего удар.

Кинетическая энергия, потерянная ударяющим телом, целиком превращается в колебательную энергию в теле, испытывающем удар. Эта энергия, отходящая от участка действия удара, следуя за волной сжатия, никогда уже не возвратится, если тело представляется безграничным; если же оно очень большое — возвратится значительно ослабленной амортизирующими факторами (затухшей). Во всяком случае, эта энергия возвратится гораздо позже того, как ударяющее тело оторвалось, и ее возвращение ни в какой мере не влияет на явление удара.

**§ 64 (79). Примечание.** Приведенные четыре примера показывают, как простой графический метод позволяет освоить очень сложные задачи соударяющихся призматических стержней и установить, что результаты удара зависят исключительно от величины  $\frac{\bar{\omega}}{g} as$  (или  $\sqrt{\frac{\bar{\omega}}{g} Es}$ ) и времени  $\tau = \frac{L}{a}$  или  $L / \sqrt{\frac{gE}{\bar{\omega}}}$ .

При изменении этих величин результаты удара будут очень различны, даже если сохранить неизменными величину массы и скорость соударяющихся тел. Таким образом, силу удара и конечную среднюю силу характеризуют вовсе не массы соударяющихся тел. Этот результат на первый взгляд парадоксален, но если иметь в виду собственные колебания и энергию, которой они обладают, то станет понятным, что определяющими явление факторами являются коэффициент упругости  $E$  и величины  $S$  и  $L$ .

**§ 65 (80). Продольный рывок, приложенный к свободному стержню** (фиг. 96). Пусть к грани  $A$  стержня  $AB$  длиной  $L$  сечением  $S$  внезапно прилагается в момент времени  $O$  продольная сила  $P$ .

Примем за единицу времени величину  $\tau = \frac{L}{a}$ .

Для наблюдателя, выбывающего из сечения  $B$  в момент времени  $(-1)$ , соответственная точка будет расположена на прямой  $ON$ , проходящей через точку  $O$  начала координат в плоскости ускорения — скорости, характеризующую режим в сечении  $B$  в момент времени  $(-1)$ . Угловым коэффициентом прямой  $ON$  является  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\bar{\omega}}{g} as$ .

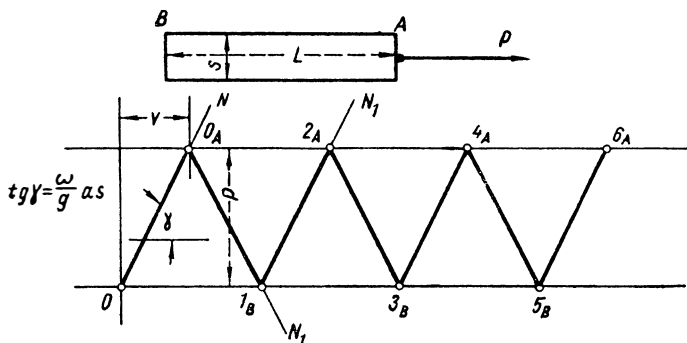
В момент прибытия наблюдателя в сечение  $A$  здесь прилагается сила  $P$ ; соответственной точкой здесь будет поэтому  $O_A$ , имеющая ординату  $P$ , что определяет скорость

$$v = \frac{P}{\frac{\omega as}{g}}, \quad (17)$$

сообщенную грани  $A$  в момент приложения силы.

Для наблюдателя, возвращающегося в момент времени 1 в сечение  $B$ , соответственная точка будет расположена на прямой  $O_A N_1$  и так как усилие здесь равняется нулю, то соответственной точкой будет точка  $1_B$ , которая определяет скорость, внезапно сообщенную грани  $B$ , как вдвое превышающую скорость грани  $A$ .

Таким образом, в течение времени  $\frac{L}{a}$  скорость сечения  $A$  была  $v$  в то время, как сечение  $B$  было неподвижным, из чего следует, что длина стержня увеличилась.



Фиг. 96.

Но в течение следующего отрезка времени  $\frac{2L}{a}$  сечение  $B$  движется с большей скоростью, чем сечение  $A$  (скорость которого по-прежнему равна  $v$ ) и в конце этого периода стержень укоротится настолько же, насколько он ранее удлинился.

Продолжая построения, можно найти точки  $2_A$   $3_B$   $4_A$   $5_B$   $6_A$ ..., которые покажут, что скорости граней  $A$  и  $B$  продолжают попеременно увеличиваться скачком на величину  $2v$  через каждый интервал времени, равный  $\frac{2L}{a}$ , так что стержень продвигается подобно гусенице, однако с постоянно увеличивающейся средней скоростью.

Увеличение скорости  $\Delta v$  равняется

$$2v = \frac{2B}{\frac{\omega as}{g}}. \quad (18)$$

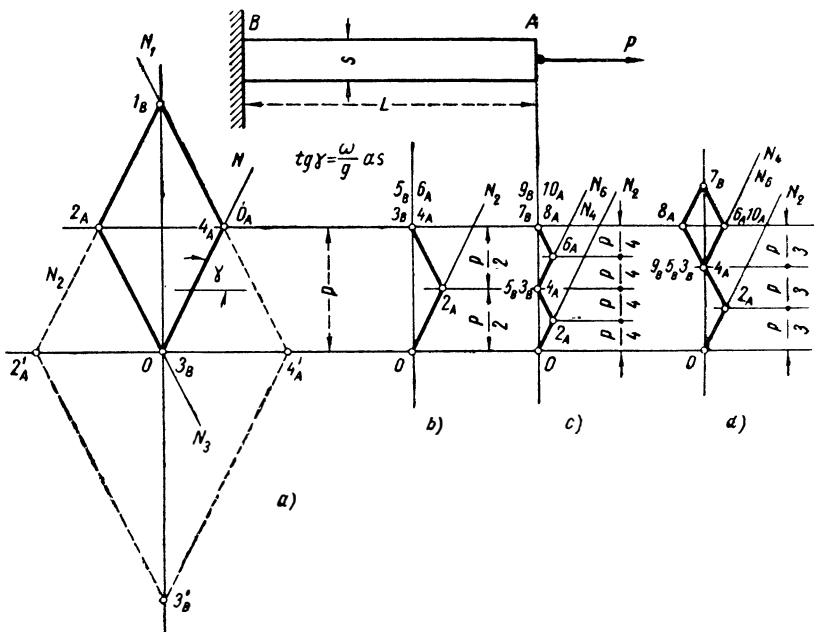
для каждого интервала времени  $\Delta t$  равного  $\frac{2L}{a}$ . Среднее значение ускорения составляет, следовательно,

$$j = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2P}{\frac{\omega as}{g} \cdot \frac{2L}{a}} = \frac{P}{M}, \quad (19)$$

где  $M = \frac{\omega}{g}$  — масса стержня.

Отметим, что это как раз ускорение, обусловливаемое приложением силы  $P$ .

§ 66(81). Продольный рывок, примененный к стержню, закрепленному одним концом (фиг. 97). В этом случае можно установить, аналогично тому как в предыдущем, что в момент времени  $0$ , яв-



Фиг. 97.

ляющимся моментом приложения силы  $P$ , грань  $A$  приобретает скорость

$$v = \frac{P}{\frac{\omega as}{g}}.$$

Но при возвращении наблюдателя в сечение  $B$  (в момент времени 1), здесь равняется нулю не усилие, а скорость, что определяет точку  $1_B$  (фиг. 97,  $a$ ) с ординатой, равной  $2P$ .

При возвращении в сечение  $A$  в момент времени 2 соответственная точка для наблюдателя будет на прямой  $1_B N_2$ ; это будет точка  $2_A$ , поскольку усилие здесь равно  $P$ ; положение точки  $2_A$  указывает на то, что скорость грани меняет при этом направление.

При возвращении в момент времени 3 вновь в сечение  $B$ , где скорость равняется нулю, соответственная точка  $3_B$  определится в пересечении прямой  $2_A N_3$  с осью ординат.

При возвращении наблюдателя в сечение  $A$  соответственная точка  $4_A$ , находящаяся снова на прямой  $ON$ , совпадает с точкой  $O_A$ . С этого момента цикл возобновляется.

Таким образом, в момент времени 1 стержень испытывает усилие  $2P$ , затем усилие становится равным нулю, в момент времени 3, и эта смена усилия повторяется в дальнейшем периодически.

Это удвоение усилия (и внутреннего напряжения) — факт хорошо известный; однако, графический метод показывает, с большой наглядностью, что для этого необходимо, чтобы сила  $P$  была приложена в момент времени меньший или равный  $\frac{2L}{a}$ .

Это время весьма коротко, так как, например, для стали скорость  $a$  распространения волн будет порядка  $5000 \text{ м/сек}$ . В шатуне длиной в  $0,5 \text{ м}$  это время должно быть меньше,  $\frac{1}{10000}$  сек., что для мотора, дающего 50 оборотов в минуту, представляет менее  $\frac{1}{200}$  времени одного оборота.

Даже в двигателе внутреннего сгорания максимальное давление не устанавливается в такой короткий срок.

Теперь ознакомимся с тем, что происходит, когда сила прилагается постепенно в течение времени  $T$ , превышающего  $\frac{(2L)}{a} = \mu$ . Рассмотрим два случая: первый, когда  $T = 2n\mu$ , и второй при  $T = (2n + 1)\mu$ .

а) Пусть сначала в первом случае  $n = 1$ , т. е.  $T = 2\mu$  (фиг. 97, б). При  $\mu = 1$ , т. е. для момента времени 2, усилие равно  $\frac{P}{2}$  и соответственной точкой будет  $2_A$ . Потом наблюдатель возвращается в сечение  $B$ , где отмечает скорость, равную нулю, и ординатой соответственной точки  $3_B$  будет, следовательно, как раз величина  $P$ . После этого при обратном перемещении наблюдателя в направлении к сечению  $A$ , где усилие равно  $P$ , скорость оказывается равной нулю, а соответственная точка  $4_A$ , совпадающей с точкой  $3_B$ . Усилие в это время оказывается равным  $P$  во всем стержне, который приобретает неподвижность.

Чертеж на фиг. 97, с соответствует случаю  $n = 2$ , т. е.  $T = 4\mu$ . В данном случае находим ломаную линию  $O 2_A 3_B 4_A 5_B 6_A 7_B 8_A$ , где точки  $4_A$  и  $5_B$  совпадают с точкой  $3_B$ , а  $8_A$  совпадает с точкой  $7_B$ . Также и теперь в момент времени  $T$  во всем стержне устанавливается усилие  $P$ , а он сам неподвижен.

При  $T$ , содержащем четное число  $\mu$ , не наблюдается, таким образом, возрастания усилий в стержне.

б) Рассмотрим второй случай при  $T = (2n + 1)\mu$ .

Пусть  $n = 1$  (фиг. 97, д), т. е.  $T = 3\mu$ .

При  $\mu = 1$ , т. е. в момент времени 2, усилие в сечении равно  $\frac{P}{3}$  и соответственной точкой явится  $2_A$ . При возвращении наблю-

дателя в сечение  $B$ , где скорость равна нулю, соответственной точкой будет  $3_B$  с ординатой  $2 \frac{P}{3}$ . Вернувшись в сечение  $A$  в момент времени 4, наблюдатель констатирует усилие  $2 \frac{P}{3}$  при нулевой скорости и соответственная точка  $4_A$  совпадет с точкой  $3_B$ . В момент 5 возвращения наблюдателя в сечение  $B$  соответственной точкой будет  $5_B$ , также совпадающая с предыдущими. Но в сечении  $A$  в момент времени 6 усилие уже будет равно  $P$ , чем определяется положение  $6_A$  соответственной точки, показывающее, что грань  $A$  приобретает вновь скорость, которую оно имело в момент времени 2.

Дальнейшее построение приводит к ромбу  $7_B$   $8_A$   $9_B$  (причем точка  $9_B$  совпадает с точкой  $5_B$ ),  $10_A$  (совпадает с точкой  $6_A$ ), который затем возобновится до бесконечности.

Стержень оказывается таким образом подверженным колебаниям, которые будут незатухающими (поскольку нет внутренних сопротивлений), причем внутреннее усилие меняется от значения, определяемого точкой  $7_B$ , до определяемого точкой  $5_B$ , скорость грани  $A$  меняется от значения

$$v = \frac{P}{\frac{\omega}{g} as(2n+1)} \quad (20)$$

до значения  $(-v)$ . Период колебаний равняется  $2\mu = \frac{4L}{a}$ . Точка  $7_B$  соответствует возрастанию усилия до значения

$$kP = \frac{P}{2n+1}, \quad (21)$$

откуда

$$k = \frac{1}{2n+1}. \quad (22)$$

Возрастание усилия при, например,  $n=4$ , т. е. при  $T=9\mu$  не превышает  $\frac{1}{9}$ , т. е. составляет около 10%. Если мы используем для примера тот же шатун, что и в предыдущем случае, время  $T$  окажется равным  $\frac{1}{1000}$  сек., т. е. также очень коротким.

Увеличение напряжения в результате приложения усилия на коротком отрезке времени таким образом реально, но требует такой быстроты приложения, которая практически редко встречается.

В случае  $n=0$ , т. е.  $k=1$  усилие может возрасти на 100%, что известно инженерам и чего последние опасаются; однако такой случай практически никогда не встречается.

Это замечание относится, очевидно, только к рассматриваемому случаю сжатия или растяжения стержня. В случае изгиба деформация будет значительнее, а периоды колебаний более продолжи-

тельными. Но также и здесь удвоенное значение усилия может быть получено лишь при условии, что время приложения силы будет меньше полупериода собственных колебаний, т. е. время должно быть также очень кратким.

в) Собственные колебания стержня.

Возвратимся к фиг. 97, *a* и предположим, что сила, которая была приложена в момент времени нуль к грани *A*, снимается в момент времени 2. Соответственная точка в таком случае будет на оси абсцисс в точке  $2_{A'}$ , определяя скорость, противоположную предшествующей по направлению и удвоенную по величине.

При возвращении наблюдателя в сечение *B* соответственная точка  $3_B$  должна находиться на прямой  $2'_A N'_3$ , и, определится значением скорости, равным нулю, чему будет соответствовать сжатию стержня усилием  $2P$ .

Прибывая в момент времени 4 в сечение *A*, где усилие равняется нулю, наблюдатель констатирует соответственную точку  $4'_A$ , которой определяется скорость, вдвое большая по сравнению с той, которая создается силой *P*.

С этого момента времени цикл возобновляется бесконечно в интервале времени  $\frac{4L}{a}$ , являющемся периодом собственных колебаний стержня.

Это время колебаний найдено уже в абзацах *a* и *б*. Амплитуда колебаний меняется в зависимости от длительности времени приложения силы, но интересно отметить, что если силу *P* снять в момент времени  $\mu$ , то значение амплитуды удваивается по сравнению с тем, какое она имеет при сохранении этой силы.

**§ 67(82). Продольный удар по концу стержня, жестко закрепленного другим концом.** На грань *A* стержня *AB* (фиг. 98) падает тело *M* со скоростью *v*. Если тело *M* падает вертикально и стержень также расположен вертикально, дальнейшее изложение справедливо, если пренебрегается весом падающего тела  $Q = Mg$ , если же предполагать движение тела *M* и положение стержня горизонтальными, то приводимые построения являются совершенно строгими.

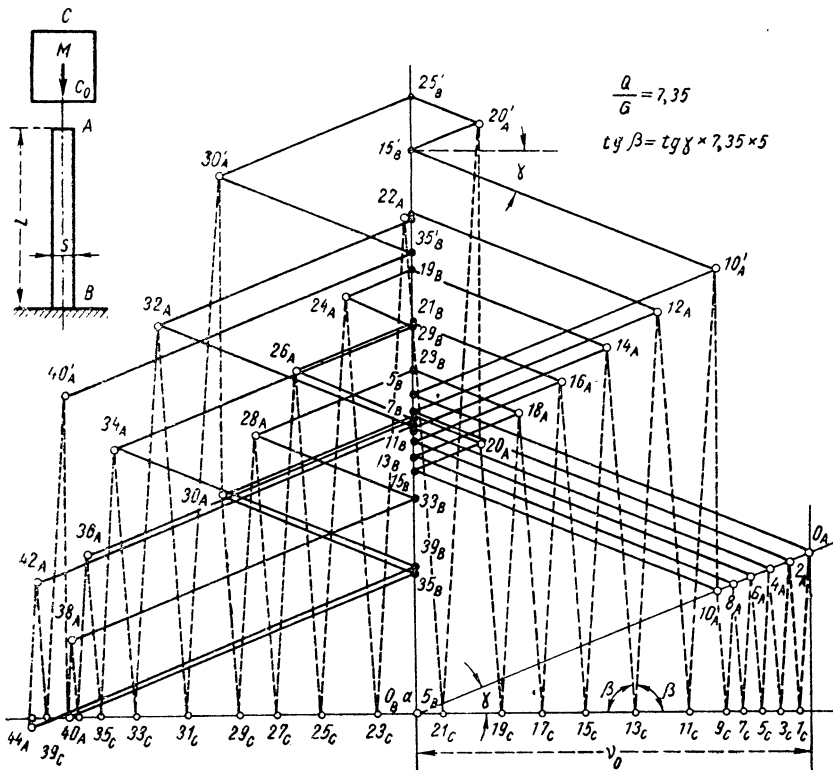
Для наблюдателя, который прибывает из сечения *B* в *A*, в момент удара соответственная точка будет расположена на прямой, имеющей угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega}{g} as$  и проходящей через начало координат (так как сила и скорость при выбытии наблюдателя из сечения *B* равны нулю). В момент удара скорость грани *A* равняется скорости  $v_0$  падающего тела и соответственной точкой будет  $O_A$  с абсциссой  $V_0$  и ординатой  $P_0$ , равной силе удара.

В дальнейшем необходимо будет учитывать инерцию тела *M*. Мы будем делать это, определяя последовательные



режимы разделенные между собой интервалами времени  $j$ , достаточно малыми, чтобы можно было полагать изменение силы внутри этих интервалов, происходящим по линейному закону.

Пусть  $P_t$  — сила, приложенная к телу  $M$  в момент времени  $t$  и  $P_{(t+j)}$  — сила, ожидаемая в момент времени  $(t+j)$ . Приравни-



Фиг. 98.

вая импульс силы за интервал времени  $j$ , измеряемый произведением величины этого интервала на осредненное значение силы, изменению количества движения, получим

$$\frac{P_t + P_{(t+j)}}{2} \cdot j = \Delta(Mv) = M\Delta v \quad (23)$$

и далее

$$P_{(t+j)} = -P_t + \frac{M}{j} \Delta v, \quad (24)$$

что приводит к следующему правилу:

если известен режим  $P_t v_t$  для момента времени  $t$  (известна соответственная точка  $t$  на фиг. 99), то режиму в момент вре-

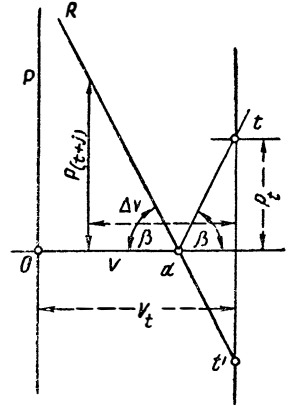
мени  $t + j$  будет соответствовать точка на прямой  $t'R$ , имеющей угловой коэффициент

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M}{\frac{j}{2}} \quad (25)$$

и проходящей через точку  $t'$ , симметричную точке  $t$  относительно оси абсцисс. На фиг. 99 показано построение для рассматриваемого нами случая, когда сила  $P$  является замедляющей и скорость  $v$  убывающей. Прямая  $t'R$  может быть получена также, если построить прямую  $td$ , имеющую угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \beta$ , что дает точку  $d$  (также на прямой  $t'R$ ). Этот способ более удобен и он применен при построениях на фиг. 99. Отметим, что такое построение идентично получаемому в случае упругого стержня, вдоль которого условно перемещался бы наблюдатель со скоростью  $2 \frac{L}{a} = j$ . Смысл такой аналогии был пояснен в первой части настоящей книги.

Назначим время  $j$  равным некоторой доле величины  $\mu = \frac{2L}{a}$ , например,  $j = \frac{\mu}{5}$  и, приняв за единицу измерения  $\frac{j}{2}$ , получим  $\frac{2L}{a} = 10$  единицам.

Для наблюдателей, выбывающих из сечения  $B$  в моменты времени меньшие  $\frac{L}{a} = 5$ , прямая под углом  $\gamma$  проходит через начало координат, поскольку до названного момента времени сила в сечении  $B$  остается равной нулю. Поэтому все соответственные точки от  $0_A$  до  $10_A$  будут расположены на этой прямой. Они могут быть найдены построением, аналогичным показанному на фиг. 99 и дадут на фиг. 98 ломаную линию  $0_A 1_C 2_A 3_C 4_A 5_C 6_A 7_C 8_A 9_C 10_A$ . Наблюдатель же, выбывший из сечения  $A$  в момент времени  $\frac{L}{a} = 5$ , отметит соответственную точку на прямой, проходящей через точку  $0_A'$  и имеющей угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{\omega}{g} as$  и на оси ординат (так как скорость равна нулю), чем определяется точка  $5_B$ . По возвращении наблюдателя в сечение  $A$  соответственная точка должна находиться на прямой, проходящей через точку  $5_B$  и имеющей угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \gamma = +\frac{\omega}{g} as$ . Но в момент времени  $10$  скорость определяется, как мы видели, абсциссой точки  $10_A$  и, следовательно, соответственной точкой внезапно станет  $10_A'$ , находящаяся на одной вертикали с точкой  $10_A$ .



Фиг. 99.

В момент времени 10, т. е. в конце первого движения волны в прямом и обратном направлениях, усилие внезапно увеличивается втрое по сравнению с возникшим в момент удара в точке  $O_A$ .

От момента времени 10 до 12 наличие массы  $M$  обуславливает положение соответственной точки на прямой, полученной при построении ломаной  $10'_A 11_C 12_A$  при том же угле  $\beta$ . Для наблюдателя же, выбывающего из сечения  $A$  в момент времени 2, когда соответственной точкой здесь была  $2_A$ , перемещение в прямом и обратном направлениях дает ломаную линию  $2_A 7_B 12_A$ , вычерчиваемую под углами  $\gamma$ . Искомая точка  $12_A$  является местом пересечения прямых построенных таким образом; в том же порядке находят точки  $14_A 16_A 18_A 20_A$  на прямых, отмечаемых наблюдателями, выбывающими из сечения  $A$  в моменты времени 4, 6, 8, 10. Но в момент времени 20, т. е. в конце второго периода, равного  $\mu$ , снова имеет место резкое увеличение усилия  $20_A 20'_A$ , равное увеличению  $10_A 10'_A$ .

Продолжая построение, можно видеть, что усилие переходит через максимум при одновременном уменьшении скорости до нуля, затем усилие уменьшается в то время, как скорость принимает обратное направление, что означает, что масса, отталкиваемая гранью  $A$ , движется в обратном направлении. Момент, когда усилие становится отрицательным, означает, поскольку между телом и гранью  $A$  не может существовать растягивающее усилие, что тело отделяется от стержня, в то время, как последний продолжает совершать колебания.

**Примечание.** Нами найдены выражения для угла  $\gamma$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\bar{\omega}}{g} as = \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{g} Es} \quad (26)$$

и для угла  $\beta$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M}{\frac{j}{2}},$$

причем  $j$  является  $n$ -ой долей интервала времени  $\mu = \frac{2L}{a}$ , т. е.

$$j = \frac{2L}{na} = \frac{2L}{n \sqrt{\frac{g}{\omega} E}}.$$

С другой стороны, если  $Q$  — вес тела  $M$ , то  $Q = Mg$ , откуда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{Qn \cdot \sqrt{\frac{g}{\omega} E}}{gL}. \quad (27)$$

Решая (25) и (27) совместно, можно получить

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{Qn \sqrt{\frac{g}{\omega} E}}{\sqrt{\frac{\omega}{g} EsLg}} = \frac{Qn}{\omega sL} = \frac{Qn}{G}, \quad (28)$$

где  $G$  — вес стержня.

Таким образом, при одном и том же значении отношения  $\frac{Q}{G}$  построения всегда будут давать подобные фигуры (так как углы  $\beta$  и  $\gamma$  будут находиться в постоянном соотношении) и явление удара тела о стержень будет протекать подобно во времени.

Буссинеск и Сен-Венан, изучавшие явление удара аналитически<sup>1</sup>, отметили этот закон подобия и указали, что сила превращается в нуль, т. е. удар прекращается в конце отрезка времени

$$t = 2 \times \frac{2L}{a} \text{ при } \frac{Q}{G} = 1,728,$$

$$t = 3 \times \frac{2L}{a} \text{ при } \frac{Q}{G} = 4,151,$$

$$t = 4 \times \frac{2L}{a} \text{ при } \frac{Q}{G} = 7,35''.$$

Построения на фиг. 98 сделаны как раз при соотношении  $Q/G = 7,35$ . В этом случае времени  $4 \times 2L/a$  будет соответствовать число 40 единиц, и, действительно, мы видим, что точка  $40_A$  находится на оси абсцисс (что означает, что усилие равно нулю). Но как в конце каждого периода  $\rho$  здесь также происходит внезапное увеличение силы на величину  $40_A 40'_A$  и, вопреки предположению Буссинеск, процесс удара продолжается. И только между моментами времени 42 и 44 сила снова приходит к нулю, но на этот раз с тем, чтобы сделаться затем отрицательной, что и означает действительное окончание удара.

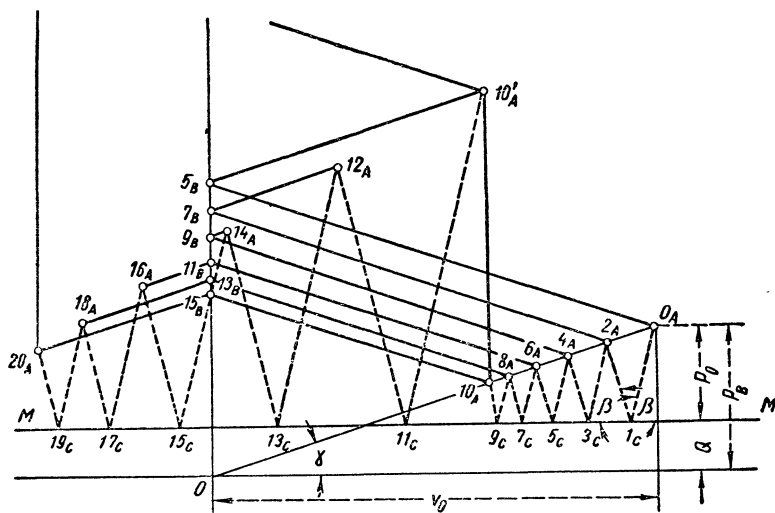
Таким образом, расчет Буссинеска является доказательством точности графического метода, поскольку точка  $40_A$  находится на оси абсцисс. Этот результат замечателен также в том отношении, что точка  $40_A$  определяется после построения предшествующих ей 60 точек для сечений  $A$ ,  $B$  и  $C$ ; это показывает, что при графическом методе не происходит накопления ошибок.

<sup>1</sup> См. „Théorie de l'élasticité des corps solides“ Клебша в переводе Сен-Венана и Фламана. Записка Сен-Венана, стр. 480, 1883.

„Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques“ de Boussinesq, pp. 507 et suivantes 1885.

С другой же стороны интересно отметить, что при построении чертежа нельзя полагать окончание удара в момент 40, как это предположил Буссинеск, так как построения в этот момент еще не заканчиваются.

Г-н Жугэ, член Института, которому мы обязаны этим сравнением расчета с графиком, продолжил расчеты Буссинеска и констатировал, что уравнения последнего приводят к тем же результатам, какие получаются графическим методом. Помимо того, он



Фиг. 100.

подтвердил максимальное значение отрицательной скорости, величина которой, определенная с чертежа, составляет  $0,938 v_0$  и нашел, что это трехзначное число точно при размерах чертежа порядка всего 250 мм; это заключение еще раз подтверждает точность графического метода.

Были сделаны построения также для случаев  $\frac{Q}{G} = 4,151$  и  $\frac{Q}{G} = 1,728$ , приведя к тем же результатам, а именно к выводу, что усилие является нулевым в конце отрезков времени  $3\mu$  и  $2\mu$ , но что окончание удара имеет место через более продолжительный срок и, подтвердив величину значений отрицательной скорости ( $-0,96v_0$ ) и ( $-0,935v_0$ ).

Из этих трех построений<sup>1</sup> можно извлечь несколько важных замечаний: для одного и того же стержня  $G$  сила в момент начала

<sup>1</sup> Они приведены в докладе, представленном Жугэ (M. Jouguet), Академии наук 1 августа 1938, и в обзоре „Механика“ в Sciences et Industrie за ноябрь — декабрь 1938, откуда и заимствована фиг. 93.

удара одинакова независимо от величины ударяющей массы; максимальное значение удара возрастает с увеличением массы  $M$ , но значительно медленнее возрастания последней.

Так при  $\frac{Q}{G} = 1,728$ , максимальная сила удара в 2,4 раза больше силы в момент удара; при  $\frac{Q}{G} = 4,151$  в 3,04 раза и при  $\frac{Q}{G} = 7,35$  в 3,77 раза.

Скорость отделения ударяющего тела тем более близка к скорости падения, чем больше масса ударяющего тела; если исчислить величину, сохранившейся в стержне энергии, то она будет почти одинаковой во всех трех случаях; доказательство того является ли эта энергия строго постоянной остается на долю эксперимента, так как степень приближения при графических построениях не позволяет это утверждать.

Случай, когда нельзя пренебрегать весом  $Q$  тела  $M$ . В этом случае сила, приложенная к телу  $M$ , уже не будет упругой силой  $P_B$  стержня, но всегда уменьшенной на вес  $Q$ . Отсюда следует построение на фиг. 100, где ломаная линия, образуемая с помощью угла  $\beta$ , определяет на прямой  $MM$  ординаты, соответствующие абсциссе  $Q$ . В этом заключается единственная разница с построениями на фиг. 98.

**§ 68 (85). Спиральная пружина, подверженная действию продольной силы.** Легко представить себе, что спиральная пружина подчиняется тем же законам, что и металлический стержень; так же, как и у стержня, ее масса распределена равномерно по длине, и она имеет вдоль всего тела одинаковую упругость. Аналогично и изменение состояния, возникшее в каком-нибудь сечении пружины, распространится с постоянной скоростью, оставаясь неизменным; поэтому можно было бы сделать выводы о законах распространения волн в пружине, просто используя аналогию со стержнем, однако непосредственное ознакомление с конкретными явлениями займет не больше времени.

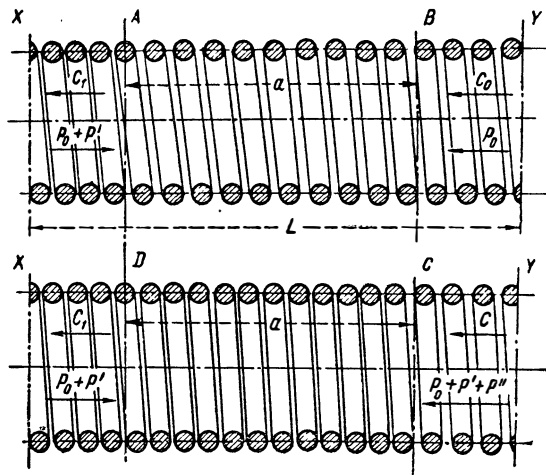
Получим сначала закон распространения волны в пружине. Пусть  $P_0$  — начальное продольное усилие в пружине и  $C_0$  — скорость начального движения, одинаковая для каждого витка спирали.

Если у конца пружины  $X$  в силу каких-либо причин приложенная к ней сила изменит величину от  $P_0$  до  $P_0 + P'$ , то одновременно здесь изменится и скорость от значения  $C_0$  до  $C_1$ ; это изменение состояния распространяется вдоль пружины с некоторой скоростью  $a$ . Если изменение возникло в момент времени  $t$ , например, в сечении  $A$  (фиг. 101), то через одну секунду оно будет обнаружено в сечении  $B$  на расстоянии  $a$  метров от  $A$ . В течение этой секунды в каждом витке спирали на длине пружины  $a$  произойдет изменение скорости  $C_0$  на  $C_1$ . Если  $m$  — линейная масса пружины, то масса в пределах участка между сечениями

$A$  и  $B$  будет  $ma$ ; изменение количества движения этой массы в одну секунду равняется

$$ma(C_1 - C_0).$$

Результирующая сила, приложенная к участку  $a$  пружины, равняется сумме сил  $+P$ , приложенной в сечении  $B$ , и  $[-(P_0 +$



Фиг. 101.

$+P']$ , приложенной в сечении  $A$ , т. е.  $P'$ . Поэтому теорема количества движения напишется в виде

$$ma(C_1 - C_0) = -P'. \quad (1)$$

Если в силу какой-то причины в конце  $Y$  пружины усилие изменится от значения  $(P_0 + P')$  до  $[(P_0 + P') + P'']$ , и скорость  $C_1$  перейдет в  $C$ , получим

$$ma(C - C_1) = P'' \quad (2)$$

и после сложения

$$ma(C - C_0) = P'' - P'; \quad (3)$$

кроме того, имеем

$$P - P_0 = P'' + P'. \quad (4)$$

Таковы общие выражения для продольной силы  $P$  и скорости  $C$  в некотором сечении пружины, обусловливаемых изменениями усилий (волнами)  $P'$  и  $P''$ . Найдем скорость  $a$  распространения этих волн.

Во время прохождения волн  $P'$  от сечения  $A$  до сечения  $B$  сечение  $A$  обладает скоростью  $C_1$ , а сечение  $B$  — скоростью  $C_0$ , в результате чего длина пружины сокращается на  $C_0 - C_1$ . Это сокращение должно быть равно сокращению, соответствующему увеличению напряжения  $P'$  пружины. Если  $K$  увеличение усилия, необходимое для сокращения общей длины  $L$  пружины на еди-

ницу, то укорочение на длину  $a$  под действием усилия  $P'$  будет равно

$$\frac{P'}{K} \times \frac{a}{L} = C_0 - C_1. \quad (5)$$

С учетом уравнения (1), получим

$$\frac{ma^2}{KL} = 1, \quad (6)$$

откуда

$$a = \sqrt{\frac{KL}{m}} \quad (7)$$

или, вводя массу пружины

$$M = mL, \quad (8)$$

окончательно получим

$$a = L \sqrt{\frac{K}{M}}. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь (фиг. 102,  $a$ ) пружину длиной  $L$  при неустановившемся режиме, характеризуемом для некоторого момента времени  $i$ , и некоторого сечения  $J$  значениями  $P'_i, P''_i$  волн, встречающихся в этом сечении в названный момент времени, и величинами результирующих  $P_i, C_i$  напряжения и скорости, предполагая последние известными.

Напишем общее уравнение сначала для сечения  $J$  и момента времени  $i$ ,

$$ma(C_i - C_0) = P''_i - P'_i, \quad (10)$$

$$P_i - P_0 = P''_i + P'_i. \quad (11)$$

Затем напишем их для наблюдателя, перемещающегося следом за волной  $P'_i$  со скоростью распространения волны  $a$  в направлении, противоположном скорости  $C$ . Эта волна сохраняет свою величину  $P'_i$  постоянной; на пути распространения будут встречены другие волны  $P''$ , в результате чего возникнут результирующие величины  $P$  и  $C$ , характеризующие режим в сечениях (в рассматриваемом случае это сжатие и скорость) проходящих наблюдателем, в соответствии с уравнениями

$$ma(C - C_0) = P'' - P'_i, \quad (12)$$

$$P - P_0 = P'' + P'_i. \quad (13)$$

Напишем аналогичные уравнения также для наблюдателя, следующего за волной  $P''_i$  в направлении, противоположном предыдущему; это будут

$$ma(C - C_0) = P''_i - P', \quad (14)$$

$$P - P_0 = P''_i + P'. \quad (15)$$



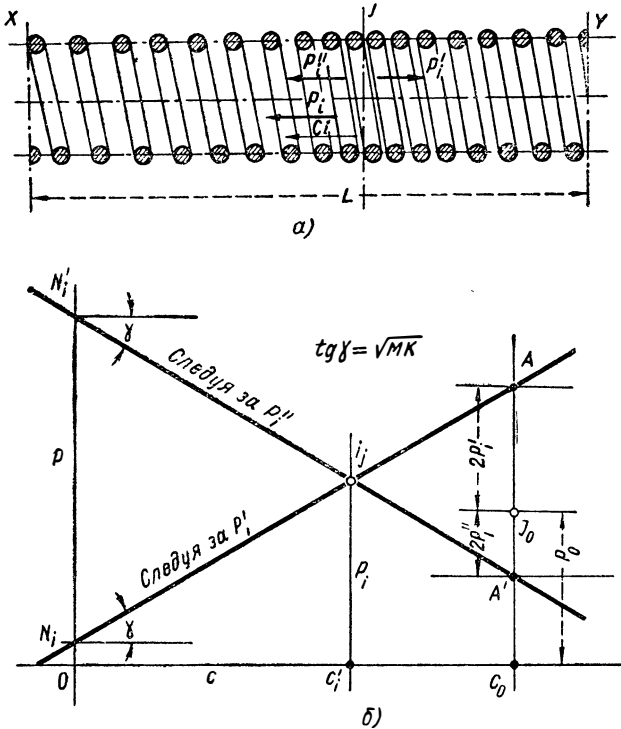
Решая совместно уравнения (10)—(12) и (11)—(13) и приравняв результаты, получим

$$ta(C_i - C) = P_i - P, \quad (16)$$

затем сделаем то же самое с уравнениями (10)—(14) и (15)—(11), в результате чего получим

$$ta(C_i - C) = P - P_i. \quad (17)$$

Уравнениям (16) и (17) соответствуют в плоскости  $P$  и  $C$  прямые (фиг. 102, б), которые проходят через точку  $i_j$  с коор-



Фиг. 102.

динатами  $P_i C_i$ , имея угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \gamma = ta$  для наблюдателя, который перемещается в направлении, противоположном скорости  $C$  и  $\operatorname{tg} \gamma = (-ta)$  для наблюдателя, движущегося в направлении этой скорости. Это та же зависимость, которая была установлена ранее для стержней, но значение угловых коэффициентов определяется теперь константами, характеризующими пружину. Заменяв величину  $a$  ее выражением (9) и  $t$  выражением (8), найдем

$$\operatorname{tg} \gamma = \pm \sqrt{MK}. \quad (18)$$

Все решения, полученные ранее для стержней, применимы таким образом также к пружинам, изменяется только угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \gamma$ .

Период колебаний пружины, как и для стержня, будет равным  $\frac{4L}{a}$  или, в соответствии с уравнением (9), равным  $4 \sqrt{\frac{M}{K}}$ .

Например, период колебаний для пружины весом 0,981 кг, относительное удлинение которой под действием силы в 1 кг составляет 0,10 м, равняется

$$4 \sqrt{\frac{0,981}{9,81 \times 0,1}} = 0,4 \text{ сек.}$$

**Существенное замечание.** Изложенная теория является строгой только в случае незначительных деформаций пружины сравнительно с ее длиной  $L$ , при каком условии линейная масса  $m$  могла быть принята постоянной. Она остается практически достаточно точной для деформаций до равных порядка  $\frac{1}{10}$  длины. При строгом подходе нужно иметь в виду, что линейная масса и, как следствие, скорость распространения волны  $a$  меняется в зависимости от усилия  $P$ .

**§ 69 (86). Собственные колебания массы, подвешенной на пружине.** Рассмотрим случай (фиг. 103, а), когда масса  $M'$  веса  $Q = M'g$  подвешена к пружине, подверженной, кроме того, растяжению силой  $P$ . Пусть в момент времени нуль сила  $P$  внезапно снимается.

Пусть  $\overline{OO'}$  на фиг. 103, б вес  $Q$  и  $\overline{O'A}$  сила  $P$ , тогда усилие, растягивающее пружину, будет  $F = OA$ . В момент снятия силы  $P$  пружина окажется как бы под действием силы  $F$ , уменьшенной на величину  $Q$ , что сообщит пружине скорость, направленную вверх. Проследим за возникающим при этом движением массы  $M$ .

Примем за единицу времени величину  $\tau = \frac{L}{a}$ , где  $a = L \sqrt{\frac{K}{M}}$ , что дает

$$\tau = \frac{M}{K}, \quad (1)$$

где  $M$  — масса пружины и  $K = \frac{P_0}{\lambda_0}$ , если  $P_0$  — сила, соответствующая относительному удлинению пружины  $\lambda_0$ .

Для наблюдателя, выбывающего из сечения  $C$  в момент времени +1, соответственная точка режима в сечении  $B$ , куда он придет в момент времени 2, будет расположена на прямой  $AN_2$ , проходящей через точку  $A$  — соответственную точку (определяемую тем, что сила равняется  $F$ , а скорость равняется нулю) режима



и которое прочитывается следующим образом: если известна сила  $P_t$ , действующая на массу  $M'$  в момент времени  $t$  и если  $j$  — интервал времени, достаточно малый, чтобы изменение силы во времени можно было рассматривать как линейное, то зависимость между силой  $P_{(t+j)}$  в момент времени  $(t+j)$  и увеличением  $\Delta V$  скорости представляется прямой линией, проходящей через точку с ординатой  $(-P_t)$ , симметричную относительно оси абсцисс соответственной точке для момента  $t$ , причем угловой коэффициент этой прямой равен  $\operatorname{tg} \beta = M'/\frac{j}{2}$ .

В рассматриваемом случае время  $j = 2\tau = \sqrt{\frac{M}{K}}$ , откуда

$$\operatorname{tg} \beta = M' \sqrt{\frac{K}{M}}. \quad (4)$$

Применим уравнение (3) сначала в интервале времени от  $t=0$  до  $(t+j)$  равном  $2\tau$ . В соответствии с гипотезой сила  $P_t$  в момент времени  $0$  равна  $P = \overline{O'A}$  и отрицательна (поскольку она направлена вверх). Поэтому уравнению (3) соответствует прямая  $A'R_2$ , проходящая через точку  $A'$ , симметричную точке  $A$  (относительно прямой  $X'X'$ ) и имеющая угловой коэффициент  $-\operatorname{tg} \beta = M' \sqrt{\frac{K}{M}}$ . Эта прямая может быть получена также путем построения прямой  $AR'_2$ , имеющей угловой коэффициент  $+\operatorname{tg} \beta$ . Упомянутая прямая дает точку  $1_A$  на прямой  $X'X'$ , через которую проходит также прямая  $A'R_2$ .

Искомая соответственная точка режима для сечения  $B$  в момент времени  $2$  находится на пересечении прямых  $1_A R_2$  и  $AN_2$ . Абсцисса этой точки определяет возникшую восходящую скорость, ее ордината по отношению к  $XX$  — силу растяжения пружины, а по отношению  $X'X'$  силу, приложенную к массе  $M'$ .

В течение следующего интервала времени  $2\tau$ , возвращению наблюдателя в сечение  $C$  соответствует прямая  $2_B 3_C$ , имеющая угловой коэффициент  $(-\operatorname{tg} \gamma)$ . Режим в сечении  $C$ , где скорость равна нулю, представлен точкой  $3_C$ . Возвращение наблюдателя в сечение  $B$  получает отражение в виде прямой  $3_C N_4$ , имеющей угловой коэффициент  $+\operatorname{tg} \gamma$ . Для массы  $M'$  уравнение (3) дает прямую, проходящую через точку, симметричную  $2_B$  по отношению к  $X'X'$  и имеющую угловой коэффициент  $(-\operatorname{tg} \beta)$ . Ее находят, строя сначала прямую  $2_B 3_A$ , а затем прямую  $3_A R_4$ .

На пересечении прямых  $3_C N_4$  и  $3_A R_4$  находится соответственная точка  $4_B$  для сечения  $B$  в момент времени  $4$ .

Дальнейшие построения продолжают аналогичным образом. Из них можно видеть, что между моментами времени  $14$  и  $16$  скорость переходит через максимум, а сила, приложенная

к массе  $M'$ , исчезает, поскольку натяжение пружины становится равным весу  $Q$ . Затем скорость уменьшается, пружина сжимается и между моментами времени 30 и 32 усилие сжатия становится равным  $(P - Q)$ , поскольку сила, приложенная к массе  $M'$ , становится по величине равной первоначальной, но с обратным знаком.

Дальнейшие построения привели бы к возникновению скорости, направленной вниз, причем ее максимум точно соответствовал бы максимуму при движении вверх, затем к нулевой скорости при значении силы, равной  $P + Q$ , точно совпадающем с суммарной первоначальной силой, приложенной к массе  $M'$ , и явление возобновилось бы в уже описанной последовательности.

Таким образом выявляются периодические колебания, при которых усилие в пружине меняется от  $P + Q$  до  $-(P - Q)$ . Этот хорошо известный результат достигается быстрее алгебраическим путем, так как он относится к категории простых случаев. По этой же причине из построений легко получаются выводы, даваемые ниже (совпадающие естественно с получаемыми аналитическим путем) в примечаниях.

Примечание I. Так, можно показать, что точки  $2_B 4_B 6_B 8_B$  и так далее располагаются точно на эллипсе и что отношение полуоси  $V_m$  (максимальная скорость) к полуоси  $P$  равно

$$\frac{V_m}{P} = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma}}. \quad (5)$$

Так для фиг. 103, б можно установить, что  $\frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{1}{4}$  и  $\frac{V_m}{P} = \frac{1}{2}$ .

Но значения  $\operatorname{tg} \beta$  из уравнения (4) и  $\operatorname{tg} \gamma$  из уравнения (2) дают

$$\frac{V_m}{P} = \frac{1}{\sqrt{M'K}}. \quad (6)$$

Если обозначить через  $\lambda$  удлинение пружины, соответствующее усилию  $P$ , то по определению величины  $K$  получим

$$K = \frac{P}{\lambda}. \quad (7)$$

Возводя уравнение (6) в квадрат и подставляя выражение для  $K$ , получим

$$\frac{M' V_m^2}{2} = \frac{P}{2} \lambda. \quad (8)$$

Это уравнение указывает на равенство живой силы массы  $M'$  (в момент, когда скорость равна максимальной) работе на перемещении  $\lambda$  силы, меняющейся линейно от  $P$  до нуля, при среднем значении  $\frac{P}{2}$ . Таким образом, уравнение (6), получаемое из чер-

тежа, может быть получено также из уравнения (8), которое может быть написано сразу как теорема живой силы.

Примечание II. Следует отметить, что значения  $\operatorname{tg}$  углов касательных  $\beta$  и  $\gamma$ , снимаемых с чертежа, численно совпадают с выражениями (4) и (2) только в том случае, если скорость и усилия откладываются в одинаковом масштабе. Но это необязательно и даже не всегда рекомендуется, так как часто возникает необходимость прибегать к разным масштабам.

Если  $e_P$  и  $e_V$  выражают на чертеже значения единицы усилия 4 единицы скорости и если мы в отличие от углов  $\beta$  и  $\gamma$ , найденных посредством уравнений (4) и (2), обозначим отсчитанные на чертеже углы как  $\beta_e$  и  $\gamma_e$ , то получим

$$\operatorname{tg} \beta_e = \operatorname{tg} \beta \frac{e_P}{e_V}, \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \gamma_e = \operatorname{tg} \gamma \frac{e_P}{e_V}. \quad (10)$$

Если угол  $\gamma$  (фиг. 103, б) равен  $\frac{\pi}{2} - \beta$ , соответственные точки будут расположены на окружности. Поскольку при построениях величины углов зависят от масштаба, всегда можно избрать последний с таким расчетом, чтобы получить окружность. Например, удваивая длину, представляющую единицу скорости на фиг. 103, б, можно получить фиг. 103, в, где точки расположены на окружности. Для этого достаточно, чтобы имело место условие

$$\frac{\operatorname{ctg} \beta_e}{\operatorname{tg} \gamma_e} = 1, \quad (11)$$

т. е. с учетом уравнений (9) и (10)

$$\frac{\operatorname{ctg} \beta \frac{e_V}{e_P}}{\operatorname{tg} \gamma \frac{e_P}{e_V}} = \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma} \left( \frac{e_V}{e_P} \right)^2 = 1,$$

откуда

$$\frac{e_P}{e_V} = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma}}. \quad (12)$$

Таковы условия для получения при построениях окружности (фиг. 103, в). Эта окружность обладает тем свойством, что следующие друг за другом дуги  $O_B 2_B 2_B 4_B 4_B 6_B$  равны между собой, а так как каждая дуга соответствует одному и тому же интервалу времени  $2 \frac{L}{a}$ , то общее время для прохождения окружности равно

$$T = \frac{2\pi}{O_B^2 B} \times 2 \frac{L}{a}. \quad (13)$$

Кроме того, дуга  $\frac{O_B \gamma_B}{2}$  совпадает с  $\text{ctg } \beta_e$ , так как величина  $\frac{\pi}{2} - \beta_e$  по предположению — маленькая. Отсюда

$$O_B 2_B = 2 \text{ctg } \beta_e = 2 \text{ctg } \beta \frac{eV}{eP}$$

или с учетом уравнения (12)

$$O_B 2_B = 2 \sqrt{\text{ctg } \beta \text{tg } \gamma}. \quad (14)$$

Подставив это выражение в уравнение (13), получим

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\cos \beta \text{tg } \gamma}} \times \frac{L}{a},$$

откуда, учитывая уравнения (4), (2) и (1),

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M'}{K}}, \quad (15)$$

что является временем колебаний системы „масса  $M'$  — пружина“.

Примечание III. Число перемещений в двух направлениях за период времени  $T$  колебания равняется  $n = \frac{T}{2 \frac{L}{a}}$ , или, после замены  $\frac{L}{a}$  его значением из уравнения (1) и  $T$  — значением из уравнения (15)

$$n = \pi \sqrt{\frac{M'}{M}}. \quad (16)$$

Таково число зигзагов ломаной линии, образующей эллипс.

Соотношение  $\frac{M'}{M}$  между подвешенной массой и массой пружины может быть значительным, что даст очень маленький угол  $\gamma$  и ломаную линию с большим количеством сторон. Но уравнение (5) показывает, что точки находятся на одном и том же эллипсе, если  $\text{ctg } \beta$  меняется, так же как и  $\text{tg } \gamma$ . С целью сокращения количества сторон ломаной линии можно поэтому назначить произвольно большую величину  $\text{tg } \gamma$ , т. е. для скорости  $a$  произвольно меньшую величину и изменять  $\text{ctg } \beta$  в том же соотношении; соответственные точки будут находиться при этом всегда на одной и той же кривой.

Это является вполне точным только в рассматриваемом случае, когда кривая представляет собой эллипс, но остается практически в достаточной мере точным также во всех случаях, когда наблюдаемому изменению режима соответствует большое число пробегов  $\frac{2L}{a}$  волны. В этих случаях без опасения можно произвольно уменьшать величину  $a$  при условии, чтобы общее число пробегов не оказалось меньше примерно десятка; конечные результаты будут при этом условии достаточно точными.

Это упрощение может быть интерпретировано еще и следующим образом. Скорость  $a$  распространения волны, будучи относительно очень большой, может рассматриваться как бесконечно большая. Поэтому можно проследивать явление с интервалом времени  $j$ , а не  $\frac{2L}{a}$  при условии, что интервал достаточно мал, чтобы можно было считать изменения скорости или усилия линейными во времени. Если  $V_t$  является скоростью для пружины в момент времени  $t$  и  $V_{t+j}$  — искомой скоростью для момента времени  $t + j$ , то увеличение усилия в момент времени  $(t + j)$  будет определяться уравнением

$$K \left[ \frac{V_t + V_{(t+j)}}{2} \right] j = \Delta P,$$

где  $\frac{V_t + V_{(t+j)}}{2} \times j$  является удлинением пружины в течение периода времени  $j$ . Из этого уравнения можно получить

$$V_{(t+j)} = -V_t + \frac{2}{Kj} \Delta P. \quad (17)$$

Уравнению (17) соответствует прямая, имеющая угловой коэффициент

$$\operatorname{tg} \gamma = K \frac{j}{2} \quad (18)$$

и проходящая через точку, симметричную относительно оси ординат соответственной точке для момента времени  $t$ .

Для массы  $M'$  в уравнении (3) уже был определен угловой коэффициент

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M'}{\frac{j}{2}}. \quad (19)$$

Построения будут идентичны произведенным на фиг. 103, б; только угловые коэффициенты прямых будут определяться из выражений (18) и (19).

Отметим, что уравнение (5) вновь приводит, если подставить в него выражения (18) и (19) к отношению  $\frac{V_m}{P}$ , найденному ранее при посредстве уравнения (6).

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В НАТЯНУТОЙ СТРУНЕ

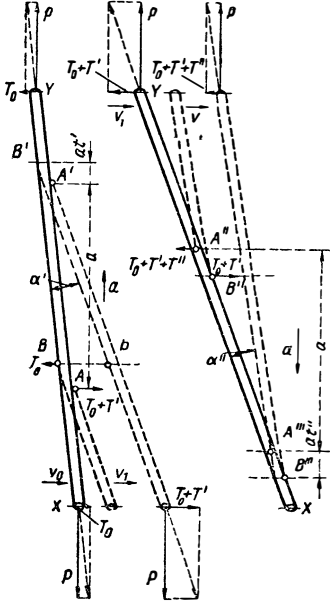
**§ 70(89). Вывод общих законов.** Пусть (фиг. 104) мы имеем струну  $XU$ , растягиваемую силой  $P$ ; начальное состояние струны характеризуется поперечной силой  $T_0$ , перпендикулярной к силе  $P$ , и поперечной скоростью  $v_0$ ; по условиям равновесия ось струны должна совпадать с результирующей сил  $P$  и  $T_0$ .

Пусть в сечении  $X$  произойдет увеличение перерезающей силы на величину  $T'$ ; тогда скорость  $v_0$  превратится здесь в  $v_1$  и струна

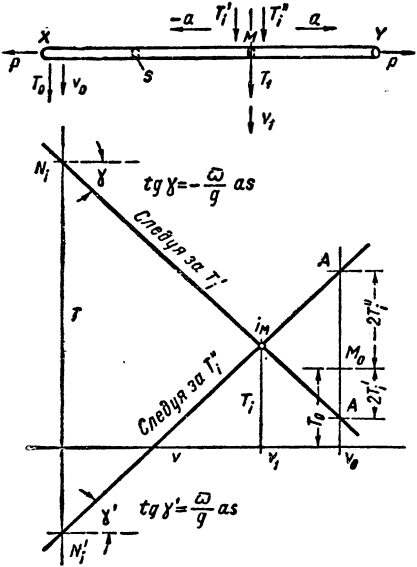


примет направление результирующей сил  $P$  и  $(T_0 + T')$ , образуя с прежним направлением угол  $\alpha'$ . Пусть этот угол достаточно мал, так что его тангенс можно приравнять синусу.

Это изменение состояния будет распространяться в направлении  $Y$  со скоростью  $a$ . Если в некоторый момент времени оно имеет место, например, на участке между сечениями  $A$  и  $B$ , то через секунду участок изменения состояния будет находиться между сечениями  $A'$  и  $B'$  на расстоянии  $a$  от участка  $AB$ .



Фиг. 104.



Фиг. 105.

Таким образом, участку  $AX$  уже будет сообщена поперечная скорость  $v_1$  в то время, как на участке  $BY$  еще сохраняется скорость  $v_0$ . В течение одной секунды скорость изменяется от величины  $v_0$  до  $v_1$  на участке  $BB'$  длиной  $a$ ; такое же изменение будет происходить на соответствующем участке в каждую последующую секунду, так что в единицу времени изменение количества движения в направлении, перпендикулярном оси, оказывается равным  $\left(\frac{\omega}{g} as\right)(v_1 - v_0)$ ; эта величина должна быть равна сумме проекций на то же направление внешних сил, т. е. сумме  $(T_0 + T_1) - T_0$ , откуда следует

$$\left(\frac{\omega}{g} as\right)(v_1 - v_0) = T'. \tag{1}$$

Аналогично, если сила  $T''$ , приложенная в сечении  $Y$ , приводит к изменению скорости от  $v_1$  до  $v$ , это изменение будет распростра-

няться от  $Y$  в направлении к  $X$  со скоростью также  $a$ . Применение теоремы о количестве движения приводит в этом случае к уравнению

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{g} as\right)(v - v_1) = -T'' \quad (2)$$

Складывая уравнения (1) и (2), получим

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{g} as\right)(v - v_0) = (T' - T''). \quad (3)$$

С другой стороны, конечное усилие  $T$  представляется суммой составляющих  $T_0$ ,  $T'$  и  $T''$ , откуда

$$T_0 - T' = (T' + T''). \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) являются общими уравнениями неустановившегося режима поперечной скорости и перерезывающего усилия в натянутой струне; эти изменения режима выражаются волнами  $T'$  и  $T''$ , которые распространяются вдоль струны со скоростью  $a$ .

Пусть  $M$  — некоторое сечение струны  $XY$ ,  $T'_i$  и  $T''_i$  волны (фиг. 105), которые встречаются в этом сечении в момент времени  $t$ , так что режим здесь характеризуется величинами  $T_i$  и  $v_i$ . Применим уравнения (3) и (4) сперва к сечению  $M$  в момент времени  $i$ , затем к случаю перемещения подвижного наблюдателя, следующего за волной  $T'_i$ ; рассуждая так же, как в § 58(73) применительно к уравнениям (5) до (12), найдем

$$(T_i - T) = \frac{\bar{\omega}}{g} as (v - v_i), \quad (5)$$

что выражает зависимость между величинами  $T$  и  $v$ , отмечаемую наблюдателем следующим за волной  $T'_i$ . Этой зависимости соответствует прямая  $AN_i$  с угловым коэффициентом  $\left(-\frac{\bar{\omega}}{g} as\right)$ .

Используя уравнения (3) и (4) для сечения  $M$  в момент времени  $i$  и одновременно уравнения, связанные с подвижным наблюдателем, следующим за волной  $T''_i$ , найдем

$$(T_i - T) = \frac{\bar{\omega}}{g} as (v_i - v). \quad (6)$$

Это — зависимость между величинами  $T$  и  $v$  для второго наблюдателя, представляющаяся прямой  $A'N'_i$ , симметричной предыдущей относительно горизонтальной линии, проходящей через соответственную точку  $i_m$  режима в сечении, из которого наблюдатель начинает свое движение.

Примечание. Определение знака угла  $\gamma$  не вызывает затруднений, если руководствоваться следующими соображениями.

Сила  $T_i$  является перерезающим усилием в сечении  $M$ , определяемым, например, как действие отрезка  $MU$  справа от сече-

ния  $MX$  на отрезок  $MX$ , расположенный слева от этого сечения. Поэтому если скорость  $v_i$  совпадает по направлению с силой  $T_i$  и если наблюдатель, перемещающийся из сечения  $M$  в направлении к  $X$ , констатирует уменьшение скорости в результате наличия левого отрезка, то усилие  $T_i$  будет возрастать (вследствие инертности правого отрезка) и угол  $\gamma$  будет отрицательным (прямая  $AN_i$ ). Соответственно, если наблюдатель, перемещаясь от сечения  $M$  в направлении  $Y$  и отметит уменьшение скорости, обусловливаемое наличием участка справа, — это будет означать, что усилие  $T_i$  уменьшается и угол  $\gamma$  в таком случае будет положительным (прямая  $A'N'_i$ ).

§ 71(90). **Определение скорости  $a$  распространения волны.** Изменение величины угла  $\alpha'$  определяется взаимодействием двух сил: натяжения струны  $P$  и изменения в величине перерезающей силы  $T'$ ; отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{T'}{P}. \quad (7)$$

В течение одной секунды изменение угла распространяется на длину отрезка  $BB'$  (фиг. 104), равного  $a$ ; сечение  $B$  за это же время сместится на величину  $(v_1 - v_0)$ , достигнув положения  $b$ ; отсюда следует

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\overline{Bb}}{BB} = \frac{v_1 - v_0}{a}. \quad (8)$$

Приравнявая уравнение (7) к уравнению (8) и заменяя  $T'$  выражением (1), получим

$$\frac{\bar{\omega}}{g} a s \frac{(v_1 - v_0)}{P} = \frac{(v_1 - v_0)}{a},$$

откуда

$$a = \sqrt{\frac{g}{\omega} \cdot \frac{P}{s}}. \quad (9)$$

Таким образом, скорость распространения волны пропорциональна корню квадратному из величины  $\frac{P}{s}$  продольного напряжения в струне.

## Приложения

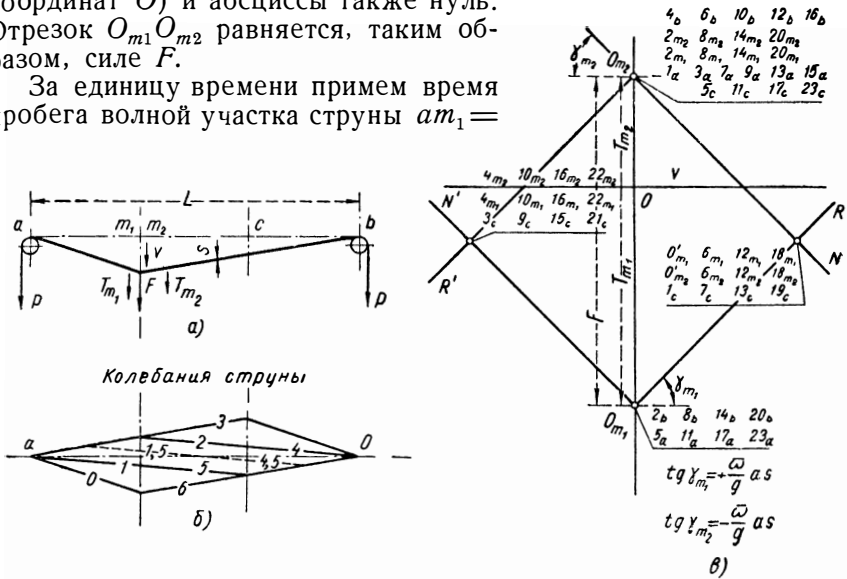
§ 72 (91). **Щипковая струна.** Рассмотрим случай струны  $ab$  постоянного сечения  $s$ , натянутой усилием  $P$  (фиг. 106,  $a$ ) и смещенной из первоначального среднего положения силой  $F$ , приложенной на  $\frac{1}{3}$  длины струны. Эта сила может быть разложена на составляющую  $T_{m_1} = \frac{2}{3} F$ , представляющую собой поперечную силу, приложенную в сечении  $m_1$  к левому отрезку

$am_1$  и  $T_{m_2} = \frac{1}{3}F$  — перерезающее усилие в сечении  $m_2$ , приложенное к правому участку  $m_2b$ .

Начальный режим в сечении  $m_2$  определяется (фиг. 106, в) точкой  $O_{m_2}$  с ординатой  $T_{m_2}$  и абсциссой, равной нулю (поскольку скорость равняется нулю) и в сечении  $m_1$  точкой  $O_{m_1}$  ординаты  $T_{m_1}$  (отсчитываемой для удобства построений вниз от начала координат  $O$ ) и абсциссы также нуль.

Отрезок  $O_{m_1}O_{m_2}$  равняется, таким образом, силе  $F$ .

За единицу времени примем время пробега волной участка струны  $am_1 =$



Фиг. 106.

$= \frac{L}{3}$ , т. е. величину  $\tau = \frac{L}{3a}$ , где  $a = \sqrt{\frac{g}{\omega} \cdot \frac{P}{S}}$ , а за начало отсчетов времени — момент, когда сила  $F$  внезапно снимается.

Для наблюдателя, выбывающего из сечения  $a$  в момент времени  $(-1)$ , когда режим здесь определяется точкой  $O_{m_1}$  и прибывающего в  $m_1$  в момент времени нуль снятия силы  $F$ , зависимость перерезающей силы от скорости  $v$  определяется характеристической прямой  $O_{m_1}B$ , имеющей угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \gamma_{m_1} = + \frac{\omega}{g} as$  (этот коэффициент положительный, так как если наблюдатель отмечает уменьшение усилия  $T_{m_1}$ , то неизбежно возникает возрастание скорости в направлении, противоположном силе  $T$ , принятом при построениях за положительное).

Для второго наблюдателя, выбывающего из сечения  $b$  в момент времени  $(-2)$ , когда режим здесь определяется точкой  $O_{m_2}$  и прибывающего в сечение  $m_2$  в момент времени нуль, характеристикой будет прямая  $O_{m_2}N_1$ , имеющая угловой коэффициент

$\operatorname{tg} \gamma_{m_2} = -\frac{\omega}{g} as$  (в этом случае угол отрицательный, так как для данного наблюдателя скорость  $v$  возрастает в противоположность усилию  $T_{m_2}$ , если последнее уменьшается по абсолютной величине).

В момент времени нуль встречи наблюдателей в сечении  $m_1 m_2$  сила  $F$  будет равна нулю. Этому условию удовлетворяет точка пересечения прямых  $O_{m_1}R$  и  $O_{m_2}N$ . Из положения этой точки, которую мы можем обозначить как  $O'_{m_1}$  и  $O'_{m_2}$ , следует, что перерезающее усилие в  $m_2$  изменило знак в то время, как в сечении  $m_1$  знак сохранился. Абсолютная величина перерезающего усилия определяется ординатой точки  $O'_{m_1}$  ( $O'_{m_2}$ ), составляя  $T_0 = \frac{F}{6}$ ; абсцисса этой точки определяет скорость для сечения  $m_1 m_2$ , равную  $v'_0 = \frac{g}{\omega as} \cdot \frac{F}{2}$ .

Поскольку прямые  $O_{m_1}R$  и  $O_{m_2}N$  симметричны по отношению к горизонтали, проходящей через их точку пересечения (это вытекает из равенства между собой углов  $\gamma_{m_1}$  и  $\gamma_{m_2}$ ), то они окажутся совпадающими с характеристическими прямыми, констатируемыми наблюдателями, возвращающимися соответственно из  $m_1$  в  $a$  и из  $m_2$  в  $b$ . Эти наблюдатели отмечают в сечениях  $a$  и  $b$  скорости, равные нулю; поэтому соответственными точками режима в данных сечениях будут:

в сечении  $a$  точка  $1_a$ , совпадающая с точкой  $O_{m_2}$ ;

в сечении  $b$  точка  $2_b$ , совпадающая с точкой  $O_{m_1}$ .

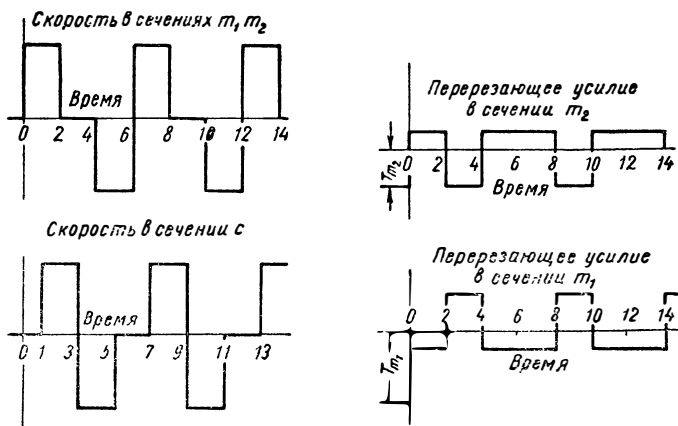
Наблюдатель, выбывающий вновь из сечения  $a$  в момент времени 1, в момент времени 2 прибывает в сечение  $m_1$ , встречая здесь наблюдателя, выбывшего из сечения  $b$  в момент времени нуль, для которого характеристикой еще будет прямая  $O_{m_2}N$ . Так как сила  $F$  в сечении  $m_1 m_2$  по-прежнему равна нулю, то режим здесь будет определяться точкой  $2_{m_1}$  пересечения двух характеристических прямых, совпадающей с точкой  $O_{m_2}$ .

Возвратившись в сечение  $a$ , куда он прибудет в момент времени 3, первый наблюдатель отметит скорость, равную нулю, что даст соответственную точку  $3_a$ , совпадающую с точкой  $O_{m_2}$ .

Вновь выбывая из сечения  $a$  в момент времени 3, первый наблюдатель достигает сечения  $m_1 m_2$  в момент времени 4 и характеристикой для него будет прямая  $3_a R'$  (т. е.  $O_{m_2} R'$ ). В сечении  $m_1 m_2$  он встретит наблюдателя, выбывшего из сечения  $b$  в момент времени 2, для которого характеристикой будет прямая  $2_b N'$  (т. е.  $O_{m_1} N'$ ). Соответственная точка режима в сечении  $m_1 m_2$  в момент времени 4 будет находиться в точке  $4_{m_1}$ ,  $4_{m_2}$  пересечения этих двух прямых, чем определяется скорость, равная по величине первоначальной, но с обратным знаком, и перерезающая сила, равная первоначальной (для момента нуль).

Продолжение построений не может вызывать затруднений; их результатом будет ромб, каждая вершина которого будет соответственной точкой серии режимов, обозначаемых на чертеже, как всегда, цифрой, которая указывает время, и буквой, которой указывается сечение.

Поскольку участок  $t_2b$  вдвое больше участка  $t_1a$ , то надо предположить двух наблюдателей, перемещающихся на участке  $t_2b$  и попеременно встречающихся в сечении  $t$  с наблюдателем, перемещающимся на участке  $t_1a$ . Эти два наблюдателя встречаются сами в сечении  $c$  посередине участка  $t_2b$ , что дает соответ-



Фиг. 107.

ственные точки режима для названного сечения, также отмеченные на эпюре.

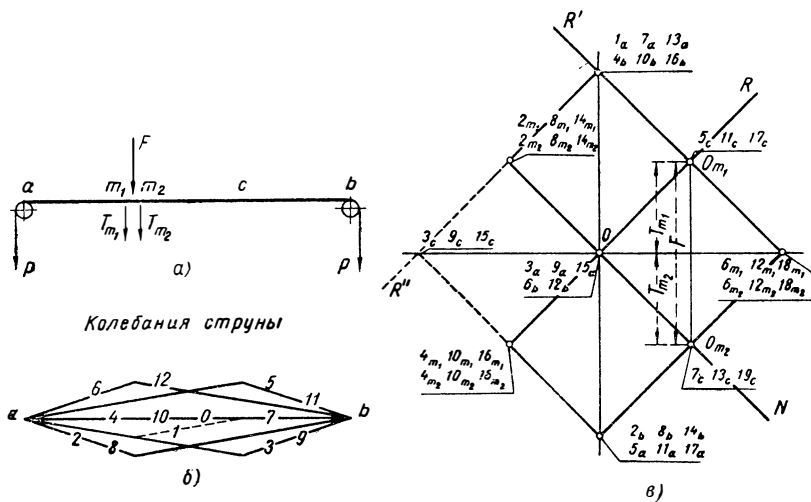
По данным на фиг. 106, *в*, можно построить графики зависимости от времени для скорости в сечениях  $t_1, t_2$  и  $c$ , показанные на фиг. 107. На этой же фигуре даны также графики перерезающих усилий в сечениях  $t_1$  и  $t_2$  (всегда равных между собой, на противоположных по знаку); построение на фиг. 106, *б* дает возможность построить графики перерезающего усилия при желании также для сечений  $a, b$  и  $c$ .

Значения площади графиков скорости определяют путь, проходимый сечениями  $t_1, t_2$  и  $c$ . Нанося эти пути в виде графика, можно получить для любого момента времени положение точек  $a, t_1, t_2, c, b$  струны. На фиг. 106, *б* дана последовательность положений оси струны для нескольких моментов времени; из этого графика можно установить, что продолжительность периода колебаний струны равняется  $6\tau = \frac{2L}{a}$ .

§ 73(92). Удар по струне (струна пианино). Пусть сечение  $t_1, t_2$  струны  $ab$  (фиг. 108, *а*) испытывает в момент времени нуль действие удара, в результате, например, приложения силы  $F$

в течение времени  $2\tau$ , где  $\tau$  имеет то же значение, что в предыдущем случае.

Начальный режим в данном случае характеризуется равенством нулю и перерезающей силы и скорости, что дает соответствующую точку  $O$ , совпадающую с началом координат (фиг. 108, в). В начале процесса характеристиками будут: для наблюдателя, выбывающего из сечения  $a$  в момент времени  $(-1)$  прямая  $OR$ , и для наблюдателя, выбывающего из сечения  $b$  в момент времени  $(-2)$ , прямая  $ON$ , имеющая угловые коэффициенты  $\pm \frac{\omega a s}{g}$ . При



Фиг. 108.

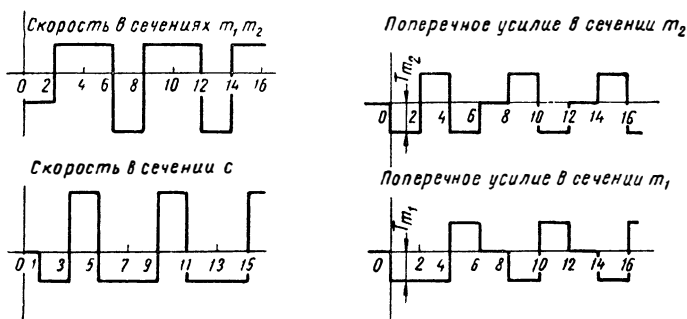
встрече наблюдателей в сечении  $m_1 m_2$  в момент времени нуль они констатируют силу  $F$ , что даст на упомянутых прямых соответственные точки  $O_{m_1}$  и  $O_{m_2}$ , на взаимном расстоянии  $F$  по вертикали. Поперечные усилия  $T_{m_1}$  и  $T_{m_2}$  в этом случае равны  $\frac{F}{2}$  каждая и имеют одинаковый знак, поскольку прямая  $ON$  проведена ниже оси абсцисс только для придания построению большей наглядности; в действительности же ее ординаты должны рассматриваться, как имеющие тот же знак, что ординаты прямой  $OR$ , если эти прямые находятся в противоположных квадрантах; знаки были бы, наоборот, различными, если бы обе прямые оказались в одном и том же квадранте.

Во время обратного перемещения наблюдателя из сечения  $m_1$  характеристикой будет прямая  $O_{m_1} R'$ , определяющая в сечении  $a$  в момент времени 1 соответственную точку  $1_a$  (поскольку здесь скорость равна нулю), которой определяется перерезывающее усилие, равное  $F$ .

Для того же наблюдателя, проделывающего путь снова в направлении к сечению  $m_1$ , характеристикой будет прямая  $1_a R''$ :

прибывая в сечение  $m_1$ , он встречает здесь второго наблюдателя, выбывшего из сечения  $b$  в момент времени нуль, и для которого характеристикой является прямая  $ON$ . Поскольку в этот момент времени сила  $F$  снимается, соответственная точка  $2m_1$   $2m_2$  должна находиться на пересечении двух названных прямых; ее положение указывает на то, что скорость изменила направление (т. е. знак) и что величины  $T_{m_1}$  и  $T_{m_2}$  теперь равны  $\frac{F}{2}$  каждая, имея разные знаки, поскольку также усилие  $T_{m_2}$  изменило свой знак.

Дальнейшее построение не вызывает затруднений. Соответственные точки для сечений  $a$ ,  $m_2m_1$ ,  $b$ ,  $c$  получены на фиг. 108, в



Фиг. 109.

до момента времени 19. По этим данным построены на фиг. 109 графики зависимости от времени для скорости и для перерезающей силы в сечениях  $m_2$  и  $m_1$ .

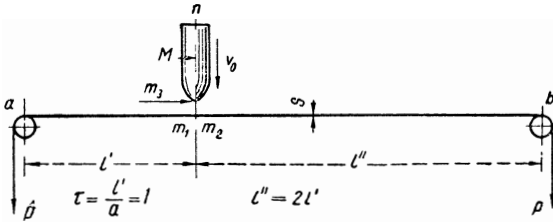
Площади кривых на графиках скорости определяют смещения точек  $m_1m_2$  и  $c$ , что позволяет построить положения струны (фиг. 108, б) на разные моменты времени. Начиная с момента времени 2, как это следует из графиков, колебания возобновляются с периодичностью, равной  $6\tau = \frac{2L}{a}$ . Колебания симметричны относительно прямой  $ab$ , представляющей среднее положение струны, наблюдаемое в моменты времени 4, 7, 10 и т. д.; однако максимум амплитуды при этом смещается сначала слева направо (моменты времени 2 и 3) под средним положением, а затем справа налево (в моменты времени 5 и 6), располагаясь при этом выше среднего положения; таким образом точка максимума совершает круговое движение в направлении, противоположном вращению часовой стрелки из расчета одного поворота последней в течение периода.

Сопоставляя фиг. 106, б и 108, б, можно отметить интересный факт: независимо от того, испытывает ли струна действие удара или действие щипка, при условии, что сила  $F$  в обоих случаях одинакова по величине, частота колебаний будет одной и той же, и,



следовательно, звук будет одного тона; однако форма колебаний будет различной в результате щипка, чем объясняется разность тембра, получаемого при ударе молотком по струне пианино или от щипка.

§ 74(93). Удар падающего груза по струне. Рассмотрим случай (фиг. 110) падения груза массы  $M$  на струну в точке  $m_1 m_2$  последней, находящейся на расстоянии  $\frac{1}{3}$  длины струны; пусть скорость тела  $M$  в момент удара по струне равняется  $v_0$ .



Фиг. 110.

Первоначальный режим струны определяется соответственной точкой, совпадающей с началом координат  $O$  (фиг. 111); характеристикой для наблюдателя, выбывающего из сечения  $a$  в момент времени  $(-1)$ , является прямая  $OR$ , а для наблюдателя, выбывающего из сечения  $b$  в момент времени  $(-2)$  прямая  $ON$ , имеющие, как и в предыдущем случае, угловой коэффициент, равный  $\frac{\omega as}{g}$ .

Но в момент времени нуль в сечении  $m_1 m_2$  наблюдатели констатируют не силу  $F$ , а скорость  $v_0$  тела  $M$ , и расстояние по вертикали между соответственными точками  $O_{m_1}$  и  $O_{m_2}$ , имеющими абсциссу  $v_0$  (фиг. 111), определяет величину силы  $F_0$  в момент удара; перерезающая сила, приложенная к участку  $am_1$  в сечении  $m_1$  и приложенная к отрезку  $bm_2$  в сечении  $m_2$ , равна  $\frac{F_0}{2}$  каждая, определяясь ординатами точек  $O_{m_1}$  и  $O_{m_2}$ .

Под действием силы  $F_0$  масса  $M$  замедлит скорость своего движения, результатом чего будет уменьшение силы реакции  $F$  струны. Таким образом в конце периода времени  $\Delta t$  скорость уменьшится на  $\Delta v$ , а сила превратится в  $F_1$  (фиг. 111), причем эти две величины должны удовлетворять соотношению

$$\frac{F_0 + F_1}{2} \Delta t = M \Delta v, \quad (10)$$

представляя собою не что иное, как применение к массе  $M$  теоремы о количестве движения в проекциях на ось ординат. Величина  $\frac{F_0 + F_1}{2}$  в уравнении (10) представляет собой осреднен-



Прибавим к ординатам прямой  $KL$ , отсчитываемым от горизонтальной прямой, проходящей через точку  $O_{m_2}$ , ординаты прямой  $O_{m_2}O$ ; это даст результирующую прямую  $kS$ . Последняя пересекает характеристическую прямую  $OO_{m_1}$  в искомой точке  $l_{m_1}$ , т. е. расстояние  $\overline{l_{m_1}l_{m_2}} = F_1$  равно величине силы в момент времени  $\Delta t$  и отрезок  $\overline{O_{m_2}D} = \Delta v$  представляет собой уменьшение скорости движения.

Действительно, построение дает:  $F_1 = \overline{l_{m_1}l_{m_2}} = \overline{ED}$ . С другой стороны, подобные треугольники  $O_{m_1} O_{m_2} K$  и  $EDK$  дают

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{F_1}{\Delta v_1} = \frac{F_0}{\Delta v_0} = \frac{F_1 + F_0}{\Delta v + \Delta v_0} = \\ &= \frac{F_1 + F_0}{\Delta v}, \end{aligned}$$

откуда, учитывая уравнение (11), получим

$$\frac{F_1 + F_0}{\Delta v} = \frac{M}{2} \frac{\Delta t}{\Delta v}$$

$$\text{и } \frac{F_1 + F_0}{2} \Delta t = M \Delta v,$$

что точно совпадает с уравнением (10).

При построениях на фиг. 111 интервал времени  $\Delta t$  принят равным  $\frac{l'}{a'}$ , т. е. времени, которое мы приняли за единицу. Деталь чертежа, выполненная на фиг. 112, находится на фиг. 111 в области между точками  $4'_{m_1}$  и  $5_{m_1}$ ; для всех же других точек построена только результирующая прямая  $kS$ , что является естественным, поскольку угол  $\beta'$  этой прямой с осью абсцисс всегда один и тот же и нет необходимости каждый раз прибегать к построению промежуточной прямой  $KL$ .

Построения для получения очередной соответственной точки производятся в следующем порядке: исходя из последней полученной для сечения  $m_1$  точки  $l_{m_1}$ , следует провести прямую, образующую с осью абсцисс угол  $\beta$ ; эта прямая доводится до горизонтали, проходящей через последнюю точку  $l_{m_2}$ , полученную для сечения  $m_2$ , затем ее следует поднять вертикально до характеристической прямой, отмечаемой наблюдателем, который прибывает из сечения  $b$  в сечение  $m_2$  в момент времени  $i + 1$ , и провести через точку пересечения прямую, образующую с осью абсцисс угол  $(-\beta)$ ; эта

прямая пересекает новую характеристическую прямую, отмечаемую наблюдателем, прибывающим в сечение  $m_1$  из сечения  $a$  в момент времени  $(i + 1)$ , в искомой соответственной точке  $(i + 1)m_1$  и т. д.

Следуя этому указанию, читатель легко может проследить и понять все построение на фиг. 111, где соответственные точки отмечены по-прежнему цифрой, указывающей время, и индексом, указывающим сечение существования рассматриваемого режима. Из рассмотрения построения следует, что между моментами времени 7 и 8 груз  $M$  отрывается от струны, причем скорость в момент отрыва (абсцисса точек  $7_{m_1}$   $7_{m_2}$ ) меньше первоначальной скорости  $v_0$  падения, что объясняется передачей части энергии струне в виде колебаний последней. Начиная с этого времени, построение может быть продолжено в порядке, описанном для предыдущего случая.

Отметим, что точки, разделенные интервалом времени  $2\tau$ , будут двойными для сечения  $m_1$ , а точки, разделенные интервалом  $4\tau$ , будут двойными для сечения  $m_2$ , в силу того, что моменты времени, соответствующие этим интервалам, совпадают с приходом в сечение  $m_1$  и  $m_2$  волн, отраженных в сечениях  $a$  и  $b$ . Приход волны в сечение  $m_1m_2$  вызывает здесь резкое изменение силы  $F$  (как следствие внезапного приложения силы  $F_0$  в момент удара); так например, в момент времени 4 в сечении  $m_1m_2$  сила резко меняется от величины  $\overline{4_{m_1} 4_{m_2}}$  до  $\overline{4'_{m_1} 4'_{m_2}}$ .

**Примечание.** Остановимся подробнее на рассматриваемом случае, который характеризуется тем, что граничным условием является не заданная функция переменных ( $F$  и  $v$ ), а дифференциальное уравнение; действительно уравнение (10) имеет вид (если перейти к дифференциалам)

$$F = M \frac{dv}{dt}. \quad (12)$$

Построению на фиг. 112, в процессе которого решается это уравнение, можно дать физическую интерпретацию, очень облегчающую его применение.

В самом деле, прямая  $O_{m_1}K$  на фиг. 112 может быть рассматриваема как характеристическая прямая, отмечаемая наблюдателем, выбывающим из точки  $m_3$  контакта между телом  $M$  и струной в момент времени нуль и движущимся в направлении к кромке  $n$  тела  $M$ , причем величина  $\omega as/g$  для этого тела равна  $2M/\Delta t$ . Прибывая в сечение  $n$ , наблюдатель констатирует силу, равную нулю, что дает точку  $K$  той же ординаты, что точка  $O_{m_2}$ , соответствующая прекращению действия силы  $F_0$ . Данная точка могла бы быть обозначена как  $0,5_n$  (соответственная точка для сечения  $n$  в момент времени 0,5). Для того же наблюдателя, перемещающегося обратно в направлении к точке контакта  $m_3$  между телом  $M$  и струной, характеристическая прямая симметрична предыдущей, проходя через

соответственную точку в месте и в момент времени выбытия наблюдателя, чем определяется прямая  $KL$ .

С этого времени в сечении  $m_2m_3$  будут два наблюдателя: один, прибывающий из сечения  $n$ , отмечает в сечении  $m_3$  силу, приложенную к телу  $M$ , величина которой определяется ординатой прямой  $KL$ , другой, прибывающий из сечения  $b$ , отмечает в сечении  $m_2$  силу, величина которой определяется ординатой прямой  $OO_{m_2}$ . Эти силы складываются и, таким образом, для обоих наблюдателей сила в сечении  $m_2m_3$  будет равна сумме ординат двух названных прямых, что дает прямую  $kS$ .

Третий наблюдатель, который прибывает в сечение  $m_1$  в момент времени  $1$ , должен отметить по условию равновесия ту же суммарную силу и ту же скорость, как оба предыдущих наблюдателя совместно. Поэтому для последнего наблюдателя характеристикой будет прямая  $OO_{m_1}$ . Следовательно, соответственной точкой режима в  $m_1m_2m_3$ , удовлетворяющей условиям, поставленным тремя наблюдателями, будет точка  $1_{m_1}$  пересечения прямых  $kS$  и  $OO_{m_1}$ .

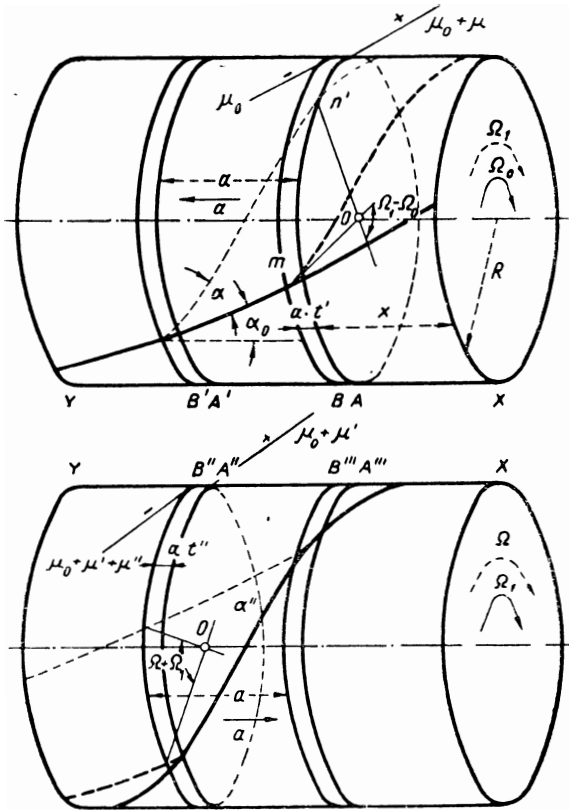
Описанное построение не является формальным представлением, приводящим к удачному соответствию, но выражением подлинной реальности. В самом деле в момент удара одна волна действительно возникает в теле  $M$ , отражается в сечении  $n$  на границе тела, где сила равна нулю, и вновь возвращается в сечение  $m_3$ . Для наблюдателя, который за ней следует, характеристические прямые имеют такой же вид, как прямые  $O_{m_1}K$  и  $KL$ , но с гораздо большим угловым коэффициентом и при времени пробега значительно меньшем принятой единицы измерения времени  $\tau = \frac{l'}{a}$ . Пусть это время пробега будет равно, например,  $\frac{1}{50} \tau$ . Тогда точке  $1_{m_1}$  будет соответствовать 50 перемещений наблюдателя в обоих направлениях в теле  $M$ , чему будет соответствовать ломаная линия с 50-ю сторонами, аналогичными отрезку  $Kk$ , построенная исходя из точки  $O_{m_1}$ . Если  $\tau$  достаточно мало, эта ломаная линия практически закончится в той же точке  $1_{m_1}$ , как линия на фиг. 112.

Этим подтверждается правильность построения на фиг. 112 не только из геометрических представлений, как это было показано ранее, но и по существу.

## ВОЛНЫ КРУЧЕНИЯ В ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

**§ 75(95). Основные закономерности.** На фиг. 113 изображен цилиндрический стержень  $XU$ , вращающийся первоначально с угловой скоростью  $\Omega_0$ , передающий пару сил  $\mu_0$ . Если пара меняет в сечении  $X$  свою величину до значения  $\mu_0 + \mu'$ , то и угловая скорость также изменится и станет равной  $\Omega_1$ . Это изменение будет распространяться в направлении к сечению  $U$  со скоростью  $a$ . На фиг. 113 это изменение предположено происходящим

на участке  $AB$ ; через одну секунду этот участок переместится в  $A'B'$  на расстояние  $AA' = a$ . Таким образом каждую секунду цилиндр длиной  $a$  изменяет угловую скорость от  $\Omega_0$  до  $\Omega_1$ . В течение каждой секунды момент количества движения цилиндра  $XU$  возрастает на величину  $\left(\frac{\bar{\omega}}{g} a I_0\right) (\Omega_1 - \Omega_0)$ , где  $I_0$  — полярный момент инерции сечения цилиндра и  $\bar{\omega}$  — удельный вес



Фиг. 113.

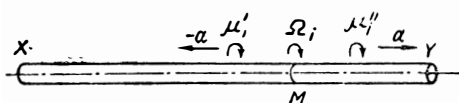
материала цилиндра. Возрастание момента количества движения равняется сумме моментов сил  $(\mu_0 + \mu') - \mu_0 = \mu'$ ; отсюда

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{g} a I_0\right) (\Omega_1 - \Omega_0) = \mu'. \quad (1)$$

В общем случае может иметь место также возрастание на величину  $\mu''$  момента в сечении  $Y$ , что обуславливает новое изменение угловой скорости от значения  $\Omega_1$  до  $\Omega$ . Это измене-

ние распространяется от сечения  $Y$  в направлении к сечению  $X$  со скоростью также  $a$ , что приводит к условию

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{g} a I_0\right) (\Omega - \Omega_1) = (\mu_0 + \mu') - (\mu_0 + \mu' + \mu'') = -\mu'' \quad (2)$$



Складывая уравнения (1) и (2), получим

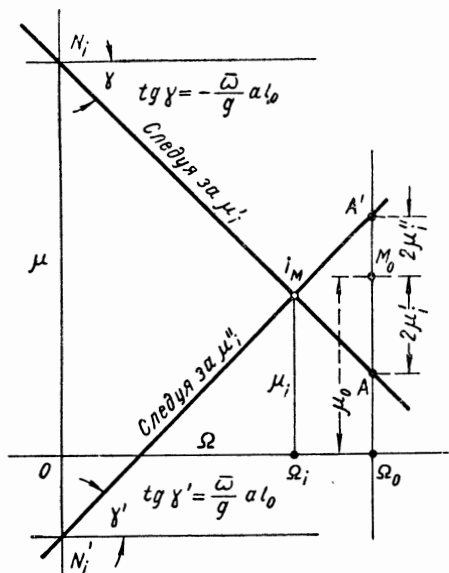
$$\left(\frac{\bar{\omega}}{g} a I_0\right) (\Omega - \Omega_0) = \mu' - \mu'' \quad (3)$$

Кроме того,

$$\mu - \mu_0 = \mu' + \mu'' \quad (4)$$

Это уже знакомый вид уравнений, величины  $\mu'$  и  $\mu''$  в которых теперь являются волнами, соответствующими изменениям момента кручения  $\mu$ , а второй характеристикой режима является угловая скорость  $\Omega$ .

Пусть для цилиндра  $XU$  (фиг. 114) известны в некоторый момент времени  $i$  момент кручения  $\mu_i$  и угловая скорость  $\Omega_i$  в некотором сечении  $M$ ; соответственной точкой для этого режима на фиг. 114 является точка  $i_M$ . Этот режим является результатом прохождения в сечении  $M$  двух волн



Фиг. 114.

$\mu'_i$  и  $\mu''_i$ , имеющих направление — одна к сечению  $X$  и другая к сечению  $Y$ .

Применив уравнения (3) и (4), сначала в сечении  $M$  в момент времени  $i$ , а затем к наблюдателю, следующему за волной  $\mu_i$  и действуя так же, как в § 58(73) в отношении уравнений (5) до (12), найдем в виде

$$\mu_i - \mu = \left(\frac{\bar{\omega}}{g} a I_0\right) (\Omega - \Omega_i) \quad (5)$$

зависимость, связывающую величины  $\mu$  и  $\Omega$  при перемещении названного наблюдателя, выражающуюся прямой  $i_M N_i$ , имеющей угловой коэффициент

$$\text{tg } \gamma = -\frac{\bar{\omega}}{g} a I_0 \quad (6)$$

Комбинируя затем уравнения (3) и (4), примененные к сечению  $M$  в момент времени  $i$  и к перемещению наблюдателя, который следует за волной  $\mu_i''$ , найдем

$$(\mu_i - \mu) = \left( \frac{\bar{\omega}}{g} a I_0 \right) (\Omega_i - \Omega). \quad (7)$$

Это есть зависимость между величинами  $\mu$  и  $\Omega$  при перемещении второго наблюдателя; ей соответствует прямая  $i_M N_i'$  с угловым коэффициентом  $+\frac{\bar{\omega}}{g} a I_0$ , симметричная предыдущей по отношению к горизонтали, проходящей через точку  $i_M$ .

**Примечание.** Определение знака угла  $\gamma$  не может вызвать затруднений, если принять во внимание следующее: момент в сечении  $M$  можно определить как результат действия пары, передаваемой левому отрезку  $MX$  цилиндра его правой частью; величины  $\mu_i$  и  $\Omega_i$  будем считать положительными, если они имеют одинаковое направление. Поэтому если наблюдатель, перемещающийся из сечения  $M$  в направлении сечения  $X$ , отмечает уменьшение угловой скорости как эффект воздействия левого отрезка, он обязательно отметит возрастание пары, обусловливаемой правым отрезком вследствие инерции этого отрезка, стремящегося сохранить свою скорость кручения. Угловым коэффициент будет, следовательно, отрицательным (прямая  $AN_i$ ). Напротив, если наблюдатель, перемещающийся из сечения  $M$  в направлении  $Y$ , отмечает понижение скорости под влиянием действия правого отрезка, это говорит о том, что пара, передаваемая посредством этого отрезка, уменьшилась, без чего скорость не изменилась бы. Угловым коэффициент в данном случае будет иметь положительный знак (прямая  $A'N_i'$ ).

**§ 76(96). Расчет скорости  $a$  (распространение волн кручения).** Под действием момента  $\mu_0$  образующие поверхности цилиндра составляют с его осью некоторый угол  $\alpha_0$  (фиг. 113). Добавочный момент  $\mu'$  увеличит этот угол на  $\alpha'$ , который в соответствии с законом упругости будет равен

$$\alpha' = \frac{\mu' R}{I_0 G}, \quad (8)$$

где  $G$  — коэффициент упругости при сдвиге и  $R$  — радиус цилиндра.

Но в то время, как волна  $\mu'$  за секунду перемещается из положения  $AB$  в положение  $A'B'$ , точка  $m$  сечения  $A$  перемещается на дугу  $m'n'$  относительно сечения  $A'$ . Эта дуга соответствует изменению угла образующей с осью на длине  $AA_1 = a$ , так что

$$\overline{mn'} := a\alpha'.$$



В то же время относительное смещение окружности  $A$  по отношению к окружности  $A'$  обуславливается разностью значений угловой скорости  $\Omega_1 - \Omega_0$ , вследствие чего

$$\overline{mn'} = (\Omega_1 - \Omega_0)R.$$

Приравнивая два полученные выражения величины  $mn'$ , найдем

$$\frac{aa'}{R} = (\Omega_1 - \Omega_0). \quad (9)$$

После замены в этом уравнении величины  $a$  при посредстве выражения (8) и величины  $\mu$  при посредстве уравнения (1), найдем

$$\frac{a\mu'}{I_0G} = (\Omega_1 - \Omega_0),$$

откуда

$$a = \sqrt{\frac{g}{\omega} G}. \quad (10)$$

### Применения

**§ 77(97). Внезапная разгрузка вала.** На фиг. 115 показан вал  $abc$ , момент инерции которого равняется  $I_a$  на участке  $2l$  и  $I_c$  на участке  $l$ ; в статическом состоянии вал скручен парами  $\mu_0$  приложениями в сечениях  $a$  и  $c$ ; пусть в некоторый момент времени, приравниваемый нулю, эти пары внезапно снимаются.

Соответственная точка начального режима имеет в таком случае абсциссой нуль и ординатой величину  $\mu_0$ . Характеристические прямые, отмечаемые наблюдателями, прибывающими в сечения  $a$  и  $c$  в момент времени нуль, пройдут через эту точку, которая отмечена на чертеже как  $(-1_a)$   $(1_b)$   $(0_b)$   $(-1_b)$   $(-2_b)$ ; действительно, для сечения  $a$  она справедлива в момент времени  $(-1)$ , а для сечения  $b$  в моменты времени  $(-2)$ ,  $(-1)$   $0$  и  $1$ , если единицей измерения времени является  $\tau = \frac{l}{a}$ .

Для наблюдателей, перемещающихся из сечения  $b$  в направлении к сечению  $c$ , угловым коэффициентом прямых будет  $\text{tg } \gamma_c = -\frac{\omega}{g} al_c$ , а для наблюдателей, перемещающихся из сечения  $b$  в направлении сечения  $a$ , угловым коэффициентом прямых равен  $\text{tg } \gamma_a = \frac{\omega}{g} al_a$  (принимая, что для наблюдателя, обращенного лицом к сечению  $c$ , угловая скорость положительна, если вращение происходит против часовой стрелки, и отрицательна при вращении по часовой стрелке).

Эти прямые представлены на фиг. 115 двумя жирными сплошными линиями.

Прибывая в сечения  $a$  и  $c$ , наблюдатели констатируют, что момент равен нулю, чем определяются на оси абсцисс соответственные точки  $0_a$  и  $0_c$ , абсциссы которых представляют угловые скорости вращения  $\Omega_a = -\mu \frac{g}{\omega a I_a}$  и  $\Omega_c = +\mu \frac{g}{\omega a I_c}$ , внезапно возникающего в сечениях  $a$  и  $c$ .

Мы не будем описывать построения детально, отметим лишь, что для того, чтобы найти режимы в сечениях  $a$ ,  $b$  и  $c$  через интервалы времени  $\tau$ , следует рассматривать перемещения шести наблюдателей: двух между сечениями  $c$  и  $b$  и четырех — между сечениями  $a$  и  $b$ . Перемещениям первых двух наблюдателей соответствуют в одном случае ломаная линия (нанесенная тонкими сплошными линиями)  $1_c 2_b 3_c 4_b 5_c 6_b 7_c 8_b 9_c 10_b 11_c 12_b 13_c 14_b 15_c 16_b 17_c 18_b 19_c 20_b 21_c 22_b$  и в другом — ломаная линия (показанная пунктиром)  $1'_b 2'_c 3'_b 4'_c 5'_b 6'_c 7'_b 8'_c 9'_b 10'_c 11'_b 12'_c 13'_b 14'_c 15'_b 16'_c 17'_b 18'_c 19'_b 20'_c 21'_b$ . Шифр, обозначающий вершины этой второй линии, снабжен апострофом, поскольку эти точки определены, строго говоря, не для моментов времени 2, 3, 4...21, но для моментов времени  $2 + \varepsilon$ ,  $3 + \varepsilon$ , ... где  $\varepsilon$  бесконечно малый интервал времени. Если же их определять для моментов времени  $2 - \varepsilon$ ,  $3 - \varepsilon$ , ... 21 -  $\varepsilon$ , то были бы найдены точки  $2_c 3_b 4_c$ ...21 $_b$  22 $_c$  23 $_b$ , совпадающие с точками  $1_c 2_b 3_c$ ...20 $_b$  21 $_c$  22 $_b$  первой ломаной (показанной сплошными тонкими линиями).

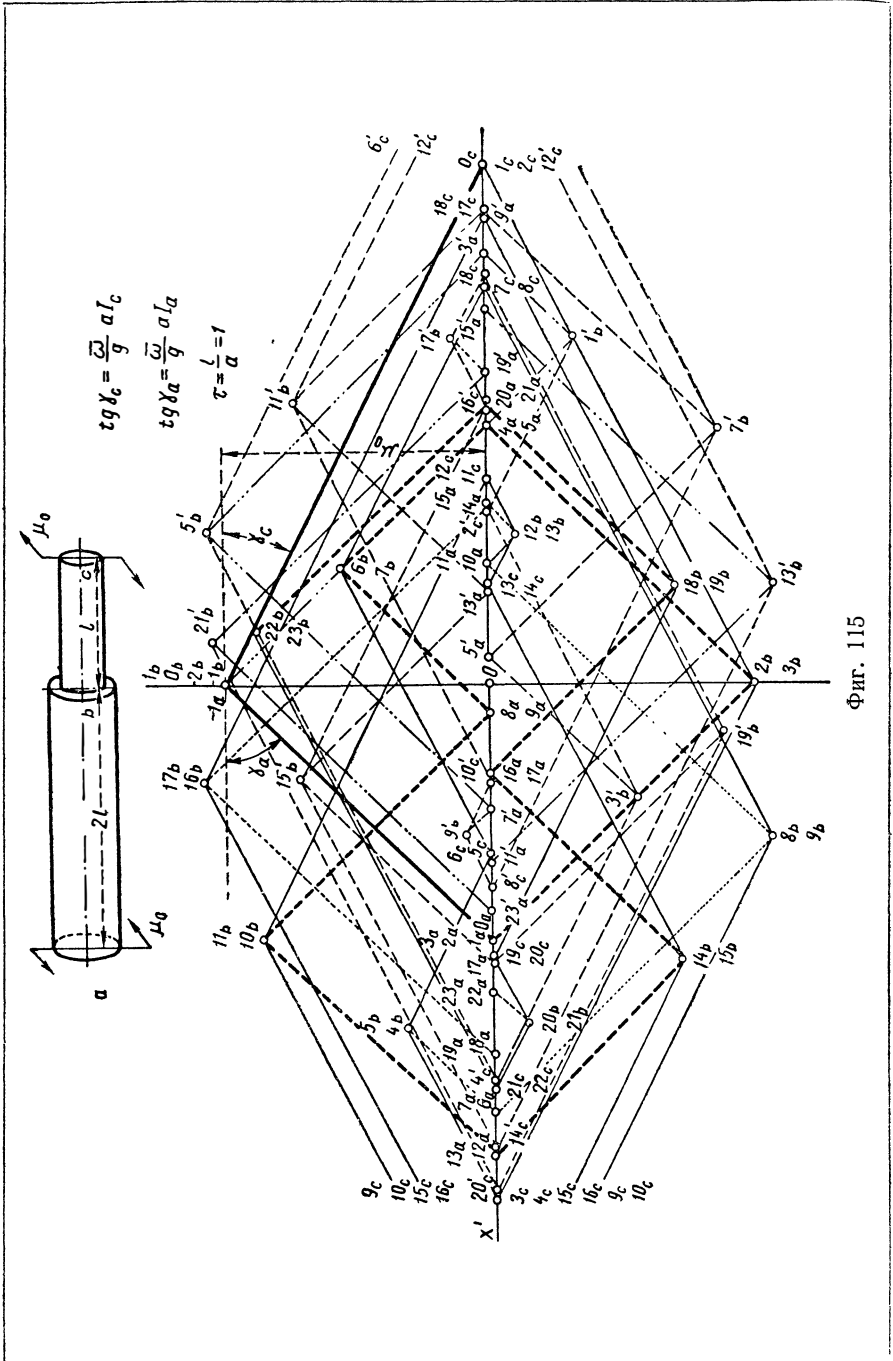
Перемещениям четырех наблюдателей между сечениями  $b$  и  $a$  будут соответствовать:

ломаная линия (показанная жирными штрихами)  $0_a 2_b 4_a 6_b 8_a 10_a 12_a 14_b 16_a 18_b 20_a 22_b$  (в вершинах этой же линии располагаются соответственные точки  $1_a 3_b 5_a 7_b 9_a 11_b 13_a 15_b 17_a 19_b 21_a 23_b$ );

ломаная линия (показанная точечным пунктиром)  $2_a 4_b 6_a 8_b 10_a 12_b 14_a 16_b 18_a 20_b 22_a$  (в вершинах этой же линии находятся соответственные точки  $3_a 5_b 7_a 9_b 11_a 13_b 15_a 17_b 19_a 21_b 23_a$  для моментов времени  $3 - \varepsilon$ ,  $5 - \varepsilon$ , ... 23 -  $\varepsilon$ );

ломаная линия (показанная пунктиром с точкой) —  $1_a 1_b 3'_a 5'_b 7'_a 9'_b 11'_a 13'_b 15'_a 17'_b 19'_a 21'_b 23'_a$  (где апостроф обозначает так же, как и ранее, что строго говоря, указанные режимы соответствуют моментам времени, увеличенным на бесконечно малый интервал  $\varepsilon$ );

ломаная линия (показанная длинными штрихами)  $3'_b 5'_a 7'_b 9'_a 11'_b 13'_a 15'_b 17'_a 19'_b$ ; апостроф здесь обозначает, что эти режимы существуют в моменты времени, увеличенные на бесконечно малую величину  $\varepsilon$ , в то время как первая линия (представленная жирными штрихами), вершины которой имеют те же обозначения без апострофа, определяет режимы для моментов времени, уменьшенных на величину  $\varepsilon$ .



Фиг. 115

Таблица к фиг. 115

При достиже- нии сечения	в момент времени	наблюдатель, начавший дви- жение из се- чения	в момент времени	установит, что искомая соответствен- ная точка на- ходится на прямой с углу- вым коэффи- циентом	проходящей через соот- ветственную точку	и на характе- ристической кривой	т. е. в точке пересечения
<i>c</i>	нуль	<i>b</i>	-1	- tg $\gamma_c$	-1 <i>b</i>	<i>x'x</i>	0 <i>c</i>
<i>c</i>	1	<i>b</i>	нуль	- tg $\gamma_c$	0 <i>b</i>	<i>x'x</i>	1 <i>c</i>
<i>c</i>	2 - $\epsilon$	<i>b</i>	1 - $\epsilon$	- tg $\gamma_c$	1 <i>b</i>	<i>x'x</i>	2 <i>c</i>
<i>a</i>	нуль	<i>b</i>	-2	- tg $\gamma_a$	-2 <i>b</i>	<i>x'x</i>	0 <i>a</i>
<i>a</i>	1	<i>b</i>	-1	+ tg $\gamma_a$	-1 <i>b</i>	<i>x'x</i>	1 <i>a</i>
<i>a</i>	2	<i>b</i>	нуль	+ tg $\gamma_a$	0 <i>b</i>	<i>x'x</i>	2 <i>a</i>
<i>b</i>	1 + $\epsilon$	<i>c</i>	нуль + $\epsilon$	+ tg $\gamma_c$	0 <i>c</i>		1' <i>b</i>
		<i>a</i>	-1 + $\epsilon$	+ tg $\gamma_a$	-1 <i>a</i>		
<i>c</i>	2 + $\epsilon$	<i>b</i>	1 + $\epsilon$	- tg $\gamma_c$	1' <i>b</i>	<i>x'x</i>	2' <i>c</i>
<i>b</i>	2	<i>c</i>	1	+ tg $\gamma_c$	1 <i>c</i>		2 <i>b</i>
		<i>a</i>	нуль	- tg $\gamma_a$	0 <i>a</i>		
<i>c</i>	3	<i>b</i>	2	- tg $\gamma_c$	2 <i>b</i>	<i>x'x</i>	3 <i>c</i>
<i>a</i>	3 - $\epsilon$	<i>b</i>	1 - $\epsilon$	+ tg $\gamma_a$	1' <i>b</i>	<i>x'x</i>	3 <i>a</i>
<i>a</i>	3 + $\epsilon$	<i>b</i>	1 + $\epsilon$	+ tg $\gamma_a$	1 <i>b</i>	<i>x'x</i>	3 <i>a</i>
<i>b</i>	3 - $\epsilon$	<i>c</i>	2 - $\epsilon$	+ tg $\gamma_c$	2 <i>c</i>		3 <i>b</i>
		<i>a</i>	1 - $\epsilon$	- tg $\gamma_a$	1 <i>a</i>		
<i>b</i>	3 + $\epsilon$	<i>c</i>	2 + $\epsilon$	+ tg $\gamma_c$	2' <i>c</i>		3' <i>b</i>
		<i>a</i>	1 + $\epsilon$	- tg $\gamma_a$	1 <i>a</i>		
<i>c</i>	4 - $\epsilon$	<i>b</i>	3 - $\epsilon$	- tg $\gamma_c$	3 <i>b</i> '	<i>x'x</i>	4 <i>c</i>
<i>c</i>	4 + $\epsilon$	<i>b</i>	3 + $\epsilon$	- tg $\gamma_c$	3 <i>b</i>	<i>x'x</i>	4 <i>c</i>
<i>a</i>	4	<i>b</i>	2	+ tg $\gamma_a$	2 <i>b</i>	<i>x'x</i>	4 <i>a</i>
<i>b</i>	4	<i>a</i>	2	- tg $\gamma_a$	2 <i>a</i>		4 <i>b</i>
		<i>c</i>	3	+ tg $\gamma_c$	3 <i>c</i>		
<i>c</i>	5	<i>b</i>	4	- tg $\gamma_c$	4 <i>b</i>	<i>x'x</i>	5 <i>c</i>
<i>a</i>	5 - $\epsilon$	<i>b</i>	3 - $\epsilon$	+ tg $\gamma_c$	3 <i>b</i> '	<i>x'x</i>	5 <i>a</i> '
<i>a</i>	5 + $\epsilon$	<i>b</i>	3 + $\epsilon$	+ tg $\gamma_c$	3 <i>b</i>	<i>x'x</i>	5 <i>a</i>
<i>b</i>	5 - $\epsilon$	<i>a</i>	3 - $\epsilon$	- tg $\gamma_a$	3 <i>a</i>		5 <i>b</i>
		<i>c</i>	4 - $\epsilon$	+ tg $\gamma_c$	4 <i>c</i>		
<i>b</i>	5 + $\epsilon$	<i>a</i>	3 + $\epsilon$	- tg $\gamma_a$	3 <i>a</i> '		5' <i>b</i>
		<i>c</i>	4 + $\epsilon$	+ tg $\gamma_c$	4 <i>c</i> '		

При достиже- нии сечения	в момент времени	наблюдатель, начавший движение из сечения	в момент времени	установить, что искомая соответствен- ная точка находится на прямой с угле- вым коэффициентом	проходящей через соот- ветственную точку	и на харак- теристической кривой	т. е в точке пересечения
<i>c</i>	6 — ε	<i>b</i>	5 — ε	— tg γ <sub>c</sub>	5 <sub>b</sub>	<i>x'x</i>	6 <sub>c</sub>
<i>c</i>	6 + ε	<i>b</i>	5 + ε	— tg γ <sub>c</sub>	5' <sub>b</sub>	<i>x'x</i>	6' <sub>c</sub>
<i>a</i>	6	<i>b</i>	4	+ tg γ <sub>a</sub>	4 <sub>b</sub>	<i>x'x</i>	6 <sub>a</sub>
<i>b</i>	6	<i>a</i> <i>c</i>	4 5	— tg γ <sub>a</sub> + tg γ <sub>c</sub>	4 <sub>a</sub> 5 <sub>c</sub>		6 <sub>b</sub>
<i>c</i>	7	<i>b</i>	6	— tg γ <sub>c</sub>	6 <sub>b</sub>	<i>x'x</i>	7 <sub>c</sub>
<i>a</i>	7 — ε	<i>b</i>	5 — ε	+ tg γ <sub>a</sub>	5 <sub>b</sub>	<i>x'x</i>	7 <sub>a</sub>
<i>a</i>	7 + ε	<i>b</i>	5 + ε	+ tg γ <sub>a</sub>	5' <sub>b</sub>	<i>x'x</i>	7' <sub>a</sub>
<i>b</i>	7 — ε	<i>a</i> <i>c</i>	5 — ε 6 — ε	— tg γ <sub>a</sub> + tg γ <sub>c</sub>	5 <sub>a</sub> 6 <sub>c</sub>		7 <sub>b</sub>
<i>b</i>	7 + ε	<i>a</i> <i>c</i>	5 + ε 6 + ε	— tg γ <sub>a</sub> + tg γ <sub>c</sub>	5' <sub>a</sub> 6' <sub>c</sub>		7' <sub>b</sub>

Таблица к фиг. 115 позволяет проследить за построениями для всех соответственных точек в их последовательности до момента времени 7 в сечениях *a*, *b*, *c*. Для этого достаточно прочесть образуемую заголовками фразу, дополняя ее соответствующими каждой графе данными из горизонтальной строчки.

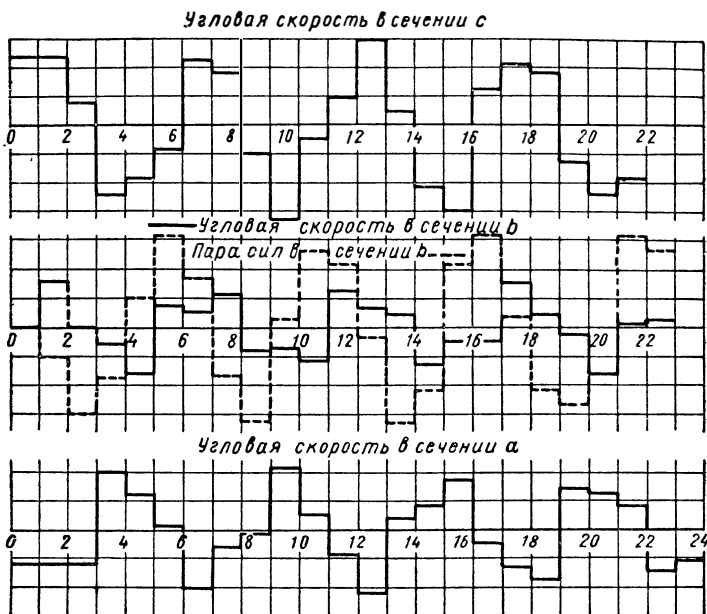
Графики изменений во времени скорости в сечениях *a*, *b*, *c* и крутящего момента в сечении *b* представлены на фиг. 116. Продолжительность периода времени, использованного при построении этих графиков, недостаточна для обнаружения ритма в колебаниях, и последние представляются поэтому беспорядочными.

Следует отметить, что если бы крутящий момент  $\mu_0$  был снят в сечениях *a* и *c* не одновременно, но разновременно внутри интервала времени, меньшего трех единиц, то построения и графики имели бы совершенно иной характер. Отсюда следует, что колебания зависят в сильной степени от начальных условий, а не только от величины момента  $\mu_0$ .

### НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ В ОТКРЫТОМ КАНАЛЕ

§ 78(99). Основные положения. При допущениях, обычно достаточно хорошо оправдывающихся в практике, исследование неустановившегося движения в открытых каналах приводит к графическим построениям, идентичным построениям в случае напорных трубопроводов. Изменение режима, возникшее в каком-либо сечении канала, распространяется в этом случае в форме относительно резкого повышения или понижения уровня воды, сопро-

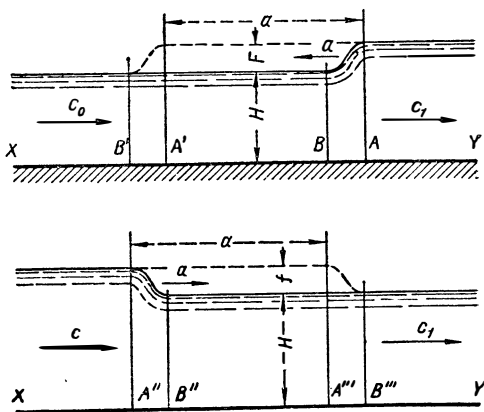
вождающихся одновременно изменениями скорости течения; распространение волны происходит со скоростью  $a$ .



Фиг. 116.

Если в сопоставлении с глубиной  $H$  канала высота волны незначительна, и если скорость течения  $c$  в канале много меньше скорости  $a$  распространения волны, рассмотрение задачи можно произвести следующим образом.

Рассмотрим (фиг. 117) канал шириной  $b$ , в котором на участке  $AB$  происходит изменение скорости течения от величины  $c_0$  до  $c_1$ , причем уровень воды повышается на величину  $F$ . Через секунду аналогичное изменение произойдет на участке  $A'B'$  на расстоянии  $a$ , равном скорости распространения волны<sup>1</sup>. Измене-



Фиг. 117.

<sup>1</sup> В действительности скорость  $a$  измеряется относительно воды, и скорость перемещения гребня волны относительно берега будет  $a \pm c$ ; однако обычно  $c$  пренебрежимо мало по сравнению с  $a$ .

ние количества движения за одну секунду  $\left(\frac{\bar{\omega}}{g} abH\right)(c_0 - c_1)$  уравновешивается силой  $(\omega F)bH^*$ , возникшей вследствие повышения уровня, откуда

$$F = a \frac{(c_0 - c_1)}{g}. \quad (1)$$

Аналогично, если скорость  $c_1$  изменяется до значения  $c$  сначала на участке  $A''B''$  (сопровождаясь повышением уровня на величину  $f$ ), то через секунду это изменение будет иметь место на участке  $A'''B'''$ ; поскольку сила равна теперь —  $(\omega f)bH$ , получим

$$-f = a \frac{(c_1 - c)}{g}; \quad (2)$$

сложив уравнения (1) и (2), найдем

$$\frac{a}{g}(c_0 - c) = F - f$$

или

$$\frac{a}{gS}(Q_0 - Q) = F - f, \quad (3)$$

где  $S$  — сечение канала; в то же время имеем

$$h - H = F + f, \quad (4)$$

где  $h$  — глубина воды в канале после встречи двух волн; уравнения (3) и (4) совпадают с уравнениями движения в напорном трубопроводе.

С другой стороны, объем жидкости  $(c_0 - c_1)bH^{**}$ , равный разности значений расхода в сечениях  $B$  и  $B'$ , равняется объему, образованному повышением  $F$  уровня на участке длиной  $a$ , т. е.

$$(c_0 - c_1)bH = abF,$$

отсюда после подстановки  $F$  по уравнению (1) получим

$$a = \sqrt{gH}. \quad (5)$$

Уравнения (3) и (4), будучи идентичными уравнениями движения в напорном трубопроводе, приводят к одинаковому в обоих случаях результату, выражаемому следующим законом линейных изменений.

Для наблюдателя, перемещающегося со скоростью  $a$ , соответственные точки режима находятся на прямой с угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{a}{gS}$ , если наблюдатель перемещается в направлении по течению и  $\operatorname{tg} \gamma = +\frac{a}{gS}$  при перемещении в направ-

\* Без учета силы давления на лбе  $F$  волны.

\*\* Получаемое, пренебрегая величиной  $F$  относительно  $H$ .

лении против течения. Названные прямые проходят через соответственную точку для сечения выбытия наблюдателя в момент его выбытия из этого сечения.

Ординатами графика будут теперь значения глубины воды в канале. Уравнение (5) показывает, что скорость распространения волны меняется в зависимости от глубины и мы можем ее рассматривать как постоянную только в случае, если высота  $F$  волны пренебрежимо мала по сравнению с первоначальной глубиной  $H$ .

Отметим, что точный расчет изменений режима в каналах (без каких-либо из оговоренных выше допущений), производимый графическим способом, был предложен М. Крайа в работах, опубликованных в журнале «Nouvelle Blanche». Применяемые им построения, очевидно, более сложны, чем предлагаемое нами; однако их преимущество проявляется в случаях, когда названные выше допущения не оправдываются. Добавим, что Крайа дал очень ясное изложение своего метода, причем он применил исключительно рассуждения, основывающиеся на физической сущности процесса; в силу этого метод Крайа легко усваивается любым инженером, избавляя его от необходимости прибегать к математическому аппарату, хотя метод и явился следствием результатов, получаемых применением этого аппарата.

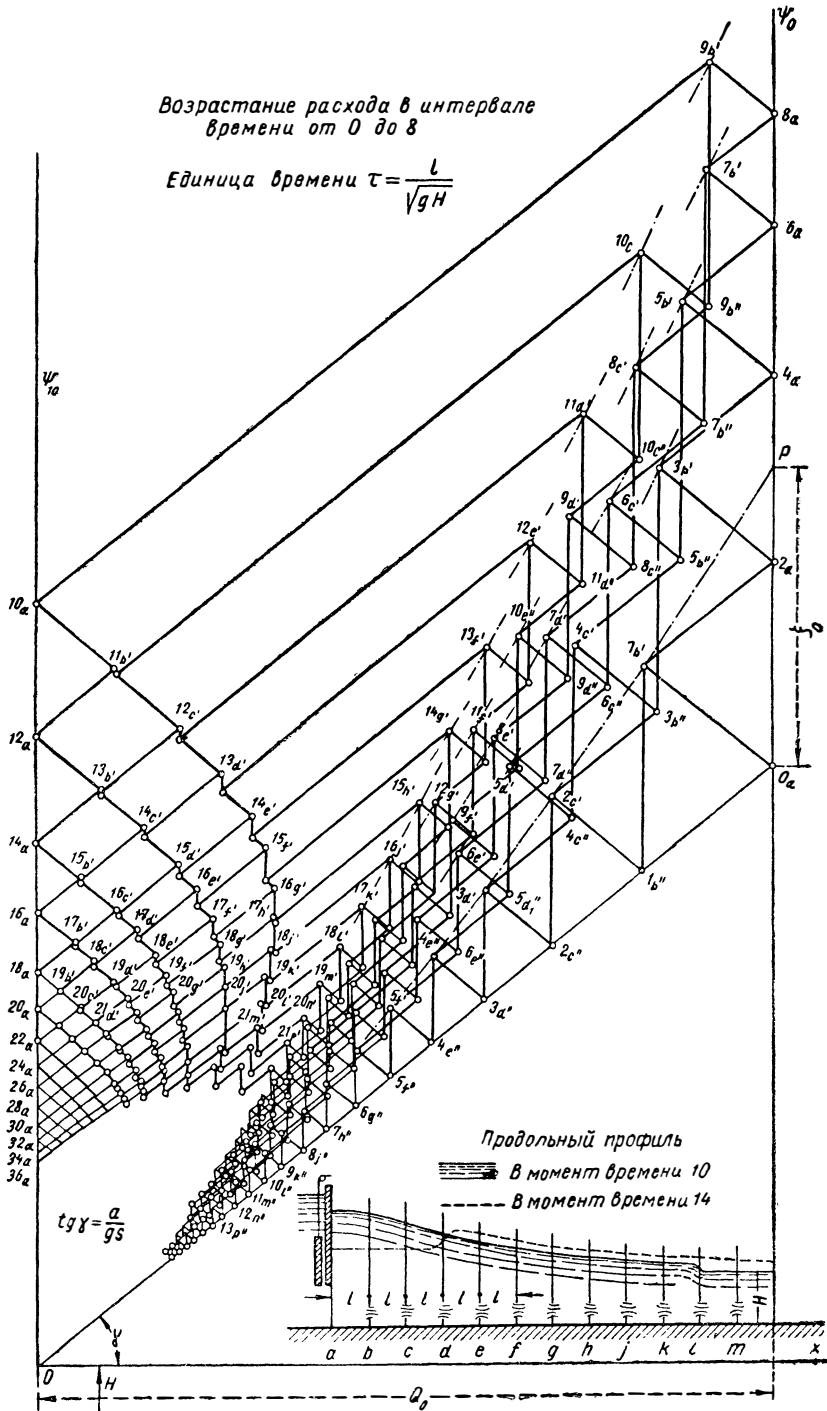
В общем Крайа для значительно более сложного случая течения в каналах решает задачу методом, обладающим теми же качествами, как излагаемый нами графический метод расчетов в более простом случае течения в напорных трубопроводах; метод Крайа окажется очень плодотворным в гидравлике безнапорных течений; мы ограничимся здесь только одним примером применения более простого, но приближенного метода, излагаемого в данной книге.

**§ 79(100). Внезапное увеличение и внезапное уменьшение расхода воды в канале.** Пусть в начальном сечении  $a$  канала  $ax$  (фиг. 118) расход внезапно возрастает на величину  $Q_0$ , затем расход сохраняется постоянным в течение некоторого промежутка времени  $T$ , после чего также внезапно возвращается к своему первоначальному значению (это соответствует, например, включению и затем остановке гидроэлектростанции). Задача состоит в том, чтобы найти изменения в зависимости от времени профиля поверхности воды в канале или в реке. Для того чтобы учесть потери напора, представим себе, что на взаимных между собой расстояниях  $l$  в потоке установлены диафрагмы, потери напора в которых равны потерям на трение на всей длине потока. В результате этого профиль будет ступенчатый (действительный профиль является пределом ступенчатого). За единицу времени принимаем величину  $\tau = \frac{l}{a}$ , соответствующую времени пробега волны между двумя последовательными диафрагмами.



Возрастание расхода в интервале  
времени от 0 до 8

$$\text{Единица времени } \tau = \frac{L}{\sqrt{gH}}$$



Фиг. 118.

Таблица к фиг. 118

При достиже- нии сечения	в момент времени	наблюдатель, начавший движение из пункта	в момент времени	установит, что искровая соот- ветственная точка лежит на прямой с угловым коэф- фициентом	проходящей через соот- ветственную точку	увеличенную на потери напора	и на харак- теристической кривой,	т. е. в их пе- ресечении	чем опреде- ляется также точка
<i>a</i>	0	<i>b</i>	—1	+ tg γ	0		Ψ <sub>0</sub>	0 <sub>a</sub>	
<i>b</i>	1	{ <i>a</i> <i>c</i>	0 0	— tg γ + tg γ	0 <sub>a</sub> 0	ε		1 <sub>b'</sub>	1 <sub>b''</sub>
<i>a</i>	2	<i>b</i>	1	+	1 <sub>b'</sub>		Ψ <sub>0</sub>	2 <sub>a</sub>	
<i>c</i>	2	{ <i>b</i> <i>d</i>	1 1	— +	1 <sub>b''</sub> 0	ε		2 <sub>c'</sub>	2 <sub>c''</sub>
<i>b</i>	3	{ <i>a</i> <i>c</i>	2 2	— +	2 <sub>a</sub> 2 <sub>c</sub>		Ψ <sub>0</sub>	3 <sub>b'</sub> 4 <sub>a</sub>	3 <sub>b''</sub>
<i>a</i>	4	<i>b</i>	3	+	3 <sub>b'</sub>	ε		4 <sub>a</sub>	
<i>d</i>	5	{ <i>c</i> <i>e</i>	2 2	— +	2 <sub>c''</sub> 0	ε		3 <sub>d'</sub>	3 <sub>d''</sub>
<i>c</i>	4	{ <i>b</i> <i>d</i>	3 3	— +	3 <sub>b''</sub> 3 <sub>d'</sub>	ε		4 <sub>c'</sub>	4 <sub>c''</sub>
<i>b</i>	5	{ <i>a</i> <i>c</i>	4 4	— +	4 <sub>a</sub> 4 <sub>c'</sub>	ε		5 <sub>b'</sub>	5 <sub>b''</sub>
<i>a</i>	6	<i>b</i>	5	+	5 <sub>b'</sub>		Ψ <sub>0</sub>	6 <sub>a</sub>	
<i>e</i>	4	{ <i>d</i> <i>f</i>	3 3	— +	3 <sub>d''</sub> 0	ε		4 <sub>c'</sub>	4 <sub>c''</sub>
<i>d</i>	5	{ <i>c</i> <i>e</i>	4 4	— +	4 <sub>c''</sub> 4 <sub>e'</sub>	ε		5 <sub>d'</sub>	5 <sub>d''</sub>
<i>c</i>	6	{ <i>b</i> <i>d</i>	5 5	— +	5 <sub>b'</sub> 5 <sub>d'</sub>	ε		6 <sub>c'</sub>	6 <sub>c''</sub>
<i>b</i>	7	{ <i>a</i> <i>c</i>	6 6	— +	6 <sub>a</sub> 6 <sub>c'</sub>	ε		7 <sub>b'</sub>	7 <sub>b''</sub>
<i>a</i>	8	<i>b</i>	7	+	7 <sub>b'</sub>		Ψ <sub>0</sub>	8 <sub>a</sub>	
<i>f</i>	5	{ <i>e</i> <i>g</i>	4 4	— +	4 <sub>e''</sub> 0	ε		5 <sub>f'</sub>	5 <sub>f''</sub>
<i>e</i>	6	{ <i>d</i> <i>f</i>	5 5	— +	5 <sub>d''</sub> 5 <sub>f'</sub>	ε		6 <sub>e'</sub>	6 <sub>e''</sub>
<i>d</i>	7	{ <i>c</i> <i>e</i>	6 6	— +	6 <sub>c''</sub> 6 <sub>e'</sub>	ε		7 <sub>d'</sub>	7 <sub>d''</sub>
<i>c</i>	8	{ <i>b</i> <i>d</i>	7 7	— +	7 <sub>b''</sub> 7 <sub>d'</sub>	ε		8 <sub>c'</sub>	8 <sub>c''</sub>
<i>b</i>	9	{ <i>a</i> <i>c</i>	8 8	— +	8 <sub>a</sub> 8 <sub>c'</sub>	ε		9 <sub>b'</sub>	9 <sub>b''</sub>
<i>a</i>	10	<i>b</i>	9	+	9 <sub>b'</sub>		Ψ <sub>10</sub>	10 <sub>a</sub>	

Пусть начальный режим определяется значениями  $Q=0$ ,  $h=H$ ; его соответственной точкой будет точка  $O$  на фиг. 118; характеристиками для всех наблюдателей, начинающих движение в сечениях  $b, c, d \dots m$  в момент времени, когда данный режим здесь еще существует, будет прямая  $OO_A$ , имеющая угловой коэффициент  $+\frac{a}{gS}$  (где  $S$  — сечение канала, которое мы предполагаем прямоугольным и  $a=\sqrt{gH}$ ). При прохождении наблюдателя через диафрагму уровень воды меняется на величину  $kq^2$  и соответственная точка перейдет на параболу  $OP$ , показанную на фиг. 118 пунктиром с точкой, имеющую ординатой  $\xi = KQ_0^2$ , если абсцисса равняется  $Q_0$ . Для каждого режима в сечениях  $b, c, d \dots m$  будут существовать две соответственные точки, имеющие одну и ту же абсциссу, одна из которых находится на характеристической прямой, справедливой для нижнего бьефа диафрагмы, а другая же — на параболе, справедливой для верхнего бьефа. Первой точке мы присвоим индекс  $'$ , а второй — индекс  $''$ .

Читатель, усвоивший принципы построения в предыдущих двух частях данной книги, легко сможет проследить за построением в настоящей главе по прилагаемой таблице.

Мы ограничиваемся здесь задачей нахождения соответственных точек, разделенных интервалами времени  $2\tau$ , в предположении, что расход  $Q_0$  возникает в сечении  $a$  в момент времени нуль, прекращаясь в момент времени  $\delta$ .

Обозначим вертикаль, проходящую через абсциссу  $Q_0$  и являющуюся характеристической кривой в сечении  $a$  в течение времени от нуля до момента времени  $\delta$  включительно, как  $\Psi_0$ ; вертикаль, проходящую через абсциссу нуль и являющуюся характеристической кривой в сечении  $a$  в момент времени  $\delta + \varepsilon$ , и в дальнейшем обозначим через  $\Psi_{10}$ .

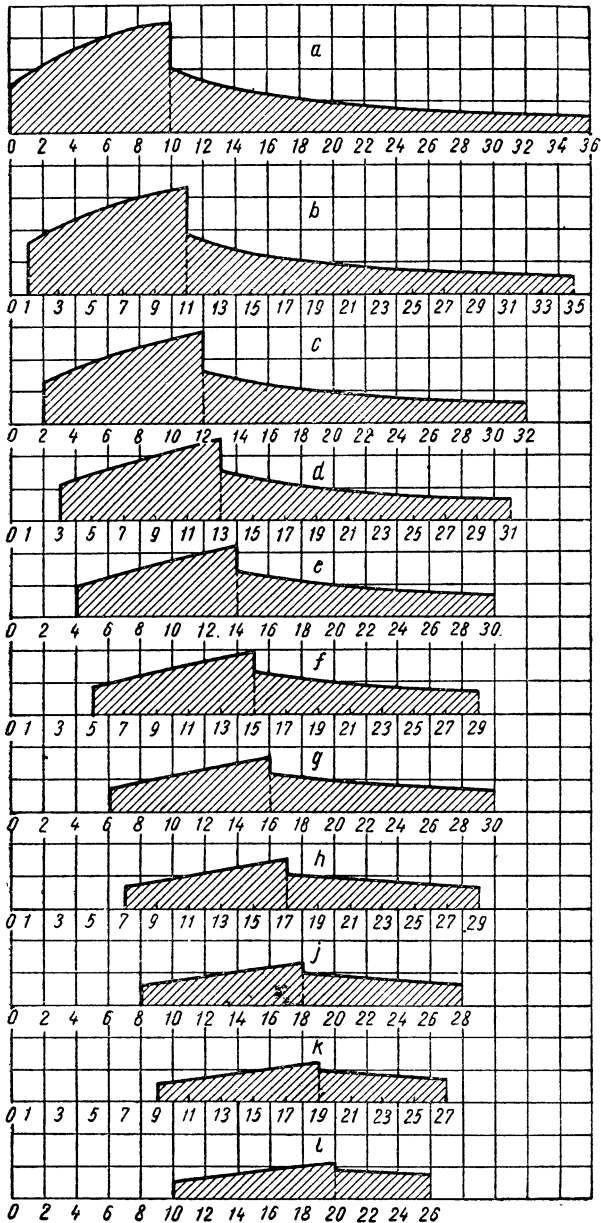
Наилучшим является порядок построений, указанный в таблице к фиг. 118. Данная таблица доведена до момента времени 10 в сечении  $a$ , но так как дальнейшее построение будет идентичным предшествующим, то продолжение не представит для читателя трудностей.

Беря соответственные точки одного и того же индекса, можно построить (фиг. 119) графики изменения глубины волны<sup>1</sup> в канале в зависимости от времени для сечений  $a, b, c, \dots, m$ . Из этих кривых можно видеть роль потерь напора в изменении формы волны во времени и затухании волны по длине потока.

Опыты, произведенные в экспериментальном канале лаборатории Гидротехнического общества Франции, поставленные в соответствии со схемой фиг. 118, точно подтвердили результаты, полученные при построениях, представленные в виде графиков на фиг. 119.

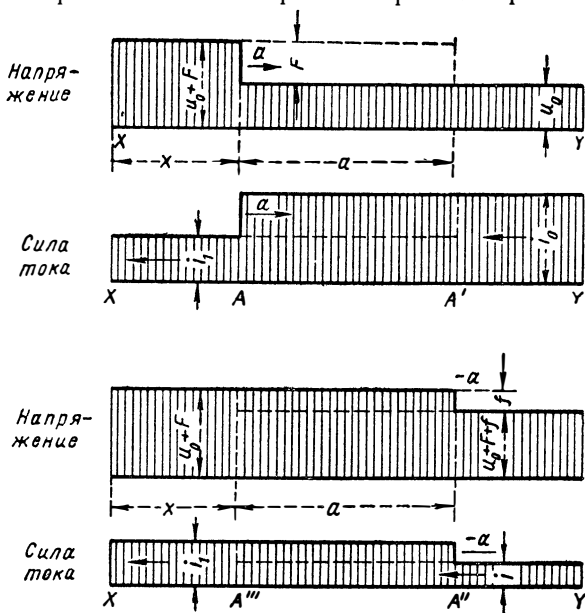
<sup>1</sup> На фиг. 119 ошибочно указано «Глубина воды...» (Прим. ред.).

Глубина воды в зависимости от времени в сечении а, в.....л



Фиг. 119.

§ 80(101). Основные положения. Пусть отрезок  $XU$  на фиг. 120 соответствует проводнику, в котором циркулирует электрический ток силой  $i_0$  при напряжении  $u_0$ . Если по какой-нибудь причине сила тока в сечении  $X$  изменяется, сделавшись равной  $i_1$ , то напряжение также изменится от значения  $u_0$  до  $u_0 + F$ ; эти изменения будут распространяться в направлении к сечению  $Y$  с некоторой постоянной скоростью  $a$ . На верхних чертежах фиг. 120 такое из-



Фиг. 120.

менение показано сначала в сечении  $A$  и через одну секунду в сечении  $A'$ ; таким образом  $AA' = a$ .

В течение одной секунды через сечение  $A'$  в проводник поступает  $i_0$  ампер, а через сечение  $A$  выходит  $i_1$  ампер. Таким образом  $[(i_0 - i_1) \times 1 \text{ сек.}]$  кулон аккумулируется на участке линии  $AA' = a$ .

Обозначим через  $c$  — емкость единицы длины проводника; тогда

$$F = \frac{(i_0 - i_1) \times 1}{ac}. \quad (1)$$

Если некоторая причина приведет затем к изменению силы тока от значения  $i_1$  до  $i$  в сечении  $Y$ , то напряжение здесь изменится от величины  $u_0 + F$  до значения

$$u = u_0 + F + f. \quad (2)$$

Это изменение будет распространяться в направлении к сечению  $X$  также со скоростью  $a$ . В этом случае через сечение  $A''$  поступает ток силой  $i$  ампер, а в сечении  $A'''$  сила тока будет иметь величину  $i_1$ . Емкость участка  $A''A'''$  длиной в  $a$  метров уменьшится при этом на  $(i_1 - i)$  кулон, что поведет к снижению напряжения на  $f$  вольт, причем

$$-f = \frac{(i_1 - i) \times 1}{ac}. \quad (3)$$

Складывая уравнения (1) и (3), найдем

$$\frac{1}{ac}(i_0 - i) = F - f. \quad (4)$$

Кроме того, из уравнения (2) следует

$$(u - u_0) = F + f. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) определяют изменения режима в электрическом проводнике, характеризуемого вольтами и амперами. Как видно, это изменение является следствием прохождения волн напряжения  $F$  и  $f$ , распространяющихся со скоростью  $a$  в противоположных направлениях.

**§ 81(102). Определение скорости  $c$ .** Емкость  $ac$  отрезка проводника, вдоль которого распространяется изменение режима в течение одной секунды, определяется из уравнения (1).

Но этот отрезок обладает также самоиндукцией, равной  $l$  на единице длины и  $al$  на отрезке длины проводника, в котором произошло изменение силы тока, равное  $(i_0 - i_1)$ . Произведение самоиндукции на изменение силы тока в единицу времени равняется изменению напряжения. Таким образом,

$$al(i_0 - i_1) = F, \quad (6)$$

где  $F$  — то изменение напряжения, которым обуславливается также изменение емкости  $ac$ . Производя деление (1) на (6), найдем

$$a = \frac{1}{\sqrt{lc}}, \quad (7)$$

чем и определяется величина скорости распространения электрических возмущений.

Подставив эту величину в уравнение (4), получим

$$\sqrt{\frac{l}{c}}(i_0 - i) = F - f, \quad (8)$$

где  $\frac{l}{c}$  является тем, что электрики называют импеданцем (обозначаемым через  $z$ ).

**§ 82(103). Характеристические прямые.** Пусть мы имеем проводник  $XU$  (фиг. 121), начальным режимом в котором были значения  $u_0$  и  $i_0$  напряжения и силы тока; пусть в некоторой точке  $M$  в момент времени  $t$  зарегистрирован режим  $u_{tm}$ ,  $i_{tm}$ . Этот режим



Уравнения (13) и (16) приводят к следующему простому и общему физическому закону.

Наблюдатель, перемещающийся вдоль электрического проводника со скоростью  $a$ , констатирует, что зависимость между напряжением и силой тока  $i$  на пути его следования будет представляться прямой, имеющей угловой коэффициент  $\pm \sqrt{\frac{l}{c}}$  (в зависимости от того, перемещается ли он в направлении, совпадающем с положительным направлением тока или в противоположном) и проходящей через соответственную точку режима для места выбытия наблюдателя в момент выбытия.

Графический метод заключается в последовательном применении этого закона. Для того чтобы наблюдатель мог определить первую прямую, необходимо и достаточно, чтобы он начинал движение из точки, где имеет место начальный режим  $u_0 i_0$ . Затем, когда наблюдатель достигает конца проводника, где дана функция  $u = \Psi_1(i)$  зависимости между напряжением и силой тока, отмечаемая им соответственная точка режима будет на пересечении первой прямой и кривой, представляющей функцию  $\Psi_1$ . Для того же наблюдателя, проделывающего обратный путь, новая прямая проходит через только что найденную точку, имея тот же угловой коэффициент, но с обратным знаком. Когда наблюдатель достигает второго конца проводника, соответственная точка будет на пересечении второй прямой и кривой  $u = \Psi_2(i)$ , соответствующей зависимости между напряжением и силой тока в этом сечении проводника; этим определяется третья прямая, которая пройдет через последнюю точку и будет параллельна первой прямой, и т. д.

Приводимые ниже примеры помогут освоить изложенные основы построений.

## Применения

**§ 83(104). Включение аккумулятора на сопротивление, расположенное в конце линии** (фиг. 122, *a*). Начальному режиму ( $u_0 = E$ ,  $i_0 = 0$ ) соответствует на фиг. 122, *b* точка  $M_0$ ; за единицу измерения времени при построениях примем величину  $\tau = \frac{l}{a}$ ; за начало отсчетов времени примем момент включения прерывателя в сечении  $B$ .

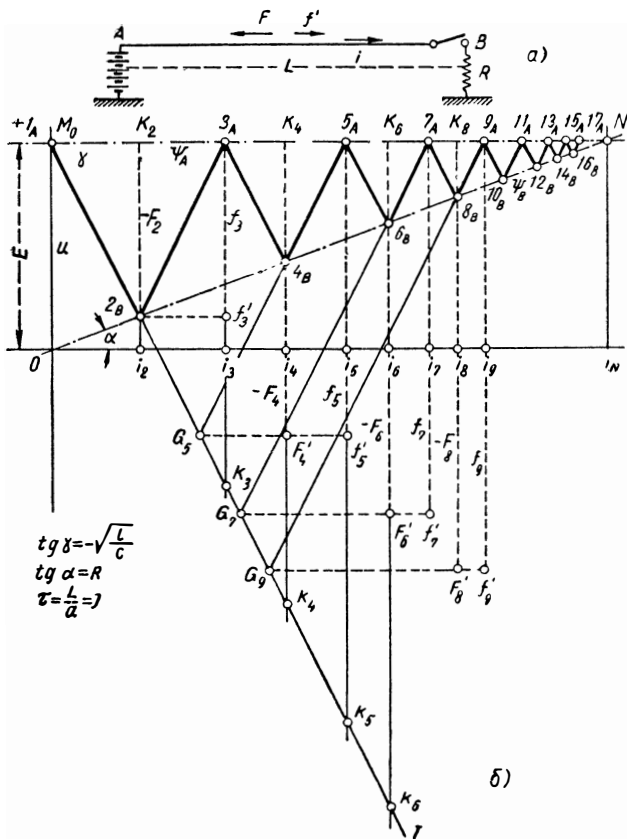
Представим себе наблюдателя, выбывающего из сечения  $A$  в момент времени 1 — последний момент, когда в этом сечении еще сохраняется начальный режим. Характеристикой для этого наблюдателя будет прямая  $M_0 T$  с угловым коэффициентом  $\left(-\sqrt{\frac{l}{c}}\right)$  проходящая через точку  $M_0$ .

Прибывая в сечение  $B$  в момент времени 2, наблюдатель найдет на этом конце прерыватель включенным и условие  $u = Ri$ , чему соответствует в качестве зависимости между величинами  $u$



и  $i$  прямая — пусть  $ON$ . Соответственная точка  $2_B$  должна находиться на пересечении прямых  $M_0T$  и  $ON$ , ее координаты определяют напряжение и силу тока в сечении  $B$  в момент времени 2.

При обратном перемещении того же наблюдателя характеристической будет прямая  $2_B 3_A$ , проходящая через точку  $2_B$  и имеющая тот же угловой коэффициент по величине, что предшествующая прямая, но с обратным знаком. Прибывая в сечение  $A$  в мо-



Фиг. 122.

мент времени 3, наблюдатель находит здесь аккумулятор, чем обуславливается здесь (в качестве заданий функции  $\Psi_B$ ) постоянное значение напряжения, изображаемое горизонтальной линией ординаты  $E$ . Соответственной точкой  $3_A$ , определяющей напряжение и силу тока в момент времени 3 в сечении  $A$ , будет точка пересечения прямой  $2_B 3_A$  с этой горизонтальной линией. При обратном перемещении наблюдателя к сечению  $B$  характеристическая прямая проходит через соответственную точку  $3_A$ , угловой коэффициент этой прямой вновь меняет знак; так мы находим

прямую  $3_A 4_B$ , параллельную прямой  $M_0T$ . Когда наблюдатель прибывает в сечение  $B$ , функция  $\Psi_B$  будет представлена по-прежнему прямой  $ON$ , соответственной точкой будет точка  $4_B$ , определяющая напряжение и силу тока в момент времени  $4$  в сечении  $B$ .

Дальнейшие пояснения к построениям не нужны, так как уже очевидно, что последовательные перемещения наблюдателя в прямом и обратном направлениях приводят к получению при построениях ломаной линии. Ее вершины, которые попеременно расположены на прямых  $\Psi_B$  и  $\Psi_A$ , дают значения напряжения и силы тока в конечных сечениях, определяемые для моментов времени, разделенных интервалами  $2\tau$ .

Отметим, что при описанных построениях нет необходимости отмечать величину волн  $F$  и  $f$ , за которыми следует наблюдатель. Однако, если бы такая необходимость возникла, величину волн можно определить с чертежа; именно, находим (фиг. 122, б) следующие значения:

$$\text{в момент времени 2 в сечении } B : F_2 = -\overline{K_2 2_B};$$

в момент времени 3 в сечении  $A : f_3 = +3_A f_3 = -F_2$  (в данном частном случае);

$$\text{в момент времени 4 в сечениях } B : F_4 = -\overline{K_4 F_4};$$

в момент времени 5 в сечении  $A : F_5 = 5_A f_5 = -F_4$  (в данном частном случае).

Легко усмотреть, что эти величины, будучи подставленными в уравнения (4) и (5), действительно определяют значения  $u$  и  $i$  в сечениях  $2_B, 3_A, 4_B, 5_A, \dots$ ; такой контроль, однако, не нужен, поскольку существует полная идентичность между построениями ломаной линии, определяемой непосредственно величинами  $u$  и  $i$  и уравнениями (4) и (5), требующими знания величины волн.

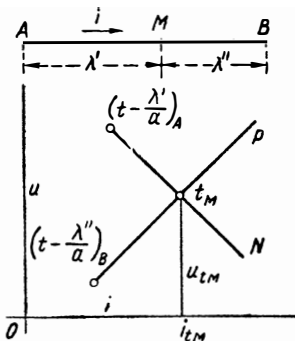
В рассматриваемом случае построение, производимое при условии  $R < \sqrt{\frac{l}{c}}$ , очевидно, должно привести асимптотически к точке  $N$ , т. е. режиму  $i = \frac{E}{R}$ .

Случай  $R > \sqrt{\frac{l}{c}}$  приводит к построениям, представленным на фиг. 123. Здесь также достигается асимптотически режим  $i = \frac{E}{R}$ , но это является результатом затухающих колебаний с периодом  $\frac{4L}{a}$ .

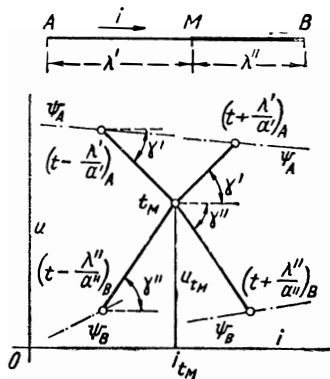
Наконец из построения на фиг. 124, выполненного для случая  $R = \sqrt{\frac{l}{c}}$ , следует, что установившийся режим достигается в сечении  $A$  уже в момент времени 3 прихода сюда волны, возникшей в момент включения прерывателя, а в сечении  $B$  в момент времени 4.



§ 86 (107). Случай, когда величины  $l$  и  $c$  меняются по длине проводника. Пусть отрезок  $AMB$  на фиг. 126 представляет проводник, параметрами которого будут  $l', c'$  на длине от сечения  $A$  до  $M$  и  $l'', c''$  на отрезке от  $M$  до  $B$ . Скорость распространения волн и, следовательно, следующих за ними наблюдателей будет  $\frac{1}{\sqrt{l'c'}} = \alpha'$  между сечениями  $A$  и  $M$  и  $\frac{1}{\sqrt{l''c''}} = \alpha''$  между сечениями  $M$  и  $B$ . Характеристические прямые будут



Фиг. 125.



Фиг. 126.

иметь угловые коэффициенты  $\operatorname{tg} \gamma' = \sqrt{\frac{l'}{c'}}$  между сечениями  $A$  и  $M$  и  $\operatorname{tg} \gamma'' = \sqrt{\frac{l''}{c''}}$  между сечениями  $M$  и  $B$ .

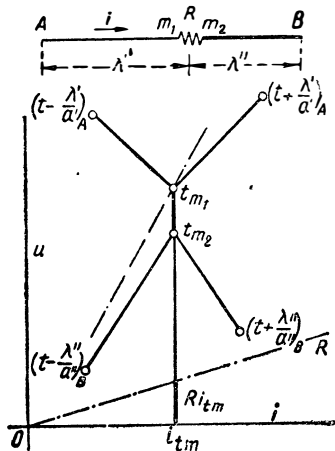
Пусть в граничных сечениях  $A$  и  $B$  заданы так же, как и ранее, зависимости  $\Psi_A$  и  $\Psi_B$ ; соответственные точки для этих сечений будут определяться аналогично тому, как это показано в предыдущих параграфах.

Для определения режима в сечении  $M$  наблюдатель, прибывая в это сечение, должен встретить здесь другого, перемещающегося в противоположном ему направлении. Так например, наблюдатель, выбывший из сечения  $A$  в момент времени  $(t - \frac{\lambda'}{\alpha'})$ , и наблюдатель, выбывший из сечения  $B$  в момент времени  $(t - \frac{\lambda''}{\alpha''})$  встретятся в сечении  $B$  в момент времени  $t$  и соответственной точкой будет точка  $t_M$ , на пересечении характеристических прямых, регистрируемых двумя названными наблюдателями. На обратном пути каждый из этих наблюдателей достигает сечений  $A$  и  $B$  в моменты времени  $(t + \frac{\lambda'}{\alpha'})$  и  $(t + \frac{\lambda''}{\alpha''})$ .

Во избежание большого увеличения количества наблюдателей, необходимых для таких совпадений, целесообразно, чтобы периоды

времени  $\frac{\lambda'}{a'}$  и  $\frac{\lambda''}{a''}$  имели общий, насколько возможно большой делитель. Это условие особенно существенно, когда количество отрезков линии с разными характеристиками больше двух<sup>1</sup>.

Отметим, что построение, показанное на фиг. 126, учитывает со всей строгостью и совершенно автоматически отражение и преломление в сечении  $M$ , что представляет большие трудности при аналитическом решении задачи.



Фиг. 127.

тока  $i_{tm}$ , при разнице в напряжениях  $Ri_{tm}$ , с учетом чего и должно произойдет построение. Прибавляя ординаты  $u=Ri$  прямой  $OR$  к ординатам характеристической прямой наблюдателя, перемещающегося из сечения  $B$  к сечению  $m_2$ , находят точку пересечения  $t_{m1}$ ; это и есть соответственная точка режима в сечении  $m_1$ ; соответственной точкой для сечения  $m_2$  будет точка  $t_{m2}$ , расположенная на этой же вертикали.

Полагая омическое сопротивление эквивалентным ряду точечных равноотстоящих, можно видеть, что описанное построение решает задачи о неустановившемся режиме в проводнике с учетом линейных сопротивлений, причем, очевидно, с тем большей точностью, чем большим будет число точечных сопротивлений.

**§ 88(109). Потери тока в проводнике.** В этом случае наблюдатели, встречающиеся в сечениях  $m_1m_2$  (фиг. 128), констатируют здесь одинаковое напряжение, но разницу в силе тока, равную  $gu$  (где  $g = \frac{1}{R}$ ). Отсюда вытекает следующее построение.

Увеличивая значения абсцисс прямой  $OK$ , соответствующей уравнению  $u=Ri$ , на величины абсцисс характеристической пря-

**§ 87 (108). Точечное сопротивление на линии.** Под «точечным» мы подразумеваем сопротивление отрезка очень короткого по сравнению с длиной всего проводника, без дроссельной катушки и не обладающего собственной емкостью.

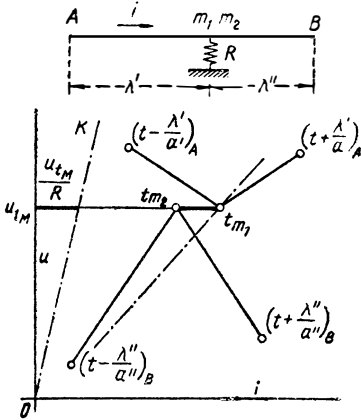
Наблюдатели, выбывшие в момент времени  $(t - \frac{\lambda'}{a'})$  из сечения  $A$  и в момент  $(t - \frac{\lambda''}{a''})$  из сечения  $B$

(фиг. 127), встречающиеся в момент времени  $t$  в сечениях  $m_1m_2$ , констатируют здесь одинаковую силу

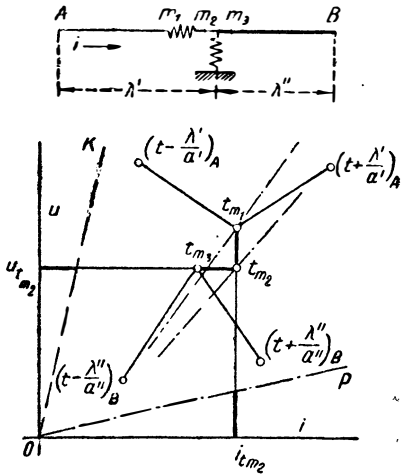
<sup>1</sup> Аналогичный случай, встретившийся в напорных трубопроводах турбин, был без всяких затруднений решен графическим способом для восьми отрезков; это было бы абсолютно невозможно сделать, применяя аналитические методы решения.

мой наблюдателя, перемещающегося из сечения  $B$  в направлении к  $m_2$ , находят прямую, которая пересекает в искомой точке  $t_{m1}$  характеристическую прямую наблюдателя, перемещающегося из сечения  $A$  в сечение  $m_1$ . На горизонтали, проходящей через точку  $t_{m1}$ , находится соответственная точка  $t_{m2}$  для сечения  $m_2$ .

Равномерные точечные потери на линии дают возможность получить с большой степенью приближения также решение для случая учета линейных потерь тока в проводнике.



Фиг. 128.



Фиг. 129.

Само собой разумеется, что в случае, когда на линии одновременно существуют потери и сопротивления, те и другие предполагают сконцентрированными в одном сечении; точки  $t_{m1}$   $t_{m2}$   $t_{m3}$  (фиг. 129) находят тогда суперпозицией двух описанных выше построений.

§ 89(110). Дроссельная катушка в конце линии (фиг. 130). В этом случае условие в граничном сечении  $B$  выражается дифференциальным уравнением

$$u = L \frac{di}{dt}. \quad (17)$$

Его можно учесть, оперируя конечными разностями вместо дифференциалов; пусть например,  $\Delta t = j$ ; тогда можно найти величину  $\Delta i$ , соответствующую интервалу времени  $j$ .

Пусть известна некоторая точка  $t_B$  и надо найти точку  $(t + j)_B$ . Последняя должна находиться на характеристической прямой  $(t + j - \tau)_A N$ , отмечаемой наблюдателем выбывающим из сечения  $A$  в момент времени  $(t + j - \tau)$ . Если  $u_t$  и  $u_{(t+j)}$  представляют напряжения для моментов времени  $t$  и  $(t + j)$  и величина  $j$  настолько незначительна, что можно полагать значения величины  $u$  меняющимися во времени линейно, то уравнение (17) может быть

записано в виде  $\frac{u_t + u_{(t+j)}}{2} \times j = L\Delta i$ , что даст зависимость величины  $u_{(t+j)}$  от изменения силы тока в виде

$$u_{t+j} = -u_t + \frac{L}{j} \Delta i. \quad (18)$$

Этому уравнению соответствует прямая  $t'_B R$ , проходящая через точку  $t'_B$ , симметричную точке  $t_B$  относительно оси абсциссы, имеющая угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \beta = 2L/j$ . Заметим, что эту прямую легче получить, если предварительно провести через точку  $t_B$  прямую  $t_B K$ , имеющую угловой коэффициент  $(-\operatorname{tg} \beta)$ . Определив таким образом точку  $K$ , находят прямую  $t'_B R$ . Эта последняя пересекает прямую  $(t+j-\tau)_A N$  в искомой точке  $(t+j)_B$ .

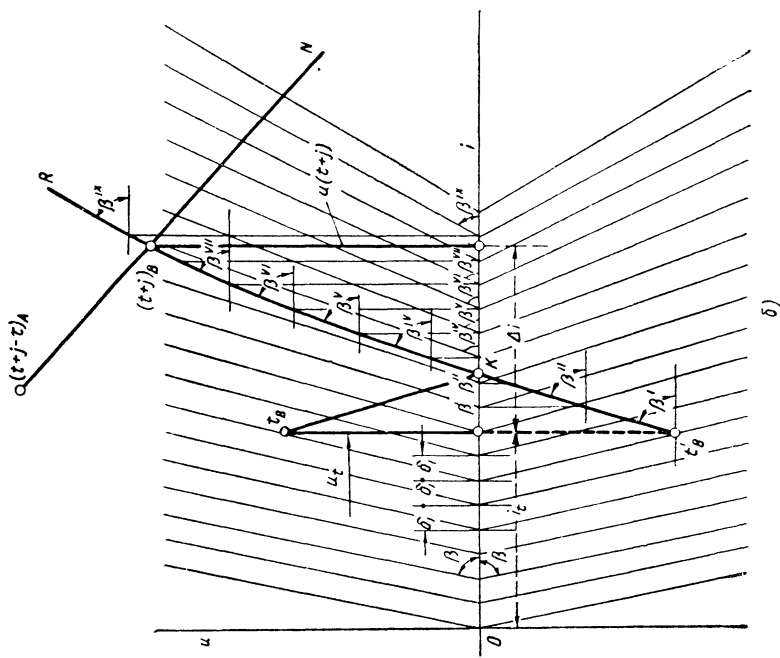
Для продолжения построений необходимо предположить несколько наблюдателей, количество которых должно быть достаточно, для того чтобы было обеспечено их прибытие в сечение  $B$  через интервалы времени, равные  $j$ . Эта последняя величина часто может быть принята равной значению  $\tau$ , что очень упрощает построения.

Отметим, что построение ломаной  $t_B K (t+j)_B$  идентично построению, соответствующему перемещениям наблюдателя в прямом и обратном направлениях вдоль фиктивной линии  $BB'$ , где точка  $B'$  соответствует нулевому потенциалу, импеданс  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  равен  $2L/j$  и время пробега вдоль  $BB'$  равняется  $\frac{j}{2}$ .

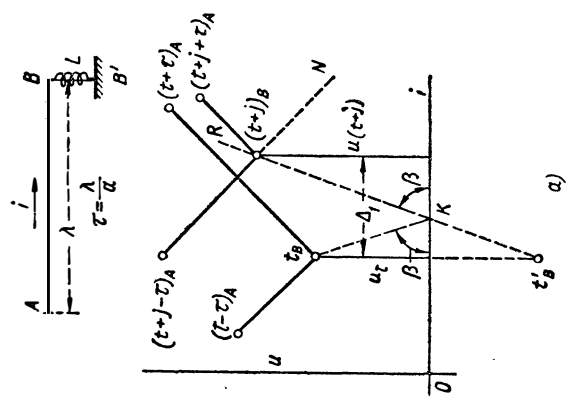
**Примечание.** Если дроссельная катушка имеет железный сердечник, коэффициент  $L$  является не постоянным, а переменным, в зависимости от силы тока в соответствии с законом намагничивания сердечника.

Это не изменяет описанное выше построение за исключением того, что для разных интервалов времени  $j$  угол  $\beta$  будет иметь различные значения в зависимости от средней силы тока  $i$  на протяжении интервала времени  $j$ .

В этом случае лучше всего поступить следующим образом (фиг. 130, в). На отдельном листе с одной и другой сторон от оси абсцисс строятся прямые под углами  $\pm \beta$ , причем  $\operatorname{tg} \beta = \pm 2L/j$ , давая при этом величине  $L$  различное значение в зависимости от  $i$ . Так получается форма, по конфигурации напоминающая рыбий костяк, вершины которого удалены друг от друга на расстоянии  $\delta i$ . Этот вспомогательный чертеж подкладывается под лист основных построений (выполняемых на кальке) таким образом, чтобы начала осей координат совпадали между собой. Пусть



б)



а)

Фиг. 130.



точка  $t_m$  определяет некоторый известный режим и  $t'_m$  симметрична ей. Уравнение (18) показывает, что напряжение в момент времени  $(t + j)$ , зависящее от увеличения силы тока  $\Delta i$ , должно отражаться точками на прямой, проходящей через точку  $t'_m$  и имеющей угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \beta$ . Эта прямая строится параллельно прямой рыбьего костяка, вершина которого имеет ту же абсциссу. По достижении же силой тока значения  $i + \delta i$  построение продолжают параллельно прямой рыбьего костяка, вершина которой имеет эту абсциссу; затем аналогичным путем доводят прямую до точки, определяющей силу тока  $i + 2\delta i$ , затем до точки  $i + 3\delta i$  и т. д. . . В конечном итоге получается кривая  $t'_m R$ , состоящая из касательных, угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \beta$  которых в каждой точке будет определен силой тока в этой точке. На этой кривой и находится искомая точка  $(t + j)_m$ .

Отметим, что упомянутая кривая пересекает ось абсцисс в точке  $K$ , которую можно найти, исходя из точки  $t_B$  и строя кривую  $t_B K$ , являющуюся симметричной  $t'_B K$ , с помощью лучей, имеющих отрицательный угловой коэффициент.

Очевидно, что переменность величины  $L$  будет учтена тем более строго, чем меньше интервал  $\delta i$ . Фактически достаточно, чтобы значение  $\delta i$  было порядка значения величины  $\Delta i$ .

## ДОБАВЛЕНИЕ

**§ 90(123). Общность графического метода.** Дадим небольшое дополнение к сделанному изложению с тем, чтобы, обратившись к аналитическим методам, вскрыть причины их бессилия по сравнению с геометрическими построениями, которым посвящена настоящая книга.

В механических задачах, которые мы рассматривали, объединяются в большем или меньшем количестве устройства, изменение состояния каждого из которых в отдельности отражается дифференциальным уравнением вида

$$h = A \frac{dq}{dt}, \quad (1)$$

где  $h$  и  $q$  являются величинами, меняющимися в зависимости от времени  $t$  и определяющими состояние тела в каждое мгновение, в то время как  $A$  может быть константой или зависеть от  $h$ , от  $q$  или от  $t$ . Конечной задачей является определение значений  $h$  и  $q$  в зависимости от времени.

Когда в задаче содержится только одно выражение вида (1), алгебраическое решение представляется довольно простым, но очень различным в зависимости от исходных данных.

Может иметь место случай, когда известна зависимость  $q = \varphi(t)$ ; в этом случае нужно определить зависимость  $h$  от  $t$ . Мы ее получим из выражения (1) в виде

$$h = A\varphi'(t). \quad (2)$$

В другом случае может быть известна зависимость  $h = f(t)$ ; тогда надо найти величину  $q$  в зависимости от  $t$ ; в соответствии с уравнением (1) получим

$$q = \int \frac{1}{A} f(t) dt. \quad (3)$$

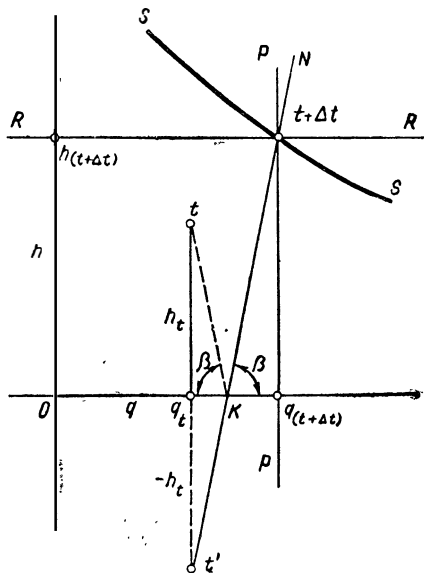
В случае, когда известна зависимость  $h = F(q)$ , можно получить из уравнения (1) зависимость между временем и величиной  $q$  в виде

$$t = \int A \frac{dq}{F(q)}. \quad (4)$$

Наконец, может быть задана зависимость  $h = F(q)$ , которая может иметь разный вид в различные моменты времени, т. е. представляться функцией  $h = F(q, t)$ , где  $t$  — параметр.

Уравнение (1) тогда записывается в виде

$$F(q, t) = A \frac{dq}{dt}. \quad (4')$$



Фиг. 131.

Для того чтобы его решить, нужно разделить переменные  $q$  и  $t$ . Если это удастся, то предстоит решить более или менее сложное дифференциальное уравнение.

Таким образом, в зависимости от условий, выражение (1) приводит аналитически к дифференцированию (случай 1), к интегрированию (случай 2 и 3) и к дифференциальному уравнению (случай 4).

Однако графические построения, являющиеся решением соотношения (1), остается неизменным, независимо от того или иного случая.

Это весьма существенное замечание устанавливает, что графическое построение не является просто заменителем математических исчислений, поскольку оно осуществляет равно дифференцирование или интегрирование или даже решает дифференциальное уравнение. Таким образом, графический метод нельзя охарактеризовать как, например, метод интегрирования; в действительности это общий метод построения при помощи геометрии функции трех переменных величин, взаимно связанных дифференциальным соотношением 1.

Особенность графического метода заключается в том, что вместо того, чтобы строить зависимость величины  $h$  или величины  $q$  от  $t$ , он непосредственно определяет зависимость между  $h$  и  $q$  при заданных значениях величины  $t$ . Таким образом, построение, исполненное в координатном поле  $h, q$ , определяет фактически три величины, так как оно привязано также к времени  $t$ .

Напомним принцип построения. Он может быть сформулирован следующим образом.

Зная значения  $h_t, q_t$  переменных величин  $h$  и  $q$ , соответствующих значению  $t$  третьей величины, найти значения  $h_{(t+\Delta t)}$  и  $q_{(t+\Delta t)}$ , соответствующие величине  $(t + \Delta t)$ .

Простота построений является следствием простого характера соотношения (1) и того обстоятельства, что при достаточно малом  $\Delta t$  (а это всегда возможно, поскольку выбор величины  $h$  произволен), величина  $h$  будет изменяться в зависимости от  $t$  линейно и среднее ее значение в интервале времени  $\Delta t$  будет равно  $\frac{h_t + h_{(t+\Delta t)}}{2}$ . Поэтому отношение (1) можно представить в виде

$$\frac{h_t + h_{(t+\Delta t)}}{2} \Delta t = A \Delta q$$

или

$$h_{(t+\Delta t)} = -h_t + \frac{2A}{\Delta t} \Delta q. \quad (5)$$

Помимо этого, имеем

$$q_{(t+\Delta t)} = q_t + \Delta q. \quad (6)$$

Выраженное графически полученное соотношение показывает, что геометрическим местом искомых точек  $h_{(t+\Delta t)}, q_{(t+\Delta t)}$  является прямая, проходящая через точку  $(-h_t, q_t)$ , симметричную точке  $h_t, q_t$  относительно оси абсцисс, при угловом коэффициенте

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{A}{\frac{\Delta t}{2}}. \quad (7)$$

Эта прямая ( $t'N$  на фиг. 131), зависящая только от положения предыдущей точки  $t$  и величин  $A$  и  $\Delta t$ , не меняется, независимо от того, какой случай из числа названных выше четырех рассматривается конкретно.

Пусть имеет место первый случай, когда известна зависимость  $q = q(t)$ , которая определяет величину  $q_{(t+\Delta t)}$ ; тогда надо построить вертикаль  $PP$ , имеющую данную величину абсциссой; искомая точка  $(t + \Delta t)$  будет расположена на пересечении этой вертикали и прямой  $t'N$ ; такое построение соответствует графическому дифференцированию функции  $\varphi(t)$ .

Если имеет место второй случай, где задано условие  $h = f(t)$ , то известна величина  $h_{(t+\Delta t)}$ ; при построении проводится

горизонталь  $RR$ , для которой величина  $h_{(t+\Delta t)}$  является ординатой; искомая точка  $(t+\Delta t)$  находится на пересечении этой горизонтали с прямой  $t'N$ ; такое построение соответствует графическому интегрированию функции  $\int_A^1 f(t) dt$ .

Если имеет место третий случай, то можно построить график зависимости  $h = F(q)$ , пусть это будет, например, кривая  $SS$ . На пересечении этой кривой с прямой  $t'N$  находится искомая точка  $(t + \Delta t)$ . Определение ее двух координат соответствует, как уже указывалось, графическому интегрированию функции  $\int \frac{Adq}{F(q)}$ .

В случае, если  $h = F(q \cdot t)$ , то при построении кривой  $SS$  в функцию  $F(q \cdot t)$  вводится значение времени  $(t + \Delta t)$ . Построение и в этом случае сохраняется без изменений, представляя решение дифференциального уравнения, не прибегая к разделению переменных величин.

Построение не усложняется также в случае, если  $A$  является функцией величин  $h$  или  $q$  или  $t$ . В этом случае надо только вычислять величину угла  $\text{tg } \beta$  при построениях отдельно для каждой точки. Так как при  $t = 0$  точка  $h, q$  всегда задана, она является начальной точкой при построениях, которые производятся для интервалов времени  $\Delta t$ , величину которых можно менять с тем, однако, чтобы линейный закон (5), являющийся основой графического метода, всегда соблюдался с точностью до величины второго порядка.

Даже в наиболее простом случае, когда имеется только одно дифференциальное соотношение (1) между величинами  $h, q, t$ , графический метод имеет очевидные преимущества перед аналитическим, поскольку он возможен во всех случаях, сохраняясь всегда одним и тем же, тогда как при аналитическом решении каждый раз возникают задачи, связанные с интегрированием, часто невозможным.

На практике же такой наиболее простой случай не встречается никогда и самое простое механическое устройство или незначительная гидравлическая или электрическая установка сочетают по крайней мере два или три дифференциальных условия типа (1), а часто и больше.

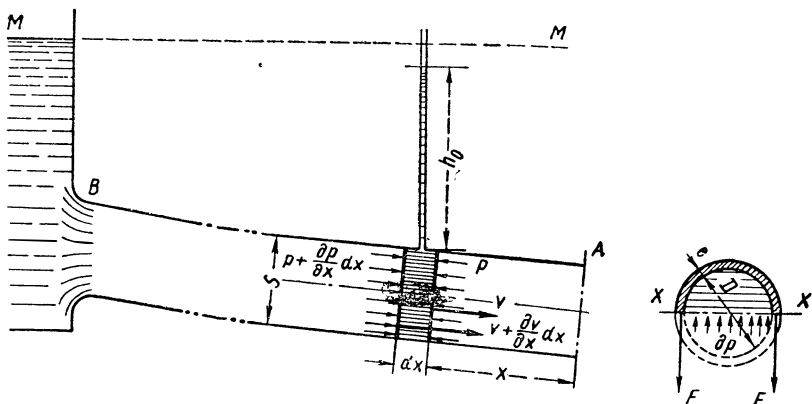
**§ 91 (124). Вывод дифференциальных уравнений неустановившегося движения в напорных трубопроводах.** Мы считаем полезным, чтобы читатель мог найти в настоящей работе также вывод дифференциальных уравнений неустановившегося режима, на которые мы неоднократно ссылались. Это даст одновременно возможность сделать по поводу упомянутых уравнений и их решений некоторые интересные замечания.

Выделим (фиг. 132) в трубопроводе одинакового по длине диаметра, сделанном из одного материала, имеющего одинаковую повсюду толщину стенок и заполненного на всем протяжении одной и той же жидкостью, участок длиной  $dx$ . Пусть начальная

скорость течения в трубопроводе была  $v_0$  и был одинаковый на всей длине напор, обусловливаемый уровнем  $MM$ .

За начало отсчетов примем сечение  $A$  и будем считать положительными расстояния, отсчитываемые против течения, как это было принято Алиеви<sup>1</sup> и впоследствии рядом других авторов, исследовавших этот же вопрос.

Заметим также, что положение отрезка трубопровода  $dx$  в поле силы тяжести не оказывает влияния на движение жидкости, так как отклонение от горизонтального положения на величину  $dh$  компенсируется разницей в давлении  $dp = \omega dh$ , не влияя на скорость



Фиг. 132.

течения, зависящую исключительно от сечения трубопровода. Поэтому на фиг. 132 трубопровод показан наклонным по отношению к уровню  $MM$  и расстояния  $x$  отсчитываются вдоль оси трубопровода.

При неустановившемся режиме скорость на отрезке  $dx$  будет переменной в зависимости от времени, обуславливая также переменное давление.

Силами, приложенными к элементу  $dx$ , являются:

1. Сила, возникающая от того, что давление вдоль отрезка  $dx$  изменяется на дифференциал  $\frac{\partial p}{\partial x} dx$ , что дает для всего сечения  $S$  результирующую силу

$$pS - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) S = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx\right) S. \quad (1)$$

2. Сила инерции массы  $\frac{\omega}{g} S dx$  элемента, скорость которого изменяется во времени, т. е. сила

$$+\left(\frac{\omega}{g} S dx\right) \frac{dv}{dt}. \quad (2)$$

<sup>1</sup> Л. Алиеви. Теория гидравлического удара.

Пренебрегая величиной  $\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial x}$  по сравнению с  $\frac{\partial v}{\partial t}$ , можно свести полную производную  $\frac{dv}{dt}$  к частной  $\frac{\partial v}{\partial t}$ .

Приравнявая нулю сумму сил, получим

$$\frac{g}{\omega} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (3)$$

Записывая, что увеличение массы элемента  $dx$  за время  $dt$  равняется разности между массой, втекающей через входное сечение и оттекающей через выходное, получим другую зависимость между величинами  $p$  и  $v$ .

Так как скорость  $v$  меняется на дифференциал  $\frac{\partial v}{\partial x} dx$ , то втекающей массой будет  $\frac{\bar{\omega}}{g} S \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dt$ , а оттекающей  $\frac{\bar{\omega}}{g} S v dt$ , что дает разницу

$$\frac{\bar{\omega}}{g} S \frac{\partial v}{\partial x} dx dt. \quad (4)$$

Изменение массы элемента  $dx$  за время  $dt$  составляет:

$$\frac{d \left( \frac{\bar{\omega}}{g} S dx \right) dt}{dt}. \quad (5)$$

Приравнявая между собой уравнения (4) и (5), получим

$$(\bar{\omega} S) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{d(\bar{\omega} S)}{dt}. \quad (6)$$

Жидкость упруга и при изменении давления она меняет объем, причем это изменение в соответствии с законами упругости, пропорционально изменению давления  $dp$  и длине элемента  $dx$  и обратно пропорционально коэффициенту упругости жидкости, т. е. равняется  $\frac{dp}{\epsilon} dx$ . Поскольку масса остается неизменной в новом объеме, то

$$\bar{\omega} S dx = (\bar{\omega} + d\bar{\omega}) S \left( 1 - \frac{dp}{\epsilon} \right) dx,$$

откуда, пренебрегая членами второго порядка малости, получим для изменения удельного веса  $\bar{\omega}$  выражение

$$d\bar{\omega} = \bar{\omega} \frac{dp}{\epsilon}. \quad (7)$$

Стенки трубопровода также обладают упругостью и можно допустить, что его деформация всегда соответствует давлению без фазового смещения во времени<sup>1</sup>. При изменении давления на  $dp$

<sup>1</sup> Это условие практически реализуется на работающих установках, как мы это показывали в сообщении Гидротехническому обществу Франции.

напряжение в стенках трубопровода изменится на  $dp \frac{D}{2e}$ , где  $D$  — диаметр трубы, а  $e$  — толщина ее стенок. Это приводит, в соответствии с законами упругости, которые только что были рассмотрены в применении к жидкости, к изменению радиуса  $\frac{D}{2}$  трубопровода, равному

$$\lambda = \frac{\frac{dpD}{2e} \cdot \frac{D}{2}}{E} = \frac{dpD^2}{4eE}, \quad (9)$$

где  $E$  — коэффициент упругости металла.

Сечение  $S = \frac{\pi D^2}{4}$  изменится при этом на величину

$$\frac{\pi(D+\lambda)^2}{4} - \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4} \left[ \left(1 + \frac{\lambda}{D}\right)^2 - 1 \right] = S \frac{2\lambda}{D}, \quad (10)$$

если пренебрегать величиной  $\frac{\lambda^2}{D^2}$  при разложении  $\left(1 + \frac{\lambda}{D}\right)^2$ ; с учетом уравнения (9) получим далее

$$dS = S \frac{D}{2Ee} dp. \quad (11)$$

Вернемся ко второму члену уравнения (6), где

$$d(\bar{\omega}S) = Sd\bar{\omega} + \bar{\omega}dS \quad (12)$$

и заменим  $d\bar{\omega}$  и  $dS$  их выражениями (7) и (11); в результате получим

$$\bar{\omega}S \frac{\partial v}{\partial x} = \bar{\omega}S \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{2Ee} \right) \frac{\partial p}{\partial t}$$

и после деления на  $\bar{\omega}S$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{2Ee} \right) \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (13)$$

Такова вторая зависимость между величинами  $v$  и  $p$ . Положим,

$$a^2 = \frac{g}{\bar{\omega} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{2Ee} \right)}. \quad (14)$$

и заметим, что величина  $a$  имеет размерность скорости. Если одновременно выразить давление столбом жидкости

$$p = \bar{\omega}h,$$

то уравнения (3) и (13) превращаются в следующие:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (16)$$

Таковы два уравнения (в частных производных) неустановившегося движения, связывающие величины  $h$  и  $v$  с временем  $t$  и координатой расстояния  $x$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Эти уравнения получены, пренебрегая значением  $v \frac{\partial v}{\partial x}$ , равно как потерями напора. В случае, когда эти упрощения недопустимы, применение изложенной теории приводит к ошибочным результатам.

Для полноты исследования надо ввести напряжения трения вдоль отрезка  $dx$ ; если  $J$  является таковым, будучи выражено в  $m$  столба воды, то сила трения равняется  $S\bar{\omega} \frac{\partial J}{\partial x} dx$ .

С другой стороны, формула (2) без упрощений дает

$$\frac{\bar{\omega}}{g} S dx \left( \frac{dv}{dt} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Полагая  $p = \omega h$ , уравнение (3) без упрощений можно привести к виду

$$g \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial x} \right) = \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (3')$$

Уравнения (3') и (16) ставят задачу, но, к сожалению, она в таком виде не имеет решения.

Заметим, что если ввести обозначение

$$h + \frac{v^2}{2g} + J = H,$$

то уравнение (3') будет иметь вид

$$g \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (15')$$

В левой части полного уравнения (3'), приводящего к уравнению (15'), мы находим члены, входящие в уравнение Бернулли; это есть уравнение, выражающее закон сохранения энергии и бесспорно, что замена значения  $H$  в уравнении (15) значением ( $h$ ) искажает результаты, особенно в случае расширяющейся трубы, и в случае, когда потери напора велики.

Для того, чтобы, сохранив уравнение (15'), иметь возможность решать систему уравнений (15') и (16), надо в уравнении (16) заменить  $h$  на  $H$ .

Теоретически это никак не обосновано. Тем не менее получаемая таким способом система уравнений

$$g \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (15'')$$

$$\frac{g}{a^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (16'')$$

решается так же, как система уравнений (15) и (16), и дает результаты, очень близкие к действительности, независимо от потерь напора и условий течения и, в частности, в случае трубы с быстрыми изменениями сечения по длине, в то время, как система уравнений (15) и (16) в этих условиях приводит к неверным результатам. Обе системы с другой стороны приводят к одинаковым результатам, когда  $v \frac{\partial v}{\partial x}$  и  $\frac{\partial J}{\partial x}$  действительно пренебрежимо малы.

Эти соображения были изложены нами в докладе в мае—июне 1926 г., представленном Обществу гражданских инженеров Франции и съезду по общей механике в Льеже (1931).



Для решения продифференцируем уравнение (15) по  $x$  и (16) по  $t$ ; с учетом того, что  $\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = \frac{\partial v}{\partial x \partial t}$ , можно получить

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}. \quad (17)$$

Таким образом,  $h$  является такой функцией  $x$  и  $t$ , что ее вторая производная по  $x$  равняется второй производной по  $t$ , увеличенной в  $\frac{1}{a^2}$  раз; иначе говоря, эта функция не меняется при замене  $x$  через  $at$ ; наиболее простой формой этой функции является  $F(x \pm at)$ , откуда общее уравнение, определяющее значение  $h$ , будет

$$h = h_0 + F(x - at) + f(x + at), \quad (18)$$

где  $F$  и  $f$  — произвольные функции и  $h_0$  — начальное значение функции  $h$ .

Отметим, что путь, проделываемый подвижным наблюдателем, который перемещается со скоростью  $a$  относительно жидкости, равен  $at$ . Отсюда  $x - at = 0$  и величина  $F(x - at)$  для такого наблюдателя будет всегда сохранять значение  $F(0)$ , т. е. значение, которое она имела при выбытии наблюдателя (в точке  $x = 0$  и  $t = 0$ ). Это и есть определение волны, которая распространяется с относительной скоростью  $a$  по отношению к жидкости в направлении, противоположном течению, т. е. с абсолютной скоростью  $(a - v)$  по отношению к трубопроводу.

Точно так же путь, проделываемый наблюдателем, который перемещается со скоростью  $(-a)$  относительно жидкости в направлении течения, равен  $(-at)$ . В этом случае  $(x + at) = 0$  и величина  $f(x + at)$  всегда равна  $f(0)$ , т. е. сохраняет значение, какое она имела при  $x = L$  и  $t = T$  (т. е. при выбытии наблюдателя из сечения  $L$ ). Это еще одна волна, которая распространяется в противоположном предыдущей направлении с относительной по отношению к жидкости скоростью  $a$ , т. е. с абсолютной скоростью  $a + v$  (по отношению к трубопроводу).

Дифференцируя уравнение (18) по  $t$  и подставив результат в уравнение (16), получим

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} [-aF'(x - at) + af'(x + at)]$$

или

$$\partial v = -\frac{g}{a} [F'(x - at) \partial x - f'(x + at) \partial x],$$

что после интегрирования дает

$$v = v_0 - \frac{g}{a} [F(x - at) - f(x + at)], \quad (19)$$

где  $v_0$  — начальная скорость; таким является уравнение для определения скорости  $v$ .

Уравнения (18) и (19) расшифровываются как следующий физический закон неустановившегося движения:

1. Изменение  $(h - h_0)$  напора в некотором сечении трубопровода в некоторый момент времени равняется сумме волн давления  $F$  и  $f$ , встречающихся в указанном сечении в указанный момент времени; эти волны перемещаются относительно жидкости со скоростями  $\pm a$ .

2. Изменение скорости  $(v - v_0)$  в том же сечении и в тот же момент времени равняется разности двух названных волн, увеличенной в  $\frac{g}{a}$  раз.

Во всех областях механики, затрагиваемых в третьей части настоящей работы, встречаются уравнения в частных производных, идентичные по форме уравнениям (15) и (16), которые, следовательно, решаются идентично решениям уравнения (18) и (19).

Язык алгебры вполне адекватен физическому явлению и так как уравнения (15) и (16) выражают характер явления, то их аналитическое решение (18) и (19) воспроизводит само явление.

К сожалению, дифференциальные уравнения, к которым приводятся задачи, часто не имеют разработанного аналитического решения и это парализует работу инженера; в таких случаях он сможет с успехом обращаться к графическому методу.

---

У нас нет определенных оснований для прекращения описания приложений графического метода, явившихся содержанием второй части настоящего труда. Действительно, почему мы остановились на последнем примере, исчерпывает ли он разнообразие случаев, которые могут иметь место или действительно встречаются в практике предприятий? Конечно нет, так как количество таких случаев может быть неограниченным; мы испытываем даже состояние некоторой неудовлетворенности, объявляя об окончании работы, которая по нашему глубокому убеждению не может иметь ни логического, ни естественного конца. Неудовлетворенность, которую ощущает автор, может получить отклик, к сожалению, также почти у каждого читателя, потому что очень велика вероятность того, что в нашем сноте нет как раз того колоса, который читатель надеялся найти; пусть читатель воспользуется представленной работой и мы предсказываем, что он будет утешен, когда сам найдет решение своей задачи.

Действительно, предлагаемая книга и не могла иметь целью составление исчерпывающего сборника рецептов решений; она стремится привить читателю вкус к их самостоятельному отысканию и дать ему уверенность, что эти рецепты у него под рукой, если только он захочет потрудиться, для того чтобы их найти.

Приведенных примеров для этой цели более чем достаточно: но может быть была необходимость что-либо добавить к изложению самого метода, являющемуся предметом первой части книги? Скорее всего нет, если, как мы надеемся, нам удалось показать, что этот метод ни в какой мере не является абстракцией, а реально отражает изучаемое явление.

Разумеется, также и ученые-аналитики воспринимают явление физически, но исследуют его, предпочитая алгебраические методы описания, которые, по-видимому, всегда будут сохранять отпечаток большей интеллектуальности. Воздадим им должное, но будем себя утешать тем, что хотя алгебраический аспект остается нам чуждым или далеким, мы ничего не теряем, используя глаза наших воображаемых наблюдателей, благодаря которым мы осведомлены о том, что происходит в любое время в процессе исследования. Эти преданные и верные служители ограждают нас от возможности возникновения двусмысленностей и противоречий; мы не рискуем, например, просто заявить, что мы получили дан-

ное давление бесконечным только потому, что по причине вполне простительной ошибки при подсчетах знаменатель формулы приняли равным нулю. Перед таким устрашающим результатом наши наблюдатели, руководимые направляющим их законом, успокоили бы нас, показав явление таким, каким оно происходит в действительности и открыв причины встретившихся ограничений. Находясь в обществе этих скромных помощников, мы сможем добиться результатов большой ценности: оставаясь сами скромными и осторожными, мы сможем постепенно, но прочно постичь технический смысл решений, с пониманием которого не рождаются даже при самом гениальном уме, и которым бывают вознаграждены настойчивость и трудолюбие каждого ума, самого обыкновенного, но смелого.

И затем я пожелаю моим читателям-друзьям успехов в их собственных открытиях и новых применениях; я предсказываю, что они будут многочисленны и плодотворны.

---

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Д-р техн. наук проф. И. А. ЧАРНЫЙ,  
канд. техн. наук Г. Д. РОЗЕНБЕРГ*

В настоящем приложении кратко излагаются вывод уравнений движения и основные аналитические методы, применяемые для исследования и расчетов неустановившегося движения реальных жидкостей в трубах со скоростями, малыми по сравнению со скоростью звука.

Эти методы позволяют непосредственно учесть распределенное трение по длине трубопровода, в отличие от графического метода Бержерона, где распределенные гидравлические сопротивления заменяются сосредоточенными. Заметим попутно, что область и возможности применения аналитических методов в настоящее время значительно расширены по сравнению с недавним прошлым, благодаря происходящему в наши дни интенсивному распространению быстродействующих электронных вычислительных устройств.

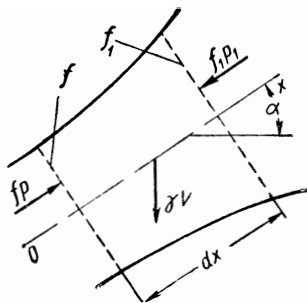
В настоящее приложение включены наиболее эффективные, с точки зрения авторов, современные аналитические методы — метод характеристик, методы линеаризации исходных нелинейных уравнений, видоизменение метода Римана, методы контурного интегрирования в плоскости комплексной частоты и операционный, а также, для полноты изложения, классический метод Фурье.

Главное внимание уделено основной сущности и идее того или иного метода, которую авторы старались изложить в достаточно подробной и отчетливой форме. Подбор соответствующих примеров также был подчинен этому требованию. Во избежание излишнего увеличения объема приложения некоторые детали чисто вычислительного характера было решено опустить, указав источники, где они приведены в полном и развернутом виде.

### 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ В НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ

Дифференциальные уравнения движения капельной сжимаемой жидкости впервые были составлены и для некоторых случаев проинтегрированы Н. Е. Жуковским в его классической работе о гидравлическом ударе [1]. Метод Н. Е. Жуковского можно применить и для общего случая движения жидкости или газа в трубе с неравномерным распределением скоростей в сечении трубы таким образом, чтобы в окончательные уравнения движения входили средние в сечениях скорости, плотности и давления.

Рассмотрим движение жидкости по трубе с прямолинейной осью  $Ox$ . Площадь поперечного сечения трубы  $f$  будем предполагать зависящей от координаты и времени, т. е.  $f = f(x, t)$ . Проведем в трубе два поперечных сечения площадью  $f$  и  $f_1$  на расстоянии  $dx$  одно от другого (фиг. 1). Уравнение количества движения



Фиг. 1.

для выделенного таким образом объема  $V$  в самом общем случае имеет вид

$$\int_f \bar{\rho} \vec{v} v_n df + \int_{\omega} \bar{\rho} \vec{v} v_n d\omega + \int_{f_1} \bar{\rho} \vec{v} v_n df + \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \vec{v}) dV = \sum \vec{F}, \quad (1)$$

где  $\bar{\rho}$  — плотность;  $\vec{v}$  — вектор скорости жидкости в данной точке;  $v_n$  — проекция  $\vec{v}$  на внешнюю нормаль  $\vec{n}$  к поверхности, ограничивающей объем  $V$ ;  $\omega$  — боковая поверхность объема  $V$   $\sum \vec{F}$  — сумма всех внешних сил, действующих на массу жидкости, заключенную в выделенном объеме.

В дальнейшем будем считать, что площадь и форма сечения трубы изменяются по длине достаточно плавно, т. е. что косинус угла между нормалью к  $\omega$  и осью  $Ox$  есть малая величина, квадратом которой можно пренебречь по сравнению с единицей.

В силу этого предположения

$$\omega = \chi dx, \quad (2)$$

где  $\chi$  — периметр сечения потока.

Спроектируем уравнение (1) на ось  $Ox$ , заменив  $V$  на  $f dx$  и учтя выражение (2). Имея в виду, что  $v_n = -v_x$  на поверхности  $f$ , и  $v_n = +v_x$  на поверхности  $f_1$ , получим

$$\begin{aligned} - \iint_f \bar{\rho} v_x^2 df + \int_{\chi} \bar{\rho} v_x v_n d\chi dx + \iint_{f_1} \bar{\rho} v_x^2 df + \iint_f \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} v_x) df dx = \\ = fp - f_1 p_1 + \frac{1}{2} (p + p_1) (f_1 - f) + \theta \chi dx, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $v_x$  — проекция  $\vec{v}$  на  $Ox$ ;  $p$  — среднее в сечении давление,  $\theta$  — проекция на  $Ox$  среднего по периметру сечения потока касательного напряжения на стенке трубы.

Проекция силы тяжести, равная  $\gamma f dx \sin \alpha$  ( $\gamma$  — объемный вес жидкости), не входит явно в уравнение (3), так как под  $p$  подразумевается так называемое приведенное давление  $p = \gamma z + p_c$ , где  $p_c$  — статическое давление.

Поскольку с точностью до членов второго порядка малости

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p + \frac{\partial p}{\partial x} dx, & f_1 &= f + \frac{\partial f}{\partial x} dx, \\ \iint_{f_1} \bar{\rho} v_x^2 df &= \iint_f \bar{\rho} v_x^2 df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} v_x^2 df dx, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

то после подстановки выражений (4) в уравнение (3) и перехода к пределу при  $dx \rightarrow 0$  получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} v_x^2 df + \int_{\chi} \bar{\rho} v_x v_n d\chi + \iint_f \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} v_x) df = -f \frac{\partial p}{\partial x} + \theta \chi. \quad (5)$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (5) вычислим величину

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_f \varphi df,$$

где  $\varphi(x, y, z, t)$  — некоторая дифференцируемая функция координат и времени.

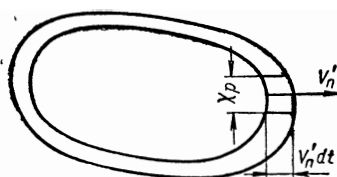
Так как  $f = f(x, t)$ , то (фиг. 2)

$$df = v'_n d\chi dt$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_f \varphi df &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \iint_{f(x, t+\Delta t)} \frac{\varphi(x, y, z, t+\Delta t)}{\Delta t} df - \iint_{f(x, t)} \frac{\varphi(x, y, z, t)}{\Delta t} df \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \iint_{f(x, t)} \frac{\varphi(x, y, z, t+\Delta t) - \varphi(x, y, z, t)}{\Delta t} df + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{f(x, t+\Delta t) - f(x, t)} \frac{\varphi(x, y, z, t+\Delta t)}{\Delta t} v'_n d\chi dt \right] = \iint_f \frac{\partial \varphi}{\partial t} df + \int_{\chi} \varphi v'_n d\chi, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $v'_n$  — проекция  $\vec{v}$  на внешнюю нормаль  $\vec{n}'$  к плоскому контуру  $\chi$ .



Фиг. 2.

При течении вязкой жидкости на боковой поверхности  $\omega$  касательная составляющая скорости  $v_\tau = 0$ , а нормальная составляющая  $v_n = \pm |\vec{v}|$ . Тогда, так как  $\vec{n}'$  лежит в плоскости, перпендикулярной  $Ox$ , а согласно сделанному предположению  $\cos^2(n, x) \ll 1$ , то

$$\begin{aligned} v'_n &= |\vec{v}| \cos(\vec{v}, \vec{n}') = \\ &= v_n \sqrt{1 - \cos^2(n, x)} \approx v_n. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив выражение (7) в формулу (6), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_f \varphi df = \iint_f \frac{\partial \varphi}{\partial t} df + \int_{\chi} \varphi v_n d\chi. \quad (8)$$

Далее, так как направление  $\theta$  всегда противоположно направлению средней скорости течения  $\omega$ , то

$$\theta = - \frac{\omega}{|\omega|} |\theta|. \quad (9)$$

Пользуясь соображениями теории размерностей, величину  $|\theta|$  можно представить в виде

$$|\theta| = \frac{\lambda}{8} \rho \omega^2, \quad (10)$$

где  $\rho$  — средняя по сечению потока плотность жидкости;  $\lambda$  — безразмерная характеристика гидравлического сопротивления, являющаяся, вообще говоря, функцией размера, формы и шероховатости трубы, физико-механических свойств жидкости и вида нестационарности движения. Для стационарного течения, как легко видеть,  $\lambda$  есть коэффициент сопротивления в формуле Дарси-Вейсбаха для потери напора на трение в трубе.

Учитывая выражения (8), (9) и (10), уравнение (5) можно представить в виде

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial t} = -f \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\lambda}{8} \rho \chi \omega |\omega|, \quad (11)$$

где  $M = \iint_f \bar{\rho} v_x df = \rho \omega f$  — массовый расход жидкости;  $J = \iint_f \bar{\rho} v_x^2 df = (1 + \beta) \times \times f \rho \omega^2 = (1 + \beta) M \omega$  — проекция на  $Ox$  количества движения массы  $M$ ;

$\beta$  — поправка Корнолиса на неравномерное распределение скоростей в выражении количества движения потока через среднюю скорость и среднюю в сечении плотность жидкости.

Масса жидкости, заключенная в выделенном объеме  $V$ , есть

$$m = \iiint_V \bar{\rho} dV$$

и из условия сохранения массы получим уравнение неразрывности в интегральной форме:

$$\frac{dm}{dt} = \iint_f \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} df dx - \iint_f \bar{\rho} v_x df + \int_{\chi} \bar{\rho} v_n d\chi dx + \iint_{f_1} \bar{\rho} v_x df = 0. \quad (12)$$

Так как с точностью до членов второго порядка малости

$$\iint_{f_1} \bar{\rho} v_x df = \iint_f \bar{\rho} v_x df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} v_x df dx, \quad (13)$$

то после подстановки выражения (13) в уравнение (12) и перехода к пределу при  $dx \rightarrow 0$  получим с учетом формулы (8), что

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho f) = 0. \quad (14)$$

Уравнения (11) и (14) являются общими, справедливыми для любого потока газа или жидкости (как ньютоновской, так и неньютоновской), и выведены при единственном предположении, что  $\cos^2(n, x) \ll 1$ . Эти уравнения содержат в качестве неизвестных четыре величины:  $\rho$ ,  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $f$  ( $\beta$  и  $\lambda$  считаем известными функциями  $\omega$ , физико-механических свойств жидкости, вида стационарности и геометрии трубы). Для получения замкнутой системы к этим двум уравнениям необходимо добавить уравнение состояния жидкости и закон, выражающий зависимость площади сечения трубы от давления.

В случае капельной жидкости будем предполагать, что последняя следует закону Гука, т. е.

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{P_c - P_{c0}}{K_{жс}} \right), \quad (15)$$

где  $\rho_0$  — плотность при давлении  $P_{c0}$ ;  $K_{жс}$  — модуль объемного сжатия жидкости<sup>1</sup>.

Стенки трубы будем предполагать упругими и площадь поперечного сечения трубы зависящей от давления согласно закону Гука, т. е.

$$f = f_0 \left( 1 + e \frac{P_c - P_{c0}}{E} \right), \quad (16)$$

где  $f_0 = f_0(x)$  — площадь сечения трубы при давлении  $P_{c0}$ ;  $E$  — модуль упругости первого рода материала трубы;  $e$  — безразмерный коэффициент, зависящий от формы сечения и толщины стенок трубы. Влиянием продольных сил упругости и сил инерции стенок трубы, оценка которых приведена в [1], [4], будем пренебрегать.

Так как выражения (15) и (16) будут справедливы лишь при

$$P_c - P_{c0} \ll K_{жс}, \quad e(P_c - P_{c0}) \ll E, \quad (17)$$

то они могут быть представлены в виде

$$\rho = \rho_0 \exp \frac{P_c - P_{c0}}{K_{жс}}, \quad f = f_0 \exp \frac{e}{E} (P_c - P_{c0}),$$

откуда

$$\rho f = \rho_0 f_0 \exp \frac{P_c - P_{c0}}{K}, \quad (18)$$

<sup>1</sup> Другие уравнения состояния для капельной жидкости рассмотрены в [2], [3].



где

$$K = \frac{K_{жс}}{1 + e \frac{K_{жс}}{E}}, \quad (19)$$

$K$  — приведенный модуль объемного сжатия, учитывающий упругость стенок трубы.

Для тонкостенной круглой трубы

$$e = \frac{d}{h}, \quad (20)$$

где  $d$  — внутренний диаметр;  $h$  — толщина стенки трубы. Для толстостенной круглой трубы [3]

$$e = 2 \left( \nu + \frac{d + 2h + 2 \frac{h^2}{d}}{2h + 2 \frac{h^2}{d}} \right), \quad (21)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Для тонкостенных труб некругового сечения значение  $e$  было получено Г. И. Двухшерстовым в виде [5]

$$e = \frac{2a_0(1 - \nu^2)}{h} K'_\omega \left( 1 + K_\omega \frac{a_0^2}{h^2} \right), \quad (22)$$

где  $K'_\omega$  и  $K_\omega$  — безразмерные коэффициенты, зависящие от формы поперечного сечения трубы (табл. 1);  $a_0$  — характерный линейный размер. Им же было показано, что в случае некруглых труб величина приведенного модуля  $K$  значительно снижается, так как площадь сечения таких труб увеличивается при изменении давления главным образом вследствие изгиба их контура. Для сравнительной оценки величины приведенного модуля сжатия в трубах различного поперечного сечения в табл. 2 приведены значения  $K'_\omega$ ,  $K_\omega$ ,  $K/K_{жс}$  для случая, когда  $a_0/h = 10$ ,  $K_{жс}/E = 0,01$  и  $\nu^2 = 0,1$ , что соответствует течению воды по стальным трубам.

Таблица 1

Значения  $K_\omega$  и  $K'_\omega$  для труб различного сечения

Форма поперечного сечения трубы	$a_0^*$	$K'_\omega$	$K_\omega$
Окружность . . . . .	$d/2$	$\frac{1}{1 + \beta}$	$\frac{0}{10(1 + \beta)^2(1 + \beta^3) - 6(1 + \beta^5) - 30\beta^2(1 + \beta)}$
Прямоугольник ** . . . . .	$a$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15\beta(1 + \beta)}{15\beta(1 + \beta)}$
Правильный треугольник . . . . .	$a$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0,4
Правильный 2n-угольник . . . . .	$a$	$\cos \frac{\pi}{2n}$	$\frac{4}{15} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n} \sin^2 \frac{\pi}{2n}$

\* Для прямоугольника  $a$  — половина большей стороны, для треугольника — половина стороны, для 2n-угольника — радиус описанной окружности.

\*\*  $\beta$  — отношение меньшей стороны к большей.

## Сравнительная оценка величины кажущегося модуля сжатия в трубах различного поперечного сечения

Форма поперечного сечения трубы	$K'_\omega$	$K_\omega$	$e$	$K/K_{ж}$
Круг . . . . .	1	0	18	0,847
Квадрат . . . . .	1	0,267	498	0,167
Прямоугольник $\left(\beta = \frac{1}{2}\right)$	0,75	0,7	958	0,095
Правильный треугольник	0,577	0,4	426	0,190
Правильный шестиугольник . . . . .	0,866	0,022	49,9	0,667

Так как скорость звука в жидкости, текущей по упругой трубе, есть

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

то из уравнения (18) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho f) = \frac{f}{c^2} \frac{\partial p_c}{\partial t} = \frac{f}{c^2} \left( \frac{\partial p}{\partial t} - g z \frac{\partial \rho}{\partial t} \right). \quad (23)$$

Для газа можно принять  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  [6] и воспользоваться известной формулой

$$c^2 = \frac{dp_c}{d\rho}.$$

Тогда

$$\frac{\partial p_c}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

откуда следует уравнение (23), т. е. получаем тот же результат, что и для капельной жидкости.

Таким образом, для упругой капельной жидкости, следующей закону Гука и текущей по упругой трубе, удовлетворяющей условию (16), а также для газа, текущего по жесткой трубе, уравнения движения (11) и неразрывности (14) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} -f \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \beta) M \omega] + \frac{\lambda}{8\delta} M |\omega|; \\ -f \left( \frac{\partial p}{\partial t} - g z \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) &= c^2 \frac{\partial M}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где  $\delta = f/\chi$  — гидравлический радиус потока.

Так как для капельной жидкости при выводе уравнений (24) было предположено, что выполняются условия (17), то изменением давления, соответ-

ствующим изменению скоростного напора, и изменением массового расхода, соответствующим изменению плотности, т. е. величинами

$$f \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \beta) \rho w^2], \quad f w \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad f w \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad dz \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

можно пренебречь [1], [3], [6] и уравнения (24) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} -f \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \rho \frac{\partial Q}{\partial t} + \left[ (1 + \beta) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\lambda}{8\delta} f \frac{w}{|w|} \right] \rho w^2; \\ -f \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \rho c^2 \frac{\partial Q}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где  $Q = fw$  — объемный расход жидкости, а величины  $\rho$  и  $c$  вследствие малой сжимаемости жидкости можно считать постоянными.

Если труба достаточно жесткая и  $\frac{\partial f}{\partial x} \ll \frac{\lambda f}{8\delta}$ , то уравнения (25) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \rho}{\partial x} &= \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\lambda}{8\delta} w |w| \right); \\ -\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial x} = K \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Из изложенного выше видно, что при выводе этих уравнений предполагалось, что: скорость течения жидкости по трубе много меньше скорости звука;  $\rho$  и  $f$  зависят от давления согласно закону Гука; жидкость малосжимаема, а труба достаточно жесткая и площадь ее поперечного сечения мало меняется по длине. Сжимаемость жидкости и упругость трубы учтены в этих уравнениях только в величине скорости звука  $c$ .

При изучении нестационарных движений вязкой (ньютоновской) жидкости, в том числе и при исследовании уравнений (26), принято обычно считать, что характеристики сопротивлений, установленные для стационарных движений, сохраняются и для нестационарных, т. е. в случае неустановившегося движения зависимость  $\lambda$  от числа Рейнольдса и относительной шероховатости предполагается такой же, как и при установившемся движении (гипотеза квазистационарности). Строгое обоснование этого допущения весьма затруднительно и оправдывается оно, в общем, удовлетворительным согласием теории и эксперимента [7]. При движении вязко-пластической жидкости гипотеза квазистационарности неприменима, а данных для определения  $\lambda$  при нестационарных процессах в литературе имеется очень мало [8].

Рассмотрим движение газа с дозвуковой скоростью по длинному цилиндрическому газопроводу. В этом случае обычно всегда можно пренебречь изменением давления, соответствующим изменению скоростного напора [6], и считать, как это уже указывалось выше,  $f = \text{const}$ . Тогда уравнения (24) принимают вид (для газа принимают  $\rho = \rho_c + \gamma z \approx \rho_c$ ):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{\partial (\rho w)}{\partial t} + \frac{\lambda |w|}{8\delta} (\rho w); \\ -\frac{\partial \rho}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial (\rho w)}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Для замыкания системы уравнений (27) к ним необходимо добавить уравнение состояния (газ считается идеальным)

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (28)$$

и уравнение притока тепла (уравнение политропы)

$$n \frac{p}{\rho} = c^2, \quad (29)$$

где  $R$  — газовая постоянная;  $T$  — абсолютная температура;  $n$  — показатель политропы. Уравнения (27), (28) и (29) образуют систему четырех уравнений для четырех неизвестных функций:  $p$ ,  $\rho$ ,  $w$ ,  $T$ , представляющую собой систему уравнений движения газа в длинном газопроводе с дозвуковой скоростью течения. Для этих условий режим движения газа обычно можно считать изотермическим. Тогда из уравнений (28) и (29) следует, что

$$\frac{p}{\rho} = c^2 = \text{const} \quad (30)$$

и система уравнений движения состоит из трех уравнений (27) и (30) для трех неизвестных функций  $p$ ,  $\rho$ ,  $w$ .

**Линеаризация уравнений движения.** Уравнения движения реальной жидкости (26) содержат, вообще говоря, нелинейный член  $\frac{\lambda |w|}{8\delta} \rho w$ , что существенно затрудняет их интегрирование<sup>1</sup>. Поэтому желательно, в тех случаях когда это возможно, линеаризовать эти уравнения. Для этого будем нелинейный член представлять в виде

$$\frac{\lambda |w|}{8\delta} \rho w = 2a\rho w, \quad 2a = \left( \frac{\lambda |w|}{8\delta} \right)_{cp} = \text{const} > 0, \quad (31)$$

причем осреднение производится по длине и времени. Уравнения (26) при этом принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + 2aw \right); \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial x} = K \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

т. е. переходят в систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, представляющую собой частный случай системы телеграфных уравнений с постоянными коэффициентами для линии без утечки.

Если колебания скорости невелики, то определение коэффициента  $2a$  может быть произведено следующим образом. Представим скорость и давление при установившемся движении как

$$w = w_0 + w^*, \quad p = p_0 + p^*, \quad (33)$$

где  $w_0$ ,  $p_0$  — скорость и давление при установившемся движении;  $w^*$ ,  $p^*$  — их возмущения. Разлагая величину

$$\frac{\lambda |w|}{8\delta} w = f(w)$$

в ряд Тейлора и пренебрегая членами, содержащими  $w^*$  в степени выше первой, получим

$$\frac{\lambda |w|}{8\delta} w = f(w) = f(w_0) + w^* f'(w_0). \quad (34)$$

Так как при установившемся движении

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

то из уравнений (26) следует, что

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p_0}{\partial x} &= \frac{\lambda |w_0|}{8\delta} \rho w_0 = \rho f(w_0); \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

<sup>1</sup> Если режим движения ламинарный, то  $\frac{\lambda |w|}{8\delta} = \frac{2\nu}{\delta^2} = \text{const}$ , где  $\nu$  — кинематическая вязкость, и уравнения (26) линейны.

Подставляя выражения (33) и (34) в уравнения (26) и учитывая при этом уравнения (35), имеем:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p^*}{\partial x} &= \rho \left( \frac{\partial w^*}{\partial t} + 2aw^* \right); \\ -\frac{\partial p^*}{\partial t} &= \rho c^2 \frac{\partial w^*}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где

$$2a = f'(\omega_0) = \left( \frac{\lambda |\omega|}{4\delta} + \lambda' \frac{\omega^2}{8\delta} \right)_{\omega=\omega_0} = \text{const.} \quad (36 \text{ a})$$

Если в диапазоне изменения  $\omega$  можно принять  $\lambda = \text{const}$ , то

$$2a = f'(\omega_0) = \frac{\lambda |\omega_0|}{4\delta}. \quad (36 \text{ б})$$

Очевидно, что этот способ линеаризации эквивалентен замене кривой  $y = \frac{\lambda |\omega|}{8\delta} \omega$  в интервале  $\omega_0 < \omega < \omega_1$  отрезком касательной, проведенной через точку  $\omega = \omega_0$  (фиг.3)

Другой способ определения коэффициента  $2a$  заключается в замене отрезка кривой  $AB$  отрезком прямой  $AB'$  таким образом, чтобы площади, ограниченные осью абсцисс и этими отрезками, были равны между собой. В этом случае, если принять  $\lambda = \text{const}$ , получаем

$$2a = \frac{\lambda}{12\delta} \frac{\omega_1^2 + \omega_1\omega_0 - 2\omega_0^2}{\omega_1 - \omega_0}.$$

Об интервале изменения  $\omega$  грубо можно судить, не решая задачи. Для более точного определения этого интервала можно рекомендовать решение задачи (в качестве первого приближения) без учета сил трения.

Вопрос о том, какой способ вычисления коэффициента  $2a$  дает наилучшее приближение, может быть выяснен путем сравнения решения уравнений (32) с экспериментом, либо с решением уравнений (26).

Так как системы уравнений (32) и (36) линейны, то в них под  $p$ ,  $\omega$  можно понимать как давление и скорость, так и их возмущения, т. е. эти системы совпадают между собой.

Линеаризация уравнений (27) может быть выполнена также по формуле (31). Тогда эти уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + 2a(\rho w); \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= \rho c^2 \frac{\partial(\rho w)}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

т. е. формально совпадают с уравнениями (32) или (36), в которых положено  $\rho = 1$ , а скорость  $w$  заменена массовой скоростью  $\rho w$ .

**Граничные и начальные условия.** При рассмотрении неустановившегося движения обычно предполагается, что до момента времени  $t = 0$  движение отсутствовало или было стационарным, т. е.  $p$  и  $w$  для  $t \leq 0$  не зависели от времени. Таким образом, начальные условия будут

$$w = w(x), \quad p = p(x) \quad \text{при } t \leq 0 \quad (0 < x < l), \quad (38)$$

где  $l$  — длина трубопровода.

Граничные условия определяются характером возмущений потока на границах трубопровода. В общем случае они представляют собой две заданные функциональные зависимости, из которых одна связывает между собой значения скорости, давления, их первых производных и времени в начальном сечении, а вторая — в конечном сечении трубопровода.

Особенно часто встречаются граничные условия следующего типа: к одному концу трубопровода присоединен какой-либо агрегат, изменяющий расход жидкости по известному закону в зависимости от времени, например, поршневой насос, регулирующий клапан, турбина, компрессор и т. д. Агрегат может быть присоединен к трубопроводу или непосредственно, или отделен от него камерой, служащей для регулирования расхода или демпфирования колебаний давления (воздушный колпак, уравнительная шахта и т. д.). На другом конце трубопровода предполагается известным давление в функции от времени. В частности, это давление может быть постоянным, например, атмосферным.

В дальнейшем будем располагать сечение  $x = 0$  у конца трубопровода, где поддерживается известное давление  $p(t)$ , а сечение  $x = l$  — у агрегата. Длинной гасящего устройства будем пренебрегать. Очевидно, что при выбранном направлении оси  $Ox$  положительными будут скорости и расходы, направленные от открытого конца к агрегату, и отрицательными — от агрегата к открытому концу. В этих предположениях рассматриваемые граничные условия могут быть математически сформулированы в виде:

$$\left. \begin{aligned} p &= \varphi(t) \text{ при } x = 0; \\ w + h \frac{\partial w}{\partial x} &= f(t) \text{ при } x = l, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где  $\varphi(t)$ ,  $f(t)$  — известные функции;  $h$  — положительная постоянная, характеризующая тип камеры. При отсутствии камеры  $h = 0$ .

Выведем в качестве примера второе из граничных условий (39) для воздушного колпака.

Пусть  $V_0$ ,  $p_0$  — средние объем и абсолютное давление воздуха в колпаке и  $y$  — увеличение объема жидкости в колпаке. Прирост объема жидкости в колпаке в единицу времени есть

$$\frac{dy}{dt} = (f w)_{x=l} - Q(t), \quad (40)$$

где  $(f w)_{x=l}$  — расход жидкости, втекающей в колпак из трубопровода;  $Q(t)$  — расход, вытекающий из колпака. Расход  $Q(t)$  создается или регулируется агрегатом и предполагается известной функцией времени.

Предполагая, что воздух в колпаке сжимается изотермически, получим

$$p_0 V_0 = p (V_0 - y)$$

или

$$p = p_0 \frac{V_0}{V_0 - y} = p_0 \left( 1 + \frac{y}{V_0} + \frac{y^2}{V_0^2} + \dots \right).$$

Так как в нормально работающем колпаке  $y$  мало по сравнению с  $V_0$ , то

$$p \approx p_0 \left( 1 + \frac{y}{V_0} \right)$$

и

$$\frac{dy}{dt} = \frac{V_0}{p_0} \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right)_{x=l}. \quad (41)$$

Поскольку скорости и давления, а также их производные, входящие в граничные условия, должны удовлетворять также и системе уравнений, для

которой эти граничные условия формулируются, то на основании второго уравнения (26) или (32)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{x=l} = -K \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=l}. \quad (42)$$

Подставляя уравнения (41) и (42) в выражение (40), получим

$$w + \frac{KV_0}{p_0 f} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{Q(t)}{f} \quad \text{при } x = l,$$

т. е. получим второе граничное условие (39), где для воздушного колпака

$$h = \frac{KV_0}{p_0 f}, \quad f(t) = \frac{Q(t)}{f}. \quad (43)$$

Рассуждая аналогичным образом, получим:  
для уравнительной башни [6]

$$h = \frac{FK}{\gamma f}, \quad f(t) = \frac{Q(t)}{f}, \quad (44)$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения башни;  $\gamma$  — объемный вес жидкости; для ресивера компрессора [6]

$$h = \frac{V_0}{f}, \quad f(t) = \frac{Q(t)}{f}; \quad (45)$$

для гасителя типа коробки [3]

$$h = L \frac{F_2}{f} \frac{1 + \omega_2}{1 + \omega_T}, \quad f(t) = \frac{Q(t)}{f}, \quad (46)$$

где  $L$  — длина;  $F_2$  — площадь поперечного сечения коробки;  $\omega_2 = e_2 \frac{K_{жс}}{E}$  — упругая характеристика поперечного сечения коробки,  $\omega_T = e \frac{K_{жс}}{E}$  — упругая характеристика поперечного сечения трубопровода [см. формулы (16), (19) ÷ (22)].

Если рассматривается линейная (или линеаризованная) система уравнений, то в ней, как уже указывалось, под  $p$  и  $w$  можно подразумевать избыточные значения над стационарными, существовавшими в момент  $t \leq 0$ . Тогда начальные условия (38) принимают вид:

$$w = 0, \quad p = 0 \quad \text{при } t \leq 0 \quad (0 < x < l),$$

а в граничных условиях (39)  $\varphi(t) = f(t) = 0$  при  $t \leq 0$ .

Аналогия между движением сжимаемой жидкости в трубах и распространением электрического тока по кабелю. Как уже указывалось, системы уравнений (32) и (37) представляют собой частный случай телеграфных уравнений. Из этого следует, что между движением сжимаемой жидкости по трубам и распространением электрического тока по кабелю должна существовать тесная аналогия.

Действительно, пусть  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $G$  — сопротивление, самоиндукция, емкость и проводимость утечки на единицу длины кабеля. Тогда уравнения для распространения электрического тока по кабелю имеют вид [9]:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= L \frac{\partial J}{\partial t} + RJ; \\ -\frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{1}{C} \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{G}{C} V, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

где  $V$  — потенциал,  $J$  — сила тока в сечении  $x$  в момент времени  $t$ .

Сравнивая между собой уравнения (32), (37) и (47), убеждаемся в их полном сходстве. Очевидно, что при одинаковом виде начальных и граничных условий для всех трех задач, т. е. для движения капальной жидкости и изотермического движения газа по трубам и для распространения электрического тока по кабелю, получаются одинаковые решения. Из этого следует, что все методы решения телеграфных уравнений и все известные их решения могут быть использованы для исследования соответствующих задач о движении сжимаемой жидкости по трубам.

Физические величины, входящие в уравнения (32), (37) и (47) и аналогичные друг другу, сведены в табл. 3.

Таблица 3

Электрическая линия [уравнения (47)]	Капельная жидкость [уравнения (32)]	Изотермический поток газа [уравнения (7)]	Электрическая линия [уравнения (47)]	Капельная жидкость [уравнения (32)]	Изотермический поток газа [уравнения (37)]
$V$	$p$	$p$	$R$	$2ap$	$2a$
$J$	$\omega$	$p\omega$	$C$	$\frac{1}{pc^2}$	$\frac{1}{c^2}$
$L$	$\rho$	1	$G$	0	0

## II. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

Приближенное интегрирование уравнений гиперболического типа методом характеристик давно применяется при решении различных физических и технических задач, в том числе и при расчете напорного и безнапорного неустановившегося движения реальной жидкости [7], [10]—[13]. Однако, прежде чем излагать применение этого метода к интегрированию уравнений (25) или (26), остановимся на некоторых общих вопросах теории характеристик.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, линейное относительно старших производных, т. е. уравнение вида

$$A(x, t) u_{xx} + 2B(x, t) u_{xt} + C(x, t) u_{tt} = \Phi(x, t, u, u_x, u_t), \quad (48)$$

где

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Задача Коши для уравнения (48) может быть сформулирована следующим образом: в плоскости  $xOt$  (фиг. 4) вдоль кривой  $\Gamma_0$  заданы значения функции  $u(s)$  и ее производной по нормали к кривой  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , где  $s$  — длина дуги; требуется найти решение уравнения (48), удовлетворяющее указанным условиям.

Пусть  $u(x, t)$  есть какое-либо решение поставленной задачи Коши. Разложив это решение в окрестности  $\Gamma_0$  в ряд Тейлора, имеем

$$u(x, t) = u(x_1, t_1) + \left[ (x - x_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (t - t_1) \frac{\partial u}{\partial t} \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[ (x - x_1)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x - x_1)(t - t_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + (t - t_1)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] + \dots, \quad (49)$$

где  $u$  и все ее производные в правой части (49) вычислены в точке  $(x_1, t_1)$ , принадлежащей  $\Gamma_0$ . Так как внутри круга сходимости ряда (49), т. е. внутри некоторой полосы, примыкающей к  $\Gamma_0$ , это разложение единственно, то решение задачи Коши в этой полосе однозначно определяется через значения функции  $u$



и ее производных, вычисленных в точках кривой  $\Gamma_0$ . Таким образом, если мы можем найти все частные производные, входящие в (49), то задача Коши оказывается разрешимой.

Так как функция  $u(s)$  вдоль  $\Gamma_0$  известна, то  $\frac{\partial u}{\partial s}$  так же известна и для определения  $u_x$  и  $u_t$  в точках кривой  $\Gamma_0$  имеем следующие два уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \vec{a}_\tau \text{ grad } u = \frac{dx}{ds} u_x + \frac{dt}{ds} u_t; \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \vec{a}_n \text{ grad } u = -\frac{dt}{ds} u_x + \frac{dx}{ds} u_t \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

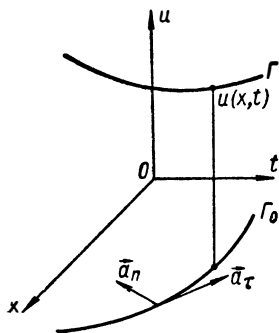
где  $\vec{a}_\tau, \vec{a}_n$  — орты касательной и нормали к кривой  $\Gamma_0^*$ . Поскольку определитель системы (50) равен

$$\left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 = 1,$$

то эта система в всегда имеет решение, т. е.  $u_x$  и  $u_t$  вдоль  $\Gamma_0$  можно считать известными величинами. Из (50) следует, что вдоль  $\Gamma_0$   $u_x$  и  $u_t$  удовлетворяют условию

$$u_x dx + u_t dt = \frac{\partial u}{\partial s} ds = du. \quad (51)$$

Следовательно, задание вдоль  $\Gamma_0$  величин  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}$  равносильно заданию вдоль  $\Gamma_0$  величин  $u, u_x, u_t$ , связанных между собой соотношением (51)\*\*.



Фиг. 4.

Прежде чем переходить к вычислению производных высших порядков, сделаем следующее замечание. Геометрически задание вдоль  $\Gamma_0$  величин  $u, u_x, u_t$ , связанных между собой условием (51), означает задание пространственной кривой  $\Gamma$  (фиг. 4) и угловых коэффициентов касательной к ней плоскости в прямоугольной системе координат  $Oxtu$ . Решение уравнения (48) изображается в этой системе координат в виде некоторой поверхности, называемой интегральной поверхностью. Тогда задачей Коши является нахождение интегральной поверхности  $u = u(x, t)$ , проходящей через начальную кривую  $\Gamma$  и имеющей в ее точках касательные плоскости с заданными угловыми коэффициентами  $u_x$  и  $u_t$ .

Для вычисления производных высших порядков воспользуемся очевидными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} du_x &= u_{xx} dx + u_{xt} dt; \\ du_t &= u_{xt} dx + u_{tt} dt. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

\* Действительно, пусть  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орты прямоугольной системы координат  $Oxtu$ . Тогда для кривой, лежащей в плоскости  $xOt$ ,

$$\vec{a}_\tau = \vec{i} \frac{dx}{ds} + \vec{j} \frac{dt}{ds}, \quad \vec{a}_n = \vec{k} \times \vec{a}_\tau = -\vec{i} \frac{dt}{ds} + \vec{j} \frac{dx}{ds}.$$

\*\* Условие (51) сводится к тому требованию, чтобы задание обеих частных производных  $u_x$  и  $u_t$  вдоль  $\Gamma_0$  не противоречило заданию самой функции  $u$  вдоль  $\Gamma_0$ , т. е. чтобы производная в направлении, касательном  $\Gamma_0$ , вычисленная на основании данных  $u_x$  и  $u_t$ , имела бы те же самые значения, которые получают в силу задания самой функции  $u$  вдоль  $\Gamma_0$ .

Присоединяя к ним уравнение (48), получим систему трех линейных уравнений для определения  $u_{xx}$ ,  $u_{xt}$ ,  $u_{tt}$  вдоль  $\Gamma_0$ :

$$\left. \begin{aligned} Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} &= \Phi; \\ u_{xx}dx + u_{xt}dt &= du_x; \\ u_{xt}dx + u_{tt}dt &= du_t. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ dx & dt & 0 \\ 0 & dx & dt \end{vmatrix} = Adt^2 - 2Bdxdt + Cdx^2.$$

Если  $\Delta \neq 0$ , то  $u_{xx}$ ,  $u_{xt}$ ,  $u_{tt}$  однозначно определяются из уравнений (53). Все высшие производные в этом случае так же определяются однозначно [14], [15] и задача Коши имеет единственное решение.

Если  $\Delta = 0$ , то либо уравнения (53) несовместны, и тогда  $\Gamma$  не принадлежит никакой интегральной поверхности уравнения (48), либо дополнительно должно удовлетворяться условие совместности уравнений (53), т. е. должно выполняться условие

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \Phi & 2B & C \\ du_x & dt & 0 \\ du_t & dx & dt \end{vmatrix} = \Phi dt^2 - 2Bdu_xdt + C(du_xdx - du_tdt) = 0. \quad (54)$$

В последнем случае система уравнений (53), а следовательно, и задача Коши имеют бесчисленное множество решений. Кривая  $\Gamma$ , вдоль которой выполняются условия  $\Delta = 0$ ,  $\Delta_1 = 0$ , называется характеристической кривой, а  $\Gamma_0$  — характеристической проекцией или характеристикой уравнения (48).

Суммируя все выше сказанное, получим, что вдоль характеристики должно выполняться условие

$$Adt^2 - 2Bdxdt + Cdx^2 = 0, \quad (55)$$

представляющее собой, очевидно, уравнение самой характеристики, а также условия (51) и (54).

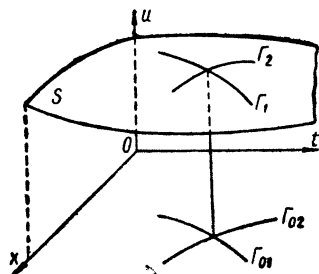
Разрешая уравнение (55) относительно  $dt/dx$ , получим два обыкновенных дифференциальных уравнения первого порядка

$$\frac{dt}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad (56)$$

каждое из которых определяет в плоскости  $xOt$  однопараметрическое семейство характеристик. Если во всей рассматриваемой области  $B^2 - AC > 0$ , то оба семейства характеристик вещественны, а уравнение (48) в этом случае называется уравнением гиперболического типа.

Пусть имеется некоторая интегральная поверхность  $S$  уравнения (48). Семейству характеристик  $\Gamma_{0i}$ , определяемому одним из уравнений (56) (фиг. 5), на поверхности  $S$  будет соответствовать семейство линий  $\Gamma_i$ . Очевидно, что вдоль каждой из линий  $\Gamma_i$  будут выполнены условия (51) и (55). Так как линии  $\Gamma_i$  принадлежат интегральной поверхности, то вдоль них, как было показано, должно выполняться условие совместности системы (53), которое при выполнении (55) имеет вид (54). Из сказанного следует, что линии  $\Gamma_i$  суть характеристические кривые и мы имеем, таким образом, следующую теорему.

**Всякую интегральную поверхность можно покрыть семейством характеристических кривых.** Из этой теоремы следует, что для уравнений гиперболического типа построение интегральной поверхности можно свести к построению



Фиг. 5.

сетки вещественных характеристических кривых, т. е. интегрирование уравнения (48) можно заменить интегрированием уравнений (51), (54) и (56). На этом фундаментальном результате и основан метод характеристик.

Применим теперь полученные результаты к интегрированию уравнений (26). В общем случае гидравлический радиус трубы  $\delta$  и скорость звука  $c$  могут иметь переменные значения вдоль оси трубы, а

$$\lambda = \lambda \left( \frac{\varepsilon}{4\delta}, \frac{4w\delta}{\nu} \right),$$

где  $\varepsilon$  — шероховатость трубы;  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости. Тогда уравнения (26) можно представить в виде<sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + \varphi(x, w) \right], \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= \rho c^2(x) \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

где

$$\varphi(x, w) = \frac{\lambda |w|}{8\delta} w.$$

Очевидно, что второе из уравнений (57) удовлетворяется тождественно, если положить

$$\frac{1}{\rho c^2} p = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (58)$$

Подставив (58) в первое из уравнений (57), имеем

$$c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \varphi \left( x, \frac{\partial F}{\partial t} \right) - 2c \frac{dc}{dx} \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (59)$$

Легко видеть, что уравнение (59) принадлежит к гиперболическому типу, а уравнения характеристик (56) и условие совместности (54) имеют для него соответственно вид:

$$dx - c dt = 0, \quad dx + c dt = 0, \quad (60)$$

$$\left[ \varphi \left( x, \frac{\partial F}{\partial t} \right) - 2c \frac{dc}{dx} \frac{\partial F}{\partial x} \right] dt^2 - d \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx + d \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right) dt = 0. \quad (61)$$

Уравнение (51) удовлетворяется тождественно, так как второе из уравнений (57) и есть условие того, что выражение

$$dF = -\frac{p}{\rho c^2} dx + w dt$$

представляет собой полный дифференциал функции  $F(x, t)$ . Тогда, интегрируя (60), получим в конечном виде уравнения характеристик, проходящих через точку  $(x_0, t_0)$ :

$$T(x) - t = T(x_0) - t_0; \quad (62)$$

$$T(x) + t = T(x_0) + t_0, \quad (63)$$

где

$$T(x) = \int_0^x \frac{dx}{c(x)}.$$

Характеристики, описываемые уравнением (62), называются прямыми характеристиками, а описываемые уравнением (63) — обратными характеристиками.

<sup>1</sup> Если пренебрегать сопротивлениями и полагать  $c = \text{const}$ , то из уравнений (57) с учетом того, что  $\rho = \gamma h$  можно получить

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial w}{\partial t}; \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{c^2}{g} \frac{\partial w}{\partial x},$$

т. е. уравнения (15) и (16) в § 91 (124). (Прим. ред.).

Если скорость звука имеет вдоль трубы постоянное значение, то уравнения характеристик принимают особенно простой вид:

$$x - ct = x_0 - ct_0; \quad (64)$$

$$x + ct = x_0 + ct_0. \quad (65)$$

Подставляя (60) в уравнение (61) и возвращаясь при помощи равенств (58) к прежним обозначениям, после элементарных вычислений получим, что вдоль прямой характеристики должно выполняться дифференциальное соотношение

$$dp + \rho cdw + \rho \frac{\lambda |\omega|}{8\delta} \omega dx = 0, \quad (66)$$

а вдоль обратной характеристики — дифференциальное соотношение

$$dp - \rho cdw + \rho \frac{\lambda |\omega|}{8\delta} \omega dx = 0. \quad (67)$$

Резюмируя все выше сказанное, получим, что интегрирование уравнений движения реальной жидкости в трубах (57) может быть заменено интегрированием уравнений (66) и (67) вдоль характеристик (62) и (63) соответственно.<sup>1</sup>

Идея метода численного решения системы уравнений (62), (63), (66) и (67) заключается в следующем. Рассмотрим в плоскости  $xOt$  две близкие точки 1 и 2, координаты которых обозначим через  $(x_1, t_1)$  и  $(x_2, t_2)$  (фиг. 6). Пусть значения искомых функций  $p$  и  $\omega$  в этих точках известны и равны  $p_1, \omega_1$  и  $p_2, \omega_2$  соответственно.<sup>2</sup> Проведем через точку 1 прямую характеристику, уравнение которой, согласно (62), имеет вид

$$T(x) - t = T(x_1) - t_1, \quad (68)$$

а через точку 2 — обратную характеристику, уравнение которой имеет вид

$$T(x) + t = T(x_2) + t_2. \quad (69)$$

Эти характеристики пересекутся в точке 3, координаты которой  $(x_3, t_3)$  могут быть найдены как графически, так и путем решения системы уравнений (68) и (69)\*.

Заменяя теперь в уравнениях (66) и (67) дифференциалы конечными разностями, получим систему уравнений для определения приближенных значений  $p$  и  $\omega$  в точке 3, которые обозначим через  $p_3^{(1)}, \omega_3^{(1)}$ . Эта система имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} (p_3^{(1)} - p_1) + \bar{\rho}c_1(\omega_3^{(1)} - \omega_1) + \bar{\rho} \frac{\lambda_1 |\omega_1|}{8\delta_1} \omega_1 (x_3 - x_1) &= 0; \\ (p_3^{(1)} - p_2) - \bar{\rho}c_2(\omega_3^{(1)} - \omega_2) + \bar{\rho} \frac{\lambda_2 |\omega_2|}{8\delta_2} \omega_2 (x_3 - x_2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

<sup>1</sup> Из уравнений (64), (65) следует:  $dx/dt = \pm c$ , т. е. закон движения «наблюдателей» Бергерона; пренебрегая в уравнениях (66) и (67) сопротивлениями, можно получить  $dp \pm \rho cdw = 0$ ; отсюда

$$p - p_0 = \pm \rho c (\omega - \omega_0);$$

и далее

$$h - h_0 = \pm \frac{c}{gf} (q - q_0),$$

что совпадает с уравнениями (9) и (14) в § 7. (Прим. ред.).

<sup>2</sup> При этом, естественно, предполагается, что функции  $p$  и  $\omega$  удовлетворяют системе уравнений (57).

\* В зависимости от взаимного расположения точек 1, 2 и 3 может оказаться необходимым провести через точку 1 обратную характеристику, а через точку 2 — прямую.

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — значения  $\lambda$  в точках 1 и 2, а  $\bar{c}_1, \bar{c}_2$  и  $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2$  — средние значения  $c$  и  $\delta$  на рассматриваемых отрезках характеристик. Обычно в качестве этих средних значений принимают значения  $c$  и  $\delta$  в середине рассматриваемого отрезка характеристики, равные

$$\bar{c}_i = c \left( \frac{x_i + x_3}{2} \right), \quad \bar{\delta}_i = \delta \left( \frac{x_i + x_3}{2} \right) \quad (i = 1, 2),$$

или полусуммы из значений  $c$  и  $\delta$  по концам этого отрезка, равные

$$\bar{c}_i = \frac{c(x_i) + c(x_3)}{2}, \quad \bar{\delta}_i = \frac{\delta(x_i) + \delta(x_3)}{2} \quad (i = 1, 2).$$

Найденные из уравнений (70) значения  $p_3^{(1)}$  и  $w_3^{(1)}$  представляют собой первое приближение функций  $p$  и  $w$  в точке 3. Вычисляя  $\lambda_3^{(1)} = \lambda(w_3^{(1)})$  и решая систему уравнений

$$(p_3^{(2)} - p_1) + \bar{p}c_1(w_3^{(2)} - w_1) + p \frac{\bar{\lambda}_1}{8\bar{\delta}_1} \left| \frac{w_1 + w_3^{(1)}}{2} \right| \left| \frac{w_1 + w_3^{(1)}}{2} \right| (x_3 - x_1) = 0;$$

$$(p_3^{(2)} - p_2) - \bar{p}c_2(w_3^{(2)} - w_2) + p \frac{\bar{\lambda}_2}{8\bar{\delta}_2} \left| \frac{w_2 + w_3^{(1)}}{2} \right| \left| \frac{w_2 + w_3^{(1)}}{2} \right| (x_3 - x_2) = 0,$$

где

$$\bar{\lambda}_i = \frac{\lambda_i + \lambda_3^{(1)}}{2} \quad (i = 1, 2),$$

найдем значения  $p_3^{(2)}, w_3^{(2)}$ , т. е. найдем второе приближение функций  $p$  и  $w$

в точке 3. Процесс продолжается до тех пор, пока значения  $p_3, w_3$  для точки 3, полученные при двух последовательных приближениях, совпадут с заданной точностью. Точность, с которой вообще могут быть найдены значения  $p_3, w_3$ , зависит, естественно, от близости точек 1 и 2.

Умея решать описанную выше элементарную задачу отыскания значений  $p_3, w_3$  по заданным значениям  $p_1, w_1$  и  $p_2, w_2$ , можно численно решить систему уравнений (57) при различных начальных и граничных условиях.

Рассмотрим в качестве примера схему применения метода характеристик к решению двух задач с различными типами граничных условий.

1. Требуется найти численное решение системы уравнений (57) при начальных условиях

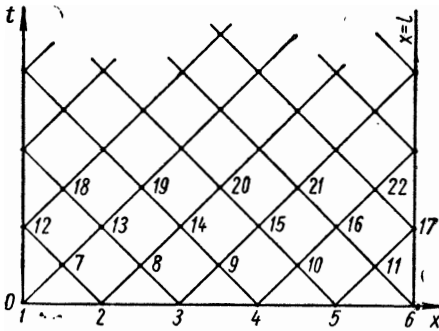
$$w = F_1(x), \quad p = F_2(x) \quad \text{при } t \leq 0 \quad (0 < x < l) \quad (71)$$

и граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} w &= F_3(p) \quad \text{при } x = 0, \\ w &= F_4(p) \quad \text{при } x = l, \quad (t > 0) \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

где  $F_1 - F_4$  — известные функции своих аргументов, а  $l$  — длина трубопровода<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Физические свойства трубопровода, т. е. значения  $c$  и  $\delta$  вдоль его оси, а также зависимость  $\lambda$  от координаты и скорости предполагаются известными.



Фиг. 7.

Так как в уравнения (62) и (63) не входят значения  $p$  и  $w$ , то в плоскости  $xOt$  можно заранее построить сетку характеристик желаемой густоты (фиг. 7).

Далее, зная из начальных условий (71) значения  $p$  и  $w$  в точках 1—6, найдем описанным выше методом их значения в точках 7—11. Для определения значений  $p$  и  $w$  в точке 12 имеем уравнение вдоль обратной характеристики, проходящей через точку 7, и первое из граничных условий (72), т. е. имеем систему уравнений

$$(p_{12} - p_7) - \bar{\rho}c_7(w_{12} - w_7) + \rho \frac{\lambda_7 | w_7 |}{8\delta_7} w_7 (x_{12} - x_7) = 0,$$

$$w_{12} = F_3(p_{12}),$$

в которой, кроме  $p_{12}$  и  $w_{12}$ , все остальные величины уже известны. Для определения значений  $p$  и  $w$  в точке 17 имеем, как легко видеть, систему уравнений

$$(p_{17} - p_{11}) + \bar{\rho}c_{11}(w_{17} - w_{11}) + \rho \frac{\lambda_{11} | w_{11} |}{8\delta_{11}} w_{11} (x_{17} - x_{11}) = 0,$$

$$w_{17} = F_4(p_{17}),$$

где, кроме искомых значений  $p_{17}$ ,  $w_{17}$ , все остальные величины также уже известны.

Зная значения  $p$  и  $w$  в точках 7—11, находим их значения в точках 13—16 и т. д. Расчет ведется до желаемого момента времени.

2. Требуется найти численное решение системы уравнений (57) при начальных условиях

$$w = F_1(x), \quad p = F_2(x) \quad \text{при } t \leq 0 \quad (0 < x < l)$$

и граничных условиях

$$p = F_3(t) \quad \text{при } x = 0, \quad (t > 0)$$

$$w + h \frac{\partial w}{\partial x} = F_4(t) \quad \text{при } x = l,$$

где  $F_1 - F_4$  — известные функции своих аргументов, а  $h$  — известная константа.

Поскольку задача 2 отличается от задачи 1 лишь граничными условиями, то очевидно, что построение сетки характеристик (фиг. 7) и способ определения значений  $p$  и  $w$  в точках 7—11 и 13—16 ничем не отличаются от описанных выше. Значения  $p$  и  $w$  в точке 12 находятся, как легко видеть, из системы уравнений

$$(p_{12} - p_7) - \bar{\rho}c_7(w_{12} - w_7) + \rho \frac{\lambda_7 | w_7 |}{8\delta_7} w_7 (x_{12} - x_7) = 0,$$

$$p_{12} = F_3(t_{12}).$$

Определение значений  $p$  и  $w$  в точке 17 несколько сложнее, так как во втором из граничных условий содержится неизвестная величина  $\frac{\partial w}{\partial x}$ . Если ординаты точек 16 и 17 равны между собой, т. е. если  $t_{16} = t_{17}$ , то  $\frac{\partial w}{\partial x}$  можно заменить отношением конечных разностей

$$\frac{w_{17} - w_{16}}{x_{17} - x_{16}}.$$

Тогда для определения  $p_{17}$  и  $w_{17}$  имеем систему уравнений:

$$(p_{17} - p_{11}) + \bar{\rho}c_{11}(w_{17} - w_{11}) + \rho \frac{\lambda_{11} | w_{11} |}{8\delta_{11}} w_{11} (x_{17} - x_{11}) = 0;$$

$$w_{17} + h \frac{w_{17} - w_{16}}{x_{17} - x_{16}} = F_4(t_{17}).$$

Если  $t_{16} \neq t_{17}$ , то величину  $\omega_{16}$  заменяем значением  $\omega$  в точке пересечения характеристики, проходящей через точки  $11$  и  $21$ , с прямой  $t = t_{17}$ , которое находится интерполированием. Величину  $x_{16}$  заменяем абсциссой точки пересечения указанной характеристики с прямой  $t = t_{17}$ .

Задача 2 может быть решена и иным способом. Идея этого способа заключается в исключении  $p$  из уравнений (57) и построении метода характеристик для полученного таким образом уравнения второго порядка относительно  $\omega$  [16]. Исключение  $p$  из начальных и граничных условий также производится при помощи уравнений (57). Так как этот способ, упрощая отыскание значений  $\omega$  в точках границы, приводит к необходимости решать для внутренних точек системы из трех уравнений, то мы на нем не останавливаемся.

В заключение отметим, что метод характеристик может быть развит и для квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка, а также непосредственно для линейных и квазилинейных гиперболических систем уравнений первого порядка [16]—[18].

### III. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ

Телеграфные уравнения (32), которые рассматриваются в настоящем разделе, принадлежат к числу хорошо изученных линейных уравнений математической физики, и методам их интегрирования посвящена обширная литература. Они рассматриваются в ряде руководств по акустике, электротехнике, гидродинамике и т. д., а также в любом современном курсе математической физики [9], [17], [19]—[23].

Ряд работ посвящен методам интегрирования, являющимся модификациями классического метода Фурье, — разделения переменных. Хотя этот метод является несколько громоздким, он позволяет сравнительно простым образом получить решение в тех случаях, когда система фундаментальных функций, из которых составляется общее решение, ортогональна, что, в свою очередь, зависит от характера граничных условий. Если же система фундаментальных функций неортогональна, то решение существенно усложняется и требует обычно специальных приемов. Широкое распространение за последнее время (примерно 25—30 лет) получил операционный метод [9], [24]—[28], позволяющий довольно быстрым путем получить решение задачи в тех случаях, когда получаемые «изображения» находятся среди табличных, приводимых в большинстве руководств и монографий по операционному исчислению и его приложениям. Если «изображение», получаемое в процессе решения, не находится в числе табличных «изображений», переход от «изображения» к «оригиналу» может оказаться довольно сложным и операционный метод не будет иметь в этом случае особых преимуществ. Очень близким к операционному является метод контурного интегрирования в плоскости комплексной частоты, когда общее решение ищется не в виде ряда, а в виде интеграла, взятого по надлежаще проведенному контуру в плоскости комплексного переменного, за которое принимается частота колебаний  $\omega$  [6], [29]. В случае линейных граничных условий с коэффициентами, зависящими от времени, удобным оказывается видоизменение метода Римана, позволяющее свести задачу к решению интегральных уравнений Вольтерра [30]. При этом и для граничных условий типа (39) решение в ряде случаев получается по виду более простым, чем при использовании других методов решения.

#### § 1. Классический метод Фурье

Рассмотрим исходные дифференциальные уравнения (32):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + 2a\omega \right); \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= \rho c^2 \frac{\partial \omega}{\partial x} = K \frac{\partial \omega}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Требуется найти решение этой системы при начальных условиях

$$w = F_1(x), p = F_2(x) \text{ при } t \leq 0 \quad (0 < x < l) \quad (74)$$

и граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} p &= \varphi(t) \text{ при } x = 0; \\ & \quad (t > 0) \\ w + h \frac{\partial w}{\partial x} &= f(t) \text{ при } x = l. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Исключая из формул (73), (74) и (75) давление  $p$ , получим уравнение 2-го порядка относительно скорости  $w$ :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial w}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (76)$$

которое надлежит проинтегрировать при начальных и граничных условиях:

$$w = F_1(x), \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{F_2'(x)}{\rho} - 2aF_1(x) = F_3(x) \text{ при } t \leq 0 \quad (0 < x < l); \quad (77)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{\varphi'(t)}{\rho c^2} \text{ при } x = 0, \\ & \quad (t > 0) \\ w + h \frac{\partial w}{\partial x} &= f(t) \text{ при } x = l. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Классический метод разделения переменных, или метод Фурье, заключается в том, что ищутся частные решения уравнения (76), удовлетворяющие условиям (78), в виде произведений двух функций, из которых одна зависит только от  $x$ , а другая — только от  $t$ , т. е. в виде

$$w = X(x) T(t). \quad (79)$$

Найденные таким путем частные решения умножаются на некоторые коэффициенты и суммируются так, чтобы удовлетворить начальным условиям (77). Очевидно, что построенное таким образом выражение будет решением поставленной задачи только в том случае, когда граничные условия однородны, т. е. имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \text{ при } x = 0; \\ & \quad (t > 0) \\ w + h \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \text{ при } x = l. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Если это условие не выполнено, то предварительно необходимо провести замену переменных так, чтобы привести граничные условия к однородному виду. Следуя изложенному плану, подставим выражение (79) в уравнение (76) и получим

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'' + 2aT'}{c^2 T}.$$

Очевидно, что как левая, так и правая части этого равенства равны постоянной, обозначив которую через  $(-\mu^2)$ , получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X'' + \mu^2 X = 0; \quad (81)$$

$$T'' + 2aT' + c^2 \mu^2 T = 0. \quad (82)$$



Из (80) следует, что функция  $X(x)$  должна удовлетворять условиям:

$$X'(0) = 0; \quad (83)$$

$$X(l) + hX'(l) = 0, \quad (84)$$

так как в противном случае было бы

$$T(t) \equiv 0, \quad w \equiv 0,$$

а мы ищем нетривиальное решение. На функцию  $T(t)$  граничные условия дополнительных ограничений не налагают.

Таким образом, отыскание функции  $X(x)$  приводит к задаче Штурма-Лиувилля: требуется найти значения  $\mu$ , называемые собственными значениями, при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$X'' + \mu^2 X = 0;$$

$$X'(0) = X(l) + hX'(l) = 0,$$

называемые собственными функциями, а также найти эти функции.

Общие решения уравнений (81) и (82) имеют, как известно, вид:

$$X = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x; \quad (85)$$

$$T = e^{-at} (C_3 \cos bt + C_4 \sin bt), \quad (86)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные постоянные, а

$$b = \sqrt{\mu^2 c^2 - a^2}.$$

Подставляя решение (85) в условия (83) и (84), получим, что для существования нетривиального решения должно быть  $C_2 = 0$  и

$$\cos \mu l - \mu h \sin \mu l = 0, \quad (87)$$

откуда следует, что собственные значения нашей задачи суть корни уравнения (87), которые мы обозначим через

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$$

Каждому из этих собственных значений соответствует своя собственная функция

$$X_l = \cos \mu_l x, \quad (88)$$

определяемая с точностью до постоянного множителя, который без ограничения общности можно положить равным единице, и своя функция  $T_l$

$$T_l = e^{-at} (C_{3l} \cos b_l t + C_{4l} \sin b_l t), \quad (89)$$

где

$$b_l = \sqrt{\mu_l^2 c^2 - a^2}.$$

Подставляя решения (88) и (89) в выражение (79), получим искомые частные решения

$$w_l(x, t) = X_l T_l = e^{-at} (C_{3l} \cos b_l t + C_{4l} \sin b_l t) \cos \mu_l x.$$

Решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, будем, как уже указывалось, искать в виде

$$w(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} w_l = e^{-at} \sum_{l=1}^{\infty} (C_{3l} \cos b_l t + C_{4l} \sin b_l t) \cos \mu_l x. \quad (90)$$

\* Отрицательные значения корней рассматривать нет смысла, так как они не дают независимых решений. Действительно, если  $(-\mu_l)$  есть корень уравнения (87), то  $\mu_l$  также есть корень этого уравнения и  $X(-\mu_l) = X(\mu_l)$ ,  $T(-\mu_l) = T(\mu_l)$ .

Подставив выражение (90) в начальные условия (77), получим

$$F_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_{3i} \cos \mu_i x; \quad (91)$$

$$F_3(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i C_{4i} - a C_{3i}) \cos \mu_i x, \quad (92)$$

откуда видно, что задача о нахождении коэффициентов  $C_{3i}$ ,  $C_{4i}$  свелась к разложению начальных условий в ряды по собственным функциям.

По определению собственных функций

$$X_i'' + \mu_i^2 X_i = 0, \quad X_j'' + \mu_j^2 X_j = 0.$$

Умножая первое из этих уравнений на  $X_j$ , второе на  $X_i$ , вычитая почленно и интегрируя по  $x$  от 0 до  $l$ , получим

$$(\mu_i^2 - \mu_j^2) \int_0^l X_i X_j dx + \int_0^l \frac{d}{dx} (X_i' X_j - X_i X_j') dx = 0. \quad (93)$$

Так как в силу условий (83) и (84)

$$\int_0^l \frac{d}{dx} (X_i' X_j - X_i X_j') dx = 0,$$

а  $\mu_i \neq \mu_j$ , то из уравнения (93) следует, что

$$\int_0^l X_i X_j dx = \int_0^l \cos \mu_i x \cos \mu_j x dx = 0 \quad (i \neq j),$$

т. е. собственные функции  $X_i$  образуют ортогональную систему. Из этого следует, что если  $F_1(x)$  и  $F_3(x)$  суть достаточно гладкие<sup>1</sup> функции, то они могут быть разложены в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды (91) и (92).

Поступая с рядами (91) и (92) подобно тому, как это делается с рядами Фурье, получим

$$C_{3i} = \frac{\int_0^l F_1(x) \cos \mu_i x dx}{\int_0^l \cos^2 \mu_i x dx} = 2 \frac{1 + h^2 \mu_i^2}{h + l(1 + h^2 \mu_i^2)} \int_0^l F_1(x) \cos \mu_i x dx; \quad (94)$$

$$b_i C_{4i} - a C_{3i} = \frac{\int_0^l F_3(x) \cos \mu_i x dx}{\int_0^l \cos^2 \mu_i x dx} = 2 \frac{1 + h^2 \mu_i^2}{h + l(1 + h^2 \mu_i^2)} \int_0^l F_3(x) \cos \mu_i x dx, \quad (95)$$

так как, согласно уравнению (87),  $\operatorname{ctg} \mu_i l = h \mu_i$ .

<sup>1</sup> Требуется, чтобы  $F_1(x)$  и  $F_3(x)$  имели непрерывные первые и кусочно непрерывные вторые производные.

Определив  $C_{3i}$  и  $C_{4i}$  из формул (94) и (95) и подставив их в выражение (90), получим искомое решение нашей задачи.

В качестве примера на применение метода Фурье рассмотрим задачу о гидравлическом ударе вязкой жидкости в простом трубопроводе без камеры. Начальные условия будем считать нулевыми. Тогда

$$\left. \begin{aligned} w = 0, p = 0 & \text{ при } t \leq 0 \quad (0 < x < l); \\ p = 0 & \text{ при } x = 0; \\ w = A = \text{const} & \text{ при } x = l. \end{aligned} \right\} \quad (t > 0) \quad (96)$$

Исключая из условий (96) и (97) давление  $p$ , получим начальные и граничные условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t \leq 0 \quad (0 < x < l); \quad (98)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 & \text{ при } x = 0; \\ w = A = \text{const} & \text{ при } x = l, \end{aligned} \right\} \quad (t > 0) \quad (99)$$

при которых надлежит проинтегрировать уравнение (76).

Для того чтобы сделать граничные условия однородными, введем новую функцию  $V(x, t)$ , определяемую равенством

$$w(x, t) = \frac{Ax^2}{l^2} + V(x, t). \quad (100)$$

Подставляя равенство (100) в (76), (98) и (99), получим, что функция  $V(x, t)$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial V}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{2A}{l^2} \right)$$

и начальным и граничным условиям

$$V = -\frac{Ax^2}{l^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t \leq 0 \quad (0 < x < l);$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 & \text{ при } x = 0; \\ V = 0 & \text{ при } x = l. \end{aligned} \right\} \quad (t > 0)$$

Так как уравнение для  $V$  получилось неоднородным, будем искать  $V(x, t)$  в виде суммы двух функций

$$V(x, t) = V_1(x, t) + V_2(x, t), \quad (101)$$

удовлетворяющих следующим условиям:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial V_1}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}; \quad (102)$$

$$V_1 = -\frac{Ax^2}{l^2}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t \leq 0 \quad (0 < x < l); \quad (103)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x} = 0 & \text{ при } x = 0; \\ V_1 = 0 & \text{ при } x = l; \end{aligned} \right\} \quad (t > 0), \quad (104)$$

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial V_2}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{2A}{l^2} \right); \quad (105)$$

$$V_2 = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t \leq 0 \quad (0 < x < l); \quad (106)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x = 0; \\ V_2 &= 0 \quad \text{при } x = l. \end{aligned} \right\} \quad (t > 0), \quad (107)$$

Очевидно, что введенные таким образом функции  $V$ ,  $V_1$  и  $V_2$  удовлетворяют всем условиям задачи.

Будем искать сначала функцию  $V_1(x, t)$ , для которой дифференциальное уравнение (102) однородно. Из сравнения выражений (103) и (77) видно, что в рассматриваемом случае

$$F_1(x) = -\frac{Ax^2}{l^2}, \quad F_3(x) = 0. \quad (108)$$

Далее, так как  $h = 0$ , то из уравнения (87) следует, что

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{l}, \quad b_n = \sqrt{\left( \frac{2n-1}{2} \frac{\pi c}{l} \right)^2 - a^2}. \quad (109)$$

Подставляя выражения (108) и (109) в формулы (94) и (95), после несложных вычислений получим

$$C_{3n} = -\frac{(-1)^{n+1} 4A}{\pi(2n-1)} \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} \right], \quad C_{4n} = \frac{a}{b_n} C_{3n}. \quad (110)$$

Тогда, после подстановки выражений (110) в формулу (90), имеем

$$\begin{aligned} V_1(x, t) &= -\frac{4A}{\pi} e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} \right] \times \\ &\times \left( \cos b_n t + \frac{a}{b_n} \sin b_n t \right) \cos \left( \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l} \right). \end{aligned} \quad (111)$$

Вычисление функции  $V_2(x, t)$  путем применения формул (94) и (95) произвести нельзя, так как уравнение (105) неоднородно. Будем искать  $V_2(x, t)$  в виде, аналогичном  $V_1(x, t)$ :

$$V_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} H_n(t) \cos \left( \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l} \right). \quad (112)$$

Подставив выражение (112) в уравнение (105), получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[ H_n'' + 2aH_n' - \left( \frac{2n-1}{2} \frac{\pi c}{l} \right)^2 H_n \right] \times \\ \times \cos \left( \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l} \right) = 2A \frac{c^2}{l^2}. \end{aligned} \quad (113)$$

Разлагая правую часть уравнения (113) в ряд Фурье по косинусам аргумента  $\frac{\pi x}{2l}$ , имеем

$$2A \frac{c^2}{l^2} = \frac{8Ac^2}{\pi l^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos \left( \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l} \right). \quad (114)$$

Подставляя выражение (114) в уравнение (113), получим для  $H_n(t)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$H_n'' + 2aH_n' - \left( \frac{2n-1}{2} \frac{\pi c}{l} \right)^2 H_n = \frac{8Ac^2}{\pi l^2},$$

общий интеграл которого есть

$$H_n = \frac{32A}{\pi^3 (2n-1)^3} + e^{-at} (F_n \cos b_n t + G_n \sin b_n t),$$

где  $b_n$  определяется по формуле (109), а  $F_n$  и  $G_n$  — произвольные постоянные. Тогда на основании формулы (112),

$$V_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[ \frac{32A}{\pi^3 (2n-1)^3} + e^{-at} (F_n \cos b_n t + G_n \sin b_n t) \right] \cos \left( \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l} \right). \quad (115)$$

Подставив выражение (115) в условие (106), после несложных вычислений получим

$$F_n = -\frac{32A}{\pi^3 (2n-1)^3}, \quad G_n = -\frac{a}{b_n} \frac{32A}{\pi^3 (2n-1)^3}. \quad (116)$$

С учетом (116) формулу (115) можно переписать в виде

$$V_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{32A}{\pi^3 (2n-1)^3} \times \\ \times \left[ 1 - e^{-at} \left( \cos b_n t + \frac{a}{b_n} \sin b_n t \right) \right] \cos \left( \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l} \right). \quad (117)$$

Теперь, согласно выражениям (100), (101), (111) и (117), для скорости  $w$  имеем

$$w(x, t) = \frac{Ax^2}{l^2} + \frac{32A}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \cos \left( \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l} \right) - \\ - \frac{4A}{\pi} e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \left( \cos b_n t + \frac{a}{b_n} \sin b_n t \right) \cos \left( \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l} \right). \quad (118)$$

Полученное для  $w(x, t)$  выражение может быть несколько упрощено. В самом деле, так как

$$(-1)^{n+1} \cos \left( \frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l} \right) = \sin \left[ \frac{2n-1}{2} \frac{\pi(l-x)}{l} \right],$$

то [31]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l}\right) = \frac{\pi^3}{32} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (119)$$

Подставив выражение (119) в (118), имеем

$$w(x, t) = A - \frac{4A}{\pi} e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} (\cos b_n t + \frac{a}{b_n} \sin b_n t) \cos\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi x}{l}\right). \quad (120)$$

Пользуясь выражением (120), легко найти давление  $p$  в сечении  $x=l$ . Действительно из первого уравнения (73) следует, что

$$p(l, t) = -\rho \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t} + 2aw\right) dx, \quad (121)$$

так как по условию  $p(0, t) = 0$ . Подставляя (120) в уравнение (121) и выполняя соответствующие вычисления, получаем

$$p(l, t) = -\left(2a\rho l A + \frac{4\rho c A}{\pi} e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(b_n t - 2\theta_n)}{(2n-1) \cos \theta_n}\right), \quad (122)$$

где  $\operatorname{tg} \theta_n = \frac{a}{b_n}$ .

## § 2. Метод контурных интегралов

При решении классическим методом Фурье, как мы видели, скорость и давление ищутся в виде некоторых бесконечных рядов, получаемых надлежащим суммированием частных решений исходных уравнений (73) неустановившегося движения.

Частные решения уравнений (73) представляют собой колебания — бегущие волны — с некоторыми определенными частотами, и ряды, составленные из таких частных решений, представляют результат суммирования или, как иногда говорят, суперпозиции отдельных бегущих волн.

Возможен несколько другой подход к решению задачи: можно предполагать частоту комплексной и искать общее решение уравнений (73) не в виде суммы, а в виде контурного интеграла в плоскости этой комплексной частоты. При этом контур интегрирования и параметры подынтегральной функции, зависящие от частоты, должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись начальные и граничные условия задачи.

Покажем, как это делается для нулевых начальных условий

$$w(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = 0 \quad (0 < x < l) \quad (123)$$

и граничных условий (75).

Случай ненулевых начальных условий (74) будет рассмотрен отдельно.

Будем искать частные решения системы (73) в виде бегущих волн с комплексной частотой  $\omega$ :

$$\left. \begin{aligned} w &= (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) e^{i\omega t}; \\ v &= (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx) e^{i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4, k$  — коэффициенты, подлежащие определению, которые не должны зависеть от  $x, t$ , но могут зависеть от  $\omega$ . Относительно  $k$ , называемого

обычно волновым числом, будем предполагать, что его вещественная часть положительна. Найдем сначала связь между коэффициентами  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , а также между  $k$  и  $\omega$ . Из выражений (124) получим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial t} &= -i\omega (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx) e^{i\omega t}; \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= k (-C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) e^{i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

Согласно второму уравнению системы (73), получаем, сравнивая в выражениях (125) коэффициенты при  $\cos kx$  и  $\sin kx$ :

$$C_3 = i \frac{k}{\omega} K C_2, \quad C_4 = -i \frac{k}{\omega} K C_1. \quad (126)$$

Подставим теперь выражения (124) в первое уравнение системы (73). С учетом формул (126) будем иметь

$$-k \frac{ik}{\omega} K (-C_2 \sin kx - C_1 \cos kx) e^{i\omega t} =$$

$$= \rho (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) (i\omega + 2a) e^{i\omega t}$$

или, замечая, что  $K = \rho c^2$ ,

$$k^2 = \frac{\rho\omega(\omega - i2a)}{K} = \frac{\omega^2 - i2a\omega}{c^2}. \quad (127)$$

Если  $\omega$  вещественна, то для определения вещественной и мнимой частей  $k$  положим

$$k = \frac{\omega' - ia'}{c}. \quad (128)$$

Из выражений (127) и (128) находим

$$\frac{\omega^2 - i2a\omega}{c^2} = \frac{\omega'^2 - a'^2 - i2a'\omega'}{c^2},$$

откуда, сравнивая действительную и мнимую части, получаем для  $\omega'$  и  $a'$  два уравнения

$$\omega'^2 - a'^2 = \omega^2, \quad a'\omega' = a\omega. \quad (129)$$

Разрешая уравнения (129) относительно  $\omega', a'$ , получим для каждой из этих величин биквадратные уравнения, из которых, учитывая, что вещественная часть  $k$  положительна, найдем

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4 + 4a^2\omega^2} + \omega^2}{2}}; \\ a' &= \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4 + 4a^2\omega^2} - \omega^2}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Если  $a$  мало по сравнению с  $\omega$ , то приближенно

$$\omega' \approx \omega, \quad a' \approx a. \quad (131)$$

Таким образом, волновое число  $k$  выражается через частоту  $\omega$ , а коэффициенты  $C_3, C_4$ , согласно (126), — через  $C_1, C_2$ . В результате частные решения (124) могут быть выражены всего через два коэффициента  $C_1, C_2$  и частоту  $\omega$

$$w = (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) e^{i\omega t}; \quad (132)$$

$$p = i \frac{k}{\omega} K (C_2 \cos kx - C_1 \sin kx) e^{i\omega t}. \quad (133)$$

Будем искать теперь общие решения для скорости  $w$  и давления  $p$  не в виде рядов, соответствующих той или иной дискретной последовательности частот  $\omega_1, \omega_2, \dots$ , определяемой граничными условиями задачи, как в методе Фурье, а в виде контурных интегралов по некоторому контуру  $L$  в плоскости  $\omega$ , рассматриваемой как комплексное переменное:

$$w = \int_L (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) e^{i\omega t} d\omega; \quad (134)$$

$$p = iK \int_L \frac{k}{\omega} (C_2 \cos kx - C_1 \sin kx) e^{i\omega t} d\omega. \quad (135)$$

Такое представление  $w, p$  означает, что мы ищем скорость и давление уже не в виде дискретного числа колебаний с конечными амплитудами, а в виде последовательности бегущих волн с непрерывно меняющимися частотами и амплитудами, причем и те и другие рассматриваются как комплексные величины. Коэффициенты при  $e^{i\omega t}$  в интегралах (134), (135) называются спектральными функциями или частотными спектрами. При этом  $C_1, C_2$  будем считать неизвестными функциями  $\omega$ , которые, наряду с должным образом выбранным контуром интегрирования  $L$ , должны быть определены так, чтобы были удовлетворены начальные условия (123) и граничные условия (75). Граничные условия (75) с учетом формул (134) и (135) принимают следующий вид:

$$x = 0; \quad p = \varphi(t) = iK \int_L \frac{k}{\omega} C_2 e^{i\omega t} d\omega; \quad (136)$$

$$x = l; \quad w + h \frac{\partial w}{\partial x} = f(t) = \int_L [C_1 (\cos kl - kh \sin kl) + C_2 (\sin kl + kh \cos kl)] e^{i\omega t} d\omega. \quad (137)$$

Постараемся теперь представить известные граничные функции  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  также в виде непрерывно меняющейся последовательности гармонических колебаний, т. е. в виде контурных интегралов, взятых по тому же самому контуру  $L$  в плоскости  $\omega$ :

$$\varphi(t) = \int_L \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad (138)$$

$$f(t) = \int_L F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (139)$$

т. е. найти частотные спектры  $\Phi(\omega), F(\omega)$  функций  $\varphi(t), f(t)$ . Тогда, сравнивая подынтегральные функции в выражениях (136) и (138), (137) и (139), получаем связь между  $\Phi(\omega), F(\omega)$  и коэффициентами  $C_1, C_2$  в виде следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\omega) &= iK \frac{k}{\omega} C_2; \\ F(\omega) &= C_1 (\cos kl - kh \sin kl) + C_2 (\sin kl + kh \cos kl), \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

откуда для  $C_1, C_2$  получаем:

$$C_1 = \frac{F(\omega)}{\cos kl - kh \sin kl} + \frac{i}{K} \frac{\omega}{k} \frac{\Phi(\omega) (\sin kl + kh \cos kl)}{\cos kl - kh \sin kl}; \quad (141)$$

$$C_2 = -\frac{i}{K} \frac{\omega}{k} \Phi(\omega). \quad (142)$$



Таким образом, если частотные спектры  $F(\omega)$ ,  $\Phi(\omega)$  известны, то, подставляя  $C_1$ ,  $C_2$  из формул (141), (142) в формулы (134), (135), получим решение, формально удовлетворяющее граничным условиям (75). Удовлетворение же нулевым начальным условиям (123) может быть достигнуто надлежащим выбором контура интегрирования  $L$ .

Очевидно, задача заключается в нахождении в формулах (138) и (139) спектральных функций  $\Phi(\omega)$ ,  $F(\omega)$  и выборе контура интегрирования  $L$  для заданных известных функций времени  $\varphi(t)$ ,  $f(t)$ .

Если функции  $\varphi(t)$ ,  $f(t)$  удовлетворяют всем условиям Дирихле, то решение получается с помощью интеграла Фурье следующим образом. Как известно, [19], [22], [32], функции переменной  $t$ , удовлетворяющие условиям Дирихле, т. е. ограниченные, имеющие конечное число разрывов на конечных интервалах и интегрируемые в пределах  $-\infty < t < +\infty$ , могут быть представлены интегралами Фурье в комплексной форме:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) e^{i\omega(t-\alpha)}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{i\omega(t-\alpha)} d\alpha$$

или, учитывая, что в нашем случае  $\varphi(t) = f(t) = 0$  для  $t \leq 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) e^{i\omega(t-\alpha)} d\alpha; \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} f(\alpha) e^{i\omega(t-\alpha)} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

Представим формулы (143) в виде

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (144)$$

т. е. представим  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  в виде непрерывной последовательности гармонических колебаний с непрерывно меняющимися частотами  $\omega$  и амплитудами  $\Phi(\omega)d\omega$  и  $F(\omega)d\omega$ , причем из сравнения формул (143) и (144) для спектральных функций или частотных спектров  $\Phi(\omega)$  и  $F(\omega)$  получается:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) e^{-i\omega\alpha} d\alpha; \\ F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(\alpha) e^{-i\omega\alpha} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Сравнивая формулы (144) с выражениями (138) и (139), находим вид контура  $L$ . Очевидно, в данном случае контур  $L$  представляет собой вещественную ось плоскости  $\omega$  и интегрирование в выражениях (138) и (139) происходит, как и в формулах (144), в пределах  $-\infty < \omega < +\infty$ .

Если, как это обычно и бывает, функции  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  не удовлетворяют одному из условий Дирихле, а именно не интегрируемы в интервале  $0 < t < \infty$ , то контур  $L$  в формулах (138) и (139) уже не совпадает с вещественной осью  $\omega$ . Вид контура  $L$  можно определить, как сейчас будет показано, для довольно широкого класса функций  $\varphi(t)$ ,  $f(t)$ , не интегрируемых в пределах  $-\infty, \infty$ , но равных нулю при  $t \leq 0$  и при  $t \rightarrow \infty$  возрастающих медленнее экспоненциальной функции

$$\left. \begin{aligned} |\varphi(t)| &< M e^{\sigma_0 t}; \\ |f(t)| &< M e^{\sigma_0 t}, \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

где  $M, \sigma_0$  — некоторые положительные постоянные. В этом случае замечаем, что функции  $\varphi(t) e^{-\sigma t}$ ,  $f(t) e^{-\sigma t}$ ,  $\sigma > \sigma_0$  удовлетворяют всем условиям Дирихле,

так как интегралы  $\int_0^{\infty} |\varphi(t)| e^{-\sigma t} dt$ ,  $\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt$  конечны:

$$\int_0^{\infty} |\varphi(t)| e^{-\sigma t} dt < \int_0^{\infty} M e^{\sigma_0 t} e^{-\sigma t} dt = \frac{M}{\sigma - \sigma_0};$$

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \int_0^{\infty} M e^{\sigma_0 t} e^{-\sigma t} dt = \frac{M}{\sigma - \sigma_0}.$$

Функции  $\varphi(t) e^{-\sigma t}$ ,  $f(t) e^{-\sigma t}$  теперь можно представить в виде интегралов Фурье (143), т. е. в виде:

$$\varphi(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) e^{-\sigma\alpha} e^{i\omega(t-\alpha)} d\alpha;$$

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} f(\alpha) e^{-\sigma\alpha} e^{i\omega(t-\alpha)} d\alpha,$$

или

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) e^{-(\sigma+i\omega)\alpha} d\alpha \right] e^{(\sigma+i\omega)t} d\omega; \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(\alpha) e^{-(\sigma+i\omega)\alpha} d\alpha \right] e^{(\sigma+i\omega)t} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Обозначим

$$\sigma + i\omega = i\omega_1. \quad (148)$$

Множитель  $i$  в формуле (148) введен для того, чтобы решения имели вид бегущих волн.

Перейдем от интегрирования по  $\omega$  к интегрированию по  $\omega_1$ . Согласно формуле (148),  $\omega_1 = \omega + \frac{\sigma}{i} = \omega - i\sigma$ .

Таким образом, контуру интегрирования — действительной оси плоскости  $\omega$  — соответствует в плоскости  $\omega_1$  прямая, параллельная действительной оси  $\omega_1$  и отстоящая от нее на расстоянии  $-i\sigma$ . Формулы (147) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \Phi(\omega, \sigma) e^{i\omega_1 t} d\omega_1; \\ f(t) &= \int_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} F(\omega, \sigma) e^{i\omega_1 t} d\omega_1, \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\omega, \sigma) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) e^{-(\sigma+i\omega)\alpha} d\alpha; \\ F(\omega, \sigma) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(\alpha) e^{-(\sigma+i\omega)\alpha} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

В дальнейшем для упрощения обозначений можно опустить при написании  $\omega_1$  индекс «1» и вместо  $\Phi(\omega, \sigma)$ ,  $F(\omega, \sigma)$  писать просто  $\Phi(\omega)$ ,  $F(\omega)$ . Тогда получим следующие представления граничных функций  $\varphi(t)$ ,  $f(t)$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \\ f(t) &= \int_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Прямая  $-\infty-i\sigma$ ,  $\infty-i\sigma$  и есть нужный нам контур интегрирования  $L$ , о котором выше шла речь. Расстояние  $\sigma$  следует выбрать так, чтобы все особые точки функций  $\Phi(\omega)$ ,  $F(\omega)$  лежали бы над этой прямой.

Теперь можно подставить выражения  $C_1$ ,  $C_2$  из формул (141), (142) в формулы (134), (135) и получить после простых преобразований следующие представления для  $w$  и  $p$ :

$$\begin{aligned} w &= \int_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \left[ \frac{F(\omega) \cos kx}{\cos kl - kh \sin kl} + \right. \\ &+ \left. \frac{i\omega}{Kk} \Phi(\omega) \frac{\sin k(l-x) + kh \cos k(l-x)}{\cos kl - kh \sin kl} \right] e^{i\omega t} d\omega; \end{aligned} \quad (152)$$

$$\begin{aligned} p &= -iK \int_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \frac{k}{\omega} \frac{F(\omega) \sin kx}{\cos kl - kh \sin kl} e^{i\omega t} d\omega + \\ &+ \int_{-\infty-i\sigma}^{\infty-i\sigma} \Phi(\omega) \frac{\cos k(l-x) - kh \sin k(l-x)}{\cos kl - kh \sin kl} e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (153)$$

Очевидно, что интегралы (152) и (153) удовлетворяют граничным условиям (75) и исходным дифференциальным уравнениям (73). Остается доказать, что эти интегралы удовлетворяют также нулевым начальным условиям (123). Из этого доказательства, между прочим, будет вытекать и способ их вычисления.

Покажем сначала, что  $|\Phi(\omega)| \rightarrow 0$ ,  $|F(\omega)| \rightarrow 0$  при  $|\omega| \rightarrow \infty$ ,  $\arg \omega > 0$  при  $t > 0$ , для чего введем следующую скачкообразную функцию  $\Psi(t)$ :

$$\left. \begin{aligned} t \leq 0, \quad \Psi(t) &= 0; \\ t \geq 0, \quad \Psi(t) &= Me^{\sigma_0 t}, \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

причем по условию  $|\varphi(t)| < Me^{\sigma_0 t}$ ,  $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$ ,  $M$ ,  $\sigma_0$  — положительные постоянные.

Нетрудно видеть, что  $\Psi(t)$  можно представить контурным интегралом

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{Me^{i\omega t}}{\omega + i\sigma_0} d\omega, \quad \sigma > \sigma_0. \quad (155)$$

В самом деле, единственный полюс подынтегральной функции  $\omega = -i\sigma_0$  лежит выше прямой интегрирования  $-\infty - i\sigma$ ,  $\infty - i\sigma$ . Далее, при  $t > 0$  подынтегральное выражение в формуле (155) стремится к нулю при  $|\omega| \rightarrow \infty$ ,  $\arg \omega \geq 0$  (лемма Жордана [32]). Замыкая контур интегрирования полуокружностью  $\Gamma$  бесконечного большого радиуса лежащей над прямой  $-\infty - i\sigma$ ,  $\infty - i\sigma$  и заменяя интегрирование по этой прямой интегрированием по построенному замкнутому контуру, мы, очевидно, величину интеграла (155) не изменим, так как на полуокружности  $\Gamma$  подынтегральная функция все равно равна нулю. Внутри замкнутого контура находится единственный полюс  $\omega = -i\sigma_0$  и, согласно правилам теории вычетов, получаем [32]

$$\Psi(t) = \frac{2\pi i}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow -i\sigma_0} \left[ \frac{Me^{i\omega t} (\omega + i\sigma_0)}{\omega + i\sigma_0} \right] = Me^{\sigma_0 t}.$$

При  $t < 0$  прямая  $-\infty - i\sigma$ ,  $\infty - i\sigma$  замыкается симметричной полуокружностью  $\Gamma'$ , лежащей в нижней полуплоскости  $\omega$ . Нетрудно видеть, что на  $\Gamma'$  при  $t < 0$  подынтегральное выражение в формуле (155) также обращается в нуль и внутри нового полученного замкнутого контура не имеет никаких особенностей. Отсюда по теореме Коши интеграл (155) при  $t < 0$  равен нулю. Можно показать, на чем мы не останавливаемся, что при  $t = 0$  интеграл (155) принимает значение, равное  $1/2 M$ .

Сравнив формулы (155) и (151) и учитывая, что  $\Psi(t) > |\varphi(t)|$ ,  $\Psi(t) > |f(t)|$ , получаем

$$|\Phi(\omega)| < \frac{M}{2\pi |\omega + i\sigma_0|}, \quad |F(\omega)| < \frac{M}{2\pi |\omega + i\sigma_0|}; \quad (156)$$

при  $|\omega| \rightarrow \infty$ ,  $|\Phi(\omega)| \rightarrow 0$ ,  $|F(\omega)| \rightarrow 0$ , что и требовалось доказать.

Вернемся теперь к интегралам (152), (153) для скорости и давления. Подынтегральные функции имеют следующие полюсы:

- 1) полюсы  $\omega_k$  частотных спектров  $\Phi(\omega)$  и  $F(\omega)$ ,
- 2) полюсы  $\omega_s$ , соответствующие корням уравнения,

$$\cos \varphi - \beta \varphi \sin \varphi = 0, \quad (157)$$

где

$$\beta = \frac{h}{l} \quad (158)$$

и, согласно формуле (127),

$$\varphi = kl = \frac{l}{c} \sqrt{\omega^2 - i2a\omega}. \quad (159)$$

При действительном  $\beta$ , как известно, уравнение (157) имеет только вещественные корни  $\varphi_s$ . Из формулы (159)

$$\omega = ia \pm \sqrt{\frac{\varphi_s^2 c^2}{l^2} - a^2} = ia \pm \sqrt{k^2 c^2 - a^2}, \quad (160)$$

откуда корням уравнения (157)  $\varphi_s$  соответствуют

$$\omega_s = ia \pm \sqrt{\frac{\varphi_s^2 c^2}{l^2} - a^2}, \quad (161)$$

т. е. полюсы  $\omega_s$  лежат в верхней полуплоскости  $\omega$ .

Как уже указывалось, прямая  $\omega = -i\sigma$  выбирается так, чтобы все особенности функций  $\Phi(\omega)$  и  $F(\omega)$  находились над ней. Нетрудно видеть, что в формулах (152) и (153) подынтегральные выражения стремятся к нулю на полуокружности  $\Gamma$  при  $t > 0$  и полуокружности  $\Gamma'$  при  $t < 0$ .

Таким образом, замыкая контур интегрирования в формулах (152) и (153)  $-\infty - i\sigma$ ,  $\infty - i\sigma$  при  $t > 0$  полуокружностью  $\Gamma$ , а при  $t < 0$  полуокружностью  $\Gamma'$ , мы получаем возможность вычислить интегралы (152) и (153) с помощью вычетов, причем, согласно теореме Коши, при  $t < 0$  эти интегралы обращаются в нуль.

Опуская промежуточные вычисления [6], приведем окончательные формулы для скорости и давления:

$$\begin{aligned} w = 2\pi i & \left\{ \sum_k \lim_{\omega \rightarrow \omega_k} [F(\omega)(\omega - \omega_k)] Z_1(\omega_k, x) e^{i\omega_k t} + \right. \\ & + \sum_k \lim_{\omega \rightarrow \omega_k} [\Phi(\omega)(\omega - \omega_k)] Z_2(\omega_k, x) e^{i\omega_k t} - \\ & - \frac{c^2}{l^2} e^{-at} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varphi_s \cos \frac{\varphi_s x}{l}}{\xi_s (\beta^2 \varphi_s^2 + \beta + 1) \sin \varphi_s} [F(ia + \xi_s) e^{i\xi_s t} - F(ia - \xi_s) e^{-i\xi_s t}] - \\ & - \frac{ic^2}{Kl} e^{-at} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \varphi_s \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \beta \varphi_s \cos \varphi_s \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{(\beta^2 \varphi_s^2 + \beta + 1) \sin \varphi_s} \times \\ & \times [\Phi(ia + \xi_s) e^{i\xi_s t} + \Phi(ia - \xi_s) e^{-i\xi_s t} + \\ & \left. + \frac{ia}{\xi_s} [\Phi(ia + \xi_s) e^{i\xi_s t} - \Phi(ia - \xi_s) e^{-i\xi_s t}] \right\}, \quad (162) \\ p = 2\pi i & \left\{ \sum_k \lim_{\omega \rightarrow \omega_k} [F(\omega)(\omega - \omega_k)] Z_3(\omega_k, x) e^{i\omega_k t} + \right. \\ & + \sum_k \lim_{\omega \rightarrow \omega_k} [\Phi(\omega)(\omega - \omega_k)] Z_4(\omega_k, x) e^{i\omega_k t} + \\ & \left. + i \frac{K}{l} e^{-at} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\varphi_s x}{l}}{(\beta^2 \varphi_s^2 + \beta + 1) \sin \varphi_s} [F(ia + \xi_s) e^{i\xi_s t} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + F(ia - \xi_s) e^{-i\xi_s t} - \frac{ia}{\xi_s} (F(ia + \xi_s) e^{i\xi_s t} - F(ia - \xi_s) e^{-i\xi_s t}) \Big] - \\
& - \frac{c^2}{l^2} e^{-at} \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s \frac{\cos \varphi_s \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \beta \varphi_s \sin \varphi_s \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\xi_s (\beta^2 \varphi_s^2 + \beta + 1) \sin \varphi_s} \times \\
& \times \left[ \Phi(ia + \xi_s) e^{i\xi_s t} - \Phi(ia - \xi_s) e^{-i\xi_s t} \right], \tag{163}
\end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
Z_1(\omega, x) &= \frac{\cos kx}{\cos kl - kh \sin kl}; \\
Z_2(\omega, x) &= \frac{i}{K} \frac{\omega}{k} \frac{\sin k(l-x) + kh \cos k(l-x)}{\cos kl - kh \sin kl}; \\
Z_3(\omega, x) &= -iK \frac{k}{\omega} \frac{\sin kx}{\cos kl - kh \sin kl}; \\
Z_4(\omega, x) &= \frac{\cos k(l-x) - kh \sin k(l-x)}{\cos kl - kh \sin kl}; \\
\xi_s &= \sqrt{\frac{\varphi_s^2 c^2}{l^2} - a^2}.
\end{aligned} \right\} \tag{164}$$

Первые два члена в формулах (162) и (163), где вычеты берутся относительно полюсов  $\omega_k$  частотных спектров  $\Phi(\omega)$ ,  $F(\omega)$ , определяют вынужденные колебания. Последние два члена — собственные. При резонансе некоторые полюсы  $\omega_k$  и полюсы  $\omega_s$  соответствующие корням уравнения  $\operatorname{ctg} \varphi - \beta \varphi = 0$  совпадают или имеют одинаковые вещественные части.

Формулы (162) и (163) дают возможность вычислить в любой точке трубы в любой момент времени скорость и давление, если известны выражения частотных спектров  $\Phi(\omega)$ ,  $F(\omega)$ , связанных с известными граничными функциями  $\varphi(t)$ ,  $\dot{f}(t)$  формулами (150). При сколько-нибудь сложном виде граничных функций  $\varphi(t)$ ,  $\dot{f}(t)$  вычисления, простые по существу, могут оказаться весьма громоздкими. Поэтому целесообразно дать другое представление решений — рассмотреть сначала случай, когда  $\varphi(t)$ ,  $\dot{f}(t)$  являются скачкообразными функциями, а переход к общему случаю осуществить с помощью интеграла Дюамеля.

Итак, рассмотрим сначала случай скачкообразных функций  $\varphi(t)$ ,  $\dot{f}(t)$ :

$$\left. \begin{aligned}
f(t) &= A = \text{const}, & t > 0; \\
f(t) &= 0, & t < 0;
\end{aligned} \right\} \tag{165}$$

$$\left. \begin{aligned}
\varphi(t) &= B = \text{const}, & t > 0; \\
\varphi(t) &= 0, & t < 0;
\end{aligned} \right\} \tag{166}$$

$A$  — скачок скорости в сечении  $x = l$ ,  $B$  — скачок давления в сечении  $x = 0$ . Все величины отсчитываются от их стационарных значений, имевших место при  $t \leq 0$ . Сравнивая выражения (154), (155), (165) и (166) видим, что в рассматриваемом случае  $\sigma_0 = 0$  и частотные спектры имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{A}{2\pi i \omega}; \\
\Phi(\omega) &= \frac{B}{2\pi i \omega}.
\end{aligned} \right\} \tag{167}$$

Из общих формул (162) и (163) после соответствующих вычислений [6] получаем

$$w = A - 2A \frac{e^{-at}}{\alpha} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \theta_s \cos \frac{\varphi_s x}{l}}{(\beta^2 \varphi_s^2 + \beta + 1) \sin \varphi_s} \cos(\xi_s t - \theta_s) +$$

$$+ 2 \frac{B}{\rho c} e^{-at} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \varphi_s \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \beta \varphi_s \cos \varphi_s \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\varphi_s (\beta^2 \varphi_s^2 + \beta + 1) \sin \varphi_s \cos \theta_s} \sin \xi_s t \quad (168)$$

$$p = -2\alpha \rho x A + B - 2\rho c A e^{-at} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\varphi_s x}{l}}{\varphi_s (\beta^2 \varphi_s^2 + \beta + 1) \sin \varphi_s \cos \theta_s} \times$$

$$\times \sin(\xi_s t - 2\theta_s) - \frac{2B}{\alpha} e^{-at} \sum_{s=1}^{\infty} \operatorname{tg} \theta_s \frac{\cos \varphi_s \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \beta \varphi_s \sin \varphi_s \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{(\beta^2 \varphi_s^2 + \beta + 1) \sin \varphi_s} \times$$

$$\times \cos(\xi_s t - \theta_s), \quad (169)$$

где  $\alpha = \frac{al}{c}$ ,  $\operatorname{tg} \theta_s = \frac{a}{\xi_s} = \frac{a}{\sqrt{\frac{c^2 \varphi_s^2}{l^2} - a^2}} = \frac{a}{\sqrt{\varphi_s^2 - a^2}}$ .

При  $\beta=0$  — отсутствия буферной камеры,  $B=0$  и из формулы (168) получаем формулу (120), полученную в § 1 другим путем.

Переход от скачкообразных изменений скорости и давления к произвольным функциям времени  $\varphi(t)$ ,  $f(t)$ , может быть осуществлен также с помощью интеграла Дюамеля [33]. Интеграл Дюамеля представляет собой результат последовательной суперпозиции бесконечно малых скачков давления и скорости, законной ввиду линейности исходных дифференциальных уравнений (73).

Формулы (168), (169) содержат слагаемые с множителями  $A$ ,  $B$ :

$$w = w_A + w_B; \quad p = p_A + p_B, \quad (170)$$

где  $w_A$ ,  $w_B$ ,  $p_A$  и  $p_B$  являются слагаемыми, определяемыми скачками  $A$  и  $B$ :

$$w_A = A \left[ 1 - \frac{2}{\alpha} e^{-at} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \theta_s \cos \frac{\varphi_s x}{l}}{(\beta^2 \varphi_s^2 + \beta + 1) \sin \varphi_s} \cos(\xi_s t - \theta_s) \right];$$

$$w_B = 2 \frac{B}{\rho c} e^{-at} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \varphi_s \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \beta \varphi_s \cos \varphi_s \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\varphi_s (\beta^2 \varphi_s^2 + \beta + 1) \sin \varphi_s \cos \theta_s} \times \sin \xi_s t;$$

$$p_A = -2\alpha \rho x A - 2\rho c A e^{-at} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\varphi_s x}{l}}{\varphi_s (\beta^2 \varphi_s^2 + \beta + 1) \sin \varphi_s \cos \theta_s} \times$$

$$\times \sin(\xi_s t - 2\theta_s);$$

$$p_B = B - \frac{2B}{\alpha} e^{-at} \sum_{s=1}^{\infty} \operatorname{tg} \theta_s \frac{\cos \varphi_s \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \beta \varphi_s \sin \varphi_s \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{(\beta^2 \varphi_s^2 + \beta + 1) \sin \varphi_s} \times$$

$$\times \cos(\xi_s t - \theta_s). \quad (171)$$

Пусть теперь вместо условий  $f(t) = A$  и  $\varphi(t) = B$ ,  $f(t)$  и  $\varphi(t)$  стали произвольными функциями времени, равными нулю для  $t \leq 0$ . Тогда, в силу линейности как исходных дифференциальных уравнений, так и граничных условий, можно применить интеграл Дюамеля, позволяющий совершить переход от скачкообразного вида граничных условий к произвольным функциям времени следующим образом: в формулах (171) полагаем  $A = 1$  и  $B = 1$ . Тогда

$$w = \int_0^t f(\tau) \frac{\partial}{\partial t} [w_A^{(1)}(x, t - \tau)] d\tau + \int_0^t \varphi(\tau) \frac{\partial}{\partial t} [w_B^{(1)}(x, t - \tau)] d\tau; \quad (172)$$

$$p = \int_0^t f(\tau) \frac{\partial}{\partial t} [p_A^{(1)}(x, t - \tau)] d\tau + \int_0^t \varphi(\tau) \frac{\partial}{\partial t} [p_B^{(1)}(x, t - \tau)] d\tau, \quad (173)$$

где  $w_A^{(1)}$ ,  $w_B^{(1)}$ ,  $p_A^{(1)}$ ,  $p_B^{(1)}$  — значения  $w_A$ ,  $w_B$ ,  $p_A$ ,  $p_B$  в формулах (171) при  $A = 1$ ,  $B = 1$ .

Везде выше мы рассматривали случай нулевых начальных условий (123), когда при  $t \leq 0$   $w(x, 0) = 0$ ,  $p(x, 0) = 0$ . Если начальные условия отличны от нуля и выражаются формулами (74), где функции  $w(x, 0) = F_1(x)$ ,  $p(x, 0) = F_2(x)$  не равны нулю в интервале  $0 < x < l$ , то решение может быть получено следующим образом.

Будем искать скорость  $w$  и давление  $p$  в виде сумм:

$$w = w_1 + w_2; \quad (174)$$

$$p = p_1 + p_2. \quad (175)$$

Пусть  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  удовлетворяют исходным дифференциальным уравнениям (73) и следующим начальным и граничным условиям.

Для функций  $w_1$ ,  $p_1$

$$t \leq 0, \quad w_1(x, 0) = 0, \quad p_1(x, 0) = 0 \quad (0 < x < l); \quad (176)$$

$$x = 0, \quad p_1 = \varphi(t); \quad (177)$$

$$x = l, \quad w_1 + h \frac{\partial w_1}{\partial x} = f(t). \quad (178)$$

Для функций  $w_2$ ,  $p_2$

$$t \leq 0, \quad w_2(x, 0) = F_1(x), \quad p_2(x, 0) = F_2(x) \quad (0 < x < l); \quad (179)$$

$$x = 0, \quad p_2 = 0; \quad (180)$$

$$x = l, \quad w_2 + h \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0. \quad (181)$$

Таким образом, функции  $w_1$ ,  $p_1$  удовлетворяют нулевым начальным условиям (176) и неоднородным граничным условиям (177), (178), т. е. могут быть найдены непосредственно из приведенного выше решения, данного формулами (162), (163) или с помощью интеграла Дюамеля из формул (168),



(169), (170)—(173). Функции же  $\omega_2, p_2$  удовлетворяющие ненулевым начальным условиям (179) и однородным граничным условиям (180), (181) — из решения, приведенного в § 1. Суммированием этих решений, согласно выражениям (174), (175), получается полное решение задачи.

### § 3. Операционный метод

За последние два десятилетия широкое распространение в математической физике получили методы интегральных преобразований, иначе называемые операционными [24], [25]. Рассмотренный выше метод контурного интегрирования в плоскости комплексной частоты  $\omega$  находится в тесной связи с одним из операционных методов, а именно—интегральными преобразованиями Лапласа и Фурье.

Основная идея этих методов заключается в следующем. Исходные дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия умножаются на некоторую известную функцию  $K(s, x)$ , где  $x$ —одно из независимых переменных, обычно координата или время;  $s$ —некоторый параметр, от координат и времени не зависящий. После указанного умножения производится интегрирование по  $x$  в конечных или бесконечных пределах. В результате получается система уравнений, не содержащая координаты, по которой производилось интегрирование, т. е. число независимых переменных уменьшилось на единицу, но зато содержащая вспомогательный параметр  $s$ —так называемая система изображений. Искомая функция  $u(x, y, \dots)$  заменяется при этом ее «изображением» в виде

$$\bar{u} = \int_a^b u(x, y, \dots) K(s, x) dx = \bar{u}(s, y, \dots), \quad (182)$$

где  $a, b$ —конечные или бесконечные пределы.

Система изображений содержит на одно независимое переменное меньше и обычно может быть разрешена относительно  $\bar{u}$  значительно проще, нежели исходная система. Если теперь удастся по известному изображению  $\bar{u}(s, y, \dots)$  определить исходную функцию  $u(x, y, \dots)$ —так называемый оригинал,—т. е. решить относительно  $u(x, y, \dots)$  интегральное уравнение (182), то мы получим решение нашей основной задачи.

Мы рассмотрим применение интегрального преобразования Лапласа, когда в ядре  $K(s, x)$  в (182) вместо координаты  $x$  берется время  $t$ , а  $K(s, x)$  имеет вид  $e^{-st}$ .

Умножим какую-либо функцию  $u(x, t)$  на  $e^{-st}$ ,  $R(s) > 0^*$  и проинтегрируем по  $t$  от нуля до бесконечности. Выражение  $\int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt$  обычно называется изображением по Лапласу функции  $u(x, t)$  и обозначается чертой сверху:

$$\bar{u}(s, x) = \bar{u} = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt. \quad (183)$$

Особенно простым получается изображение производной по времени: интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st} dt = e^{-st} u \Big|_{t=0}^{t=\infty} + s \int_0^{\infty} u e^{-st} dt = -u_0 + s\bar{u}, \quad (184)$$

где  $u_0$ —значение функции  $u$  при  $t = 0$ , причем предполагается, что  $(e^{-st}u) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

\*  $R(s)$ —обозначение действительной части параметра, который, вообще говоря, является комплексным.

В настоящее время во многих руководствах и справочниках имеются подробные таблицы изображений  $\bar{u}(s, x) = u$  для весьма многих оригиналов — исходных функций  $u(x, t)$  [9], [24]—[28]. В ряде случаев найденное из решения той или иной задачи изображение  $u$  содержится в таблицах и оригинал  $u(x, t)$  находится непосредственно.

Если изображения в таблицах не имеется, то переход от изображения к оригиналу выполняется при помощи формулы обращения [25]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \bar{u}(\lambda, x) d\lambda, \quad (185)$$

причем прямая  $\gamma - i\infty$ ,  $\gamma + i\infty$ , параллельная мнимой оси  $\lambda$ , проводится так, чтобы все особые точки изображения  $\bar{u}(\lambda, x)$  находились справа от нее.

Контур интегрирования в формуле (185) обычно может быть тем или иным образом дополнен до замкнутого контура и интеграл (185) может быть вычислен с помощью теории вычетов.

Обратимся к исходной системе уравнений (73):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + 2aw \right); \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial x} = K \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

метод решения которой укажем для весьма общего вида линейных начальных и граничных условий (74) и (75):

$$w = F_1(x), \quad p = F_2(x) \quad \text{при } t \leq 0 \quad (0 < x < l); \quad (187)$$

$$p = \varphi(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (t > 0); \quad (188)$$

$$w + h \frac{\partial w}{\partial x} = f(t) \quad \text{при } x = l \quad (t > 0). \quad (189)$$

Умножим уравнения (186) и граничные условия (188), (189) на  $e^{-st}$  и проинтегрируем по  $t$  от нуля до бесконечности. Из системы (186) получим, учитывая выражения (184), (187), систему двух уже обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для изображений  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ :

$$-\frac{d\bar{p}}{dx} = \rho (s\bar{w} + 2a\bar{w}) - \rho w(x, 0) = \rho (s + 2a) \bar{w} - \rho F_1(x); \quad (190)$$

$$-s\bar{p} + p(x, 0) = -s\bar{p} + F_2(x) = \rho c^2 \frac{d\bar{w}}{dx} = K \frac{d\bar{w}}{dx}. \quad (191)$$

Из граничных условий (188), (189) для изображений получим:

$$\bar{p} = \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t) dt = \bar{\varphi} \quad \text{при } x = 0; \quad (192)$$

$$\bar{w} + h \frac{d\bar{w}}{dx} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \bar{f} \quad \text{при } x = l. \quad (193)$$

Дифференциальные уравнения (190), (191) при граничных условиях (192), (193) интегрируются обычными методами [19], после чего находятся изображения скорости и давления  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ . Переход от изображений к оригиналам  $w(x, t)$ ,  $p(x, t)$  выполняется с помощью таблиц, если найденные изображения в них содержатся, или с помощью формулы обращения (185).

В качестве примера рассмотрим, следуя [9], задачу о распространении скачка давления в полубесконечной трубе  $0 < x < \infty$ , в которой при  $t = 0$  жидкость покоилась или находилась в состоянии установившегося движения. В этом случае следует положить

$$\left. \begin{aligned} F_1(x) = F_2(x) = 0; \\ \varphi(t) = p_0 = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

Граничное условие (189) заменяется требованием ограниченности скорости и давления при  $x \rightarrow \infty$ .

Уравнения (190), (191) принимают в рассматриваемом случае вид:

$$-\frac{d\bar{p}}{dx} = \rho(s + 2a)\bar{w}; \quad (195)$$

$$-s\bar{p} = K \frac{d\bar{w}}{dx}. \quad (196)$$

и должны быть проинтегрированы при граничном условии

$$\bar{p} = p_0 \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{p_0}{s} = \bar{\varphi}, \quad \text{при } x = 0. \quad (197)$$

Решение можно выполнить в следующей последовательности. Исключим из уравнений (195), (196)  $\bar{w}$ , для чего продифференцируем уравнение (195) по  $x$ . С учетом уравнения (196) получим

$$\frac{d^2\bar{p}}{dx^2} - q^2\bar{p} = 0, \quad (198)$$

где

$$q^2 = \frac{\rho(s + 2a)s}{K} = \frac{(s + 2a)s}{c^2}. \quad (199)$$

Решение уравнения (198), ограниченное на бесконечности, имеет вид

$$\bar{p} = \frac{p_0}{s} e^{-qx}. \quad (200)$$

Подставляя выражение (200) в уравнение (195) найдем  $\bar{w}$ :

$$\bar{w} = -\frac{1}{\rho(s + 2a)} \frac{d\bar{p}}{dx} = \frac{qp_0}{\rho(s + 2a)s} e^{-qx}. \quad (201)$$

Из формулы обращения (185) получаем:

$$p = p(x, t) = \frac{p_0}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t - \mu x} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (202)$$

$$w = w(x, t) = \frac{p_0}{2\pi i} \frac{1}{\rho c} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 2a}} e^{\lambda t - \mu x} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (203)$$

где  $\mu = \frac{\sqrt{(\lambda + 2a)\lambda}}{c}$ .

После вычислений, приведенных в [9] для аналогичной электротехнической задачи распространения скачка напряжения в полубесконечной линии и замены переменных согласно табл. 3, для давления и скорости получается

$$t < \frac{x}{c}, \quad p = 0, \quad w = 0; \quad (204)$$

$$t = \frac{x}{c}, \quad p = p_0 e^{-\frac{ax}{c}}, \quad w = \frac{p_0}{\rho c} e^{-\frac{ax}{c}}; \quad (205)$$

$$t > \frac{x}{c}, \quad p = p_0 \left[ e^{-\frac{ax}{c}} + \frac{ax}{c} \int_{\frac{x}{c}}^t e^{-at} \frac{I_1 \left( a \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c^2}}} dt \right], \quad (206)$$

$$w = \frac{p_0}{\rho c} e^{-at} I_0 \left( a \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c^2}} \right), \quad (207)$$

где  $I_0, I_1$  — бесселевы функции нулевого и первого порядков первого рода от мнимого аргумента.

Отметим то важное обстоятельство, что головные значения скорости и давления, как видно из формул (205), связаны друг с другом, согласно формуле Н. Е. Жуковского  $p = \rho c w$ .

Для давления, меняющегося в сечении  $x = 0$  по закону  $p = \varphi(t)$ ,  $\varphi(t) = 0$  при  $t \leq 0$ , вместо формул (204)–(207) получим более общие формулы:

при  $t < \frac{x}{c}$

$$\left. \begin{aligned} p &= 0; \\ w &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

при  $t > \frac{x}{c}$

$$p = \varphi \left( t - \frac{x}{c} \right) e^{-\frac{ax}{c}} + \frac{ax}{c} \int_{\frac{x}{c}}^t \varphi(t - \tau) e^{-a\tau} \frac{I_1 \left( a \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{c^2}} \right)}{\sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{c^2}}} d\tau; \quad (209)$$

$$w = \frac{1}{\rho c} \left\{ \varphi \left( t - \frac{x}{c} \right) e^{-\frac{ax}{c}} + \int_{\frac{x}{c}}^t \varphi(t - \tau) e^{-a\tau} \left[ \frac{a\tau I_1 \left( a \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{c^2}} \right)}{\sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{c^2}}} - a I_0 \left( a \sqrt{\tau^2 - \frac{x^2}{c^2}} \right) \right] d\tau \right\}. \quad (210)$$

Формулы (208)–(210) дают полное решение задачи о распространении произвольного возмущения в полубесконечной трубе. Они пригодны для расчетов распространения и в ограниченной трубе, но только до того момента, пока возмущение не дошло до другого конца трубы.

### § 4. Видоизменение метода Римана

Метод решения задачи Коши для гиперболических уравнений, предложенный Риманом, достаточно хорошо известен ([14], [17], [20]–[22]). Поэтому, не останавливаясь на его изложении, покажем, что этот метод может быть использован для сведения задачи об интегрировании системы уравнений движения (73) для линии конечной длины к интегральным уравнениям [30].

Введем для удобства безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{ct}{l}, \quad \alpha = \frac{al}{c}, \quad \bar{w} = \frac{w}{\tilde{w}}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho c \tilde{w}}, \quad (211)$$

где  $\tilde{w}$  – характерная скорость, а  $l$  – характерная длина<sup>1</sup>.

Подставив величины (211) в уравнения (73), получим после элементарных преобразований уравнения движения в безразмерном виде

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + 2\alpha \bar{w}, \quad -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}. \quad (212)$$

Вводя подстановку

$$\bar{p} = \Pi e^{-\alpha \tau}, \quad \bar{w} = v e^{-\alpha \tau}, \quad (213)$$

преобразуем уравнения (212) к виду:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} &= \frac{\partial v}{\partial \tau} + \alpha v; \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} - \alpha \Pi. \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

Переходя к характеристическим переменным

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{2} (\xi + \tau), \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} (\xi - \tau) \quad (215)$$

и подставляя (215) в (214), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} (\Pi + v) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha (\Pi - v); \\ -\frac{\partial}{\partial \zeta} (\Pi - v) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha (\Pi + v). \end{aligned} \right\} \quad (216)$$

Исключая из уравнений (216) поочередно  $\Pi$  и  $v$ , имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\alpha^2}{2} v &= 0; \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\alpha^2}{2} \Pi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (217)$$

Множитель  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  введен в выражения (215) для того, чтобы масштабы в координатах  $\xi$ ,  $\tau$  и  $\eta$ ,  $\zeta$  были одинаковыми, т. е. чтобы выполнялось соотношение

$$\xi^2 + \tau^2 = \eta^2 + \zeta^2.$$

<sup>1</sup> Если в качестве  $l$  принята длина трубопровода, то значение  $\tau=1$  соответствует времени пробега звуковой волны от одного конца трубопровода до другого.

Пусть на прямой  $C_i$  (фиг. 8)  $v = v_i$ ,  $\Pi = \Pi_i$ , ( $i = 0, 1, 2$ ), причем функции  $v_0(\xi)$  и  $\Pi_0(\xi)$  заданы на отрезке  $[0, 1]$ , а на прямых  $C_1$  и  $C_2$  заданы условия<sup>1</sup>:

$$\varphi_1(v_1(\tau), \Pi_1(\tau), v'_1(\tau), \Pi'_1(\tau), \tau) = 0; \quad (218)$$

$$\varphi_2(v_2(\tau), \Pi_2(\tau), v'_2(\tau), \Pi'_2(\tau), \tau) = 0, \quad (219)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — известные функции.

Так как на основании уравнений (214)

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial \tau} \cos(s, \tau) - \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} - \alpha \Pi \right) \cos(s, \xi);$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s} = \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \cos(s, \tau) - \left( \frac{\partial v}{\partial \tau} + \alpha v \right) \cos(s, \xi),$$

то очевидно, что любые граничные условия, наложенные на функции  $v$ ,  $\Pi$  (или  $w$ ,  $p$ ) и их первые производные по любому направлению, приводятся к условиям вида (218) и (219).

Пусть функции  $v_0(\xi)$ ,  $\Pi_0(\xi)$  продолжены в обе стороны за  $[0, 1]$  таким образом, что решение уравнений (217)

$$\left. \begin{array}{l} \text{в области } \tau \geq 0, -\infty < \xi < \infty \\ \text{с начальными условиями} \\ v = v_0(\xi), \quad \Pi = \Pi_0(\xi) \text{ при } \tau = 0 \end{array} \right\} \quad (I)$$

удовлетворяет на прямых  $C_1$  и  $C_2$  условиям (218) и (219) соответственно. Тогда оно будет решением уравнений (217)

в области  $\tau \geq 0$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$  при начальных и граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} v = v_0(\xi), \quad \Pi = \Pi_0(\xi) \text{ при } \tau = 0; \\ \varphi_1(v_1, \Pi_1, v'_1, \Pi'_1, \tau) = 0 \text{ при } \xi = 0; \\ \varphi_2(v_2, \Pi_2, v'_2, \Pi'_2, \tau) = 0 \text{ при } \xi = 1. \end{array} \right\} \quad (II)$$

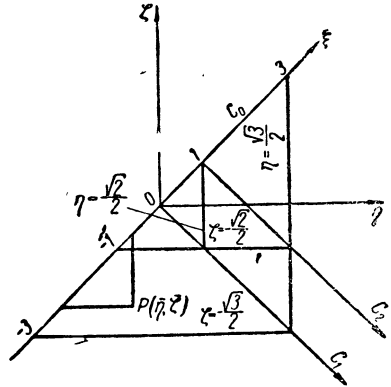
Из уравнений (214) и (215) следует, что при заданных  $v_0(\xi)$ ,  $\Pi_0(\xi)$  можно найти  $v_\eta$ ,  $v_\zeta$ ,  $\Pi_\eta$ ,  $\Pi_\zeta$  в любой точке прямой  $C_0$ . Таким образом задача (I) приводится к задаче Коши для уравнений (217), которая может быть сформулирована следующим образом: дана начальная прямая  $C_0$ , непараллельная  $O\eta$  и  $O\zeta$ ; на  $C_0$  заданы для каждого из уравнений (217) значения функции и ее первых производных по направлениям  $O\eta$  и  $O\zeta$ ; требуется найти решение уравнений (217) в полуплоскости  $\tau > 0$ , принимающее на  $C_0$  заданные начальные значения.

Пользуясь методом Римана, решение указанной задачи Коши для первого из уравнений (217) можно в любой точке  $P(\bar{\eta}, \bar{\xi})$  представить в виде

$$2v(P) = v(P_1) + v(P_2) + \int_{P_2}^{P_1} [(Uv_\zeta - vU_\zeta) \cos(n, \eta) + (Uv_\eta - vU_\eta) \cos(n, \zeta)] ds$$

или, учитывая, что

$$\cos(n, \eta) = -\cos(n, \zeta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad ds = -d\xi$$



Фиг. 8.

<sup>1</sup> Здесь и далее за  $l$  принята длина трубы, т. е. точки  $\xi=0$  и  $\xi=1$  соответствуют ее концам.

в виде

$$2v(P) = v(P_1) + v(P_2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{P_1}^{P_2} [U(v_\zeta - v_\eta) - v(U_\zeta - U_\eta)] d\xi, \quad (220)$$

где

$$U = J_0 \left[ 2 \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} (\eta - \bar{\eta}) (\zeta - \bar{\zeta})} \right] \equiv J_0(2\sqrt{u})$$

функция Римана для уравнений (217);  $J_0$  — бesselова функция 1-го рода от вещественного аргумента;  $P_1, P_2$  — точки пересечения характеристик  $\zeta = \bar{\zeta}$  и  $\eta = \bar{\eta}$  с прямой  $C_0$ .

На основании уравнений (214) и (215)

$$(v_\zeta - v_\eta)|_{C_0} = \sqrt{2} [\Pi'_0(\xi) + \alpha v_0(\xi)]. \quad (221)$$

Кроме того,

$$\left. \begin{aligned} (U_\zeta - U_\eta) \Big|_{C_0} &= \alpha^2 (\bar{\eta} - \bar{\zeta}) \frac{J_1(2\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} \Big|_{C_0} \equiv \alpha^2 (\bar{\eta} - \bar{\zeta}) \frac{J_1(2\sqrt{u_0})}{2\sqrt{u_0}}; \\ P_1 = P_1(\xi_1, 0), \quad P_2 = P_2(\xi_2, 0), \quad \xi_1 = \sqrt{2} \bar{\zeta}, \quad \xi_2 = \sqrt{2} \bar{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

С учетом выражений (221) и (222) уравнение (220) принимает вид

$$\begin{aligned} 2v(\bar{\eta}, \bar{\zeta}) &= v_0(\xi_1) + v_0(\xi_2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ \sqrt{2} J_0(2\sqrt{u_0}) \times \right. \\ &\times \left. [\Pi'_0(x) + \alpha v_0(x)] - \alpha^2 (\bar{\eta} - \bar{\zeta}) v_0(x) \frac{J_1(2\sqrt{u_0})}{2\sqrt{u_0}} \right\} dx. \end{aligned} \quad (223)$$

Для  $\Pi$ , совершенно аналогично, получим

$$\begin{aligned} 2\Pi(\bar{\eta}, \bar{\zeta}) &= \Pi_0(\xi_1) + \Pi_0(\xi_2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ \sqrt{2} J_0(2\sqrt{u_0}) \times \right. \\ &\times \left. [v'_0(x) - \alpha \Pi_0(x)] - \alpha^2 (\bar{\eta} - \bar{\zeta}) \Pi_0(x) \frac{J_1(2\sqrt{u_0})}{2\sqrt{u_0}} \right\} dx, \end{aligned} \quad (224)$$

причем

$$u_0 = \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x - \bar{\eta} \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x - \bar{\zeta} \right). \quad (225)$$

Избавляясь в уравнениях (223) и (224) от  $v'_0$  и  $\Pi'_0$  интегрированием по частям, получим

$$\begin{aligned} 2v(\bar{\eta}, \bar{\zeta}) &= v_0(\xi_1) + v_0(\xi_2) + \Pi_0(\xi_1) - \Pi_0(\xi_2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ \sqrt{2} J_0(2\sqrt{u_0}) v_0(x) + \right. \\ &+ \alpha \frac{J_1(2\sqrt{u_0})}{2\sqrt{u_0}} [(\sqrt{2}x - \bar{\eta} - \bar{\zeta}) \Pi_0(x) - (\bar{\eta} - \bar{\zeta}) v_0(x)] \left. \right\} dx; \end{aligned} \quad (226)$$

$$\begin{aligned}
2\Pi(\bar{\eta}, \bar{\zeta}) &= \Pi_0(\xi_1) + \Pi_0(\xi_2) + v_0(\xi_1) - v_0(\xi_2) + \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left\{ \sqrt{2} J_0(2\sqrt{u_0}) \Pi_0(x) - \alpha \frac{J_1(2\sqrt{u_0})}{2\sqrt{u_0}} \times \right. \\
&\times \left. [(\sqrt{2}x - \bar{\eta} - \bar{\zeta}) v_0(x) - (\bar{\eta} - \bar{\zeta}) \Pi_0(x)] \right\} dx. \quad (227)
\end{aligned}$$

Так как на  $C_1$ , согласно уравнений (215) и фиг. 8,

$$\bar{\eta} = -\bar{\zeta} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tau, \quad \tau = \xi_2, \quad \xi_1 = -\xi_2, \quad \xi_2 \equiv \xi \geq 0, \quad (228)$$

то выражение (225) принимает вид

$$u_0 = \frac{\alpha^2}{4} (x^2 - \xi^2) \leq 0,$$

так как  $x \leq \xi$ . Тогда, как известно,

$$J_0(2\sqrt{u_0}) = I_0(z_1), \quad \frac{J_1(2\sqrt{u_0})}{2\sqrt{u_0}} = \frac{I_1(z_1)}{z_1}, \quad z_1 = 2\sqrt{-u_0} = \alpha\sqrt{\xi^2 - x^2}, \quad (229)$$

где  $I$  — бesselевая функция 1-го рода от мнимого аргумента.

На основании выражений (228) и (229) из уравнений (226) и (227) следует, что

$$\begin{aligned}
2v_1(\xi) &= v_0(-\xi) + v_0(\xi) + \Pi_0(-\xi) - \Pi_0(\xi) - \alpha \int_{-\xi}^{\xi} \left\{ I_0(z_1) v_0(x) + \right. \\
&+ \alpha \frac{I_1(z_1)}{z_1} [x\Pi_0(x) - \xi v_0(x)] \left. \right\} dx; \quad (230)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Pi_1(\xi) &= \Pi_0(-\xi) + \Pi_0(\xi) + v_0(-\xi) - v_0(\xi) + \alpha \int_{-\xi}^{\xi} \left\{ I_0(z_1) \Pi_0(x) - \right. \\
&- \alpha \frac{I_1(z_1)}{z_1} [xv_0(x) - \xi\Pi_0(x)] \left. \right\} dx; \quad (231)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2v_1'(\xi) &= -v_0'(-\xi) + v_0'(\xi) - \Pi_0'(-\xi) - \Pi_0'(\xi) - \alpha \left( 1 - \frac{\alpha\xi}{2} \right) \times \\
&\times [v_0(-\xi) + v_0(\xi)] + \frac{\alpha^2\xi}{2} [\Pi_0(-\xi) - \Pi_0(\xi)] - \alpha^2 \int_{-\xi}^{\xi} \left\{ (\alpha\xi - 1) \frac{I_1(z_1)}{z_1} v_0(x) + \right. \\
&+ \alpha^2\xi \frac{I_2(z_1)}{z_1^2} [x\Pi_0(x) - \xi v_0(x)] \left. \right\} dx; \quad (232)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Pi_1'(\xi) &= -\Pi_0'(-\xi) + \Pi_0'(\xi) - v_0'(-\xi) - v_0'(\xi) + \alpha \left( 1 + \frac{\alpha\xi}{2} \right) [\Pi_0(-\xi) + \Pi_0(\xi)] + \\
&+ \frac{\alpha^2\xi}{2} [v_0(-\xi) - v_0(\xi)] + \alpha^2 \int_{-\xi}^{\xi} \left\{ (\alpha\xi + 1) \frac{I_1(z_1)}{z_1} \Pi_0(x) - \right. \\
&- \alpha^2\xi \frac{I_2(z_1)}{z_1^2} [xv_0(x) - \xi\Pi_0(x)] \left. \right\} dx. \quad (233)
\end{aligned}$$



На  $C_2$ , согласно уравнений (215) и фиг. 8,

$$\bar{\eta} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \tau), \quad \bar{\zeta} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \tau), \quad \tau = \xi_2 - 1, \quad \xi_1 = 2 - \xi_2, \quad \xi_2 \equiv \xi \geq 1 \quad (234)$$

и выражение (225) принимает вид

$$u_0 = \frac{\alpha^2}{4} [(x-1)^2 - (\xi-1)^2] \leq 0.$$

Тогда

$$J_0(2\sqrt{u_0}) = I_0(z_2), \quad \frac{J_1(2\sqrt{u_0})}{2\sqrt{u_0}} = \frac{I_1(z_2)}{z_2},$$

$$z_2 = 2\sqrt{-u_0} = \alpha\sqrt{(\xi-1)^2 - (x-1)^2}. \quad (235)$$

На основании выражений (234) и (235) из уравнений (226) и (227) имеем

$$2v_2(\xi-1) = v_0(2-\xi) + v_0(\xi) + \Pi_0(2-\xi) - \Pi_0(\xi) -$$

$$- \alpha \int_{2-\xi}^{\xi} \left\{ I_0(z_2) v_0(x) + \alpha \frac{I_1(z_2)}{z_2} [(x-1)\Pi_0(x) - (\xi-1)v_0(x)] \right\} dx; \quad (236)$$

$$2\Pi_2(\xi-1) = \Pi_0(2-\xi) + \Pi_0(\xi) + v_0(2-\xi) - v_0(\xi) +$$

$$+ \alpha \int_{2-\xi}^{\xi} \left\{ I_0(z_2) \Pi_0(x) - \alpha \frac{I_1(z_2)}{z_2} [(x-1)v_0(x) - (\xi-1)\Pi_0(x)] \right\} dx; \quad (237)$$

$$2v_2'(\xi-1) = -v_0'(2-\xi) + v_0'(\xi) - \Pi_0'(2-\xi) - \Pi_0'(\xi) -$$

$$- \alpha \left[ 1 - \frac{\alpha(\xi-1)}{2} \right] [v_0(2-\xi) + v_0(\xi)] + \frac{\alpha^2(\xi-1)}{2} [\Pi_0(2-\xi) -$$

$$- \Pi_0(\xi)] - \alpha^2 \int_{2-\xi}^{\xi} \left\{ \frac{I_1(z_2)}{z_2} [\alpha(\xi-1) - 1] v_0(x) + \alpha^2(\xi-1) \frac{I_2(z_2)}{z_2^2} \times \right.$$

$$\left. \times [(x-1)\Pi_0(x) - (\xi-1)v_0(x)] \right\} dx; \quad (238)$$

$$2\Pi_2'(\xi-1) = -\Pi_0'(2-\xi) + \Pi_0'(\xi) - v_0'(2-\xi) - v_0'(\xi) +$$

$$+ \alpha \left[ 1 + \frac{\alpha(\xi-1)}{2} \right] [\Pi_0(2-\xi) + \Pi_0(\xi)] + \frac{\alpha^2(\xi-1)}{2} \times$$

$$\times [v_0(2-\xi) - v_0(\xi)] + \alpha^2 \int_{2-\xi}^{\xi} \left\{ \frac{I_1(z_2)}{z_2} [\alpha(\xi-1) + 1] \Pi_0(x) - \alpha^2(\xi-1) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{I_2(z_2)}{z_2^2} [(x-1)v_0(x) - (\xi-1)\Pi_0(x)] \right\} dx. \quad (239)$$

Покажем теперь, как нужно продолжить  $v_0(\xi)$ ,  $\Pi_0(\xi)$  за  $[0, 1]$ , чтобы в полуплосе  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $0 < \tau < \infty$  решение задачи (I) являлось бы решением задачи (II).

Рассмотрим область, ограниченную характеристиками  $\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\zeta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  и прямой  $C_0$ . Решение задачи (I) в этой области, как это следует из уравнений (223) и (224), зависит от значений  $v_0$ ,  $\Pi_0$  на  $[-1, 1]$  и только от них. Для того чтобы это решение в области, ограниченной прямыми  $C_0$ ,  $C_1$  и характеристикой  $\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}$  было решением задачи (II), достаточно, чтобы оно удовлетворяло граничному условию на  $C_1$ , т. е. достаточно, чтобы  $v_0$ ,  $\Pi_0$  на  $[-1, 1]$  удовлетворяли соотношению, получающемуся подстановкой уравнений (230), (231), (232) и (233) в граничное условие (218), что условно запишем в виде

$$\varphi_1 [(230), (231), (232), (233), \xi] = 0. \quad (240)$$

Так как на  $[0, 1]$   $v_0$ ,  $\Pi_0$  известны, то (240) есть уравнение относительно  $v_0$ ,  $\Pi_0$  на  $[-1, 0]$ . Поскольку  $v_0$ ,  $\Pi_0$  связаны на  $[-1, 0]$  только уравнением (240), то очевидно, что на этом отрезке на них может быть наложена еще одна связь, что дает, вообще говоря, возможность упростить уравнение (240).

Допустим, что какое-нибудь решение уравнения (240) найдено. Рассмотрим область, ограниченную характеристиками  $\eta = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\zeta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  и прямой  $C_0$ . Решение задачи (I) в этой области зависит только от значений  $v_0$ ,  $\Pi_0$  на  $[-1, 3]$ . Для того чтобы в области, ограниченной характеристиками  $\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\zeta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  и прямой  $C_2$ , оно было решением задачи (II), достаточно, чтобы  $v_0$ ,  $\Pi_0$  на  $[-1, 3]$  удовлетворяли соотношению, получающемуся подстановкой уравнений (236), (237), (238) и (239) в граничное условие (219):

$$\varphi_2 [(236), (237), (238), (239), \xi - 1] = 0. \quad (241)$$

Так как теперь, по предположению,  $v_0$ ,  $\Pi_0$  известны на  $[-1, 1]$ , то (241) есть уравнение относительно  $v_0$ ,  $\Pi_0$  на  $[1, 3]$ , причем опять на  $v_0$ ,  $\Pi_0$  может быть наложена еще одна связь.

Рассматривая область, ограниченную характеристиками  $\eta = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\zeta = -3\frac{\sqrt{2}}{2}$  и прямой  $C_0$ , получим на  $[-1, -3]$  уравнение вида (240) и т. д.

Если граничные условия (218) и (219) линейны, то, как легко видеть, уравнения (240) и (241) суть линейные интегральные уравнения типа Вольтерра.

Рассмотрим в качестве примера классическую задачу о гидравлическом ударе вязкой жидкости в простом трубопроводе без камеры. Будем считать, что в сечении  $x = 0$  происходит мгновенный удар, а в сечении  $x = l$  поддерживается постоянное давление. Начальные условия будем считать нулевыми.

Тогда

$$\begin{aligned} v_0(\xi) = \Pi_0(\xi) &= 0 && \text{при } 0 < \xi < 1; \\ v_1 &= Ae^{\alpha \tau} && \text{при } \xi = 0 \quad (\bar{w}|_{\xi=0} = A = \text{const}); \\ \Pi_2 &= 0 && \text{при } \xi = 1 \quad (\bar{p}|_{\xi=1} = 0). \end{aligned}$$

В этом случае, как легко видеть, уравнение (240) на первом шаге принимает вид

$$2Ae^{\alpha \xi} = v_0(-\xi) - \alpha \int_{-\xi}^0 \left[ I_0(z_1) - \alpha \xi \frac{I_1(z_1)}{z_1} \right] v_0(x) dx. \quad (242)$$

Обозначив  $v_0(-\xi) \equiv y(\xi)$  и заменив в уравнении (242)  $x$  на  $-\xi$ , получим интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода

$$y(\xi) = 2Ae^{\alpha\xi} + \alpha \int_0^{\xi} \left[ I_0(z_1) - \alpha\xi \frac{I_1(z_1)}{z_1} \right] y(x) dx. \quad (243)$$

Пользуясь разложениями функций Бесселя и показательной функции в степенные ряды и решая уравнение (243) методом последовательных подстановок [34] с точностью до членов, содержащих  $\alpha^4$ , имеем

$$y(\xi) = 2A \left( 1 + 2\alpha\xi + \alpha^2\xi^2 + \frac{\alpha^3\xi^3}{6} \right). \quad (244)$$

Подставив выражение (244) в уравнение (231), найдем, что

$$\Pi_1(\xi) = A \left( 1 + 2\alpha\xi + \frac{5}{4} \alpha^2\xi^2 + \frac{1}{2} \alpha^3\xi^3 \right).$$

Так как на  $C_1$   $\xi \equiv \xi_2 \equiv \tau$ , то окончательно

$$\bar{p} \Big|_{\xi=0} = \Pi_1(\xi) e^{-\alpha\xi} \Big|_{\xi=0} = A \left( 1 + \alpha\tau - \frac{1}{4} \alpha^2\tau^2 + \frac{\alpha^3\tau^3}{12} \right),$$

что при  $A = 1$  дает удовлетворительное совпадение с графиками, приведенными в [6] до значений  $\alpha = 1$  (ошибка не более 2%).

#### IV. ЗАТУХАНИЕ ГОЛОВНОГО ЗНАЧЕНИЯ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗАКОНЕ ТРЕНИЯ

Пусть в трубопроводе в сечении  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$  возникло какое-либо скачкообразное возмущение давления  $p$  и скорости  $w$ . Предполагая, что скоростью частиц жидкости по сравнению со скоростью звука  $c$  можно пренебречь, получим, что это возмущение достигнет сечения  $x$  в момент времени  $t = \frac{x}{c}$ . Величины

$$w(x, t) = w\left(x, \frac{x}{c}\right), \quad p(x, t) = p\left(x, \frac{x}{c}\right)$$

называются головными или фронтовыми значениями волны давления и скорости. Покажем, что эти головные значения могут быть найдены даже при нелинейном законе трения.

Предположим, что по трубопроводу, движение в котором первоначально было установившимся, начало распространяться со скоростью  $c$  какое-либо возмущение давления и скорости. Пусть это возмущение достигло сечения  $x$  (фронт волны) и за время  $dt$  распространилось на длину  $cdt$ . Тогда масса жидкости, захваченной возмущением, равна  $\rho c f dt$ . Приращение количества движения этой массы на ось трубы за время  $dt$  равно

$$dJ = \rho c dt \int_f (v - v_0) df = \rho c dt (w - w_0) f,$$

где  $v_0, v$  — продольные скорости элемента площади  $df$  до и после возмущения;  $w_0, w$  — средние в сечении скорости до и после возмущения. Приравнявая величину  $dJ$  проекции импульса сил, получим:

$$\rho c dt (w - w_0) f = (p - p_0) f dt - \bar{\theta} \chi c dt \cdot dt, \quad (245)$$

где  $p_0, p$  — давления до и после возмущения;  $\bar{\theta}$  — среднее по периметру  $\chi$  за время  $dt$  касательное напряжение на стенке трубы вдоль длины  $cdt$ .

Переходя в выражении (245) к пределу при  $dt \rightarrow 0$ , получим, что

$$p - p_0 = \rho c (w - w_0), \quad (246)$$

т. е. получим формулу Н. Е. Жуковского, справедливую, таким образом, для малых дозвуковых скоростей течения при любом законе трения. Полученная формула содержит только средние в сечениях скорости  $w$  и  $w_0$ . Следовательно, величина ударного давления не зависит от распределения скоростей по сечению.

Необходимо отметить, что из проделанного вывода следует справедливость формулы (246) только для головных значений.

Рассмотрим теперь более подробно процесс распространения по трубопроводу возмущения, возникшего в сечении  $x = 0$ . Очевидно, что значения  $p$  и  $w$ , переносимые этим возмущением, должны удовлетворять дифференциальному соотношению (66) на прямой характеристике, т. е.

$$dp + \rho cdw + \rho \frac{\lambda |w|}{8\delta} w dx = 0. \quad (247)$$

Значения  $p_0$  и  $w_0$ , существовавшие в трубопроводе до возмущения, также должны удовлетворять уравнению (66), откуда имеем

$$dp_0 + \rho cdw_0 + \rho \frac{\lambda_0 |w_0|}{8\delta} w_0 dx = 0, \quad (248)$$

где  $\lambda_0$  — значение  $\lambda$  при  $w = w_0$ .

Вычитая выражение (248) почленно из выражения (247), получим, что на фронте волны

$$d(p - p_0) + \rho cd(w - w_0) = (\lambda_0 |w_0| w_0 - \lambda |w| w) \frac{\rho dx}{8\delta}. \quad (249)$$

Поскольку для фронтовых значений  $p$  и  $w$  имеет место формула Жуковского, то, подставив выражение (246) в уравнение (249), для головного значения скорости  $w = w \left( x, \frac{x}{c} \right)$  получим

$$d(w - w_0) = (\lambda_0 |w_0| w_0 - \lambda |w| w) \frac{dx}{16c\delta}, \quad (250)$$

или

$$dw = (\lambda_0 |w_0| w_0 - \lambda |w| w) \frac{dx}{16c\delta}. \quad (251)$$

так как по предположению скорость невозмущенного течения  $w_0 = \text{const}$ .

Формула (251) может быть получена и из элементарных соображений. Действительно, количество движения массы жидкости, заключенной между сечениями  $x$  и  $x_1$  ( $x_1 = x - dx$ ) равно  $f\rho w(x - x_1)$ , где  $x$  — координата фронта, а  $w$  — головное значение волны скорости. Для идеальной жидкости, очевидно,  $f\rho w(x - x_1) = \text{const}$ . Следовательно, изменение этой величины при распространении возмущения по вязкой жидкости равно импульсу сил трения. Так как перед фронтом волны течение жидкости по предположению стационарно, т. е. все силы, действующие на нее, уравновешены, то за импульс сил трения, обуславливающий затухание головного значения волны скорости, нужно принимать импульс избыточной силы трения. Тогда

$$f\rho dw dx = \frac{1}{2} (\theta - \theta_0) \chi dx dt, \quad (252)$$

где  $\theta_0$  — значение  $\theta$  для невозмущенного течения, а множитель  $1/2$  введен потому, что избыточная сила трения за время  $dt$  возрастает по линейному закону от нуля до  $(\theta - \theta_0)\chi dx$ .

Подставляя в выражение (252) значение  $\theta$  из выражений (9) и (10) и заменяя  $dt$  на  $\frac{dx}{c}$ , получим, как легко видеть, снова формулу (251).

Из формулы (251) следует, что

$$\frac{x}{16c\delta} = \int_{\omega_1}^{\omega} \frac{d\omega}{\lambda_0 |\omega_0| \omega_0 - \lambda |\omega| \omega}, \quad (253)$$

где  $\omega_1$  — головное значение волны скорости в сечении  $x = 0$ . Решая уравнение (253), найдем при заданном законе трения связь между  $\omega$  и  $\omega_1$  вида

$$\omega = \omega(\omega_1, \omega_0, x), \quad (254)$$

т. е. найдем связь между  $\omega$  и  $\omega_1$  в зависимости от скорости невозмущенного течения и пройденного волной расстояния.

Пусть в сечении  $x = x_i$   $\omega = \omega_i$ , а в сечении  $x = x_j$   $\omega = \omega_j$ . Положим по определению

$$\omega_j - \omega_0 = (\omega_i - \omega_0) e^{-k_{i,j}(x_j - x_i)}. \quad (255)$$

Введенная, таким образом, величина  $k_{i,j}$  есть, очевидно, коэффициент затухания головного значения волны скорости на участке трубы  $x_j - x_i$ . Так как головные значения волн скорости и давления связаны между собой формулой (246), то легко видеть, что  $k_{i,j}^*$  есть также коэффициент затухания головного значения волны давления. Сравнивая между собой формулы (254) и (255), видим, что, вообще говоря,

$$k_{i,j} = k_{i,j}(\omega_1, \omega_0, x_i, x_j).$$

Из изложенного видно, что отыскание головных значений волн возмущения давления и скорости и их коэффициентов затухания при любых законах трения сводится к решению уравнения (253).

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Линейный или линеаризованный закон трения. В этих случаях, согласно формулы (31),

$$\frac{\lambda |\omega|}{8\delta} = \frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8\delta} = \left( \frac{\lambda |\omega|}{8\delta} \right)_{cp} = 2a = \text{const} > 0, \quad (256)$$

причем для линейного закона трения равенство (256) будет точным, а для линеаризованного — приближенным.

Подставляя выражение (256) в уравнение (253) и интегрируя, получим

$$\omega - \omega_0 = (\omega_1 - \omega_0) e^{-\frac{ax}{c}}, \quad (257)$$

что, очевидно, совпадает с одной из формул (205), т. е. совпадает с результатом, полученным путем решения линеаризованной системы уравнений (73) для полубесконечной трубы.

Легко видеть, что равенство (257) имеет место при любых как положительных, так и отрицательных значениях скоростей  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  и  $\omega$ . Из равенства (257) видно также, что вне зависимости от того, происходит торможение или разгон потока, коэффициент затухания сохраняет свою величину, равную  $a/c$ .

2. Квадратичный закон трения,  $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$ . В этом случае уравнение (253) принимает вид

$$\int_{\omega_1}^{\omega} \frac{d\omega}{|\omega_0| \omega_0 - |\omega| \omega} = \frac{\lambda_0 x}{16c\delta}. \quad (258)$$

Ограничимся рассмотрением случаев, когда скорость течения жидкости имеет одно и то же направление до и после возмущения, т. е.  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega$  все либо положительны, либо отрицательны. Очевидно, что это ограничение не является существенным и введено лишь для упрощения последующих рассуждений.

С учетом сделанного замечания, после выполнения интегрирования в формуле (258), получим

$$\ln \frac{(\omega + \omega_0)(\omega_1 - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)(\omega_1 + \omega_0)} = \frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta} x, \quad (259)$$

откуда

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0} = \frac{e^{-\frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta} x}}{1 + \frac{\omega_1 - \omega_0}{2\omega_0} \left(1 - e^{-\frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta} x}\right)}, \quad (260)$$

т. е. при  $x \rightarrow \infty$   $\omega \rightarrow \omega_0$ .

Представим выражение (260) по аналогии с выражением (255) в виде

$$\omega - \omega_0 = (\omega_1 - \omega_0) e^{-mx}. \quad (261)$$

Из формул (260) и (261) следует, что коэффициент затухания при квадратичном законе трения  $m = m(x)$  и имеет вид

$$m(x) = \frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta} + \frac{1}{x} \ln \left[ 1 + \frac{\omega_1 - \omega_0}{2\omega_0} \left(1 - e^{-\frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta} x}\right) \right]. \quad (262)$$

При торможении потока либо  $\omega_0 > \omega_1 > 0$ , либо  $\omega_0 < \omega_1 < 0$  и формулу (262) можно представить в виде

$$m_T(x) = \frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta} + \frac{1}{x} \ln \left[ 1 - \frac{|\omega_1 - \omega_0|}{2|\omega_0|} \left(1 - e^{-\frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta} x}\right) \right], \quad (263)$$

где  $m_T(x)$  — коэффициент затухания при торможении потока.

Из формулы (263) следует, что

$$m_T(0) = \frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta} \left(1 - \frac{|\omega_1 - \omega_0|}{2|\omega_0|}\right), \quad m_T(\infty) = \frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta}. \quad (264)$$

При разгоне потока либо  $\omega_1 > \omega_0 > 0$ , либо  $\omega_1 < \omega_0 < 0$  и формула (262) принимает вид

$$m_p(x) = \frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta} + \frac{1}{x} \ln \left[ 1 + \frac{|\omega_1 - \omega_0|}{2|\omega_0|} \left(1 - e^{-\frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta} x}\right) \right], \quad (265)$$

откуда

$$m_p(0) = \frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta} \left(1 + \frac{|\omega_1 - \omega_0|}{2|\omega_0|}\right), \quad m_p(\infty) = \frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta}, \quad (266)$$

где  $m_p(x)$  — коэффициент затухания при разгоне потока.

Очевидно, что пользуясь формулой (264), можно в выражениях (262)–(266) возмущение скорости заменить возмущением давления.

Из сравнения формул (263) и (265) видно, что  $m_T(x) < m_p(x)$ , т. е. при одинаковых по модулю величинах скорости  $\omega_0$  коэффициент затухания при разгоне потока больше, чем при торможении. С ростом  $x$   $m_T(x)$  монотонно возрастает, а  $m_p(x)$  — монотонно убывает, стремясь, как это следует из формул (264) и (265), к общему пределу, равному

$$m_T(\infty) = m_p(\infty) = \frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta} = \frac{a}{c},$$

где  $a$  подсчитано по формуле (366).

Таким образом, разница между коэффициентами затухания при квадратичном и линеаризованном по формуле (366) законах трения с ростом  $x$  уменьшается. При фиксированном  $x$  эта разница будет тем меньше, чем меньше величина начального возмущения скорости.

3. Коэффициент сопротивления  $\lambda$  есть убывающая функция модуля скорости вида

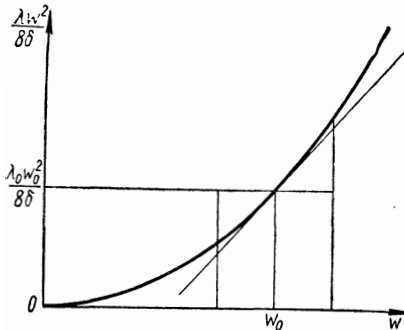
$$\lambda = B |\omega|^{-n}, \quad (267)$$

где  $B = \text{const}$ ,  $0 < n < 1$ , причем показатель  $n$  может быть также функцией  $|\omega|$ . Уравнение (253) в этом случае приходится решать численно, так как интеграл в его левой части в конечном виде, вообще говоря, не берется.

Выше указывалось, что линейризация закона трения по формуле (36а) эквивалентна замене кривой  $y = \frac{\lambda}{8\delta} |\omega| \omega$  отрезком касательной к ней в точке  $\omega = \omega_0$ . Это позволяет провести качественный анализ поведения коэффициента затухания в рассматриваемом случае.

Положим для определенности  $\omega_0 > 0$ ,  $\omega > 0$  и построим кривую  $y = \frac{\lambda}{8\delta} |\omega| \omega = \frac{B}{8\delta} \omega^{2-n}$  и касательную к ней в точке  $\omega = \omega_0$  (фиг. 9). Так как эта кривая всегда обращена выпуклостью вниз ( $n < 1$ ), то

$$\left. \begin{aligned} \text{при } \omega > \omega_0, \quad \frac{1}{8\delta} (\lambda \omega^2 - \lambda_0 \omega_0^2) &> 2a (\omega - \omega_0); \\ \text{при } \omega < \omega_0, \quad \frac{1}{8\delta} (\lambda_0 \omega_0^2 - \lambda \omega^2) &< 2a (\omega_0 - \omega), \end{aligned} \right\} \quad (268)$$



Фиг. 9

где

$$2a = \frac{\lambda_0 \omega_0}{4\delta} + \lambda'(\omega_0) \frac{\omega_0^2}{8\delta} = \text{const} -$$

угловой коэффициент касательной в точке  $\omega = \omega_0$ .

Из неравенств (268) вытекает, что для закона сопротивления (267) избыточная сила трения при разгоне потока больше, а при торможении меньше, чем для линейризованного по формуле (36а) закона сопротивления. Но, со-

гласно уравнения (251), величина  $\frac{d\omega}{dx}$ , а следовательно, и величина коэффициента затухания тем больше, чем больше избыточная сила трения.

Так как при линейризованном законе трения коэффициент затухания на основании формулы (257) равен  $a/c$ , то из изложенного следует, что

$$k_T < \frac{a}{c} = \frac{\lambda_0 \omega_0}{8c\delta} + \lambda'(\omega_0) \frac{\omega_0^2}{16c\delta} < k_P, \quad (269)$$

где  $k_T$  — коэффициент затухания при торможении;  $k_P$  — коэффициент затухания при разгоне потока.

По определению производной неравенства (268) и, следовательно, неравенства (269) при  $\omega \rightarrow \omega_0$  в пределе обращаются в равенства. Так как согласно выражений (254) и (255)  $\omega = \omega(\omega_1, \omega_0, x)$  и  $\omega \rightarrow \omega_0$  либо при  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ , либо при  $x \rightarrow \infty$ , то неравенства (269) можно представить в виде

$$k_T = \frac{\lambda_0 \omega_0}{8c\delta} + \lambda'(\omega_0) \frac{\omega_0^2}{16c\delta} - f_1(\omega_1, \omega_0, x);$$

$$k_P = \frac{\lambda_0 \omega_0}{8c\delta} + \lambda'(\omega_0) \frac{\omega_0^2}{16c\delta} + f_2(\omega_1, \omega_0, x),$$

где  $f_1$  и  $f_2 \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  или  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ .

Эти качественные результаты аналогичны результатам, полученным для квадратичного закона сопротивления, являющегося частным случаем закона (267) при  $n = 0$ .

Следует отметить, что поскольку  $\lambda(\omega)$  по определению — убывающая функция, то  $\lambda' < 0$  и

$$\frac{a}{c} < \frac{\lambda_0 |\omega_0|}{8c\delta},$$

т. е. коэффициент затухания при линеаризации по формуле (36а) получается меньшим, чем при линеаризации по формуле (36б).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е., О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. Бюллетени Политехнического общества № 5, 1899.
2. Корнфельд М., Упругость и прочность жидкостей, ГИТТЛ, 1951.
3. Гинзбург И. П., Прикладная гидрогазодинамика, Изд. Ленинградского Университета, 1958.
4. Егоров В. В., К вопросу о гидравлическом ударе в трубах, Труды ЦАГИ, вып. 712, Оборонгиз, 1958.
5. Двухшерстов Г. И., Гидравлический удар в трубах некругового сечения и потоке жидкости между упругими стенками. Уч. зап. МГУ, вып. 122, Механика т. II, 1948.
6. Чарный И. А., Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах, ГИТТЛ, 1951.
7. Архангельский В. А., Расчеты неустановившегося течения в открытых водотоках, Изд. АН СССР, 1947.
8. Розенберг Г. Д., Экспериментальное исследование неустановившегося течения вязко-пластических жидкостей. ДАН СССР, том 129, № 1, 1959.
9. Карслоу Х. и Егер Д., Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, 1948.
10. Гинзбург И. П., Гриб А. А., Гидравлический удар реальных жидкостей в сложных трубопроводах. Вестник ЛГУ № 8, 1954.
11. Христианович С. А., Неустановившееся движение в каналах и реках. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд. АН СССР, 1938.
12. Мелешенко Н. Т., Общий метод расчета гидравлического удара в трубопроводах. Изв. НИИ Гидротехники, т. XXIX, 1941.
13. Асатур К. Г., Гидравлический удар в трубопроводах с диаметром и толщиной стенки, непрерывно меняющимися по длине. Изв. АН Армянской ССР, т. III, № 4, 1950.
14. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, ГИТТЛ, 1951.
15. Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, т. I, ИЛ, 1958.
16. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. II, Физматгиз, 1960.
17. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. II, Гостехиздат, 1945.
18. Панов Д. Ю., Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. ГИТТЛ, 1949.
19. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, Гостехиздат, 1948.
20. Левин В. И. и Гроссберг Ю. И., Дифференциальные уравнения математической физики, ГИТТЛ, 1951.
21. Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, 1957.
22. Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, ГИТТЛ, 1951.
23. Коваленков В. И., Устанавливающиеся электромагнитные процессы вдоль проводных линий. Изд-во АН СССР, 1945.
24. Трантер К. Дж., Интегральные преобразования в математической физике, ГИТТЛ, 1956.



25. Снеддон И., Преобразования Фурье, ИЛ, 1955.
  26. Лурье А. И., Операционное исчисление, ГИТТЛ, 1950.
  27. Диткин В. А. и Кузнецов П. И., Справочник по операционному исчислению, ГИТТЛ, 1951.
  28. Деч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Физматгиз, 1958.
  29. Чарный И. А., К теории одномерного неустановившегося движения жидкости в трубах и расчету воздушных колпаков и уравнильных башен, Изв. ОТН АН СССР, № 6, 1938.
  30. Розенберг Г. Д., Салганик Р. Л., О применении метода Римана к решению системы телеграфных уравнений с постоянными коэффициентами для ограниченной линии, Изв. ОТН АН СССР, Энергетика и автоматика № 2, 1960.
  31. Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., Справочник по математике, ГИТТЛ, 1956.
  32. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958.
  33. Карслоу Х., Теория теплопроводности, Гостехиздат, 1947.
  34. Мюнц Г., Интегральные уравнения, т. 1, ГТТИ, 1934.
-

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
От редактора . . . . .	5
Из предисловия к французскому изданию . . . . .	7
Введение . . . . .	9

### Часть первая

#### ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ИЗМЕНЕНИЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РЕЖИМА В НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ

Общие положения . . . . .	13
§ 1. Установившийся режим . . . . .	13
§ 2. Неустановившийся режим . . . . .	15
§ 3. Основные закономерности неустановившегося движения в напорных трубопроводах . . . . .	15
§ 4. Примечание I (Потери напора) . . . . .	22
§ 5. Примечание II (Физическая интерпретация величин $F$ и $f$ ) . . . . .	22
§ 6. Определение скорости распространения волн . . . . .	22
§ 7. Характеристические кривые трубопровода при неустановившемся движении . . . . .	24
§ 8. Основной принцип графических построений . . . . .	28
§ 9. Графическое определение величин $F$ и $f$ . . . . .	29
Определения изменений режима в трубопроводе . . . . .	29
А. Простой трубопровод . . . . .	29
§ 10. Начальные условия. Выбор единицы времени и обозначения . . . . .	29
§ 11. Граничные режимы в конечных сечениях . . . . .	31
§ 12. Замечание по поводу прерывности в изменениях состояния среды . . . . .	33
§ 13. Замечания по поводу универсальности графического метода в сопоставлении с аналитическими методами . . . . .	34
§ 14. Промежуточные режимы в конечных сечениях . . . . .	35
§ 15. Режимы в промежуточных сечениях по длине трубопровода . . . . .	36
В. Сложный трубопровод . . . . .	40
§ 16. Общие положения . . . . .	40
§ 17. Случай двух участков, соединенных последовательно . . . . .	40
§ 18. Построения в случае двух участков произвольной длины . . . . .	42
§ 19. Случай, когда интервалы времени $\tau'$ и $\tau''$ имеют общий множитель . . . . .	46
§ 20. Случай последовательного соединения $n$ участков . . . . .	50
§ 21. Случай простого разветвления. Принцип построения . . . . .	57
§ 22. Построения в случае простого ветвления и когда величины $\tau'$ , $\tau''$ , $\tau'''$ имеют общий множитель . . . . .	60
§ 23. Случай сложного разветвления . . . . .	68
С. Учет потерь напора . . . . .	71
§ 24. Общие положения . . . . .	71
§ 25. Простейший случай одной диафрагмы в конечном сечении . . . . .	72
§ 26. Случай, когда потери напора распределены поровну между двумя диафрагмами . . . . .	73

	Стр.
§ 27. Распределение потерь напора между $n$ диафрагмами . . .	74
§ 28. Случай, когда потери напора действительно сосредоточены в нескольких сечениях по длине трубопровода . . .	79
§ 29. Выводы . . .	83
D. Случай, когда режим в трубопроводе определяется дифференциальным соотношением между величинами $h$ и $q$ и временем . . .	83
§ 30. Пояснение основных положений . . .	83
§ 31. Резервуар конечных размеров (уравнительная башня) . . .	86
§ 32. Случай пресса-аккумулятора на трубопроводе . . .	91
§ 33. Резервуар с поршнем и пружиной . . .	94
§ 34. Воздушный колпак . . .	96
§ 35. Сложные случаи . . .	101
§ 36. Заключение . . .	104
<i>Часть вторая</i>	
<b>ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА</b>	
§ 37. Ценность и практическая значимость метода . . .	106
Простой трубопровод, присоединенный одним концом к резервуару с постоянным уровнем, и имеющий на другом конце отверстие переменного сечения (выключение турбины) . . .	111
A. Мгновенное перекрытие отверстия . . .	111
§ 38. Случай, когда потери напора и кинетическая энергия пренебрежимо малы . . .	111
§ 39. Случай, когда нельзя пренебрегать изменениями кинетической энергии . . .	120
B. Линейное перекрытие расхода, происходящее в течение времени $\frac{2L}{a}$ . . .	123
§ 40. Решение задачи и сопоставление с предыдущим случаем . . .	123
C. Перекрытие, длительность которого превышает время $\frac{2L}{a}$ . . .	129
§ 41. Случай, когда размеры выходного отверстия и расход изменяются линейно в зависимости от времени . . .	129
D. Внезапное закрытие отверстия, создающее кавитацию на конце трубопровода . . .	138
§ 42. Случай, когда потерями напора в трубопроводе можно пренебречь . . .	138
§ 43. Случай, когда нельзя пренебрегать потерями напора в трубопроводе . . .	141
E. Периодическое закрытие и открытие отверстия в концевом сечении трубопровода . . .	147
§ 44. Периодические закрытие и открытие через интервалы времени $\frac{4L}{a}$ . . .	147
§ 45. Периодические открытие и закрытие, длящиеся по времени каждое $\frac{2L}{a}$ . . .	149
§ 46. Случай, когда период маневрирования вентилем меньше $\frac{2L}{a}$ . . .	155
Простой трубопровод, присоединенный одним концом к резервуару с постоянным уровнем и имеющий на другом конце отверстие с меняющимися размерами сечения и уравнительную башню . . .	155
A. Случай пренебрежения потерями в трубопроводе и у основания башни . . .	155
§ 47. Случай мгновенного и постепенного закрытия затвора . . .	155
B. Случай пренебрежения потерями напора в трубопроводе, но учета потерь у основания уравнительной башни . . .	163
§ 48. Постепенное закрытие вентиля . . .	163
§ 49. Мгновенное закрытие вентиля . . .	165

С. Случай учета потерь напора в трубопроводе, так и у основания уравнильной башни . . . . .	168
§ 50. Режим на концах трубопровода . . . . .	168
§ 51. Графики сопоставления результатов построений, произведенных в §§ 47, 48, 49 и 50 . . . . .	169
Колпак со сжатым воздухом на конце трубопровода . . . . .	171
§ 52. Случай соединения колпака со сжатым воздухом и питающего бассейна при посредстве простого трубопровода с постоянными характеристиками . . . . .	171
§ 53. Случай, когда трубопровод, соединяющий колпак со сжатым воздухом и питающий бассейн, имеет переменное сечение . . . . .	176
Сложные случаи . . . . .	181
§ 54(60). Случай турбины, питаемой от напорного трубопровода с уравнильной башней на нем . . . . .	181
§ 55(61). Внезапное открытие и медленное закрытие отверстия на отводе от трубопровода . . . . .	185
§ 56(62). Внезапное включение центробежного насоса . . . . .	192
§ 57(63). Задача о включении напорного трубопровода в условиях, когда нельзя пренебрегать потерями напора . . . . .	196

### *Часть третья*

#### ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА В ДРУГИХ ОБЛАСТЯХ МЕХАНИКИ

Металлические стержни, подвергаемые продольному усилию . . . . .	205
§ 58(73). Вывод общих законов . . . . .	205
§ 59(74). Определение скорости $a$ (распространения упругих волн) . . . . .	209
Приложения:	209
§ 60(75). Соударение двух стержней одинаковых удельного веса, поперечного сечения и периода, движущихся с разными скоростями $c_0$ и $c_0'$ . . . . .	209
§ 61(76). Соударение двух тел одинаковых удельного веса и скорости распространения упругих волн и периода, но сечения $s$ и $s'$ обратно пропорциональны скоростям $c_0$ и $c_0'$ . . . . .	211
§ 62(77). Соударение двух тел одинаковых удельного веса, скорости распространения упругих волн и поперечного сечения $s$ , но имеющих разные значения периода и разные скорости . . . . .	213
§ 63(78). Удар призмы с неограниченную плиту, испытывающую местную деформацию . . . . .	216
§ 64(79). Примечание . . . . .	218
§ 65(80). Продольный рывок, приложенный к свободному стержню . . . . .	218
§ 66(81). Продольный рывок, приложенный к стержню, закрепленному одним концом . . . . .	220
§ 67(82). Продольный удар по концу стержня, жестко закрепленного другим концом . . . . .	223
§ 68(85). Спиральная пружина, подверженная действию продольной силы . . . . .	229
§ 69(86). Собственные колебания массы, подвешенной на пружине . . . . .	233
Распространение поперечных волн в натянутой струне . . . . .	239
§ 70(89). Вывод общих законов . . . . .	239
§ 71(90). Определение скорости $a$ распространения волны . . . . .	242
Приложения:	242
§ 72(91). Щипковая струна . . . . .	242
§ 73(92). Удар по струне (струна пианино) . . . . .	245
§ 74(93). Удар падающего груза по струне . . . . .	248
Волны кручения в прямолинейном цилиндрическом стержне . . . . .	252
§ 75(95). Основные закономерности . . . . .	252
§ 76(96). Расчет скорости $a$ (распространение волн кручения) . . . . .	255

	Стр.
Применения	256
§ 77 (97). Внезапная разгрузка вала	256
Неустановившееся движение в открытом канале	260
§ 78 (99). Основные положения	260
§ 79 (100). Внезапное увеличение и внезапное уменьшение расхода воды в канале	263
Волны в электрических сетях	268
§ 80 (101). Основные положения	268
§ 81 (102). Определение скорости $c$	269
§ 82 (103). Характеристические прямые	269
Применения	271
§ 83 (104). Включение аккумулятора на сопротивление, расположенное в конце линии	271
§ 84 (105). Промежуточные режимы для концевых сечений	274
§ 85 (106). Режимы в промежуточных сечениях	274
§ 86 (107). Случай, когда величины $l$ и $c$ меняются по длине проводника	275
§ 87 (108). Точечное сопротивление на линии	276
§ 88 (109). Потери тока в проводнике	27
§ 89 (110). Дроссельная катушка в конце линии	277
Цсбавление	280
§ 90 (123). Общность графического метода	280
§ 91 (124). Вывод дифференциальных уравнений неустановившегося движения в напорных трубопроводах	283
Заключение	290
Приложение (д-р техн. наук проф. <i>И. А. Чарный</i> , канд. техн. наук <i>Г. Д. Розенберг</i> )	292
I. Вывод уравнений неустановившегося движения в напорных трубопроводах	292
II. Интегрирование уравнений движения реальной жидкости в трубах методом характеристик	303
III. Аналитические методы интегрирования линеаризованных уравнений неустановившегося движения	310
§ 1. Классический метод Фурье	310
§ 2. Метод контурных интегралов	317
§ 3. Операционный метод	328
§ 4. Видоизменение метода Римана	332
IV. Затухание головного значения волны давления при произвольном законе трения	338
Литература	343

Луи Бергерон

### ОТ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В ТРУБАХ ДО РАЗРЯДА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

Редактор издательства *В. В. Быстрицкая*

Технический редактор *Т. Ф. Соколова*

Корректор *Т. М. Евсеева*

Переплет художника *Ю. И. Соколова*

Сдано в производство 27/XII 1961 г.      Подписано к печати 11/V 1962 г.      Тираж 4500 экз.  
 Печ. л. 21,75. Уч.-изд. л. 22,25. Бум. л. 10,88.      Формат бумаги 60×90<sup>1/16</sup>.      Зак. 2,7.      Цена 1 р. 71 к.

Ленинградская типография Госгортехиздата, Ленинград, ул. Салтыкова-Щедрина, 54

### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
99	11-я снизу	$\varphi(h) = V_0 \frac{(h_0 + h_a) \frac{1}{\gamma}}{(h + h_a) \frac{1}{\gamma}}$	$\varphi(h) = V_0 \frac{(h_0 + h_a) \frac{1}{\gamma}}{(h + h_a) \frac{1}{\gamma}}$
324	4-я снизу	$\frac{ia}{\xi_s} [\Phi(ia + \xi_s) e^{i\xi_s t} -$ $- \Phi(ia - \xi_s) e^{-i\xi_s t}],$	$\frac{ia}{\xi_s} (\Phi(ia + \xi_s) e^{i\xi_s t} -$ $- \Phi(ia - \xi_s) e^{-i\xi_s t})],$
334	11-я сверху	$(U_\zeta - U_\eta)  _{C_0}$	$(U_\zeta - U_\eta)  _{C_0}$

1917



UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY