

Einführung in die Mechanik fester elastischer Körper und das zugehörige Versuchswesen

(Elastizitäts- und Festigkeitslehre)

Von

Dr. Rudolf Girtler

o. ö. Professor der Deutschen Technischen Hochschule
zu Brünn

Mit 182 Textabbildungen



Wien
Verlag von Julius Springer
1931

ISBN 978-3-7091-5987-3
DOI 10.1007/978-3-7091-3022-3

ISBN 978-3-7091-3022-3 (eBook)

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1931 by Julius Springer in Vienna.
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1931

Vorwort.

Das folgende Lehrbuch ist in erster Linie für Studierende der Ingenieurwissenschaften und technische Physiker zur Einführung in das Gebiet der Mechanik fester deformierbarer Körper und das zugehörige Versuchswesen bestimmt und stellt im wesentlichen den Inhalt von Vorlesungen dar, die ich seit einer Reihe von Jahren an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn gehalten habe.

Durch die gewählte Methode der Darstellung, die die innige Verquickung zwischen allgemeiner Theorie und Experiment besonders betont, soll dem Lernenden eindringlich vor Augen gestellt werden, in jedem besonderen Fall das allgemeine Problem zu erblicken, und aufgezeigt werden, wie groß die Schwierigkeiten sind, die sich einer exakten Behandlung selbst scheinbar ganz einfacher technischer Aufgaben entgegenstellen. Ein derartiger Vorgang ist, abgesehen davon, daß durch ihn eine tiefere Durchdringung des Stoffes ermöglicht wird, auch deswegen berechtigt, weil ein wirkliches Verständnis üblicher Näherungstheorien erst zu erwarten ist, wenn man einzuschätzen vermag, welche Faktoren bei Lösung einer Aufgabe berücksichtigt werden müssen und welche infolge ihres geringeren Einflusses vernachlässigt werden können.

Dem Gesagten zufolge gliedert sich das Buch in einen theoretischen ersten Teil, in dem fallweise zur Belebung des Verständnisses wichtige Anwendungsgebiete betreten werden, und in einen zweiten Teil, der sich auf die Näherungstheorien gerader Stäbe unter Einschluß der wichtigsten Fälle labilen Gleichgewichtes, ferner die für die einfachen Beanspruchungen gerader Stäbe grundlegenden Versuche, die Anwendungen der Arbeitssätze und der aus ihnen gezogenen Folgerungen auf aus geraden Stäben aufgebaute Fach- und Stabwerksträger und schließlich auf die einschlägigen Dimensionierungsaufgaben beschränkt. Es ist geplant, diesen beiden Teilen seiner Zeit einen dritten in einem Sonderbände folgen zu lassen, der eine Erweiterung der Theorie und eine Behandlung der übrigen praktischen Probleme (krumme Stäbe, Platten, Schalen usw.) enthalten soll.

Im ersten Teile des Buches habe ich der gesonderten Darstellung des Spannungs- und Deformationszustandes und der diese beiden Zustände in Abhängigkeit voneinander bringenden Naturgesetze einen verhältnismäßig breiten Raum eingeräumt, weil ich die Erfahrung machte, daß der Anfänger den rein geometrisch-kinematischen und den physikalischen Anteil elastischer Probleme häufig nicht auseinander zu halten vermag. Bezüglich der physikalischen Grundlagen mußte beinahe durchwegs der rein phänomenologische Gesichtspunkt allein festgehalten werden schon mit Rücksicht auf den Zweck und den Rahmen des Buches aber auch deswegen, weil eine Erörterung der oft rein hypothetischen Zusammenhänge der in Betracht kommenden Erscheinungen mit dem physikalischen Aufbau der Körper den Anfänger eher verwirrt als aufklärt.

Vorausgesetzt wurden die Kenntnisse der Mechanik starrer Körper, der höheren Mathematik und der Vektoralgebra in dem Umfange, wie sie an technischen Hochschulen vermittelt zu werden pflegen.

Schließlich obliegt es mir, meinem Assistenten, Herrn Ing. R. Scheinost, für die Hilfe bei der Durchführung der Zeichnungen und der Verlagsbuchhandlung Julius Springer für die schöne und sachgemäße Ausstattung des Buches geziemenden Dank zu sagen.

Brünn, 1. Mai 1931.

R. Girtler.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

	Seite
Grundlagen der Erfahrung und Theorie	1—219
I. Einleitung	1—5
II. Grundbegriffe	5—26
1. Einführung von Elementarkörpern	5
2. Einteilung der auf den festen elastischen Körper einwirkenden Kräfte	6
3. Art und Größe der äußeren Beanspruchung eines festen elastischen Körpers	8
4. Absoluter und relativer Verschiebungszustand in einem Punkte eines elastischen festen Körpers	9
5. Verformung eines Elementarkörpers, homogene Verformung	11
5a. Verformung bei Einführung vektoralgebraischer Zeichen	13
6. Verzerrungskomponenten und Art bzw. Größe des Verzerrungszustandes für einen Elementarkörper	14
7. Sehr kleine Verformungen von Körpern	16
8. Spannung, Spannungskomponenten und Spannungszustand an einem Elementarkörper	16
9. Art und Größe der inneren Beanspruchung. Homogener Spannungszustand. Zuordnung der äußeren Beanspruchung zur inneren und zum Verschiebungs- und Verzerrungszustand	20
10. Zusammenhang zwischen Verzerrungs- und Spannungszustand	20
11. Äquivalenz eines am festen Körper angreifenden Lastsystemes. De Saint-Venantsches Prinzip.	20
12. Bruch des Körpers. Statische und dynamische relative Festigkeit. Dauerstandfestigkeit	23
13. Natürlicher Zustand. Anfangs- und Temperaturspannungen	25
14. Genauere Umschreibung des Begriffes der Elastizitäts- und Festigkeitslehre	25
III. Kinematik des festen elastischen Körpers. (Elastokinematik.)	26—47
1. Voraussetzungen.	26
2. Allgemeine Gleichung des Verschiebungsellipsoides	26
3. Deformationshauptrichtungen, Hauptdehnungen	27
4. Die Verzerrungskomponenten als partielle Ableitungen der Verschiebungskomponenten	29
5. Einführung der Verzerrungskomponenten bzw. Hauptdehnungen in die Gleichung des Verschiebungsellipsoides	31
5a. Das Verschiebungsellipsoid vom Standpunkt der Vektoralgebra.	31
6. Bestimmung der Dehnung in beliebiger Richtung, wenn der Verzerrungszustand für einen Elementarkörper gegeben ist. Verzerrungsfläche	32
7. Bestimmung der Hauptdehnungen aus dem Verzerrungszustand für einen Elementarkörper	33
7a. Die Verzerrungsfläche in vektoralgebraischen Zeichen	34
8. Zusammenhang der Verzerrungszustände für verschiedene unendlich kleine Prismen in einem Punkte	35
9. Raumänderung eines Elementarkörpers, kubische Dilatation	38
10. Anwendungen auf häufig vorkommende Beanspruchungsarten	39
11. Verträglichkeits- oder Kompatibilitätsbedingungen	43
12. Verschiebungs- und Verformungsgeschwindigkeit, Verschiebungs- und Verformungsbeschleunigung	45
IV. Die Lehre vom Gleichgewicht der elastischen festen Körper (Elastostatik)	47—196
1. Problemstellung	47
2. Notwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingungen	47

	Seite
3. Gleichgewichtsbedingungen (Spannungsgleichungen) für einen Elementarkörper im Innern	48
4. Bestimmung der Totalspannung für ein beliebiges Flächenelement bei gegebenem Spannungszustand eines Elementarkörpers	51
4a. Die Spannungsdyade	52
5. Beziehung der Totalspannungen zweier beliebiger Flächenelemente in einem Punkte	52
6. Oberflächen- oder Grenzbedingungen	53
7. Normalspannungsfläche	54
7a. Die Normalspannungsfläche als Bild einer Dyade	54
8. Bestimmung der Hauptspannungen	55
9. Die Normalspannungsfläche bezogen auf die Hauptspannungsrichtungen	56
10. Räumlicher, ebener, linearer Spannungszustand	57
11. Zusammenhang der Spannungszustände für verschiedene Elementarkörper in einem Punkte	57
12. Das Lamésche Spannungsellipsoid. Spannungsrichtfläche	58
12a. Das Lamésche Spannungsellipsoid als Bild einer Dyade	61
13. Die Mohrsche Darstellung des Spannungszustandes	61
14. Extreme Werte der Schubspannungen für einen dreidimensionalen Spannungszustand	67
15. Beispiele. 1. Der hydrostatische räumliche Spannungszustand. 2. Der allgemeine ebene Spannungszustand. 3a. Der ebene hydrostatische Spannungszustand. 3b. Die Beanspruchung auf reinen Schub. 4. Der lineare Spannungszustand.	67—73
16. Über Elastizitätsgesetze. Isotropie und Homogenität	74
17. Das Gesetz von Hooke in einfacher und erweiterter Form (Superpositionsgesetz) für isotrope homogene Körper.	75
18. Fortsetzung. Zusammenhang zwischen den Elastizitätskonstanten von dem Hookeschen Gesetze folgenden Stoffen	79
19. Experimentelle Ermittlung der Elastizitätskonstanten	81
20. Kompressibilität. Raummodul	84
21. Elastische Grundgleichungen der Statik für dem Hookeschen Gesetze folgende isotrope und homogene Körper. Eindeutigkeit der Lösung des Gleichgewichtsproblems.	85
22. Einführung krummliniger Koordinaten	89
23. Anwendung der elastischen Grundgleichungen auf die Lösung einiger einfacher Aufgaben. a) Fall der Drillung eines geraden Stabes. b) Beanspruchung eines geraden Stabes auf Zug unter Einbeziehung des Eigengewichtes. c) Beanspruchung durch allseitigen Flüssigkeitsdruck.	90—99
24. Über die Formänderungsarbeit und die Verzerrungsenergiefunktion im Falle des elastischen Gleichgewichtes	99—110
a) Formänderungsarbeit und Arbeitssatz bei linearer Beanspruchung.	99
b) Formänderungsarbeit und der Satz von Clapeyron bei beliebiger Beanspruchung	102
c) Formänderungsarbeit für die Raum- und Gestaltsänderung.	108
d) Adiabatische und isotherme Verformung, Verzerrungsenergiefunktion.	110
25. Über das Prinzip der virtuellen Arbeit	110
a) Form des Prinzipes der virtuellen Arbeit für den starren Körper.	111
b) Form des Prinzipes der virtuellen Arbeit für einen elastischen festen Körper bei virtuellem Deformationszustand	112
c) Form des Prinzipes der virtuellen Arbeit für einen elastischen festen Körper bei virtuellem Spannungszustand.	115
26. Der Satz über das Minimum der Formänderungsarbeit von Castigliano-Menabrea und zwei weitere Lehrsätze von Castigliano	119—134
a) Über statisch unbestimmte Systeme im allgemeinen	119
b) Der Minimumsatz von Castigliano-Menabrea im Falle äußerer statischer Unbestimmtheit und der erste der Castiglianoschen Lehrsätze	124
c) Der Minimumsatz von Castigliano-Menabrea im Falle innerer statischer Unbestimmtheit	129
d) Der allgemeine Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit für beliebige Stützung und beliebige statisch unbestimmte Systeme	130
e) Der zweite Lehrsatz von Castigliano	131
27. Der Satz von Maxwell über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Kräfte. 134	
28. Der Satz von Betti.	136

	Seite
29. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes. a) Allgemeine Bemerkungen. b) Technisches und wahres σ - e -Schaubild. Proportionalitätsgrenze.	137
30. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung): Das Potenzgesetz. Veränderlicher Elastizitätsmodulus	147
31. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung): Linearitätsgrenze, reduzierte Spannungen.	148
32. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung): Wechselnde Auf- bringungsart. Federnde und bleibende Formänderung. Wahrer Elastizitäts- modulus. Elastizitätsgrenze für linearen Spannungszustand	149
33. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung): Poncelet-De Saint Venantsche und Mohrsche Ansicht über die Elastizitätsgrenze bei beliebigem Spannungszustand.	153
34. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung): Grad der Voll- kommenheit und Größe der Elastizität	159
35. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung): Gebiet der blei- benden Deformationen. Streck- und Fließgrenze, Fließfiguren. Verfestigung. Technische Zug- und Druckfestigkeit. Bruchgrenzen. Reißwiderstand	160
36. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung): Hysterese	166
37. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung): Nachwirkungs- erscheinungen.	168—178
1. Verzögerte Deformation	170
2. Bauschingerereffekt	171
3. Die Gesetze von Wöhler. Ermüdung des Materiales	171
4. Nachfließen und Relaxation	171
5. Änderung des σ - e -Schaubildes mit der Verformungsgeschwindigkeit.	175
38. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung): Einflußnahme der Temperatur	178
39. Über das Maß der Anstrengung oder der Bruchgefahr unter statischen Ver- hältnissen.	179
40. Über stabiles, labiles, indifferentes Gleichgewicht.	192
V. Elastokinetik	197—219
1. Die elastokinetischen Grundgleichungen. Satz über die lebendige Kraft	197
2. Das Stoßproblem und verschiedene Stoßtheorien. Folgerung aus dem Energie- satz über Verschiebungen durch Stoßkräfte.	201
3. Freie Längsschwingungen von geraden Stäben	208
4. Wellentheorie des Längsstoßes auf einem einseitig eingespannten Stab.	211
5. Berechnung des Spannungszustandes in rotierenden kreiszylindrischen Scheiben.	216

Zweiter Teil.

Näherungstheorien zur Berechnung gerader Stäbe	220—441
I. Statische Beanspruchung gerader Stäbe	220—376
1. Allgemeine Bemerkungen über Annäherungstheorien und Annäherungsver- fahren	220
2. Die verschiedenen Beanspruchungsarten von geraden Stäben	221
3. Die Beanspruchung auf Zug und Druck. Normal- und Proportionalstäbe. Einfluß der Probeform auf die Gütegrößen. Völligkeitsgrad	228
4. Beanspruchung auf ebene schiefe Biegung und Schub	236
5. Beispiele für die Beanspruchung auf ebene gerade Biegung und Schub. Räum- liche schiefe Biegung und Schub	251
6. Verwendung der Gleichung der elastischen Linie bei Bestimmung von statisch unbestimmbaren Stützkräften.	226
7. Graphisches und rechnerisches Verfahren von Mohr zur Bestimmung von Durchbiegungen und Verdrehungswinkeln	271
8. Stäbe mit veränderlichem Trägheitsmoment und Stäbe gleichen Biegungs- und Zugwiderstandes	279
9. Haupt- und Schubspannungslinien	285
10. Der Biegeversuch. Biegefestigkeit	289
11. Beanspruchung auf ebene, schiefe oder gerade Biegung, Schub und Druck (Zug)	298
12. Ebene schiefe Biegung und Druck (Zug) oder schiefer (gerader) exzentrischer Druck (Zug)	301
13. Fortsetzung: Bestimmung der größten Spannungen mit Hilfe des Kernes. Beispiele	305

	Seite
14. Schiefer (gerader) exzentrischer Druck (Zug) bei Berücksichtigung der Durchbiegungen der Stabachse	310
15. Beanspruchung auf Abscheren. Beispiele. Der Abscherversuch. Scherfestigkeit.	314
16. Deformationsarbeit bei Beanspruchungen mit Kräften in Ebenen durch die Stabachse	321
17. Beanspruchung auf Drillung und mit ihr zusammengesetzte Beanspruchungsarten. Deformationsarbeit bei Drillung	325
18. Fortsetzung: Das Seifenhautgleichnis von Prandtl.	339
19. Fortsetzung: Das hydrodynamische Gleichnis	343
20. Fortsetzung: Der Verdrehungsversuch. Drehungsfestigkeit	345
21. Knickung bei verschiedenen Grenzbedingungen. Eulersche Knicklast und Knickspannung. Reduzierte Länge und Schlankheitsgrad	350
22. Fortsetzung: Grenzen der Gültigkeit der Eulerschen Formeln. Versuche von Bauschinger und Bach. Knickung bei kleinem Schlankheitsgrad. Versuche von Tetmayer. Die Knickformel von Engesser. Versuche von Kármán	359
23. Fortsetzung: Einfluß einer ursprünglichen Stabkrümmung. Praktische Knicklast. Biegung und Druck bei langen Stäben	367
24. Labilitätserscheinungen bei Drillung und Druck und bei Drillung allein . . .	370
25. Kippen eines Stabes mit rechteckigem Querschnitt.	373
II. Anwendungen des Arbeitssatzes, des Prinzipes der virtuellen Arbeit und der Sätze von Castigliano und Maxwell auf aus geraden Stäben aufgebaute Fach- und Stabwerksträger.	376—402
1. Berechnung statisch unbestimmter Größen	376
2. Bestimmung von Deformationsgrößen	395
III. Näherungslösungen für einige wichtige dynamische Beanspruchungen gerader Stäbe	402—414
1. Freie Transversal- und Drillungsschwingungen eines geraden Stabes.	402
2. Näherungstheorien für den Längs- und Querstoß von geraden Stäben.	407
IV. Das allgemeine Dimensionierungsproblem und die zulässige Anstrengung unter statischen und dynamischen Verhältnissen	414—441
1. Allgemeine Grundlagen. Sonderfall des ebenen Spannungszustandes	414
2. Fortsetzung: Beispiele zur Dimensionierung bei verschiedenen Beanspruchungen und stabilem Gleichgewicht	427
3. Fortsetzung: Dimensionierung bei Knickung und bei Biegung und Knickung. Die Navier-Schwarz-Rankinesche Formel	437
Literaturnachweis	442
Sachverzeichnis	445

Erster Teil.

Grundlagen der Erfahrung und Theorie.

I. Einleitung.

1. Die Mechanik als Wissenschaft hat nach der hier vertretenen Auffassung in erster Linie die Bewegungserscheinungen der die Natur erfüllenden leblosen Materie zu untersuchen und im Sinne Kirchhoffs in einfachster Weise zu beschreiben. In zweiter Linie sucht die Mechanik die Zuordnung der Bewegungserscheinungen oder wenigstens die Möglichkeit einer solchen Zuordnung zur übrigen, durch physikalische Tatsachen erhärteten Erfahrungswelt darzustellen. Demgemäß teilt sich die Mechanik in eine reine oder rationale Mechanik und eine angewandte Mechanik mit ihren verschiedenen Zweigen, wie zum Beispiel technische Mechanik, technologische Mechanik, physikalische Mechanik, astronomische Mechanik usw.

Die Forderung der Einfachheit der Beschreibung wird gewährleistet durch die Einführung möglichst weniger, aus der Erfahrung geschöpfter oder durch die Form der menschlichen Anschauung bedingter Begriffe, wie Masse, Zeit, Raum und daraus abgeleiteter physikalischer Größen, wie Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, kinetische Energie, Arbeit, Effekt usw. und der auf diesen Begriffen ruhenden Naturgesetze, deren Charakter wesentlich von der Stufe unserer Erkenntnis abhängt und das System der Mechanik festlegt (Galilei-Newtonsche Mechanik, Hertzsche Mechanik, Relativitätsmechanik). Ferner ist die genannte Einfachheit auch bedingt durch die Heranziehung der Mathematik, insbesondere der Vektorrechnung, wodurch die Mechanik in die Reihe der exakten Naturwissenschaften tritt.

2. Gegenstand der folgenden Vorlesungen ist ein besonderer Zweig der angewandten Mechanik, die technische Mechanik der festen elastischen Körper, welche häufig auch als Elastizitäts- und Festigkeitslehre bezeichnet wird, ferner jener Teil der reinen Mechanik, der zum Verständnis des genannten Teiles der technischen Mechanik notwendig ist und theoretische Elastizitätslehre oder mathematische Elastizitätstheorie genannt wird.

3. Der Punkt 2 bedarf einer vorläufigen Erklärung im Hinblick auf die dort vorgenommene Einführung des festen elastischen Körpers. Alle Stoffe der Natur haben bekanntlich die Eigenschaft, einen bestimmten Raum einzunehmen, wodurch der Stoff zum Körper oder zu einem System von Körpern wird, und besitzen ein für das Studium der Bewegungserscheinungen besonders wichtiges Merkmal, das der wägbaren (ponderablen) Masse. Dagegen unterscheiden sich die verschiedenen Stoffe unter anderem dadurch, daß ihr physikalischer und chemischer Aufbau oder, wie man auch sagt, ihre Konstitution verschieden ist. Mit Bezug auf den physikalischen Aufbau spricht man in herkömmlicher Weise von gasförmigen, flüssigen und festen Zuständen, zwischen denen zahlreiche Übergänge vorhanden sind. Man kann nun einen Anhaltspunkt für die Festlegung der verschiedenen Zustände gewinnen, indem man als ersten Prüfstein

für die Einreihung eines vorgelegten Stoffes in eine von den genannten Kategorien, dessen Verhalten a) bei Einwirkung seines Eigengewichtes, b) bei Einwirkung von äußeren mechanischen Kräften, die zum Eigengewicht hinzutreten, feststellt. Ein fester Körper ändert bei Einwirkung seines Eigengewichtes allein — es werde z. B. ein Stein im luftleeren Raum fallen gelassen — seine Gestalt und den Raum, den er einnimmt, nicht; man sagt, er habe im Gegensatz zu den Flüssigkeiten und Gasen eine selbständige Gestalt¹. Wird der schwere feste Körper selbst erheblichen äußeren Kräften ausgesetzt, die zum Eigengewicht hinzutreten, so ändert er seine Gestalt und den Raum, den er vor Einwirkem der Kräfte einnahm, verhältnismäßig wenig, häufig sogar, wenn man sich nicht besonders feiner Meßinstrumente bedienen will, unmerklich. Nur dann, wenn die Größen der äußeren Kräfte von besonderen Umständen abhängige höher liegende Werte überschreiten, werden die Gestalts- und Raumänderungen des festen Körpers bedeutender und tritt häufig, aber durchaus nicht immer der Bruch des Körpers ein.

Ein gerader, prismatischer, 20 cm langer Stab aus Flußeisen mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius $r = 1$ cm wurde durch zwei gleichförmig über seine Basisflächen verteilte parallel zu seiner Stabachse wirkende Kräfte von je 2000 kg derart beansprucht, daß die Kräfte den Stab zu dehnen trachteten. Der Stab zeigte bei dieser großen Belastung eine Verlängerung von 0,06 mm. Diese Verlängerung ist natürlich mit freiem Auge gar nicht merkbar, sondern kann erst deutlich unter Zuhilfenahme besonderer Einrichtungen festgestellt werden. Derselbe Stab brach erst bei 3300 kg und zeigte dabei allerdings die schon bedeutend ins Gewicht fallende durchschnittliche Verlängerung von 6,2 cm. Wird hingegen ein Würfel aus hochwertigem Flußeisen unter die Wirkung von zwei entgegengerichteten Kräften gestellt, die auf zwei gegenüberliegende Seitenflächen normal stehen und über sie gleichförmig verteilt sind, derart, daß sie die Würfelkanten parallel zur Krafrichtung zu verkürzen trachten, so kann man die merkwürdige Erfahrung machen, daß der Würfel bei großen Druckkräften zwar sehr stark platt gedrückt wird, daß aber beliebig große Kräfte niemals eine Trennung des Würfels in einzelne Bruchstücke oder auch nur oberflächliche Risse herbeiführen können.

Der Grund für dieses Verhalten der festen Körper liegt in ihrem Aufbau, dem zufolge die zwischen den einzelnen Teilchen des Körpers wirkenden Kohäsionskräfte einer Lagenänderung derselben mit Bezug aufeinander einen sehr großen Widerstand entgegensetzen.

Die Bestimmung eines festen Körpers aus dem genannten Verhalten kann nur als erster Anhaltspunkt gewertet werden, und zwar hauptsächlich aus zwei Gründen. Der erste Grund ist der, daß keine Angaben über die Form des Körpers, die Art des Angreifens der äußeren Kräfte und deren Größe, ferner über die Grenzen der Gestalts- und Raumänderung, die im äußersten Falle noch zugelassen werden könnten, um den Körper noch als festen zu bezeichnen, gemacht werden. Aber selbst wenn derartige Angaben vorlägen, bliebe noch immer die Frage offen, was für ein besonderer physikalischer Aufbau notwendig ist, um das genannte Verhalten in den oben unter a) und b) angegebenen Fällen aufzuklären. Daß mit dieser Frage, deren Beantwortung nach dem heutigen Stande der physikalischen Wissenschaften erst angebahnt wurde, auch jene für den Ingenieur so wichtige Frage nach den den Bruch eines Stoffes bedingenden Umständen enge verknüpft ist, liegt auf der Hand.

Die festen Körper zeigen bei Einwirkung nicht zu großer äußerer Kräfte die Eigenschaft der Elastizität. Diesbezüglich sei mit Vorbehalt einer weiter unten folgenden genaueren Behandlung dieser wichtigen Eigenschaft als erste Einführung festgestellt, daß die infolge Einwirkung derartiger Kräfte auftretenden Gestalts- und Raumänderungen fester Körper praktisch genommen umkehrbar

¹ Eine Flüssigkeit würde unter denselben Umständen zerstäuben, ein Gas sich nach allen Seiten ausbreiten.

sind, d. h. nach Abbringen der nicht zu großen Kräfte praktisch wieder völlig zurückgehen.

Die Traverse aus Flußeisen in Abb. 1 liege auf beiden Seiten auf Mauerwerk und stehe vorerst nur unter dem Einflusse ihres Eigengewichtes G und der beiden gleichen Auflagerreaktionen $G/2$. Infolgedessen biegt sich die Traverse in die in der Abbildung strichlierte Lage 1 durch. Wird jetzt in der Mitte der Traverse die Last P hinzugefügt, so biegt sich die Traverse weiter, bis in die in der Abbildung punktierte Lage 2 durch. Wird P wieder abgebracht, so geht die Durchbiegung 2 praktisch wieder zurück, bis die Lage 1 wieder erreicht ist, wenn P nicht zu groß war. (In der Abbildung ist der Einfachheit halber nur die Durchbiegung der Stabachse der Traverse gezeichnet.)

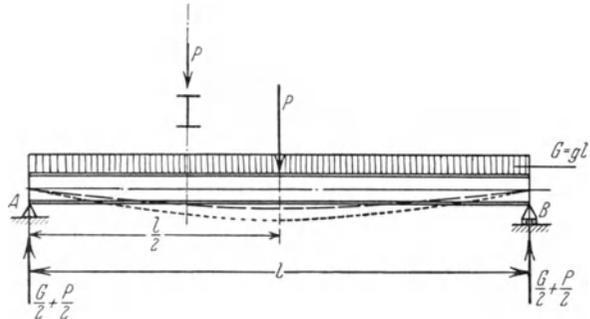


Abb. 1.

Im vorstehenden wurde betont, daß die Gestalts- und Raumänderungen nach Abbringen der

Belastung praktisch genommen vollständig zurückgehen, wenn die aufgebrauchte Belastung nicht zu groß war. Zur Erklärung mag jetzt schon erwähnt werden, daß im allgemeinen für einen Körper gegebenen Stoffes und gegebener Gestalt die Umkehrbarkeit der Gestalts- und Raumänderung um so mehr zutrifft, je kleiner die Belastung war und daß eine strenge Umkehrbarkeit eigentlich genau bei keiner Belastung vorhanden ist; es sind aber bei für die betreffende Art des festen Körpers kleinen Belastungen die nicht völlig rückgängig zu machenden Gestalts- und Raumänderungen so klein, daß man sie praktisch vernachlässigen kann.

4. Die Tatsache, daß die bei Einwirkung nicht zu großer äußerer Kräfte auf feste elastische Körper eintretenden Gestalts- und Raumänderungen, von Ausnahmefällen abgesehen, sehr klein sind, hat frühzeitig zur Annahme des starren Körpers geführt, der die Eigenschaft besitzen soll, überhaupt keine Gestalts- und Raumänderungen zuzulassen. Durch die Einführung eines derartigen Idealbildes eines festen Körpers wird es ermöglicht, die Bewegungserscheinungen fester Körper in erster Annäherung ohne Rücksichtnahme auf die kleinen Gestalts- und Raumänderungen zu studieren. Der bezügliche Teil der Mechanik heißt Mechanik der starren Körper oder Stereomechanik und wird im folgenden als bekannt vorausgesetzt.

Oft genügt die Annahme der Starrheit, viel häufiger aber muß sie fallen gelassen und der wahre Sachverhalt zugrunde gelegt werden wie aus den folgenden einfachen Beispielen hervorgeht. Das eine bezieht sich auf die erfahrungsgemäß bestehende Bruchgefahr eines äußeren Kräften unterworfenen festen Körpers, die offensichtlich an Gestalts- und Raumänderungen gebunden ist, das andere betrifft die Bestimmung der Auflagerreaktionen in sogenannten statisch unbestimmten Fällen, die bei Festhaltung der Annahme der Starrheit unmöglich wird.

Bevor wir hierauf näher eingehen, sei auf den Begriff des Freiheitsgrades eines starren Körpers, bzw. eines elastischen festen Körpers hingewiesen. Ein starrer Körper ist entweder ein freier oder ein unfreier, je nachdem er sich im Raume beliebig bewegen kann oder nicht. Man sagt, ein freier starrer Körper besitze sechs Freiheitsgrade, weil sechs Koordinaten genügen, um seine jeweilige Lage im Raum mit Bezug auf ein festes Koordinatensystem xyz festzulegen. Beim freien starren Körper ist nämlich die Bewegung eines beliebigen Punktes P bereits gegeben, wenn die Bewegung dreier beliebig angenommener Punkte 1, 2, 3 desselben, welche zusammen ein Dreieck bilden, bekannt ist. Die je-

weilige Lage des Punktes I , dessen Bahn eine beliebige sei, ist durch Angabe dreier als Funktionen der Zeit zu betrachtender Koordinaten x_1, y_1, z_1 jederzeit bestimmt, man schreibt dem Punkte I den Freiheitsgrad drei zu. Zur Bestimmung der Lage des Punktes 2 genügen zwei Koordinaten, zum Beispiel x_2, y_2 , die dritte Koordinate dieses Punktes ist schon durch die Bedingung bestimmt, daß die Entfernung der Punkte $1, 2$ infolge der Annahme der Starrheit eine unveränderliche ist. In ähnlicher Weise kann gezeigt werden, daß die Lage des Punktes 3 durch Angabe einer Koordinate, z. B. x_3 bestimmt ist. Zur Bestimmung der Lage eines freien starren Körpers brauchen wir demnach sechs Koordinaten wie oben angegeben, als welche $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, x_3$ gewählt werden können.

Anstatt dieser 6 Streckenkoordinaten benützt man bekanntlich in der Mechanik starrer Körper 3 Streckenkoordinaten und 3 Winkelkoordinaten; als erstere führt man die Koordinaten des Schwerpunktes, als letztere die 3 Eulerschen Winkel ein, die ein mit dem starren Körper fest verbunden gedachtes Koordinatensystem zu jeder Zeit mit Bezug auf ein durch den Schwerpunkt des Körpers gehendes Koordinatensystem festlegen, dessen Achsen bei Bewegung des starren Körpers stets parallel zu den Achsen des gegebenen festen Koordinatensystemes xyz bleiben.

Ein unfreier oder zwangläufiger starrer Körper ist in seiner Bewegungsfreiheit beschränkt, und infolgedessen genügen weniger als sechs Koordinaten, um seine jeweilige Lage mit Bezug auf das feste Koordinatensystem xyz zu bestimmen, sein

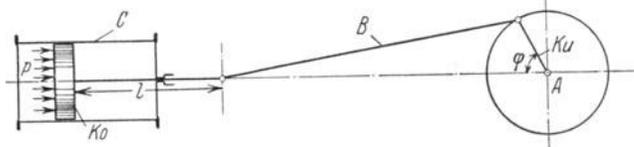


Abb. 2.

Freiheitsgrad ist kleiner als sechs. Die Unfreiheit eines ursprünglich freien starren Körpers wird bewirkt, indem man ihn irgendwie stützt oder bestimmte Führungen vorschreibt, wodurch seine

möglichen Bewegungen den Charakter der Zwangläufigkeit annehmen.

Die Kurbel Ku des Schubkurbelgetriebes in Abb. 2, die um eine raum- und körperfeste Achse A drehbar ist, besitzt den Freiheitsgrad 1, denn ihre jeweilige Lage ist durch eine einzige freie Koordinate, d. i. den Rotationswinkel φ ihrer Schwerachse bestimmt. Ein vollkommen festgelegter starrer Körper hat den Freiheitsgrad 0, er besitzt überhaupt keine freie Koordinate mehr.

Ein elastischer fester Körper hat, ob er nun gestützt oder ungestützt ist, unendlich viele Freiheitsgrade, denn abgesehen von den gestützten oder geführten Punkten hat jeder von den unendlich vielen Punkten desselben nach allen Richtungen des Raumes eine von der Bewegung der übrigen Punkte unabhängige Bewegungsmöglichkeit, wenn dieselbe auch infolge des Zusammenhanges des elastisch-festen Körpers nach jeder Richtung bezüglich der Größe des Weges beschränkt ist. Denken wir uns einen elastisch-festen, nicht gestützten oder gestützten Körper erstarrt, so schränken wir seinen Freiheitsgrad bis zum Werte 6 resp. auf einen kleineren Wert als 6 ein.

In Zukunft soll als unfreier elastischer Körper ein solcher bezeichnet werden, dessen Freiheitsgrad für den Fall, als man ihn erstarrt dächte, kleiner als 6 wäre im Gegensatz zum freien elastischen Körper, der erstarrt gedacht einen Freiheitsgrad gleich 6 besitzen würde.

Es liege ein in p Punkten gestützter als starr angesehener Körper vor, der unter dem Einfluß der äußeren angreifenden Kräfte P_1, \dots, P_n im Gleichgewichte steht. Ist die Anzahl der unbekanntenen Auflagerreaktionen, zu deren Bestimmung m Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen ($m \leq 6$, je nach dem besonderen Kraftsystem und zugrunde gelegten Koordinatensystem) gleich r , so heißt der Körper, wenn $r - m = s$, und s von 0 verschieden und

positiv ist, s -fach statisch unbestimmt, weil s unbekannte Auflagerreaktionen durch die m Gleichgewichtsbedingungen nicht bestimmbar sind. Um die Bestimmung vorzunehmen, müssen eben die Gestalts- und Raumänderungen des Körpers in Betracht gezogen werden, durch welche die Verteilung des äußeren Kraftsystems auf die Auflager mitbestimmt wird.

Fügt man zu den zwei Auflagern A, B des durch die Einzelkraft P und das Eigengewicht G belasteten Trägers nach Abb. 1 noch ein drittes, mit C bezeichnetes, z. B. unter der Kraft P hinzu, das so wie B ein Rollenkipplager ist (letzteres ist so eingerichtet, daß Angriffspunkt und Richtung der in unserem Fall vertikalen Reaktionskraft festgelegt wird, während das Kipplager in A nur den Angriffspunkt der Reaktionskraft bestimmen läßt), so ist der Träger einfach statisch unbestimmt gelagert. Denn das aus den Kräften P, G und den zu diesen Kräften entgegengesetzt gerichteten Reaktionskräften A, B, C bestehende Parallelkraftsystem ist den zwei Gleichgewichtsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} P + G &= A + B + C \\ (P + gl - C) \frac{l}{2} - Al &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

unterworfen, die zur Bestimmung der drei Auflagerreaktionen A, B, C nicht hinreichen. Es ist sonach $m = 2, r = 3, s = 1$.

Die Gestaltsänderung kommt mit Annäherung in der Durchbiegung der Schwerachse des Trägers zum Ausdruck, die, wenn der Träger lang mit Bezug auf seine Querdimensionen ist, im Verein mit den statischen Gleichungen (a) im wesentlichen die Verteilung der Kräfte P, G auf die Auflager bestimmt.

5. Die festen elastischen Körper sind wie alle Stoffe porös, das heißt der Raum, welcher durch sie eingenommen wird, ist mit Masse nicht kontinuierlich erfüllt, sondern durch kleine Hohlräume, die Poren unterbrochen. In der theoretischen Elastizitätslehre wird wie in der Mechanik der Flüssigkeiten und der Gase im Gegensatz hierzu angenommen, daß die Masse den Raum kontinuierlich erfüllt, worin eine Näherung liegt, die um so eher angenommen werden kann, je kleiner die Poren sind. Bei der genannten Annahme stellt sich die theoretische Elastizitätslehre als ein Teil des allgemein als Mechanik der Kontinua bezeichneten Zweiges der reinen Mechanik dar, zu der auch die Hydro- und Aeromechanik zu rechnen ist.

6. Mit dem Studium der Gestalts- und Raumänderungen der festen elastischen Körper vom rein geometrischen Standpunkt beschäftigt sich ein besonderer Teil der Mechanik der festen elastischen Körper, die Kinematik (Elastokinematik). Ein fester elastischer Körper kann bei Einflußnahme äußerer Kräfte sich so verhalten, daß er nach Eintritt der Gestalts- und Raumänderung in Ruhe bleibt oder sich nach dem Trägheitsgesetze gleichförmig fortschreitend bewegt. Man sagt dann, die äußeren Kräfte halten einander das Gleichgewicht, oder es liege der Fall elastischen Gleichgewichtes oder der Statik elastischer fester Körper (Elastostatik) vor. Das ist z. B. für den Träger nach Abb. 1 zutreffend. Alle Fälle, in welchen der elastische feste Körper unter dem Einfluß äußerer Kräfte nicht im elastischen Gleichgewicht steht, wie zum Beispiel ein irgendwie bewegter Maschinenteil (Kurbel Ku eines Schubkurbelgetriebes nach Abb. 2) fallen in das Gebiet der Dynamik oder Kinetik elastischer fester Körper (Elastokinetik).

II. Grundbegriffe.

1. Einführung von Elementarkörpern.

Wir denken uns einen festen elastischen Körper zur Zeit $t = 0$ in Ruhe mit Bezug auf ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem xyz mit dem Anfangspunkt O und dazu kräftefrei. Indem wir uns den Körper durch 3 Scharen von zu den Koordinatenebenen xy, yz, zx parallelen Ebenen mit den unendlich kleinen Abständen dz, dx, dy geschnitten vorstellen, erhalten wir, wenn wir von den am Rande des Körpers entstehenden unendlich kleinen Tetraedern zunächst

absehen, unendlich viele elementare Prismen mit dem Volumen $dx dy dz$ und der Masse $\mu dx dy dz$, wenn μ die Massendichtigkeit bezogen auf die Raumeinheit für das betreffende elementare Prisma vorstellt. Die Lage jedes Körperchens zum Beispiel im Punkte P (Abb. 3), worin $PC = dx$, $PD = dy$, $PE = dz$, ist durch seine rechtwinkligen Koordinaten x, y, z oder den Radiusvektor $r = ix + jy + kz$ (i, j, k sind Einheitsvektoren in der Richtung der xyz -Achse) mit Bezug auf das Koordinatensystem xyz eindeutig festgelegt.

2. Einteilung der auf den festen elastischen Körper einwirkenden Kräfte.

Es mögen nunmehr auf den im Punkt I angeführten zur Zeit $t = 0$ in Ruhe befindlichen Körper äußere Kräfte zur Wirksamkeit kommen. Diese Kräfte

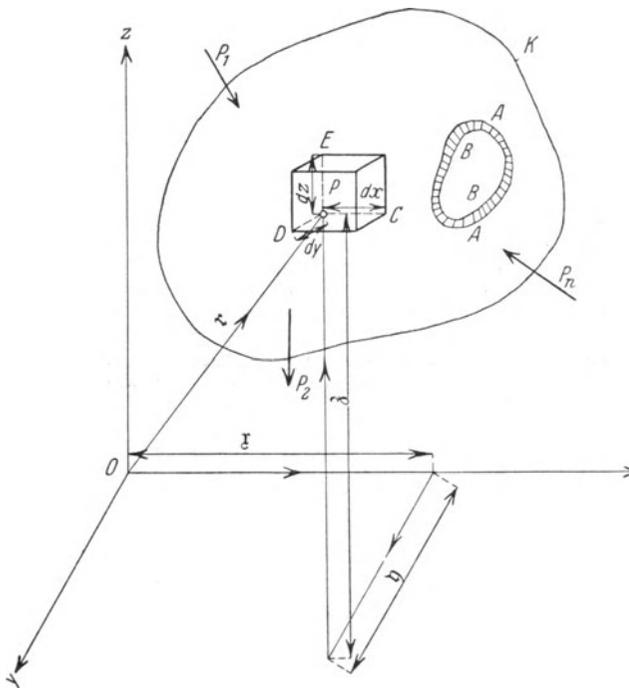


Abb. 3.

können zunächst unterschieden werden in Volums- oder Massenkraften und Oberflächenkräften, letztere wirken auf die Oberfläche des Körpers, erstere auf die einzelnen Massenteilchen $\mu dx dy dz$. Die Volumskräfte, bezogen auf die Volumeneinheit werden mit \mathfrak{f} bezeichnet, auf das Volumenelement $dx dy dz$ entfällt die Volumskraft $\mathfrak{f} dx dy dz$, welche in bekannter Weise in die drei Komponenten $k_x dx dy dz$, $k_y dx dy dz$, $k_z dx dy dz$ zerlegt werden kann; $\mathfrak{f}, k_x, k_y, k_z$ sind im allgemeinen Funktionen der Koordinaten und der Zeit und haben im technischen Maßsystem die Dimension kg/cm^3 . Die Oberflächenkräfte sind eigentlich stets flächenhaft längs der Angriffsfläche (in Abb. 3 mit A bezeichnet) verteilte Kräfte, da auch die sogenannten Einzelkräfte in Wirklichkeit stets längs einer, wenn auch sehr kleinen Fläche, und nicht, wie annähernd angenommen wird, in einem geometrischen Punkte angreifen.

Das Rad eines Eisenbahnwagens überträgt die auf dasselbe entfallende Last nicht, wie praktisch angenommen werden kann, in einem Punkte auf die Schiene, sondern längs derjenigen kleinen Berührungsfläche, die durch Gestaltsänderung des Rades und der Schiene zustande kommt. Die Oberfläche eines festen Körpers, der sich in einer unter hohem Druck stehenden Flüssigkeit befindet, ist Angriffsfläche von auf ihr normal stehenden Oberflächenkräften.

Denken wir uns die Oberfläche oder den Teil der Oberfläche, längs welcher die Kraftübertragung erfolgt, in unendlich viele unendlich kleine Flächenelemente df zerlegt, so entfällt auf ein Flächenelement eine Oberflächenkraft $p df$,

mit p als Kraft pro Flächeneinheit. Die Kraft $p df$ hat den Charakter eines Vektors, der im allgemeinen schief gegen das zugehörige Flächenelement df geneigt ist, und kann im Schwerpunkt des Flächenelementes angreifend und zusammengesetzt aus drei zu den Koordinatenachsen x, y, z parallelen Komponenten $p_x df, p_y df, p_z df$ gedacht werden, derart, daß

$$e p df = p df = i p_x df + j p_y df + k p_z df,$$

worin e einen Einheitsvektor in der Richtung von p vorstellt; die Größen p, p_x, p_y, p_z , die im allgemeinen Funktionen der Koordinaten der einzelnen Punkte der Oberfläche des Körpers und der Zeit sind, haben im technischen Maßsystem die Dimension kg/cm^2 . Man kann die Kraft $p df$ derart zerlegen, daß die eine Komponente $n df$ normal zur Oberfläche, die zweite Komponente $t df$ tangentiell zur Oberfläche wirkt. Die Kraft $t df$ wird als eine auf das betreffende Flächenelement wirkende Schubkraft, die Kraft $n df$ als eine Normalkraft bezeichnet. Die Normalkräfte können entweder gegen das Innere des Körpers gerichtet sein, dann heißen sie Druckkräfte, im entgegengesetzten Falle werden sie als Zugkräfte bezeichnet. Wenn man sich in jedem Punkte des Oberflächenstückes, längs welches die Kraftübertragung stattfindet, die Kraft $p df$ der Richtung und Größe nach in einem gewählten Maßstabe aufgetragen denkt, so bilden die Endpunkte der aufgetragenen Strecken eine Fläche, welche als Belastungsfläche bezeichnet wird (in der Abb. 3 mit B bezeichnet).

Der Vollständigkeit halber sei hier noch wiederholt — es wurde in der Einleitung hiervon bereits Gebrauch gemacht —, daß die Oberflächenkräfte in sogenannte angreifende Kräfte oder Lasten mit der Bezeichnung \mathfrak{P} und Reaktions- oder Verbindungskräfte, für welche das Zeichen \mathfrak{R} gebraucht wird, unterschieden werden können; die letzteren sind nur dann vorhanden, wenn der elastische feste Körper unfrei ist (Punkt 4 der Einleitung).

Im Falle des Gleichgewichtes des elastischen Körpers heißen die Reaktionen solche statischer Art, wenn aber der unfreie elastische feste Körper unter dem Einflusse der gegebenen äußeren Kräfte sich seinem Freiheitsgrade entsprechend bewegt, werden die Reaktionen häufig als solche kinetostatischer Art bezeichnet. Ein Beispiel für statische Reaktionen liegt im Falle der Abb. 1 vor. Im Auflager A des Schubkurbelgetriebes nach Abb. 2 tritt eine kinetostatische Reaktion auf, die nicht nur vom Eigengewicht des Getriebes und den äußeren Kräften (Dampfdruck p und Reibung), sondern auch von den fiktiven Trägheitskräften abhängig ist.

Die Massenkkräfte werden in der Regel durch das Eigengewicht oder in kinetischen Fällen auch durch die aus der Mechanik der starren Körper ihrer Bedeutung nach bekannten fiktiven Trägheitskräfte dargestellt; sie haben angreifenden oder Lastcharakter, niemals den einer Reaktionskraft.

In den technischen Annäherungstheorien, die sich auf das elastische Verhalten irgendwie belasteter und gestützter gerader Stäbe beziehen, wird das Eigengewicht häufig so eingeführt, als ob es eine auf die Oberfläche des geraden oder krummen Stabes wirkende gleichförmig verteilte vertikal nach abwärts gerichtete Last wäre. Eine derartige Annahme hat nur näherungsweise Gültigkeit, da, wie sich sehr bald zeigen wird, die Wirkung einer an einem elastischen festen Körper angreifenden Kraft eine andere wird, wenn man den Angriffspunkt der Kraft in der Richtung ihrer Angriffslinie versetzt.

Die Oberflächenkräfte und Massenkkräfte werden im folgenden stets als sogenannte kontinuierlich wirkende Kräfte angesehen, wenn nicht ausdrücklich erwähnt wird, daß sie stoßartig, das heißt als Momentankräfte, wirken. Die Kräfte wirken bei gegebenen Angriffstellen kontinuierlich, wenn deren Richtungen und Größen im Laufe der Zeit entweder stetige Änderungen erleiden oder konstant sind.

Ein Beispiel möge das erläutern. Der in Abb. 1 dargestellte Träger sei zur Zeit $t = 0$ unbelastet. Es werde vom Zeitpunkt $t = 0$ beginnend ein Gewicht P von Hand derart auf

den Träger aufgebracht, daß die Hand stetig entlastet und dafür der Träger stetig zunehmend belastet wird. Erst nach Ablauf einer gewissen Zeit ist demnach das ganze Gewicht P aufgebracht; entsprechend dem Aufbringen der Belastung P stellen sich auch die zugehörigen Gestaltsänderungen, hier im wesentlichen eine Durchbiegung, und die Auflagerreaktionen stetig von 0 aus anwachsend bis zur endgültigen Durchbiegung bzw. bis zu den Endwerten der Reaktionen ein, die der Last P entsprechen. Würde man auf den unbelasteten Träger ein Gewicht P aus einer gewissen Höhe derart fallen lassen, daß das Gewicht zur Zeit $t = 0$ den Träger erreicht, so würde das Gewicht während der nun folgenden sehr kleinen Stoßdauer stoßartig auf den Träger wirken, und es würden sich dementsprechend statt einer stetigen Durchbiegung Schwingungen des Trägers um die Ruhelage einstellen, die erst im Laufe der Zeit infolge der vorhandenen Widerstandskräfte (innere Reibung und Luftwiderstand) abklingen würden. Dementsprechend würden die in den Auflagern eintretenden Reaktionen Funktionen der Zeit sein.

Die Art der Wirkungsweise einer Kraft in dem auseinandergesetzten Sinne soll in Zukunft stets kurz unter der Bezeichnung Charakter der Kraft eingereiht werden. Man spricht demnach von einem stoßartigen oder einem kontinuierlichen Charakter einer Kraft oder eines Kraftsystems.

Von dem Charakter einer Kraft oder eines Kraftsystems ist zu unterscheiden die Art der Aufbringung einer Kraft oder eines Kraftsystems im Laufe einer kürzeren oder längeren Zeit, z. B. in der Zeit, in der ein technisches Werk überhaupt verwendbar ist, also während ihrer Lebensdauer. Bezüglich dieser Art der Aufbringung unterscheidet man eine dauernde oder eine wechselnde Aufbringung, je nachdem die Belastung, wie z. B. das Eigengewicht, dauernd auf den Körper wirkt oder aber im Laufe der Zeit veränderlich aufgebracht wird.

Zum Beispiel spricht man von einer wechselnden Aufbringungsart, wenn ein prismatischer Stab oftmals abwechselnd durch eine Kraft parallel zu seiner Achse gezogen und nachher entlastet wird, oder wenn er abwechselnd durch achsenparallele Kräfte gezogen und gedrückt wird usw.

Sowohl bei der dauernden als auch der wechselnden Aufbringungsart können die Kräfte kontinuierlichen oder stoßartigen Charakter besitzen. Dauernde Stöße spielen insbesondere im Maschinenbau eine Rolle.

Es hat sich gezeigt, daß eine wechselnde Belastung unter sonst gleichen Umständen eher den Bruch eines Werkstoffes zur Folge hat als eine dauernde Belastung. „Unter sonst gleichen Umständen“ soll hier z. B. besagen, daß eine Belastung P , die dauernd aufgebracht ist, eine kleinere Bruchgefahr bedingt als vorhanden wäre, wenn sie oftmals wechselnd auf- und wieder abgebracht wird. Hierzu sei ausgeführt, daß es Gegenstand der gewöhnlichsten Erfahrung ist, daß ein ursprünglich gerader etwa einseitig eingespannter Draht aus Flußeisen leicht zum Bruch gebracht werden kann, wenn eine Kraft oftmals wechselnd denselben in bestimmter begrenzter Weise abbiegt und hierauf wieder gerade streckt, während dann, wenn die der bestimmten Abbiegung entsprechende Kraft dauernd aufgebracht ist, von einem Bruch keine Rede ist.

3. Art und Größe der äußeren Beanspruchung eines elastischen festen Körpers.

Die äußere Beanspruchungsart eines festen elastischen Körpers zu einer bestimmten Zeit wird bestimmt durch a) die Angriffsstellen und Kraftrichtungen der äußeren Kräfte, b) durch das Verhältnis der Maßzahlen der letzteren. Zu den äußeren Kräften werden fallweise auch die fiktiven Trägheitskräfte gerechnet. Danach ändert sich die Art der äußeren Beanspruchung nicht, wenn sämtliche Kräfte n mal ($n > 0$) vergrößert werden. Bei gegebener Art der äußeren Beanspruchung bestimmen die Maßzahlen der äußeren Kräfte die Größe der äußeren Beanspruchung.

Wenn auf einem Träger nach Abb. 1 zwei als kontinuierlich vorausgesetzte Kräfte P_1 , P_2 von Null aus über Zwischenwerte P_1' , P_2' bis zu ihren Endwerten wachsend stets die gleiche Lage (Angriffspunkt, Richtung) im Raume besitzen und sich dabei so ändern,

daß dann, wenn die eine Kraft nP'_1 ist, auch die zweite Kraft nP'_2 geworden ist, was auch eine analoge Änderung für die in den Auflagern entstehenden Verbindungskräfte zur Folge hat, so ändert sich die äußere Beanspruchungsart während der Zeit, in der sich der Gleichgewichtszustand einstellt, bei kleinen Durchbiegungen annähernd nicht.

Es kommen elastische Probleme vor, bei denen, abgesehen vom Eigengewicht, als äußere Kräfte nur Trägheitskräfte und die ihnen nach D'Alembert entsprechenden Stützkkräfte vorhanden sind, z. B. bei einem einseitig fest eingespannten Stab (Kragträger), der Querschwingungen um eine Gleichgewichtslage ausführt. Für denselben kann bei kleinen Schwingungen die Art der äußeren Beanspruchung während der Bewegung desselben aus der mittleren Gleichgewichtslage in eine der äußersten Lagen als nahezu konstant angesehen werden. Für die Zeit einer ganzen Schwingung des Kragträgers ist die äußere Beanspruchungsart nicht konstant, sondern veränderlich oder wechselnd.

Die Definition der Größe und Art der äußeren Beanspruchung gilt sowohl für kontinuierlich als auch stoßartig wirkende Kräfte. In letzterem Falle wird man z. B. von einer bestimmten äußeren Beanspruchungsart am Ende der Stoßzeit oder in einem bestimmten Zeitaugenblick nach erfolgtem Stoß sprechen können.

In der Physik und Technik hat man für bestimmte häufig vorkommende äußere Beanspruchungsarten oder Gruppen von solchen eigene Bezeichnungen eingeführt, insbesondere, wenn es sich um im Gleichgewichte befindliche gerade oder krumme elastische Stäbe handelt. So spricht man, wenn ein prismatischer Stab durch zwei entgegengesetzt gleiche achsenparallele Kräfte belastet wird, die sich gleichmäßig über die Basisflächen verteilen, von einer Beanspruchung auf Zug oder Druck, je nachdem die Kräfte den Stab zu verlängern oder zu verkürzen trachten. Ein nach Abb. 1 belasteter Stab heißt auf Biegung und Schub beansprucht; ferner werden alle äußeren Beanspruchungsarten gerader Stäbe, für die die Oberflächenkräfte durch Drehmomente in Ebenen normal zur Stabachse vorgestellt werden, unter dem gemeinsamen Namen Beanspruchung auf Drehung (Drillung, Torsion) zusammengefaßt usw. Systematisch werden die genannten Beanspruchungsarten im zweiten Teile dieser Vorlesungen besprochen werden.

Die Begriffe wechselnde Aufbringungsart einer Belastung und wechselnde äußere Beanspruchungsart brauchen sich nicht zu decken: ein abwechselnd zwischen Null und einem oberen Kraftwert auf Zug beanspruchter im Gleichgewichte befindlicher gerader zylindrischer Stab erleidet keinen Wechsel der Beanspruchungsart, doch ist die Aufbringungsart der Last eine wechselnde. Wird der Stab aber abwechselnd auf Zug und auf Druck beansprucht, so ist die Aufbringungsart und die äußere Beanspruchungsart eine wechselnde.

4. Absoluter und relativer Verschiebungszustand in einem Punkte eines elastischen festen Körpers.

Einer möglicherweise in der Zeit variablen äußeren Beanspruchungsart ist eine in der Zeit erfolgende Bewegung des zur Zeit $t = 0$ kräftefrei und ohne Gestalts- und Raumänderung gedachten elastischen festen Körpers zugeordnet, und zwar erfolgt, wie später nachgewiesen werden wird, von Ausnahmefällen abgesehen, diese Zuordnung eindeutig. Denken wir uns zur Zeit t , zu welcher eine bestimmte äußere Beanspruchungsart vorhanden sein soll, in einem Punkt P mit den Koordinaten x, y, z (Abb. 4) ein unendlich kleines Prisma mit zu den Koordinatenachsen parallelen Kanten von den Längen dx, dy, dz und der Masse $\mu dx dy dz$ aus dem Körper herausgeschnitten. In dem der Zeit t folgenden Zeitelement dt bewegen sich die 8 Eckpunkte P, A, B, C, D, E, F, G des kleinen Prismas sowohl mit Bezug auf das Koordinatensystem $x y z$ als auch mit Bezug aufeinander. Der Weg PP' , den der Punkt P in dem

Zeitelement dt infolge der erstgenannten Bewegung, welche wir zunächst als die absolute bezeichnen wollen, zurücklegt, heißt absolute Verschiebung des Punktes P zur Zeit t und wird mit δ bezeichnet; sie hat den Charakter eines Vektors mit der Richtung P nach P' . Projizieren wir den Vektor δ auf die Koordinatenrichtungen, so erhalten wir die absoluten Verschiebungskomponenten u, v, w des Punktes P zur Zeit t , so daß

$$\delta = u + v + w = i u + j v + k w \tag{a}$$

wird. Der Punkt E mit den Koordinaten $x + dx, y + dy, z + dz$ erleidet zur Zeit t die absolute Verschiebung δ_1 mit den Verschiebungskomponenten u_1, v_1, w_1 , so daß

$$\delta_1 = u_1 + v_1 + w_1 = i u_1 + j v_1 + k w_1. \tag{b}$$

Die relative Verschiebung der Punkte P und E zur Zeit t ist offenbar

$$\delta_1 - \delta = (u_1 - u) + (v_1 - v) + (w_1 - w) = i(u_1 - u) + j(v_1 - v) + k(w_1 - w) \tag{c}$$

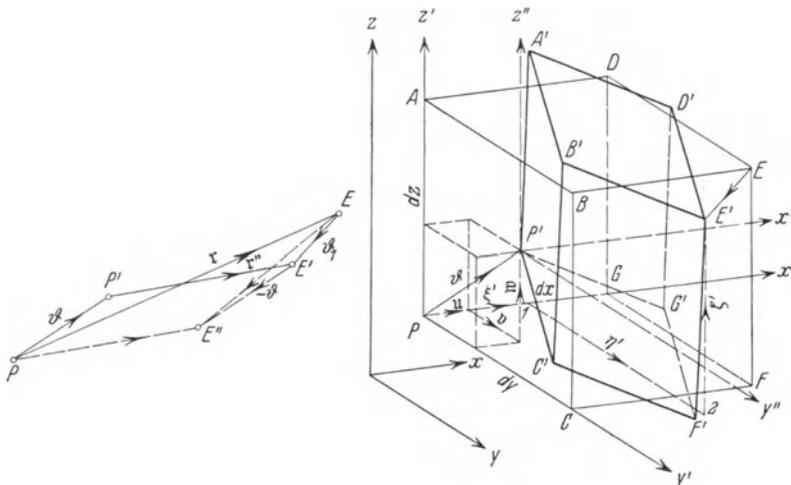


Abb. 4.

und ergibt sich aus dem in Abb. 4 seitlich heraus gezeichneten Vektordreieck $E E' E''$ in dem $E' E'' = -\delta$. Die Vektoren $u_1 - u, v_1 - v, w_1 - w$ werden die relativen Verschiebungskomponenten zur Zeit t genannt. Die Beziehungen (c) gelten auch für Punkte des elastischen Körpers, die eine endliche Entfernung voneinander besitzen.

Die Bewegung eines elastischen Körpers im Laufe der Zeit ist in anschaulicher Weise auffaßbar als zusammengesetzt aus jener Bewegung, welche er hätte, wenn er starr wäre, und aus der Bewegung der einzelnen Punkte mit Bezug auf den erstarrt gedachten Körper oder ein mit demselben fest verbunden gedachtes Koordinatensystem $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$. Infolge der letzteren, die wir kurz als elastische Bewegung bezeichnen wollen, treten überhaupt erst Gestalts- und Raumänderungen ein. Bei dieser Auffassung werden dann als „absolute“ Verschiebungen δ jene mit Bezug auf das Koordinatensystem $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$ eingeführt, die in der Mehrzahl der Fälle sehr klein sind. Im allgemeinen sind die absoluten und relativen Verschiebungen sowie deren Komponenten als Funktionen der Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ und der Zeit t anzusehen. Diese Funktionen werden gewöhnlich als stetig und differenzierbar angenommen. Das ist z. B. zutreffend im Falle eines Stabes, der um eine feste Gleichgewichtslage Quer- oder Längsschwingun-

gen ausführt. Nur tritt hier noch der besondere Fall ein, daß die Werte x, y, z und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ zusammenfallen im Gegensatz zum allgemeineren Fall der Abb. 2 (Schubkurbelgetriebe). Bleibt der elastische Körper nach Eintritt der Verschiebungen der einzelnen Punkte in Ruhe, wie z. B. im Falle der Abb. 1 (elastisches Gleichgewicht), so sind δ, δ_1 ebenso wie die absoluten und relativen Verschiebungskomponenten, nachdem der Gleichgewichtszustand sich eingestellt hat, in der Zeit konstant und sind nur Funktionen der Koordinaten x, y, z , die mit $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ zusammenfallen. Die absoluten Verschiebungskomponenten u, v, w zur Zeit t für den Punkt P bestimmen den absoluten Verschiebungszustand im Punkte P zur Zeit t ; der absolute Verschiebungszustand des ganzen elastischen Körpers zur Zeit t ist gegeben, wenn der Verschiebungszustand für jeden seiner Punkte gegeben ist. In ähnlicher Weise können wir von einem relativen Verschiebungszustand in einem Punkte und des ganzen Körpers zur Zeit t sprechen.

Wir können zur Zeit t setzen

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ v_1 &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ w_1 &= w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned}$$

oder, wenn wir an Stelle von dx, dy, dz der einfacheren Schreibweise halber die unendlich kleinen Größen ξ, η, ζ einführen,

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \zeta \quad \text{usw.} \quad (1)$$

Im Falle des elastischen Gleichgewichtes bedeuten u, v, w in den Beziehungen (1) z. B. die Verschiebungskomponenten zur Zeit, in welcher sich das elastische Gleichgewicht bereits eingestellt hat.

Durch (1) sind die relativen Verschiebungskomponenten als Funktionen von x, y, z, t oder im Falle des Gleichgewichtes von x, y, z bestimmbar, wenn es gelungen ist u, v, w als solche Funktionen zu ermitteln. Aus den Beziehungen (1) können selbstverständlich die relativen Verschiebungskomponenten eines jeden der 8 Eckpunkte des im Punkte P gedachten Prismas durch Spezialisierung der Werte ξ, η, ζ abgeleitet werden. So sind für den Punkt C die Größen ξ und ζ gleich Null, woraus für die relativen Verschiebungskomponenten dieses Punktes folgt

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial y} \eta, \quad v_1 - v = \frac{\partial v}{\partial y} \eta, \quad w_1 - w = \frac{\partial w}{\partial y} \eta. \quad (1a)$$

In ähnlicher Weise findet man die relativen Verschiebungskomponenten des Punktes F mit

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta, \quad v_1 - v = \frac{\partial v}{\partial x} \xi + \frac{\partial v}{\partial y} \eta, \quad w_1 - w = \frac{\partial w}{\partial x} \xi + \frac{\partial w}{\partial y} \eta \quad (1b)$$

usw.

5. Verformung eines Elementarkörpers, homogene Verformung.

Die Gestalts- und Raumänderung, welche das im Punkte 4 betrachtete rechtwinkelige unendlich kleine Prisma $PABCDEFG$ im Zeitelement dt erfährt, soll in Zukunft kürzer als Verformung, Verzerrung oder Deformation desselben bezeichnet werden. Wir legen uns zunächst die Frage nach der Ände-

zung der Lagekoordinaten der Eckpunkte jenes Prismas vor, wenn die Verschiebungskomponenten u, v, w gegeben sind.

Legen wir durch den Punkt P ein zu dem Koordinatensystem xyz paralleles Koordinatensystem $x'y'z'$ und denken uns den beliebig nahe an P liegenden Punkt E in diesem Koordinatensystem durch die innerhalb des unendlich Kleinen noch variabel gedachten Koordinaten ξ, η, ζ festgelegt. Im Zeitelemente dt geht der Punkt E in die Lage E' über, und hat dann, bezogen auf das Koordinatensystem $x'y'z'$, die Koordinaten ξ', η', ζ' , die sich unter Zuhilfenahme von (1) mit

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi + u + \frac{\partial u}{\partial x} \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \zeta \\ &= u + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \zeta, \\ \eta' &= v + \frac{\partial v}{\partial x} \xi + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \eta + \frac{\partial v}{\partial z} \zeta, \\ \zeta' &= w + \frac{\partial w}{\partial x} \xi + \frac{\partial w}{\partial y} \eta + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \zeta,\end{aligned}\quad (2)$$

ergeben, worin $r' = i\xi' + j\eta' + k\zeta'$ gesetzt werden kann. Der Punkt P gelangt in dem unendlich kleinen Zeitelement dt nach P' und hat dann mit Bezug auf das Koordinatensystem $x'y'z'$ die Koordinaten u, v, w , demnach ist der Vektor mit dem Anfangspunkt P

$$\overline{PE} = r = i\xi + j\eta + k\zeta$$

im Zeitelement dt in den Vektor mit dem Anfangspunkt P'

$$\overline{P'E'} = r' = i(\xi' - u) + j(\eta' - v) + k(\zeta' - w)$$

übergegangen. Wenn wir die Komponenten von r' mit Bezug auf das Koordinatensystem $x'y'z'$ mit ξ'', η'', ζ'' bezeichnen, so kann die Beziehung (2) mit Berücksichtigung von (1) auch in der Form

$$\begin{aligned}\xi' - u &= \xi'' = \xi + u_1 - u \\ \eta' - v &= \eta'' = \eta + v_1 - v, \\ \zeta' - w &= \zeta'' = \zeta + w_1 - w\end{aligned}\quad (2a)$$

geschrieben werden oder in Form einer Vektorgleichung

$$r'' - r = \delta_1 - \delta, \quad \text{d. h. } r'' = r + \delta_1 - \delta. \quad (2b)$$

Führen wir in die Beziehungen (2a) die relativen Verschiebungskomponenten aus (1) ein, so erhalten wir die oft gebrauchten Formeln

$$\begin{aligned}\xi'' &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \zeta, \\ \eta'' &= \frac{\partial v}{\partial x} \xi + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \eta + \frac{\partial v}{\partial z} \zeta, \\ \zeta'' &= \frac{\partial w}{\partial x} \xi + \frac{\partial w}{\partial y} \eta + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \zeta.\end{aligned}\quad (2c)$$

Die Beziehung (2b) kann direkt aus dem Vektordreieck PEE'' der Abb. 4 abgelesen werden.

Die Beziehungen (2a) und (2c) haben die Eigenart, daß sie linear sind mit Bezug auf ξ, η, ζ bzw. ξ'', η'', ζ'' und stellen Transformationsgleichungen vor, welche es gestatten, Beziehungen zwischen ξ, η, ζ vor der Verformung in die entsprechenden

Beziehungen nach der Verformung zu transformieren, oder jedem Radiusvektor r , der einen beliebigen Punkt einer um P gedachten geschlossenen Fläche festlegt, einen Vektor r'' des entsprechend verschobenen Punktes der deformierten Fläche, d. h. jener Fläche zuzuordnen, in welche die genannte geschlossene Fläche bei der Verformung übergeht. Infolge der Linearität der genannten Beziehungen gehen geometrische Gebilde, die vor der Verformung eine lineare Beziehung zwischen ξ, η, ζ als Gleichung besitzen, das ist Gerade und Ebenen, nach der Deformation in ebensolche über, ferner bleiben parallele Ebenen und parallele Gerade auch nach der Verformung zueinander parallel, wie man sich leicht überzeugt. Es ist somit die oben aufgeworfene Frage nach der Gestalts- und Raumänderung des unendlich kleinen Prismas dahin zu beantworten, daß dasselbe wieder in ein Prisma übergegangen ist, das im allgemeinen veränderte Kantenlängen besitzt und schiefwinkelig ist (siehe in Abb. 4 das Prisma $P'A'B'C'D'E'F'G'$). In der Elastizitätslehre sagt man, um diesen Sachverhalt auszudrücken, die Verformung (Verzerrung) des unendlich kleinen Prismas sei homogen oder die Verformung (Verzerrung) in einem Punkte P des elastischen Körpers sei homogen. Es könnte in besonderen Fällen sein, daß auch für die Punkte eines Prismas mit endlichen Kantenlängen lineare Gleichungen von der Form (2a), (2c) erfüllt wären. ξ, η, ζ würden dann endliche Werte haben und die bei ξ, η, ζ stehenden Koeffizienten müßten für den ganzen vom Prisma erfüllten Raum konstant sein.

Eine derartige homogene Verformung im ganzen vom Körper erfüllten Raum tritt z. B. im Falle der Beanspruchung eines geraden Stabes auf Zug (Druck) ein.

5a. Verformung bei Einführung vektoralgebraischer Zeichen.

Die Beziehungen (1) besagen, daß die relativen Verschiebungskomponenten $u_1 - u, v_1 - v, w_1 - w$ des relativen Verschiebungsvektors

$$\delta_1 - \delta = i(u_1 - u) + j(v_1 - v) + k(w_1 - w)$$

lineare Funktionen der Komponenten ξ, η, ζ des Vektors

$$r = i\xi + j\eta + k\zeta$$

sind. — In der Vektoralgebra bedient man sich für diesen Sachverhalt der einfachen Bezeichnungsweise

$$\delta_1 - \delta = \Phi r \tag{3}$$

und sagt, es sei $\delta_1 - \delta$ eine lineare Vektorfunktion Φ von r . — Durch die Beziehung (3) ist jedem Vektor r eine relative Verschiebung seiner beiden Endpunkte $\delta_1 - \delta$ zugeordnet. — In analoger Weise kann man die Beziehungen (2c) auch in der Form

$$r'' = \Psi r \tag{4}$$

schreiben, wenn $r'' = i(u_1 - u + \xi) + j(v_1 - v + \eta) + k(w_1 - w + \zeta) = \delta_1 - \delta + r$ ist. Ψ stellt eine zweite lineare Vektorfunktion von r vor. Eine lineare Vektorfunktion wird bekanntlich durch 9 Koeffizienten festgelegt, z. B. Φ durch die bei ξ, η, ζ stehenden Koeffizienten in (1). Man schreibt übereinkommensgemäß symbolisch

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} & \Psi &= 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & & \frac{\partial u}{\partial y} & & \frac{\partial u}{\partial z} \\ & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} & \text{und analog} & & \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & & \frac{\partial v}{\partial z} \\ & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} & & & \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

Die neun Größen, welche Φ bzw. Ψ bestimmen, heißen die Bestimmungszahlen bzw. Komponenten der linearen Vektorfunktion.

Durch lineare Vektorfunktionen werden sogenannte affine Raumtransformationen vermittelt. Durch eine Raumtransformation wird jedem durch einen Radiusvektor festgelegten

Punkt eines Raumes ein entsprechender Radiusvektor eines zweiten Raumes zugeordnet. Die Raumtransformation heißt affin, wenn die Zuordnung durch lineare Gleichungen wie in unserem Falle erfolgt. Eine affine Raumtransformation zeichnet sich demnach dadurch aus, daß Gerade in Gerade, Ebenen in Ebenen übergehen, und parallele Gerade sowie parallele Ebenen zueinander parallel bleiben. Die affine Raumtransformation heißt eine infinitesimale, wenn die zugeordneten Räume unendlich klein sind, wie das z. B. für die Beziehung (4) zutrifft, wenn r und r'' unendlich kleine Größen sind. Jede lineare Vektorfunktion Ψ , also auch z. B. jene in (4), läßt sich auf die Form

$$\Psi r = i(\mathfrak{A} r) + j(\mathfrak{B} r) + \mathfrak{k}(\mathfrak{C} r)$$

bringen, worin die Konsequenten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} drei nicht komplanare Vektoren bedeuten, die in unserem Falle

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= i \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + j \frac{\partial u}{\partial y} + \mathfrak{k} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \mathfrak{B} &= i \frac{\partial v}{\partial x} + j \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mathfrak{k} \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \mathfrak{C} &= i \frac{\partial w}{\partial x} + j \frac{\partial w}{\partial y} + \mathfrak{k} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

werden, so daß z. B.

$$i(\mathfrak{A} r) = i \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \xi + \frac{\partial v}{\partial y} \eta + \frac{\partial w}{\partial z} \zeta \right] \quad \text{usw.}$$

Bei der bisherigen Auffassung werden Φ bzw. Ψ in den Beziehungen (3) und (4) als Funktionszeichen gewertet; man kann aber Φ bzw. Ψ auch als geometrische Größen höherer Ordnung ansehen (ein Vektor gilt als geometrische Größe erster Ordnung). Sie werden dann nach einer Ausdrucksweise von Jung als Affinoren bezeichnet, Φr , Ψr werden als „skalare Produkte“ zwischen den Affinoren Φ bzw. Ψ und dem Vektor r gedeutet, welche einen Vektor $\delta_1 \rightarrow \delta$ bzw. r'' definieren. Ein Affinor ist gegeben durch die Angaben von 3 Vektoren \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} was symbolisch durch $\Psi = i; \mathfrak{A} + j; \mathfrak{B} + \mathfrak{k}; \mathfrak{C}$ zum Ausdruck gebracht wird; $i; \mathfrak{A}$, ferner $j; \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{k}; \mathfrak{C}$ heißen nach Gibbs Dyaden oder dyadische Produkte. Ein Affinor ist sonach als Dyadensumme darstellbar. Häufig wird aber diese Summe selbst als Dyade bezeichnet, so daß der Begriff „Affinor“ und „Dyade“ zusammenfallen. Nach Jaumann (L) ist jede Dyade unter dem Bilde einer Fläche zweiter Ordnung vorstellbar. In der Tat ist z. B. in $r'' = \Psi r$ r'' als Radiusvektor eines Ellipsoides auffaßbar, wenn r einen Radiusvektor einer Kugel bedeutet, wie wir später noch sehen werden. Ψ wird aus leicht begreiflichen Gründen als Verschiebungsdyaide, Φ als Deformationdyade eingeführt¹.

6. Verzerrungskomponenten und Art bzw. Größe des Verzerrungszustandes für einen Elementarkörper.

Bei der Verformung des rechtwinkligen Prismas $PAB CDEFG$ (Abb. 4) in das schiefwinklige Prisma $P'A'B'C'D'E'F'G'$ werden die Kantenlängen ξ, η, ζ im allgemeinen ihre Länge ändern und die ursprünglich rechten Winkel zwischen den Kanten in spitze oder stumpfe Winkel übergehen. Um die Änderungen der Kantenlängen und der Winkel eines Prismas in einem Punkte P des elastischen Körpers unter Bezugnahme auf deren ursprüngliche Größen zahlenmäßig festzulegen, führt man die Verzerrungskomponenten ein. Man bezeichnet mit e_{xx} die Verzerrungskomponente für das angegebene Prisma im Punkte P in der Richtung der x -Achse und definiert sie durch $\frac{P'G' - PG}{PG} = e_{xx}$, also als Verlängerung oder Verkürzung (je nachdem $P'G' > PG$ oder umgekehrt) pro Längeneinheit der Länge PG vor der Gestaltsänderung. Analog sind $e_{yy} = \frac{P'C' - PC}{PC}$ und $e_{zz} = \frac{P'A' - PA}{PA}$ die Verzerrungskomponenten im

¹ Siehe hierzu etwa J. Spielrein: Lehrbuch der Vektorrechnung, oder S. Valentiner: Vektoranalysis in Sammlung Goeschen.

Punkte P in den Richtungen der y - bzw. z -Achse. Die 3 Verzerrungskomponenten e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , die natürlich dimensionslos sind, heißen bezogene Dehnungen, wenn sie positiv sind, und bezogene Quetschungen, wenn sie negativ sind. Häufig läßt man das Wort „bezogene“ weg, das ausdrücken soll, daß eine Längenänderung pro Längeneinheit der ursprünglichen Länge gemeint ist. Selbstverständlich kann man auch von einer Dehnung oder Quetschung in der Richtung PE sprechen, die durch $\frac{P'E' - PE}{PE}$ definiert wird. Der Winkel, den die Kanten $P'C'$ und $P'G'$

nach der Deformation miteinander einschließen, ist im Bogenmaß durch $\frac{\pi}{2} + \lambda$ bestimmt, wobei λ positiv oder negativ sein kann. Man führt nun für die Winkeländerung λ im Bogenmaß das Zeichen e_{xy} ein, um anzudeuten, daß es sich um die Änderung eines Winkels handelt, dessen Ebene vor der Deformation des Prismas parallel zur xy -Ebene war und nennt e_{xy} die Schiebung im Punkte P parallel zur xy -Ebene. Analog führt man in leicht verständlicher Weise noch 2 andere Schiebungen e_{yz} und e_{zx} ein, welche positiven oder negativen Winkeländerungen μ bzw. ν der vor der Deformation des Prismas rechten Winkel $A'P'C'$ und $A'P'G'$ entsprechen. Die Schiebungen sind Bögen pro Längeneinheit des zugehörigen Radius, stellen demnach ebenso wie die Dehnungen das Verhältnis zweier Längen vor und sind dementsprechend dimensionslos. Die 3 Dehnungen und die 3 Schiebungen heißen die 6 Verzerrungskomponenten für das Prisma $PABCDEFG$ im Punkte P zur Zeit t , für das sie den Verzerrungszustand zu dieser Zeit bestimmen. Die Verzerrungskomponenten sind Null für einen starren Körper, sie treten nur dann auf, wenn eine elastische Bewegung vorliegt; sie werden, wenn sie klein bleiben, nicht auf das Zeitelement dt , sondern auf die gesamte elastische Bewegung bezogen (s. S. 10). Es wird später nachgewiesen werden, daß die Verzerrungskomponenten für ein beliebiges im Punkte P gedachtes unendlich kleines Prisma sich ausrechnen lassen, wenn man für ein bestimmtes, z. B. das in der Abb. 4 gezeichnete, die Verzerrungskomponenten kennt. Unter der Voraussetzung des Nachweises dieses Satzes werden wir sagen können, daß der Verzerrungszustand in einem Punkte zur Zeit t durch den Verzerrungszustand eines beliebigen in diesem Punkte gedachten Prismas bestimmt ist. Im allgemeinen sind die nur von den absoluten Verschiebungskomponenten abhängigen Verzerrungskomponenten von Punkt zu Punkt und überdies in der Zeit variabel, wie z. B. bei einem schwingenden Kragträger. Ist der Verzerrungszustand in jedem Körperpunkte als Funktion der Koordinaten und der Zeit gegeben, so ist der Verzerrungszustand des ganzen Körpers bestimmt. Wenn der elastische Körper nach Eintreten der Verformung bei einer bestimmten Beanspruchung in Ruhe bleibt (elastisches Gleichgewicht), so sind die für diesen Zustand vorhandenen Verzerrungskomponenten nur Funktionen der Koordinaten x, y, z der einzelnen Punkte.

Wenn zu zwei verschiedenen Zeiten t' und t'' die entsprechenden 6 Verzerrungskomponenten in einem Punkte eines elastischen festen Körpers in einem konstanten positiven Verhältnis zueinander stehen, derart, daß

$$e''_{xx} = n e'_{xx} \quad e''_{yy} = n e'_{yy} \dots$$

usw. (n positiv), so sagt man, die Art des Verzerrungszustandes in dem betrachteten Punkte sei zu den genannten Zeiten die gleiche, dagegen habe sich die Größe des Verzerrungszustandes allein geändert.

Als besonderen Fall wählen wir die Beanspruchung eines prismatischen geraden Stabes aus Flußstahl auf Zug, dessen eine Endquerschnittsfläche so festgehalten gedacht ist, daß deren Elemente nur normal zur Zugrichtung frei beweglich sind. Der Ursprung des Koordinatensystemes xyz liege im Schwerpunkt des festen Endquerschnittes. Die Stabachse falle

mit der x -Achse zusammen, die y -, z -Achsen können beliebig gewählt werden. Ein beliebiges im Innern des Stabes gewähltes unendlich kleines rechtwinkeliges Prisma, dessen Kanten parallel bzw. normal zur Stabachse sind, erleidet nur eine Änderung der Kantenlängen (die Kanten parallel zur Stabachse werden verlängert, jene normal zur Stabachse werden verkürzt), die Kantenwinkel selbst bleiben erhalten. Es ergeben sich in diesem besonderen Falle sonach keine Schiebungen ($e_{xy} = e_{yz} = e_{zx} = 0$). Die Verzerrungskomponente e_{xx} ist positiv, also eine Dehnung, die Verzerrungskomponenten e_{yy} und e_{zz} sind erfahrungsgemäß einander gleich und negativ, also Quetschungen. Die angegebene Gestaltsänderung des kleinen Würfels ist unabhängig von der Lage des Punktes P , demnach sind in diesem besonderen Falle e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} von den Koordinaten x , y , z unabhängig d. h. über den ganzen Bereich des Stabes konstant. Offenbar spielen die Längen der Kanten des Prismas für die Größe der Verzerrungskomponenten hier keine Rolle (homogene Verzerrung im endlichen Raum).

7. Sehr kleine Verformungen von elastischen festen Körpern.

Die Aussage im Punkte 4 der Einleitung, daß die Gestalts- und Raumänderungen eines elastischen Körpers sehr klein sind, können wir jetzt genauer umschreiben. Die Verformung des elastischen Körpers ist bekannt, wenn wir die absoluten Verschiebungen als Funktionen von x , y , z und der Zeit t (im Falle des Gleichgewichtes von x , y , z allein) kennen, denn dann sind auch die relativen Verschiebungen zweier beliebiger Punkte bekannt, daher die Verformung bestimmt. Sind u , v , w für die gesamte elastische Bewegung bezogen auf den bewegten oder ruhenden starren Körper für jeden Punkt des elastischen Körpers sehr klein, so ist auch die Verformung, die ihren Ausdruck in der Existenz der Verzerrungskomponenten findet, sehr klein. In der theoretischen Elastizitätslehre macht man in der Regel sogar die Voraussetzung, daß u , v , w unendlich klein sind, was in Wirklichkeit natürlich nicht zutrifft, so daß die darauf gegründeten Rechnungen nur annäherungsweise Gültigkeit besitzen, praktisch aber zulässig sein können. In der Physik und Technik kommen aber nicht zu selten Fälle vor, für welche die Annahme kleiner absoluter elastischer Verschiebungskomponenten nicht zutreffend ist und zwar dann, wenn eine oder zwei Dimensionen des Körpers gegenüber den zwei anderen bzw. der dritten sehr klein sind: z. B. bei sehr dünnen Platten (Membranen) und Stäben (Drähten, Federn). Doch können die Verzerrungskomponenten in derartigen Fällen immer noch als klein betrachtet werden.

Bei dem in Abb. 1 dargestellten Träger sind die Durchbiegungen unter sonst gleichen Umständen offenbar um so größer, je dünner der Stab im Vergleich zu seiner Länge ist.

8. Spannung, Spannungskomponenten und Spannungszustand an einem Elementarkörper.

Die Massenkkräfte und Oberflächenkräfte stehen als äußere Kräfte des elastischen Körpers im Gegensatz zu den in der Einleitung eingeführten Kohäsionskräften zwischen den einzelnen Teilchen des Körpers, welche als innere Kräfte desselben bezeichnet werden. Eine andere Art von inneren Kräften sind jene, welche in der Regel im Zusammenhang mit den Verformungen der Elementarkörper an deren Oberflächen übertragen werden. Nehmen wir z. B. an, es sei ein elastischer Körper auf Zug oder auf Biegung und Schub (Abb. 1) derart beansprucht, daß die äußeren Kräfte von Null aus anwachsend bis zu ihrem Endwert gelangen (kontinuierliche äußere Belastung). Diesem Anwachsen entsprechend geht die Verformung, von Ausnahmefällen abgesehen, kontinuierlich vor sich, derart, daß die endgültige Verformung eines beliebigen unendlich kleinen Prismas im Innern des Körpers vollendet ist, wenn die äußeren Kräfte ihren Endwert erreicht haben. Ebenso erfolgt ein Anwachsen der auf das Prisma

von der Umgebung desselben übertragenen mit Bezug auf den Körper inneren, mit Bezug auf das Prisma äußeren Kräfte kontinuierlich, derart, daß sie ihren Endwert erreicht haben, wenn das für die äußeren Kräfte des elastischen Körpers zutrifft. Würde die äußere Kraft P im Falle der Abb. 1 stoßartig, z. B. infolge fallender Gewichte wirken, so ginge die Verformung und das Anwachsen der inneren Kräfte ruckweise, der Stoßdauer entsprechend, vor sich. Die inneren Kräfte hätten dann also gleichfalls stoßartigen Charakter. Nach Ablauf der Stoßdauer würden Schwingungen des Stabes (normal bzw. parallel zur Stabachse) einsetzen, die mit einem periodischen Wechsel der Verformung eines unendlich kleinen Prismas in jedem beliebigen Punkte des Stabes und einem ebensolchen Wechsel der inneren Kräfte verknüpft wären.

In Abb. 5 ist für einen beliebigen Punkt P des elastischen Körpers ein rechtwinkliges unendlich kleines Prisma mit den Kantenlängen dx, dy, dz dar-

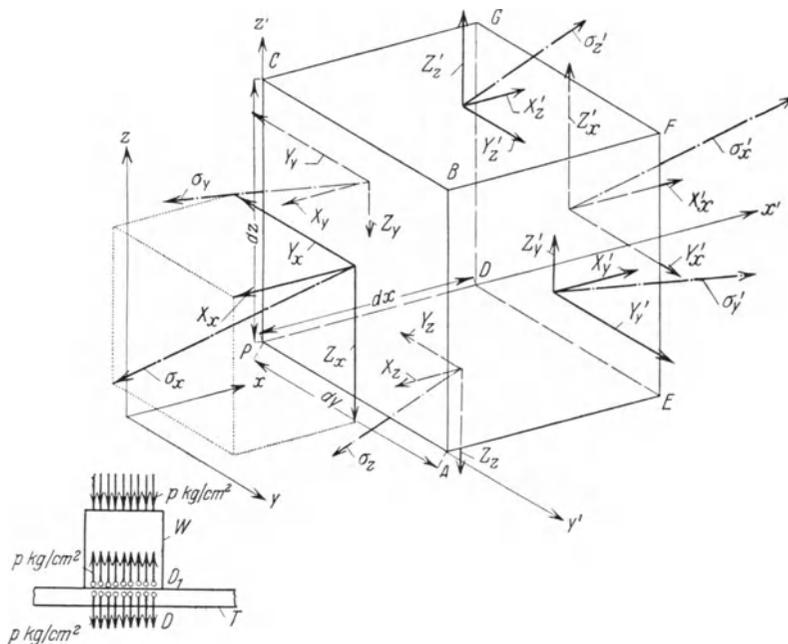


Abb. 5.

gestellt und zwar nach dem Eintreten der Verformung. Vor der Deformation ist dieses unendlich kleine Prisma also ein schiefwinkeliges gewesen (homogene Verzerrung). Auf jede der 6 Seitenflächen des Prismas werden von der Umgebung desselben mit Bezug auf dasselbe äußere Kräfte übertragen, die sich flächenhaft verteilen. Fassen wir zunächst die Fläche $PABC$ ins Auge, die unendlich klein von der zweiten Ordnung ist. Die Kraft pro Flächeneinheit, die im allgemeinen schief gegen die Fläche gerichtet sein wird, heiße σ_x , so daß auf das Flächenelement $dydz$ die Kraft $\sigma_x dydz$ übertragen wird. Wir können uns diese Kraft ohne einen in Betracht kommenden Fehler zu machen im Schwerpunkte des Flächenelementes angreifend denken. σ_x heißt die Totalspannung im Punkt P für die Fläche $PABC$ des Prismas. Zerlegen wir uns die Spannung in 3 Komponenten, gleich oder entgegengesetzt parallel zu den Koordinatenachsen x, y, z , so erhalten wir die sog. Spannungskomponenten für das Flächenelement, von welchen die eine, die normal auf dem Flächenelement steht, Normalspannung,

die beiden anderen Tangential- oder Schubspannungen genannt werden. Nach Kirchhoff werden die Normalspannungen des genannten Flächenelementes mit X_x , die Tangentialspannungen mit Y_x, Z_x bezeichnet. Der untere Index soll besagen, daß das Flächenelement, in dem die Spannungen übertragen werden, normal zur x -Achse steht, die großen Buchstaben geben die Achsen an, zu welchen die betreffenden Spannungskomponenten gleich oder entgegengesetzt parallel sind.

In der Technik ist oft eine andere Bezeichnungsweise üblich: σ_x für die Normalspannung und τ_{xy}, τ_{xz} für die Schubspannungen; für die Totalspannung müßte dann etwa das Zeichen T_x gewählt werden.

Die komponentalen Kräfte, die auf das herausgegriffene Flächenelement übertragen werden, sind demnach $X_x dydz, Y_x dy dz, Z_x dydz$. Die Normalspannungen heißen Zug- oder Druckspannungen, wenn sie nach der Außenseite des Prismas oder gegen dessen Inneres wirken. Zugspannungen werden stets positiv, Druckspannungen negativ bezeichnet. Ist die Normalspannung, wenn sie positiv ist, $\frac{\text{entgegengesetzt}}{\text{gleich}}$ parallel zur positiven Koordinatenachse, so sind die zugehörigen Schubspannungen dann positiv bezeichnet, wenn sie zu den Koordinatenachsen ebenfalls $\frac{\text{entgegengesetzt}}{\text{gleich}}$ parallel sind. In der Abb. 5 sind an Stelle der Kräfte, welche auf die Flächenelemente übertragen werden, die entsprechenden Spannungen und zwar stets im positiven Sinne eingetragen. Auf das Flächenelement $DEFG$ werden in analoger Weise eine Totalspannung σ'_x und Spannungskomponenten X'_x, Y'_x, Z'_x von der Umgebung des Prismas übertragen. Wenn die Fläche $DEFG$ immer näher an die Fläche $PABC$ heranrückt, um schließlich mit der letzteren zusammenzufallen, werden die entsprechenden Zahlenwerte von σ_x und σ'_x und deren Angriffslinien sich immer weniger von einander unterscheiden, um schließlich, wenn die Flächenelemente übereinanderfallen, der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt zu werden. Das Ganze folgt aus dem Grundprinzip der Mechanik, nach welchem die Aktion gleich ist der Reaktion. Denken wir uns nämlich den elastischen Körper längs der Fläche $PABC$ aufgetrennt, so müssen wir, um den Zustand des Körpers nicht zu ändern, auf das nunmehr mit $PABC$ zusammenfallende Flächenelement $DEFG$ eine Kraft pro Flächeneinheit σ'_x von links her wirken lassen (Angriffspunkt von σ'_x auf $DEFG$), die entgegengesetzt gerichtet aber dem Zahlenwerte nach gleichkommt der Kraft pro Flächeneinheit σ_x die auf $PABC$ selbst von rechts aus wirkt (Angriffspunkt von σ_x auf $PABC$, die mit $DEFG$ geometrisch zusammenfällt), ähnlich so wie bei einem Würfel W , der gegen eine horizontale Tischplatte T (Abb. 5) gedrückt wird. Bei Annahme eines bestimmten Zeitaugenblickes und wenn wir voraussetzen, daß die Spannungen stetige differenzierbare Funktionen von x, y, z, t sind (evtl. der Koordinaten allein, wenn es sich um einen Gleichgewichtsfall handelt), kommen wir zum Schlusse, daß σ_x auf $PABC$ sich seinem Zahlenwerte nach nur unendlich wenig von σ'_x auf $DEFG$ unterscheiden und die Richtung von σ'_x von der zu σ_x entgegengesetzten Richtung nur außerordentlich wenig abweichen wird. Somit ist zu einer bestimmten Zeit t offenbar die Beziehung bestehend $\bar{\sigma}'_x = \bar{\sigma}_x + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} dx$ *, die die Beziehungen

$$X'_x = X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx, \quad Y'_x = Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial x} dx, \quad Z'_x = Z_x + \frac{\partial Z_x}{\partial x} dx$$

zur Folge hat.

* Die Querstriche weisen auf den vektoriellen Charakter der Totalspannungen hin.

Ganz ähnliche Betrachtungen können auch für die zur y -Achse normalen Flächenelemente $PCDG$ und $ABEF$ und schließlich für die zur z -Achse normalen Flächenelemente $PADE$ und $BCFG$ gepflogen werden. Für die zur y -Achse normalen Elemente werden die Normalspannung nach der obigen Regel mit Y_y , die Schubspannungen mit X_y, Z_y und die Totalspannung mit σ_y bezeichnet werden müssen (evtl. mit $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}, T_y$). Ferner werden die Beziehungen

$$\bar{\sigma}'_y = \bar{\sigma}_y + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} dy, \quad X'_y = X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy, \quad Y'_y = Y_y + \frac{\partial Y_y}{\partial y} dy, \quad Z'_y = Z_y + \frac{\partial Z_y}{\partial y} dy$$

bestehen. Auf die zur z -Achse normalen Flächenelemente werden schließlich sinngemäß die Normalspannungen Z_z , die Schubspannungen X_z, Y_z und die Totalspannung σ_z übertragen (evtl. $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}, T_z$), und es bestehen die Beziehungen

$$\bar{\sigma}'_z = \bar{\sigma}_z + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} dz, \quad X'_z = X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz, \quad Y'_z = Y_z + \frac{\partial Y_z}{\partial z} dz, \quad Z'_z = Z_z + \frac{\partial Z_z}{\partial z} dz$$

Im ganzen kommen für das herausgewählte Prisma im allgemeinen 9 Spannungskomponenten, d. i. 3 Normalspannungen X_x, Y_y, Z_z und 6 Schubspannungen $Y_x, Z_x, X_y, Z_y, X_z, Y_z$ der Flächenelemente, die im Punkte P zusammenstoßen, in Betracht; die übrigen 9 Spannungskomponenten der in F zusammenstoßenden Flächenelemente unterscheiden sich von den Genannten nur unendlich wenig. Die 9 Spannungskomponenten, die, wie wir später sehen werden, nicht völlig voneinander unabhängig sein können, bestimmen den Spannungszustand im Punkte P für das gezeichnete Prisma zu einer bestimmten Zeit. Ist der Spannungszustand für jeden Punkt des elastischen festen Körpers zu jeder Zeit gegeben, so ist der Spannungszustand des ganzen Körpers zu jeder Zeit bestimmt.

Der Spannungszustand in einem Punkte P kann nun für ein bestimmtes Prisma zu einer bestimmten Zeit noch sehr verschiedenartig sein; das hängt ganz von der bis zum betreffenden Zeitaugenblick vorhanden gewesenen Art und Größe der äußeren Beanspruchung ab. Bei den in der Technik häufig in Betracht kommenden Problemen ist die Zahl der Spannungskomponenten für ein in einem Punkte P konstruiertes Prisma häufig geringer als 9, im ein-

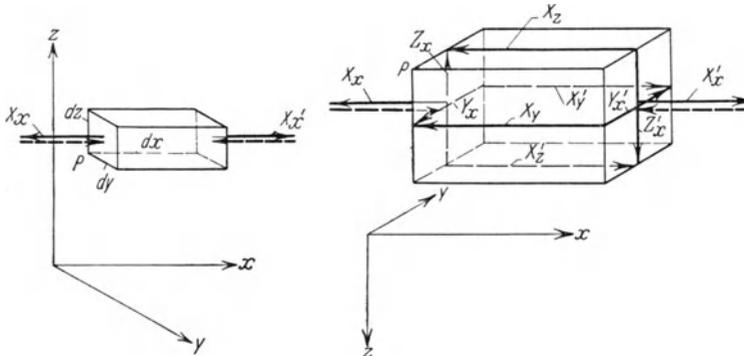


Abb. 6a.

Abb. 6b.

fachsten Falle ist nur eine Spannungskomponente vorhanden, z. B. bei den Beanspruchungen eines geraden Stabes auf Zug oder Druck, denen für ein parallel zur Stabachse herausgeschnittenes ∞ kleines Prisma (Abb. 6a, x -Achse parallel zur Stabachse) nur eine Normalspannung X_x entspricht, die von x, y, z unabhängig ist. Die voll ausgezogenen Spannungen entsprechen der Zugbeanspruchung des Stabes, die strichlierten der Druckbeanspruchung desselben. Für den Fall der Beanspruchung auf Biegung und Schub nach Abb. 1 ist der Spannungs-

zustand, wie wir in dem praktischen Teile dieser Vorlesungen sehen werden, im allgemeinen der nach Abb. 6 b dargestellte, mit einer Normalspannung X_x und 4 Schubspannungen Y_x, X_y, X_z, Z_x , wobei vorausgesetzt ist, daß die X -Achse in die Stabachse, die Y - und Z -Achsen z. B. in die linke Endquerschnittsfläche fallen. Die strichlierten Pfeile sollen andeuten, daß neben Zugspannungen auch Druckspannungen vorkommen können.

9. Art und Größe der inneren Beanspruchung. — Homogener Spannungszustand. — Zuordnung der äußeren Beanspruchung zur inneren und zum Verschiebungs- und Verzerrungszustand.

Wenn zu zwei verschiedenen Zeiten t' und t'' die entsprechenden 9 Spannungskomponenten in einem Punkte eines elastischen festen Körpers in einem für alle Spannungskomponenten konstanten positiven Verhältnisse zueinander stehen, derart, daß $X''_x = nX'_x, Y''_y = nY'_y, Z''_z = nZ'_z$ usw., worin n eine positive Zahl ist, so sagt man, die Art der inneren Beanspruchung oder die Art des Spannungszustandes in dem betrachteten Punkte sei zu den zwei angegebenen Zeitpunkten die gleiche, dagegen habe sich die Größe des Spannungszustandes in dem Sinne geändert, daß sie zur Zeit t'' n mal so groß sei als zur Zeit t' . Bei gegebener Art des Spannungszustandes ist dessen Größe durch Angabe der Größe einer Spannungskomponente gegeben. In der Technik erfolgt diese Größenangabe in kg/cm^2 oder kg/mm^2 . Wenn Art und Größe des Spannungszustandes im ganzen Bereiche des Körpers zu einer bestimmten Zeit oder dauernd konstant sind, so heißt der Spannungszustand zu dieser Zeit oder dauernd ein homogener, wie z. B. bei Beanspruchung eines geraden Stabes auf Zug (Druck).

Einer bestimmten äußeren im allgemeinen in der Zeit veränderlichen Beanspruchungsart und Beanspruchungsgröße eines elastischen festen Körpers ist, von Ausnahmefällen abgesehen, eine bestimmte von x, y, z und der Zeit abhängige innere Beanspruchungs-Art und -Größe, ein bestimmter Verschiebungs- und Verzerrungszustand, deren bestimmende Elemente gleichfalls von den Koordinaten und der Zeit abhängig sind, eindeutig zugeordnet. Für gewisse Stoffe entspricht bei dauernder äußerer Beanspruchungsart in gewissen von Null aus beginnenden Bereichen der Größe der äußeren Beanspruchung in der Regel einer n maligen Vergrößerung derselben eine n malige Vergrößerung der zugeordneten inneren Beanspruchung in jedem einzelnen Punkte des elastischen festen Körpers.

10. Zusammenhang zwischen Verzerrungs- und Spannungszustand.

Zwischen dem Verzerrungs- und dem Spannungszustand in einem Punkte eines elastischen Körpers besteht zu einer bestimmten Zeit t ein naturgesetzlicher Zusammenhang, der seinen Ausdruck in einem sog. Elastizitätsgesetz findet, das für verschiedene Stoffe erfahrungsgemäß keineswegs einheitlich ist. Es mag jetzt schon erwähnt werden, daß auch bei sehr kleinen Verschiebungskomponenten die Spannungskomponenten schon recht ansehnliche Werte erreichen können.

So ergibt sich im Falle der Beanspruchung auf Zug eines geraden Stabes aus weichem Flußeisen von 20 cm Länge für eine Verlängerung von 0,009 cm eine Spannung von 900 kg/cm^2 .

11. Äquivalenz eines am festen elastischen Körper angreifenden Lastsystems. — De Saint Venantsches Prinzip.

Nach dem bisher Behandelten ist es leicht zu verstehen, daß man bei einem elastischen festen Körper den Angriffspunkt einer Kraft nicht in der Richtung der

Kraft versetzen darf, wie das für den starren Körper zulässig ist, d. h. für den elastischen Körper ist jede Kraft eine gebundene. Würde man am elastischen Körper eine äußere Kraft in ihrer Richtungslinie versetzen, so würden hierdurch im allgemeinen die Verschiebungen in jedem einzelnen Punkte und damit der bezügliche Verzerrungszustand und ferner auch der Spannungszustand geändert werden.

Ein Rundstab aus Holz, dessen eines Ende durch einen Haken unverschiebbar festgehalten wird, trage am anderen Ende einen flußeisernen Ring, der auf den Stab warm aufgezogen wurde, so daß er am Holze durch Reibung fest haftet. Wird am Ring durch eine geeignete Einrichtung ein Zug parallel zur Stabachse ausgeübt, so erleidet der Rundstab einen Verzerrungs- und Spannungszustand, in jedem Punkte eines Bereiches, der sich über die ganze Länge des Stabes erstreckt und im wesentlichen einer Zugbeanspruchung entspricht. Hätte man den Ring an einer anderen Stelle des Stabes z. B. in dessen Mitte aufgezogen und hierauf wieder die gleiche Zugkraft ausgeübt, wodurch gegenüber dem vorhergehenden Fall eine Versetzung einer Kraft in ihrer Angriffslinie bewirkt würde, so erstreckte sich der Bereich des Stabes, in dem ein Verzerrungs- und Spannungszustand entsteht, nur mehr über eine kleinere Länge des Stabes, der übrige Teil wäre spannungs- und verzerrungsfrei.

Auch Kräftepaare sind, wenn sie am elastischen festen Körper angreifen, nicht etwa so zu behandeln, als ob sie am starren Körper angriffen, d. h. als ob ihr sie darstellender Vektor ein freier wäre; Kräftepaare am festen elastischen Körper sind mit Bezug auf ihre Wirkung in der Regel eindeutig, wenn die dieselben aufbauenden, entgegengesetzt gleichen Kräfte an ihre Angriffspunkte gebunden bleiben.

Auch die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, die an festen elastischen Körpern angreifen, darf nicht ohne weiteres nach den bekannten Regeln für ein linienflüchtiges Kraftsystem vorgenommen werden, weil die in der Verformung bestehende Wirkung eines nach diesen Regeln äquivalenten Kraftsystemes verschieden von der Wirkung der Komponenten wäre. Doch hat in dieser Hinsicht De Saint Venant einen weiter nicht bewiesenen,

der Erfahrung aber entsprechenden Grundsatz aufgestellt, der nach ihm als das Saint-Venantsche Prinzip bezeichnet wird und unter besonderen Verhältnissen die Zusammensetzungsregeln für am starren Körper angreifende Kräfte auch beim elastischen festen Körper innerhalb der praktischen Anforderung an die Genauigkeit der Rechnung als zulässig erscheinen läßt. Voraussetzung für die Anwendung des genannten Prinzipes zu dem ange-

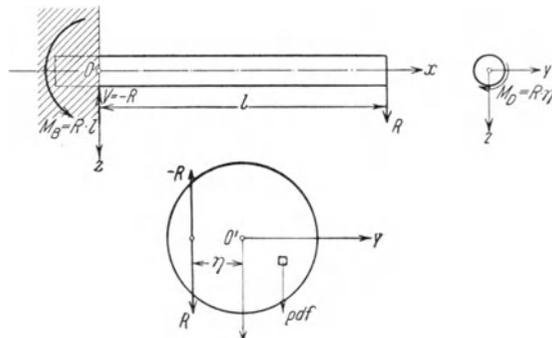


Abb. 7.

gegebenen Zweck ist, daß die Kräfte an der Oberfläche des Körpers in einem Bezirke angreifen, der mit Bezug auf die größte Dimension des Körpers klein ist. Der in Abb. 7 dargestellte, im Verhältnisse zu seinen Quersdimensionen lange Stab von kreisförmigem Querschnitt ist auf der einen Seite fest eingespannt. Über die rechte Endquerschnittsfläche irgendwie stetig verteilt sollen tangentielle Oberflächenkräfte parallel zueinander und normal zur Stabachse wirken. Die Kraft pro Flächeneinheit heiße p , es wirkt demnach auf das Flächenelement df die Kraft $p df$. Bei einem zugrunde gelegten Koordinatensystem xyz wäre p als Funktion von y, z auffaßbar, wenn y, z Koordinaten sind, welche die Flächenelemente in der Endquerschnittsfläche, für welche $x = l$, festlegen. Setzen wir

die Kräfte $p df$, die parallel zur Z -Achse angenommen wurden, nach den Regeln für die Zusammensetzung von Kräften, die am starren Körper angreifen, zusammen, so erhalten wir eine Resultierende $R = \int_{\mathcal{F}} p df$, das Integral über die Endquerschnittsfläche genommen. Die Angriffslinie dieser Resultierenden wird aus der Gleichung $\eta R = \int_{\mathcal{F}} p y df$ bestimmbar, wenn η den Abstand der Resultierenden R von der Z -Achse vorstellt. Denken wir uns jetzt eine zu R , in deren Angriffslinie wirkend, entgegengesetzt gleiche Kraft $-R$, so können wir sagen, daß das Kraftsystem aller Kräfte $p df$ und die Einzelkraft $-R$ einander ohne jede Verschiebung des Stabes das Gleichgewicht halten würden, wenn der Stab starr wäre. Der Bezirk, in dem dieses Gleichgewichtssystem wirkt, ist durch die Endquerschnittsfläche gegeben, die, weil es sich um einen im Verhältnisse zu seinen Querdimensionen langen Stab handeln soll, klein gegenüber der größten Dimension ist, die hier durch die Länge des Stabes vorgestellt wird. Würde am elastischen Stabe ein System R , $-R$ mit gemeinsamem Angriffspunkt angreifen, so würden sich ebensowenig wie dann, wenn der Stab von vornherein starr angenommen würde, irgendwelche Verschiebungen der einzelnen Punkte des Stabes zeigen; greift aber am elastischen Stabe das Kraftsystem, das aus den Kräften $p df$ und $-R$ besteht, an, so zeigen sich am elastischen Stabe Verschiebungen, das System, das aus den Kräften $p df$ und $-R$ besteht, ist also am elastischen Stabe nicht äquivalent dem System R , $-R$; doch ist die Größenordnung der längsten Dimension des Bezirkes, in welchem sich Verschiebungen bei Wirkung des aus den Kräften $p df$ und $-R$ bestehenden Kraftsystemes — in der Abbildung vom rechten Stabende nach links gerechnet — zeigen, nach De Saint Venant annähernd gleich zu setzen der Größenordnung der längsten Dimension des Oberflächenteiles, auf welchen sich die Kräfte $p df$ verteilen, d. h. auf unseren Fall angewendet, in einer Entfernung vom rechten Stabende nach links in der Stabrichtung gleich dem Durchmesser des kreisförmigen Querschnittes sind die Verschiebungen praktisch zu Null geworden. Je kleiner die Querschnittsfläche des Stabes bei gegebener Länge ist, um so kleiner ist der Bezirk, in dem Verschiebungen bei Wirkung des aus den Kräften $p df$ und $-R$ bestehenden Kraftsystemes auftreten, um so eher kann das Kraftsystem, das aus den Kräften $p df$ besteht, durch R ersetzt werden.

Aus dem gewählten Beispiele dürfte hervorgegangen sein, was mit dem De Saint Venantschen Grundsatz gemeint ist. Wir können ihn allgemein so aussprechen: Wenn an einem elastischen festen Körper in einem Bezirke seiner Oberfläche Kräfte angreifen, die sich nach den Zusammensetzungsregeln für Kräfte am starren Körper das Gleichgewicht halten, so werden hierdurch in den Punkten des elastischen Körpers Verschiebungen hervorgerufen, die mit der Entfernung der Punkte des elastischen Körpers von dem Angriffsbezirke der Kräfte rasch unmerklich werden und etwa in Entfernungen gleich der größten Dimension des Kraftbezirkes praktisch mit Null angenommen werden können; ist demnach der Kraftbezirk in seinen Dimensionen klein gegenüber der größten Dimension des elastischen festen Körpers, so kann man die in Verschiebungen sich zeigende Wirkung des Kraftsystemes als unbedeutend überhaupt vernachlässigen. Aus dem De Saint Venantschen Grundsatz folgt: Wenn in einem kleinen Bezirke der Oberfläche eines elastischen festen Körpers über diesem Bezirke irgendwie verteilte Kräfte $p df$ angreifen, so kann man diese Kräfte so zusammensetzen, als ob sie am starren Körper angegriffen, und man macht hierbei einen um so kleineren Fehler, je kleiner die Dimensionen des Bezirkes im Verhältnisse zur größten Dimension des Körpers sind.

12. Bruch des Körpers. — Statische und dynamische relative Festigkeit. — Dauerstandfestigkeit.

Es liege ein elastischer fester Körper von überall gleicher physikalischer und chemischer Beschaffenheit vor. Läßt man bei gegebener Art der äußeren kontinuierlich wirkend gedachten Beanspruchung diese im Laufe der Zeit immer mehr sehr langsam anwachsen, derart, daß in jedem Zeitaugenblick elastisches Gleichgewicht herrscht, so wächst auch die Größe der inneren Beanspruchung fortgesetzt, ebenso die absoluten und relativen Verschiebungskomponenten und die Verzerrungskomponenten. Schließlich kann es sein, daß in einem oder mehreren Punkten oder längs Flächen oder vielleicht in einem umgrenzten Raumbereiche des Körpers, der Bruch, d. h. eine Trennung der dort befindlichen Teile des Körpers voneinander, eintritt. An den Bruchstellen werden die Kohäsionskräfte durch die dort vorhandenen, infolge der Spannungen auftretenden Kräfte überwunden.

Nehmen wir an, der Bruch des Körpers beginne an einer geometrisch durch den Punkt P definierten Stelle zu einer Zeit, wo dort ein Spannungszustand gegebener Art und Größe vorhanden ist. Dieser Spannungszustand heißt die statische relative Festigkeit des Körpers an dieser Stelle. Die Bezeichnung relative Festigkeit soll darauf hindeuten, daß die Festigkeit auf den besonderen Spannungszustand an der Bruchstelle bezogen ist. Durch die Bezeichnung statische Festigkeit soll der kontinuierlichen Steigerung des äußeren Belastungs- und des inneren Spannungszustandes Ausdruck gegeben werden. Jeder besonderen Art eines Spannungszustandes eines Stoffes kommt bei statischer Beanspruchung eine besondere Art der relativen Festigkeit zu. Insoferne der Inbegriff der Größen der Spannungskomponenten eines Spannungszustandes bestimmter Art beim Bruche als für den betreffenden Stoff charakteristisch angesehen werden kann, ist die relative Festigkeit eine für die Beurteilung der praktischen Verwendbarkeit des betreffenden Stoffes wichtige Größe. Da die Größe der relativen Festigkeit durch die Größe der Spannungskomponenten des betreffenden Spannungszustandes gegeben gedacht ist, ist sie auch als Größe eines Widerstandes bei gegebener innerer Art der Beanspruchung gegen den Bruch auffaßbar.

Von der Größe des Widerstandes, der durch die relative Festigkeit zum Ausdruck gebracht werden kann, ist begrifflich die Größe der Widerstandsfähigkeit zu unterscheiden, die sich nicht nur in der relativen Festigkeit sondern auch in der Größe der relativen Verformung zeigt, die einem Spannungszustand bestimmter Art beim Bruche entspricht. Je größer diese Verformung bei gleicher relativer Festigkeit ist, um so günstiger wird der betreffende Stoff im Hinblick auf dessen Verwendung beurteilt werden müssen. Die Größe der relativen Verformung beim Bruche kann durch die Größen der dann vorhandenen Verzerrungskomponenten ihren Ausdruck finden.

Die statische relative Festigkeit eines Stoffes für einen bestimmten Spannungszustand könnte man sich dadurch erhoben denken, daß man auf die Seitenflächen eines endlichen Würfels aus dem betreffenden Stoffe Kräfte gleichförmig verteilt so wirken ließe, daß pro Flächeneinheit die dem Spannungszustande entsprechenden Totalspannungen erscheinen und diese Kräfte proportional zueinander so lange steigert, bis der Bruch eintritt. Da bei der geschilderten äußeren Beanspruchung der Spannungszustand in jedem Punkte des Würfels derselbe wäre (homogener Spannungszustand), müßte der Bruch, theoretisch genommen, bei Erreichung der Bruchbelastung an allen Teilen des Körpers zugleich auftreten. In Wirklichkeit wird dies aber nicht eintreten, da sich stets Stellen geringsten Widerstandes

zeigen werden, in denen der Bruch beginnt. Aus dem Spannungszustand der bei diesem Beginnen des Bruches herrscht, könnte man wenigstens annäherungsweise auf die relative Festigkeit bei dem betreffenden Spannungszustande einen Schluß ziehen. Aus einem derartigen Versuche könnte auch die Größe der relativen Verformung auf Grund der beim Bruche sich ergebenden Verzerrungskomponenten (homogene Verzerrung) geschlossen werden. Praktisch stellt sich aber der Durchführung eines derartig gedachten Versuches, wenn man auch, wie auf Grund späterer theoretischer Erwägungen wird gefolgert werden können, etwas einfacher vorgehen kann, als dies geschildert wurde, der Umstand entgegen, daß die exakte Aufbringung der dem gewollten Spannungszustande entsprechenden Kräfte, auf die Würfelflächen nur bei verhältnismäßig einfachen Spannungszuständen durchführbar ist. Aus diesem Grunde und deswegen, weil praktisch nur wenige ausgezeichnete, innere Beanspruchungsarten, die bei der Anwendung des Stoffes in technischen Konstruktionen häufig auftreten, eine Rolle spielen, beurteilt man die Widerstandsfähigkeit eines Stoffes aus der Größe von besonderen Arten der relativen Festigkeit und der zugehörigen relativen Verzerrung.

Zu diesen gehören die relative statische Festigkeit auf Zug, oder auch kurz Zugfestigkeit genannt, definiert durch die Zugspannung, welche bei Beanspruchung auf Zug beim Bruche auftritt, die relative statische Festigkeit auf Druck kurz statische Druckfestigkeit genannt, definiert durch die Druckspannung, welche bei Beanspruchung auf Druck beim Bruche auftritt, die relative Biegezugfestigkeit usw. Beispielsweise ist die statische Zugfestigkeit von weichem Flußeisen 3600 kg/cm^2 und darüber, von Eichenholz parallel zur Faserrichtung etwa 900 kg/cm^2 , die Würfeldruckfestigkeit (so genannt, weil sie an Würfeln erhoben wird) von Hartbrandziegeln 250 bis 300 kg/cm^2 usw.¹

Bei der Erhebung der statischen relativen Festigkeit im genauen Sinne dieses Begriffes wäre es eigentlich notwendig, daß die äußere Belastung, von Null aus anwachsend, derart aufgebracht wird, daß wir eine Aufeinanderfolge von Gleichgewichtszuständen erhalten. Praktisch ist das natürlich nicht durchzuführen, da hierzu eine unendlich lange Zeit erforderlich wäre. Wir können aber zu sehr angenäherten Werten dieser Festigkeit gelangen, wenn wir die Belastungssteigerung möglichst langsam vornehmen oder, wie man sich ausdrückt, mit sehr kleiner Belastungsgeschwindigkeit arbeitet (siehe hierzu auch S. 175ff.).

Die Erfahrung hat auch gezeigt, daß die Widerstandsfähigkeit eines Stoffes nicht nur von der inneren Beanspruchungsart, sondern auch von dem Belastungscharakter und der Aufbringungsart der Belastung abhängig ist (S. 8). Dementsprechend spricht man von einer relativen Stoßfestigkeit auf Zug, Druck oder allgemein für eine beliebige Art des Spannungszustandes, von einer relativen Arbeitsfestigkeit bei schwingender Zug- und Druckbelastung (ein gerader Stab wird so oft abwechselnd auf Zug und gleich hoch auf Druck beansprucht, bis er bricht oder bei beliebig oftmaligem Wechsel gerade noch standhält) oder allgemein bei Wechsel zwischen zwei beliebigen Arten von Spannungszuständen. Die relative Stoß- und Arbeitsfestigkeit wird häufig unter dem Sammelbegriff der relativen dynamischen Festigkeit zusammengefaßt.

Manche Stoffe, wie z. B. weiches Flußeisen bei Beanspruchung auf Zug, zeigen die Eigentümlichkeit, daß bei konstanter äußerer d. h. dauernd aufgebrachter Belastung bestimmter Größe, die niedriger als jene ist, die der statischen relativen Festigkeit entspricht, nach Ablauf einer gewissen Zeit der Bruch eintritt. In solchen Fällen spricht man von einer besonderen statischen relativen Dauerstandfestigkeit.

¹ Die Zahlenwerte beziehen sich auf sogenannte technische Festigkeiten, die kleiner (größer) als die im Augenblicke des Bruches auftretenden wahren Zug- (Druck-) Spannungen sind (S. 160ff.).

An die Definition der relativen statischen Festigkeit eines Stoffes reiht sich füglich die Frage an, ob es eine absolute Festigkeit oder, besser gesagt, absolute Widerstandsfähigkeit gegen den Bruch gibt, d. h. eine physikalische Größe, die beim Bruch einen bestimmten, dem betreffenden Stoffe eigentümlichen Wert annimmt, und zwar unabhängig von der besonderen Art des Spannungszustandes. Dieser Frage wird auf Seite 179 ff. näher getreten.

13. Natürlicher Zustand. Anfangs- und Temperaturspannungen.

Wenn ein elastischer fester Körper in allen seinen Teilen spannungs- und verzerrungsfrei ist, so sagt man, er befinde sich in seinem natürlichen Zustande. Der natürliche Zustand eines Körpers wird in der Regel dadurch geändert, daß man ihm eine äußere angreifende Belastung (S. 7) aufzwingt.

Es kann aber eine Änderung des natürlichen Zustandes auch Platz greifen, ohne daß ein äußeres angreifendes Lastsystem wirksam wird, wie aus dem folgenden Beispiel hervorgeht. Denken wir uns den in der Abb. 8 dargestellten, aus Dreiecken zusammengesetzten, eisernen Fachwerkträger

(die äußere Belastung $P_1 \dots P_5$ denke man weg), der ursprünglich überall gleiche Temperatur besitzen soll, in allen seinen Teilen gleich stark erwärmt oder abgekühlt, so entstehen in ihm keine Zusatzspannungen zu jenen, welche bereits infolge des Eigengewichtes vorhanden sind, denn die infolge Temperaturänderungen auftretenden Verlängerungen der Stäbe können ohne weiteres eintreten, wenn sich in den einzelnen Verbindungspunkten der Stäbe reibungslose Gelenke befinden, das Auflager 7

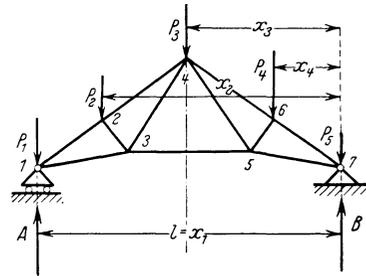


Abb. 8.

fest, das Auflager 1 auf Rollen verschieblich ist. Würde man aber das Lager 1 ebenfalls fest anordnen, so würde z. B. eine Erwärmung des ganzen Trägers Spannungen in den einzelnen Stäben zur Folge haben, welche als Wärme- oder Temperaturspannungen bezeichnet werden.

Würden wir zwischen den Punkten 2, 5 einen Stab einziehen, der genau der Entfernung der beiden Punkte entspricht, so hätte diese Maßnahme keinen Einfluß auf den Spannungszustand in den einzelnen Stäben. Wenn wir aber jetzt in dem so umgeänderten Träger den Stab 2, 5 etwa durch Hämmern mechanisch verlängern würden, so entstünden in sämtlichen Stäben Spannungen, die als sogenannte Anfangs- oder Eigenspannungen im Fachwerke vorhanden wären, ohne daß, abgesehen vom Eigengewichte, eine äußere Belastung aufgebracht worden wäre.

Derartige Anfangsspannungen sind auch häufig bereits in dem Materiale vorhanden im Zusammenhange mit dem technologischen Herstellungsprozesse. Wird die Abkühlung des in flüssigem Zustande gewonnenen Flußeisens, Gußeisens, Glases nicht völlig gleichmäßig für alle Teile bewirkt, so entstehen Anfangsspannungen, die bei Verwendung des betreffenden Stoffes verhängnisvoll sein oder wie z. B. beim Glas die Verwendung zu optischen Zwecken ausschließen können. Das zu Objektiven verwendete Glas ist daher immer ein sogenanntes feingekühltes, d. h. langsam abgekühltes Glas.

14. Genauere Umschreibung des Begriffes der Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

Wir können nunmehr die Bezeichnungsweise Elastizitäts- und Festigkeitslehre (S. 1) für die Mechanik des festen elastischen Körpers erklären. Die Elastizitätslehre nimmt Bezug auf den Verschiebungs- und Verzerrungszustand (Verformung) des Körpers, die Festigkeitslehre auf den Spannungszustand beim

Bruch oder allgemeiner auf die Spannungszustände, die den Verschiebungs- resp. Verzerrungszuständen zugeordnet sind. Es ist Aufgabe der Elastizitäts- und Festigkeitslehre, den Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungszustand eines gegebenen elastischen festen Körpers, der unter dem Einflusse gegebener äußerer Kräfte steht, zu bestimmen.

A. und L. Föppl haben vorgeschlagen, für das Wort Verzerrungszustand das Wort Zwang, für das Wort Spannungszustand das Wort Drang zu setzen; das entspricht den Bezeichnungen der Engländer, die für Drang den Ausdruck stress und für Zwang den Ausdruck strain eingeführt haben.

Auch die Einteilung der Mechanik der elastischen festen Körper (S. 5) in Kinematik, Statik und Kinetik können wir nunmehr genauer umschreiben; die Kinematik der elastischen festen Körper studiert in erster Linie den Verschiebungs- und Verzerrungszustand (Verformung) von rein geometrischen Gesichtspunkten aus, ohne sich weiter um die zugeordneten Spannungszustände und äußeren Beanspruchungen zu kümmern. Die Statik der elastischen festen Körper stellt die Bedingungen für das Gleichgewicht und die Gleichwertigkeit von angreifenden äußeren Kraftsystemen auf und untersucht wie die Kinetik die Zuordnung der äußeren Kräfte zum Spannungs-, Verschiebungs- und Verzerrungszustand. Dadurch, daß in kinetischen Aufgaben (die vermittelt des d'Alembertschen Prinzipes durch Einführung fiktiver Trägheitskräfte als Gleichgewichtsprobleme aufgefaßt werden können) sämtliche geometrische und physikalische Größen mit Ausnahme der Masse und an die Art des Stoffes gebundener Konstanten als mit der Zeit veränderlich erscheinen, gestalten sich dieselben in Vergleich zu statischen Problemen erheblich verwickelter.

III. Kinematik der festen elastischen Körper (Elastokinematik).

1. Voraussetzungen.

Wir stellen uns zunächst vor, daß ein fester elastischer Körper, z. B. der in Abb. 1 dargestellte Träger, durch kontinuierliche äußere Kräfte, die sich das Gleichgewicht halten, belastet wird. Die Verschiebungen u, v, w , die sich einstellen, nachdem die äußeren Kräfte ihren Endwert erlangt haben, sollen als stetige differenzierbare Funktionen der Koordinaten x, y, z und als sehr klein, in der Rechnung aber als unendlich klein von der ersten Ordnung vorausgesetzt werden.

2. Allgemeine Gleichung des Verschiebungsellipsoides.

Wir legen uns die Frage vor, in welche Fläche eine um den beliebigen Punkt P (Abb. 4) eines elastischen festen Körpers beschriebene Kugel von unendlich kleinem Radius $r = i\xi + j\eta + k\zeta$ infolge der Verformung des Körpers übergeht. Der Punkt E der Darstellung, der einen Eckpunkt eines unendlich kleinen Prismas vorstellt, mit den Koordinaten ξ, η, ζ bezogen auf das durch P parallel zu dem Koordinatensystem $x y z$ gelegte Koordinatensystem $x' y' z'$, liegt auf der Kugel mit der Gleichung

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (a)$$

und verschiebt sich bei der Verformung nach E' , dessen Koordinaten ξ'', η'', ζ'' mit Bezug auf das Koordinatensystem $x'' y'' z''$ (durch den verschobenen Punkt P' parallel zu dem Koordinatensystem $x y z$ gelegt) durch die Beziehungen (2c) auf Seite 12 gegeben sind.

Wenn wir uns aus den Gleichungen (2c) ξ, η, ζ berechnen und in die Gleichung der Kugel (a) einsetzen, so erhalten wir eine Beziehung zwischen ξ'', η'', ζ'' , also die Gleichung der deformierten Kugelfläche bezogen auf das Koordinatensystem $x'' y'' z''$. Die Berechnung von ξ, η, ζ aus den Gleichungen (2c) wäre an sich einfach, da sie nach diesen Größen linear sind. Wir umgehen aber die auszuführende Determinantenrechnung durch die folgende Betrachtung. Nachdem ξ, η, ζ , ebenso u, v, w klein von der ersten Ordnung sein sollen, so trifft das auch auf die partiellen Differentialquotienten von u, v, w nach x, y, z zu. ξ'' unterscheidet sich demnach von ξ nur um eine Größe $\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z}$, die von der zweiten Ordnung klein ist. Analoges gilt für den Unterschied von η'' und η bzw. ζ'' und ζ . Setzen wir also in der Gleichung (2c) in den Gliedern zweiter Ordnung statt ξ, η, ζ die Größen ξ'', η'', ζ'' ein, so machen wir einen Fehler, der klein von der dritten Ordnung ist. Berücksichtigen wir Glieder von der dritten Ordnung nicht mehr, so können wir die umgewandelten Beziehungen (2c) in der Form

$$\begin{aligned}\xi &= \xi'' \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \eta'' \frac{\partial u}{\partial y} - \zeta'' \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \eta &= -\xi'' \frac{\partial v}{\partial x} + \eta'' \left(1 - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \zeta'' \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \zeta &= -\xi'' \frac{\partial w}{\partial x} - \eta'' \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta'' \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)\end{aligned}\quad (2d)$$

schreiben. Die Gleichung der deformierten Kugelfläche, in welche die ursprüngliche Kugel (a) übergeht, ist daher

$$\begin{aligned}r^2 &= \left[\xi'' \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \eta'' \frac{\partial u}{\partial y} - \zeta'' \frac{\partial u}{\partial z}\right]^2 + \left[-\xi'' \frac{\partial v}{\partial x} + \eta'' \left(1 - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \zeta'' \frac{\partial v}{\partial z}\right]^2 \\ &+ \left[-\xi'' \frac{\partial w}{\partial x} - \eta'' \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta'' \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]^2.\end{aligned}\quad (5)$$

Die Fläche (5), die eine geschlossene Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung, also im allgemeinen ein dreiaxsiges Ellipsoid ist, heißt das Verschiebungs- oder Deformationsellipsoid. Quadrieren wir in (5) und vernachlässigen Glieder vierter Kleinheitsordnung, so erhalten wir

$$\begin{aligned}r^2 &= \left(1 - 2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) \xi''^2 + \left(1 - 2 \frac{\partial v}{\partial y}\right) \eta''^2 + \left(1 - 2 \frac{\partial w}{\partial z}\right) \zeta''^2 \\ &- 2 \xi'' \eta'' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2 \eta'' \zeta'' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) - 2 \zeta'' \xi'' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right).\end{aligned}\quad (5a)$$

3. Deformations-Hauptrichtungen. — Hauptdehnungen.

Drei aufeinander normale Durchmesser der Kugel (a) vor der Deformation gehen in konjugierte Durchmesser des Verschiebungsellipsoides (5) über. Denn fassen wir die aufeinander normalen Durchmesser der Kugel als Schnittlinien der drei Ebenen $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$ auf, so gehen diese Schnittlinien zufolge der Beziehungen (2d) nach der Deformation in die Schnittlinien der Ebenen

$$0 = \xi'' \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \eta'' \frac{\partial u}{\partial y} - \zeta'' \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (\alpha)$$

$$0 = -\xi'' \frac{\partial v}{\partial x} + \eta'' \left(1 - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \zeta'' \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (\beta)$$

$$0 = -\xi'' \frac{\partial w}{\partial x} - \eta'' \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \zeta'' \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad (\gamma)$$

über. Nennen wir die Koordinaten des Durchstoßpunktes der Schnittlinie der beiden Ebenen $(\alpha), (\beta)$ mit dem Verschiebungsellipsoid (5), dessen Gleichung wir kurz durch $F(\xi'' \eta'' \zeta'') = 0$ ausdrücken, a_x, a_y, a_z , so ist die Gleichung der Tangentialebene in diesem Punkte an das Ellipsoid durch

$$(\xi'' - a_x) \left(\frac{\partial F}{\partial \xi''} \right) + (\eta'' - a_y) \frac{\partial F}{\partial \eta''} + (\zeta'' - a_z) \frac{\partial F}{\partial \zeta''} = 0$$

gegeben, wenn wir in den Ableitungen von F nach ξ'', η'', ζ'' für die Koordinaten die Werte a_x, a_y, a_z einsetzen. Da nun mit Rücksicht auf $(\alpha), (\beta), (\gamma)$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi''} = 2 \left[-a_x \frac{\partial w}{\partial x} - a_y \frac{\partial w}{\partial y} + a_z \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \cdot -\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta''} = 2 \left[-a_x \frac{\partial w}{\partial x} - a_y \frac{\partial w}{\partial y} + a_z \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \cdot -\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta''} = 2 \left[-a_x \frac{\partial w}{\partial x} - a_y \frac{\partial w}{\partial y} + a_z \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \cdot \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

so lautet die Gleichung jener Tangentialebene

$$-(\xi'' - a_x) \frac{\partial w}{\partial x} - (\eta'' - a_y) \frac{\partial w}{\partial y} + (\zeta'' - a_z) \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.$$

Diese Ebene ist aber zur Ebene (γ) parallel, d. h. die Ebene ist konjugiert zum Durchmesser, der sich als Schnittlinie der beiden Ebenen $(\alpha), (\beta)$ ergibt. Ähnlich ist der Beweis, daß die Ebenen (α) und (β) konjugiert sind zu den Schnittlinien der Ebenen $(\beta), (\gamma)$ und $(\alpha), (\gamma)$. Da das Verschiebungsellipsoid (5) je drei aufeinander normale konjugierte Durchmesser besitzen muß, gibt es für die Kugel (a) drei aufeinander normale Durchmesser, die nach der Deformation normal zueinander bleiben. Daraus, und weil das Ellipsoid (5) im allgemeinen drei verschieden lange Achsen hat, ist der Schluß zu ziehen, daß es für jeden Punkt P eines elastischen festen Körpers drei aufeinander normale als Deformationshauptrichtungen bezeichnete Richtungen gibt, die bei der Gestaltsänderung des Körpers aufeinander normal bleiben und sich dadurch auszeichnen, daß ihnen extreme Werte der Verlängerungen der Radien einer um den Punkt P beschriebenen Kugel entsprechen. Den Deformationshauptrichtungen sind Verlängerungen zugeordnet, die positiv oder negativ sein können, und Hauptverlängerungen genannt werden. Ein in die Kugel (a) eingeschriebener Würfel wird nach der Deformation ein schiefwinkeliges Prisma, dessen Ebenen parallel zu konjugierten Ebenen des Verschiebungsellipsoides sind. Werden die Kanten des Würfels, der in die Kugel (a) eingeschrieben ist, von vorn herein parallel zu den Hauptrichtungen gewählt, so geht der Würfel in ein rechtwinkeliges Prisma über, dessen Kanten parallel sind zu den Achsen des Verschiebungsellipsoides. Was hier für die homogene Deformation in einem Punkte gefunden wurde, gilt in entsprechender Übertragung, wenn die Deformation in einem endlichen Raume homogen ist.

Auf Grund der auf Seite 15 gegebenen Definition der Dehnungen (Quetschungen) können wir nunmehr auch sagen, daß in den Hauptdeformationsrichtungen drei extreme Werte der Dehnungen (Quetschungen) der Umgebung des Punktes P des elastischen festen Körpers auftreten werden, welche in Zukunft mit e_1, e_2, e_3 bezeichnet und Hauptdehnungen genannt werden.

4. Die Verzerrungskomponenten als partielle Ableitungen der Verschiebungskomponenten.

Wir wollen nunmehr die notwendig bestehenden Zusammenhänge der auf Seite 14ff. definierten Verzerrungskomponenten $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ im Punkte P des elastischen festen Körpers mit den Verschiebungskomponenten u, v, w im gleichen Punkte betrachten.

In der Richtung der x -Achse ist die Verzerrungskomponente durch $\frac{P'G' - PG}{PG}$ (Abb. 4) gegeben. Darin ist $PG = \xi$. Die Koordinaten des Punktes G' mit der Bezeichnung $\xi''_1, \eta''_1, \zeta''_1$ im Koordinatensystem $x''y''z''$ werden aus den Gleichungen (2c), S. 12 erhalten, indem wir in diesen Gleichungen für η und ζ Null einsetzen. Es wird somit für den Punkt G'

$$\xi''_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \xi, \quad \eta''_1 = \frac{\partial v}{\partial x} \xi, \quad \zeta''_1 = \frac{\partial w}{\partial x} \xi, \quad (a)$$

und daher wird

$$\begin{aligned} P'G' &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \xi^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \xi^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \xi^2} \\ &= \xi \left[1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \xi \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

wenn wir Glieder von höherer als der zweiten Kleinheitsordnung vernachlässigen. Es ist sonach

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\xi \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \xi}{\xi} = \frac{\partial u}{\partial x}. \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Um die Schiebung parallel zur xy -Ebene zu erhalten, fassen wir den Winkel $G'P'C'$ ins Auge, den wir uns auf die $x'y'$ -Ebene projizieren, wodurch wir die Darstellung in Abb. 9 erhalten. Die Querstriche über den Buchstaben G', C', P' sollen auf die Projektion der betreffenden Raumpunkte hindeuten.

Nennen wir den Winkel $G'P'C' = \frac{\pi}{2} - \lambda$, die gerichteten Strecken $P'G' = m$, $P'C' = n$, so können wir nach den Regeln der analytischen Geometrie schreiben

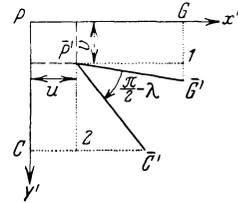


Abb. 9.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \cos(m'x') \cos(n'y') + \cos(m'y') \cos(n'z') + \cos(m'z') \cos(n'x').$$

Nun sind bei Rücksichtnahme auf die Gleichungen (2c), und weil für den Punkt C $\xi = \zeta = 0$, die Koordinaten des Punktes C' im Koordinatensystem $x''y''z''$ durch

$$\xi''_2 = \frac{\partial u}{\partial y} \eta, \quad \eta''_2 = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \eta, \quad \zeta''_2 = \frac{\partial w}{\partial y} \eta, \quad (b)$$

gegeben und daher

$$\begin{aligned}\frac{\xi_1''}{P'G'} &= \cos(m\xi') = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\xi}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\xi}, & \frac{\xi_2''}{P'C'} &= \cos(n\xi') = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}\eta}{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\eta}, \\ \frac{\eta_1''}{P'G'} &= \cos(m\eta') = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\xi}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\xi}, & \frac{\eta_2''}{P'C'} &= \cos(n\eta') = \frac{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\eta}{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\eta}, \\ \frac{\xi_1''}{P'G'} &= \cos(m\delta') = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}\xi}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\xi}, & \frac{\xi_2''}{P'C'} &= \cos(n\delta') = \frac{\frac{\partial w}{\partial y}\eta}{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\eta}.\end{aligned}$$

Es wird somit

$$\begin{aligned}\sin \lambda &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}} + \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)} \\ &= \frac{\partial u}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^{-1} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^{-1}\end{aligned}$$

oder

$$\lambda = e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (7)$$

wenn wir Glieder von höherer als der ersten Kleinheitsordnung vernachlässigen. In der Abb. 9 stellt $G\bar{G}'$ die Komponente der Verschiebung des Punktes G parallel zur y -Achse, d. i. $v + \frac{\partial v}{\partial x}\xi$, und $C\bar{C}'$ die Komponente der Verschiebung des Punktes C parallel zur x -Achse, also $u + \frac{\partial u}{\partial y}\eta$ vor. Demnach wird $1\bar{G}' = \frac{\partial v}{\partial x}\xi$ und $2\bar{C}' = \frac{\partial u}{\partial y}\eta$, wobei $\bar{P}'1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\xi$, $\bar{P}'2 = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\eta$ ist. $\frac{\partial v}{\partial x}$ mißt daher den Winkel $1\bar{P}'\bar{G}'$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ den Winkel $2\bar{P}'\bar{C}'$, wenn Größen zweiter Kleinheitsordnung nicht berücksichtigt werden, und $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda$ stellt die Änderungen des rechten Winkels $1\bar{P}'2$ vor. Es ist somit die Winkeländerung des rechten Winkels GPC im Raum infolge der Kleinheit von u, v, w durch die Änderung des Winkels in der Projektion ersetzbar. Zu der Beziehung $\lambda = e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ können wir die 2 ähnlichen auf die Schiebungen $\mu = e_{yz}$, $\nu = e_{zx}$ in den Ebenen yz und zx bezüglichen Beziehungen sofort hinschreiben, indem wir zyklisch permutieren; wir erhalten dann

$$\left. \begin{aligned}\mu &= e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \nu &= e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Aus den Beziehungen (6) bzw. (7) können die Verzerrungskomponenten in drei aufeinander normalen Richtungen und parallel zu drei aufeinander normalen Ebenen in jedem Punkte P bestimmt werden, wenn wir u, v, w als Funktionen der Koordinaten x, y, z gegeben haben.

5. Einführung der Verzerrungskomponenten bzw. Hauptdehnungen in die Gleichung des Verschiebungsellipsoides.

Die Gleichung (5a) des Verschiebungsellipsoides kann bei Benützung der Beziehungen (6) und (7) in der Form

$$r^2 = (1 - 2 e_{xx}) \xi''^2 + (1 - 2 e_{yy}) \eta''^2 + (1 - 2 e_{zz}) \zeta''^2 - 2 \xi'' \eta'' e_{xy} - 2 \eta'' \zeta'' e_{yz} - 2 \zeta'' \xi'' e_{zx} \quad (5b)$$

geschrieben werden. Die Gleichung der genannten Fläche ist in jedem Punkte P des elastischen Körpers gegeben, wenn man den Verzerrungszustand als Funktionen der Koordinaten x, y, z kennt. Legen wir in jedem Punkte das Koordinatensystem $x' y' z'$ von vornherein in die Deformationshauptrichtungen (es wird dann mit $\alpha' \beta' \gamma'$ bezeichnet), so existieren nach einer oben gemachten Bemerkung für die diesen Achsenrichtungen entsprechenden unendlich kleinen Prismen keine Schiebungen. Es werden sonach in der Beziehung (5b) die die Schiebungen enthaltenden Glieder verschwinden, an Stelle der Verzerrungskomponenten e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} sind die Hauptdehnungen e_1, e_2, e_3 und an Stelle von ξ'', η'', ζ'' die neuen Koordinaten $\alpha'', \beta'', \gamma''$ einzuführen, welche sich auf das Koordinatensystem $\alpha'' \beta'' \gamma''$ beziehen, in welches das Koordinatensystem $\alpha' \beta' \gamma'$ bei der Parallelverschiebung $P P'$ übergeht. Demgemäß lautet jetzt die Gleichung des Verschiebungsellipsoides

$$r^2 = (1 - 2 e_1) \alpha''^2 + (1 - 2 e_2) \beta''^2 + (1 - 2 e_3) \gamma''^2, \quad (5c)$$

welche die Mittelpunktsleichung eines dreiachsigen Ellipsoides bezogen auf die Hauptachsen desselben darstellt.

Die Achsen $\alpha'', \beta'', \gamma''$ sind zwar, wie eine genauere Analyse lehrt, nicht die Hauptachsen der Fläche, weil das Achsentripel $\alpha' \beta' \gamma'$ vor der Deformation nicht in die Achsen $\alpha'', \beta'', \gamma''$ nach der Deformation übergeht, sondern in solche, die gegenüber $\alpha'' \beta'' \gamma''$ um unendlich wenig verdreht sind, doch ist die Kleinheitsordnung dieses Verdrehungswinkels derart, daß das in den Gleichungen (5c) nicht zum Ausdruck kommt.

Die halben Achsen des Verschiebungsellipsoides haben demnach die Größen

$$a = \frac{r}{\sqrt{1 - 2 e_1}} = r(1 + e_1),$$

$$b = \frac{r}{\sqrt{1 - 2 e_2}} = r(1 + e_2),$$

$$c = \frac{r}{\sqrt{1 - 2 e_3}} = r(1 + e_3).$$

$r e_1, r e_2, r e_3$ sind die Verlängerungen bzw. Verkürzungen, welche der Radius r der Kugel (a) (S. 26) in den Hauptrichtungen erfahren hat, da e_1, e_2, e_3 sich auf die Verlängerungen bzw. Verkürzungen der Längeneinheit beziehen. Die Gleichung des Verschiebungsellipsoides kann schließlich in leicht ersichtlicher Weise noch in der Form

$$1 = \frac{\alpha''^2}{r^2(1 + e_1)^2} + \frac{\beta''^2}{r^2(1 + e_2)^2} + \frac{\gamma''^2}{r^2(1 + e_3)^2} \quad (5d)$$

angeschrieben werden.

5a. Das Verschiebungsellipsoid vom Standpunkt der Vektor-Algebra.

Das Verschiebungsellipsoid kann unter dem Gesichtswinkel der Dyadentheorie behandelt werden, wenn man sich erinnert, daß jede Dyade unter dem Bilde einer Fläche zweiter Ordnung angesehen werden kann (S. 13 ff.). In diesem Sinne ist die Verschiebungsdjade

Ψ in der vektoralgebraischen Gleichung $r'' = \Psi r$, welche die lineare Zuordnung eines Vektors $r'' = i\xi'' + j\eta'' + k\zeta''$ zum Vektor $r = i\xi + j\eta + kz$ ausspricht, geometrisch ausgelegt bereits der Ausdruck dafür, daß eine Kugel mit dem Radius $r = a$ vor Deformation in das Verschiebungselipsoid nach der Deformation übergehen muß.

6. Bestimmung der Dehnung in beliebiger Richtung, wenn der Verzerrungszustand für einen Elementarkörper vorliegt. — Verzerrungsfläche.

Die Dehnung in einer beliebigen Richtung PE (Abb. 4) ist gegeben, wenn die Verzerrungskomponenten für das beliebige unendlich kleine Prisma $PABCDEFG$ gegeben sind; denn wenn $r = PE$, wobei $r = i\xi + j\eta + kz$ nach der Deformation in $P'E'$ mit $r'' = i\xi'' + j\eta'' + k\zeta''$ übergeht, so ergibt sich definitionsgemäß die Dehnung in der Richtung r mit $\frac{r''-r}{r} = e_{rr}$. Nun ist $r'' = \sqrt{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2}$ und mit Benützung von (2c) auf S. 12

$$r''^2 = \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \xi + \frac{\partial u}{\partial y} \eta + \frac{\partial u}{\partial z} \zeta \right]^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial x} \xi + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \eta + \frac{\partial v}{\partial z} \zeta \right]^2 + \left[\frac{\partial w}{\partial x} \xi + \frac{\partial w}{\partial y} \eta + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \zeta \right]^2$$

also bei leicht ersichtlichen Vernachlässigungen und Beachtung von (6) und (7)

$$r''^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 2[\xi^2 e_{xx} + \eta^2 e_{yy} + \zeta^2 e_{zz} + \xi\eta e_{xy} + \eta\zeta e_{yz} + \xi\zeta e_{zx}],$$

$$r'' = r \sqrt{1 + 2\left[\frac{\xi^2}{r^2} e_{xx} + \frac{\eta^2}{r^2} e_{yy} + \frac{\zeta^2}{r^2} e_{zz} + \frac{\xi\eta}{r^2} e_{xy} + \frac{\eta\zeta}{r^2} e_{yz} + \frac{\xi\zeta}{r^2} e_{zx} \right]},$$

Nennen wir die Richtungskosinuse des Vektors r im Koordinatensystem $x'y'z'$ der Reihe nach $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ so ist

$$\xi = r \cos l, \quad \eta = r \cos m, \quad \zeta = r \cos n$$

und wir können, wenn wir die Quadratwurzel im zuletzt angeschriebenen Ausdruck von r'' als Potenz in eine unendliche Reihe entwickeln und Glieder mit höherer als der zweiten Kleinheitsordnung vernachlässigen,

$$r'' = r [1 + e_{xx} \cos^2 l + e_{yy} \cos^2 m + e_{zz} \cos^2 n + e_{xy} \cos l \cos m + e_{yz} \cos m \cos n + e_{zx} \cos n \cos l]$$

schreiben, woraus

$$\frac{r''-r}{r} = e_{rr} = e_{xx} \cos^2 l + e_{yy} \cos^2 m + e_{zz} \cos^2 n + e_{xy} \cos l \cos m + e_{yz} \cos m \cos n + e_{zx} \cos n \cos l \quad (8)$$

folgt. Die Beziehung (8) läßt die Dehnung in einem Punkte in einer beliebigen durch $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ festgelegten Richtung bestimmen, wenn die Verzerrungskomponenten für das beliebige dem Koordinatensystem entsprechende unendlich kleine Prisma gegeben sind. Denken wir uns für die verschiedenen möglichen Richtungen von r Strecken ϱ vom Punkte P aus in den Richtungen r aufgetragen, derart, daß $\varrho^2 = \pm \frac{k^2}{e_{rr}}$, d. h. ϱ verkehrt proportional ist der Quadratwurzel aus der Dehnung e_{rr} (das zweifache Zeichen in dem Ausdrucke für ϱ erklärt sich daraus, daß e_{rr} positiv oder negativ sein kann), so erhalten wir, indem wir durch alle Endpunkte von ϱ eine Fläche legen, die Verzerrungsfläche im Punkte P des Körpers. Ihre Gleichung wird aus (8) erhalten, indem wir e_{rr} durch ϱ ausdrücken und $\varrho \cos l = \bar{\xi}$, $\varrho \cos m = \bar{\eta}$, $\varrho \cos n = \bar{\zeta}$ setzen, wobei $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ die

laufenden Koordinaten der Fläche vorstellen sollen. Die Gleichung der Verzerrungsfläche ist sonach

$$\pm k^2 = e_{xx} \bar{\xi}^2 + e_{yy} \bar{\eta}^2 + e_{zz} \bar{\zeta}^2 + e_{xy} \bar{\xi} \bar{\eta} + e_{yz} \bar{\eta} \bar{\zeta} + e_{zx} \bar{\zeta} \bar{\xi}, \quad (9)$$

sie hat die Eigenschaft, daß jeder Punkt derselben mit P verbunden, eine Strecke ergibt, deren Zahlenwert verkehrt proportional der Quadratwurzel der Dehnung ist, die der Richtung der Strecke entspricht. Die Verzerrungsfläche ist eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung, deren besondere Gestalt vom vorliegenden Verzerrungszustand abhängig ist. Beispiele werden weiter unten folgen. Legen wir die Achsen der Fläche (9) in die Hauptdeformationsrichtungen α', β', γ' einer unendlich kleinen um P beschriebenen Kugel von Radius r , so nimmt deren Gleichung die Form

$$\pm k^2 = e_1 \alpha'^2 + e_2 \beta'^2 + e_3 \gamma'^2, \quad (9a)$$

da für diese Richtungen die Schiebungen verschwinden und die Dehnungen zu Hauptdehnungen werden. Die reellen oder imaginären Hauptachsen der Fläche (9) bzw. (9a) sind ihrer Größe nach durch

$$a_2 = \frac{k}{\sqrt{\pm e_1}}, \quad b_2 = \frac{k}{\sqrt{\pm e_2}}, \quad c_2 = \frac{k}{\sqrt{\pm e_3}}$$

bestimmt, worin die negativen Zeichen zu nehmen sind, wenn die Hauptdehnungen negativ sind, also Verkürzungen pro Längeneinheit vorstellen.

Wir können nunmehr auch allgemein diskutieren, was für eine Fläche zweiter Ordnung die durch die Gleichung (9a) dargestellte für die verschiedenen Möglichkeiten der Zeichen der Hauptdehnungen ist. Sind e_1, e_2, e_3 gleich bezeichnet, so ist die Verzerrungsfläche ein dreiachsiges Ellipsoid (eventuell ein Rotationsellipsoid oder eine Kugel); das positive Zeichen von k^2 in der zugehörigen Gleichung (9a) ist zu nehmen, wenn die Hauptdehnungen positiv sind, das negative Zeichen von k^2 , wenn die Hauptdehnungen negativ sind. Wenn $e_1 > 0, e_2 < 0, e_3 < 0$ ist und das positive Zeichen für k^2 genommen wird, so erhalten wir ein zweischaliges Hyperboloid, dessen reelle Achse in die Richtung von e_1 fällt; nehmen wir das negative Zeichen von k^2 , so erhalten wir ein einschaliges Hyperboloid, dessen imaginäre Achse mit der Richtung e_1 zusammenfällt; in dem gemeinsamen Asymptotenkegel der genannten Flächen wird die Dehnung zu Null, zur einen Seite dieses Kegels sind die Dehnungen positiv, zur anderen Seite negativ. Offenbar können wir völlig allgemein sagen, daß bei ungleich bezeichneten Hauptdehnungen stets zwei Flächen, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid, für die übersichtliche Darstellung des Dehnungszustandes in der Umgebung eines Punktes herangezogen werden müssen.

7. Bestimmung der Hauptdehnungen aus dem Verzerrungszustand für einen Elementarkörper.

Unter Zuhilfenahme der Gleichung (8) können wir jetzt die Größe der Hauptdehnungen und deren Richtungen vor der Deformation bestimmen. Zu diesem Behufe brauchen wir nur die relativen Extremwerte von e_{rr} , das als Funktion der Kosinuse von l, m, n angesehen wird, unter der Bedingung aufzusuchen, daß

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1 \quad (a)$$

sein muß. Nach bekannten Regeln muß also $e_{rr} - f(\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n - 1)$ ein Extrem werden, d. h. es müssen die Bedingungen

$$\frac{\partial e_{rr}}{\partial(\cos l)} - f \frac{\partial g}{\partial(\cos l)} = 0, \quad \frac{\partial e_{rr}}{\partial(\cos m)} - f \frac{\partial g}{\partial(\cos m)} = 0, \quad \frac{\partial e_{rr}}{\partial(\cos n)} - f \frac{\partial g}{\partial(\cos n)} = 0,$$

erfüllt werden, wenn f ein zu bestimmender Faktor und $g = \cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n - 1$ ist. Führen wir die Bedingungen für das Extrem aus, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} \cos l + \frac{e_{xy}}{2} \cos m + \frac{e_{xz}}{2} \cos n &= f \cos l, \\ \frac{e_{xy}}{2} \cos l + e_{yy} \cos m + \frac{e_{yz}}{2} \cos n &= f \cos m, \\ \frac{e_{xz}}{2} \cos l + \frac{e_{yz}}{2} \cos m + e_{zz} \cos n &= f \cos n. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Wenn wir die erste der erhaltenen Gleichungen (10) mit $\cos l$, die zweite mit $\cos m$, die dritte mit $\cos n$ multiplizieren und addieren, und die Beziehung (8) bzw. die Bedingung (a) beachten, so sehen wir, daß $f = e_{rr}$ gesetzt werden muß. Die Größen $e_{rr} \cos l$, $e_{rr} \cos m$, $e_{rr} \cos n$ stellen die Komponenten in den Richtungen der Achsen x' , y' , z' von Dehnungen in der Richtung r vor. Die Gleichungen (10) im Vereine mit der Bedingung (a) sind 4 Gleichungen, mit den Unbekannten $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ und e_{rr} , für das wir im folgenden kürzer e setzen wollen. Die Gleichungen (10) geben für e nur reelle Auflösungen, wenn die Determinante der in denselben bei den Richtungskosinussen stehenden Koeffizienten verschwindet, d. h.

$$\begin{vmatrix} e_{xx} - e, & \frac{e_{xy}}{2} & \frac{e_{xz}}{2} \\ \frac{e_{xy}}{2} & e_{yy} - e, & \frac{e_{yz}}{2} \\ \frac{e_{xz}}{2} & \frac{e_{yz}}{2} & e_{zz} - e \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

erfüllt ist. Das ist eine Gleichung dritten Grades mit der Unbekannten e zur Bestimmung der 3 Hauptdehnungen e_1, e_2, e_3 , wenn für ein beliebiges unendlich kleines Prisma im Punkte P der Verzerrungszustand gegeben ist. Die Bestimmung der zugehörigen Richtungskosinuse der Achsen erfolgt unter Zuhilfenahme der aus den Gleichungen (10) sich ergebenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{e_{xx} \cos l + \frac{e_{xy}}{2} \cos m + \frac{e_{xz}}{2} \cos n}{\cos l} &= \frac{\frac{e_{xy}}{2} \cos l + e_{yy} \cos m + \frac{e_{yz}}{2} \cos n}{\cos m} \\ &= \frac{\frac{e_{xz}}{2} \cos l + \frac{e_{yz}}{2} \cos m + e_{zz} \cos n}{\cos n} \end{aligned} \quad (11a)$$

bei Einhaltung der Bedingung (a).

(11a) und (a) bestimmen die Richtungen der Achsen des Verschiebungsellipsoides, wenn von der oben angedeuteten, aber als zu weit führend nicht bewiesenen Verdrehung (S. 31) abgesehen wird.

7a. Die Verzerrungsfläche in vektoralgebraischen Zeichen.

Auf die Existenz einer Verzerrungsfläche und deren Gleichung ist sehr einfach vom Standpunkt der Vektoralgebra zu schließen. Mit Rücksicht auf den Punkt 6 und die Gleichung (10) können wir schreiben

$$\begin{aligned} u_1 - u &= r e_{rx} = r e_{rr} \cos l = e_{xx} \xi + \frac{1}{2} e_{xy} \eta + \frac{1}{2} e_{xz} \zeta, \\ v_1 - v &= r e_{ry} = r e_{rr} \cos m = \frac{1}{2} e_{xy} \xi + e_{yy} \eta + \frac{1}{2} e_{yz} \zeta, \\ w_1 - w &= r e_{rz} = r e_{rr} \cos n = \frac{1}{2} e_{xz} \xi + \frac{1}{2} e_{yz} \eta + e_{zz} \zeta, \end{aligned} \quad (12)$$

worin e_{rr} die bezogene Dehnung in der Richtung r und e_{rx} , e_{ry} , e_{rz} deren Projektionen auf die Achsenrichtungen x' , y' , z' bedeuten. Diese Beziehungen sind aber auch in Dyadenform zu schreiben:

$$v_r = \mathcal{A}r, \quad r = i \xi + j \eta + k \zeta. \quad (12a)$$

Dabei bedeuten v_r die Verlängerung in der Richtung r vor der Deformation oder auch eine bezogene Dehnung in der Richtung r , wenn r einen Einheitsvektor vorstellt, und A eine lineare Vektorfunktion, die symbolisch durch

$$A = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2} e_{xy} & \frac{1}{2} e_{xz} \\ \frac{1}{2} e_{xy} & e_{yy} & \frac{1}{2} e_{yz} \\ \frac{1}{2} e_{xz} & \frac{1}{2} e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} \quad (12b)$$

dargestellt wird. A ordnet den Vektor r linear dem Vektor v_r zu und kann offenbar unter dem Bilde einer Fläche zweiter Ordnung, d. i. der Verzerrungsfläche, begriffen werden¹.

8. Zusammenhang der Verzerrungszustände für verschiedene unendlich kleine Prismen in einem Punkte.

Es liegen die Verzerrungskomponenten $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ in einem Punkte P mit Bezug auf ein Koordinatensystem xyz bzw. $x'y'z'$ (Abb. 10) gegeben vor. Es sollen die Verzerrungskomponenten mit Bezug auf ein Koordinatensystem XYZ bestimmt werden, das mit Bezug auf das Koordinatensystem $x'y'z'$ durch die Richtungskosinusse seiner Achsen, und zwar für die X -Richtung durch $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, für die Y -Richtung durch $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ und für die Z -Richtung durch $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ festgelegt erscheint. Es gilt somit

$$\left. \begin{aligned} x' &= X \alpha_x + Y \beta_x + Z \gamma_x, \\ y' &= X \alpha_y + Y \beta_y + Z \gamma_y, \\ z' &= X \alpha_z + Y \beta_z + Z \gamma_z \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

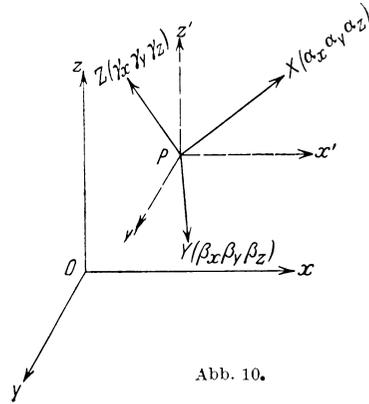


Abb. 10.

als Zusammenhang zwischen den Koordinaten x', y', z' und X, Y, Z . Aus der Gleichung der Verzerrungsfläche (9) (S. 33) erhalten wir durch

Einsetzen der Koordinaten $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$, die jetzt mit x', y', z' bezeichnet sind, mittelst der Transformationsgleichungen (a) und Ordnung nach Potenzen von X, Y, Z die transformierte Gleichung

$$\pm k^2 = \left. \begin{aligned} &X^2 [e_{xx} \alpha_x^2 + e_{yy} \alpha_y^2 + e_{zz} \alpha_z^2 + e_{xy} \alpha_x \alpha_y + e_{yz} \alpha_y \alpha_z + e_{zx} \alpha_z \alpha_x] \\ &+ Y^2 [e_{xx} \beta_x^2 + e_{yy} \beta_y^2 + e_{zz} \beta_z^2 + e_{xy} \beta_x \beta_y + e_{yz} \beta_y \beta_z + e_{zx} \beta_z \beta_x] \\ &+ Z^2 [e_{xx} \gamma_x^2 + e_{yy} \gamma_y^2 + e_{zz} \gamma_z^2 + e_{xy} \gamma_x \gamma_y + e_{yz} \gamma_y \gamma_z + e_{zx} \gamma_z \gamma_x] \\ &+ XY [2 e_{xx} \alpha_x \beta_x + 2 e_{yy} \alpha_y \beta_y + 2 e_{zz} \alpha_z \beta_z + e_{xy} (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) \\ &\quad + e_{yz} (\alpha_y \beta_z + \alpha_z \beta_y) + e_{zx} (\alpha_z \beta_x + \alpha_x \beta_z)] \\ &+ YZ [2 e_{xx} \beta_x \gamma_x + 2 e_{yy} \beta_y \gamma_y + 2 e_{zz} \beta_z \gamma_z + e_{xy} (\beta_x \gamma_y + \beta_y \gamma_x) \\ &\quad + e_{yz} (\beta_y \gamma_z + \beta_z \gamma_y) + e_{zx} (\beta_z \gamma_x + \beta_x \gamma_z)] \\ &+ ZX [2 e_{xx} \gamma_x \alpha_x + 2 e_{yy} \gamma_y \alpha_y + 2 e_{zz} \gamma_z \alpha_z + e_{xy} (\gamma_x \alpha_y + \gamma_y \alpha_x) \\ &\quad + e_{yz} (\gamma_y \alpha_z + \gamma_z \alpha_y) + e_{zx} (\gamma_z \alpha_x + \gamma_x \alpha_z)], \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

¹ Die Beziehungen (12) für die relativen Verschiebungskomponenten sind, weil sie auf der Gleichung (8) aufgebaut sind, nicht so genau wie die Ausdrücke (1) auf S. 11. Daher ist die Dyade (12a) von der Deformationsdyade Φ in Gleichung (3) auf S. 13 verschieden. In letzterer ist noch implizite die jetzt nicht berücksichtigte Verdrehung des Achsensystemes $\alpha'', \beta'', \gamma''$, von der im Punkte 5 (S. 31) die Rede war, enthalten.

Mit Rücksicht auf die für jedes Koordinatensystem gültige Form (9) müssen die in den Klammern stehenden Ausdrücke der Gleichung (9b) die Verzerrungskomponenten mit Bezug auf das Koordinatensystem XYZ vorstellen. Wir erhalten somit als Beziehung zwischen dem Verzerrungszustand, der sich auf das Achsensystem X, Y, Z bezieht, und jenem bezogen auf das Achsensystem $x' y' z'$ die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} e_{XX} &= e_{xx} \alpha_x^2 + e_{yy} \alpha_y^2 + e_{zz} \alpha_z^2 + e_{xy} \alpha_x \alpha_y + e_{yz} \alpha_z \alpha_y + e_{zx} \alpha_x \alpha_z, \\ e_{YY} &= e_{xx} \beta_x^2 + e_{yy} \beta_y^2 + e_{zz} \beta_z^2 + e_{xy} \beta_x \beta_y + e_{yz} \beta_y \beta_z + e_{zx} \beta_z \beta_x, \\ e_{ZZ} &= e_{xx} \gamma_x^2 + e_{yy} \gamma_y^2 + e_{zz} \gamma_z^2 + e_{xy} \gamma_x \gamma_y + e_{yz} \gamma_y \gamma_z + e_{zx} \gamma_z \gamma_x, \\ e_{XY} &= 2 e_{xx} \alpha_x \beta_x + 2 e_{yy} \alpha_y \beta_y + 2 e_{zz} \alpha_z \beta_z + e_{xy} (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) \\ &\quad + e_{yz} (\alpha_y \beta_z + \alpha_z \beta_y) + e_{zx} (\alpha_z \beta_x + \alpha_x \beta_z), \\ e_{YZ} &= 2 e_{xx} \beta_x \gamma_x + 2 e_{yy} \beta_y \gamma_y + 2 e_{zz} \beta_z \gamma_z + e_{xy} (\beta_x \gamma_y + \beta_y \gamma_x) \\ &\quad + e_{yz} (\beta_y \gamma_z + \beta_z \gamma_y) + e_{zx} (\beta_z \gamma_x + \beta_x \gamma_z), \\ e_{ZX} &= 2 e_{xx} \gamma_x \alpha_x + 2 e_{yy} \gamma_y \alpha_y + 2 e_{zz} \gamma_z \alpha_z + e_{xy} (\gamma_x \alpha_y + \gamma_y \alpha_x) \\ &\quad + e_{yz} (\alpha_y \gamma_z + \alpha_z \gamma_y) + e_{zx} (\alpha_z \gamma_x + \alpha_x \gamma_z). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Den Inhalt der Gleichungen (13) können wir so aussprechen: der Verzerrungszustand in einem Punkte eines elastischen Körpers ist gegeben, wenn wir den Verzerrungszustand für ein beliebiges unendlich kleines Prisma kennen. Verlegen wir die Achsen X, Y, Z in die Deformationshauptrichtungen α', β', γ' so muß in (13)

$$e_{XX} = e_1, \quad e_{YY} = e_2, \quad e_{ZZ} = e_3, \quad e_{XY} = 0, \quad e_{YZ} = 0, \quad e_{ZX} = 0$$

gesetzt werden. Wir erhalten somit die Hauptdehnungen e_1, e_2, e_3 in einem Punkte P ausgedrückt durch die Verzerrungskomponenten für ein beliebiges im Punkte P konstruiertes unendlich kleines Prisma aus den drei ersten der folgenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= e_{xx} \alpha_x^2 + e_{yy} \alpha_y^2 + \dots + e_{zx} \alpha_x \alpha_z, \\ e_2 &= e_{xx} \beta_x^2 + e_{yy} \beta_y^2 + \dots + e_{zx} \beta_z \beta_x, \\ e_3 &= e_{xx} \gamma_x^2 + e_{yy} \gamma_y^2 + \dots + e_{zx} \gamma_z \gamma_x, \\ 0 &= 2 e_{xx} \alpha_x \beta_x + 2 e_{yy} \alpha_y \beta_y + \dots + e_{zx} (\alpha_x \beta_x + \alpha_x \beta_z), \\ 0 &= 2 e_{xx} \beta_x \gamma_x + 2 e_{yy} \beta_y \gamma_y + \dots + e_{zx} (\beta_z \gamma_x + \beta_x \gamma_z), \\ 0 &= 2 e_{xx} \gamma_x \alpha_x + 2 e_{yy} \gamma_y \alpha_y + \dots + e_{zx} (\alpha_z \gamma_x + \alpha_x \gamma_z), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

wenn die 9 Richtungskosinusse der Hauptdeformationsrichtungen mit Bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem x', y', z' bekannt sind. Sehen wir sie als unbekannt an, so stellen die Gleichungen (14) 6 Gleichungen mit 12 Unbekannten vor. Die fehlenden 6 Gleichungen folgen aus der Orthogonalität der Achsen X, Y, Z und daraus, daß die Summe der Quadrate der Richtungskosinusse einer vorgegebenen Richtung gleich 1 sein muß. Die zu den Gleichungen (14) hinzu tretenden Bedingungen lauten dann

$$\begin{aligned} \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 &= 1, & \alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z &= 0, \\ \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 &= 1, & \beta_x \gamma_x + \beta_y \gamma_y + \beta_z \gamma_z &= 0, \\ \gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 &= 1, & \gamma_x \alpha_x + \gamma_y \alpha_y + \gamma_z \alpha_z &= 0. \end{aligned} \quad (14a)$$

Die Gleichungen (14) und (14a) sind gleichwertig den Gleichungen (11), (11a) und der Bedingung (a) im Punkte 7.

Wir können auch umgekehrt, um die Größe der Verzerrungskomponenten für ein beliebiges Prisma im Punkte P mit Kanten parallel zu x', y', z' fragen, wenn Größe und Richtung der Hauptdehnungen gegeben sind. In diesem Falle hätten wir von der Gleichung (9a) der Verzerrungsfläche bezogen auf die Hauptachsen, die wir jetzt mit α, β, γ bezeichnen wollen, auszugehen. Dieselbe lautet dann

$$\pm k^2 = e_1 \alpha^2 + e_2 \beta^2 + e_3 \gamma^2.$$

Durch Einsetzen der Werte α, β, γ aus den Transformationsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x' \alpha_x + y' \alpha_y + z' \alpha_z, \\ \beta &= x' \beta_x + y' \beta_y + z' \beta_z, \\ \gamma &= x' \gamma_x + y' \gamma_y + z' \gamma_z \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

in die Gleichung der Verzerrungsfläche erhalten wir letztere in der Gleichungsform (9), und durch Vergleich entsprechender Glieder ergeben sich die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= e_1 \alpha_x^2 + e_2 \beta_x^2 + e_3 \gamma_x^2, & \frac{e_{xy}}{2} &= e_1 \alpha_x \alpha_y + e_2 \beta_x \beta_y + e_3 \gamma_x \gamma_y, \\ e_{yy} &= e_1 \alpha_y^2 + e_2 \beta_y^2 + e_3 \gamma_y^2, & \frac{e_{yz}}{2} &= e_1 \alpha_y \alpha_z + e_2 \beta_y \beta_z + e_3 \gamma_y \gamma_z, \\ e_{zz} &= e_1 \alpha_z^2 + e_2 \beta_z^2 + e_3 \gamma_z^2, & \frac{e_{zx}}{2} &= e_1 \alpha_z \alpha_x + e_2 \beta_z \beta_x + e_3 \gamma_z \gamma_x. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(15) besagt, daß der Verzerrungszustand in einem Punkte eines elastischen Körpers für ein beliebiges Prisma gegeben ist, wenn wir die Hauptdehnungen ihrer Größe und Richtung nach für den betreffenden Punkt kennen; oder die Art eines Verzerrungszustandes (S. 15) ist durch die Zeichen und das Verhältnis der Zahlenwerte der Hauptdehnungen, die Größe des Verzerrungszustandes bei gegebener Art desselben durch den Zahlenwert einer Hauptdehnung festgelegt.

Es sei der folgende Fall einer Berechnung unterzogen. Ein dem System x', y', z' zugeordnetes ∞ kleines Prisma erleide eine Verzerrung derart, daß nur e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} und e_{xy} von Null verschieden sind. Das entspricht einer Verzerrung, wie sie beim sogenannten ebenen Spannungszustand (S. 57) vorkommt. Für irgend ein unendlich kleines Prisma, das durch Drehung um die z' -Achse aus dem gegebenen Prisma erhalten wird, existieren dann ebenfalls nur die Verzerrungskomponenten e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} und e_{xy} . Für das Koordinatensystem XYZ gilt nämlich (Abb. 11) dann, wenn der Winkel, den die X -Achse mit der x' -Achse in der $x'y'$ -Ebene einschließt, mit φ bezeichnet wird, zufolge der Gleichungen (13)

$$\begin{aligned} e_{xx} &= e_{xx} \cos^2 \varphi + e_{yy} \sin^2 \varphi + e_{xy} \cos \varphi \sin \varphi, \\ e_{yy} &= e_{xx} \sin^2 \varphi + e_{yy} \cos^2 \varphi - e_{xy} \cos \varphi \sin \varphi, \\ e_{zz} &= e_{zz}, \\ e_{xy} &= (e_{yy} - e_{xx}) \sin 2\varphi + e_{xy} \cos 2\varphi, \\ e_{yz} &= e_{zx} = 0, \end{aligned}$$

da jetzt

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \cos \varphi & \alpha_y &= \sin \varphi & \alpha_z &= 0, \\ \beta_x &= -\sin \varphi & \beta_y &= \cos \varphi & \beta_z &= 0, \\ \gamma_x &= 0 & \gamma_y &= 0 & \gamma_z &= 1. \end{aligned}$$

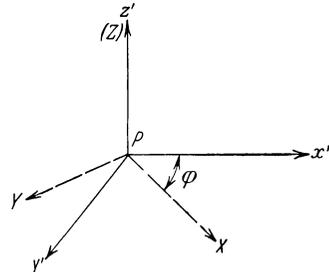


Abb. 11.

Fragen wir uns, für welchen Winkel φ der Wert e_{xy} ein Extremwert wird, d. h., welches unter den genannten Prismen die größte Schiebung parallel zur $x'y'$ -Ebene erfährt, so folgt die Antwort natürlich aus einer Extremwert-Bestimmung von e_{xy} mit φ als Variabler, d. h. es muß

$$\frac{\partial e_{xy}}{\partial \varphi} = 0 = 2(e_{yy} - e_{xx}) \cos 2\varphi - 2e_{xy} \sin 2\varphi,$$

oder

$$\cotg 2\varphi = \frac{e_{xy}}{e_{yy} - e_{xx}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}}.$$

Demgemäß existieren 2 aufeinander normale Flächenelemente, deren Richtungsnormalen aus der zuletzt abgeleiteten Gleichung bestimmbar sind, für welche die Schiebungen extreme Werte erlangen.

9. Raumänderung eines Elementarkörpers. Kubische Dilatation.

Wir fragen uns um die Änderung des Volumens eines unendlich kleinen rechtwinkligen Prismas, dessen Kanten von der Größe ξ, η, ζ parallel sind zu den Achsen x, y, z und das vor der Verformung rechtwinklig ist. Das Volumen des Prismas ist vor der Verformung durch $v = \xi\eta\zeta$ gegeben; nach der Verformung sind die Vektoren $i\xi, j\eta, f\zeta$ in die Vektoren

$$a = i\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\xi + j\frac{\partial v}{\partial x}\xi + f\frac{\partial w}{\partial x}\xi,$$

$$b = i\frac{\partial u}{\partial y}\eta + j\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\eta + f\frac{\partial w}{\partial y}\eta,$$

$$c = i\frac{\partial u}{\partial z}\zeta + j\frac{\partial v}{\partial z}\zeta + f\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\zeta$$

übergegangen [Gleichung (2c), S. 12]. Das Volumen v_1 nach der Deformation ist nach einer bekannten Formel als skalares Produkt zwischen dem Vektor a und dem Vektorprodukt $b \times c$ darstellbar, d. h. es muß sein:

$$v_1 = a \cdot (b \times c) = \xi\eta\zeta \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right), & \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y}, & \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right), & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z}, & \frac{\partial v}{\partial z}, & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Berücksichtigen wir nur Glieder vierter Kleinheitsordnung, so ergibt sich

$$v_1 = \xi\eta\zeta \left[1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] = \xi\eta\zeta(1 + e),$$

wenn $e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ gesetzt wird. Die Änderung des Volumens pro Volumeneinheit ist durch

$$\frac{v_1 - v}{v} = e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \delta, \quad (16)$$

d. h. als Summe der drei Dehnungen (Quetschungen) e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} in 3 aufeinander normalen Richtungen, oder wie man sich in der Vektoralgebra auch auszudrücken pflegt, als „Divergenz“ des Verschiebungsvektors δ gegeben. Die Größe e heißt kubische Dilatation und ist eine Funktion der Koordinaten x, y, z , in kinetischen Fällen auch der Zeit. Aus den ersten drei Gleichungen (14) folgt durch Addition, wenn man beachtet, daß für das Koordinatensystem x', y', z' 6 Gleichungen von der Form (14a) erfüllt sein müssen, daß die Raumdilatation invariant, d. h. unabhängig von der Wahl des Koordinatensystemes, also für jedes beliebige an den Punkt P ankonstruierte unendlich kleine Prisma dieselbe ist.

10. Anwendungen auf häufig vorkommende Beanspruchungsarten.

Wir wollen 2 besondere Arten von inneren Beanspruchungen, die in der Technik häufig vorkommen, einer näheren Betrachtung vom Standpunkte der ihnen zugeordneten Kinematik unterziehen.

a) Beanspruchung auf Zug oder Druck eines geraden Stabes. Infolge der Beanspruchung eines Stabes auf Zug oder Druck, welche den einfachen Spannungszuständen nach Abb. 6a (S. 19) entsprechen, erleidet ein beliebiges unendlich kleines Prisma, welches parallel zur Stabachse herausgeschnitten gedacht ist (bezüglich Koordinatensystem und Festlegung des einen Stabendes s. S. 15ff.), einen Verzerrungszustand, der für die Druckbeanspruchung (Kanten parallel zur Druckrichtung werden verkürzt, jene normal zur Druckrichtung werden verlängert) entgegengesetzt bezeichnete Verzerrungskomponenten im Vergleich zu jenen für die Zugbeanspruchung auf S. 16 beschriebenen zeigt. Ein beliebiges Prisma nach der Deformation ist gegenüber jenem vor der Deformation parallel und normal zur Stabachse verschoben. Die zur Stabachse normale Verschiebung erfolgt bei der Zugbeanspruchung zur Stabachse hin, bei der Druckbeanspruchung von der Stabachse weg. Die Prismen in der Stabachse erleiden nur eine Parallelverschiebung, jene, die der festen Endfläche angehören, nur eine Verschiebung normal zur Stabachse. Die Deformationshauptrichtungen fallen in die Kantenrichtungen des Prismas hinein, da keine Schiebungen vorhanden sind. Die Hauptdehnung, welche den Kanten parallel zur Stabachse entspricht, heiße e_1 , die Hauptdehnungen der zur Stabachse normalen Kanten seien e_2 und e_3 genannt. Aus Symmetriegründen muß $e_2 = e_3$ sein (man denke sich statt des Prismas eine um P beschriebene unendlich kleine Kugel). Da der Verzerrungszustand ein homogener im ganzen Bereiche des Stabes (S. 16) ist, ist das Verschiebungsellipsoid in allen Punkten je ein Rotationsellipsoid, mit denselben Größen der Achsen und der Rotationsachse parallel zur Stabachse. Wie wir später noch genau besprechen werden, besteht für viele Stoffe zwischen der Dehnung in der Zugrichtung und den Quetschungen normal hierzu, ein aus der Erfahrung durch Messung sich ergebender Zusammenhang, derart, daß $e_2 = e_3 = -\frac{1}{m}e_1$, wobei der positive Zahlenwert m von der Art des Stoffes abhängig ist und z. B. für Metalle gleich $\frac{10}{3}$ gesetzt werden kann (S. 83). Machen wir von diesem Naturgesetz Gebrauch, so hat das Verschiebungsellipsoid, in welches eine um P beschriebene Kugel a von unendlich kleinem Radius r übergeht, zufolge (5d) auf S. 31 die Gleichung

$$1 = \frac{\alpha''^2}{r^2(1+e_1)^2} + \frac{\beta''^2 + \gamma''^2}{r^2\left(1 - \frac{e_1}{m}\right)}.$$

In Abb. 12 ist das Verschiebungsellipsoid E für den Fall der Beanspruchung auf Zug gezeichnet.

Die Verzerrungsfläche [(9a), S. 33] bezogen auf die Hauptrichtungen hat nach dem Gesagten die Gleichung

$$\pm k^2 = e_1 x'^2 - (y'^2 + z'^2) \frac{e_1}{m}.$$

Für die Darstellung dieser Gleichung wollen wir eine Druckbeanspruchung zugrunde legen (e_1 negativ). Die Verzerrungsfläche besteht dann aus einem einschaligen und einem zweischaligen Rotationshyperboloid A , bzw. B (Abb. 13), deren Rotationsachsen in die x -Richtung fallen, mit gemeinsamem Asymptoten-

kegel C . Nehmen wir zunächst auf der linken Seite der letzten Gleichung das positive Zeichen, so erhalten wir das einschalige Hyperboloid A . Der Schnitt mit der $y'z'$ -Ebene ist ein Kreis mit dem Radius $k\sqrt{\frac{m}{-e_1}} = Pb = Pa$. Die Schnitte

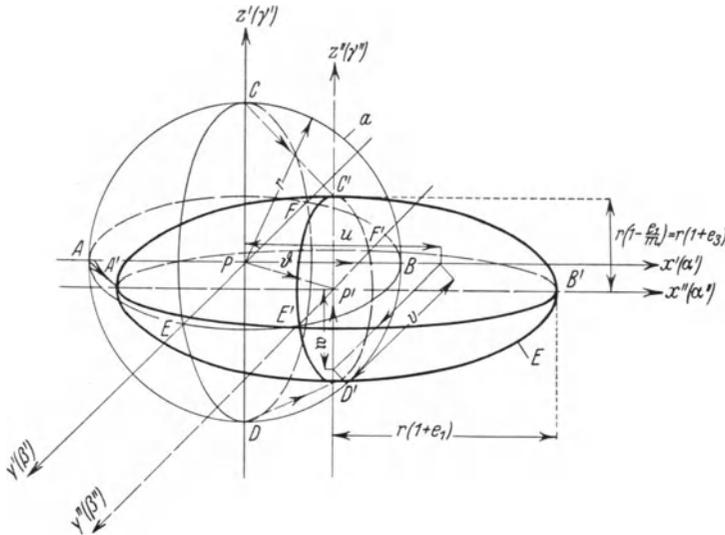


Abb. 12.

mit der $x'z'$ -Ebene bzw. der $x'y'$ -Ebene sind Hyperbeln h, h' mit den Halbachsen $\frac{k}{\sqrt{-e_1}}$ und $k\sqrt{\frac{m}{-e_1}}$, aus deren Größenverhältnis die Richtungen der Asymptoten folgen. In den Richtungen der Erzeugenden des Asymptotenkegels C sind die

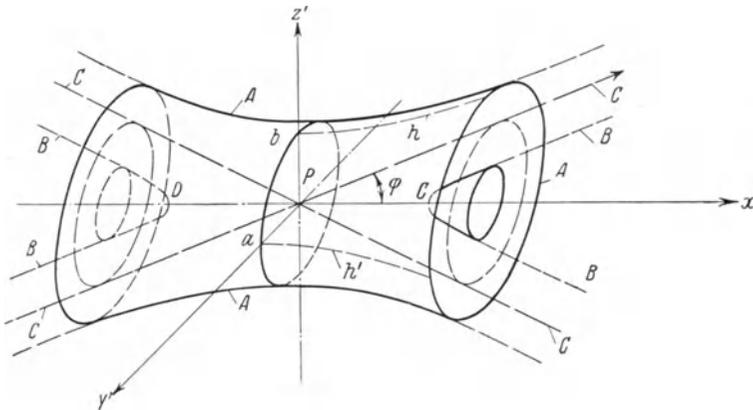


Abb. 13.

Dehnungen Null, da dann ϱ unendlich groß wird ($\varrho^2 = \pm \frac{k^2}{e_{rr}}$, S. 32). Die größten positiven Dehnungen ($e_2 = e_3$) sind in den Richtungen der Radien des Schnittkreises des Hyperboloides mit der $y'z'$ -Ebene vorhanden, da dort ϱ am kleinsten wird. Von diesem Kreis aus nehmen die Dehnungen gegen den Asymptotenkegel ab, um in den Richtungen der Erzeugenden dieses Kegels zu verschwinden. Über den Asymptotenkegel hinaus werden die Dehnungen negativ.

Für die negativen Dehnungen muß k^2 auf der linken Seite der obigen Gleichung mit negativem Zeichen versehen werden, wir erhalten dann ein zweites, zweischaliges Rotationshyperboloid B , dessen Schnitte mit der $x'z'$ - bzw. $x'y'$ -Ebene Hyperbeln mit denselben Größen der Halbachsen wie beim einschaligen Hyperboloid sind, nur sind imaginäre und reelle Achsen miteinander vertauscht. Der Asymptotenkegel ist der gleiche wie früher. Die reelle Halbachse dieses Hyperboloides $PC = PD = \frac{k}{\sqrt{-e_1}}$ entspricht der dem Zahlenwerte nach größten Quetschung e_1 . Von dieser Achse gegen den gemeinsamen Asymptotenkegel C nehmen die Quetschungen dem Zahlenwerte nach ab, um in demselben Null zu werden. Der Asymptotenkegel C heißt auch der Schiebungskegel, weil in ihm für unendlich kleine Prismen mit Kanten parallel zu den Erzeugenden dieses Kegels nur Schiebungen aber keine Längenänderungen seiner Kanten auftreten. Die Schiebungen im Asymptotenkegel sind mit Hilfe der Gleichungen (15) berechenbar. Dabei ist nur zu beachten, daß jetzt $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ die Richtungskosinusse vorstellen, welche die in die $x'z'$ -Ebene der Abb. 13 hineinfallende Erzeugende des Asymptotenkegels mit der x' -Achse einschließt. $\beta_x, \beta_y, \beta_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ beziehen sich auf die Richtungskosinusse der Achse y' selbst in bezug auf das Koordinatensystem $x'y'z'$ bzw. auf eine Achse, die in der $x'z'$ -Ebene normal auf der genannten Erzeugenden steht. Sämtliche Richtungskosinusse sind entweder durch einen Winkel φ ausdrückbar, oder sie verschwinden, oder werden gleich eins (siehe das Beispiel auf S. 37). Praktisch von Wichtigkeit ist die Berechnung der Längenänderungen von endlichen dem Stab angehörigen geraden Strecken, die bei Kenntnis der Größe einer der Hauptdehnungen auf eine einfache Integration hinausläuft. So sind z. B. die Längenänderungen der Kanten eines auf Zug beanspruchten prismatischen Stabes unter der Voraussetzung der Festlegung der einen Endquerschnittsfläche nach S. 15ff. durch

$$\Delta l_1 = \int_0^{e_1} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{\partial u}{\partial x} l_1 = e_1 l_1, \quad \Delta l_2 = \frac{\partial v}{\partial y} l_2 = e_2 l_2 = -\frac{e_1 l_2}{m}, \quad \Delta l_3 = e_3 l_3 = -\frac{e_1 l_3}{m}$$

gegeben, wenn l_1, l_2, l_3 die Kantenlängen sind, $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ deren Längenänderungen vorstellen. Die Verlängerungen pro Längeneinheit der Kanten $\frac{\Delta l_1}{l_1}$ usw. sind natürlich, da homogene Deformation des ganzen Stabes vorliegt, den bezogenen Dehnungen (Quetschungen) in einem beliebigen Punkt des Stabes gleich.

In ähnlicher Weise kann gefunden werden, daß ein auf Zug beanspruchter Stab mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius r nach der Deformation einen Radius $r_1 = r \left(1 - \frac{e_1}{m}\right)$ besitzt. Wählen wir bei Beanspruchung auf Zug oder Druck in einem Punkte P ein unendlich kleines Prisma, dessen Kanten nicht parallel zu den Hauptrichtungen sind, so ergeben sich die diesem Prisma entsprechenden 6 Verzerrungskomponenten gleichfalls mit Hilfe der Gleichungen (15). Die Ausführung der diesbezüglichen Rechnung wird dem Leser überlassen.

Die kubische Dilatation in einem Punkte eines auf Zug (Druck) beanspruchten Stabes ist zufolge der Definition auf Seite 38 [Gleichung (16)]

$$e = e_1 + 2e_2 = e_1 - \frac{2e_1}{m} = e_1 \frac{m-2}{m} = \frac{\Delta l_1}{e_1} \cdot \frac{m-2}{m}$$

im ganzen Bereiche des Stabes konstant und gleich der auf die Volumeneinheit bezogenen Volumenänderung des ganzen Stabes.

b) Reiner Schub. Der Spannungszustand im Falle reinen Schubes in einem Punkte eines elastischen festen Körpers ist durch Abb. 14 versinnbildlicht: Für ein bestimmtes in einem Punkte P herausgeschnittenes unendlich kleines Prisma sind nur Schubspannungen parallel zu einer Prismenebene vorhanden. Das stark ausgezogene schiefwinkelige Prisma hat nur Schubspannungen parallel zur Ebene $x'z'$ auszuhalten. Es könnte der Sachverhalt auch so dargestellt werden, daß die Schubspannungen in dem schwach ausgezogenen rechtwinkligen Prisma eingezeichnet würden, dem dann vor der Deformation ein schiefwinkeliges entspräche. Jedenfalls aber ist das Prisma entsprechend der Größe der Schubspannungen verzerrt. Die Schubspannungskomponenten müßten auf Grund unserer Bezeichnungsweisen Z_x und X_z bzw. Z'_x, X'_z oder $\tau_{zx}, \tau_{xz}, \tau'_{zx}, \tau'_{xz}$ genannt werden. Wie wir später sehen werden, tritt in einem solchen Falle für das herausgewählte Prisma bei bestimmter Voraussetzung über die Art des Stoffes nur eine einzige Verzerrungskomponente $e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$, also eine

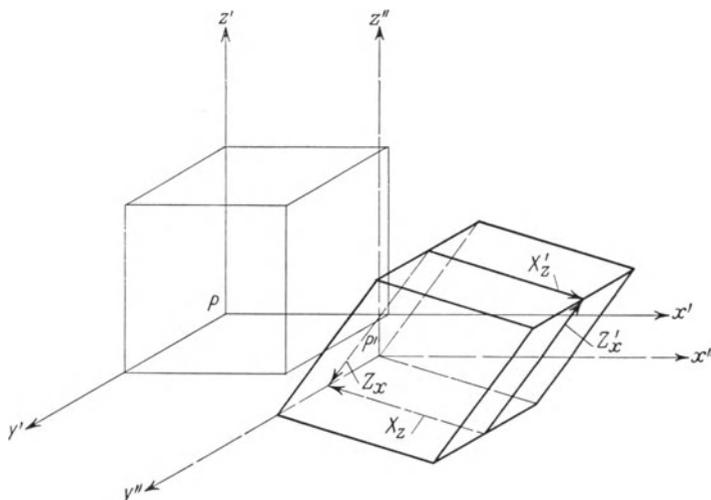


Abb. 14.

Schiebung (Winkeländerung) parallel zur $x'z'$ -Ebene ein, die übrigen Verzerrungskomponenten verschwinden; da die Raumdilatation zufolge Gleichung (16) jetzt verschwindet, erleidet das Prisma eine bloße Gestaltsänderung. Die Verschiebungen erfolgen derart, daß die Ebenen des Prismas, welche parallel zur $x'z'$ -Ebene sind, parallel zu dieser Ebene bleiben. Es muß also $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ erfüllt sein, woraus wegen $e_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ und $e_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ auch $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ folgt.

Mit Rücksicht auf die Gleichung (1), S. 11 ergeben sich die relativen Verschiebungskomponenten mit

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial z} \zeta, \quad v_1 - v = 0, \quad \text{d. h.} \quad v_1 = v, \quad w_1 - w = \frac{\partial w}{\partial x} \xi.$$

Die Determinante für die Bestimmung der Größe der Hauptdehnungen lautet nach (11), S. 34

$$\begin{vmatrix} -e & 0 & \frac{e_{xz}}{2} \\ 0 & -e & 0 \\ \frac{e_{xz}}{2} & 0 & -e \end{vmatrix} = 0, \quad \text{d. h.} \quad -e^3 + \frac{e_{xz}^2}{4}e = 0,$$

woraus $e_2 = 0$ und $e_{1,3} = \pm \frac{e_{xz}}{2}$ folgt. In der Beziehung für $e_{1,3}$ soll das positive Zeichen der Hauptdehnung e_1 zugeordnet sein. Es ist demnach eine Hauptdehnung gleich Null, die beiden anderen Hauptdehnungen sind zahlenmäßig gleich, dem Zeichen nach verschieden (Dehnung und Quetschung). Die Richtung der Hauptdehnungen wird aus (11a) bei Einhaltung der Bedingung (a), S. 33 leicht gefunden. Es muß sein

$$\cos n \cos m = 0, \quad \cos l \cos m = 0, \quad \cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1,$$

woraus die Lösungen

$$\begin{aligned} \cos l_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{2}, & \cos l_2 &= 0, & \cos l_3 &= -\frac{1}{2} \sqrt{2}, \\ \cos m_1 &= 0, & \cos m_2 &= 1, & \cos m_3 &= 0, \\ \cos n_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{2}, & \cos n_2 &= 0, & \cos n_3 &= \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

folgen. Das heißt die zwei Hauptdehnungen e_1, e_3 liegen in der Ebene $x'z'$ (wenn wir wollen, in der Ebene $x''z''$) unter 45° bzw. 135° zur x' -Achse geneigt. Die Verzerrungsfläche wird jetzt durch zwei hyperbolische Zylinder vorgestellt, deren Erzeugende normal zur $x'z'$ -Ebene stehen, und deren Projektionen auf diese Ebene zwei gleichseitige Hyperbeln sind. Sie hat entsprechend der Gleichung (9a), S. 33 die Gleichung

$$\pm k^2 = e_1 \alpha'^2 + e_3 \gamma'^2 = \frac{e_{xz}}{2} (\alpha'^2 - \gamma'^2).$$

Dem positiven Zeichen links entspricht eine Hyperbel mit den Größen der Halbachsen gleich $a_1 = c_1 = \frac{k}{\sqrt{\frac{e_{xz}}{2}}}$, wobei e_1 mit der reellen Achse zusammenfällt;

dem negativen Zeichen entsprechen dieselben Achsen einer Hyperbel, welche gegen die erstgenannte um 90° verdreht, und deren reelle Achse mit e_3 zusammenfällt. Auf Grund der Gleichungen (15) können die Verzerrungskomponenten für ein beliebiges Prisma ermittelt werden, wenn die Hauptdehnungen gegeben sind. Die Gleichung des Verschiebungsellipsoides ist auf die Hauptachsen bezogen

$$r^2 = (1 - e_{xy}) \alpha''^2 + \beta''^2 + (1 + e_{xy}) \gamma''^2$$

mit den Achsen

$$a = r \left(1 + \frac{e_{xy}}{2}\right), \quad b = r, \quad c = r \left(1 - \frac{e_{xy}}{2}\right),$$

d. h. die Radien der Kugel a (S. 26) erfahren normal zur $x'z'$ -Ebene keine Veränderung.

11. Verträglichkeits- oder Kompatibilitätsbedingungen.

Die Verzerrungskomponenten sind im allgemeinen wie bereits wiederholt angegeben, als stetige differenzierbare Funktionen der Koordinaten x, y, z anzusehen. Es ist klar, daß nicht beliebige 6 Funktionen von x, y, z für die 6 Verzerrungskomponenten angenommen werden können, die zu einem möglichen Ver-

verzerrungszustand des ganzen Körpers gehören sollen. Dieselben müssen vielmehr der Bedingung genügen, daß für sie eine kontinuierliche, von Punkt zu Punkt stetig sich ändernde Verformung der unendlich vielen rechtwinkligen unendlich kleinen Prismen, in welche ich mir den ganzen Körper zerlegt denken kann, eintritt, oder mit anderen Worten, die Prismen, welche sich vor der Deformation stetig aneinanderschließen, sollen sich auch nach der Deformation stetig aneinanderschließen. Die Bedingungen, welche die Verzerrungskomponenten zu diesem Behufe erfüllen müssen, heißen die Kompatibilitäts- oder Verträglichkeitsbedingungen. Zu ihrer Herleitung wird von den Beziehungen (6) und (7) (Seite 29ff.) ausgegangen. Aus ihnen erhalten wir durch leicht ersichtliche Differentiationen

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2},$$

woraus

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

folgt. In ähnlicher Weise ergeben sich

Ferner ergibt sich durch Differentiation der ersten der Beziehungen (6) und der drei Beziehungen (7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, & \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z}, \\ \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}. \end{aligned}$$

Durch Addition des zweiten und vierten dieser Ausdrücke und nachheriger Subtraktion des zweiten Ausdrucks von der erhaltenen Summe ergibt sich der doppelte erste Ausdruck, d. h.

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right), \\ \text{Ähnlich werden die Bedingungen} \\ 2 \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right), \\ 2 \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17b)$$

abgeleitet. Die Gleichungen (17a) und (17b) stellen die Bedingungen für die Verträglichkeit der 6 Verzerrungskomponenten vor.

Es liege der in Abb. 15 dargestellte Holzbalken von rechteckigem Querschnitt, dessen Seiten b , h sein sollen, vor, der durch 2 in einer Ebene liegende Einzelkräfte P_1 und P_2 derart belastet ist, daß die Kraftebene die Querschnitte in einer Trägheitshauptachse des Schwerpunktes schneidet. Wie wir im praktischen Teile noch entwickeln werden, nimmt die technische Annäherungstheorie in diesem Falle eine innere Beanspruchung auf Biegung und ebenen Schub an. Der Spannungszustand, der bei einer solchen Beanspruchung in einem parallel zu den Koordinatenachsen x , y , z herausgeschnittenen unendlich kleinen Prisma ent-

steht, wird aus dem in Abb. 6 b, S. 19 dargestellten erhalten, wenn man dort die Spannungen Y_x, Y'_x, X_y, X'_y weg läßt; Z_x und Z'_x sind parallel zu den äußeren Kräften. Auf Grund von Näherungsrechnungen erhält man die zur Stabachse parallele Dehnung, welche der Spannung X_x entspricht, mit $e_{xx} = \frac{M_B}{E J_y} z$ und die der Schubspannung Z_x entsprechende

Schiebung mit $e_{xz} = \frac{S Q}{G b J_y}$. In diesen Formeln ist M_B das Biegemoment für einen Querschnitt in der beliebigen Entfernung x vom linken Auflager, J_y das Trägheitsmoment des Rechteckes mit Bezug auf die y -Achse, S das statische Moment der schraffierten Rechteckfläche, deren Begrenzung durch den variablen Abstand z festgelegt ist, Q die Querkraft in der Entfernung x vom linken Auflager, E, G bedeuten sogenannte Stoffkonstante, die dem Stoffe, aus welchem der Balken besteht, entsprechende Werte annehmen. Es ist demnach

$$M_B = f_1(x), \quad S = f_2(z), \quad Q = f_3(z),$$

worin f_1, f_2, f_3 Funktionszeichen sind. e_{xx} und e_{xz} sind somit als Funktionen von x, z festgelegt. Für diese Annahmen sind von den Bedingungen (17 a), (17 b) sämtliche mit Ausnahme der dritten identisch erfüllt, welche fordert, daß $\frac{\partial f_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$ ist, woraus, da seiner Bedeutung nach $\frac{\partial f_2}{\partial z}$ nicht gleich Null sein kann, $\frac{\partial f_3}{\partial x} = 0$ folgt, d. h. die Querkraft müßte konstant sein. Bei Belastung mit Einzelkräften nach Abb. 15 ist diese Bedingung auch für

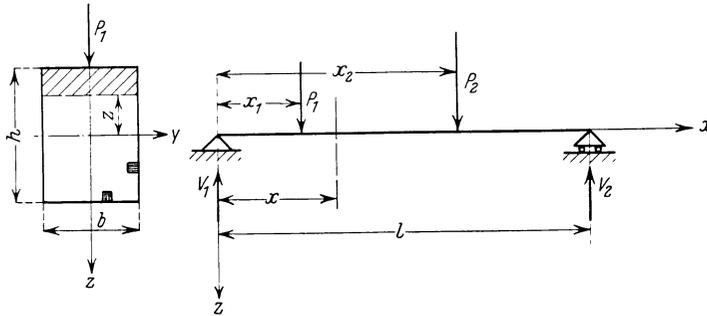


Abb. 15.

alle Querschnitte erfüllt mit Ausnahme jener, die den äußeren Lasten P_1, P_2 und den Auflagerkräften entsprechen, wo die Querkräfte einen endlichen Sprung erleiden. Würde der Balken gleichförmig über seine ganze Länge belastet sein (q kg pro laufenden Meter), so könnte die Bedingung $\frac{\partial f_3}{\partial x} = 0$ nicht erfüllt werden, da dann, weil $Q = \frac{q l}{2} - q x, \frac{\partial f_3}{\partial x} = -q$ ist. Für Einzelkräfte als Belastung des Balkens könnte man sonach die Resultate jener Näherungstheorie für Stellen des Balkens, die nicht in der Nähe von Kraftangriffsstellen liegen, gelten lassen, wenn man für die Zulässigkeit dieser Näherungstheorie die Bedingung stellt, daß die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sein müssen; für gleichförmig belastete Balken wäre die genannte Näherungstheorie vom gleichen Standpunkte aus gesehen nicht zulässig, außer dann, wenn der Balken mit einer unendlich kleinen Höhe h versehen ist, denn dann wäre $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$. Praktisch hieße das, jene Näherungstheorie wäre vom Standpunkte der notwendigen Erfüllung der Verträglichkeitsbedingungen auch für gleichförmig belastete Balken noch zulässig, wenn ihre Höhe parallel zur Krafrichtung gering ist. Auf Grund des De Saint Venantschen Prinzipes (S. 20 ff.) müßte aber sowohl bei Belastung des Balkens durch Einzelkräfte als auch bei gleichförmig verteilter Belastung desselben gefordert werden, daß die Breite und Höhe des Balkens im Verhältnis zur Länge desselben gering ist.

12. Verschiebungs- und Verformungsgeschwindigkeit, Verschiebungs- und Verformungsbeschleunigung.

Im Falle eines irgendwie in der Zeit bewegten elastischen festen Körpers (siehe das Schubkurbelgetriebe der Abb. 2, S. 4) können die in den Punkten 2 bis 11

gegebenen Erörterungen ebenfalls angewendet werden, wenn die Koordinaten x, y, z auf eine bestimmte Zeit t und auf den bewegten starren Körper bezogen werden, ferner die sehr klein vorausgesetzten Verschiebungskomponenten u, v, w , als Funktionen von x, y, z und der Zeit betrachtet, die Komponenten der ganzen elastischen Bewegung mit Bezug auf den starren Körper in der Lage, welche er zur Zeit t besitzt, bedeuten (S. 10). Man kann bei diesen Voraussetzungen z. B. von einem Verschiebungselipsoid, einer Verzerrungsfläche zur Zeit t sprechen usw.

Da sich u, v, w jetzt mit der Zeit ändern, so existieren auch sogenannte Verschiebungsgeschwindigkeiten und Verschiebungsbeschleunigungen. Die Verschiebungsgeschwindigkeit in einem Punkte P des elastischen Körpers kann in der üblichen Weise durch

$$\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} = \mathfrak{i} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{j} \frac{\partial v}{\partial t} + \mathfrak{k} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (18)$$

die Verschiebungsbeschleunigung durch

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{b}}{\partial t^2} = \mathfrak{i} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathfrak{j} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mathfrak{k} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (18a)$$

definiert werden. $\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t}$ und $\frac{\partial^2 \mathfrak{b}}{\partial t^2}$ stellen die totale Verschiebungsgeschwindigkeit bzw. totale Verschiebungsbeschleunigung zur Zeit t in einem Punkte P des elastischen festen Körpers vor. Die Größen

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

heißen die Komponenten der Verschiebungsgeschwindigkeit bzw. Verschiebungsbeschleunigung mit Bezug auf das mit dem erstarrt gedachten Körper fest verbundene Koordinatensystem x, y, z zur Zeit t im betrachteten Punkte P des elastischen Körpers. Die totale Verschiebungsgeschwindigkeit und Verschiebungsbeschleunigung samt deren Komponenten sind selbst wieder als Funktionen von x, y, z und der Zeit t anzusehen¹. Wenn u, v, w mit der Zeit variabel sind, so trifft das auch für die Verzerrungskomponenten zu. Demzufolge existieren dann Komponenten der Verformungsgeschwindigkeit bzw. Verformungsbeschleunigung. Erstere sind durch

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e_{xx}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, & \frac{\partial e_{yy}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}, & \frac{\partial e_{zz}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t}, \\ \frac{\partial e_{xy}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}, & \frac{\partial e_{yz}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}, & \frac{\partial e_{zx}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \end{aligned} \right\} (19)$$

darstellbar, letztere aus diesen durch nochmalige Differentiation nach der Zeit abzuleiten.

Übrigens spielt insbesondere die Verformungsgeschwindigkeit auch für elastische feste Körper eine Rolle, die unter dem Einflusse äußerer Kräfte stehen und zur Zeit, wo die Kräfte ihren Endwert erreicht haben, zur Ruhe kommen (elastisches Gleichgewicht) oder dann zerstört werden (Bruch). Bevor der Ruhezustand resp. der Bruch eintritt, ändern sich die Größen u, v, w in der Zeit und man kann infolgedessen von einer Verformungsgeschwindigkeit sprechen. Es hat sich gezeigt, daß das Verhalten vieler elastischer Stoffe von dieser Verformungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit steht.

Es soll hierzu ein Beispiel gegeben werden. Ein Stab aus Zink sei auf Zug beansprucht. Die Verformungsgeschwindigkeit in der Richtung der Achse des Stabes ist hier offenbar proportional der Geschwindigkeit, mit der eine Verlängerung des Stabes eintritt. Wird diese

¹ Siehe hierzu auch Elastokinetik, S. 197, Punkt 1.

Verformungsgeschwindigkeit $\frac{\partial e_{xx}}{\partial t}$ in der Richtung des Stabes während einer gegebenen Zeit größer als ein kleiner Wert $\left(\frac{\partial e_{xx}}{\partial t}\right)_0$, so sind die in dem gegebenen Bereich der äußeren Zugkraft zugeordneten Verlängerungen erfahrungsgemäß kleiner als sie wären, wenn die Verformungsgeschwindigkeit kleiner als $\left(\frac{\partial e_{xx}}{\partial t}\right)_0$ wäre; da mit der Größe der Verlängerung die Bruchgefahr wächst, so ergibt sich das merkwürdige durch die Erfahrung bestätigte Resultat, daß die Zugfestigkeit des Zinkstabes bei wachsender Verformungsgeschwindigkeit wächst.

IV. Lehre vom Gleichgewicht der elastischen festen Körper. Elastostatik.

1. Problemstellung.

Zu dem auf den Seiten 5 und 26 bezüglich des Gleichgewichtsproblems Gesagten machen wir zunächst den Zusatz, daß sich bis auf weiteres die folgenden Untersuchungen auf sogenannte stabile Gleichgewichtszustände beziehen d. h. solche, für welche einer gegebenen äußeren Belastung ein Verschiebungs- und Verzerrungszustand des ganzen Körpers eindeutig zugeordnet ist. Die Erfahrung lehrt, daß bei Zugbeanspruchung eines Bleistabes dann, wenn die Zugkraft einmal einen bestimmten Wert erlangt hat, keine weitere Steigerung dieser Kraft nötig ist, um die Verlängerung, welche der Stab bereits erfahren hat, zu vergrößern; es wird diese Erscheinung, welche als „Fließen“ bezeichnet wird, so gedeutet, daß man sich vorstellt, der Stab befinde sich dann in labiler Gleichgewichtslage, aus der er einer stabilen Gleichgewichtslage zustrebt.

Zunächst sollen die Bedingungen für das Gleichgewicht eines elastischen festen Körpers aufgestellt werden. Hierauf wird auf die Zuordnung des Spannungszustandes zum Verschiebungs- und Verzerrungszustand eingegangen werden und schließlich die Frage nach dem einem gegebenen äußeren Kraftsystem im Gleichgewichtsfalle entsprechenden Spannungs-, Verschiebungs- und Verzerrungszustande des Körpers gestellt.

2. Notwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingungen.

Denken wir uns den deformierten im Gleichgewicht befindlichen festen Körper erstarrt bei ungeänderten äußeren Kräften, so kann eine Änderung des Gleichgewichtszustandes nicht eintreten. So besagt ein weiter nicht zu beweisendes Prinzip, das Erstarrungsprinzip. Sehen wir dieses als richtig an, so können wir sagen: Es ist ein notwendiges Erfordernis, daß die an einem festen elastischen Körper sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, die für den starren Körper gültig sind. Jenes Erfordernis ist aber für das Gleichgewicht des elastischen Körpers nicht hinreichend, weil das linienflüchtige Kraftsystem am starren Körper nicht gleichwertig ist dem gebundenen Kraftsystem des entsprechenden elastischen festen Körpers und infolgedessen die Erfüllung des genannten notwendigen Erfordernisses noch nicht das Gleichgewicht eines jeden beliebig kleinen Teiles des Körpers zur Folge hat. Es ergibt sich nun kein Widerspruch mit der Erfahrung, wenn man auf Grund eines erweiterten Erstarrungsprinzipes annimmt, daß es für das Gleichgewicht jedes beliebig kleinen Teiles notwendig und hinreichend ist, wenn die Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper für diesen kleinen deformierten Teil erfüllt sind. Es kann somit behauptet werden: die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Gleichgewicht eines elastischen festen Körpers besagen, daß

für jeden beliebig kleinen, im deformierten Zustande erstarrt gedachten Teil des Körpers die Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper erfüllt sein müssen.

Wir haben gesagt, daß die Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers für den verformten im Gleichgewicht befindlichen elastischen Körper notwendig erfüllt sein müssen. Wenn die Verschiebungen, welche die einzelnen Punkte bei der Deformation erfahren, im Vergleich zu den Dimensionen des Körpers sehr klein sind, so können wir in Ergänzung hierzu, ohne einen großen Fehler zu machen, auch sagen, daß für den im Gleichgewichtszustande befindlichen elastischen Körper, auch für den nicht verformten gedachten Körper die Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers angewendet werden können, bzw. notwendig erfüllt sein müssen, da dann die infolge der Verschiebungen auftretenden Änderungen der Lage der Kräfte mit Bezug auf den Körper resp. die Änderungen der Hebelarme der Kräfte in jenen Gleichgewichtsbedingungen von so geringem Einflusse sein werden, daß sie zu vernachlässigen sind. Streng richtig wäre das nur für unendlich kleine Verschiebungen, praktisch richtig für sehr viele Fälle der Technik, für welche nicht eine oder zwei Dimensionen des Körpers gegenüber den restlichen Dimensionen sehr klein werden (S. 16).

3. Gleichgewichtsbedingungen (Spannungsgleichungen) für einen Elementarkörper im Innern.

Wir schneiden uns aus dem verformten elastischen Körper einen unendlich kleinen Teil, und zwar ein rechtwinkeliges Prisma $P A B C D E F G$ (Abb. 5, S. 17) mit dem Eckpunkt P heraus, der die Koordinaten x, y, z mit Bezug auf ein räumliches Koordinatensystem besitzt und wenden auf dasselbe die 6 Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper bezogen auf das durch den Punkt P gehende Koordinatensystem $x' y' z'$ an. Es muß den letzteren zufolge die Summe aller Kraftkomponenten parallel zu den Achsen x', y', z' und die Summe der achsialen Momente der äußeren Kräfte bezüglich der gleichen Achsen verschwinden. Die äußeren Kräfte sind am Prisma im positiven Sinne wirkend dargestellt. Die Summe der Kräfte parallel zur x' -Achse lautet, wenn $\rho dx dy dz$ die Volumskraft (in den weitaus meisten Fällen durch das Eigengewicht repräsentiert) und $k_x dx dy dz, k_y dx dy dz, k_z dx dy dz$ deren Komponenten bedeuten:

$$0 = X'_x dy dz - X_x dy dz + X'_y dx dz - X_y dx dz + X'_z dx dy - X_z dx dy + k_x dx dy dz.$$

Da aber wegen der vorausgesetzten Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Spannungskomponenten (S. 18)

$$X'_x = X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx, \quad X'_y = X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy, \quad X'_z = X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz,$$

so vereinfacht sich die Gleichgewichtsbedingung nach Abkürzung durch $dx dy dz$ in

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + k_x = 0; \quad (20)$$

analog ergeben sich für die y' - und z' -Richtung als Bedingungen für das Verschwinden der Summe der bezüglichen Kraftkomponenten

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + k_y &= 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + k_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Gleichgewichtsbedingungen (Spannungsgleichungen) für einen Elementarkörper im Innern. 49

Die Gleichungen (20) können wir vektoralgebraisch in der Form schreiben

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + \mathfrak{f} = 0, \quad (21a)$$

worin $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$ die als Vektoren aufgefaßten Totalspannungen der im Punkte P zusammenstoßenden Flächenelemente also

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= iX_x + jY_x + kZ_x, \\ \bar{\sigma}_y &= iX_y + jY_y + kZ_y, \\ \bar{\sigma}_z &= iX_z + jY_z + kZ_z \end{aligned}$$

bedeuten. In ebenso einfacher Weise können die Momentengleichungen der äußeren Kräfte des Prismas mit Bezug auf das Koordinatensystem $x'y'z'$ aufgestellt werden. Das Verschwinden der Momentensumme der äußeren Kräfte mit Bezug auf die x' -Achse erfordert

$$A + B + C + D = 0.$$

In dieser Beziehung bedeuten A, B, C die Momente mit Bezug auf die x' -Achse der äußeren Kräfte, welche in Flächenelementen normal zur x', y', z' -Achse wirken, D bezieht sich auf das Moment der Volumkraft bezüglich der genannten Achsen. Die Flächenkräfte denken wir uns dabei in den Schwerpunkten der Flächenelemente, die Volumkraft im Schwerpunkt des Elementarkörpers angreifend. Es wird somit

$$A = Y_x dy dz \frac{dz}{2} - Y'_x dy dz \frac{dz}{2} - Z_x dy dz \frac{dy}{2} + Z'_x dy dz \frac{dy}{2}$$

oder (S. 18ff.)

$$= -\frac{\partial Y_x}{\partial x} dx dy dz \frac{dz}{2} + \frac{\partial Z_x}{\partial x} dx dy dz \frac{dy}{2},$$

$$B = Y_y dx dz \frac{dz}{2} - Y'_y dx dz \frac{dz}{2} + Z_y dy dx dz$$

$$= -\frac{\partial Y_y}{\partial y} dy dx dz \frac{dz}{2} + Z_y dx dy dz,$$

$$C = -Z_z dx dy \frac{dy}{2} + Z'_z dy dx \frac{dy}{2} - Y_z dx dy dz$$

$$= \frac{\partial Z_x}{\partial z} dx dy dz \frac{dy}{2} - Y_z dx dy dz.$$

Hierzu tritt noch das Moment D der Volumkraft $\mathfrak{f} dx dy dz$, welches nach bekannten Regeln durch

$$D = k_z dx dy dz \frac{dy}{2} - k_y dx dy dz \frac{dz}{2}$$

erhalten wird. Wir sehen, daß in A, B, C, D Glieder dritter und vierter Kleinheitsordnung vorkommen, vernachlässigen wir letztere, so erhalten wir als Bedingung für das Verschwinden der Momentensumme mit Bezug auf die x' -Achse

$$Z_y = Y_z \quad (21)$$

Analog finden wir aus den Gleichgewichtsbedingungen gegenüber Verdrehen um die y' - und z' -Achse

$$\left. \begin{aligned} X_z &= Z_x, \\ Y_x &= X_y. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Durch die Beziehungen (21), die zusammen mit (20) als Spannungsgleichungen bezeichnet werden, wird der Satz ausgesprochen, daß für den Fall des elastischen Gleichgewichtes in jedem Punkte P des elastischen Körpers jene Schubspannungskomponenten in 2 aufeinander normalen Flächenelementen, die normal zur Schnittlinie der Flächenelemente wirken, einander gleich sein müssen; man nennt diese Schubspannungen auch häufig einander zugeordnete Schubspannungen. Es folgt, daß man für den Fall des elastischen Gleichgewichtes den Spannungszustand in einem Punkte des elastischen Körpers für ein beliebiges Prisma kennt, wenn die 6 Spannungskomponenten

$$X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$$

bekannt sind.

Der Satz von der Gleichheit der Schubspannungskomponenten in zwei aufeinander normalen Richtungen wird in der Technik sehr häufig zur Anwendung gebracht, um die Berechtigung einer Annahme über den Spannungszustand des Körpers bei gegebener äußerer Beanspruchung zu stützen.

Zum Beispiel im Falle der Abb. 15, S. 45 (der Spannungszustand ist der durch Abb. 6 b, S. 19 dargestellte bei Hinweglassung der Spannungen Y_x, X_y und Y'_z, X'_y) der Beanspruchung auf Biegung und ebenen Schub soll man die Berechtigung der Annahme des Fehlens von Schubspannungskomponenten Y_x, X_y quer zur Stabachse zeigen. Man geht dabei folgendermaßen vor: für ein unendlich kleines an der Umrandung des rechteckigen Querschnittes liegendes, parallel zur x -Achse herausgeschnittenes Prisma (in der Abb. 15 horizontal schraffiert), dessen eine zur z - x -Ebene parallele Seitenfläche in die Oberfläche des Balkens fällt, kann es keine Schubspannungen Y_x geben, weil es dann auch Schubspannungen X_y oder besser gesagt, Belastungen pro Flächeneinheit des in die Oberfläche fallenden Flächenelementes geben müßte. Da äußere Belastungen des Stabes, die dem entsprechen würden, fehlen, so bleibt nichts anderes übrig, als für ein derartiges Grenzprisma $X_y = Y_x = 0$ zu setzen. Der in der technischen Näherungstheorie verwendete Schluß, daß X_y für jedes beliebige im Innern des Balkens gelegene, parallel zur x -Achse herausgeschnittene Prisma Null sein müsse, steht, wie sich weiter unten zeigen wird, nicht im Widerspruch mit den Gleichgewichtsbedingungen des Balkens und wird jedenfalls um so mehr zutreffend sein, je schmaler der Balken in der Richtung der y -Achse ist. Exakt wäre der Schluß, wenn der Balken in der genannten Richtung unendlich schmal wäre. Für ein unendlich kleines Prisma (in der Abbildung vertikal schraffiert), von dem ein zur xy -Ebene paralleles Flächenelement in die Begrenzungsfläche des Balkens fällt, können wir einen ähnlichen Schluß mit Bezug auf die Spannung Z_x machen, die Null sein muß, weil $X_z = 0$ ist, da es keine, auf das in die Oberfläche hineinfallende Flächenelement wirkende äußere Belastung gibt. Der Schluß, daß Z_x für jedes beliebige Prisma im Innern des Balkens aber Null sein müsse, kann aber jetzt nicht gemacht werden, weil sich sonst, wie gezeigt werden kann, ein Widerspruch mit den Gleichgewichtsbedingungen des Balkens ergeben würde; denn denken wir uns den Balken in einem beliebigen Abstand x vom linken Auflager durchschnitten und untersuchen das Gleichgewicht des linken Balkenteiles, so bemerkt man, daß für diesen ein Gleichgewicht in der Richtung der z -Achse nur dann möglich ist, wenn in der Schnittquerschnittsfläche Kräfte vom rechten Balkenteile auf den linken Balkenteil übertragen werden, die in die Querschnittsfläche hineinfallen und eine Resultante ergeben, die entgegengesetzt gleich ist der Resultanten aus der Auflagerkraft V_1 und P_1 , d. i. $V_1 - P_1$, welche entgegengesetzt der positiven Richtung der z -Achse wirkt. Diese im Querschnitt übertragenen Kräfte sind vor Durchschneiden des Balkens zwischen dem rechten und linken Balkenteil übertragene, innere Kräfte, die Schubspannungen Z_x entsprechen und flächenhaft über den Schnittquerschnitt verteilt sind, nach Durchschneiden aber äußere Kräfte des linken Balkenteiles. Es muß also die Gleichgewichtsbedingung

$$V_1 - P_1 + \int_F Z_x dy dz = 0$$

(das Integral über die Querschnittsfläche genommen) bestehen, und Z_x kann daher nicht für jedes Flächenelement der Schnittquerschnittsfläche verschwinden. Bei der angenommenen äußeren Belastung des ganzen Trägers gibt es keine äußeren Kräfte parallel zur y -Achse, und das Gleichgewicht des Balkenteiles erfordert demnach $\int_F Y_x dy dz = 0$, womit die Annahme $Y_x = 0$ quer zum Balken und zur Ebene der äußeren Kräfte für den ganzen Bereich des Balkens nicht in Widerspruch steht.

4. Bestimmung der Totalspannung für ein beliebiges Flächenelement bei gegebenem Spannungszustand eines Elementarkörpers.

Es seien die 6 Spannungskomponenten für ein unendlich kleines Prisma im Punkte P des elastischen Körpers gegeben, es fragt sich um die Größe der Totalspannung, die auf ein Flächenelement übertragen wird, das durch den Punkt P geht, und dessen Flächennormale n eine beliebige Richtung zu den Koordinatenachsen x', y', z' besitzt. Wir legen uns ein Flächenelement mit der Normalen n (Abb. 16) unendlich nahe an P etwa tangential an eine Kugel mit unendlich kleinem Radius und dem Mittelpunkt in P derart, daß das Flächenelement mit 3 in die Koordinatenebenen fallenden aufeinander normalen Flächenelemente ein Tetraeder bildet. Die Normale n sei positiv, wenn sie mit Bezug auf das Tetraeder nach außen gerichtet ist und schließe dann mit den Koordinatenachsen die Winkel $n x', n y', n z'$ ein. Die Totalspannung σ_n , die in der Fläche 1 2 3, im allgemeinen schief gegen sie wirkend, übertragen wird, unterscheidet sich von der Totalspannung eines Flächenelementes, das zu 1 2 3 parallel ist und durch den Punkt P geht, um unendlich wenig, so daß durch σ_n bis auf unendlich kleine Größen auch die Totalspannung für letzteres Flächenelement gegeben ist. In den 3 Flächenelementen 1 P 2, 2 P 3, 3 P 1 wirken nach Früherem die Spannungen $X_z, Y_z, Z_z, X_x, Y_x, Z_x, X_y, Y_y, Z_y$. Die Totalspannung σ_n können wir uns in 3 Komponenten zerlegt denken, die X_n, Y_n, Z_n heißen sollen, d. h.

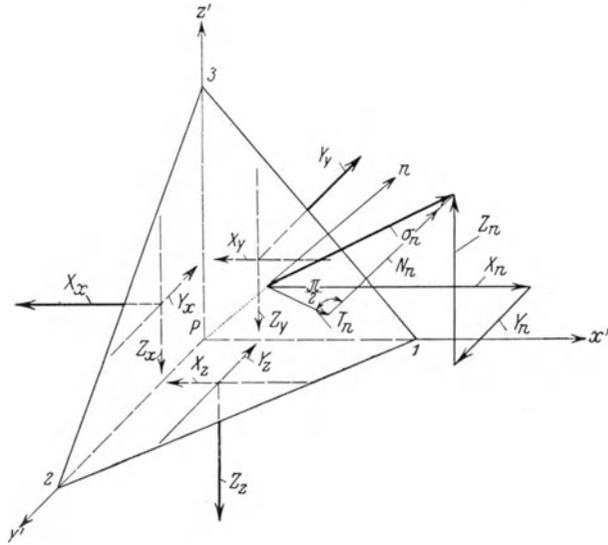


Abb. 16.

$$\bar{\sigma}_n = i X_n + j Y_n + k Z_n.$$

Für das Tetraeder bestehen 6 Gleichgewichtsbedingungen, 3 von ihnen, welche sich auf die Achsenmomente beziehen, würden wieder zu dem bereits bekannten Satz über die Gleichheit der Schubspannungen in 2 aufeinander normalen Flächenelementen führen, sind demnach schon erledigt. Die Gleichgewichtsbedingung für das Gleichgewicht in der x' -Richtung besagt:

$$X_n df_n - X_x df_x - X_y df_y - X_z df_z = 0^*,$$

wenn df_n, df_x, df_y, df_z die zu den betreffenden Spannungen gehörigen Flächenelemente bedeuten. Nun ist offenbar

$$df_x = df_n \cos(n x'), \quad df_y = df_n \cos(n y'), \quad df_z = df_n \cos(n z'),$$

daher können wir die angeschriebene Gleichgewichtsbedingung auch in der Form

$$X_n = X_x \cos(n x') + X_y \cos(n y') + X_z \cos(n z') \tag{22}$$

* Die Komponenten der Volumskraft kommen als ∞ klein von dritter Ordnung nicht in Betracht.

schreiben. In analoger Weise erhalten wir als Gleichgewichtsbedingungen in der y' - und z' -Richtung

$$\left. \begin{aligned} Y_n &= Y_x \cos(n x') + Y_y \cos(n y') + Y_z \cos(n z'), \\ Z_n &= Z_x \cos(n x') + Z_y \cos(n y') + Z_z \cos(n z'). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die Beziehungen (22) heißen kurz Tetraederbedingungen und sind im Verein mit den Beziehungen (21) Bedingungen für das Gleichgewicht am Tetraeder; sie gestatten, die Totalspannung und deren Komponenten in einem Punkte für ein beliebiges Flächenelement $d f_n$ zu bestimmen, wenn die Spannungskomponenten für 3 zueinander normale Flächenelemente in dem betreffenden Punkte gegeben sind. Die Bedingungen (22) können wir in leicht verständlicher Weise zu einer

$$\bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}_x \cos(n x') + \bar{\sigma}_y \cos(n y') + \bar{\sigma}_z \cos(n z') \quad (22a)$$

zusammen ziehen.

4a. Spannungsdyade.

Die Beziehungen (22) lassen sich auch kürzer vektoralgebraisch ausdrücken, da durch sie jedem Spannungszustand für 3 in einem Punkte P eines elastischen Körpers zusammenstoßende und aufeinander normale Flächenelemente mit der Lage eines vierten Flächenelementes veränderlich gedachte Totalspannungen $\bar{\sigma}_n$ zugeordnet erscheinen. Wir können nach dem auf Seite 13 Gesagten $\bar{\sigma}_n$ als lineare Vektorfunktion auffassen und schreiben

$$\bar{\sigma}_n = \Sigma n, \quad (22b)$$

wenn n ein Einheitsvektor in der Richtung von n ist, der durch

$$n = i \cos(n x') + j \cos(n y') + k \cos(n z')$$

definiert ist. Die Beziehung (22 b) kann man dann lesen: $\bar{\sigma}_n$ ist eine lineare Vektorfunktion Σ von n , wobei

$$\Sigma = \begin{matrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{matrix}. \quad (22c)$$

Stellt man Σ , die wegen der Gleichheit der Schubspannungen in 2 aufeinander normalen Richtungen eine symmetrische lineare Vektorfunktion ist, als Vektorsumme dar, so hätte man offenbar

$$\Sigma n = i(\mathfrak{A} n) + j(\mathfrak{B} n) + k(\mathfrak{C} n)$$

zu schreiben, wobei

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= i X_x + j X_y + k X_z = \bar{\sigma}_x, \\ \mathfrak{B} &= i Y_x + j Y_y + k Y_z = \bar{\sigma}_y, \\ \mathfrak{C} &= i Z_x + j Z_y + k Z_z = \bar{\sigma}_z. \end{aligned}$$

wäre. Wird Σ als eine geometrische Größe höherer Ordnung angesehen (S. 14), so wird sie als Spannungsdyade im Punkte P bezeichnet, die eine symmetrische Dyade ist. Wir hätten dann symbolisch

$$\Sigma = i; \bar{\sigma}_x + j; \bar{\sigma}_y + k; \bar{\sigma}_z$$

zu schreiben.

5. Beziehung der Totalspannungen zweier beliebiger Flächenelemente in einem Punkte.

Man kann den Tetraederbedingungen (22) noch eine andere Form geben. Da nämlich

$$X_n = \sigma_n \cos(\sigma_n x), \quad Y_n = \sigma_n \cos(\sigma_n y), \quad Z_n = \sigma_n \cos(\sigma_n z)$$

und z. B.

$$X_x \cos(n x') + X_y \cos(n y') + X_z \cos(n z') = \sigma_x \cos(\sigma_x n),$$

was sich daraus ergibt, daß

$$\begin{aligned} X_x &= \sigma_x \cos(\sigma_x x'), \\ Y_x &= X_y = \sigma_x \cos(\sigma_x y'), \\ Z_x &= X_z = \sigma_x \cos(\sigma_x z') \end{aligned}$$

und

$$\cos(\sigma_x x') \cos(n x') + \cos(\sigma_x y') \cos(n y') + \cos(\sigma_x z') \cos(n z') = \cos(\sigma_x n),$$

so muß

$$\sigma_n \cos(\sigma_n x) = \sigma_x \cos(\sigma_x n)$$

und analog

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n \cos(\sigma_n y) &= \sigma_y \cos(\sigma_y n), & \sigma_n \cos(\sigma_n z) &= \sigma_z \cos(\sigma_z n) \end{aligned} \right\} \quad (22d)$$

erfüllt sein. In dieser Form besagen die Tetraederbedingungen, daß für einen Punkt P des elastischen Körpers die Projektion der Totalspannung σ_n eines Flächenelementes df_n mit der Normalen n auf die Normale $x(y, z)$ eines anderen Flächenelementes $df_x(df_y, df_z)$ gleich ist der Projektion der Totalspannung $\sigma_x(\sigma_y, \sigma_z)$ dieses anderen Flächenelementes auf die Normale n des erstgenannten Flächenelementes df_n . Die Beweisführung dieses Satzes ist allgemein für 2 beliebige Flächenelemente erbracht, da das Koordinatensystem $x'y'z'$ beliebig ist. Liegen sonach 2 Flächenelemente in der Umgebung eines Punktes P eines elastischen Körpers vor mit den Normalen n und n' und nennen wir in diesen normalen Richtungen gelegte Einheitsvektoren \mathbf{n} und \mathbf{n}' , die den Flächenelementen entsprechenden Totalspannungen $\bar{\sigma}_n, \bar{\sigma}'_n$, so besteht die Gleichheit der folgenden skalaren Produkte

$$\bar{\sigma}_n \cdot \mathbf{n}' = \bar{\sigma}'_n \cdot \mathbf{n}. \quad (23)$$

Der Satz über die Gleichheit zugeordneter Schubspannungen kann offenbar als besonderer Fall der Beziehung (23) aufgefaßt werden.

6. Oberflächen- oder Grenzbedingungen.

Wenn wir uns den elastischen Körper durch 3 Scharen zu den Koordinatenebenen paralleler Ebenen von den beziehungsweise unendlich kleinen Abständen dx, dy, dz geschnitten denken, so erhalten wir an der Oberfläche des Körpers im allgemeinen unendlich kleine Tetraeder, denen je eine bestimmte Oberflächennormale zugeordnet ist. Für diese Randtetraeder gelten Bedingungen von der Form (22) bzw. (22a), die, wenn wir die Oberflächenkraft pro Flächeneinheit an einer herausgegriffenen beliebigen Stelle der Oberfläche $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_x + \mathfrak{p}_y + \mathfrak{p}_z$ nennen, die Form

$$\left. \begin{aligned} p_x &= X_x \cos(n x) + X_y \cos(n y) + X_z \cos(n z), \\ p_y &= Y_x \cos(n x) + Y_y \cos(n y) + Y_z \cos(n z), \\ p_z &= Z_x \cos(n x) + Z_y \cos(n y) + Z_z \cos(n z), \\ \mathfrak{p} &= \bar{\sigma}_x \cos(n x) + \bar{\sigma}_y \cos(n y) + \bar{\sigma}_z \cos(n z) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

annehmen. In den Gleichungen (24) haben jetzt die Spannungskomponenten X_x, X_y, \dots, Z_z die Werte, welche ihnen an der Oberfläche zukommen, und $\cos(n x), \cos(n y), \cos(n z)$ bedeuten die Winkel, welche die mit Bezug auf den Körper nach

außen gezogenen Oberflächennormalen an der herausgegriffenen Stelle mit den Koordinatenachsen einschließen. Die Gleichungen (24) heißen die Oberflächen- oder Grenzbedingungen und treten als weitere Gleichgewichtsbedingungen zu den Gleichungen (20) bzw. (21) hinzu, die für die bei obiger Teilung des Körpers entstehenden Prismen im Inneren des elastischen Körpers gelten.

7. Normalspannungsfläche.

Wenn wir uns die Totalspannung $\bar{\sigma}_n$ in eine in das Flächenelement df_n hineinfallende Schubspannungskomponente \mathfrak{T}_n und eine auf dem genannten Flächenelement normal stehende Normalspannungskomponente \mathfrak{N}_n zerlegt denken (Abb. 16), also $\bar{\sigma}_n = t_1 T_n + n_1 N_n$ mit t_1 und n_1 als in die Richtungen von \mathfrak{T}_n und \mathfrak{N}_n fallenden Einheitsvektoren setzen, so können wir mit Hilfe der Beziehungen (22) zunächst N_n durch die Spannungskomponenten X_x, Y_x, \dots, Z_x ausdrücken. Multiplizieren wir die genannten Beziehungen der Reihe nach mit $\cos(n x'), \cos(n y'), \cos(n z')$ und addieren, so erhalten wir bei Beachtung von (21) und weil

$$X_n \cos(n x') + Y_n \cos(n y') + Z_n \cos(n z') = N_n,$$

$$N_n = X_x \cos^2(n x') + Y_y \cos^2(n y') + Z_z \cos^2(n z') + 2 X_y \cos(n x') \cos(n y') \\ + 2 Y_z \cos(n y') \cos(n z') + 2 Z_x \cos(n x') \cos(n z'). \quad (25a)$$

Setzen wir $\varrho^2 = \pm \frac{k^2}{N_n}$ (worin k^2 eine positive Konstante und das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem N_n positiv oder negativ ist) und

$$\varrho \cos(n x') = x', \quad \varrho \cos(n y') = y', \quad \varrho \cos(n z') = z',$$

d. h. tragen wir uns vom Punkte P in der Richtung der Normalen n des Flächenelementes df_n je eine Strecke ϱ auf, deren Quadrat verkehrt proportional der Normalspannungskomponente N_n ist, und fassen wir die Lage des Flächenelementes veränderlich auf, so daß für jedes n sich ein zugeordnetes ϱ ergibt, dessen Endpunkt die Koordinaten x', y', z' besitzt, so erhalten wir aus dem obigen Ausdrücke für N_n die Gleichung mit den Veränderlichen x', y', z'

$$\pm k^2 = X_x x'^2 + Y_y y'^2 + Z_z z'^2 + 2 X_y x' y' + 2 Y_z y' z' + 2 Z_x z' x'. \quad (25b)$$

Je nachdem N_n in der Umgebung eines Punktes für die verschiedenen Richtungen n gleiches oder wechselndes Zeichen besitzt, stellt (25b) in den Fällen allgemeinsten Spannungszustandes die Gleichung einer geschlossenen Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung (Ellipsoid) oder zwei Gleichungen von zwei offenen Flächen dieser Art vor (Einschaliges und zweischaliges Hyperboloid mit gemeinsamen Achsen, siehe weiter unten). Diese Flächen heißen Normalspannungsflächen, weil sie einen Überblick über die Verteilung der Normalspannungen in der Umgebung eines Punktes geben. Jedem Radiusvektor derselben ist ein auf ihm normales Flächenelement zugeordnet, dessen Normalspannung verkehrt proportional der Größe des Radiusvektors ist. Der Normalspannungsfläche in der Statik entspricht in der Kinematik die Verzerrungsfläche.

7a. Die Normalspannungsfläche als Bild einer Dyade.

Die Tetraederbedingungen (22) kann man in der Form

$$\left. \begin{aligned} N_{n x} &= X_n \cos(n x) = [X_x \cos(n x)] \cos(n x) + [X_y \cos(n x)] \cos(n y) + [X_z \cos(n x)] \cos(n z), \\ N_{n y} &= Y_n \cos(n y) = [Y_x \cos(n y)] \cos(n x) + [Y_y \cos(n y)] \cos(n y) + [Y_z \cos(n y)] \cos(n z), \\ N_{n z} &= Z_n \cos(n z) = [Z_x \cos(n z)] \cos(n x) + [Z_y \cos(n z)] \cos(n y) + [Z_z \cos(n z)] \cos(n z) \end{aligned} \right\} (26)$$

schreiben. Die in den eckigen Klammern rechts stehenden Ausdrücke stellen die Komponenten der Spannungskomponenten $X_x, X_y, X_z, \dots, Z_z$ in der Richtung \mathfrak{n} vor und seien mit $X_{xn}, Y_{yn}, X_{zn}, \dots, Z_{zn}$ bezeichnet. Wir können dann die oberen Gleichungen durch die Form

$$\mathfrak{N}_n = A_1 \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n} = i \cos(n x) + j \cos(n y) + k \cos(n z) \quad (26 a)$$

ausdrücken, wenn \mathfrak{N}_n wieder die Normalspannungskomponente der Totalspannung $\bar{\sigma}_n$ für das Flächenelement mit der Normalen \mathfrak{n} vorstellt, und letztere als Einheitsvektor aufgefaßt wird. Ferner bedeutet A_1 eine Dyade, die die lineare Zuordnung von \mathfrak{N}_n und \mathfrak{n} entspricht und als lineare Vektorfunktion symbolisch durch

$$A_1 = \begin{array}{ccc} X_{xn} & X_{yn} & X_{zn} \\ Y_{xn} & Y_{yn} & Y_{zn} \\ Z_{xn} & Z_{yn} & Z_{zn} \end{array} \quad (26 b)$$

dargestellt wird. Da jede Dyade unter dem Bilde einer Fläche zweiter Ordnung vorstellbar ist, so wird auch ausgesprochen, daß die Endpunkte der Vektoren \mathfrak{N}_n , von einem Punkte aus aufgetragen, eine Fläche zweiter Ordnung, die Normalspannungsfläche bilden. Die Dyade A_1 entspricht völlig der Dyade A auf Seite 34.

8. Bestimmung der Hauptspannungen.

Da den reellen Achsen einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung Extremwerte von q zugeordnet sind und den Normalspannungsflächen offenbar stets drei reelle Achsen zukommen, existieren in der Umgebung eines jeden Punktes eines im Gleichgewicht befindlichen elastischen Körpers drei auf jene Achsen normale Flächenelemente, für welche die Normalspannungen extreme Werte erlangen. Dieselben werden als Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bezeichnet und sollen im folgenden ihrer Größe und Richtung nach bestimmt werden, wenn der Spannungszustand für ein unendlich kleines rechtwinkeliges Prisma gegeben ist; ferner soll nachgewiesen werden, daß $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ auch gleichzeitig Totalspannungen für die ihnen zugeordneten Flächenelemente sind.

Die Extremwerte von N_n erhalten wir aus der Beziehung (25a), in der die Richtungskosinuse als variabel angesehen werden bei Beachtung der Nebenbedingung

$$g \equiv \cos^2(n x') + \cos^2(n y') + \cos^2(n z') - 1 = 0. \quad (a)$$

Nach den Regeln der Analysis muß der Ausdruck $N_n - \lambda g$ mit λ als zu bestimmendem Faktor ein Extrem werden. Differenzieren wir diesen Ausdruck der Reihe nach nach den variablen Größen $\cos(n x')$, $\cos(n y')$, $\cos(n z')$ und setzen diese Differentialquotienten gleich Null, so erhalten wir

$$\left. \begin{array}{l} X_x \cos(n x') + X_y \cos(n y') + X_z \cos(n z') = \lambda \cos(n x') = N_n \cos(n x'), \\ Y_x \cos(n x') + Y_y \cos(n y') + Y_z \cos(n z') = \lambda \cos(n y') = N_n \cos(n y'), \\ Z_x \cos(n x') + Z_y \cos(n y') + Z_z \cos(n z') = \lambda \cos(n z') = N_n \cos(n z'), \end{array} \right\} \quad (27)$$

da $\lambda = N_n$ ist, wie sich durch beziehungsweise Multiplikation der drei vorstehenden Bestimmungsgleichungen mit $\cos(n x')$, $\cos(n y')$, $\cos(n z')$ und nachherige Addition bei Vergleich mit (25a) ergibt. Die Bedingungen (27) und (a) dienen zur Bestimmung der Größen und Richtungen der Extremwerte der Normalspannungen. Ganz ähnlich wie in Punkt 7 auf Seite 33ff. erhalten wir die in Form einer Determinante sich darstellende Gleichung 3. Grades nach N_n

$$\begin{vmatrix} X_x - N_n & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - N_n & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - N_n \end{vmatrix} = 0 \quad (27 a)$$

zur Bestimmung der Größen der extremen Normalspannungen, d. i. der Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und die beiden Gleichungen

$$\frac{X_x \cos(n x') + X_y \cos(n y') + X_z \cos(n z')}{\cos(n x')} = \frac{Y_x \cos(n x') + Y_y \cos(n y') + Y_z \cos(n z')}{\cos(n y')} \\ = \frac{Z_x \cos(n x') + Z_y \cos(n y') + Z_z \cos(n z')}{\cos(n z')}, \quad (27b)$$

welche im Verein mit der Bedingung (a) die Richtungen der Hauptspannungen festlegen. Andererseits müssen die Ausdrücke (22) für Richtungen ν , in denen nur Normalspannungen N_ν übertragen werden sollen, d. h. N_ν der Totalspannung σ_ν gleich kommt, die Form

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\nu \cos(\nu x') &= X_x \cos(\nu x') + X_y \cos(\nu y') + X_z \cos(\nu z'), \\ \sigma_\nu \cos(\nu y') &= Y_x \cos(\nu x') + Y_y \cos(\nu y') + Y_z \cos(\nu z'), \\ \sigma_\nu \cos(\nu z') &= Z_x \cos(\nu x') + Z_y \cos(\nu y') + Z_z \cos(\nu z') \end{aligned} \right\} \quad (22e)$$

annehmen. Die Bedingungen (22e) im Verein mit der Bedingung

$$\cos^2(\nu x') + \cos^2(\nu y') + \cos^2(\nu z') - 1 = 0 \quad (a')$$

dienen dazu, um σ_ν und deren Richtungen zu bestimmen. Da (22e) und (a') mit den Bedingungen (27) und (a) identisch sind, so ist bewiesen, daß die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Totalspannungen sind.

9. Die Normalspannungsfläche bezogen auf die Hauptspannungsrichtungen.

Die Normalspannungsfläche (25b) bezogen auf die Hauptspannungsrichtungen nimmt, da für diese die Schubspannungskomponenten verschwinden müssen, die Form

$$\pm k^2 = \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2 \quad (25c)$$

an, wenn das in die Hauptachsen gelegte Koordinatensystem mit α, β, γ bezeichnet wird. Bei gleich bezeichneten Hauptspannungen nehmen wir in (25c) links das positive oder negative Zeichen, je nachdem dieselben positiv oder negativ sind. Die Normalspannungsfläche ist dann eine geschlossene Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung.

Es seien jetzt σ_1 und σ_2 positiv, σ_3 aber negativ. In diesem Falle ergeben sich als Normalspannungsflächen ein ein- und ein zweischaliges Hyperboloid. Nehmen wir zuerst

$$+ k^2 = \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2$$

an, so erhalten wir als Schnitt mit der $\alpha\beta$ -Ebene eine Ellipse mit den Halbachsen $a = \frac{k}{\sqrt{\sigma_1}}$, $b = \frac{k}{\sqrt{\sigma_2}}$, als Schnitt mit der $\alpha\gamma$ -Ebene eine Hyperbel mit der reellen Halbachse $a = \frac{k}{\sqrt{\sigma_1}}$ und der imaginären Halbachse $c = \frac{k}{\sqrt{-\sigma_3}}$, schließlich als Schnitt mit der $\beta\gamma$ -Ebene eine Hyperbel mit der reellen Halbachse $b = \frac{k}{\sqrt{\sigma_2}}$ und der imaginären Halbachse $c = \frac{k}{\sqrt{-\sigma_3}}$. Diesem elliptischen einschaligen Hyperboloid A (Abb. 17) entspricht ein elliptischer Asymptotenkegel C . Ein Radiusvektor dieser Fläche, der mit einer Erzeugenden des Asymptotenkegels zusammenfällt, wird unendlich groß, d. h. die zugehörige Normalspannung ist gleich Null. Den

Erzeugenden dieses Asymptotenkegels entsprechen demnach Flächenelemente, in denen die Totalspannungen als Schubspannungen erscheinen; er heißt auch jetzt der Schiebungskegel, weil, wie sich zeigen wird, bei bestimmten Voraussetzungen über die Natur des Stoffes, in der Richtung der Erzeugenden dieses Kegels die Schiebungen gleichfalls verschwinden (S. 76). Sämtlichen Radiusvektoren ϱ , die außerhalb des Schiebungskegels liegen, sind positive Normalspannungen, dem Schiebungskegel die Normalspannungen Null, den Richtungen von ϱ , die innerhalb des Schiebungskegels liegen, negative Normalspannungen zugeordnet. Letzteren entspricht die Normalspannungsfläche

$$-k^2 = \sigma_1 \alpha^2 + \sigma_2 \beta^2 + \sigma_3 \gamma^2.$$

Diese zweite Fläche, welche in der Abb. 17 nicht gezeichnet ist, ist ein zweischaliges Hyperboloid, das mit dem vorher besprochenen einschaligen Hyperboloid einen gemeinsamen Asymptotenkegel besitzt. Die Festlegung der Lage und die Bestimmung der Größe der Halbachsen bleibt dem Leser überlassen.

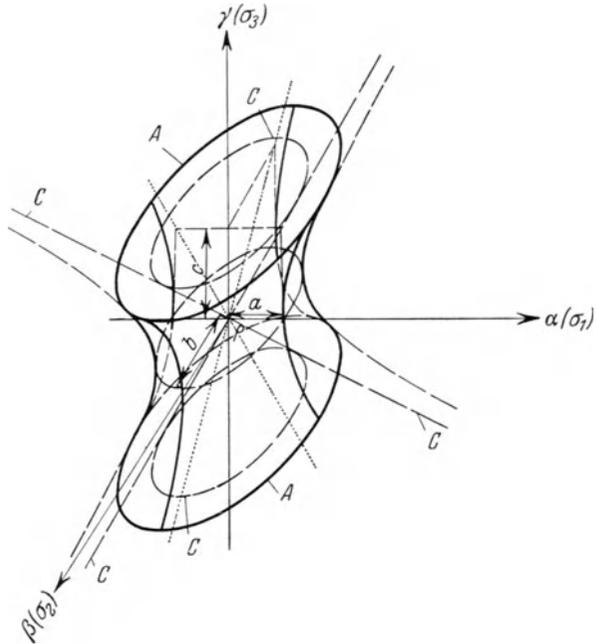


Abb. 17.

Ähnlich liegen die Verhältnisse, wenn eine positive Hauptspannung und zwei negative Hauptspannungen existieren. Allgemein können wir sagen: sind die Hauptspannungen ungleich bezeichnet, so gibt es unendlich viele auf einem Kegel liegende Richtungen, deren zugeordnete Flächenelemente keine Normalspannungen, sondern nur Schubspannungen empfangen.

10. Räumlicher, ebener, linearer Spannungszustand.

Ein Spannungszustand, für den sämtliche 3 Hauptspannungen von Null verschieden sind, heißt ein räumlicher oder dreidimensionaler Spannungszustand. Verschwindet eine Hauptspannung oder deren zwei, so liegt ein ebener (zweidimensionaler) oder linearer (eindimensionaler) Spannungszustand vor. In den beiden zuletzt genannten Fällen nehmen die Normalspannungsflächen besondere Formen an, worauf weiter unten eingegangen werden wird.

11. Zusammenhang der Spannungszustände für verschiedene Elementarkörper in einem Punkte.

Es seien die Spannungskomponenten X_x, Y_x, \dots, Z_x im Punkte P des elastischen Körpers für ein beliebiges Prisma dessen Kanten in die Richtungen x', y', z' fallen (Abb. 10, S. 35) gegeben; es lassen sich dann die Spannungskomponenten für ein anderes unendlich kleines Prisma im Punkte P mit Kanten parallel zu den

Koordinatenachsen X, Y, Z bestimmen. Die Gleichung der Normalspannungsfläche bezogen auf das Koordinatensystem XYZ , das mit Bezug auf das Koordinatensystem $x' y' z'$ durch die Richtungskosinusse $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, $(\beta_x, \beta_y, \beta_z)$, $(\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z)$ festgelegt ist, erhalten wir, indem wir die Transformationsgleichungen (a) Seite 35 verwenden. Wir erhalten durch Einsetzen der dortigen Werte x', y', z' , ausgedrückt durch X, Y, Z , in die Gleichung (25b) der Normalspannungsfläche eine der transformierten Verzerrungsfläche (9b) ganz ähnliche Gleichung. Durch Vergleich dieser transformierten Gleichung der Normalspannungsfläche mit der Gleichung (25b) ergeben sich die zu (13) analogen Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} X_X &= X_x \alpha_x^2 + Y_y \alpha_y^2 + Z_z \alpha_z^2 + 2 X_y \alpha_x \alpha_y + 2 Y_z \alpha_y \alpha_z + 2 Z_x \alpha_z \alpha_x, \\ Y_Y &= X_x \beta_x^2 + Y_y \beta_y^2 + Z_z \beta_z^2 + 2 X_y \beta_x \beta_y + 2 Y_z \beta_y \beta_z + 2 Z_x \beta_z \beta_x, \\ Z_Z &= X_x \gamma_x^2 + Y_y \gamma_y^2 + Z_z \gamma_z^2 + 2 X_y \gamma_x \gamma_y + 2 Y_z \gamma_y \gamma_z + 2 Z_x \gamma_z \gamma_x, \\ X_Y &= X_x \alpha_x \beta_x + Y_y \alpha_y \beta_y + Z_z \alpha_z \beta_z + X_y (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) \\ &\quad + Y_z (\alpha_y \beta_z + \alpha_z \beta_y) + Z_x (\alpha_z \beta_x + \alpha_x \beta_z), \\ Y_Z &= X_x \beta_x \gamma_x + Y_y \beta_y \gamma_y + Z_z \beta_z \gamma_z + X_y (\beta_x \gamma_y + \beta_y \gamma_x) \\ &\quad + Y_z (\beta_y \gamma_z + \beta_z \gamma_y) + Z_x (\gamma_x \beta_z + \gamma_z \beta_x), \\ Z_X &= X_x \gamma_x \alpha_x + Y_y \gamma_y \alpha_y + Z_z \gamma_z \alpha_z + X_y (\gamma_x \alpha_y + \gamma_y \alpha_x) \\ &\quad + Y_z (\gamma_y \alpha_z + \gamma_z \alpha_y) + Z_x (\alpha_x \gamma_z + \alpha_z \gamma_x), \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

welche die eingangs gestellte Aufgabe lösen. Fallen die Richtungen von XYZ mit den Hauptspannungsrichtungen zusammen, so kann man entweder

$$X_X = \sigma_1, \quad Y_Y = \sigma_2, \quad Z_Z = \sigma_3 \quad \text{mit} \quad X_Y = Y_Z = Z_X = 0$$

oder die Spannungskomponenten $X_x \dots Z_x$ für ein beliebiges $x' y' z'$ entsprechendes Prisma als zu suchende Größen auffassen. In ersterem Falle können die entsprechend umgewandelten Gleichungen (28) im Vereine mit den Bedingungen (14a), S. 36, dazu verwendet werden, um bei gegebenem Spannungszustand $X_x \dots Z_x$ Größe und Richtungen der Hauptspannungen zu bestimmen. Im zweiten Falle erhalten wir die Spannungskomponenten für ein beliebiges Prisma in einem Punkt, wenn die Hauptspannungen gegeben sind aus den (15) auf Seite 37 entsprechenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \sigma_1 \alpha_x^2 + \sigma_2 \beta_x^2 + \sigma_3 \gamma_x^2, & X_y &= \sigma_1 \alpha_x \alpha_y + \sigma_2 \beta_x \beta_y + \sigma_3 \gamma_x \gamma_y, \\ Y_y &= \sigma_1 \alpha_y^2 + \sigma_2 \beta_y^2 + \sigma_3 \gamma_y^2, & Y_z &= \sigma_1 \alpha_y \alpha_z + \sigma_2 \beta_y \beta_z + \sigma_3 \gamma_y \gamma_z, \\ Z_z &= \sigma_1 \alpha_z^2 + \sigma_2 \beta_z^2 + \sigma_3 \gamma_z^2, & Z_x &= \sigma_1 \alpha_z \alpha_x + \sigma_2 \beta_z \beta_x + \sigma_3 \gamma_z \gamma_x. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

12. Das Lamésche Spannungsellipsoid. — Spannungsrichtfläche.

Wenn wir für die Tetraederbedingungen (22) das Koordinatensystem $x' y' z'$ von vornherein in die Richtungen der Hauptspannungen legen (Koordinatensystem $\alpha\beta\gamma$), so vereinfachen sich dieselben zu

$$A_n = \sigma_1 \cos(n\alpha), \quad B_n = \sigma_2 \cos(n\beta), \quad C_n = \sigma_3 \cos(n\gamma), \quad (22f)$$

wenn A_n, B_n, C_n die Komponenten von σ_n in dem neuen Koordinatensystem bedeuten. Aus (22f) gewinnen wir leicht durch Quadrieren und Addieren die Gleichung

$$\frac{A_n^2}{\sigma_1^2} + \frac{B_n^2}{\sigma_2^2} + \frac{C_n^2}{\sigma_3^2} = 1.$$

Fassen wir A_n, B_n, C_n als Koordinaten α, β, γ eines Punktes auf, so ergibt sich aus der letzten Beziehung

$$\frac{\alpha^2}{\sigma_1^2} + \frac{\beta^2}{\sigma_2^2} + \frac{\gamma^2}{\sigma_3^2} = 1, \tag{30a}$$

d. i. die Gleichung eines Ellipsoides mit den Halbachsen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, das als Lamésches Spannungsellipsoid bezeichnet wird und die Eigentümlichkeit hat, daß jeder seiner Punkte, mit dem Punkte P als Ursprung des Koordinatensystemes verbunden, die Größe einer Totalspannung σ_n ergibt. Die zu den einzelnen Radiusvektoren gehörenden Flächenelemente sind nur für die Hauptachsen der Fläche (30 a) bekannt, auf welcher die zugehörigen Flächenelemente normal stehen. Wir schließen, daß die Totalspannungen für die verschiedenen Flächenelemente in der Umgebung eines Punktes P des elastischen Körpers im allgemeinen ein Maximum, ein Minimum und einen minimaxen Wert besitzen, entsprechend den Hauptachsen des im allgemeinen dreiachsigen Spannungsellipsoides.

Einen neuen Aufschluß über den Zusammenhang der Richtungen der Radien des Spannungsellipsoides mit den Richtungen der Totalspannungen gewinnen wir durch Einführung eines schiefwinkligen Koordinatensystemes ξ, η, ζ , dessen Achsen wir durch den Punkt P entgegengesetzt zu den Totalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ des im Punkte P konstruierten Tetraeders legen (Abb. 18). Die Komponenten der Totalspannung $\bar{\sigma}_n$ in diesem Koordinatensystem seien X'_n, Y'_n, Z'_n (Vektorpolygonzug $0I'2'3$), die mit den Komponenten X_n, Y_n, Z_n (Vektorpolygonzug 0123) durch die folgenden Beziehungen zusammenhängen:

$$\left. \begin{aligned} X_n &= X'_n \cos(\xi x') + Y'_n \cos(\eta x') + Z'_n \cos(\zeta x'), \\ Y_n &= X'_n \cos(\xi y') + Y'_n \cos(\eta y') + Z'_n \cos(\zeta y'), \\ Z_n &= X'_n \cos(\xi z') + Y'_n \cos(\eta z') + Z'_n \cos(\zeta z'). \end{aligned} \right\} \tag{a}$$

Die in diesen Beziehungen vorkommenden Richtungskosinusse lassen sich durch die Totalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ und die Spannungskomponenten $X_x, Y_x, Z_x, \dots, Z_z$ wie folgt ausdrücken

$$\left. \begin{aligned} \cos(\xi x') &= \frac{X_x}{\sigma_x}, & \cos(\eta x') &= \frac{Y_x}{\sigma_y}, & \cos(\zeta x') &= \frac{Z_x}{\sigma_z}, \\ \cos(\xi y') &= \frac{Y_x}{\sigma_x}, & \cos(\eta y') &= \frac{Y_y}{\sigma_y}, & \cos(\zeta y') &= \frac{Z_y}{\sigma_z}, \\ \cos(\xi z') &= \frac{Z_x}{\sigma_x}, & \cos(\eta z') &= \frac{Z_y}{\sigma_y}, & \cos(\zeta z') &= \frac{Z_z}{\sigma_z}. \end{aligned} \right\} \tag{b}$$

Setzt man die Beziehungen (b) in jene unter (a) und vergleicht das erhaltene Resultat mit (22), so findet man

$$\cos(n x') = \frac{X'_n}{\sigma_x}, \quad \cos(n y') = \frac{Y'_n}{\sigma_y}, \quad \cos(n z') = \frac{Z'_n}{\sigma_z},$$

woraus sich durch Quadrieren und Addieren

$$\frac{X'^2_n}{\sigma_x^2} + \frac{Y'^2_n}{\sigma_y^2} + \frac{Z'^2_n}{\sigma_z^2} = 1 \tag{30b}$$

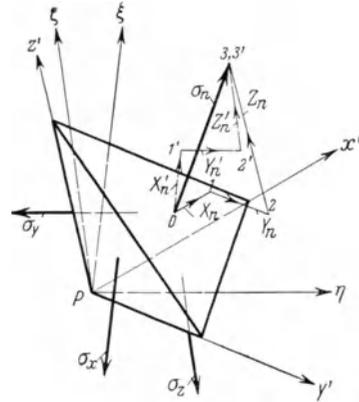


Abb. 18.

ergibt. Setzen wir in der Gleichung (30 b) $X'_n = \xi$, $Y'_n = \eta$, $Z'_n = \zeta$, fassen also die Komponenten der Totalspannung im Koordinatensystem $\xi\eta\zeta$ als Koordinaten einer Fläche auf, so bemerken wir, daß die Gleichung (30 b) das Spannungsellipsoid (30 a) bezogen auf konjugierte Durchmesser vorstellt. Es folgt daraus, daß die Richtungen der Totalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ eines rechtwinkligen unendlich kleinen Prismas konjugierten Durchmessern des Spannungsellipsoides entsprechen.

Um für irgend ein gegebenes, durch P gehendes Flächenelement die zugehörige Totalspannung unter Zuhilfenahme des Spannungsellipsoides leicht zu finden, oder umgekehrt für einen gegebenen Radiusvektor des Spannungsellipsoides als Totalspannung das zugehörige Flächenelement, bedient man sich der Spannungsrichtfläche. Wir gehen zur Herleitung ihrer Gleichung von den Bedingungen (22 f) und der Abb. 16, S. 51 aus, in der wir x', y', z' mit den Hauptspannungsrichtungen zusammenfallen lassen. Das Flächenelement df_n mit der Normalen n und der Totalspannung σ_n hat die Gleichung

$$\alpha \cos(n\alpha) + \beta \cos(n\beta) + \gamma \cos(n\gamma) = a,$$

wenn α, β, γ die laufenden Koordinaten und a den unendlich kleinen Normalabstand des Flächenelementes vom Ursprung P bedeuten. a sei für die unendlich vielen möglichen Flächenelemente, die um P herumgelegt werden können, konstant. Zuzufolge (22 f) können wir die letzte Gleichung in der Form

$$\frac{\alpha A_n}{\sigma_1} + \frac{\beta B_n}{\sigma_2} + \gamma \frac{C_n}{\sigma_3} = a \quad (c)$$

schreiben. Die Tangentialebene der Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung

$$\frac{\alpha^2}{\sigma_1} + \frac{\beta^2}{\sigma_2} + \frac{\gamma^2}{\sigma_3} = \pm K^2 \quad (31)$$

(K eine konstante Zahl) in dem Punkt mit den Koordinaten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ hat die Gleichung

$$\frac{\alpha \alpha_1}{\sigma_1} + \frac{\beta \beta_1}{\sigma_2} + \frac{\gamma \gamma_1}{\sigma_3} = \pm K^2. \quad (d)$$

Die Ebene (d) ist mit der Ebene (c) parallel, wenn

$$\alpha_1 = K_1 A_n, \quad \beta_1 = K_1 B_n, \quad \gamma_1 = K_1 C_n,$$

wobei K_1 ein Proportionalitätsfaktor ist. Bringen wir einen Radiusvektor des Spannungsellipsoides oder dessen Verlängerung zum Schnitt mit der Fläche (31), so erhalten wir einen Durchstoßpunkt, dessen Koordinaten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ proportional den Koordinaten A_n, B_n, C_n des Endpunktes des Radiusvektor ist. Legen wir somit in diesem Durchstoßpunkt eine Tangentialebene an die Fläche (31), so ist dieselbe parallel zu dem Flächenelement, in welchem die Totalspannung übertragen wird, die die Richtung des zum Durchstoßpunkt gezogenen Radiusvektors besitzt. Die Fläche (31) heißt aus diesem Grund die Spannungsrichtfläche. Sind die Hauptspannungen gleich bezeichnet, so kommt auf der rechten Seite von (31) das positive oder negative Zeichen in Betracht, je nachdem die Hauptspannungen positiv oder negativ sind, und die Spannungsrichtfläche ist dann im allgemeinsten Falle ein dreiaxsiges Ellipsoid. Sind eine oder zwei Hauptspannungen negativ, die übrigen positiv, so kommen ähnlich, wie früher für die Normalspannungsfläche entwickelt wurde, zwei Richtflächen (ein- und zweischaliges Hyperboloid mit gemeinsamen Achsen), deren Gleichungen sich nur durch das Zeichen auf der rechten Seite der Gleichung (31) unterscheiden, in Betracht. In die Tangentialebenen des dann existierenden gemeinsamen Asymptotenkegels fallen die Flächenelemente, in denen nur Schubspannungen

übertragen werden. Für einen gegebenen Spannungszustand mit ungleich bezeichneten Hauptspannungen stehen die Erzeugenden des Asymptotenkegels der Spannungsrichtflächen normal auf den Erzeugenden des Asymptotenkegels der Normalspannungsflächen. Für den Fall des ebenen und linearen Spannungszustandes werden die Gleichungen des Spannungsellipsoides und der zugehörigen Richtfläche besondere Formen annehmen.

12a. Das Lamésche Spannungsellipsoid als Bild einer Dyade.

Die Existenz des Laméschen Spannungsellipsoides kommt durch die Beziehung (22b) in Dyadenform zum Ausdruck, durch welche die lineare Zuordnung von Einheitsvektoren \mathfrak{n} in den Richtungen der Flächennormalen zu den Radiusvektoren $\bar{\sigma}_n$ eines Ellipsoides ausgesprochen ist. Das Lamésche Spannungsellipsoid als Fläche ist völlig analog dem Verschiebungsellipsoid in der Kinematik, das in Dyadenform auf Seite 13 dargestellt ist. Die Zuordnung dreier aufeinander normaler Richtungen \mathfrak{r} vor der Deformation zu konjugierten Richtungen des Verschiebungsellipsoides nach der Deformation entspricht jetzt der Zuordnung dreier aufeinander normaler Richtungen \mathfrak{n} als Flächennormalen dreier aufeinander normaler im Punkte P zusammenstoßender Flächenelemente zu konjugierten Durchmessern des Spannungsellipsoides.

13. Die Mohrsche Darstellung des Spannungszustandes.

Mohr (L) hat ein graphisches Verfahren angegeben, das es ermöglicht, die Normalspannung N_n und Schubspannung T_n (Abb. 16, S. 51) für ein beliebiges Flächenelement df_n in der Umgebung eines Punktes des elastischen Körpers rasch aufzufinden, wenn die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in dem Punkt gegeben sind. Diese Aufgabe ist zwar mit den Hilfsmitteln, die bisher angegeben wurden, auch zu lösen, doch hat die Mohrsche Darstellung den Vorteil, von räumlichen Flächen unabhängig zu sein, da sie nur in einer Ebene, der Bildebene arbeitet.

Denken wir uns (Abb. 19) um den Punkt P des elastischen Körpers eine Kugel mit dem unendlich kleinen Radius a beschrieben und durch P ein Koordinatensystem $\alpha\beta\gamma$ in den Hauptspannungsrichtungen gelegt. Einem beliebigen Punkt M der Kugel entspricht die Normale n und ein Flächenelement df_n , das in M tangentiell an die Kugel gelegt wird. In diesem Flächenelement wird eine Total-

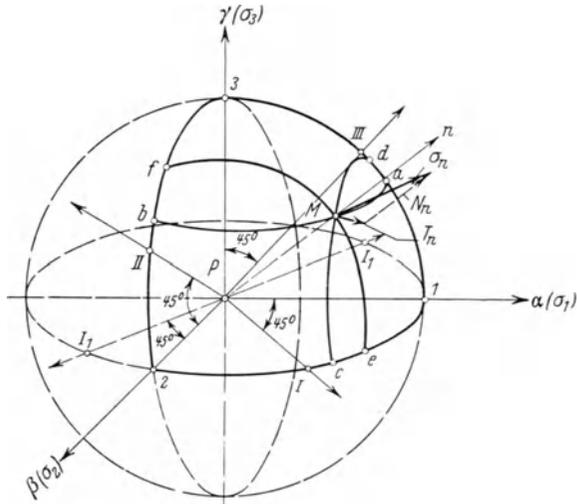


Abb. 19.

spannung

$$\bar{\sigma}_n = t_1 T_n + n_1 N_n = i A_n + j B_n + k C_n$$

übertragen. Für das Weitere setzen wir voraus, daß algebraisch genommen die Beziehung $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ erfüllt ist. Aus (22f) folgt durch Quadrieren und Addieren

$$\sigma_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2(n \alpha) + \sigma_2^2 \cos^2(n \beta) + \sigma_3^2 \cos^2(n \gamma), \tag{a}$$

ferner durch Multiplizieren der genannten Bedingungen der Reihe nach mit $\cos(n\alpha)$, $\cos(n\beta)$, $\cos(n\gamma)$ und Addieren

$$N_n = \sigma_1 \cos^2(n\alpha) + \sigma_2 \cos^2(n\beta) + \sigma_3 \cos^2(n\gamma), \tag{b}$$

schließlich ist

$$T_n^2 = \sigma_n^2 - N_n^2, \tag{c}$$

worin N_n und σ_n aus (a) und (b) einzusetzen wären. Da in den Gleichungen (a), (b) und (c) die Quadrate der Richtungskosinusse vorkommen, folgt, daß für symmetrisch zu den Koordinatenebenen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ gelegte tangentielle Flächenelemente der Kugel sich die Vektoren $\vec{\sigma}_n$ symmetrisch bezüglich der betreffenden Koordinatenebenen verteilen. Wir brauchen also nur die Spannungen in dem stark ausgezogenen Oktanten 1 2 3 der Kugel in Betracht zu ziehen. Wenn wir die Schubspannungen T_n im genannten Oktanten als positiv bezeichnen, so müssen wir die Schubspannungen für Flächenelemente, welche zu einem dem Oktanten entsprechenden beliebigen Flächenelement df_n bezüglich der Koordinatenebenen symmetrisch gelegen sind, als negativ einführen, da z. B. bei Symmetrie zur $\alpha\beta$ -Ebene der durch die Normale auf $\alpha\beta$, also σ_3 und n bestimmte Durchmesser der Kugel durch die in denselben hineinfallenden Komponenten der Schubspannungen entgegengesetzt verdreht wird.

Nun gehen wir daran, jedem Punkt M des Oktanten einen Punkt M' in einer Ebene (Bildebene) derart zuzuordnen, daß M' durch zwei rechtwinkelige

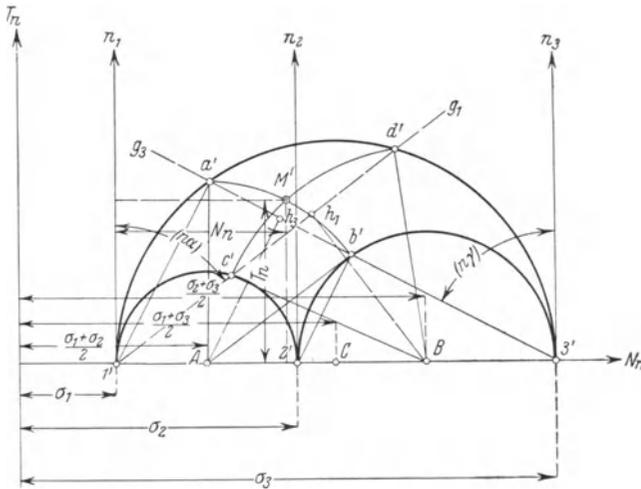


Abb. 19a.

Koordinaten N_n , T_n festgelegt wird, die der Größe und dem Zeichen nach mit den dem Flächenelement df_n zugeordneten Werten N_n , T_n übereinstimmen; das Koordinatensystem, auf welches M' bezogen wird, nennen wir kurz das $N_n T_n$ -System (Abb. 19a). Den Punkten 1, 2, 3 der Kugel entsprechen, weil für die diesen Punkten entsprechenden Flächenelemente die Schubspannungen verschwinden, die Punkte 1', 2', 3' auf der

Abszissenachse N_n , deren Abstände vom Ursprung bzw. σ_1 , σ_2 , σ_3 gleichkommen. Wir fragen jetzt nach dem geometrischen Ort von Punkten in der $N_n T_n$ -Darstellung, welche Flächenelementen entsprechen, die tangentiell an dem Viertelkreis 1 2 liegen. Nach den Bedingungen (22f), in welchen $\cos(n\gamma) = 0$ zu setzen ist, können die Totalspannungen der Flächenelemente des Viertelkreises 1 2 nur in die Ebene $\alpha\beta$ hineinfallen. Zur weiteren Lösung der gestellten Aufgabe können wir so vorgehen, daß wir aus den Gleichungen (b) und (c) und der Bedingung

$$\cos^2(n\alpha) + \cos^2(n\beta) + \cos^2(n\gamma) = 1$$

die Werte der Quadrate der Kosinusse berechnen und dann $\cos(n\gamma)$ gleich Null

setzen. Demgemäß erhalten wir, wenn wir der Kürze halber

$$\cos^2(n\alpha) = m, \quad \cos^2(n\beta) = n, \quad \cos^2(n\gamma) = o$$

setzen, und die Gleichung (c) nach Einsetzen von σ_n aus (a) reduzieren

$$\begin{aligned} N_n &= \sigma_1 m + \sigma_2 n + \sigma_3 o, \\ T_n^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 m n + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n o + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 o m, \\ 1 &= m + n + o. \end{aligned}$$

Die leicht zu bewerkstelligen Lösungen dieser Gleichungen ergeben

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{T_n^2 + (N_n - \sigma_2)(N_n - \sigma_3)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_1)}, \\ n &= \frac{T_n^2 + (N_n - \sigma_3)(N_n - \sigma_1)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_2)}, \\ o &= \frac{T_n^2 + (N_n - \sigma_1)(N_n - \sigma_2)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3)}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Den acht aus (32) folgenden Lösungen für $\cos(n\alpha)$, $\cos(n\beta)$, $\cos(n\gamma)$ entsprechen die 8 Oktanten unserer um P beschriebenen unendlich kleinen Kugel. Setzen wir $\cos(n\gamma) = 0$, so erhalten wir aus der dritten der Lösungen (32)

$$T_n^2 + (N_n - \sigma_1)(N_n - \sigma_2) = 0$$

als Gleichung mit den Variablen N_n , T_n des geometrischen Ortes der Punkte, welche den Punkten auf dem Viertelkreise 12 entsprechen. Statt der letzten Gleichung können wir

$$T_n^2 + \left[N_n - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} \right]^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right)^2 \quad (d)$$

schreiben. Der fragliche geometrische Ort ist demnach ein Kreis mit dem Radius $r_{12} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$ und den Mittelpunktskoordinaten

$$p_{12} = 0, \quad q_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (e)$$

Der Mittelpunkt A dieses Kreises liegt in der Hälfte zwischen den Punkten $1'$ und $2'$ und der Kreis selbst geht durch diese Punkte. Offenbar gilt zufolge des positiven Vorzeichens von T_n für den Viertelkreis 12 nur der Halbkreis $1'2'$ ober der Abszissenachse. Ähnlich finden wir für die Flächenelemente tangentiell an die Viertelkreise $3, 1$ oder $2, 3$ als geometrische Örter der ihnen entsprechenden Bildpunkte durch Nullsetzen von $\cos(n\alpha)$ oder $\cos(n\beta)$ in den Beziehungen (32) die Halbkreise $2', 3'$ oder $3', 1'$ mit den Mittelpunkten B bzw. C auf der N_n -Achse und den Radien bzw. Mittelpunktskoordinaten

$$\left. \begin{aligned} r_{23} &= \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}, & r_{31} &= \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \\ p_{23} &= 0, & p_{31} &= 0, \\ q_{23} &= \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, & q_{31} &= \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Der größte Kreis $1'3'$ mit dem Mittelpunkt C , entsprechend dem Viertelkreis 13 , dessen Ebene jener der algebraischen größten und algebraischen kleinsten Hauptspannung ist, heißt der Hauptkreis, die beiden anderen Kreise $1'2'$, $2'3'$ mit den Mittelpunkten in A bzw. B heißen Nebenkreise. Sämtliche Punkte des

stark ausgezogenen Kugeloktanten der Abb. 19 werden oberhalb der Abszissenachse N_n in dem Teil der Bildebene, der zwischen dem Hauptkreis und den Nebenkreisen liegt, abgebildet.

Der zu dem beliebigen Punkt M gehörige Abbildungspunkt M' wird gefunden, indem man ihn als Schnitt der Abbildungskurven darstellt, welche zwei durch den Punkt M gehenden zu den Koordinatenebenen parallelen im Oktanten 1, 2, 3 liegenden Kreisteilen entsprechen. Würden wir z. B. den Punkt M als Schnittpunkt der Parallelkreisteile ab , cd betrachten, die zur $\alpha\beta$ - und $\beta\gamma$ -Ebene parallel gewählt sind, so hätten wir, um die diesen Kreisteilen entsprechenden Abbildungskurven der Mohrschen Darstellung zu erhalten, in den Lösungen (32)

$$\cos(n\gamma) = K_3, \quad \cos(n\alpha) = K_1$$

(K_3, K_1 konstant) zu setzen, d. h. diese Abbildungskurven wären durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} K_3(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3) &= T_n^2 + (N_n - \sigma_1)(N_n - \sigma_2), \\ K_1(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_1) &= T_n^2 + (N_n - \sigma_2)(N_n - \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

gegeben, wenn N_n, T_n veränderlich aufgefaßt werden. Der Vollständigkeit halber fügen wir gleich noch die Gleichung des dritten geometrischen Ortes hinzu, der einem Kreisteil ef parallel zur $\alpha\gamma$ -Ebene in der $N_n T_n$ -Darstellung entspricht. Da für diesen Kreisteil $\cos(n\beta) = K_2$ (K_2 konstant) sein muß, so lautet die Gleichung des geometrischen Ortes auf Grund der Lösungen (32)

$$K_2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_2) = T_n^2 + (N_n - \sigma_3)(N_n - \sigma_1). \quad (f)$$

K_1, K_2, K_3 müssen natürlich für die drei genannten zu den Koordinatenebenen parallelen Kreisteile der Bedingung $K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = 1$ genügen. Die 3 Abbildungskurven (f) sind Kreise mit den Radien

$$\left. \begin{aligned} r_{\alpha\beta} &= \sqrt{K_3(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2}, \\ r_{\beta\gamma} &= \sqrt{K_1(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2) + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}\right)^2}, \\ r_{\gamma\alpha} &= \sqrt{K_2(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

und den zugehörigen Mittelpunkten in A, B und C . Die für die Radien $r_{\alpha\beta}, r_{\beta\gamma}, r_{\gamma\alpha}$ aufgestellten Formeln gelten für alle möglichen zusammengehörigen Werte von K_1, K_2, K_3 , also auch für $K_3 = 0$ oder $K_2 = 0$ oder $K_1 = 0$. In diesen besonderen Fällen erhalten wir als Radien der Abbildungskreise jene des Hauptkreises und der beiden Nebenkreise. Von den Abbildungskreisen (f) kommen in der Mohrschen Darstellung nur die Teile in Betracht, welche zwischen dem Hauptkreis und einem der beiden Nebenkreise liegen. Für die Punkte 1, 2, 3, für die je einer von den drei Parallelkreisteilen in je einem Punkte zusammenschumpft, geht auch je einer von den drei zugeordneten Abbildungskreisen in je einen der Punkte 1', 2', 3' über. Die größten Werte $R_{\alpha\beta}, R_{\beta\gamma}, R_{\gamma\alpha}$ der Radien $r_{\alpha\beta}, r_{\beta\gamma}, r_{\gamma\alpha}$ ergeben sich bzw. für $K_3 = 1, K_1 = 1$ und $K_2 = 0$ aus

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}^2 &= (\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4} = \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 = (A3')^2, \\ R_{\beta\gamma}^2 &= (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{4} = \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 = (B1')^2, \\ R_{\gamma\alpha}^2 &= \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 = (C1')^2 = r_{31}^2. \end{aligned}$$

Diese größten Abbildungskreise kommen nur mit je einem Punkte $3'$ und I' entsprechend den Punkten 3 und I der Kugel und mit dem Hauptkreise $I'3'$ entsprechend dem Viertelkreise $I3$ auf der Kugel in Betracht. Die kleinsten Werte $Q_{\alpha\beta}$, $Q_{\beta\gamma}$, $Q_{\gamma\alpha}$ der Radien $r_{\alpha\beta}$, $r_{\beta\gamma}$, $r_{\gamma\alpha}$ ergeben sich bzw. für $K_3 = 0$, $K_1 = 0$, $K_3 = 1$ aus

$$Q_{\alpha\beta}^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)^2}{4} = (A I')^2 = r_{12}^2,$$

$$Q_{\beta\gamma}^2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma_2)^2}{4} = (B 3')^2 = r_{23}^2,$$

$$Q_{\gamma\alpha}^2 = (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3) + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4} = \left[\sigma_2 - \frac{(\sigma_3 + \sigma_1)}{2} \right]^2 = (C 2')^2.$$

Die kleinsten Abbildungskreise kommen nur mit einem Punkt $2'$ entsprechend dem Punkte 2 der Kugel und mit den beiden Nebenkreisen $I'2'$, $2'3'$ entsprechend den Viertelkreisen $I2$, 23 auf der Kugel in Betracht. Nachdem für einen beliebigen Parallelkreis parallel zur $\alpha\beta$ -Ebene entsprechend den Formeln (g)

$$\begin{aligned} r_{\alpha\beta}^2 &= \cos^2(n\gamma)(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4} \left[\cos^2(n\gamma) + \sin^2(n\gamma) \right] \\ &= \cos^2(n\gamma) \left[\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right]^2 + \sin^2(n\gamma) \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4} \end{aligned}$$

und für einen beliebigen Parallelkreis parallel zur $\beta\gamma$ -Ebene ähnlich

$$r_{\beta\gamma}^2 = \cos^2(n\alpha) \left[\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right]^2 + \sin^2(n\alpha) \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{4}$$

geschrieben werden kann, ergibt sich folgende graphische Konstruktion (Abb. 19a) zur Bestimmung dieser Radien; man errichtet in den Punkten I' und $3'$ je eine Normale n_1 bzw. n_3 auf die Abszissenachse N_n und trägt sich von diesen Normalen die dem Punkt M zukommenden Winkel $n\alpha$ bzw. $n\gamma$ in dem aus der Abb. ersichtlichen Sinne auf. Die beiden Geraden g_1 und g_3 , die hierdurch erhalten werden, schneiden die durch die Punkte I' bzw. $3'$ hindurchgehenden Kreise (Hauptkreis und je ein Nebenkreis) in den Punkten c' , d' bzw. a' , b' . Verbinden wir A mit a' und b' , ferner den Punkt B mit c' und d' , so erhalten wir die beiden gleichschenkeligen Dreiecke $Aa'b'$ und $Bc'd'$, deren Schenkel $Aa' = Ab'$ und $Bc' = Bd'$ den Radien $r_{\alpha\beta}$ bzw. $r_{\beta\gamma}$ gleichkommen; denn die Geraden $I'a'$ und $2'b'$ ebenso die Normale Ah_3 zur Geraden g_3 schließen mit der Achse N_n den Winkel $n\gamma$ ein, sind demnach parallel, woraus, da

$$I'A = A2' = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2},$$

$$h_3 a' = h_3 b' = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin(n\gamma) \quad \text{und} \quad A h_3 = A 3' \cos(n\gamma) = \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \cos(n\gamma)$$

folgt. Es ist sonach

$$(A a')^2 = (A b')^2 = (A h_3)^2 + (h_3 b')^2 = r_{\alpha\beta}^2.$$

Ähnlich ist zu beweisen, daß $(B d')^2 = (B c')^2 = (h_1 B)^2 + (h_1 c')^2 = r_{\beta\gamma}^2$ sein muß. Der Schnittpunkt M' der aus A bzw. B mit den Radien $A a'$ bzw. $B c'$ beschriebenen Kreise entspricht somit dem Punkte M , und die Parallelkreisteile ab bzw. cd werden durch die Kreisteile $a'b'$ bzw. $c'd'$ abgebildet. Die Konstruktion des Radius $r_{\gamma\alpha}$, der natürlich bereits durch $C M'$ gegeben ist, wenn $r_{\alpha\beta}$ und $r_{\beta\gamma}$ bereits gefunden wurde, ergibt sich aus dem Vorstehenden von selbst: der Winkel $(n\beta)$ wäre von der auf N_n im Punkte $2'$ Normalen n_2 im Uhrzeigersinn

oder hierzu entgegengesetzt aufzutragen und die Schnittpunkte der dann erhaltenen Geraden mit den beiden Nebenkreisen aufzusuchen, deren Verbindungsstrecke zum Punkt C den Radius $r_{\gamma\alpha}$ ergibt. Sind z. B. die Winkel $(n\gamma)$ und $(n\alpha)$ komplementär, so schneiden sich die beiden Geraden g_1 und g_3 in einem

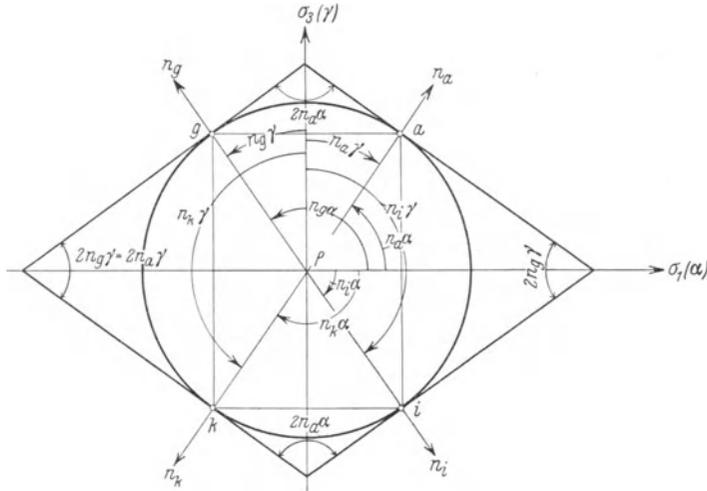


Abb. 19b.

Punkte des Hauptkreises. Dem Flächenelement mit der Normalen n_a des Punktes a des Hauptmeridiankreises (Abb. 19b) der unendlich kleinen Kugel entspricht, dem Gesagten zufolge, der Punkt a' des Hauptkreises (Abb. 19c), wobei $\sphericalangle n_3 z' a' = \sphericalangle n_a \gamma = \sphericalangle \sigma_3 P a$ und $\sphericalangle n_1 I' a' = \sphericalangle n_a \alpha = \sphericalangle \sigma_1 P a$ und die Zuordnung des Winkelpfeilsinnes der Winkel $n_a \gamma, n_a \alpha$ aus den Abb. ersichtlich ist. Dem zu a bezüglich der $\alpha\beta$ -Ebene symmetrisch gelegenen Punkt i der Kugel mit der Kugelnormalen n_i entspricht in der Mohrschen Darstellung der bezüglich der N_n -Achse symmetrisch gelegene Punkt i' ($\sphericalangle n_i \alpha = \sphericalangle \sigma_1 P i$ als negativer Winkel von der Normalen n_1 im negativen Sinne, $\sphericalangle n_i \gamma = \sphericalangle \sigma_3 P i$ als stumpfer positiver Winkel im positiven Sinne von n_3 aus aufgetragen). Der symmetrisch zu a bezüglich der $\beta\gamma$ -Ebene gelegene Punkt g hat in der

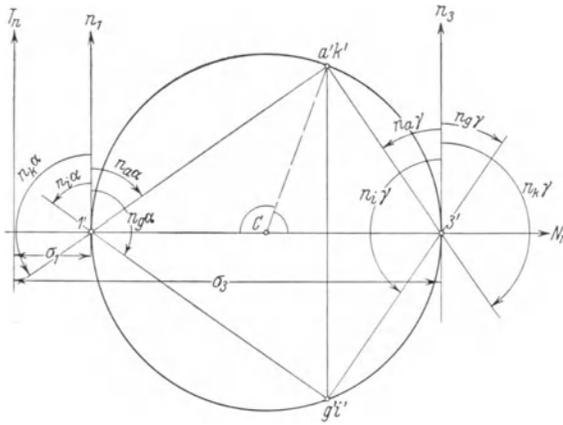


Abb. 19c.

Mohrschen Darstellung den Punkt g' zugeordnet, der sich mit dem Punkt i' deckt; dagegen ist dem symmetrisch zu i bezüglich der $\beta\gamma$ -Ebene gelegene Punkt k wieder der Punkt a' zugeordnet. Wir sehen sonach, daß 2 symmetrisch bezüglich der N_n -Achse gelegenen Punkten des Hauptkreises zwei Paare zueinander parallele an die unendlich kleine Kugel tangentielle und zur $\sigma_1\sigma_3$ -Ebene normale Flächenelemente zugeordnet sind, welche zusammen einem schiefwinkligen Prisma

mit den Flächenwinkeln $2(n_a \alpha)$ und $2(n_a \gamma)$ angehören. Diese beiden Winkel erscheinen in der Mohrschen Darstellung auch als Zentriwinkel bei C . Schließlich bemerken wir, daß zu jeder Normalspannung N_n eine unendlich große Zahl von möglichen Werten T_n gehören, von denen die beiden auf dem Hauptkreise liegenden dem Zahlenwerte nach die größten sind.

14. Extreme Werte der Schubspannungen für einen dreidimensionalen Spannungszustand.

Den in der Darstellung Abb. 19 mit I, II, III bezeichneten Punkten, die in den Hauptebenen Flächenelementen entsprechen, deren Normale unter 45° zu den Hauptspannungsrichtungen geneigt sind, entsprechen in der Mohrschen Darstellung (Abb. 19d) die Punkte I', II', III' mit den Schubspannungen

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \tag{33}$$

und Normalspannungen

$$(N_n)_{\tau_1} = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}, \quad (N_n)_{\tau_2} = \frac{\sigma_3 + \sigma_2}{2}, \quad (N_n)_{\tau_3} = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}.$$

Den bezüglich der Koordinatenebenen $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ symmetrisch gelegenen Punktepaaren I_1, II_1, III_1 (nur das Punktepaar I_1, I_1 ist in der Abb. 19 gezeichnet) entsprechen in der Mohrschen Darstellung die Punkte I'_1, II'_1, III'_1 , also Werte der Schubspannungen, welche sich von jenen in (33) nur durch das Zeichen unterscheiden. Wir können somit sagen: für einen beliebigen räumlichen Spannungszustand gibt es für jede Hauptebene Flächenelemente, deren Normale unter 45° bzw. 135° gegen die zugehörigen Hauptspannungen geneigt sind, für welche die Schubspannungen extreme, entgegengesetzt gleiche Werte, die Normalspannungen aber je einen Wert erlangen, der gleich dem Mittelwerte der zugehörigen Hauptspannungen ist.

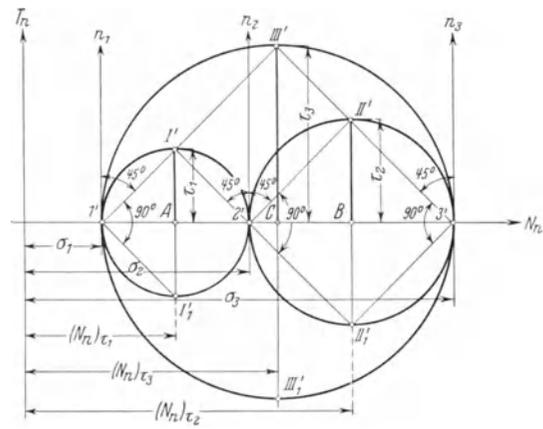


Abb. 19d.

Die beiden dem Zahlenwerte nach größten Extreme entsprechen je einem Flächenelement, deren Normale unter 45° bzw. 135° zur Richtung der algebraisch kleinsten Hauptspannung σ_1 und in der Ebene der algebraisch größten und kleinsten Hauptspannung liegen.

15. Beispiele.

1. Der räumliche hydrostatische Spannungszustand. Für diesen Spannungszustand, der z. B. im Innern einer ruhenden Flüssigkeit oder in einem festen Körper entsteht, der in eine unter hohen Druck gesetzte ruhende Flüssigkeit eintaucht (die Spannungen, die durch das Eigengewicht entstehen, werden dabei vernachlässigt, s. S. 99), sind die 3 Hauptspannungen negativ und dem Zahlenwerte nach gleich. Wir setzen demgemäß

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p, \quad p < 0. \tag{a}$$

Aus den Gleichungen (29) auf Seite 58 ersieht man, wenn Bedingungen nach Art von (14a), S. 36 beachtet werden, daß

$$X_x = Y_y = Z_z = p \quad \text{und} \quad X_y = Y_z = Z_x = 0. \quad (b)$$

Jedes Flächenelement mit der Normalen n in der Umgebung des Punktes P empfängt den gleichen normalen Druck p , der zugleich die Totalspannung ist. Die Normalspannungsfläche und das Spannungsellipsoid werden Kugeln mit den beziehungsweisen Gleichungen

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{k^2}{p}, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = p^2 \quad (c)$$

und den Radien $-p$ bzw. $\frac{k}{\sqrt{-p}}$. Desgleichen ist die Gleichung der Spannungsrichtfläche jene einer Kugel:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -p K^2 \quad (d)$$

mit dem Radius $K\sqrt{-p}$. In der Mohrschen Darstellung schrumpfen Haupt- und Nebenkreise in einen auf der negativen Abszissenachse gelegenen Punkt mit der Abszisse p zusammen. Aus ihr ersieht man auch, daß es für diesen Spannungszustand kein Flächenelement gibt, in welchem Schubspannungen übertragen werden.

2. Der allgemeine ebene Spannungszustand. Für diesen wichtigen Spannungszustand verschwindet eine von den 3 Hauptspannungen, z. B. σ_2 . Die Normalspannungsfläche bezogen auf die Hauptspannungsrichtungen, hat dann die Gleichung

$$\sigma_1 \alpha^2 + \sigma_3 \gamma^2 = \pm k^2$$

und ist demnach entweder ein elliptischer Zylinder, dessen Erzeugende normal zur $\alpha\gamma$ -Ebene stehen, wenn σ_1 und σ_3 gleich bezeichnet sind, oder sie besteht aus 2 hyperbolischen Zylindern mit gemeinsamen Asymptotenebenen, deren Erzeugende normal zur $\alpha\gamma$ gerichtet sind, wenn die Hauptspannungen ungleich bezeichnet sind. Die Asymptotenebenen scheiden die Flächenelemente voneinander, die positive bzw. negative Normalspannungen erleiden. Durch den Punkt P gehenden Radiusvektoren der Normalspannungsfläche, welche in den Asymptotenebenen liegen, entsprechen Flächenelemente, für welche die Normalspannungen Null sind. Die Asymptotenebenen, denen somit nur Schubspannungen als Totalspannungen entsprechen, heißen Schiebungsflächen, entsprechend dem Schiebungskegel beim allgemeinsten Spannungszustand (P. 9).

Wählen wir im Punkte P ein Koordinatensystem $x'y'z'$ derart, daß die y' -Achse mit der Achse β zusammenfällt, die Achsen x', z' aber gegen die α, γ -Achsen bzw. um den gleichen Winkel φ verdreht sind; die Spannungskomponenten für das Koordinatensystem $x'y'z'$ werden aus den Gleichungen (29) erhalten, wenn wir in ihnen $\sigma_2 = 0$ und

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \cos \varphi, & \gamma_x &= \sin \varphi, \\ \alpha_y &= 0, & \gamma_y &= 0, \\ \alpha_z &= \sin \varphi, & \gamma_z &= \cos \varphi \end{aligned}$$

setzen. Wir erhalten dann aus den genannten Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_3 \sin^2 \varphi, \\ Z_z &= \sigma_1 \sin^2 \varphi + \sigma_3 \cos^2 \varphi, \\ Z_x &= (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

die übrigen Spannungskomponenten verschwinden. Für einen ebenen Spannungszustand gibt es demnach eine unendlich große Zahl von unendlich kleinen recht-

winkeligen Prismen, für welche die Spannungskomponenten die Eigenschaft haben, daß sie in einer Ebene liegen; die Ebene des Spannungszustandes ist parallel zu jenen Flächenelementen, deren Hauptspannung verschwindet. Für ein beliebig zu den Hauptspannungen orientiertes Prisma sind aber alle 6 Spannungskomponenten auch bei ebenem Spannungszustand vorhanden.

Gewöhnlich geht man bei Betrachtung des ebenen Spannungszustandes von einem Prisma aus, für welches die Spannungskomponenten in einer Ebene liegen, und sucht Richtungen und Größe der Hauptspannungen unter Zuhilfenahme der Bedingungen für das Gleichgewicht eines schief abgeschnittenen rechtwinkligen Prismas, $P12$ (Abb. 20). Die Normale n für das beliebige zur $x'z'$ -Ebene normal stehende Flächenelement 12 schließe mit der x' -Achse den Winkel λ ein. Die Gleichgewichtsbedingung für das Prisma $P12$ können wir entweder aus der Abbildung direkt ablesen, oder unmittelbar durch Spezialisierung aus den Tetraederbedingungen (22) finden. Die letzteren nehmen jetzt, da

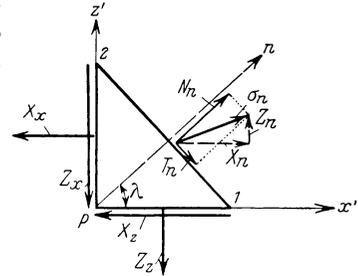


Abb. 20.

$$\cos(n x') = \cos \lambda, \quad \cos(n y') = 0, \quad \cos(n z') = \sin \lambda$$

die Form an:

$$X_n = X_x \cos \lambda + X_z \sin \lambda, \quad Y_n = 0, \quad Z_n = Z_x \cos \lambda + Z_z \sin \lambda. \quad (b)$$

Aus der Abb. 20 ergibt sich durch Projektion von X_n und Z_n auf die Richtung von N_n und T_n

$$N_n = X_n \cos \lambda + Z_n \sin \lambda, \quad T_n = X_n \sin \lambda - Z_n \cos \lambda,$$

woraus, wenn wir X_n und Z_n aus (b) einsetzen,

$$\begin{aligned} N_n &= X_x \cos^2 \lambda + Z_z \sin^2 \lambda + 2 X_z \cos \lambda \sin \lambda, \\ T_n &= (X_x - Z_z) \cos \lambda \sin \lambda + X_z (\sin^2 \lambda - \cos^2 \lambda) \end{aligned} \quad (34)$$

folgt. Suchen wir die Extremwerte der Normalspannungskomponenten N_n , so erhalten wir die Hauptspannungen (S. 55). Für diese muß demnach

$$\frac{dN_n}{d\lambda} = (Z_z - X_x) \sin 2\lambda + 2 X_z \cos 2\lambda = 0$$

bestehen, woraus für die Richtungen der Hauptspannungen die Bestimmungsgleichung folgt:

$$\operatorname{tg} 2\lambda = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 X_z}{X_x - Z_z}. \quad (35)$$

Aus (35) folgt, daß es zwei um 90° voneinander verschiedene Winkel geben muß, für welche die Normalspannungen Extremwerte annehmen (S. 55). Setzen wir die Lösung (35) in den Wert für N_n in (34) ein, so erhalten wir für die Größe der Hauptspannungen die Werte:

$$\sigma_{1,3} = \frac{X_x + Z_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(X_x - Z_z)^2 + 4 X_z^2}. \quad (36)$$

Die eine von den beiden Lösungen (36) erweist sich als Minimalwert, die andere als Maximalwert der Normalspannungen N_n . Wie man sich leicht überzeugt, verschwinden die Schubspannungen T_n in (34) für Winkel $\lambda = \varphi$, wie sie aus (35) folgen (S. 55ff.).

Die gleichen Resultate ergeben sich auch aus (27 a) und (27 b), wenn wir

$$\cos \nu x' = \cos \lambda, \quad \cos(\nu y') = 0, \quad \cos(\nu z') = \sin \lambda,$$

und alle Spannungskomponenten mit Ausnahme von X_x, Z_z, Z_x Null setzen. Aus (27 a) z. B. folgt

$$\begin{array}{ccc} X_x - N_n & 0 & X_z \\ 0 & -N_n & 0 \end{array} = 0, \text{ d. h. } (N_{n,2}) = \sigma_2 = 0 \quad \text{und} \\ Z_x & 0 & Z_z - N_n \quad N_n^2 - N_n(X_x + Z_z) + X_x Z_z - Z_x^2 = 0.$$

Durch Lösung der letzten quadratischen Gleichung nach N_n erhalten wir wieder die bereits gefundenen Werte der Hauptspannungen σ_1 und σ_3 .

So wie beim räumlichen Spannungszustand gibt es auch jetzt Flächenelemente in der Umgebung des Punktes P , die extreme Werte der Schubspannungen und zugeordnete Werte der Normalspannungen empfangen. Ein Wertepaar der extremen Schubspannungen wird unter Zuhilfenahme der Extremwertbedingung für T_n in (34)

$$\frac{dT_n}{d\lambda} = 0, \text{ d. h. } (X_x - Z_z) \cos 2\lambda + 2X_z \sin 2\lambda = 0$$

gefunden. Aus der zuletzt angeschriebenen Bedingung folgt

$$\operatorname{tg} 2\lambda = \operatorname{tg} 2\psi = \frac{Z_z - X_x}{2X_z} \quad (37)$$

und durch Einsetzen der Lösung (37) in die allgemeinen Ausdrücke (34) ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} \tau_3 = \pm \sqrt{4X_z^2 - (Z_z - X_x)^2} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \\ (N_n)_{\tau_3} = \frac{X_x + Z_z}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \end{array} \right\} \quad (38)$$

Wenn wir bei Vergleich der Formeln (35) und (37) bedenken, daß

$$\operatorname{tg} 2\varphi \operatorname{tg} 2\psi = -1,$$

können wir sagen: für den Fall des ebenen Spannungszustandes gibt es 2 zu den Hauptspannungsrichtungen unter je 45° geneigte aufeinander normale Richtungen, deren zugeordnete Flächenelemente maximale bzw. minimale Schubspannungen τ_3 erhalten, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden und deren absolute Werte sich als halbe Differenz der zugeordneten Hauptspannungen ergeben. Dieses Resultat ist ein spezielles, weil wir für die Ableitung desselben $\cos(n\beta) = 0$ vorausgesetzt haben, und wird weiter unten auf Grund der Mohrschen Darstellung erweitert werden. (Siehe auch die allgemeinen Resultate auf S. 67 für den räumlichen Spannungszustand.)

Die Tetraederbedingungen (22f) bezogen auf das Hauptspannungskreuz, lauten im Falle der Annahme $\sigma_2 = 0$

$$A_n = \sigma_1 \cos(n\alpha), \quad B_n = 0, \quad C_n = \sigma_3 \cos(n\gamma),$$

woraus, wenn A_n und C_n als variable Koordinaten α, γ einer Kurve angesehen werden,

$$\frac{\alpha^2}{\sigma_1^2} + \frac{\gamma^2}{\sigma_3^2} = \cos^2(n\alpha) + \cos^2 n\gamma = 1 - \cos^2(n\beta) = \sin^2(n\beta) \quad (39)$$

folgt. Durch die Gleichung (39) ist eine Schar von in der $\alpha\gamma$ -Ebene liegenden Ellipsen mit gemeinsamen Achsenrichtungen gegeben, die als Spannungsellipsen für den ebenen Spannungszustand bezeichnet werden: wird $(n\beta)$ konstant ge-

wählt, d. h. nehmen wir die Normalen n als Erzeugende eines doppelten Kreiskegels an mit der Spitze im Punkte P , der β -Achse als Kegelachse und mit dem Öffnungswinkel $2(n\beta)$, so erhalten wir eine Spannungsellipse, deren Halbachsen $\sigma_1 \sin(n\beta), \sigma_3 \sin(n\beta)$ sind. Für die Ebene der Hauptspannungen $\sigma_1 \sigma_3$ wird $n\beta = \frac{\pi}{2}$ und die Gleichung dieser besonderen Spannungsellipse, welche oft schlechthin als die Spannungsellipse bezeichnet wird, lautet dann

$$\frac{\alpha^2}{\sigma_1^2} + \frac{\beta^2}{\sigma_3^2} = 1. \tag{40}$$

Jeder Radiusvektor einer Spannungsellipse ist gleich der Totalspannung σ_n und entspricht einem Flächenelement, dessen Lage zu σ_n aus der sog. Spannungsrichtkurve bestimmt werden kann, die sich für den ebenen Spannungszustand aus völlig ähnlichen Betrachtungen ergibt, wie sie zur Herleitung der Gleichung der Spannungsrichtfläche für den räumlichen Spannungszustand gepflogen wurden. Die zur Normalen n eines Flächenelementes normale Ebene mit unendlich kleinem Abstand a vom Punkt P , d. i.

$$\alpha \cos(n\alpha) + \beta \cos(n\beta) + \gamma \cos(n\gamma) = a$$

schneidet die $\alpha\gamma$ -Ebene in der Geraden,

$$\alpha \cos(n\alpha) + \gamma \cos(n\gamma) = a,$$

wofür unter Zuhilfenahme der oben angeschriebenen Tetraederbedingungen auch

$$\frac{\alpha A_n}{\sigma_1} + \gamma \frac{C_n}{\sigma_3} = a$$

geschrieben werden kann. Diese Gerade ist parallel zur Tangente im Schnittpunkt des σ_n entsprechenden Radiusvektors einer Spannungsellipse mit der Kurve

$$\frac{\alpha^2}{\sigma_1} + \frac{\gamma^2}{\sigma_3} = \pm K^2 \quad (K \text{ eine konstante Zahl}). \tag{41}$$

Die Gleichung (41) ist jene der Spannungsrichtkurve. Sie kann eine Ellipse (bei gleichem Vorzeichen der Hauptspannungen) oder 2 Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten (bei ungleicher Bezeichnung der Hauptspannungen) bedeuten. In der Abb. 20a, in welcher die Spannungsellipse mit A und die zugehörige Spannungsrichtkurve mit B bezeichnet sind, ist nur der zuletzt genannte Fall in Betracht gezogen.

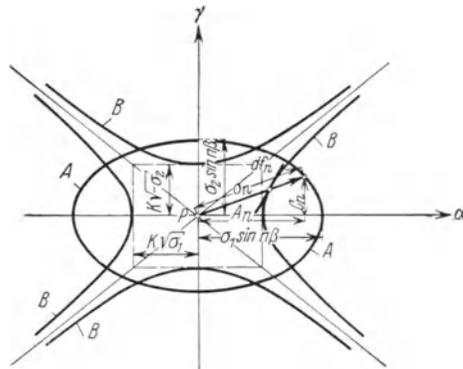


Abb. 20a.

Die Mohrsche Darstellung des ebenen Spannungszustandes wird aus jener in Abb. 19a erhalten, indem wir einen von den drei Punkten $I', 2', 3'$ mit dem Ursprung des Koordinatensystemes $N_n T_n$ zusammenfallen lassen. Außer den bereits oben gefundenen extremen Werten der Schubspannung τ_3 lesen wir aus der Mohrschen Darstellung nunmehr auch die extremen Werte τ_1 und τ_2 ab, welche in der $\alpha\beta$ - und $\beta\gamma$ -Ebene liegen und in der früheren Bezeichnungsweise die Größe $\frac{\sigma_3}{2}$ bzw. $\frac{\sigma_1}{2}$ besitzen.

Als besondere ebene Spannungszustände wollen wir

- a) den ebenen hydrostatischen Spannungszustand,
 - b) den reinen Schubspannungszustand
- näher betrachten.

3a. Der ebene hydrostatische Spannungszustand. Dieser Spannungszustand ist gekennzeichnet durch die Gleichheit der 2 auftretenden Hauptspannungen, die Druckspannungen sind. Er tritt beispielsweise auf, wenn ein rechtwinkeliges Prisma auf 4 Seitenflächen nach Abb. 21 mit $p \text{ kg/cm}^2$ belastet ist. Diese Belastung wird als Umschlingungsdruckbeanspruchung bezeichnet. Die Hauptspannungen erhalten, wenn vom Eigengewicht des Prismas abgesehen wird, die Werte $\sigma_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_3 = p$ mit $p < 0$ und für jeden Punkt desselben sind die Ebenen der Hauptspannungen parallel zu den beiden nicht belasteten Flächen. Für Flächenelemente normal zu diesen Ebenen gibt es keine ausgezeichneten Richtungen, sämtliche Normalspannungen sind zugleich Totalspannungen und zugleich Hauptspannungen. Der Nachweis erfolgt ähnlich dem Nachweise beim räumlichen hydrostatischen Spannungszustand unter Zuhilfenahme der Gleichungen (29) auf Seite 58. Was beim räumlichen hydrostatischen Spannungszustand für den Raum galt, ist jetzt nur für die genannten Ebenen zutreffend. Man sieht leicht, daß die Normalspannungsfläche ein Kreiszyylinder vom Radius $\frac{k}{\sqrt{-p}}$ ist, dessen Erzeugende normal zu den genannten Hauptspannungsebenen stehen, daß ferner die Spannungsellipsen durch Kreise mit dem Radius $-p \sin(n\beta)$ dargestellt sind, und daß schließlich die Spannungsrichtkurve gleichfalls ein Kreis vom Radius $K \sqrt{-p}$ wird. Die Mohrsche Darstellung besteht aus einem einzigen, die negative N_n -Achse schneidenden Kreis, der durch den Ursprung des $N_n T_n$ -Systems geht, da der Hauptkreis mit einem der beiden Nebenkreise zusammenfällt, während der zweite Nebenkreis in einen Punkt zusammenschrumpft. Er gibt hier 2 der Größe nach zusammenfallende extreme Werte der Schubspannungen $\tau_3 = \tau_2 = \pm \frac{p}{2}$, für welche die zugehörige Normalspannung den Wert $\frac{p}{2}$ besitzt.

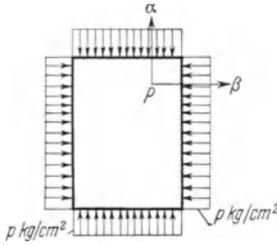


Abb. 21.

3b. Die Beanspruchung auf reinen Schub. Wenn für ein rechtwinkeliges Prisma in einem Punkte P nur Schubspannungen parallel zu einer Prismenebene auftreten, so liegt reine Schubbeanspruchung vor. Es sei wie in Abb. 14, S. 42 vorausgesetzt, daß die $x'z'$ -Ebene jene Ebene sei, parallel zu welcher die Schubspannungen $Z_x = Z_z$ wirken. Um die in der Ebene der Schubspannungen wirkenden Hauptspannungen σ_1, σ_2 ihrer Größe und Richtung nach zu bestimmen, setzen wir in den Gleichungen (35) und (36) $X_x = Z_z = 0$ und erhalten $\text{tg } 2\varphi = \infty$, d. h. $\varphi_1 = 45^\circ, \varphi_2 = 135^\circ$ und $\sigma_{1,3} = \pm Z_x$. Bei reiner Schubbeanspruchung sind die Hauptspannungen entgegengesetzt gleich und dem Zahlenwerte nach gleich der Schubspannung, die Richtungen der Hauptspannungen liegen zu den Schubspannungen um 45° bzw. 135° verdreht. In Abb. 22 ist das Hauptspannungsprisma durch $P145$, der auf reinen Schub beanspruchte Würfel durch $P123$ dargestellt. Die Schubspannungen $X_z = Z_x$ sind extreme Schubspannungen, es liegt somit hier der besondere Fall vor, daß in Flächenelementen extremer Schubspannungswerte die Normalspannungen verschwinden. Nach unserer früheren Bezeichnung müssen wir

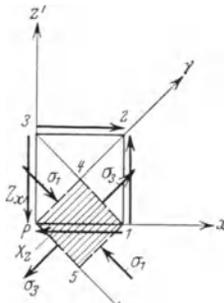


Abb. 22.

$$\tau_3 = \pm Z_x = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \pm \sigma_3$$

(Punkt 14, S. 67) setzen. Die beiden anderen Paare der Extremwerte der Schub-

spannungen in den Ebenen $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ wären nunmehr durch

$$\tau_1 = \tau_2 = \pm \frac{\sigma_3}{2} = \pm \frac{Z_x}{2}$$

gegeben (siehe hierzu auch die weiter unten folgende Mohrsche Darstellung).

Die Normalspannungsfläche, bezogen auf das Hauptachsenkreuz, besteht aus 2 gleichseitigen um 90° gegeneinander verdrehten gleichseitigen hyperbolischen Zylindern, deren Erzeugende normal auf die Ebene $\alpha\gamma$ der Schubspannungen stehen. Ihre Gleichung ist durch

$$\sigma_3(\gamma^2 - \alpha^2) = \pm k^2$$

gegeben. Die Spannungsellipsen werden Kreise von Radius $Z_x \sin(n\beta) = \sigma_3 \sin(n\beta)$ und der Gleichung

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \sigma_3^2 \sin^2(n\beta).$$

Die Spannungsrichtkurve (Abb. 22a) besteht aus 2 gleichseitigen Hyperbeln mit der Gleichung

$$\frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\sigma_3} = \pm K^2.$$

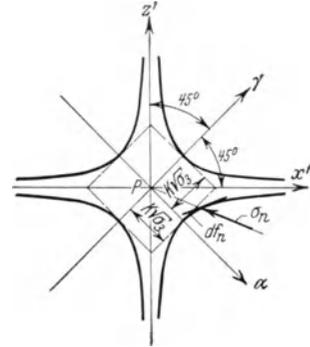


Abb. 22 a.

Die Mohrsche Darstellung besteht aus einem Hauptkreis, dessen Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems $N_n T_n$ liegt, und 2 gleichen Nebenkreisen, die durch den Ursprung gehen.

4. Der lineare Spannungszustand. In diesem Falle, der bei Beanspruchung eines geraden Stabes auf Zug oder Druck auftritt, ist nur eine Hauptspannung σ_1 , die zur Zug- (Druck-) Richtung parallel ist, vorhanden, die beiden anderen Hauptspannungen verschwinden.

Die Normalspannungsfläche, bezogen auf das Hauptspannungskreuz, ist durch $\sigma_1 \alpha^2 = \pm k^2$ gegeben, wenn die Zug- (Druck-) Richtung in die α -Achse fällt, entspricht somit 2 zueinander parallelen auf die Richtung des Zuges (Druckes) normalen Ebenen $\alpha = \pm \frac{K}{\sqrt{\pm \sigma_1}}$. Die Totalspannungen sind für die verschiedenen Flächenelemente in der Umgebung des Punktes nach (22f, S. 58) nur mit $\cos(n\alpha)$ nach dem Gesetz $\sigma_n = A_n = \sigma_1 \cos(n\alpha)$ variabel. Aus dem Werte für σ_n oder, wenn man will, aus der Beziehung (b) auf S. 62, folgt auch

$$N_n = \sigma_n \cos(n\alpha) = \sigma_1 \cos^2(n\alpha).$$

Die Schubspannungen T_n für ein beliebiges Flächenelement können entweder aus

$$\begin{aligned} T_n^2 &= \sigma_n^2 - N_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2(n\alpha) - \sigma_1^2 \cos^4(n\alpha), \\ &= \sigma_1^2 \cos^2 n\alpha \sin^2(n\alpha) \end{aligned}$$

mit

$$T_n = \pm \sigma_1 \cos(n\alpha) \sin(n\alpha) = \frac{\sigma_1}{2} \sin(2n\alpha)$$

berechnet werden, oder man kann diesen Wert direkt aus der Mohrschen Darstellung ablesen, die für den Fall der Zug- (Druck-) Beanspruchung ein einziger die positive (negative) N_n -Achse schneidender Kreis ist, der durch den Ursprung des $N_n T_n$ -Systemes geht. Der extreme Wert der Schubspannungen ergibt sich für $(n\gamma) = \begin{matrix} 45^\circ \\ 135^\circ \end{matrix}$ mit $\tau_3 = \pm \frac{\sigma_3}{2}$.

16. Über Elastizitätsgesetze. — Isotropie und Homogenität.

Bisher wurde der Spannungs- und Verzerrungszustand in einem Punkte eines festen elastischen Körpers, der sich im stabilen Gleichgewichte befindet, gesondert betrachtet. Hierbei wurde vorausgesetzt, daß im Zusammenhange mit der Annahme der Kontinuität der Masse die Spannungs- und Verzerrungskomponenten stetige beliebig differenzierbare Funktionen der Koordinaten und die Verzerrungskomponenten überdies für die Rechnung unendlich klein, praktisch aber jedenfalls sehr klein seien. Ferner wurden an physikalischen Erfahrungsgrundlagen das Erstarrungsprinzip und die aus den Galilei-Newtonschen Grundlagen der Mechanik sich erschließenden Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper hinzugenommen. Hieraus ergaben sich die Spannungsgleichungen, die das Gleichgewicht eines unendlich kleinen Prismas und die Oberflächen- oder Grenzbedingungen, die das Gleichgewicht eines Tetraeders zum Ausdrucke brachten. Alle übrigen Ergebnisse waren analytisch geometrischer oder vektoralgebraischer Natur. Die Auseinandersetzungen galten im angegebenen Rahmen für jeden elastischen Körper von beliebiger physikalisch-chemischer Konstitution, so z. B. auch für einen reibungslosen im Gleichgewichte befindlichen flüssigen Körper, den man als einen elastischen Körper definieren könnte, der nur Druckspannungen aufnehmen kann.

Die Erfahrung ergibt, daß die Spannungs- und Verzerrungs- bzw. Verschiebungskomponenten in einem Zusammenhange stehen, der für die verschiedenen festen Stoffe noch sehr verschieden sein, aber wenigstens in erster Annäherung für jede Art des Spannungszustandes bis zu einer bestimmten Größe desselben als gültig angesehen werden kann. Der genannte Zusammenhang heißt ein Elastizitätsgesetz. Letzteres bestimmt das elastische Verhalten in einem Punkte, d. h. für einen dort vorhandenen Elementarkörper oder, wenn das genannte Gesetz für alle Elementarkörper das gleiche ist, für den ganzen Bereich des vorliegenden elastischen Systemes. Die Eigenschaften eines festen Körpers können von Punkt zu Punkt und mit den Richtungen im Körper wechseln. Wenn letzteres der Fall ist, sagt man, die betreffende Eigenschaft sei vektoriell verteilt. Wenn in einem unendlich kleinen Bereiche eines Körpers eine bestimmte Eigenschaft für jede beliebige in diesem Bereiche gezogene Richtung die gleiche bleibt, so sagt man, der Körper sei in dem unendlich kleinen Bereiche mit Bezug auf diese Eigenschaft isotrop aufgebaut. Wenn aber für den genannten Bereich die betreffende Eigenschaft mit der Richtung wechselt, also vektoriell ist, d. h. für verschiedene Richtungen durch andere Maßzahlen festgelegt erscheint, so heißt der Körper in dem Bereiche anisotrop oder aäotrop. Ein Körper kann offenbar in allen unendlich kleinen Bereichen, aus denen sich der Bereich des ganzen Körpers zusammensetzt, isotrop mit Bezug auf eine Eigenschaft gedacht werden, ohne daß der Körper als solcher isotrop zu sein braucht, da sich die betreffende Eigenschaft noch von Punkt zu Punkt ändern kann. Wenn für eine gegebene Richtung letzteres nicht der Fall ist, so heißt der Körper für diese Richtung ein homogener mit Bezug auf die betreffende Eigenschaft im Gegensatz zu einem für die gegebene Richtung inhomogenen oder heterogenen Körper. Wenn im folgenden von einem isotropen oder anisotropen homogenen Körper die Rede ist, so wird die Isotropie bzw. Anisotropie stets mit Bezug auf das elastische Verhalten verstanden und soll die Bezeichnung homogen darauf hinweisen, daß das elastische Verhalten von Punkt zu Punkt evtl. gebunden an eine Richtung unveränderlich bleibt.

Die Isotropie und Homogenität und deren Gegensätze hängen naturgemäß mit der physikalischen und chemischen Konstitution zusammen, die sich u. a.

nach außen hin durch die Struktur oder das Gefüge kundtut. Letzteres ist durch mehr oder weniger feine Mittel nachweisbar. Man unterscheidet vielfach das mit freiem Auge bereits sichtbare Grobgefüge von dem erst durch die Mikroskopie oder andere Mittel nachzuweisenden Kleingefüge. So hat Laue die Raumgitterstruktur der Kristalle dadurch nachgewiesen, daß er Interferenzerscheinungen von Röntgenstrahlen nach Durchgang durch Kristalle beobachten konnte.

Ein monokliner Kristall ist mit Bezug auf das elastische Verhalten, das Brechungsvermögen und das Wärmeleitvermögen anisotrop und homogen, mit Bezug auf das spezifische Gewicht isotrop und homogen. Das bedeutet z. B. mit Bezug auf das elastische Verhalten, daß dasselbe in den verschiedenen Richtungen des Kristalls verschieden ist. Würde man aus dem Kristall in zwei verschiedenen Richtungen zwei völlig gleich dimensionierte prismatische Stäbe heraus schneiden, und dieselben durch dieselbe Kraft auf Zug beanspruchen, so würden diese Stäbe verschiedene Verlängerungen in der Richtung der Zugkraft zeigen. Wäre der Kristall ein isotroper homogener Körper, so würden die genannten Verlängerungen der Stäbe unter den genannten Umständen die gleichen sein. Holz hat bekanntlich eine faserige Struktur in der Stammrichtung und ist in radialer Richtung den Jahresringen entsprechend ringförmig geschichtet. Jeder Jahresring besteht aus einer gewöhnlich etwas dunkler gefärbten festeren, härteren und schwereren Spätholzzone und einer leichter gefärbten weniger festen, weicheren und leichteren Frühholzzone. Ferner unterscheidet man am Holze die innere am Ernährungsvorgange des Baumes nicht mehr teilnehmende, oft dunkler verfärbte Kernholzzone, von der gegen die Rinde zu gelegenen Splintholzzone; diese beiden Zonen unterscheiden sich ebenfalls durch ihre durchschnittliche Härte und Festigkeit und ihr durchschnittliches spezifisches Gewicht. Zieht man demnach im Holz verschiedene Parallele in den Faserrichtungen, so sind die genannten Eigenschaften auf ihnen recht verschieden, je nachdem die Parallele im Kernholz, im Splintholz, in der Früh- oder Spätzone eines Jahresringes liegt. Wählt man eine Gerade schief zu den Fasern, so wechseln die genannten Eigenschaften auf dieser Geraden selbst, das Holz ist also inhomogen und anisotrop in Bezug auf die angegebenen Eigenschaften. Dem genannten Aufbau entsprechend ist auch das Holz mit Bezug auf das elastische Verhalten inhomogen und anisotrop. Metalle im festen Zustande bestehen aus einer großen Zahl von gegeneinander in Bezug auf ihren kristallinen Aufbau noch sehr verschieden orientierten vielfach deformierten Kristallen oder Teilen von Kristallen, die unter dem Mikroskop sichtbar werden (mikroskopische kristallinische Struktur) und homogen und anisotrop sind. Infolge des verschiedenen technologischen Herstellungsvorganges, z. B. von Flußeisen, können außerdem noch verschiedene andere schon mit freiem Auge sichtbare Strukturen entstehen (feinkörnig, grobkörnig, faserig, sehnig). Dementsprechend sind die Metalle in elastischer Hinsicht streng genommen als inhomogen und anisotrop zu bezeichnen. Statistisch, d. h. durchschnittlich auf langen Strecken, die man sich im Innern des Metalles in verschiedenen Richtungen gezogen denken kann, kann aber von einem feinkörnigen Martinstahl wohl behauptet werden, daß er isotrop und homogen ist. Statistisch isotrope und homogene Körper werden nach einer Ausdrucksweise von Voigt auch als quasiisotrop bzw. quasihomogen bezeichnet. Dagegen ist das gewalzte Flußeisen (Schienen oder Bleche) nicht einmal statistisch isotrop, denn die elastischen Eigenschaften parallel und normal zur Walzrichtung sind bei der durch das Walzen bedingten faserigen Struktur entschieden ungleich.

Die Eigenschaften eines Körpers können sich ändern, wenn dessen Zustand (z. B. Temperaturzustand, Spannungszustand) geändert wird. Auch das elastische Verhalten kann sich ändern, wenn die Temperatur geändert wird, oder wenn der Körper vor Aufbringung von äußeren Kräften bereits in seinen Teilen verschiedenen Spannungszuständen unterworfen ist (S. 25).

17. Das Gesetz von Hooke in einfacher und erweiterter Form (Superpositionsgesetz) für isotrope, homogene Körper.

Hooke hat im Jahre 1678 (etwas später aber unabhängig von Hooke der Franzose Mariotte) für den Fall eines homogenen linearen Spannungszustandes bei isotropen, homogenen Körpern ein Elastizitätsgesetz aufgestellt, das die Proportionalität zwischen der Zug- (Druck-) Spannung und der Dehnung (Quetschung) behauptet. Hundert Jahre verflossen, bis Navier (1821) als erster versuchte, ein Elastizitätsgesetz für allgemeine Spannungszustände zu gewinnen,

und zwar auf Grund von molekular-theoretischen Betrachtungen. Poisson kam im Jahre 1828 zu den gleichen Resultaten wie Navier, vor ihm aber fand Cauchy das Gesetz, das heute noch als gültig für äälotrope und isotrope homogene Körper angenommen wird, nachdem fast durch das ganze 19. Jahrhundert von hervorragenden Gelehrten über diese Frage diskutiert, oder ihre Lösung von anderen Gesichtspunkten aus vielfach unter Heranziehung des Experiments in Angriff genommen worden war. Die folgende Darstellung beschränkt sich auf isotrope homogene Körper.

Cauchy kam zum Resultate, daß die Spannungs- und Verzerrungskomponenten für isotrope und homogene Körper in einem linearen Zusammenhange stehen müssen. Die allgemeine Form, in der man das Cauchysche Gesetz, das als ein durch die Erfahrung für einen bestimmten Spannungsbereich hinlänglich bestätigtes Naturgesetz zu werten ist, heute aufschreibt, bezieht sich auf ein beliebiges unendlich kleines Prisma in einem Punkt P des elastischen festen Körpers und setzt einen dreidimensionalen Spannungszustand voraus. Es besagt, daß zwischen den 6 Spannungs- und den 6 Verzerrungskomponenten der folgende lineare Zusammenhang bestehen soll:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} \left[X_x - \frac{1}{m} (Y_y + Z_z) \right] & e_{xy} &= \frac{1}{G} X_y, \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} \left[Y_y - \frac{1}{m} (X_x + Z_z) \right] & e_{yz} &= \frac{1}{G} Y_z, \\ e_{zz} &= \frac{1}{E} \left[Z_z - \frac{1}{m} (X_x + Y_y) \right] & e_{zx} &= \frac{1}{G} Z_x. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Wie ersichtlich sagen diese Gleichungen zunächst aus, daß die Dehnungen (Quetschungen) nur von den Normalspannungen, die Schiebungen nur von den Schubspannungen abhängig sein sollen.

Wenn die Beziehungen (42), deren Inhalt man auch als erweitertes Hookesches Gesetz bezeichnet, wirklich zutreffen, so müssen die Hauptspannungsrichtungen mit den Hauptdehnungsrichtungen zusammenfallen, wie leicht erweisbar ist. Denn legen wir von vornherein das Koordinatensystem in die Richtungen der Hauptdehnungen, so verschwinden für das diesen Richtungen entsprechende unendlich kleine Prisma die Schiebungen e_{xy} , e_{yz} , e_{zx} , also müssen zufolge (42), da $\frac{1}{G}$ nicht Null werden kann (siehe weiter unten), die Schubspannungen verschwinden, woraus die vorangestellte Behauptung folgt. Es gilt somit für die Hauptdehnungsrichtungen das Gesetz (42) in der Form

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{E} \left[\sigma_1 - \frac{1}{m} (\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ e_2 &= \frac{1}{E} \left[\sigma_2 - \frac{1}{m} (\sigma_1 + \sigma_3) \right], \\ e_3 &= \frac{1}{E} \left[\sigma_3 - \frac{1}{m} (\sigma_1 + \sigma_2) \right], \end{aligned} \right\} \quad (42a)$$

worin e_1, e_2, e_3 die Hauptdehnungen und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die zugehörigen Hauptspannungen bezeichnen.

In den linearen Beziehungen (42) und (42a) bedeuten E, m, G die sog. Elastizitätskonstanten, die für einen bestimmten homogenen und isotropen Stoff diesem eigentümliche Werte besitzen und durch den Versuch zu bestimmen sind. E heißt der Youngsche Elastizitätsmodulus auf Zug (Druck), weil Young im Jahre 1807 diese Konstante zuerst definierte, oder auch Elastizitätsziffer auf Zug (Druck), m (häufig auch dessen reziproker Wert) wird die Poissonsche

Konstante genannt, weil sie zuerst durch Poisson in seinen Abhandlungen eingeführt wurde, der allerdings nicht zutreffend behauptete, daß m eine für isotrope homogene Körper universelle Konstante sei. G heißt der Schubelastizitätsmodulus, Gleitmodul, Torsionsmodul, oder auch Elastizitätsziffer auf Schub. Da die Verzerrungskomponenten dimensionslos sind, folgt aus (42), daß die Dimensionen von E und G jene einer Spannung (kg/cm^2) sind und daß m dimensionslos ist. Die reziproken Werte von E und G , d. i. $\frac{1}{E} = \alpha$ und $\frac{1}{G} = \beta$ werden als Dehnungszahl α bzw. Schiebungszahl oder Gleitziffer β eingeführt. β ergibt sich aus den auf die Schubspannungen bezüglichen Gleichungen (42) in anschaulicher physikalischer Bedeutung als Schiebung pro kg/cm^2 Schubspannungszuwachs. Die Bedeutungen von α und m ergeben sich aus der Anwendung des Gesetzes (42) auf die einfache Zug- (Druck-) Beanspruchung, wodurch wir, wenn wir die Zug- (Druck-) Richtung mit der x -Richtung zusammenfallen lassen, für ein unendlich kleines in der Stabrichtung herausgeschnittenes Prisma

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} X_x, & e_{xy} &= 0, \\ e_{yy} &= -\frac{X_x}{mE}, & e_{yz} &= 0, \\ e_{zz} &= -\frac{X_x}{mE}, & e_{zx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (42')$$

erhalten. Das Gesetz $X_x = E e_{xx}$, das die Proportionalität der Spannung mit der Dehnung ausdrückt, ist das sog. einfache Hookesche Gesetz (siehe oben). Aus ihm liest man unmittelbar ab, daß $\frac{1}{E} = \alpha$ als Dehnung (Quetschung) pro 1 kg/cm^2 Zug- (Druck-) Spannungszuwachs angesehen werden kann. Hat der auf Zug (Druck) beanspruchte Stab die Länge l , so können wir, da e_{xx} für diese ganze Länge konstant ist (homogene Verzerrung im endlichen Raume, S. 16 und 41), die erste der Gleichungen (42') auch in der oft gebrauchten Form

$$X_x = \sigma = E \frac{\Delta l}{l} \quad (42'')$$

schreiben, wenn Δl die Verlängerung (Verkürzung) des ganzen Stabes bedeutet. Aus den Gleichungen (42') kann auch die Bedeutung der Poissonschen Konstanten m hergeleitet werden. Dividieren wir die erste dieser Gleichungen durch die zweite bzw. dritte, so erhalten wir

$$e_{xx} = -m e_{yy} = -m e_{zz}.$$

m stellt demnach das Verhältnis des Zahlenwertes der Dehnung (Quetschung) e_{xx} in der Richtung x zu den Zahlenwerten der Querquetschungen (-dehnungen) e_{yy} , e_{zz} normal zur x -Richtung dar.

Die ersten 3 Gleichungen (42), welche sich auf die Dehnungen (Quetschungen) in drei aufeinander normalen Richtungen beziehen, bzw. die Gleichungen (42a) können als Vereinigung des durch die ersten drei Gleichungen (42') ausgedrückten Gesetzes und des sog. Superpositionsgesetzes angesehen werden. Denken wir uns nämlich das unendlich kleine Prisma vorerst durch X_x allein beansprucht, so entstehen nach (42) die Dehnungen (Quetschungen)

$$e'_{xx} = \frac{1}{E} X_x, \quad e'_{yy} = -\frac{X_x}{mE}, \quad e'_{zz} = -\frac{X_x}{mE}. \quad (a)$$

Wenn das Prisma hierauf allein durch Y_y und hierauf allein durch Z_z beansprucht

wird, so ergeben sich die zugehörigen Formänderungen aus

$$\left. \begin{aligned} \epsilon''_{xx} &= -\frac{1}{mE} Y_y, \\ \epsilon''_{yy} &= \frac{Y_y}{E}, \\ \epsilon''_{zz} &= -\frac{1}{mE} Y_y. \end{aligned} \right\} \text{(b) \quad \text{und} \quad \left. \begin{aligned} \epsilon'''_{xx} &= -\frac{1}{mE} Z_z, \\ \epsilon'''_{yy} &= -\frac{1}{mE} Z_z, \\ \epsilon'''_{zz} &= \frac{Z_z}{E}. \end{aligned} \right\} \text{(c)}$$

Addiert man die einander entsprechenden Gleichungen (a), (b), (c), so erhält man das erweiterte Hookesche Gesetz (42), wenn man

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon'_{xx} + \epsilon''_{xx} + \epsilon'''_{xx}, \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon'_{yy} + \epsilon''_{yy} + \epsilon'''_{yy}, \\ \epsilon_{zz} &= \epsilon'_{zz} + \epsilon''_{zz} + \epsilon'''_{zz} \end{aligned} \right\} \text{(d)}$$

setzt. Die Dehnungen in den Richtungen x , y , z für einen dreidimensionalen Spannungszustand erhält man sonach, indem man die nach (42') für die lineare Beanspruchung sich ergebenden Dehnungen, die vorhanden wären, wenn jede Normalspannung für sich allein vorhanden wäre, übereinander lagert oder superponiert; dabei ist die Reihenfolge der Superposition gleichgültig. Dieses Superpositionsgesetz könnte auch dadurch ausgesprochen werden, daß man sagt: Ein infolge einer einzelnen Normalspannung sich ergebender Wert der Dehnung wird von dem Vorhandensein der beiden anderen Normalspannungen nicht berührt, oder die den einzelnen Normalspannungen entsprechenden Werte der Dehnungen sind voneinander unabhängig. In der letzten Form bezeichnet man das Superpositionsgesetz auch als Unabhängigkeitsgesetz. Man kann sich somit die drei Normalspannungen gleichzeitig aufgebracht denken, oder nacheinander in beliebiger Reihenfolge, der eintretende Deformationszustand ist in beiden Fällen der gleiche. Dieses Gesetz wird häufig in den Anwendungen der Theorie auf technische Probleme zur Verwendung gebracht. Dabei geht man von dem weiter unten noch zu verfolgenden Gedanken aus, daß jeder gegebenen äußeren Beanspruchung eines elastischen festen Körpers eindeutig ein bestimmter Spannungs- und Deformationszustand des Körpers zugeordnet sein muß (S. 47). Nach dem Superpositionsgesetz kann man dann die äußeren angreifenden Kräfte in beliebiger Reihenfolge am Körper aufbringen. Diese Möglichkeit wird dazu benützt, um den Einfluß jeder einzelnen äußeren angreifenden Kraft für sich auf den Spannungs- und Deformationszustand zu untersuchen.

In dem Belastungsfall der Abb. 15, S. 45 können z. B. zuerst für die Belastung durch P_1 allein die Schaubilder für die Biegemomente und Querkräfte gezeichnet und die hierzu gehörigen Spannungen (Biege- und Schubspannungen) sowie Deformationen der Stabachse, (siehe hierzu den zweiten Teil, S. 222 u. S. 236 ff.) bestimmt werden, dann in gleicher Weise für P_2 , hierauf können die Schaubilder, Spannungen und Deformationen übereinander gelagert werden.

Die besprochenen Gesetze sind als ideale Grenzesetze zu werten, weil isotrope und homogene Körper in der Natur kaum vorkommen. Doch gibt es viele Stoffe, für welche das Gesetz mit sehr großer Annäherung erfüllt ist. In der Technik spielen hauptsächlich Holz, Metalle und natürliche sowie künstliche Steine als Werkstoffe eine Rolle. Für diese pflegt man das Hookesche Gesetz in der Regel wegen seiner Einfachheit anzuwenden, wenn man sich auch bewußt ist — das gilt insbesondere für Steine, Holz und die gegossenen Metalle —, daß seine Gültigkeit oft nur sehr beschränkt ist. Um die Unstimmigkeiten mit der Erfahrung auszugleichen, hilft man sich dann dadurch, daß man im Hookeschen Gesetz die Konstanten für den betreffenden Stoff als mit der Art der inneren Beanspru-

chung und der Richtung der Spannungskomponenten im Körper veränderlich betrachtet oder Korrektionskoeffizienten einführt. Darauf werden wir noch später zurückzukommen haben.

Für anisotrope, homogene Körper, wie z. B. Kristalle, wurde ein Elastizitätsgesetz aufgestellt, das den linearen Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungskomponenten aufrecht erhält, nur ist die Zahl der in dasselbe eintretenden Konstanten gegenüber jener bei isotropen homogenen Körpern vermehrt, und zwar im extremsten Falle eines triklinen Kristalles auf 21. Dieses Elastizitätsgesetz für Kristalle wurde durch die Erfahrung sehr gut bestätigt, was mit dem regelhaften Aufbau dieser Körper im Zusammenhang steht.

18. Fortsetzung. Zusammenhang zwischen den Elastizitätskonstanten von dem Hookeschen Gesetze folgenden Stoffen.

Zwischen den Elastizitätskonstanten E, G, m muß unter der Voraussetzung, daß die Verzerrungskomponenten sehr klein sind, deswegen ein Zusammenhang bestehen, weil für einen beliebigen Spannungszustand in einem Punkte die Verzerrungs- (Spannungs-) Komponenten für jedes unendlich kleine Prisma bekannt sind, wenn der Verzerrungs- (Spannungs-) Zustand für ein bestimmtes dieser Prismen gegeben vorliegt.

Zum Nachweise des genannten Zusammenhanges geht man von einem möglichst einfachen Spannungszustand aus. Wir wollen als solchen das eine Mal den Spannungszustand auf reinen Schub, das andere Mal jenen auf Zug zugrunde legen. In beiden Fällen kommen wir, wie wir gleich sehen werden, auf das gleiche, jenen Zusammenhang darstellende Resultat.

Der reine Schubspannungszustand ist charakterisiert durch das Auftreten zweier entgegengesetzt gleicher Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_3 = -\sigma_1$ (σ_3 sei positiv). Das erweiterte Hookesche Gesetz lautet dann nach (42a)

$$e_1 = -\frac{1}{E} \left(\sigma_3 + \frac{\sigma_3}{m} \right) = -\frac{m+1}{mE} \sigma_3,$$

$$e_2 = 0,$$

$$e_3 = \frac{1}{E} \left(\sigma_3 + \frac{\sigma_3}{m} \right) = \frac{m+1}{mE} \sigma_3.$$

Die den Hauptspannungen σ_1, σ_3 entsprechenden Hauptdehnungen e_1, e_3 sind dem nach entgegengesetzt gleich. Nennen wir die Kantenlänge eines unendlich kleinen Würfels $1, 2, 3, 4$ (Abb. 23), der in den Richtungen der Hauptspannungen herausgeschnitten gedacht wird, vor der Verformung s nach derselben s_3 bzw. s_1 , so muß offenbar

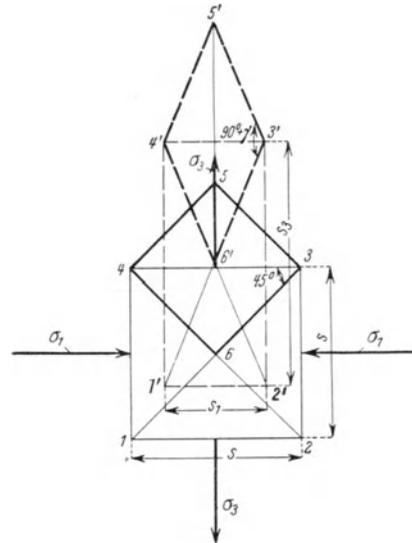


Abb. 23.

$$s_3 = s + e_3 s = s + \Delta s = s \left(1 + \frac{m+1}{mE} \sigma_3 \right),$$

$$s_1 = s + e_1 s = s + \Delta s = s \left(1 - \frac{m+1}{mE} \sigma_3 \right)$$

sein. Der Winkel, den zwei auf die Hauptspannungsebene normal stehende Diagonalfächen des Würfels nach der Verformung miteinander einschließen, sei $90 + \gamma$, wobei γ die Winkeländerung des vor der Verformung rechten Winkels bedeutet. Aus der Abbildung, in der der verformte Würfel mit $1', 2', 3', 4'$ be-

zeichnet und der Winkel $90 + \gamma$ durch $3', 6', 2'$ oder $1', 6', 4'$ gegeben ist, folgt, wenn bedacht wird, daß γ sehr klein sein soll,

$$\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{s + \Delta s}{s - \Delta s} = \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}}, \quad (\text{a})$$

oder

$$s + \Delta s - s \frac{\gamma}{2} - \Delta s \frac{\gamma}{2} = s - \Delta s + s \frac{\gamma}{2} - \Delta s \frac{\gamma}{2},$$

woraus

$$2s \frac{m+1}{mE} \sigma_3 = 2\Delta s = s\gamma \quad (\text{b})$$

folgt. Da γ die Schiebung ist für den in der Abbildung stark gezeichneten unendlich kleinen Würfel $3, 4, 5, 6$ (nach der Deformation geht dieser Würfel in das strichlierte Prisma $3', 4', 5', 6'$ über), dessen Seitenflächen unter 45° zu den Seitenflächen des Würfels $1, 2, 3, 4$ liegen, und die Schubspannungen $\pm \tau$ für diese Richtungen ihrem Werte nach den Hauptspannungen gleich werden (S. 72ff.), so kann, weil nach (42) $\gamma G = \tau = \sigma_3$ ist,

$$s \frac{m+1}{mE} \sigma_3 = s \frac{\sigma_3}{G} \quad (\text{b}')$$

und daher

$$E = \frac{2(m+1)}{m} G \quad (\text{43})$$

gesetzt werden.

Diese wichtige, nur für isotrope homogene Körper, die das erweiterte Hookesche Gesetz befolgen, gültige Beziehung (43) wird sehr häufig zur Verwendung gebracht und durch die Erfahrung bestätigt. Für isotrope, homogene Körper ist demnach eine von den drei Elastizitätskonstanten E, G, m bestimmt, wenn zwei von ihnen gegeben sind. Man sagt demnach, das elastische Verhalten eines isotropen, homogenen Körpers ist durch zwei Elastizitätskonstante unter Zuhilfenahme des Hookeschen Gesetzes charakterisierbar.

Gehen wir nunmehr vom reinen Zugspannungszustand aus. Der auf Zug beanspruchte unendlich kleine Würfel $1, 2, 3, 4$ von der Seitenlänge s (siehe Abb. 23a) geht nach der Deformation in das Prisma $1', 2', 3', 4'$ über. In ähnlicher Weise wie oben können wir für die unter 45° zu den Flächen des Würfels $1, 2, 3, 4$ gelegenen Flächenelemente, die vor der Verformung dem stark ausgezogenen Würfel $3, 4, 5, 6$ angehören und nach derselben den Winkel $90 + \gamma = 4', 6', 3'$ am strichlierten Prisma $3', 4', 5', 6'$ miteinander einschließen, die Änderung γ aus der obigen Beziehung (a) berechnen, wenn zufolge des Hookeschen Gesetzes im Zähler $\Delta s = s \cdot \frac{\sigma_3}{E}$, im Nenner aber $\Delta s = \frac{\sigma_3}{mE}$ und für die unter 45° bzw. 135° auftretende extreme Schubspannung $\tau = \frac{\sigma_3}{2} = G\gamma$ gesetzt wird (S. 73). Wir erhalten durch Einsetzen der genannten Werte und Reduktion die Beziehung

$$\frac{m+1}{mE} = \frac{1}{2G} + \frac{\sigma_3}{4EG} \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{1}{2G} + \frac{\gamma}{2E} \cdot \frac{m-1}{m}.$$

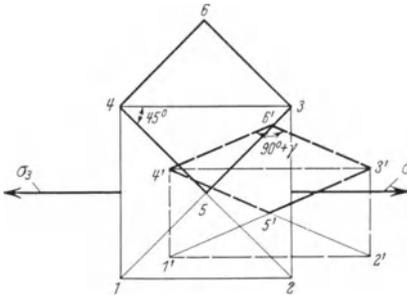


Abb. 23 a.

Nachdem E, G, m erfahrungsgemäß endliche Werte und insbesondere E, G , wie weiter unten noch ausgeführt werden wird, sehr groß sind, γ aber in der Rechnung als unendlich klein (oder sehr klein) betrachtet wird, so kann das letzte Glied rechts gestrichen werden, und es folgt wieder die Beziehung (43).

19. Experimentelle Ermittlung der Elastizitätskonstanten.

Die experimentelle Ermittlung von E erfolgt am einfachsten aus einem Zug- oder Druckversuch mit zylindrischen Stäben bzw. Würfeln. Hat der auf Zug beanspruchte Stab vor der Verformung die Länge l , so ist dieselbe nach der Verformung durch $l + \Delta l = l(1 + e_3)$ gegeben, mit e_3 als Verlängerung pro Längeneinheit in der Richtung des Zuges. Kennt man Δl aus dem Versuch, so kann E unter Zuhilfenahme des einfachen Hookeschen Gesetzes bestimmt werden. Wenn F die Querschnittsfläche des Stabes ist, und, wie notwendig angenommen wird, daß sich die Kraft P gleichförmig über den Querschnitt verteilt, so lautet das einfache

Hookesche Gesetz

$$\frac{P}{F} = \sigma_3 = E \frac{\Delta l}{l}, \text{ woraus}$$

$$E = \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{\Delta l} \quad (a)$$

folgt. In den Abb. 24 bzw. 24a ist die zur Messung von Δl gehörige Einrichtung in schematischer Form bzw. in genauerer Darstellung gezeichnet, die ihr durch Martens gegeben wurde, nachdem Bauschinger bereits früher die Einrichtung in etwas abgeänderter Form zur Ausführung gebracht und zu Meßzwecken benützt hat. Sie wird am Zugstab PS , der z. B. ein solcher mit kreisförmigem Querschnitt ist und unter dem Einfluß der Kraft P

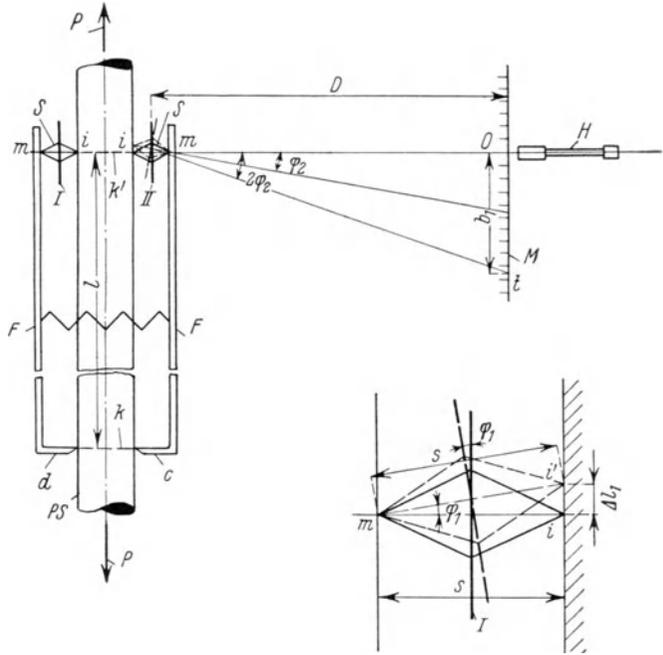


Abb. 24.

steht, angelegt und besteht aus den beiden federnd mit einander verbundenen und zur Stabachse parallelen Schienen F, F , die einerseits mit den in eine eingerissene kreisförmige Kerbe k des Stabes zum Eingriff zu bringenden Schneiden c, d versehen sind, andererseits durch in ihnen vorgesehene Kerben zur Lagerung von zwei Stahlprismen S, S dienen, mit denen Spiegel I, II derart fest verbunden sind, daß sie normal auf die Schneidenentfernung m, i stehen, und sich mit den Prismen um die Kanten m, m drehen können, welche in den Schienen als Auflagerkanten dienen.

Im Hinblick auf den zu erreichenden Zweck der Einrichtung wäre es am besten, wenn die Auflagerkanten m, m der Prismen in die Ebenen der Spiegel hineinfielen. In den Abbildungen sind die Spiegel die Schneidenentfernung halbierend gezeichnet, wodurch in die unten geschilderte aus der Verdrehung des Spiegels abgeleitete Messung der Verlängerung des Stabes ein bei der Kürze der Prismen nicht ins Gewicht fallender Fehler kommt.

Die Kanten i, i der Prismen greifen am Stabe PS in eine eingerissene Kreis-kerbe k' ein, deren Ebene normal zur Stabachse steht. Die feste und doch federnde Lagerung der Prismen am Stabe bzw. den Schienen wird durch die federnde Verbindung der Schienen untereinander erreicht. Die Länge zwischen den Kerben k, k' ist genau gleich der sog. Meßlänge des Stabes, deren Verlängerung unter dem Einfluß der Kraft zu messen ist. Eine federnde Einstellung der Spiegel um zu den genannten Prismenkanten m, i normal stehende Achsen a, a wird durch die Schrauben R, R (Abb. 24a) ermöglicht. Wenn die Schneiden der Prismen normal auf die Stabachsen stehen und die Kraft P noch nicht aufgebracht ist, sollen die Spiegel parallel zur Stabachse stehen. Die Spiegel sind daher auch noch um eine zu den Drehachsen m, m der Prismen parallele Achsen b, b unabhängig von den Prismen drehbar. Die richtige Einstellung der Prismen, die dann vorhanden ist, wenn die Ebene ihrer auflagernden Kanten normal zur Stabachse steht,

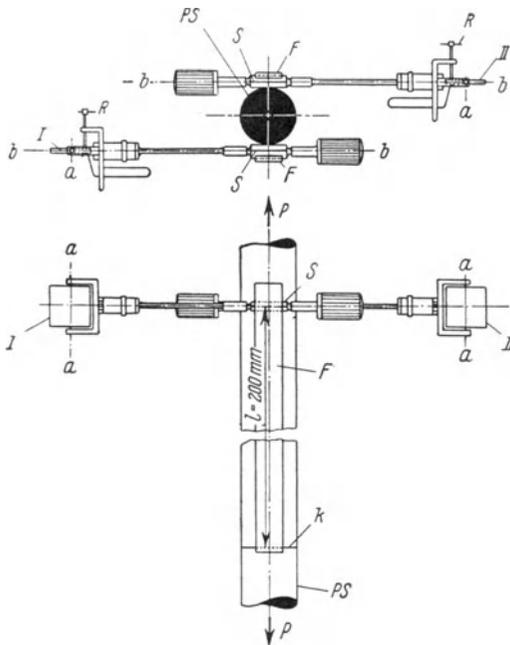


Abb. 24a.

wird durch Marken dadurch gewährleistet, daß je ein mit Marke versehener Zeiger, der mit je einem Prisma verbunden ist, zur Übereinstimmung mit je einer an der zugehörigen Schiene ersichtlichen Marke gebracht wird.

Wirkt nunmehr die Kraft P , so bewegt sich die Kante i des Prismas mit dem Spiegel I (Abb. 24) um ein der Verlängerung Δl_1 entsprechendes Maß nach i' , infolgedessen verdreht sich der Spiegel I um den Winkel φ_1 . Es ist ersichtlich, daß $\Delta l_1 = s \sin \varphi_1$ wenn s die Entfernung der beiden Kanten m und i bedeutet, die durch die Dimensionen der Stahlprismen gegeben ist. Das bezüglich des Prismas mit dem Spiegel I Gesagte gilt naturgemäß auch für den Spiegel II , der sich um den Winkel φ_2 entsprechend einer Verlängerung Δl_2 drehen möge. Die

Verdrehung der Spiegel wird durch je ein mit Fadenkreuz versehenes Fernrohr H , dessen Achse vor Aufbringung der Kraft normal zu den Spiegelflächen steht, auf je einer mit Millimeterteilung versehenen Skala M beobachtet, die in der Entfernung D von den Spiegeln parallel zu den Spiegelflächen und parallel zur Stabachse steht. Wenn vor Beanspruchung durch P der Skalenteil 0 im Fernrohr mit dem Fadenkreuz übereinstimmte, so wird nach Aufbringung von P der Skalenteil t durch das Fadenkreuz herausgeschnitten, und die Entfernung $0, t$ entspricht, weil wir das reflektierte Bild von t beobachten, dem Winkel $2\varphi_1$. Wir erhalten somit $\text{tg } 2\varphi_1 = \frac{b_1}{D}$, wenn b_1 die Anzeige der dem Spiegel I zugehörigen Skala bedeutet. Nachdem die Winkel $\varphi_1, 2\varphi_1$ sehr klein sind, können wir $\Delta l_1 = s \varphi_1$ und $2\varphi_1 = \frac{b_1}{D}$ schreiben, woraus $\Delta l_1 = \frac{s b_1}{2D}$ folgt.

$\frac{s}{2D}$ heißt das Übersetzungsverhältnis. Wählen wir $D = 1500 \text{ mm}$, so wird

$\Delta l_1 = 0,0013$ mm bei $b_1 = 1$ mm und $s = 4$ mm. Es kann somit ein Wert von $0,0013$ mm noch genau abgelesen werden, und es können, da $\frac{1}{2}$ mm auf der Skala noch geschätzt werden kann, noch Verlängerungen von $0,0006$ mm mit ziemlicher Sicherheit geschätzt werden. Ein Spiegel würde nicht genügen, um verlässliche Messungen von Δl bewerkstelligen zu können, denn Verschiebungen, welche der Probestab als ganzer ausführt, ohne Dehnungen, würden dann gleichfalls als Dehnungen beobachtet, ferner wäre keine Rücksicht auf Exzentrizitäten der Kraft mit Bezug auf die Stabachse genommen, wodurch elastische, wenn auch sehr kleine Biegungen des Stabes und infolgedessen ungleiche Verlängerungen der einzelnen Fasern entstünden. Durch Verwendung zweier Spiegel werden diese Fehlerquellen ausgeschieden, man braucht nur die Mittelwerte der Ablesungen an der jedem Spiegel zugeordneten Skala zu nehmen, um die Verlängerung der Stabachse zu erhalten, auf die es ankommt. Die Verlängerung der Stabachse erhält man sonach aus

$$\Delta l = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2} = \frac{s}{2D} \cdot \frac{b_1 + b_2}{2},$$

worin die Ablesung b_1 dem einen Spiegel, b_2 dem anderen entspricht. Da die Werte Δl in dem Bereiche der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes (für den, wie wir sehen werden, P und damit die Zugspannung σ_3 nicht zu groß sein dürfen) sehr klein sind, wird E nach (a) auf S. 81 zahlenmäßig sehr groß. So ergibt sich für weiches Flußeisen, für das wir statistische Isotropie und Homogenität voraussetzen können, $E = 2000000$ kg/cm², für Holz in der Richtung der Fasern durchschnittlich $E = 100000$ kg/cm² usw. Dagegen ist die Spannungsziffer α sehr klein, z. B. für weiches Flußeisen $\alpha = 0,0000005$ cm²/kg.

Die Bestimmung des Gleitmoduls G geschieht unter Zuhilfenahme eines Torsionsversuches von geraden zylindrischen Stäben mit Kreisquerschnitt, deren eines Ende festgehalten wird, während das andere durch ein sog. Drillungsmoment, dessen Ebene normal zur Stabachse steht, beansprucht wird. Es entsteht dabei, wie später nachgewiesen werden wird, in jedem Punkt des Stabes ein reiner Schubspannungszustand, dessen Größe aus dem Drillungsmoment ermittelt werden kann. Zwei Querschnitte des Stabes in der Entfernung l verdrehen sich gegeneinander an der Oberfläche des Stabes um einen Winkel, der gemessen werden muß. Dieser Verdrehungswinkel tritt jetzt an die Stelle von $\frac{\Delta l}{l}$ bei Messung von E . Durch Anwendung des auf die (aus dem Drillungsmoment berechenbaren) Schubspannungen bezüglichen Hookeschen Gesetzes, in welches der Verdrehungswinkel eintritt, erhält man eine zur Bestimmung von G taugliche Beziehung, ganz ähnlich wie oben das Hookesche Gesetz die Ausgangsgleichung für die Bestimmung von E war. Wir werden auf diese Bestimmung im zweiten Teile dieses Buches (S. 328) zurückkommen. G ist stets kleiner als E , z. B. für weiches Flußeisen wird $G = 800000$ kg/cm². Hat man E und G gefunden, so kann die Konstante m für das betreffende Material aus der Beziehung (43) erschlossen werden. Man fand so, daß m sich für Metalle nicht sehr verschieden ergibt; es schwankt für diese Stoffe von $\frac{2}{3}$ bis 4, und zwar innerhalb des Größenbereiches innerer Beanspruchungen, für welchen das Hookesche Gesetz überhaupt gilt. (Siehe unten.)

Eine direkte Bestimmung von m ist wegen der hierbei in Betracht kommenden sehr kleinen Längenänderungen schwieriger als die Bestimmung von E und G . Sie müßte z. B. unter Zuhilfenahme von Messungen der Verlängerung eines auf Zug beanspruchten Stabes und dessen gleichzeitiger Quersammenziehung erfolgen. Wenn der mit kreisförmigem Querschnitt vorausgesetzte Stab vor Auf-

bringung der Zugkraft den Radius r besitzt, so ist derselbe nach Aufbringung der Last durch $r - \Delta r = r \left(1 - \frac{\Delta l}{m l}\right) = r_1$ gegeben (S. 41), woraus $m = \frac{r \Delta l}{\Delta r l}$ folgt. Wir wollen uns einen Einblick über die Größenordnung von Δr verschaffen, unter Voraussetzung, daß $m = 4$ ist. Es liege ein Rundstab von $d = 2$ cm Durchmesser und der Länge $l = 20$ cm vor, der auf Zug durch eine Spannung von 900 kg/cm^2 beansprucht wird; wenn als Material weiches Flußeisen gewählt ist, so ergibt sich durch Rechnung, wenn $E = 2000000 \text{ kg/cm}^2$ gesetzt wird, die Verlängerung $\Delta l = \frac{900 \cdot 20}{2000000} = 0,009$ cm. Der Radius des Stabes ist nach der Verformung durch $r_1 = \left(1 - \frac{0,00045}{4}\right)$ gegeben, somit wird $\Delta r = 0,00011$ cm. Das ist etwa ein $\frac{1}{80}$ des Wertes der Verlängerung Δl . Die direkte Methode zur Bestimmung von m verlangt daher besonders feine Meßmethoden, wie z. B. jene, welche als Methode der Interferenzen sich eingebürgert hat.

Man sucht diesen Schwierigkeiten auszuweichen, indem man an Stelle von Δr die Größe $\pi(l + \Delta l)r_1^2 - \pi l r^2$, d. i. die Volumenänderung Δv auf die Länge l des auf Zug beansprucht gedachten Stabes mißt. Wie wir bereits berechnet haben (S. 41) ist die kubische Dilatation für einen auf Zug beanspruchten Stab in jedem Punkte durch $e = \frac{\Delta l}{l} \cdot \frac{m-2}{m} = \frac{\Delta v}{v}$ gegeben, wobei $v = r^2 \pi l$ ist. Aus dieser Beziehung ergibt sich $m = \frac{2}{1 - \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{l}{\Delta l}}$ oder bei Einführung des bereits gefundenen gedachten Wertes von E

$$m = \frac{2\sigma}{\sigma - \frac{\Delta v}{v} E} = \frac{2P}{P - \frac{\Delta v}{v} E F},$$

wenn P die aufgebrachte Zugkraft, σ die Zugspannung und F die Querschnittsfläche des Stabes bedeuten. Δv wäre bei unserem obigen Beispiel nahezu gleich $14,3 \text{ mm}^3$, was leichter zu messen ist als die Größe Δr .

Zur Messung von Δv sei hier nur des Vorschlages Erwähnung getan, diese Größe aus dem Vorrücken eines Flüssigkeitsfadens in einem Kapillarrohr zu messen, das mit einem, eine Flüssigkeit enthaltenden Gefäße in Verbindung steht, derart, daß das Volumen v vor der Verformung gerade in die Flüssigkeit eintaucht.

Aus der für die kubische Dilatation bei einfacher Zugbeanspruchung erhaltenen Formel müssen wir den Schluß ziehen, daß $m \geq 2$ sein muß, da beim Ziehen eines Stabes das Volumen des Stabes nach der Verformung mindestens gleich dem Volumen des Stabes vor der Verformung, in der Regel aber ersteres größer als letzteres sein wird. Ein Stoff, für welchen $m = 2$ gefunden wurde, ist Kork. Siehe hierzu auch den folgenden Punkt.

20. Kompressibilität. Raummodul.

Steht ein elastischer isotroper und homogener Körper unter allseitigem Flüssigkeitsdruck p kg pro Flächeneinheit, so entsteht, wie wir bereits (S. 67) erwähnt haben, im Innern des Körpers der räumliche hydrostatische Spannungszustand, für welchen in jedem Punkte des elastischen Körpers $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ und p eine negative Größe ist. Aus dem erweiterten Hookeschen Gesetze ergibt sich dann für die Hauptdehnungen $e_1 = e_2 = e_3 = \frac{1}{E} p \frac{m-2}{m}$ und für die kubische Dilatation $e = \frac{3p}{E} \cdot \frac{m-2}{m}$.

Auch aus letzterem Werte muß der Schluß gezogen werden, daß $m \geq 2$ sein muß, weil sonst bei allseitigem Druck eine Volumsvermehrung eintreten würde.

Die Größe e für $p = 1$ heißt die Kompressibilität K des Körpers, die also die Volumenverminderung pro Volumseinheit eines Körpers vorstellt, der einem allseitigen Flüssigkeitsdruck von $p = 1 \text{ kg/cm}^2$ ausgesetzt wird. Es bestehen somit die Beziehungen

$$e = K p, \quad K = \frac{3}{E} \cdot \frac{m-2}{m}. \quad (44)$$

Der reziproke Wert von K heißt der Raummodul M des elastischen Körpers, also wird nach Definition

$$M = \frac{p}{e} = \frac{E m}{3(m-2)}. \quad (45)$$

M läßt sich nach dem Gesagten als jener Druck p in Atmosphären erklären, der auf die Flächeneinheit des Körpers wirken muß, um eine kubische Dilatation von der Größe $=1$ hervorzurufen. Setzt man m aus der Beziehung (43) in die Beziehung (45) ein, so erhält man

$$K = \frac{1}{M} = \frac{3(3G - E)}{EG}. \quad (46)$$

Die Beziehungen (45) und (46) gehören organisch zu der Beziehung (43). Man sieht, daß von den vier Größen E, G, m, M (K) nur zwei gegeben zu sein brauchen, um die übrigen durch Rechnung zu finden. Der Wert von M und damit der Kompressibilität kann z. B. aus einem Zugversuch gefolgert werden, für welchen $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta l}{l} \cdot \frac{m-2}{m}$. Setzt man nach Messung der Zugspannung σ , bzw. der Zugkraft P und der Raumverminderung Δv den aus letzter Beziehung folgenden Wert von $\frac{m-2}{m}$ in (45) ein, so erhält man, wenn $\sigma = E \frac{\Delta l}{l}$ gesetzt wird,

$$M = \frac{\sigma}{3 \frac{\Delta v}{v}} = \frac{P}{3F \frac{\Delta v}{v}} = \frac{1}{K}.$$

Auch Gleichung (46) könnte nach Bestimmung von E und G zur Berechnung von K bzw. M dienen.

21. Elastische Grundgleichungen der Statik für dem Hookeschen Gesetze folgende isotrope und homogene Körper. Eindeutigkeit der Lösung des Gleichgewichtsproblems.

Zur Lösung des im Punkte 1 bereits erwähnten Problems der Zuordnung des äußeren Kraftsystemes zum Spannungs-, Verschiebungs- und Verzerrungszustand unter statischen Verhältnissen stehen zur Verfügung: die kinematischen Gleichungen (6) und (7) auf den Seiten 29 und 30, die Spannungsgleichungen (20) und (21), welche das Gleichgewicht eines unendlich kleinen Prismas im Innern des elastischen Körpers darstellen, ferner die Oberflächenbedingungen (24), welche das Gleichgewicht eines an der Oberfläche gelegenen Tetraeders zum Ausdruck bringen, schließlich noch das Elastizitätsgesetz (42). Zuzufolge der Gleichungen (21) reduziert sich die Zahl der zu ermittelnden Spannungskomponenten auf 6, die durch die drei Gleichungen (20) bei Einhaltung der Grenzbedingungen (24) nicht bestimmbar sind. Drücken wir aber die Spannungskomponenten aus dem Elastizitätsgesetz durch die Verzerrungskomponenten und letztere wieder mittelst der Gleichungen (6) und (7) durch die betreffenden

partiellen Ableitungen der Verschiebungskomponenten aus, und setzen die so ausgedrückten Spannungskomponenten in die Gleichungen (20) und (24) ein, so erhalten wir sechs partielle Differentialgleichungen, welche nur u, v, w als Unbekannte enthalten. Die Integration der umgewandelten Gleichungen (20), unter Beachtung der umgewandelten Grenzbedingungen (24), ergibt u, v, w und somit die Verzerrungskomponenten, ferner mit Hilfe des Elastizitätsgesetzes die Spannungskomponenten als Funktionen der Koordinaten x, y, z .

Um die Spannungskomponenten aus (42) zu bestimmen, addieren wir zunächst das erste Gleichungstripel und erhalten

$$E e = \frac{m-2}{m} (X_x + Y_y + Z_z),$$

worin $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ gleich der kubischen Dilatation ist. Setzen wir $\frac{Y_y + Z_z}{m}$ aus der ersten der Gleichungen (42) ein, so erhalten wir

$$E e = \frac{m-2}{m} X_x + (m-2)(X_x - E e_{xx}),$$

woraus

$$X_x = \frac{E m}{m+1} \left(e_{xx} + \frac{e}{m-2} \right)$$

oder bei Benützung von (43)

$$\left. \begin{aligned} X_x &= 2G \left(e_{xx} + \frac{e}{m-2} \right) \\ Y_y &= 2G \left(e_{yy} + \frac{e}{m-2} \right) \\ Z_z &= 2G \left(e_{zz} + \frac{e}{m-2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

folgt; ähnlich erhalten wir

Wir setzen nunmehr die so dargestellten Spannungskomponenten X_x, Y_y, Z_z und X_y, Y_z, Z_x aus dem zweiten Gleichungstripel (42) in die Spannungsgleichungen (20) und die Grenzbedingungen (24) ein unter Beachtung von (21) und der Beziehungen (6) und (7) bzw. des oben aufgeschriebenen Ausdrucks für die kubische Dilatation und erhalten aus der ersten der Gleichungen (20)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[2G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{e}{m-2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + k_x = 0,$$

woraus sich durch leichte Reduktion

$$\nabla^2 u + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{k_x}{G} = 0 \quad (48)$$

mit

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ergibt. In ähnlicher Weise erhalten wir aus der zweiten und dritten Spannungsgleichung

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 v + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{k_y}{G} &= 0, \\ \nabla^2 w + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{k_z}{G} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (48) \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \nabla^2 v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \nabla^2 w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

∇^2 heißt in der Vektorenanalyse bekanntlich der Laplacesche Operator.

Multiplizieren wir die erste der Gleichungen (48) mit dem Einheitsvektor \mathbf{i} , die zweite mit dem Einheitsvektor \mathbf{j} , die dritte mit dem Einheitsvektor \mathbf{k} und addieren geometrisch, so erhalten wir die Vektorgleichung

$$\nabla^2 \mathfrak{d} + \frac{m}{m-2} \nabla \operatorname{div} \mathfrak{d} + \frac{\mathbf{f}}{G} = 0 \quad (\mathfrak{d} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}), \quad (48a)$$

welche die drei algebraischen Gleichungen (48) zu ersetzen vermag. In (48a) bezeichnet $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ diejenige Operation, welche man als „Nabla“ bzw. „Gradient“ liest; $\nabla \operatorname{div} \mathfrak{d}$ ist der Gradient der kubischen Dilatation, wobei $\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$.

Setzen wir nunmehr die Spannungskomponenten ausgedrückt durch die Verschiebungskomponenten auch in die Grenzbedingungen (24) ein, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_x}{G} &= 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{e}{m-2} \right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(ny) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(nz), \\ \frac{p_y}{G} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(nx) + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{e}{m-2} \right) \cos(ny) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(nz), \\ \frac{p_z}{G} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(nx) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(ny) + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{e}{m-2} \right) \cos(nz). \end{aligned} \right\} (49)$$

Die den Beziehungen (49) entsprechende Vektorgleichung ist

$$\frac{\mathfrak{p}}{G} = \left(\nabla u + \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial x} \right) \cos(nx) + \left(\nabla v + \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial y} \right) \cos(ny) + \left(\nabla w + \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial z} \right) \cos(nz) + 2 \mathbf{n} \frac{\operatorname{div} \mathfrak{d}}{m-2}. \quad (49a)$$

worin $\mathfrak{p} = \mathbf{i} p_x + \mathbf{j} p_y + \mathbf{k} p_z$ gleich dem Vektor der Totalkraft pro Flächeneinheit, welche einem Oberflächenelement mit der Normalen \mathbf{n} entspricht und \mathbf{n} ein Einheitsvektor in der Richtung dieser Normalen ist.

Die Gleichungen (48) und (49) [bzw. die sie ersetzenden (48a) und (49a)] heißen die elastischen Grundgleichungen, die nach u, v, w aufzulösen sind, ein in der Regel sehr schwieriges Problem.

Wir haben noch den Nachweis zu führen, daß die Gleichungen (48) und (49) zu einer eindeutigen Lösung für u, v, w führen. Es zeigt sich, daß diese Eindeutigkeit an die Voraussetzung gebunden ist, daß der elastische Körper erstens keine Anfangsspannungen besitzt und zweitens als starrer Körper mit Bezug auf ein im Raume festes Koordinatensystem festgelegt erscheint, d. h. keine Verschiebungen zuläßt, wenn er vor der Verformung erstarrt gedacht wird.

Der Beweis wird indirekt geführt. Nehmen wir an, es gäbe in jedem Punkt des elastischen Körpers zwei Verschiebungen $\mathfrak{d}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1$ und $\mathfrak{d}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2$, welche gleichzeitig die elastischen Grundgleichungen erfüllen. Die Differenz $\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2 = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)$ müßte somit die Gleichungen

$$\nabla^2 \mathfrak{d} + \frac{m}{m-2} \nabla \operatorname{div} \mathfrak{d} = 0,$$

$$\left(\nabla \mathbf{u} + \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial x} \right) \cos(nx) + \left(\nabla \mathbf{v} + \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial y} \right) \cos(ny) + \left(\nabla \mathbf{w} + \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial z} \right) \cos(nz) + 2 \mathbf{n} \frac{\operatorname{div} \mathfrak{d}}{m-2} = 0$$

erfüllen, wenn in ihnen an Stelle der Verschiebungskomponenten $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1$ bzw. \mathfrak{d} die beziehungsweise Differenzen der angenommenen Lösungen eingeführt werden. Da in diesen Gleichungen weder Oberflächenkräfte noch Volumskräfte vorkommen, so muß geschlossen werden, daß $\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2$ Verschiebungen wären, die ohne Wirkung äußerer Kräfte existierten. Wenn aber der Körper vor Einwirken des angenommenen Belastungssystemes keine Anfangsspannungen oder Temperaturspannungen besaß (natürlicher Zustand, S. 25), so können bei Nullwerden der äußeren Belastung die Spannungskomponenten und zufolge (42) auch die Verzerrungskomponenten nur gleich Null gesetzt werden. Wenn die Verzerrungskomponenten

verschwinden sollen, so müssen die Bedingungen

$$e_{xx} = \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \quad e_{yy} = \frac{\partial v_3}{\partial y} = 0, \quad e_{zz} = \frac{\partial w_3}{\partial z} = 0$$

und

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} = -\frac{\partial v_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial z} = -\frac{\partial w_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x} = -\frac{\partial u_3}{\partial z}$$

erfüllt sein, wobei $u_3 = u_1 - u_2$, $v_3 = v_1 - v_2$, $w_3 = w_1 - w_2$ gesetzt worden ist. Aus den ersten drei Bedingungen folgt zunächst

$$u_3 = f_1(y, z), \quad v_3 = f_2(x, z), \quad w_3 = f_3(x, y)$$

mit f_1, f_2, f_3 als drei zu bestimmenden Funktionen, die im Zusammenhang mit den letzten drei Bedingungen die Gleichungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial z}$$

erfüllen müssen. Man sieht demnach leicht, daß u_3, v_3, w_3 Funktionen der folgenden Form sein müssen:

$$u_3 = a_2 z - a_3 y + b_1, \quad v_3 = a_3 x - a_1 z + b_2, \quad w_3 = a_1 y - a_2 x + b_3$$

mit $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ als willkürlichen Integrationskonstanten. Vektoralgebraisch könnte man dieses Resultat durch $\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2 = \mathfrak{a} \times \mathfrak{r} + \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a} = a_1 + a_2 + a_3$, $\mathfrak{b} = b_1 + b_2 + b_3$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z}$ ausdrücken, wobei a_1, b_1 bzw. a_2, b_2 bzw. a_3, b_3 Vektoren in den bzw. Richtungen der x -, der y -, der z -Achse mit den Größen a_1, b_1 bzw. a_2, b_2 bzw. a_3, b_3 vorstellen; $\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}$ ist das Zeichen für das äußere Produkt der Vektoren \mathfrak{a} und \mathfrak{r} . Um dieses Ergebnis zu deuten, müssen wir auf die als bekannt vorausgesetzte Kinematik des starren Körpers zurückgreifen. Die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers ist in jedem Zeitaugenblick zusammengesetzt aus einer fortschreitenden Bewegung und einer Rotationsbewegung derart, daß in jedem Zeitaugenblick die unendlich kleine Verrückung \mathfrak{m} eines jeden Punktes sich als geometrische Summe $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_r + \mathfrak{m}_f$ von zwei unendlich kleinen komponentalen Verrückungen \mathfrak{m}_r und \mathfrak{m}_f ergibt. Der Vektor \mathfrak{m}_f , d. i. die komponentale Verrückung eines beliebigen Punktes des starren Körpers infolge der fortschreitenden Bewegung, ist abhängig von der Wahl des sogenannten Reduktionspunktes der Bewegung, aber unabhängig von der Lage des Punktes im starren Körper mit Bezug auf den Reduktionspunkt, dagegen ist die Komponente \mathfrak{m}_r , d. i. die komponentale Verrückung infolge der Rotationsbewegung eines beliebigen Punktes des starren Körpers um die momentane Rotationsachse, abhängig sowohl von der Wahl des Reduktionspunktes als auch von der Lage des Punktes im Körper mit Bezug auf den Reduktionspunkt. Nennen wir \mathfrak{r} den Radiusvektor, welcher den beliebigen Punkt des starren Körpers mit Bezug auf den Reduktionspunkt festlegt, und sei \mathfrak{n}_r ein in die momentane Rotationsachse gelegter Vektor, dessen Größe die momentane Verrückung infolge der Rotation eines Punktes des starren Körpers in der Entfernung l von der Rotationsachse bestimmt (\mathfrak{n}_r ist für verschiedene Reduktionspunkte konstant), so kann man $\mathfrak{m}_r = \mathfrak{n}_r \times \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_f + \mathfrak{n}_r \times \mathfrak{r}$ schreiben. Man sieht, daß $\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2$ als Verrückung eines starren Körpers aufgefaßt werden kann, dessen Komponenten $\mathfrak{m}_f = \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{n}_r \times \mathfrak{r} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{r}$ sind. Erfährt der starre Körper keine Verrückung mit Bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Ursprung der Reduktionspunkt der Momentanbewegung sein soll, so verschwinden $\mathfrak{m} = \mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2$ und daher die sechs Konstanten $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. Aus dem Vorstehenden ergibt sich die Richtigkeit der vorangestellten Behauptungen für die Bedingungen der Eindeutigkeit der Lösungen der elastischen Grundgleichungen. Man könnte auch sagen, die Gleichungen (48) und (49) lassen noch beliebige Verrückungen des vor Aufbringung der äußeren Kräfte erstarrt gedachten Körpers zu. Werden derartige Verrückungen sowie Anfangsspannungen ausgeschlossen, so sind die Lösungen jener Gleichungen eindeutig.

Ein starrer Körper ist mit Bezug auf ein Koordinatensystem festgelegt, wenn drei nicht in einer Geraden liegende Punkte desselben festgelegt erscheinen. So können wir z. B. nach dem Vorgange von de Saint Venant und Clebsch drei unendlich nahe gelegene, einem Flächenelemente zugeordnete Punkte A, B, C des Körpers, die in der yx -Ebene liegen, als festliegend mit Bezug auf ein festes Koordinatensystem xyz annehmen. A sei mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfallend, B und C sollen auf der y - bzw. z -Achse liegen. Der

Voraussetzung, daß A festliegen soll, entsprechen die drei Bedingungen

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0 \quad (\text{a})$$

(der Zeiger 0 deutet die Beziehung der Verschiebungen des Punktes zum Ursprung des Koordinatensystemes an), der Voraussetzung, daß C festliegt, entsprechen die zwei Bedingungen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 = 0. \quad (\text{b})$$

Der Punkt B könnte sich, wenn die fünf Bedingungen (a) und (b) erfüllt sind, nur rotierend um die z -Achse bewegen; damit auch das ausgeschlossen ist, muß noch die Bedingung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = 0 \quad (\text{c})$$

erfüllt sein. Die allgemeinen Lösungen der Elastizitätsgleichungen nach u, v, w als Funktionen von x, y, z aufgefaßt müssen also im gegebenen Falle den Bedingungen (a), (b) und (c) für $x = 0, y = 0, z = 0$ genügen. Die Verschiebungen der übrigen Punkte des elastischen Körpers, dem das festgelegte Flächenelement angehört, können bei Einflußnahme eines äußeren Kraftsystems beliebig erfolgen. In dem Flächenelement machen sich dann Reaktionskräfte geltend, die zu bestimmen sind.

In den technischen Anwendungsgebieten liegen die Festlegungsverhältnisse in der Regel viel verwickelter. Um nur das Beispiel des auf der einen Seite annähernd fest angespannten Kragträgers anzuführen, der an seinem freien Ende durch eine Einzelkraft belastet ist: an seinem eingespannten Ende ist nicht ein Flächenelement, sondern die ganze eingespannte Oberfläche des Trägers, soweit sie im Mauerwerk steckt, annähernd als festgelegt zu betrachten. Die Bestimmungen des Spannungs- und Verzerrungszustandes in diesem Träger wurden zum ersten Male von De Saint Venant unter den Voraussetzungen gelöst, daß ein Flächenelement des linken Stabendes auf die oben angegebene Art festgelegt ist, und die Last am freien Ende sich in einer bestimmten Weise über den Querschnitt des Stabes verteilt. Die näherungsweise Übertragung seiner Lösung auf den angegebenen Fall der Technik erfolgt unter Zugrundelegung des De Saint Venantschen Prinzipes (S. 20 ff.).

22. Einführung krummliniger Koordinaten.

Die Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungskomponenten sowie sämtliche bisher auf Grund der Definition derselben und der Existenz des Hookeschen Elastizitätsgesetzes aufgestellten kinematischen und statischen Beziehungen wurden in rechtwinkligen Punktkoordinaten bezogen auf ein festes räumliches, rechtwinkliges Koordinatensystem xyz dargestellt gedacht, derart, daß alle eingeführten Vektoren bzw. Größen als Funktionen dieser Koordinaten aufgefaßt wurden und die Gleichgewichtsbedingungen sich auf einen Elementarkörper bezogen, dessen begrenzende Flächenelemente parallel zu den Koordinatenebenen waren.

In vielen Anwendungsfällen empfiehlt es sich, aus Gründen der Bequemlichkeit nicht rechtwinklige Punktkoordinaten, sondern rechtwinklige Flächenkoordinaten oder, wie man auch sagt, krummlinige rechtwinklige Koordinaten einzuführen. Wenn ein Punkt im Raume durch letztere festgelegt werden soll, so wird er als Schnitt dreier krummer Flächen dargestellt, die aufeinander normal stehen. Wir denken uns also den vom Körper erfüllten Raum durch drei Scharen aufeinander normal stehender Flächen durchsetzt, deren Gleichungen durch

$$\xi(x, y, z) = A, \quad \eta(x, y, z) = B, \quad \zeta(x, y, z) = C$$

gegeben sein sollen, worin A, B, C veränderliche Parameter sind. Wählen wir A, B, C in bestimmter Weise, so werden aus der dreifach unendlichen Schar von Flächen drei bestimmte in einem Punkt sich schneidende herausgewählt. Jedem Punkt des Körpers sind sonach bestimmte Werte von A, B, C und drei bestimmte Flächen ξ, η, ζ zugeordnet. Man nennt ξ, η, ζ rechtwinklige Flächenkoordinaten oder rechtwinklige krummlinige Koordinaten. In diesen Koordinaten, zu welchen z. B. die Zylinder- und räumlichen Polarkoordinaten gehören, müssen die kinematischen Gleichungen, die Gleichgewichtsbedingungen und schließlich die

elastischen Grundgleichungen bei Beachtung des Elastizitätsgesetzes dargestellt werden. Die allgemeine Durchführung dieser Aufgabe fällt nicht in den Rahmen dieses Buches, sie kann z. B. in dem „Lehrbuch der Elastizität“ von A. E. H. Love, 1907, in den Paragraphen 19, 58 und 59 nachgelesen werden. Hier wollen wir nur auf einen besonderen Fall von krummlinigen Koordinaten, die Zylinderkoordinaten hinweisen. Die Zylinderkoordinaten werden beinahe ausschließlich gebraucht, wenn es sich um elastische Probleme bei Voll- und

Hohlzylindern handelt, wie bei Röhren, Schornsteinen, zylindrischen Dampfkesseln usw. Ein Punkt P eines normalen Kreiszylinders (Abb. 25) wird bei Einführung von Zylinderkoordinaten als Schnitt einer durch die Zylinderachse z gehenden durch die Winkelkoordinate φ bestimmten radialen Ebene, einer durch die Koordinate $z = P P'$ gegebenen auf die z -Achse normalen Ebene und schließlich einer Zylinderfläche vom Radius $r = M P$

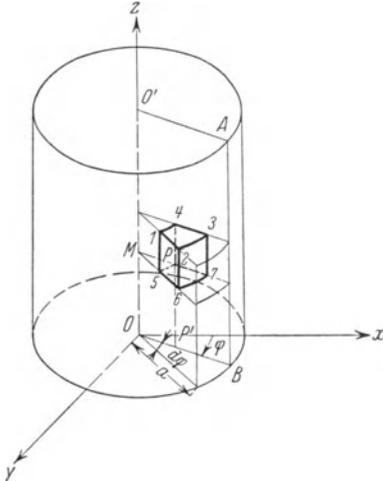


Abb. 25.

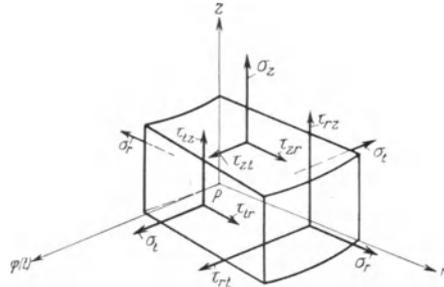


Abb. 26.

festgelegt. Die krummlinigen Koordinaten ξ, η, ζ sind also hier im besondern durch r, φ, z dargestellt, denen der in der Abbildung eingetragene Elementarkörper $P' 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ entspricht. Die Bezeichnungweise der an letzteren übertragenen Spannungen ist aus Abb. 26 zu erkennen und bei Beachtung der Bemerkungen auf Seite 18 ohne weiteres verständlich. Die Normalspannungen $\sigma_t, \sigma_r, \sigma_z$ heißen vielfach, z. B. wenn der Spannungszustand von Röhren untersucht wird, der Reihe nach Ring-, Radial- und Längsspannungen. Die übrigen Spannungen sind Schubspannungen, welche die Bedingungen $\tau_{lr} = \tau_{rl}, \tau_{zr} = \tau_{rz}, \tau_{lz} = \tau_{zl}$ erfüllen. Als Verschiebungen werden solche in radialer, tangentieller und in der Längsrichtung eingeführt, die sinngemäß mit u_r, v_t und w_z bezeichnet werden. Die Verzerrungskomponenten werden in Zuordnung zu den Spannungscomponenten mit $e_{rr}, e_{\phi\phi}, e_{zz}, e_{lr}, e_{zr}, e_{z\phi}$ bezeichnet, worin z. B. e_{rr} eine bezogene Dehnung in der Richtung der Zunahme von $r, e_{r\phi}$ eine den Schubspannungen τ_{lr} und $\tau_{r\phi}$ zugeordnete Schiebung parallel zur xy -Ebene usw. bedeuten. Die den Beziehungen (6) und (7) auf den Seiten 29 und 30 entsprechenden kinematischen Gleichungen, ferner die den Spannungsgleichungen (20) und (21), Grenzbedingungen (24) und elastischen Grundgleichungen (48) und (49) zugeordneten statischen Gleichungen können durch direkte einfache geometrische und statische Betrachtungen am Elementarkörper in Abb. 26 den Zylinderkoordinaten angepaßt werden. Hierauf soll aber hier nicht näher eingegangen werden. Wir behalten uns vielmehr vor, darauf später in einem besonderen Falle zurückzukommen (S. 216 ff.).

23. Anwendung der elastischen Grundgleichungen auf die Lösung einiger einfacher Aufgaben.

Wir wollen im folgenden die Anwendung des im Punkte (21) auseinander Gesetzten auf einige praktisch in Betracht kommende Fälle zeigen.

a) Fall der Torsion (Drillung) eines geraden zylindrischen Stabes, der dem Hooke'schen Gesetze folgt. Der gerade Stab nach Abb. 27 mit dem näher bezeichneten rechtwinkligen Achsensysteme x, y, z und der Festlegung eines Flächenelementes seiner linken Endquerschnittsfläche nach Seite 89, dessen Material dem Hooke'schen Gesetze folgt, sei durch zwei entgegengesetzt gleiche Momente $M_{D,x}$ und $-M_{D,x}$, deren Ebenen mit den Endquerschnittsflächen zusammenfallen, beansprucht. $M_{D,x}$ heißt ein Drillungs-, Verdrehungs- oder Torsionsmoment, die Beanspruchung heißt eine solche auf Drillung, Verdrehung oder Torsion. Praktisch kommt diesem Fall der Belastung der einer langen dünnen Welle sehr nahe, die links eingemauert ist und im rechten Endquerschnitt durch ein äußeres Moment verdreht wird.

Wir denken uns ein beliebiges unendlich kleines Prisma mit Kanten parallel zu den Koordinatenachsen ins Auge gefaßt. Der äußeren Beanspruchung des Stabes scheint eine Verdrehung der zur Stabachse normalen Seitenflächen des genannten Prismas gegeneinander und normal zur Stabachse angepaßt zu sein; dem könnte vielleicht die Annahme von Schubspannungen Y_x, Z_x bei Nullwerden aller übrigen Spannungskomponenten $X_x, Y_y, Z_z, Z_y = Y_z$ entsprechen. Wir wollen sehen, ob eine derartige Annahme ohne Widerspruch möglich ist, und für den Fall des Zutreffens der Annahme, wie die Verzerrungs-, Spannungs- und Verschiebungskomponenten mit dem Drillungsmoment und der Querschnittsform des Stabes zusammenhängen.

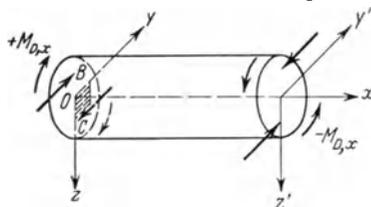


Abb. 27.

Bei Berücksichtigung der Annahme, und weil die letztere dem Elastizitätsgesetz für isotrope homogene Körper zufolge die Beziehungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad Y_x = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad Z_x = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (a)$$

nach sich zieht, nehmen die Elastizitätsgleichungen (48) für ein unendlich kleines Prisma bei Vernachlässigung des Eigengewichtes des Stabes die Form an:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (b)$$

Die Grenzbedingungen (49) für die Mantelfläche des zylindrischen Stabes verlangen nur die Erfüllung der auf die x -Richtung bezüglichen Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin(nz) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(nz) = 0, \quad (c)$$

da die zwei übrigen Grenzbedingungen, welche sich auf die y - und z -Richtung beziehen, durch die Annahmen erfüllt sind. (Siehe Abb. 27 a, in der s die Berandung eines beliebigen Querschnittes des Stabes vorstellt.) Aus den drei ersten der Beziehungen (a) folgt zunächst $u = f_1(y, z)$, $v = f_2(x, z)$, $w = f_3(x, y)$, wenn f_1, f_2, f_3 zu bestimmende Funktionen der angeordneten Argumente sind. Aus der zweiten und dritten der Beziehungen (b) folgt aber, daß v und w nur lineare Funktionen von x sein können, somit die Funktionen f_2 und f_3 die Formen

$$v = f_2(x, z) = x[a + F_1(z)] + b, \quad w = f_3(x, y) = x[c + F_2(y)] + d$$

haben müssen, worin a, b und c Konstante und F_1, F_2 noch zu bestimmende Funktionen von z bzw. y allein sind. Weil aber nach der dritten der Beziehungen (a) $\frac{dF_1}{dz} = -\frac{dF_2}{dy}$, so können die Funktionen F_1 und F_2 nur die Formen $F_1 = \tau z + f$, $F_2 = -\tau y + g$ mit τ, f, g als Konstanten haben. Somit können wir $v = x(\alpha + \tau z) + b$, $w = x(\beta - \tau y) + d$ mit α, β als neuen Konstanten schreiben. Verwenden wir die auf die Festlegung des Zylinders bezüglichen Bedingungen (S. 89) $v_0 = 0$, $w_0 = 0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 = 0$, so erhalten wir $b = 0$, $d = 0$, also wird

$$v = x(\alpha + \tau z), \quad w = x(\beta - \tau y) \quad (d)$$

bestehen müssen. Die Funktion $f_1(y, z) = u$ ist an die folgenden Bedingungen geknüpft: Erstens muß die sogenannte Laplacesche Gleichung $\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = 0$ entsprechend der ersten der Gleichungen (b) erfüllt sein, zweitens ist die Funktion f_1 an die Oberflächenbedingung (c) gebunden, die bei Benützung der gefundenen Werte von v, w die Form

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial y} + \alpha + \tau z \right] \sin(nz) + \left[\frac{\partial f_1}{\partial z} + \beta - \tau y \right] \cos(nz) = 0$$

annimmt, schließlich sollen noch die restlichen nicht benützten Festlegungsbedingungen für das Element des linken Endquerschnittes durch die Funktion erfüllt werden, d. h. die Bedingungen $\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \right)_0 = 0$, $f_1(0, 0) = 0$ bestehen. Um insbesondere die Randbedingung zu vereinfachen, führen wir eine neue Funktion II von y, z ein, derart, daß die Beziehung

$f_1 = \tau \Pi(y, z) - \alpha y - \beta z$ besteht. Es wird dann

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 = \tau \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0 - \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)_0 = \tau \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0 - \beta = 0$$

zufolge der Festlegungsbedingungen erfüllt sein müssen, woraus

$$\alpha = \tau \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0, \beta = \tau \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0$$

folgt. Es kann somit

$$f_1 = \tau \left[\Pi - y \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0 - z \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0 \right]$$

gesetzt werden. Mit der neuen Funktion Π nimmt die Laplacesche Gleichung die Form

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0 \quad (e)$$

an, und die Oberflächenbedingung lautet

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} \sin(nz) + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \cos(nz) = y \cos(nz) - z \sin(nz). \quad (f)$$

Außer den Bedingungen (e) und (f) muß Π die Beziehung

$$\Pi(0, 0) = 0 \quad (g)$$

erfüllen, weil $f_1(0, 0) = 0$ sein soll. Π heißt die Torsionsfunktion und ist von der Art des Querschnittes abhängig.

Die Verschiebungen und Spannungen werden demnach

$$\left. \begin{aligned} u &= \tau \left[\Pi - y \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0 - z \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0 \right], \\ v &= \tau x \left[z + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0 \right], & X_y &= G \tau \left[\frac{\partial \Pi}{\partial y} + z \right], \\ w &= -\tau x \left[y - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0 \right], & X_z &= G \tau \left[\frac{\partial \Pi}{\partial z} - y \right]. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Diese gewonnenen Formeln können noch weiter vereinfacht werden, indem man die Koordinaten nach dem Schema $x = x_1$, $y = y_1 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0 z$, $z = z_1 - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0 y$ transformiert und eine neue Torsionsfunktion Π_1 einführt, die durch

$$\Pi_1(y_1, z_1) = \Pi \left[y_1 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0 z_1, z_1 - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0 y_1 \right] - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0 y_1 - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0 z_1$$

definiert wird. Die Bedingungen (e) und (f) erleiden bei diesen Einführungen keine Änderung ihrer Form, d. h. man hat in ihnen nur Π_1, y_1, z_1 , an die Stelle von Π, y, z zu setzen; die Bedingung (g) geht aber in die Bedingung $\Pi_1 \left[-\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0, \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0 \right] = 0$ über, d. h. Π_1 muß für $y_1 = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0 z_1$ und $z_1 = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0 y_1$ den Wert Null annehmen. Die Gleichungen (50) werden dann in leicht ersichtlicher Weise

$$\left. \begin{aligned} u &= \tau \Pi_1, \\ v &= \tau x_1 z_1, & X_y &= G \tau \left(z_1 + \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_1} \right), \\ w &= -\tau x_1 y_1 & X_z &= G \tau \left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial z_1} - y_1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (50 a)$$

Die Größe τ folgt daraus, daß die Summe der Momente der den Schubspannungen in den Endquerschnitten entsprechenden Kräfte mit Bezug auf die Stabachse gleich dem gegebenen Drillungsmoment M_{Dx} bzw. $-M_{Dx}$ sein muß: bei im Vergleich zu den Querschnittsdimensionen langen Stäben ist das Prinzip von De Saint Venant anwendbar (S. 20). Es

muß also für die rechte Endquerschnittsfläche die Gleichung

$$\int_F (y X_z - z X_y) dy dz = - M_{Dx}, \tag{h}$$

bestehen, wobei das Integral über die ganze Querschnittsfläche genommen werden muß und die Zeichenregel für die Schubspannungen zu beachten wäre. Durch Einsetzen der Werte von X_z und X_y aus (50) unter dem Integralzeichen ergibt sich

$$G\tau \left[\int_F \left(y \frac{\partial H}{\partial z} - z \frac{\partial H}{\partial y} \right) dy dz - \int_F (y^2 + z^2) dy dz \right] = - M_{Dx}.$$

Wenn wir, wie zutreffend, das zweite Integral dem polaren Trägheitsmoment J_p der Querschnittsfläche mit Bezug auf die Stabachse x gleichsetzen, und τ aus der letzten Beziehung errechnen, erhalten wir

$$\tau = \frac{M_{Dx}}{G \left[J_p - \int_F \left(y \frac{\partial H}{\partial z} - z \frac{\partial H}{\partial y} \right) dy dz \right]}. \tag{51}$$

Der Ausdruck im Nenner der Beziehung (51) heißt Torsionssteifigkeit. Wenn letztere wächst, nimmt τ ab (über die Bedeutung von τ siehe weiter unten). M_{Dx} ist die alleinige Resultante der den Spannungen X_z, X_y entsprechenden Kräfte $X_z dy dz, X_y dy dz$, da die Integrale $\int_F X_z dy dz$ und $\int_F X_y dy dz$ genommen über die Querschnittsfläche Null sind; denn es ist z. B.

$$\int_F X_z dy dz = \int_F G\tau \left(\frac{\partial H}{\partial z} - y \right) dy dz,$$

wofür wir, weil die Bedingung (e) erfüllt sein muß,

$$G\tau \int_F \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[z \left(\frac{\partial H}{\partial z} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[z \left(\frac{\partial H}{\partial y} + z \right) \right] \right\} dy dz$$

setzen können, wie man sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen leicht überzeugt. Das zuletzt aufgeschriebene Flächenintegral ergibt aber durch partielle Integration nach z bzw. y eine Summe zweier Randintegrale, die über die Begrenzungskurve des Querschnittes zu nehmen sind von der Form

$$\int_s z \left(\frac{\partial H}{\partial y} + z \right) \sin(nz) ds + \int_s z \left(\frac{\partial H}{\partial z} - y \right) \cos(nz) ds$$

mit ds als Element der Berandung des Querschnittes und n als mit Bezug auf die Querschnittsfläche nach außen bezogene Normale auf die Grenzkurve (Abb. 27a). Die Summe dieser Integrale muß aber zufolge der Grenzbedingung (f) verschwinden. Ähnlich gestaltet sich die Beweisführung dafür, daß $\int_F X_y dy dz$ gleich Null sein muß.

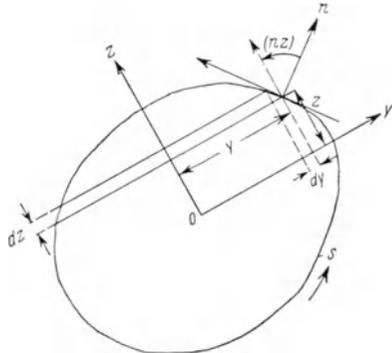


Abb. 27a.

Es fragt sich nun, ob die Torsionsfunktion H eindeutig gegeben ist, wenn ein Querschnitt gegeben vorliegt, und die Bedingungen (e), (f) und (g) erfüllt sein müssen. Der Beweis für die Eindeutigkeit wird indirekt geführt, indem wir annehmen, daß es zwei Funktionen H_2 und H_3 von y, z gäbe, welche die genannten Bedingungen erfüllen. Es müßten dann offenbar für $H_4 = H_3 - H_2$ die Beziehungen bestehen

$$\frac{\partial^2 H_4}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_4}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial H_4}{\partial y} \sin(nz) + \frac{\partial H_4}{\partial z} \cos(nz) = \frac{\partial H_4}{\partial n} = 0,$$

wobei wir benützt haben, daß $\sin(nz) = \frac{\partial y}{\partial n}$, $\cos nz = \frac{\partial z}{\partial n}$, also der zweite Ausdruck auch

in der Form $\frac{\partial II_4}{\partial n}$ geschrieben werden kann. Wir verwenden nun den bekannten Green-schen Satz

$$\iint \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz = \int F \frac{\partial F}{\partial n} ds - \iint F \nabla^2 F dy dz,$$

in welchem F eine im Bereiche einer berandeten Fläche samt ihren Ableitungen stetige Funktion vorstellt, das Integral links und das zweite Integral rechts über die ganze Fläche genommen wird, während sich das erste Integral rechts über die Berandung s der Fläche mit den Linienelementen ds erstreckt, und $\nabla^2 F$ gleich $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ gesetzt wird. Führen wir im Greenschen Satz für F die Funktion II_4 ein, so erhalten wir mit Rücksicht darauf, daß $\nabla^2 II_4 = 0$ und auch $\int II_4 \frac{\partial II_4}{\partial n} ds = 0$ sein muß, die Bedingung

$$\iint \left[\left(\frac{\partial II_4}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial II_4}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz = 0,$$

die nur zutreffen kann, wenn II_4 Null oder eine Konstante ist. Die beiden Funktionen II_3 und II_2 könnten sich sonach höchstens um eine Konstante unterscheiden; da aber überdies sowohl II_2 als auch II_3 der Bedingung genügen sollen, daß sie für $y = 0, z = 0$ verschwinden sollen, so kann diese Konstante offenbar nur Null sein, woraus folgt, was zu beweisen war.

Die Bestimmung der Torsionsfunktion II stellt für jede Querschnittsform ein besonderes mathematisches Problem vor. Besonders einfach ist dieselbe für den Kreisquerschnitt, für welchen, da für dessen Berandung $y \cos(nz) - z \sin(nz)$ verschwinden muß [es ist $\sin(nz) = \frac{y}{r}, \cos(nz) = \frac{z}{r}$ mit r als Radius des Kreises] und daher die Randbedingung (f) in $\frac{\partial II}{\partial n} = 0$ übergeht. Bei Berücksichtigung der Laplaceschen Gleichung und $(II)_0 = 0$ folgt, wie im Eindeutigkeitsbeweise für II , daß jetzt $II = 0$ sein muß, also die Gleichungen (50) in

$$\left. \begin{aligned} u &= 0, \\ v &= \tau x z, & X_y &= G \tau z, \\ w &= -\tau x y, & X_z &= -G \tau x \end{aligned} \right\} \quad (50')$$

übergehen, worin nach (51) $\tau = \frac{M_D x}{G J_p}$ ist. Die Torsionssteifigkeit wird im Falle eines Kreisquerschnittes GJ_p , worauf wir in der noch später zu behandelnden, in der Technik üblichen Näherungstheorie zurückkommen werden.

Das Vorstehende zeigt, daß die Annahme der Spannungs-komponenten X_y, X_z allein bei Wirkung zweier je entgegengesetzt gleicher Drehmomente quer zur Stabachse richtig war, da alle Bedingungen restlos erfüllt werden können.

Diskussion der erhaltenen Formeln. Die in den Formeln (50) und (50') vorkommende Größe τ , welche aus (51) durch das gegebene Drillungsmoment im Zusammenhange mit der Querschnittsform ausgedrückt werden kann, hat eine anschauliche Bedeutung. Wir stellen uns einen ganz in den Stab hineinfallenden Kreiszylinder C vor, dessen zur Stabachse parallele Achse in die x_1 -Achse fällt, also mit Bezug auf das x, y, z -Koordinatensystem die einzelnen Querschnitte

in den Punkten $y = \left(\frac{\partial II}{\partial z} \right)_0, z = -\left(\frac{\partial II}{\partial y} \right)_0$ entsprechend $y_1 = 0, z_1 = 0$ schneidet (siehe das oben für die Torsionsfunktion II_1 Gesagte). Der beliebige Radius des Kreiszylinders C heiße ρ (Abb. 27 b). Fassen wir einen Punkt P auf dem Mantel des Zylinders ins Auge mit den Koordinaten $y_1 = \rho \cos \alpha = y - \left(\frac{\partial II}{\partial z} \right)_0, z_1 = \rho \sin \alpha = z + \left(\frac{\partial II}{\partial y} \right)_0$, so ist

$$dy_1 = -\rho \sin \alpha d\alpha = -z_1 d\alpha = -\left[z + \left(\frac{\partial II}{\partial y} \right)_0 \right] d\alpha,$$

$$dz_1 = \rho \cos \alpha d\alpha = y_1 d\alpha = \left[y - \left(\frac{\partial II}{\partial z} \right)_0 \right] d\alpha.$$

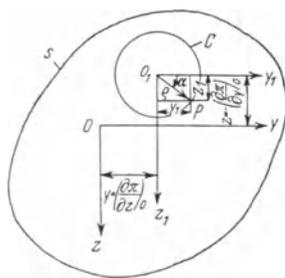


Abb. 27 b.

Vergleichen wir diese Formeln mit jenen für v und w unter (50) gefundenen, so sehen wir, daß, wenn für dx das Symbol ψ gesetzt wird, wir $\tau x = -\psi$ schreiben können; also bedeutet $\tau = -\frac{d\psi}{dx}$ den auch als Drall bezeichneten sehr kleinen Verdrehungswinkel um die x_1 -Achse zweier Radien ρ des Kreiszyinders C gegeneinander, die vor der Deformation in einer durch die x_1 -Achse gehenden Ebene in zwei Querschnitten des Stabes mit der Entfernung 1 voneinander liegen. Wir können sonach z. B. für den Kreiszyinder $\frac{d\psi}{dx} = -\frac{M_D x}{G J_p}$ setzen; in den allgemeineren Fällen mit beliebigem Querschnitt würde an Stelle von $G J_p$ der in der Formel (51) vorhandene Nenner eintreten. Für zur y - und z -Achse symmetrische Querschnitte (Kreis, Ellipse, Rechteck usw.) fällt die Achse x_1 mit der x -Achse zusammen, weil, wie wir gleich nachweisen werden, dann $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0 = 0$ und $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0 = 0$ sein muß, d. h. für derartige Querschnitte findet die Verdrehung um die Stabachse statt. Da nämlich bei zur y - und z -Achse symmetrischen Querschnitten für Punkte der Berandung $\sin(nz)$ eine ungerade Funktion von y und eine gerade Funktion von z , und $\cos(nz)$ eine gerade Funktion von y und eine ungerade Funktion von z ist, so muß die rechte Seite der Randbedingung (f) eine ungerade Funktion von y und eine ungerade Funktion von z sein; das gleiche muß auch von der linken Seite dieser Gleichung gelten, d. h. es muß $\frac{\partial \Pi}{\partial y}$ gerade für y , ungerade für z , $\frac{\partial \Pi}{\partial z}$ ungerade für y , gerade für z sein, woraus folgt, daß Π eine ungerade Funktion von y und z sein muß, und daher $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0$ verschwinden müssen. Damit hängt auch zusammen, daß für symmetrische Querschnitte in der Stabachse sowohl u, v, w als X_y, X_z verschwinden müssen.

Die Achse x_1 des Verdrehungswinkels heißt Torsionsachse, manchmal wird auch die Achse so genannt, deren linkes Flächenelement festgelegt erscheint. Es bleibt dem Leser überlassen, die (50) entsprechenden Beziehungen für den Fall abzuleiten, daß von vornherein das dem Punkte $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ zugeordnete Flächenelement festgelegt wird.

Ein Punkt mit den Koordinaten x, y, z der Faser mit der Gleichung $y = p, z = q$ geht nach der Deformation des Stabes in einen Punkt mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x' &= x + u = x + \tau \left[\Pi - p \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)_0 - q \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 \right], \\ y' &= y + v = p + \tau x \left[q + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)_0 \right] = p + \tau \left\{ x' - \tau \left[\Pi - p \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)_0 - q \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 \right] \right\} \left[q + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)_0 \right], \\ z' &= z + w = q - \tau x \left[p - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 \right] = q - \tau \left\{ x' - \tau \left[\Pi - p \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)_0 - q \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 \right] \right\} \left[p - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 \right] \end{aligned}$$

über. Vernachlässigen wir Glieder mit der Größe zweiter Kleinheit, d. i. τ^2 , so können wir als Gleichung der Faser nach der Deformation schreiben

$$\begin{aligned} y' &= p + \tau x' \left[q + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)_0 \right], \\ z' &= q - \tau x' \left[p - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 \right]. \end{aligned}$$

Die Faser nach der Verformung ist demnach im allgemeinen als eine die Torsionsachse kreuzende Gerade zu betrachten. In dem besonderen Falle, daß $q = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)_0$, $p = +\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_0$, also für die Torsionsachse, wird $y' = p$, $z' = q$, d. h. die Torsionsachse bleibt bei der Torsion an ihrer Stelle. Eine Querschnittsfläche mit der Gleichung $x = a$ geht in die Fläche $x' = a + \tau \left[\Pi - y \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)_0 - z \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 \right]$ über. Der Charakter dieser Fläche hängt von der Torsionsfunktion Π ab. Im Falle eines Kreises, für den $u = 0$ ist, fällt sie mit der ursprünglichen Querschnittsfläche zusammen.

Eine weitere Durchführung von besonderen Lösungen für verschiedene Querschnittsformen würde zu weit führen. Wer sich dafür interessiert, kann z. B. das Werk von A. E. H. Love¹ oder das grundlegende Werk von De Saint

¹ Love, A. E. H.: Lehrbuch der Elastizität, § 221 u. § 222. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1907.

Venant-Clebsch¹ nachlesen. Das für die Technik sehr wichtige Problem, die Spannungs- und Verschiebungskomponenten für einen geraden zylindrischen Stab zu finden, dessen Endquerschnittsflächen durch beliebige Kräfte in Anspruch genommen sind, wurde zuerst von De Saint Venant in befriedigender Weise gelöst. Der vorstehend behandelte Fall ist eine besondere Lösung des genannten allgemeinen Problems.

b) Beanspruchung eines geraden zylindrischen Stabes, der dem Hookeschen Gesetze folgt, auf Zug unter Einbeziehung des Eigengewichtes.

Ein langer Stab vom spezifischen Gewichte γ mit einer Querschnittsfläche von der Größe F und der Länge l stehe unter dem Einflusse seines Eigengewichtes, das in der Richtung seiner Längsausdehnung wirken soll, und einer Last P , die an seinem unteren Ende gleichförmig verteilt aufgebracht wird. Sein oberes Ende sei etwa durch einen Haken festgelegt (Abb. 28). Dieser Festlegung wollen wir einen angenäherten mathematischen Ausdruck dadurch verleihen, daß wir sagen, es sei ein Flächenelement der symmetrisch um den Schwerpunkt der Fläche A angeordnet gedachten Übertragungsfläche f des Hakens im Raume unverschiebbar und unverdrehbar (S. 89). In diesem Flächenelement soll der Ursprung des Koordinatensystemes liegen, dessen yz -Ebene in das Flächenelement, dessen x -Achse in die Stabachse fällt. Nehmen wir an, daß nur Spannungen X_x vorhanden sind, so lautet die einzige übrig bleibende Spannungsgleichung $\frac{\partial X_x}{\partial x} + \gamma = 0$,

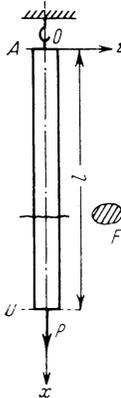


Abb. 28.

woraus $X_x = -\gamma x + F(y, z)$ folgt, mit $F(y, z)$ als einer einstweilen willkürlichen Funktion von y, z . Mit diesem Wert von X_x sind die Oberflächenbedingungen (49) für die von Kräften freie Zylindermantelfläche des Stabes von selbst erfüllt, da $\cos(nx)$ für diese Fläche gleich Null ist. Die Oberflächenbedingungen für die untere Begrenzungsfläche U fordern

$$p_x = \frac{P}{F} = (X_x)_{x=l} \cos(nx) = (X_x)_{x=l} = -\gamma l + F(y, z),$$

woraus $\frac{P}{F} + \gamma l = F(y, z)$ und somit $X_x = \frac{P}{F} + \gamma(l - x)$ folgt. Die Oberflächenbedingungen für die obere Begrenzungsfläche A lautet somit zwangsweise $p_x = (X_x)_{x=0} \cos(nx) = \frac{P}{F} + \gamma l$, d. h. damit die angenommene Spannungsverteilung zutreffend sein kann, muß von seiten des Hakens eine gleichmäßig über die obere Begrenzungsfläche A verteilte Belastung $P + \gamma l F$ übertragen werden; eine derartige Übertragung ist nicht möglich, wir können uns aber, wenn der Stab lang ist gegenüber seinen Querdimensionen, sehr angenähert durch Anwendung des De Saint Venantschen Prinzipes über diese Schwierigkeit hinweghelfen, demzufolge wir schließen können, daß bei der gegebenen möglichen Kräfteübertragung durch den Haken in einer sehr kleinen Entfernung von der Fläche A ein Spannungszustand herrschen muß, der einer gleichförmigen Verteilung der Kraft $P + \gamma l F$ über die ganze Querschnittsfläche A entspricht. Für das Weitere nehmen wir somit an, daß (sehr angenähert) am oberen Ende des Stabes in der ganzen Fläche A eine Spannung $\frac{P}{F} + \gamma l$ herrschen muß. Wenn X_x den oben berechneten Wert annimmt, können somit die Spannungsgleichungen und Oberflächenbedingungen als befriedigt angesehen werden. Um die

¹ De Saint Venant-Clebsch: Theorie de l'Elasticité des corps solides, § 22ff. Paris: Dunod 1883.

Verschiebungskomponenten zu bestimmen, stehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} \left[\frac{P}{F} + \gamma(l-x) \right] \quad (\text{a}); & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \quad (\text{d}); \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{mE} \left[\frac{P}{F} + \gamma(l-x) \right] \quad (\text{b}); & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \quad (\text{e}); \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{mE} \left[\frac{P}{F} + \gamma(l-x) \right] \quad (\text{c}); & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \quad (\text{f}) \end{aligned}$$

zur Verfügung. Aus (a), (b) und (c) folgen die Verschiebungskomponenten mit

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\gamma(l-x)^2}{2E} + \frac{P}{FE}x + F_1(y, z), \\ v &= -\frac{\gamma}{mE}(l-x)y - \frac{P}{mEF}y + F_2(x, z), \\ w &= -\frac{\gamma}{mE}(l-x)z - \frac{P}{mEF}z + F_3(x, y). \end{aligned}$$

Die willkürlichen Funktionen F_1, F_2, F_3 bestimmen sich aus den Bedingungen (d), (e) und (f) und den Festlegungsbedingungen des Stabes. Durch Einsetzen der Verschiebungskomponenten in die Bedingung (e) erhalten wir $\frac{\partial F_2}{\partial z} = -\frac{\partial F_3}{\partial y}$, woraus $F_2 = -az + f_1(x) + c_2$, $F_3 = ay + f_2(x) + c_3$ folgt, mit f_1 und f_2 als zu bestimmenden Funktionen von x und a, c_2, c_3 als Konstanten. In ähnlicher Weise ergibt sich aus der Bedingung (f) $\frac{\gamma}{mE}z + \frac{\partial F_3}{\partial x} = -\frac{\partial F_1}{\partial z}$ oder, bei Benützung des gefundenen Ausdruckes für F_3 , $\frac{\gamma}{mE}z - \frac{df_2(x)}{dx} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$, woraus die Funktion f_2 mit $f_2(x) = -bx + c'_1$ (b, c'_1 sind konstant) erschlossen wird. Schließlich muß zufolge der Bedingung (d) $\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\gamma}{mE}y - \frac{\partial F_2}{\partial x}$ sein oder, was auf das gleiche hinauskommt, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\gamma}{mE}y - \frac{df_1(x)}{dx}$, woraus sich $f_1(x) = cx + c''_1$ mit c und c''_1 als neuen Konstanten ergibt. Durch Vergleich dieser Folgerungen ersehen wir, daß die folgenden Gleichungen bestehen müssen

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{\gamma}{2mE}(y^2 + z^2) + bz - cy + d, \\ F_2 &= cx - az + e, \\ F_3 &= ay - bx + f. \end{aligned}$$

Die sechs Konstanten a, b, c, d, e, f werden aus den Festhaltungsbedingungen (S. 89) bestimmt: für $x = 0, y = 0, z = 0$ müssen $u, v, w, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y}$ verschwinden, woraus

$$0 = -\frac{\gamma l^2}{2E} + d, \quad \text{also} \quad d = \frac{\gamma l^2}{2E} \quad \text{und} \quad e = f = b = a = c = 0$$

folgen. Die Verschiebungskomponenten nehmen somit die Form

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\gamma}{2E} \left[(l-x)^2 + \frac{y^2 + z^2}{m} - l^2 \right] + \frac{P}{FE}x, \\ v &= -\frac{\gamma}{mE}(l-x)y - \frac{P}{mEF}y, \\ w &= -\frac{\gamma}{mE}(l-x)z - \frac{P}{mEF}z \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

an. Da die Spannungsgleichungen und wenigstens angenähert Oberflächenbedingungen bei Benützung des Hookeschen Gesetzes erfüllt werden, müssen, wie man sich leicht überzeugt, die Kompatibilitätsbedingungen 17a, 17b, S. 44 durch die gefundenen Werte der Verzerrungskomponenten von selbst befriedigt werden. Die größte Verlängerung, welche der Stab erfährt, erhalten wir aus der ersten der Gleichungen (52), wenn wir dort für x den Wert l und $y = 0$, $z = 0$ setzen, also in der Stabachse mit $u_{\max} = \frac{\gamma l^2}{2E} + \frac{Pl}{FE}$; sie setzt sich aus der Verschiebung infolge des Eigengewichtes und jener infolge der Wirkung der Kraft P zusammen. Die erstere kommt offenbar einer Verlängerung gleich, welche ein Stab von der Länge l erfahren würde, wenn er durch zwei entgegengesetzt gerichtete auf die Endquerschnittsflächen des Stabes wirkende Kräfte von der Größe des halben Gewichtes des Stabes $\frac{G}{2} = \frac{\gamma Fl}{2}$ auf Zug beansprucht wird.

Bei sehr langen Stäben, wie sie im Bergwerksbetriebe vorkommen, kann der Einfluß von G ein bedeutender sein. Wäre z. B. $l = 1000$ m und $\gamma = 0,00785$ kg/cm³ (Flußeisen), so wäre die größte Spannung am oberen Ende des Stabes, welche nur durch das Eigengewicht hervorgerufen wird, $\gamma l = 0,00785 \cdot 10^5 = 785$ kg/cm², eine Spannung, die hart an der Zulässigkeitsgrenze liegt; die zugehörige Verlängerung der Stabachse am unteren Ende wäre, wenn $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm² gesetzt wird,

$$u_{\max} = \frac{0,00785 \cdot 10^{10}}{4 \cdot 10^6} = 19,6 \text{ cm.}$$

Eine Querschnittsfläche des Stabes $x = a$ geht bei Vernachlässigung von Gliedern, welche im Nenner E^2 enthalten, in

$$x' = a - \frac{\gamma}{2E} \left[(l - a)^2 + \frac{y'^2 + z'^2}{m} - l^2 \right] + \frac{P}{EF} a$$

über, eine Fläche, die ein Rotationsparaboloid mit der x -Achse als Rotationsachse und der Höhlung gegen den Aufhängepunkt zu vorstellt. Ist γ gleich Null, d. h. ist das Eigengewicht überhaupt nicht in Betracht gezogen, so bleiben die Querschnitte des Stabes bei der Deformation desselben eben. Ein Punkt x, y, z der Zylindermantelfläche des Stabes mit der Gleichung $F(y, z) = 0$ hat nach der Deformation die Koordinaten

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{\gamma}{2E} \left[(l - x)^2 + \frac{y^2 + z^2}{m} - l^2 \right] + \frac{P}{EF} x, \\ y' &= y - \frac{\gamma}{mE} (l - x) y - \frac{P}{mEF} y, \\ z' &= z - \frac{\gamma}{mE} (l - x) z - \frac{P}{mEF} z. \end{aligned}$$

Durch Berechnung von y, z aus diesen Gleichungen als Funktionen von x', y', z' und Einsetzen in die Gleichung $F(y, z) = 0$ erhalten wir die Gleichung der Fläche, in welcher die Zylindermantelfläche infolge Gestaltsänderung übergeht. Hätte im besonderen der Stab ursprünglich als Querschnitt einen Kreis vom Radius r , so wäre $F(y, z) = y^2 + z^2 - r^2 = 0$ und die Gleichung der deformierten Zylindermantelfläche wäre $y'^2 + z'^2 = r^2 \left[1 - \frac{2P}{mEF} - \frac{2\gamma}{mE} (l - x') \right]$ bei Vernachlässigung von Gliedern mit E^2 im Nenner. Die Fläche ist gleichfalls ein Rotationsparaboloid mit der x -Achse als Umdrehungsachse und der Höhlung vom Aufhängepunkt weggerichtet. Würde nur die Kraft P wirken, so wäre sie eine Zylinderfläche vom Radius $r \sqrt{1 - \frac{2P}{mEF}} = r \left(1 - \frac{P}{mEF} \right)$.

c) **Beanspruchung eines isotropen homogenen Körpers, der dem Hooke'schen Gesetze folgt, durch allseitigen Flüssigkeitsdruck bei Vernachlässigung des Eigengewichtes.** Als dritter Fall sei der Spannungszustand eines isotropen homogenen Körpers, der dem Hooke'schen Gesetze folgt und unter allseitigem hydrostatischen Druck steht, bei Vernachlässigung des Eigengewichtes des Körpers und der Flüssigkeit betrachtet (z. B. ein Würfel oder ein sonstwie begrenzter Körper, der sich in einem Gefäß in einer unter hohem Druck befindlichen Flüssigkeit befindet). Wir nehmen als Spannungszustand im Körper den räumlichen hydrostatischen Spannungszustand (S. 67 und 84) mit drei gleichen Hauptspannungen von der Größe $p \text{ kg/cm}^2$, wenn p der Druck pro Flächeneinheit in der den Körper umgebenden Flüssigkeit ist; bei Vernachlässigung des Eigengewichtes der Flüssigkeit ist p im ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raum konstant. Wir prüfen nunmehr, ob dieser angenommene Spannungszustand den Spannungsgleichungen und den Oberflächenbedingungen genügt. Die Spannungsgleichungen lauten dann, da nur Spannungen X_x, Y_y, Z_z vorhanden sein sollen,

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y_y}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z_z}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

sie sind erfüllt, wenn p über den ganzen vom Körper erfüllten Raum konstant ist, also im Innern des Körpers ein homogener Spannungszustand herrscht. Die Oberflächenbedingungen

$$p_x = X_x \cos(n x) = p \cos(n x), \quad p_y = Y_y \cos(n y) = p \cos(n y), \\ p_z = Z_z \cos(n z) = p \cos(n z)$$

sind, wie leicht ersichtlich, gleichfalls erfüllt. Die Befriedigung der Spannungsgleichungen (20) und (21) sowie der Oberflächenbedingungen (24) genügt noch nicht, um die gemachte Annahme eines räumlichen hydrostatischen Spannungszustandes zu rechtfertigen. Dazu ist auch die Erfüllung der Kompatibilitätsbedingungen (17a, 17b) erforderlich. Letztere sind aber, wie man leicht sieht, bei der gemachten Annahme ebenfalls befriedigt, wenn bedacht wird, daß die Beziehungen $e_{xy} = e_{yz} = e_{zx} = 0, e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = \frac{p(m-2)}{mE}$ bestehen sollen. Unter den angegebenen Voraussetzungen herrscht somit im Körper tatsächlich der räumliche hydrostatische Spannungszustand.

In ganz ähnlicher Weise könnte auch vorgegangen werden, um nachzuweisen, daß im Falle einer Beanspruchung eines Prismas nach Abb. 21, S. 72 der ebene hydrostatische Spannungszustand eintreten muß.

24. Über die Formänderungsarbeit und die Verzerrungsenergiefunktion im Falle des elastischen Gleichgewichtes. Satz von Clapeyron.

a) **Formänderungsarbeit und Arbeitssatz bei linearer Beanspruchung.** Wird ein aus homogenem isotropem, dem Hooke'schen Gesetz folgenden Stoff hergestellter zylindrischer Stab, der die Querschnittsfläche F , überall gleiche Temperatur und keine Anfangsspannungen besitzt, durch zwei von Null aus stetig anwachsende entgegengesetzt gleiche zur Stabachse parallele Kräfte $P, -P$ derart beansprucht, daß sich diese Kräfte gleichförmig über die Endquerschnittsflächen verteilen, so ist jeder zwischen Null und dem Endwerte P liegenden Kraft \bar{P} eine Verlängerung $\bar{\lambda}$ der ursprünglichen Länge l des Stabes zugeordnet (Abb. 29). Das Anwachsen der Kräfte \bar{P} von dem Werte Null bis zu ihrem Endwert P und der Verlängerung $\bar{\lambda}$ vom Werte Null bis zu ihrem Endwert λ finde sehr langsam

statt, so daß Trägheitskräfte nicht in Betracht kommen. Denken wir uns das linke Ende des Stabes ohne Hinderung der Querkontraktion festgehalten und wächst die Kraft \bar{P} auf $\bar{P} + d\bar{P}$, so wächst die Länge des verformten Stabes von $l + \bar{\lambda}$ auf $l + \bar{\lambda} + d\bar{\lambda}$; die von \bar{P} auf dem Wege $d\bar{\lambda}$ geleistete Arbeit ist durch $\bar{P}d\bar{\lambda}$ gegeben. Dabei sind \bar{P} und $d\bar{\lambda}$ gleich gezeichnet (positiv bei Zugbeanspruchung, negativ bei Druckbeanspruchung). Die gesamte Arbeit, welche durch die von Null aus bis zum Werte P anwachsenden äußeren Kräfte

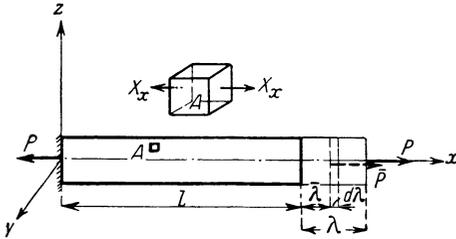


Abb. 29.

geleistet wird, ist durch $\int_0^l \bar{P}d\bar{\lambda} = A_P$ dargestellt.

Dieser Arbeit der äußeren Kräfte läuft eine Arbeit der inneren Kräfte (Spannungen) parallel, die gegen die vorhandenen Kohäsionskräfte geleistet werden muß. Für ein unendlich kleines Prisma mit den Volumen $dx dy dz$, das parallel zur Stabachse, die auch x -Achse des Koordinatensystemes x, y, z ist, herausgeschnitten gedacht wird, ist die der Arbeit $\bar{P}d\bar{\lambda}$ zugeordnete unendlich kleine Arbeit der infolge der Spannungen auftretenden inneren Kräfte (auch elementare Deformationsarbeit während des Wachsens der äußeren Kraft vom Werte \bar{P} zum Werte $\bar{P} + d\bar{P}$ genannt) durch $\bar{X}_x d\bar{e}_{xx} dx dy dz$ bestimmt, wenn \bar{X}_x die der Kraft \bar{P} zugeordnete Zug- (Druck-) Spannung \bar{e}_{xx} die der Spannung \bar{X}_x entsprechende Dehnung (Quetschung) bezogen auf die ursprüngliche Länge l des Stabes bedeuten; denn $\bar{X}_x dx dy dz$ ist dann die auf das Flächenelement $dy dz$ entfallende innere Kraft und $d\bar{e}_{xx} dx$ die Verlängerung bzw. Verkürzung, welche die Kantenlänge dx bei einer Dehnung pro Längeneinheit gleich $d\bar{e}_{xx}$ erfährt.

Wächst die äußere Kraft von Null bis zu einem Endwerte an, so wächst die auf das Flächenelement $dy dz$ entfallende Kraft $\bar{X}_x dx dy dz$ von Null bis zum Endwerte $X_x dx dy dz$, dem die Dehnung (Quetschung) e_{xx} entspricht; die durch diese innere Kraft auf dem ganzen Wege geleistete Arbeit ist dann offenbar durch

$$a_i = \int_0^{e_{xx}} \bar{X}_x d\bar{e}_{xx} dx dy dz \tag{a}$$

dargestellt. Bei Benützung des Hookeschen Gesetzes $\bar{X}_x = E\bar{e}_{xx}$ und dessen Folgerung $d\bar{X}_x = E d\bar{e}_{xx}$ kann die Integration in dem vorstehenden Ausdruck durchgeführt werden und wir erhalten

$$a_i = dx dy dz E \frac{e_{xx}^2}{2} = dx dy dz \frac{X_x^2}{2E} = dx dy dz \frac{X_x e_{xx}}{2} = \int_0^{e_{xx}} \bar{X}_x d\bar{e}_{xx} dx dy dz. \tag{53}$$

a_i heißt die Deformations- oder Formänderungsarbeit für das Volumenelement $dx dy dz$ in einem Punkte P des Stabes bei linearer Beanspruchung desselben. Die Größe

$$(a_i) = E \frac{e_{xx}^2}{2} = \frac{X_x^2}{2E} = \frac{X_x e_{xx}}{2} = \int_0^{e_{xx}} \bar{X}_x d\bar{e}_{xx} \tag{53a}$$

heißt spezifische Formänderungsarbeit oder Formänderungsarbeit pro Volum-

einheit im Punkte P des Stabes bei linearer Beanspruchung. Bei homogener linearer Beanspruchung ist, weil X_x über die ganze Stablänge konstant ist, auch (a_i) im ganzen Bereiche des Stabes konstant.

Die auf das ganze Stabvolumen bezogene Arbeit der inneren Kräfte während der Verlängerung des Stabes von l auf $l + \lambda$ ist durch

$$A_i = \int_V \int_0^{e_{xx}} \bar{X}_x d\bar{e}_{xx} dx dy dz = FlE \frac{e_{xx}^2}{2} = Fl \frac{X_x^2}{2E} = Fl \frac{X_x e_{xx}}{2} \quad (54)$$

gegeben, worin das erste Integral über den ganzen Raum V des Stabes auszu-
dehnen ist. A_i wird die gesamte Formänderungsarbeit des Stabes, $(A_i) = \frac{A_i}{Fl} = (a_i)$
die Formänderungsarbeit pro Volumeinheit des Stabes bei linearer homogener
Beanspruchung genannt. Letztere ist natürlich gleich der Formänderungsarbeit
pro Volumeinheit in einem beliebigen Punkte P des Stabes.

Nachdem $\bar{P} d\bar{\lambda} = \bar{X}_x F d\bar{\lambda}$ und bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes
 $d\bar{\lambda} = \frac{dX_x}{E} l$ ist, so wird $\bar{P} d\bar{\lambda} = \frac{Fl \bar{X}_x d\bar{X}_x}{E}$, also

$$A_P = \int_0^\lambda \bar{P} d\bar{\lambda} = \frac{X_x^2}{2E} l F = \frac{P^2 l}{2EF}.$$

Sonach ist

$$A_P = A_i, \quad (55)$$

d. h. die Arbeit der äußeren Kräfte ist gleich der Formänderungsarbeit des Stabes¹.

Es ist selbstverständlich vorausgesetzt worden, daß während des Vorganges der Gestalts-
änderung nicht etwa zum Teil eine Umwandlung der äußeren Arbeit in eine andere Energie-
form auftritt, also für die eigentliche Deformationsarbeit verloren geht. Es könnte z. B.
sein, daß ein Teil der Arbeit in Wärmeenergie umgesetzt wird, die sich durch eine Erwärmung
des Stabes bemerkbar machen müßte. Etwas Derartiges würde eintreten, wenn ein Teil der
äußeren Arbeit etwa zur Überwindung einer inneren Reibung verwendet würde. Es soll auch
ausgeschlossen sein, daß während der Wirkung der Kräfte \bar{P} dem Stabe von außen her eine
andere als mechanische Energie zugeführt oder Energie nach außen hin abgegeben wird.

Die im Stabe aufgespeicherte Formänderungsarbeit A_i besitzt den Charakter
einer Energie der Lage, d. h. einer potentiellen Energie. Durch dieselbe wird die
potentielle Energie des elastischen Körpers, welche er in seinem natürlichen Zu-
stande besitzt, vermehrt, ähnlich wie durch Heben, d. i. einer Lagenänderung
eines schweren Körpers gegen die äußere Kraft der Schwere, die potentielle
Energie des Körpers wächst.

Wird der verformte elastische Körper allmählich bis auf $\bar{P} = 0$ entlastet,
so ist die Arbeit der äußeren Kräfte negativ, d. h. es wird Arbeit konsumiert;
dabei gehen die Spannungen und Dehnungen wieder bis auf Null zurück, wenn
die Formänderung eine sogenannte vollkommen elastische war. Ginge die Form-
änderung nicht vollkommen elastisch vor sich, d. h. ginge die Dehnung nicht
vollkommen nach Abbringen der Belastung zurück, so wäre das ein Zeichen da-
für, daß ein Teil der Arbeit der äußeren Kräfte bei der Belastung eine Umform-
ung, z. B. in Wärme, erlitten hätte.

Die bei der Belastung aufgespeicherte Formänderungsarbeit könnte bei der Entlastung
dazu verwendet werden, um anderweitige Arbeit zu leisten, was z. B. — freilich in einem

¹ Wir werden später sehen, daß der durch (55) zum Ausdruck gebrachte Satz für
jedes Elastizitätsgesetz gültig ist.

allgemeineren Fall der inneren Beanspruchung — bei allen durch Federkraft angetriebenen Einrichtungen praktische Verwendung findet.

Im Punkte 32 (S. 149ff.) werden wir sehen, daß, solange die äußere Kraft P im Hinblick auf das Material nicht zu groß wird, die Formänderung tatsächlich als nahezu vollkommen umkehrbar angesehen werden kann.

Die bei Verlängerung des Stabes um $d\bar{\lambda}$ in denselben, d. h. in sein Volumen V , hineingesteckte Deformationsarbeit $dA_i = \int_V \bar{X}_x d\bar{e}_{xx} dx dy dz$ ist entsprechend dem Charakter von A_i als potentielle Energie ein vollständiges Differential, sowohl wenn dieselbe als Funktion der Spannung als auch als Funktion der Verzerrung dargestellt wird; denn es ist bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes $\bar{X}_x d\bar{e}_{xx} = d\left(\frac{\bar{X}_x^2}{2E}\right) = d\left(\frac{\bar{e}_{xx}^2 E}{2}\right)$, also $dA_i = d \int_V \frac{\bar{e}_{xx}^2 E}{2} dx dy dz = d \int_V \frac{\bar{X}_x^2}{2E} dx dy dz$.

Daraus ergibt sich die Folgerung, daß der Weg, auf welchem die äußere Kraft den Enddeformationszustand erreicht, für die Größe der schließlichen Deformationsarbeit gleichgültig ist. Es könnte somit z. B. die Kraft \bar{P} von Null aus bis P_1 , wobei $P_1 > P$ ist, anwachsen, hierauf auf P_2 mit $P_2 < P$ sinken und schließlich den Endwert P erreichen, oder die Kraft \bar{P} von Null aus monoton bis zu ihrem Endwerte P anwachsen, in beiden Fällen ist die Deformationsarbeit die gleiche. Das ist ähnlich so wie bei Bewegung eines Massenpunktes im Schwerfeld, für welche der Weg, auf welchem man aus einer Anfangslage in eine gegebene Endlage gelangt, für die Größe der auf dem Wege geleisteten Arbeit gleichgültig ist.

b) Formänderungsarbeit und der Satz von Clapeyron bei beliebiger Beanspruchung. Wir denken uns nunmehr einen beliebig gestalteten homogenen und isotropen, dem Hookeschen Gesetze folgenden Körper, der in seinem natürlichen Zustande sein und überall gleiche Temperatur besitzen soll. Es werde ein System äußerer Kräfte von Null aus sehr langsam anwachsend derart aufgebracht, daß es in jedem Augenblick des Anwachsens im Gleichgewicht stehen soll und Trägheitskräfte vernachlässigt werden können. In einem beliebig herausgegriffenen unendlich kleinen Prisma im Punkte P des Körpers entsteht dann ein von Null aus anwachsender im allgemeinen dreidimensionaler Spannungszustand.

Wenn das äußere Kraftsystem von einem zwischen Null- und dem Endwerte liegenden Zwischenwert um unendlich wenig wächst, so ändern sich die Spannungskomponenten $\bar{X}_x, \bar{Y}_y, \bar{Z}_z, \bar{X}_y, \dots, \bar{Z}_x$ und die Verzerrungskomponenten $\bar{e}_{xx}, \bar{e}_{yy}, \bar{e}_{zz}, \bar{e}_{xy}, \dots, \bar{e}_{zx}$ um unendlich wenig und die hierbei von den auf das unendlich kleine Prisma wirkenden Kräften geleistete unendlich kleine Deformationsarbeit (elementare Deformationsarbeit) ist als eine Summe von Deformations-

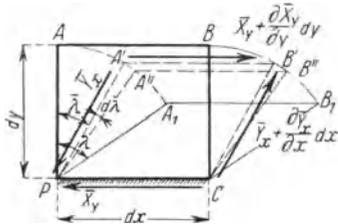


Abb. 30.

arbeiten auffaßbar, die einerseits von den Normalkräften, andererseits von den Schubkräften geleistet werden. Die Arbeit der Normalkräfte bezogen auf die Raumeinheit des ∞ kleinen Prismas ist nach dem bereits oben Ausgeführten durch

$$\bar{X}_x d\bar{e}_{xx} + \bar{Y}_y d\bar{e}_{yy} + \bar{Z}_z d\bar{e}_{zz}$$

darstellbar. Die Arbeit einer Schubkraft ergibt sich unter Zuhilfenahme der Abb. 30. Das in Draufsicht normal zur xy -Ebene gezeichnete un-

endlich kleine Prisma $PABC$ ist vor der Verformung rechtwinklig. Es sollen nun die Schubspannungen \bar{X}_y, \bar{Y}_x von Null aus anwachsend bis zu Endwerten X_x, Y_x

wirkend werden. (Fall der reinen Schubbeanspruchung). Dem gerade vorhandenen Wert $\bar{X}_y \bar{Y}_x$ ist das schiefwinkelige Prisma $PA'B'C$ entsprechend dem Verdrehungswinkel $\bar{\lambda}$ zugeordnet. Zur Berechnung der Deformationsarbeit bei Übergang der Spannungen \bar{X}_y, \bar{Y}_x zu benachbarten Werten kann man sich die Fläche PC festgehalten denken; der Verdrehungswinkel ändert sich bei diesem Übergang um $d\bar{\lambda}$, und es wird hierbei nur von der in $A'B'$ wirkenden Kraft $\bar{X}_y dx dz$ eine Arbeit geleistet, da die Kraft $\bar{Y}_x dy dz$ auf dem für sie in Betracht kommenden Wege $A'A'' = B'B''$ normal steht und infolgedessen keine Arbeit leisten kann. Der Weg für die in $A'B'$ wirkende Kraft ist bis auf Größen höherer Ordnung durch $dy d\bar{\lambda}$, also die Arbeit dieser Kraft durch $\bar{X}_y dx dz dy d\bar{\lambda}$ gegeben. Bei Verwendung des Hookeschen Gesetzes $\bar{X}_y = G\bar{e}_{xy}$ kann diese Arbeit, da $d\bar{e}_{xy} = d\bar{\lambda}$, $d\bar{X}_y = Gd\bar{e}_{xy}$ entweder in der Form $\frac{\bar{X}_y d\bar{X}_y}{G} dx dy dz$ oder in der Form $G\bar{e}_{xy} d\bar{e}_{xy} dx dy dz$ geschrieben werden. Wenn die zu den Endwerten der Schubspannungen X_y, Y_x gehörige Winkeländerung bzw. Verzerrungskomponente mit λ bzw. e_{xy} bezeichnet wird, so ist die gesamte Deformationsarbeit, die in das Volumenelement bei Anwachsen der Schub- und Verzerrungskomponente von Null bis zu den genannten Endwerten hineingesteckt wird, durch

$$\begin{aligned} a_i &= \int_0^{X_y} \frac{\bar{X}_y d\bar{X}_y}{G} dx dy dz = \int_0^{e_{xy}} G\bar{e}_{xy} d\bar{e}_{xy} dx dy dz = \int_0^{e_{xy}} \bar{X}_y d\bar{e}_{xy} dx dy dz \\ &= \frac{X_y^2}{2G} dx dy dz = G \frac{e_{xy}^2}{2} dx dy dz \end{aligned} \quad (56)$$

darstellbar. Diese Werte sind völlig analog zu den für die Deformationsarbeit a_i bei Beanspruchung auf Zug oder Druck gefundenen. Man kann für diese Deformationsarbeit bei reinem Schub demnach das oben für die Deformationsarbeit bei linearer Beanspruchung Gesagte wiederholen. Auch hier führt man die Deformationsarbeit pro Volumeneinheit mit

$$(a_i) = \int_0^{e_{xy}} \bar{X}_y d\bar{e}_{xy} = \frac{X_y^2}{2G} = \frac{G e_{xy}^2}{2} = \frac{X_y e_{xy}}{2} \quad (56a)$$

ein, bemerkt im Falle der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes, daß $\bar{X}_y d\bar{e}_{xy}$ ein vollständiges Differential ist usw. Die elementare Deformationsarbeit der Schubkräfte für ein unendlich kleines Prisma im Punkte P des Körpers bei Anwachsen derselben von den Werten $\bar{X}_y, \bar{Y}_z, \bar{Z}_x$ um unendlich wenig für den oben vorausgesetzten allgemeinen Spannungszustand ist sonach ohne Rücksichtnahme auf das gerade geltende Elastizitätsgesetz

$$(\bar{X}_y d\bar{e}_{xy} + \bar{Y}_z d\bar{e}_{yz} + \bar{Z}_x d\bar{e}_{zx}) dx dy dz$$

und die elementare Deformationsarbeit im Punkte P des elastischen Körpers bei wachsendem äußerem Kraftsystem um unendlich wenig wird gleichfalls für ein beliebiges Elastizitätsgesetz

$$(\bar{X}_x d\bar{e}_{xx} + \bar{Y}_y d\bar{e}_{yy} + \bar{Z}_z d\bar{e}_{zz} + \bar{X}_y d\bar{e}_{xy} + \bar{Y}_z d\bar{e}_{yz} + \bar{Z}_x d\bar{e}_{zx}) dx dy dz. \quad (b)$$

Für die Berechnung der gesamten Deformationsarbeit im Punkte P bei Wachsen der Spannungen von Null bis zu ihren Endwerten, ersetzen wir zunächst in dem letzten Ausdrucke die Differentiale der Verzerrungskomponenten aus dem Hooke-

schen Gesetze durch die Werte

$$\begin{aligned} d\bar{e}_{xx} &= \frac{1}{E} \left[d\bar{X}_x - \frac{d(\bar{Y}_y + \bar{Z}_z)}{m} \right], & d\bar{e}_{xy} &= \frac{1}{G} d\bar{X}_y, \\ d\bar{e}_{yy} &= \frac{1}{E} \left[d\bar{Y}_y - \frac{d(\bar{X}_x + \bar{Z}_z)}{m} \right], & d\bar{e}_{yz} &= \frac{1}{G} d\bar{Y}_z, \\ d\bar{e}_{zz} &= \frac{1}{E} \left[d\bar{Z}_z - \frac{d(\bar{X}_x + \bar{Y}_y)}{m} \right], & d\bar{e}_{zx} &= \frac{1}{G} d\bar{Z}_x, \end{aligned}$$

wodurch wir die elementare Deformationsarbeit in einem Punkte des Körpers bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes in der Form

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{E} \left[\bar{X}_x d\bar{X}_x + \bar{Y}_y d\bar{Y}_y + \bar{Z}_z d\bar{Z}_z - \frac{1}{m} d(\bar{X}_x \bar{Y}_y + \bar{Y}_y \bar{Z}_z + \bar{Z}_z \bar{X}_x) \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{G} \left[\bar{X}_y d\bar{X}_y + \bar{Y}_z d\bar{Y}_z + \bar{Z}_x d\bar{Z}_x \right] \right\} dx dy dz \quad (a') \end{aligned}$$

schreiben können. Die gesamte Deformationsarbeit für ein Volumenelement des Körpers erhalten wir durch Integration des zuletzt angeschriebenen Ausdruckes zwischen Null und den oberen Grenzwerten $X_x, Y_y, Z_z, \dots, Z_x$ der Spannungskomponenten, wenn wir berücksichtigen, daß $E = \frac{2(m+1)}{m} G$ gesetzt werden kann mit dem Ausdruck

$$\begin{aligned} \bar{a}_i &= (\bar{a}_i) dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2G} \left[\frac{X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2}{2} \right] \frac{m}{m+1} - \frac{X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x}{m+1} + X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2 \Big] dx dy dz. \quad (57) \end{aligned}$$

Hierfür können wir bei entsprechender Umformung auch

$$\begin{aligned} \bar{a}_i &= (\bar{a}_i) dx dy dz \\ &= \frac{1}{2G} \left[\frac{X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2}{2} - \frac{(X_x + Y_y + Z_z)^2}{2(m+1)} + X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2 \right] dx dy dz \quad (57a) \end{aligned}$$

ansetzen. Mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes kann die Form (57a) auch durch

$$\begin{aligned} \bar{a}_i &= \alpha_i = (\alpha_i) dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} (X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + Z_z e_{zz} + X_y e_{xy} + Y_z e_{yz} + Z_x e_{zx}) dx dy dz \quad (58) \end{aligned}$$

ersetzt werden. Drücken wir schließlich in dem Ausdrucke (58) die Spannungskomponenten durch die Verzerrungskomponenten aus, bei Benützung der Gleichungen (47) auf S. 86 und des auf die Schubspannungen bezüglichen Hookeschen Gesetzes, so wird bei Beachtung von $e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ eine dritte Form der Deformationsarbeit

$$\bar{a}_i = a_i = (a_i) dx dy dz = G \left[e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + \frac{e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2}{2} + \frac{e^2}{m-2} \right] dx dy dz \quad (59)$$

erhalten, welche die gesamte Deformationsarbeit eines Elementarkörpers als Funktion der Verzerrungskomponenten darstellt.

Die Zeichen \bar{a}_i, a_i, α_i sollen darauf hindeuten, daß die Deformationsarbeit als Funktion verschiedener Argumente aufgefaßt werden kann.

Die Form (59) ergibt sich auch direkt durch Integration der elementaren Deformationsarbeit nach Ausdruck (b), wenn wir in ihr vorher die Spannungskomponenten unter Zuhilfenahme des Hookeschen Gesetzes durch die Verzer-

rungskomponenten ersetzen. Fassen wir die Formeln (57) und (59) der Deformationsarbeit in einem Punkte als Funktion der Spannungskomponenten bzw. der Verzerrungskomponenten auf, und bilden das vollständige Differentiale nach den genannten Variablen, so erhalten wir, wenn das Hookesche Gesetz beachtet wird, die elementare Deformationsarbeit gemäß Ausdruck (b) in einem Punkte des elastischen Körpers. Dividieren wir die erhaltenen Ausdrücke (57) bis (59) für \bar{a}_i, α_i, a_i durch das Raumelement $dx dy dz$ so erhalten wir die Deformationsarbeit $(\bar{a}_i), (\alpha_i), (a_i)$ in einem Punkte eines elastischen homogenen und isotropen Körpers, der dem Hookeschen Gesetze folgt, bezogen auf die Volumeneinheit, die auch als spezifische Deformationsarbeit in einem Punkte bezeichnet wird. Da $X_x, Y_y, Z_z, \dots, Z_y$ bzw. $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, \dots, e_{yz}$ als Funktion der Koordinaten x, y, z aufgefaßt werden können, so ist die spezifische Deformationsarbeit in einem Punkte im allgemeinen mit der Lage des Punktes veränderlich, d. h. eine Funktion von x, y, z . In besonderen Fällen kann diese Deformationsarbeit allerdings konstant sein, wofür bereits oben ein Beispiel vorlag.

Fassen wir das Vorstehende zusammen, so können wir sagen: Die Deformationsarbeit in einem Punkte eines isotropen homogenen elastischen Körpers von überall gleicher Temperatur, der ursprünglich spannungslos ist und dem Hookeschen Gesetze folgt, kann als Funktion der Verzerrungskomponenten oder als Funktion der Spannungskomponenten berechnet werden, und ist als solche eine homogene quadratische Funktion der genannten Größen; die elementare Deformationsarbeit ist das vollständige Differential der Funktion nach den eingeführten Variablen. Berücksichtigt man, daß wegen der Eindeutigkeit der elastischen stabilen Gleichgewichtsprobleme jedem Endwerte des äußeren Lastsystems in jedem einzelnen Punkte des elastischen Körpers eindeutig ein Spannungs- bzw. Verzerrungszustand zugeordnet ist, so muß dem Begriff des vollständigen Differentials entsprechend die Deformationsarbeit in einem Punkte nur abhängig sein von den Anfangs- und Endwerten der Spannungs- bzw. Verzerrungskomponenten oder, anders ausgedrückt, die in einem Körperelement aufgespeicherte Deformationsarbeit ist unabhängig von dem Weg, auf welchem das äußere Lastsystem auf ihren von vornherein bestimmten Endwert gebracht wird oder unabhängig davon, wie die Kräfte anwachsen, ob sie gleichzeitig oder nacheinander aufgebracht werden usf.

Die Auffaßbarkeit der elementaren spezifischen Deformationsarbeit für ein Raumelement als vollständiges Differential einer Funktion der Verzerrungs- oder Spannungskomponenten ist der Grund, warum letztere auch als Potential der elastischen Kräfte in einem Punkte bezeichnet wird. In der Tat ist auch eine vollständige Analogie mit dem Potential sogenannter konservativer Kräfte wie z. B. der Schwerkraft vorhanden, unter deren Einfluß sich ein materieller Punkt bewegt: das vollständige Differential des Kraftpotentials, das bekanntlich Funktion der Lagekoordinaten des materiellen Punktes ist, ist gleich der von den Kräften geleisteten elementaren Arbeit und die Arbeit der Kräfte auf einem endlichen Wege ist nur von der Anfangs- und Endlage des materiellen Punktes abhängig. Sowie das Kraftpotential nach den Lagekoordinaten differenziert die zugeordneten Kraftkomponenten ergibt, so erhält man durch Differentiation des Potentials der elastischen Kräfte in einem Punkte in den Formen (57) bzw. (59) nach den Spannungs- bzw. Verzerrungskomponenten bei Berücksichtigung des Hookeschen Gesetzes die zugeordneten Verzerrungs- bzw. Spannungskomponenten, d. h.

$$\frac{\partial(\bar{a}_i)}{\partial X_x} = e_{xx}, \quad \frac{\partial(\bar{a}_i)}{\partial X_y} = e_{xy}, \quad \text{usw.} \quad (60)$$

bzw.

$$\frac{\partial(a_i)}{\partial e_{xx}} = X_x, \quad \frac{\partial(a_i)}{\partial e_{xy}} = X_y, \quad \text{usw.} \quad (60a)$$

Aus der Form (58) der Deformationsarbeit und mit Rücksicht auf die Eindeutigkeit der Zuordnung der äußeren Kräfte zu den Spannungen schließen wir

ferner, daß bei allmählichem Anwachsen der äußeren Kräfte, die in jedem Punkte aufgespeicherte Deformationsarbeit halb so groß ist als sie wäre, wenn die Kräfte bis zum Eintritte des Gleichgewichtes in unveränderter Stärke wirken würden, oder, was auf das gleiche hinauskommt, wenn sie stoßartig aufgebracht würden.

Die Ausdrücke (57) bis (59) für die Deformationsarbeit in einem Punkte sind ihrem Werte nach unabhängig von dem angenommenen Koordinatensystem, d. h. invariant, wie man sich durch Koordinatentransformation (S. 35ff. und 57ff.) leicht überzeugen kann; für alle möglichen in einem Punkte eines elastischen Körpers annehmbaren unendlich kleinen Prismen ist sonach die Deformationsarbeit dieselbe. Schneiden wir das Prisma in den Richtungen der Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ heraus, so nimmt die Deformationsarbeit für dieses Prisma die einfacheren Formen

$$\bar{a}_i = (\bar{a}_i) d\alpha d\beta d\gamma = \frac{1}{E} \left[\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2} - \frac{1}{m} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right] d\alpha d\beta d\gamma, \quad (57b)$$

$$\bar{a}_i = \alpha_i = (\alpha_i) d\alpha d\beta d\gamma = \frac{1}{2} [\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3] d\alpha d\beta d\gamma, \quad (58a)$$

$$\bar{a}_i = a_i = (a_i) d\alpha d\beta d\gamma = G \left[e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \frac{e^2}{m-2} \right] d\alpha d\beta d\gamma \quad (59a)$$

an. Diese Ausdrücke können außer durch Koordinatentransformation auch durch Nullsetzen der Schubspannungen und Schiebungen und Ersatz der Normalspannungen und Dehnungen durch die Hauptspannungen und Hauptdehnungen aus den Ausdrücken (57) bis (59) gewonnen werden. Die elementare Deformationsarbeit ist offenbar $(\bar{\sigma}_1 d\bar{e}_1 + \bar{\sigma}_2 d\bar{e}_2 + \bar{\sigma}_3 d\bar{e}_3) d\alpha d\beta d\gamma$ und ist bei Beachtung des Hookeschen Gesetzes ein vollständiges Differential der Deformationsarbeit in den Formen (57b) oder (59a) als Funktion der Hauptspannungen bzw. der Hauptdehnungen.

Wenn wir die Deformationsarbeiten für die einzelnen Körperelemente über das ganze Körpervolumen integrieren, so erhalten wir die gesamte im Körper aufgespeicherte Deformationsarbeit:

$$B_i = \int_V (b_i) dx dy dz, \quad (61)$$

worin (b_i) entweder (a_i) oder (α_i) oder (\bar{a}_i) vorstellen kann.

Die elementare gesamte Deformationsarbeit des Körpers bei mit Bezug auf die totale Verformung unendlich kleiner Verformung ist durch

$$dB_i = \int_V d(b_i) dx dy dz = d \int_V (b_i) dx dy dz \quad (61a)$$

gegeben, also bei Voraussetzung des Hookeschen Gesetzes gleichfalls ein vollständiges Differential. Für B_i gelten alle oben für b_i gemachten Aussagen in entsprechender Übertragung: sie ist unabhängig von der Art des Anwachsens der äußeren Kräfte, der Reihenfolge, in der sie aufgebracht werden, und halb so groß als im Falle, wo die Kräfte bis zum Eintreten des Gleichgewichtszustandes in unveränderter Stärke wirken würden. Mit Bezug auf die Art des Aufbringens der Kräfte ist es somit (Abb. 15, S. 45) gleichgültig, ob zuerst P_1 , von Null bis zum Endwerte anwachsend, aufgebracht wird und dann P_2 oder ob P_1 und P_2 gleichzeitig von Null bis zu ihrem Endwerte anwachsend wirken usw.

Wir wollen nunmehr den Zusammenhang zwischen der Deformationsarbeit B_i und der Arbeit der äußeren Kräfte feststellen. Zu diesem Behufe gehen wir von den Gleichgewichtsbedingungen (20) und (21) auf den Seiten 48 und 49 für ein Körperelement aus. Wir multiplizieren die erste der Gleichungen (20) mit $u dx dy dz$, die zweite mit $v dx dy dz$, die dritte mit $w dx dy dz$, addieren die

Produkte und integrieren über das ganze Körpervolumen unter Berücksichtigung der Oberflächenbedingungen (24) auf Seite 53. Wir erhalten der Reihe nach die zu addierenden folgenden Integrale:

$$\begin{aligned}
 J_{xx} &= \int_V \frac{\partial X_x}{\partial x} u \, dx \, dy \, dz, & J_{yx} &= \int_V \frac{\partial Y_x}{\partial x} v \, dx \, dy \, dz, & J_{zx} &= \int_V \frac{\partial Z_x}{\partial x} w \, dx \, dy \, dz, \\
 J_{xy} &= \int_V \frac{\partial X_y}{\partial y} u \, dx \, dy \, dz, & J_{yy} &= \int_V \frac{\partial Y_y}{\partial y} v \, dx \, dy \, dz, & J_{zy} &= \int_V \frac{\partial Z_y}{\partial y} w \, dx \, dy \, dz, \\
 J_{xz} &= \int_V \frac{\partial X_z}{\partial z} u \, dx \, dy \, dz, & J_{yz} &= \int_V \frac{\partial Y_z}{\partial z} v \, dx \, dy \, dz, & J_{zz} &= \int_V \frac{\partial Z_z}{\partial z} w \, dx \, dy \, dz, \\
 J &= \int_V (k_x u + k_y v + k_z w) \, dx \, dy \, dz.
 \end{aligned}$$

Die ersten neun Integrale können durch partielle Integration umgeformt werden. Es ist z. B. bei partieller Integration nach x

$$J_{xx} = \int_0 u X_x \cos(n x) \, d\sigma - \int_V X_x \frac{\partial u}{\partial x} \, dx \, dy \, dz,$$

wobei $d\sigma$ ein Element der Oberfläche des Körpers, n die nach außen gerichtete Normale des Oberflächenelementes, und das erste Integral über die gesamte Oberfläche des Körpers, das zweite Integral über den vom Körper erfüllten Raum zu nehmen ist. Ferner ergibt sich bei partieller Integration nach y

$$J_{xy} = \int_0 u X_y \cos(n y) \, d\sigma - \int_V X_y \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \, dy \, dz,$$

bei partieller Integration nach z

$$J_{xz} = \int_0 u X_z \cos(n z) \, d\sigma - \int_V X_z \frac{\partial u}{\partial z} \, dx \, dy \, dz.$$

ähnlich erhalten wir

$$J_{yx} = \int_0 v Y_x \cos(n x) \, d\sigma - \int_V Y_x \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \, dy \, dz,$$

$$J_{zx} = \int_0 w Z_x \cos(n x) \, d\sigma - \int_V Z_x \frac{\partial w}{\partial x} \, dx \, dy \, dz,$$

$$J_{yy} = \int_0 v Y_y \cos(n y) \, d\sigma - \int_V Y_y \frac{\partial v}{\partial y} \, dx \, dy \, dz,$$

$$J_{zy} = \int_0 w Z_y \cos(n y) \, d\sigma - \int_V Z_y \frac{\partial w}{\partial y} \, dx \, dy \, dz,$$

$$J_{yz} = \int_0 v Y_z \cos(n z) \, d\sigma - \int_V Y_z \frac{\partial v}{\partial z} \, dx \, dy \, dz,$$

$$J_{zz} = \int_0 w Z_z \cos(n z) \, d\sigma - \int_V Z_z \frac{\partial w}{\partial z} \, dx \, dy \, dz.$$

Durch Addition aller Integrale und leicht ersichtlicher Zusammenfassung erhält man bei Benützung der Grenzbedingungen (24) und der Gleichgewichtsbedingungen (22), wenn

$$\left. \begin{aligned} \int_0 (p_x u + p_y v + p_z w) d\sigma &= 2A_1, \\ \int_V (k_x u + k_y v + k_z w) dx dy dz &= 2A_2, \\ \int_V \left[X_x \frac{\partial u}{\partial x} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + Z_z \frac{\partial w}{\partial z} + X_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + Y_z \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + Z_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz = 2B_i \end{aligned} \right\} (62a)$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$A_1 + A_2 = B_i. \quad (62)$$

A_1 bzw. A_2 sind offenbar die Arbeiten, welche die Oberflächen- bzw. Massenkkräfte bei Anwachsen von Null bis zu ihren Endwerten leisten. Sie sind halb so groß, als sie sein würden, wenn die äußeren Kräfte während des ganzen Verformungsvorganges in voller Endstärke wirken würden. In B_i erkennen wir mit Rücksicht auf die Ausdrücke (6) und (7) für die Verzerrungskomponenten auf Seite 29 und 30 und die Gleichung (58) auf Seite 104 die Deformationsarbeit für homogene und isotrope Körper, die dem Hookeschen Gesetze folgen. [Siehe hierzu auch die Gleichung (55)].

In besonderen Fällen werden wir die Zeichen \bar{B}_i oder B_i setzen, je nachdem wir die Deformationsarbeit für einen Elementarkörper als Funktion der Spannungs- oder der Verzerrungskomponenten auffassen.

Die Gleichung (62) drückt den Satz über die Arbeit und im Verein mit den oben genannten Erkenntnissen und den gemachten Voraussetzungen den Satz von Clapeyron (L.) aus: Wird ein elastischer homogener und isotroper Körper von überall gleicher Temperatur, der dem Hookeschen Gesetze folgt, und sich vor Aufbringung einer Belastung in seinem natürlichen Zustande befindet, von einem von Null aus bis zu einem gegebenen Endwerte anwachsenden Kraftsystem angegriffen, so ist die Arbeit der äußeren Kräfte halb so groß als sie sein würde, wenn die äußeren Kräfte während der elastischen Deformation in ihrer vollen Endstärke wirken würden und gleich der im gesamten Körper aufgespeicherten von dem Wege, auf welchem die äußeren Kräfte ihre Endwerte erlangen, unabhängigen Formänderungsarbeit. Voraussetzung für die Gültigkeit dieses Satzes ist, daß andere Energieformen wie z. B. Wärmeenergie während der Arbeitsleistung der äußeren Kräfte nicht auftreten, und der Körper weder von außen Energie in irgend einer anderen Form als jener, welche durch die Arbeit der äußeren Kräfte zugeführt wird, aufnimmt, noch nach außen abgibt.

Der Satz über die Arbeit in der Form (62) ist auch für dem Hookeschen Gesetze nicht folgende Körper unter den oben angegebenen Voraussetzungen (Anfangszustand, Temperatur, Energie-Zu- und Abfuhr) zutreffend, denn sie bleibt auch richtig, wenn wir in ihr statt u, v, w die ∞ kleinen Änderungen du, dv, dw setzen und bedenken daß z. B. $\frac{\partial du}{\partial x} = d \frac{\partial u}{\partial x}$ usw. Sie drückt dann mit Rücksicht auf (b) auf S. 103 aus, daß die bei ∞ kleinem Anwachsen der äußeren Kräfte durch letztere geleistete Arbeit gleich der elementaren Deformationsarbeit des ganzen Körpers ist (Siehe hierzu auch weiter unten).

c) Deformationsarbeit für die Raumänderung und für die Gestaltsänderung. Die Verformung eines unendlich kleinen Prismas in einem Punkte eines elastischen Körpers setzt sich aus einer Raumänderung und einer Gestalts-

änderung desselben zusammen. Die Raumänderung ist bedingt durch die Existenz der Raumdilatation e ; ist dieselbe Null, so ändert das Prisma nur seine Gestalt. Die Gestaltsänderung des Prismas ist bedingt durch die Schiebungen e_{xy} , e_{yz} , e_{zx} und die Differenz der Dehnungen in den drei aufeinander normalen Kantengerichtungen des Prismas, letzteres deswegen, weil, wenn eine solche Differenz nicht besteht, das Prisma sich selbst ähnlich bleibt also seine Gestalt nicht ändert. Das vierte Glied der Formänderungsarbeit im Ausdrucke (59) auf S. 104 bezieht sich sonach nur auf eine Gestaltsänderung, das fünfte nur auf eine Raumänderung, der Rest teils auf eine Gestaltsänderung, teils auf eine Volumsänderung. Um diese Anteile zu erhalten, setzen wir

$$e_{xx} = \frac{e}{3} + a, \quad e_{yy} = \frac{e}{3} + b, \quad e_{zz} = \frac{e}{3} + c.$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser 3 Gleichungen entsteht die Beziehung $e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 = \frac{e^2}{3} + a^2 + b^2 + c^2$, weil $a + b + c$, das als Faktor in der Summe der doppelten Produkte der Quadrate vorkommt, zufolge der Bedeutung von a, b, c , d. i.

$$a = \frac{2e_{xx} - e_{yy} - e_{zz}}{3}, \quad b = \frac{2e_{yy} - e_{xx} - e_{zz}}{3}, \quad c = \frac{2e_{zz} - e_{yy} - e_{xx}}{3},$$

gleich Null sein muß. Da

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}[(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2],$$

kann somit die Deformationsarbeit (a_i) [Gleichung (59)] in der Form

$$(a_i) = (a_i^r) + (a_i^g) \quad (63)$$

geschrieben werden, wobei

$$(a_i^r) = G \left(\frac{e^2}{3} + \frac{e^2}{m-2} \right) = \frac{G e^2 (m+1)}{3(m-2)} \quad (64)$$

gleich der spezifischen Formänderungsarbeit ist, welche der Raumänderung des Prismas entspricht und

$$(a_i^g) = G \left\{ \frac{1}{3}[(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2] + \frac{1}{2}(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2) \right\} \quad (65)$$

gleich der spezifischen Formänderungsarbeit ist, die nur auf die Gestaltsänderung des Prismas angewendet wird. Man kann die zwei Anteile (a_i^r) und (a_i^g) auch durch die Spannungskomponenten ausdrücken, wenn man das Hookesche Gesetz und die Beziehung $E = \frac{2(m+1)}{m}G$ benützt; es ergibt sich dann

$$e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{1}{E} \cdot \frac{m-2}{m} (X_x + Y_y + Z_z) = \frac{m-2}{2(m+1)G} (X_x + Y_y + Z_z),$$

ferner z. B. $e_{xx} - e_{yy} = \frac{(m+1)}{mE} (X_x - Y_y) = \frac{1}{2G} (X_x - Y_y)$ usw. Es wird dann

$$(a_i^r) = (\bar{a}_i^r) = \frac{m-2}{12(m+1)G} (X_x + Y_y + Z_z)^2 = \frac{m-2}{6Em} (X_x + Y_y + Z_z)^2, \quad (64a)$$

$$(a_i^g) = (\bar{a}_i^g) = \frac{1}{12G} [(X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2] + \frac{1}{2G} (X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2). \quad (65a)$$

Für einen hydrostatischen räumlichen Spannungszustand (S. 67) ist, wenn für denselben der allen Flächenelementen in der Umgebung eines Punktes ge-

meinsame Normaldruck pro Flächeneinheit mit $p = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ bezeichnet wird, für sämtliche Richtungen in der Umgebung eines Punktes

$$e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = \frac{m-2}{mE} p = \frac{m-2}{2(m+1)G} p, \quad \text{also} \quad (\bar{a}_i^r) = \frac{3(m-2)}{4(m+1)G} p^2 = \frac{Kp^2}{2}$$

gelten, bei Einführung der durch (44) auf Seite 85 definierten Kompressibilität K . Die auf die Gestaltänderung bezogene spezifische Formänderungsarbeit (\bar{a}_i^r) verschwindet für einen räumlichen hydrostatischen Spannungszustand. Man sieht ferner, daß die unter (64a) erhaltene Arbeit (\bar{a}_i^r) als eine Formänderungsarbeit für den räumlichen hydrostatischen Spannungszustand angesehen werden kann, wenn $X_x + Y_y + Z_z = 3p$ gesetzt wird.

Unabhängig vom Spannungszustand ist $(\bar{a}_i^r) = 0$, wenn ein Stoff vorliegt, für welchen $m = 2$ wird (Kork). Für die lineare Beanspruchung wird

$$(\bar{a}_i^r) = \frac{m-2}{12(m-1)G} X_x^2, \quad (\bar{a}_i^r) = \frac{X_x^2}{6G}$$

erhalten usw.

d) Adiabatische und isotherme Verformung. — Verzerrungsenergiefunktion. W. Thomson (L) hat bei Zugrundelegung des ersten und zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie unter der Voraussetzung, daß die Formänderungen vollkommen elastische sind und während der Wirkung der mechanischen Kräfte weder von außen Wärme in den beanspruchten Körper strömt noch nach außen Wärme abgegeben wird, d. h. daß der Deformationsvorgang ein adiabatischer ist, den Nachweis erbracht, daß ein auf Zug beanspruchter Stab, der aus einem bei Erwärmung sich dehnenden Stoff besteht, sich bei der Belastung etwas abkühlen, bei der Entlastung sich wiederum um eben soviel erwärmen müsse, und daß umgekehrt beim Druckversuch bei Belastung eine Erwärmung, bei Entlastung die entsprechende Abkühlung eintreten müsse. Dementsprechend sind auch Deformationen allgemeinerer Natur mit Wärmetönungen verknüpft. Praktisch im Versuch kann eine adiabatische Deformation dadurch zuwege gebracht werden, daß man plötzlich belastet bzw. entlastet, wodurch keine Zeit zu einem Wärmeausgleich bleibt. In der Tat fand Haga für einen plötzlich gedehnten Stahldraht eine Temperaturniedrigung von $-0,1076^\circ$. Die schwingenden Beanspruchungen von elastischen festen Körpern (Schallschwingungen) gehen gleichfalls so rasch vor sich, daß man von einem adiabatischen Vorgang reden kann, dagegen sind sehr langsam vor sich gehende Dehnungen und Quetschungen, wie wir sie unter a) bis e) stets voraussetzen, isotherm, d. h. finden praktisch bei gleicher Temperatur statt, was infolge der Untersuchungen von Thomson für einen auf Zug beanspruchten und wieder entlasteten Stab eine Wärmeaufnahme von außen bzw. eine Wärmeabgabe nach außen voraussetzt. In unseren obigen Darlegungen wurde das bisher nicht berücksichtigt, sondern vielmehr angenommen, daß die Wärmeenergie überhaupt bei Belastung und Entlastung des Körpers keine Rolle spielen soll. Nun wurde gefunden: Sowohl im Falle adiabatischer Formänderung als auch bei isothermer Formänderung existiert eine Funktion der Verzerrungskomponenten oder, wie man auch sagt, eine Verzerrungsenergiefunktion mit den oben für die Potentialfunktion angegebenen Eigenschaften, und zwar unabhängig von der Art des Elastizitätsgesetzes, wie gleichfalls W. Thomson (L) zuerst nachgewiesen hat. Auf Grund dieses Nachweises gelten die Beziehungen (60a) auf Seite 105 auch für adiabatische und isothermische Verzerrungen bei beliebigem Elastizitätsgesetz und ist der Ausdruck (b) auf Seite 103 unter denselben allgemeinen Umständen ein vollständiges Differential einer Funktion der Verzerrungskomponenten, das ist eben jener Verzerrungsenergiefunktion, deren Existenz Thomson erwiesen hat. Nimmt man die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes an, so erhält die Verzerrungsenergiefunktion speziell die Form einer homogenen und quadratischen Funktion [Gleichung (59)]¹.

25. Über das Prinzip der virtuellen Arbeit.

Bevor wir dieses für alle Körper, sie seien im festen, flüssigen oder gasförmigen Zustande, gültige fundamentale Gleichgewichtsprinzip, das sich insbesondere auf technischem Gebiete vielfacher Anwendungen erfreut, in der für den festen

¹ Beispiele zur Verwendung des Arbeitssatzes sind im zweiten Teile dieses Buches vielfach eingestreut (s. besonders S. 395ff.).

elastischen Körper besonderen Form ableiten, sei an die Form dieses Prinzipes für einen starren Körper, der sich unter dem Einflusse äußerer Kräfte im Gleichgewicht befindet, erinnert.

a) Form des Prinzipes der virtuellen Arbeit für einen starren Körper. Wenn ein starrer Körper unter dem Einflusse äußerer Kräfte im Gleichgewichte steht, gilt ganz allgemein

$$\sum \mathfrak{F} \cdot \delta \mathfrak{s}_0 + \int \mathfrak{f} dv \cdot \delta \mathfrak{s}_m = 0 \quad (66)$$

und wenn umgekehrt diese Bedingung erfüllt ist, muß der betreffende starre Körper im Gleichgewicht stehen. In dem angeschriebenen Prinzip (66) bedeuten \mathfrak{F} die am starren Körper angreifenden Oberflächenkräfte, $\mathfrak{f} dv$ die an den einzelnen Körperelementen vom Volumen dv angreifenden Massenkräfte (S. 6), $\delta \mathfrak{s}_0$ und $\delta \mathfrak{s}_m$, als Vektoren aufgefaßt, virtuelle Verschiebungen, die den einzelnen Kraftangriffspunkten zukommen. $\mathfrak{F} \cdot \delta \mathfrak{s}_0$ bzw. $\mathfrak{f} dv \cdot \delta \mathfrak{s}_m$ sind skalare Produkte einer angreifenden Kraft \mathfrak{F} bzw. $\mathfrak{f} dv$ in die virtuelle Verschiebung $\delta \mathfrak{s}_0$ bzw. $\delta \mathfrak{s}_m$, d. h. $\mathfrak{F} \cdot \delta \mathfrak{s}_0 = P \delta s_0 \cos(\mathfrak{F}, \delta \mathfrak{s}_0)$ mit δs_0 als Größe der virtuellen Verschiebung und $\cos(\mathfrak{F}, \delta \mathfrak{s}_0)$ als Kosinus des Winkels, den eine Kraft mit der Richtung der virtuellen Verschiebung einschließt; analog ist $\mathfrak{f} dv \cdot \delta \mathfrak{s}_m = k dv \delta s_m \cos(k, \delta \mathfrak{s}_m)$ zu deuten. Die genannten skalaren Produkte werden bekanntlich als virtuelle Arbeiten der Kräfte \mathfrak{F} bzw. $\mathfrak{f} dv$ für die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathfrak{s}_0$ bzw. $\delta \mathfrak{s}_m$ bezeichnet. Die Summe bzw. das Integral im Ausdrucke (66) sind über die virtuellen Arbeiten sämtlicher Oberflächen- bzw. Massenkräfte zu nehmen. Das Prinzip (66) sagt demnach aus, daß im Falle des Gleichgewichtes der am starren Körper angreifenden Kräfte die Summe der virtuellen Arbeiten dieser Kräfte Null sein muß. Ein besonderes Augenmerk ist darauf zu legen, daß die Kräfte \mathfrak{F} bzw. $\mathfrak{f} dv$ angreifende Kräfte sind, Reaktions- oder Verbindungskräfte treten in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen oder, wie es auch genannt wird, das Prinzip der virtuellen Arbeit nicht ein, und zwar deswegen nicht, weil ihre virtuelle Arbeit gleich Null sein muß.

Bezüglich der Definition einer virtuellen Verschiebung sei daran erinnert, daß einer solchen die folgenden Eigenschaften zugeschrieben werden:

1. Sie soll unendlich klein sein.
2. Sie soll mit den Bedingungen oder den Zwangsverhältnissen, denen der starre Körper unterworfen ist, und durch welche seine Unfreiheit bewirkt wird, verträglich, d. h. sie muß möglich sein.
3. Sie steht nicht mit den äußeren Kräften im Zusammenhang, d. h. sie wird nicht etwa durch sie bewirkt sondern ist völlig unabhängig von ihnen.
4. Sie wird nicht als in einem bestimmten Zeitelement vorgenommen gedacht.

Hierzu sei ad 2. bemerkt: Für einen freien starren Körper ist jede unendlich kleine Verschiebung aus seiner Gleichgewichtslage eine mögliche, d. h. eine virtuelle, da er keinem Zwange unterworfen ist, der seine Bewegungsmöglichkeiten einschränken würde; dagegen hat ein unfreier starrer Körper infolge seiner Stützung nur mehr beschränkte Bewegungsmöglichkeit, man sagt, er sei Bedingungen oder einem Zwange unterworfen. Diese Bedingungen bestimmen, ob eine Verschiebung möglich und damit virtuell sein kann oder nicht.

Wird von einem Körper eine Achse z im Raume festgelegt (etwa mittelst Kugel- und Halslagern), so ist nur Rotation um diese möglich (Rotationswinkel φ in Abb. 2, S. 4). Für einen beliebigen Punkt des Körpers, der Angriffspunkt einer Kraft sein kann, ist ein Element seines Rotationskreises eine mögliche unendlich kleine Verschiebung und damit eine virtuelle Verschiebung. Greift an dem Rahmen ein räumliches Kraftsystem $\mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_n$ an (das Eigengewicht des Rahmens als Massenkraft wird nicht in Betracht gezogen), das im Gleichgewicht steht, so lautet das Prinzip der virtuellen Verschiebung $\delta \varphi \sum P_i \rho = 0$, wenn P_i die in die Richtung des Weges $\delta \mathfrak{s}_0$ fallende Komponente einer Kraft P , ρ den Radius des Rotationskreises

des Angriffspunktes einer Kraft und die unendlich kleine Größe $\delta\varphi$ den für alle Angriffspunkte gemeinsamen Verdrehungswinkel um die z -Achse bedeuten. Die aufgeschriebene Bedingung besagt aber, daß die Summe der Momente aller Kräfte mit Bezug auf die z -Achse verschwinden sollen, was, wie bekannt, die einzige notwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingung für Kräfte ist, die an einem starren Körper angreifen, der sich nur um eine im Raum und im Körper feste Achse drehen kann.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Form (66) gestattet in allen denkbaren Fällen der Wirkung eines Kraftsystems auf einen starren Körper, die für dieses Kraftsystem notwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen herzuleiten.

b) Form des Prinzipes der virtuellen Arbeit für einen elastischen festen Körper bei virtuellem Verformungszustand. Wir gehen nun daran, eine Form des Prinzips der virtuellen Arbeit darzustellen, die für einen elastischen festen,

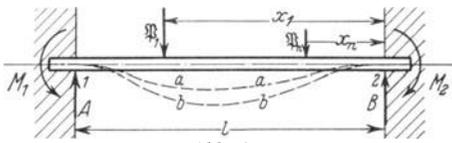


Abb. 31.

freien oder unfreien Körper (S. 4), der unter dem Einflusse eines äußeren Kraftsystemes im Gleichgewicht steht, gültig ist. Um die Anschaulichkeit zu unterstützen, wollen wir die Herleitung des Prinzipes unter Hinweis auf einen besonderen Fall vornehmen. Es liege

ein zylindrischer Stab (Träger) vor, Abb. 31, der auf beiden Seiten fest eingespannt ist, und unter dem Einflusse äußerer Kräfte $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$ verbogen wird. Die feste Einspannung z. B. in Mauerwerk soll dadurch charakterisiert sein, daß sich die in ihrem Bereiche liegenden Punkte des Stabes überhaupt nicht verschieben können; in Wirklichkeit wird etwas Derartiges allerdings nicht vollkommen zutreffen können, darauf kommt es aber jetzt gar nicht an. Es handelt sich nur darum, Bedingungen festzulegen, denen der elastische feste Körper, hier der Stab, genügen soll. Die Stabachse wird sich unter dem Einflusse der äußeren Kräfte etwa nach der punktierten Linie $a-a$ einstellen. Aus der Gleichgewichtslage nehmen wir eine virtuelle Verschiebung vor, die mit den Bedingungen des Systemes verträglich sein muß, d. h. wir können Punkte der Stabachse in eine zur wirklichen Lage $a-a$ benachbarte Lage $b-b$ bringen, derart, daß sich diese Punkte stetig aneinander schließen (d. h. die virtuellen Verschiebungen der einzelnen Punkte sollen stetige differenzierbare Funktionen der vor der Deformation vorhanden gewesenen Koordinaten der einzelnen Stabachsenpunkte sein) und dabei der Bedingung genügen müssen, daß die Tangenten an die entstandene Kurve $b-b$ an den Einspannungsstellen horizontal bleiben. Damit hätten wir die Punkte der Stabachse virtuell verschoben, die übrigen Punkte des Stabes werden aus der Gleichgewichtslage so virtuell verschoben werden müssen, daß der stetige Zusammenhang des Stabes nicht aufgehoben wird, d. h. ihre Verschiebungen werden sonach ebenfalls sehr klein und stetige differenzierbare Funktionen der ursprünglichen vor der Deformation durch die Kräfte vorhanden gewesenen Koordinaten x, y, z sein müssen.

Infolge der Einwirkung des im Gleichgewicht befindlichen Kraftsystemes stellen sich für jeden Punkt eines elastischen festen Körpers Verschiebungskomponenten u, v, w , Verzerrungskomponenten $e_{xx} \dots e_{zx}$ sowie Spannungskomponenten $X_x \dots Z_x$ ein, die wir als stetige differenzierbare Funktionen der Koordinaten x, y, z auffassen dürfen. Bei der virtuellen Verschiebung aus der Gleichgewichtslage entstehen parallel zu den Achsen des angenommenen Koordinatensystems Komponenten der virtuellen Verschiebungen $\delta u, \delta v, \delta w$ (lies: Variation u usw.), die gleichfalls als stetige differenzierbare Funktionen der Koordinaten betrachtet werden. Multiplizieren wir die Gleichgewichts-

bedingungen (20) (S. 48) der Reihe nach mit $\delta u dx dy dz$, $\delta v dx dy dz$, $\delta w dx dy dz$, addieren und integrieren über den ganzen vom Körper erfüllten Raum, so erhalten wir nach völlig gleicher Überlegung wie auf Seite 107ff. die Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_0 p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) d\sigma + \int_V (k_x \delta u + k_y \delta v + k_z \delta w) dx dy dz \\ &= \int_V \left[X_x \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + Y_y \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + Z_z \delta \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + X_y \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \\ & \quad \left. + Y_z \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + Z_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz. \end{aligned} \quad (67)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (67) geht aus dem auf Seite 108 entwickelten und dort mit $2 B_i$ bezeichneten hervor, wenn wir in ihm an Stelle der wirklichen Verschiebungskomponenten u, v, w die virtuellen Verschiebungskomponenten $\delta u, \delta v, \delta w$ treten lassen und bedenken, daß nach den elementaren Grundsätzen der Variationslehre $\frac{\partial \delta u}{\partial x} = \delta \frac{\partial u}{\partial x}$ usw. sein muß, d. h., daß Differential- und Variationszeichen miteinander vertauscht werden können. Das Oberflächenintegral links des Gleichheitszeichens stellt die virtuelle Arbeit der an der Oberfläche des Körpers wirkenden Kräfte vor, das Raumintegral links des Gleichheitszeichens ist die virtuelle Arbeit der Massenkräfte; rechts vom Gleichheitszeichen steht die virtuelle Deformationsarbeit. Das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Form (67) besagt, daß im Falle des Gleichgewichtes von an einem elastischen festen Körper angreifenden Kräften die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte gleich der virtuellen Arbeit der durch das Kraftsystem geweckten inneren Kräfte ist. Wir haben im Punkte 24 gesehen, daß die elementare Deformationsarbeit pro Raumeinheit unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes als das vollständige Differential der gesamten Deformationsarbeit (im Falle der Ungültigkeit des Hookeschen Gesetzes wird die Deformationsarbeit pro Raumeinheit durch eine allgemeine Verzerrungsenergiefunktion dargestellt), welche in das Körperelement beim Anwachsen der äußeren Kräfte von Null bis zu ihrem Endwert hineingesteckt wird, angesehen werden kann, wenn diese Deformationsarbeit als Funktion der Verzerrungskomponenten dargestellt wird. Es folgt daraus und mit Berücksichtigung der Regeln für die Variation einer Funktion von sechs unabhängigen Variablen, daß die virtuelle Deformationsarbeit auf der rechten Seite der Gleichung (67) als die vollständige Variation von $B_i = \int_V (a_i) dx dy dz$ angesehen werden kann, wenn (a_i) als Funktion der Verzerrungskomponenten betrachtet wird.

Denken wir uns die Oberflächenkräfte als Einzelkräfte \mathfrak{P} , so kann das Prinzip (67) bei Annahme der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes sonach in der Form

$$\sum \mathfrak{P} \cdot \delta \mathfrak{s}_0 + \int_V \mathfrak{k} dv \cdot \delta \mathfrak{s}_m = \delta B_i \quad (67')$$

angeschrieben werden, wenn zu Unterscheidungszwecken die virtuellen Verschiebungen für die Oberflächenkräfte \mathfrak{P} mit $\delta \mathfrak{s}_0$, jene für die Massenkräfte $\mathfrak{k} dv$ mit $\delta \mathfrak{s}_m$ eingeführt werden. Für den Fall eines starren Körpers verschwindet δB_i und es bleibt die Beziehung (66) übrig.

Eine besondere Form nimmt die Gleichung (67') an, wenn wir die Oberflächenkräfte allein in Betracht ziehen, also das Gleichgewichtsprinzip der virtuellen Arbeit für diese allein ansetzen. Wir erhalten dann statt (67') die neue Form

$$\sum \mathfrak{P} \cdot \delta \mathfrak{s}_0 = \delta B_i. \quad (67a)$$

Wir können bei Außerachtlassung der Massenkräfte die virtuellen Verschiebungen auch so vornehmen, daß dieselben an der Oberfläche des Körpers gleich Null angenommen werden; dann entsteht aus (67a) die Form

$$\delta B_i = 0, \quad (67b)$$

welche besagt: Wenn ein System von Oberflächenkräften am elastischen Körper, der dem Hookeschen Gesetze folgt, im Gleichgewicht steht, so verformt er sich derart, daß für die verformte Lage die Deformationsarbeit als Funktion der Verzerrungskomponenten ein Extremwert wird im Vergleich zu jenen Deformationsarbeiten, die sich einstellen würden, wenn der Körper in zur wirklichen Lage benachbarte mögliche Lagen gebracht wird und dabei eine Veränderung der wirklichen Lage der Punkte an der Oberfläche des Körpers nicht vorgenommen wird. Die Gleichgewichtslage ist demnach durch das Prinzip der virtuellen Verschiebungen als eine einzigartige unter den möglichen Lagen, nämlich als eine durch einen Extremwert der als Funktion der Verzerrungskomponenten betrachteten Deformationsarbeit charakterisierte Lage anzusehen. Ob dieser Extremwert einem Minimum oder einem Maximum entspricht, kann durch das Zeichen der zweiten oder ersten nicht verschwindenden Variation der Deformationsarbeit entschieden werden. Doch kann ohne dieses Kriterium erkannt werden, daß die Deformationsarbeit für die stabile Gleichgewichtslage (s. hierzu auch S. 192ff.) nur ein Minimum sein kann, da offenbar von außen her Arbeit in den deformierten Körper gesteckt werden muß, um denselben aus seiner Gleichgewichtslage herauszubringen und nicht umgekehrt Arbeit nach außen abgegeben werden kann, wenn eine zur Gleichgewichtslage benachbarte Lage erreicht werden soll. Auf die besondere Form (67b) des Prinzips der virtuellen Arbeit und deren Bedeutung haben A. Föppl und A. und L. Föppl (L) mit Nachdruck hingewiesen. Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit in den Formen (67), (67a), (67b) können umgekehrt die Bedingungen hergeleitet werden, die im Falle des Gleichgewichtes erfüllt sein müssen. Jeder Lehrsatz und jede Beziehung der Statik elastischer Körper ist aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit ableitbar. Man könnte sagen, daß das Prinzip der virtuellen Arbeit jeden speziellen denkbaren Gleichgewichtsfall bereits in sich enthält und es nur darauf ankommt, das Prinzip in jedem besonderen Falle anzuwenden.

Man kann z. B. allgemein die für das Gleichgewicht eines elastischen festen Körpers notwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit herleiten. Es ist das eigentlich, wenn man die Ableitung des Prinzips bedenkt, beinahe selbstverständlich. Nach Form (67b) des Arbeitsprinzips muß für Stoffe, die dem Hookeschen Gesetz folgen,

$$\delta \int_V G \left(e_{x,x}^2 + e_{y,y}^2 + e_{z,z}^2 + \frac{e_{x,y}^2 + e_{y,z}^2 + e_{z,x}^2}{2} + \frac{e^2}{m-2} \right) dx dy dz = 0 = \delta \int_V (a_i) dx dy dz$$

sein. Aus der Minimumsbedingung folgt bei Beachtung des Hookeschen Gesetzes, nach welchem z. B. $\frac{\partial (a_i)}{\partial e_{x,x}} \delta e_{x,x} = X_x \delta e_{x,x}$ usw. ist, die Gleichung

$$\int_V (X_x \delta e_{x,x} + Y_y \delta e_{y,y} + Z_z \delta e_{z,z} + X_y \delta e_{x,y} + Y_z \delta e_{y,z} + Z_x \delta e_{x,z}) dx dy dz = 0.$$

Diese Bedingung muß übrigens allgemein für jedes beliebige Elastizitätsgesetz erfüllt werden [Gleichung (67)]. Nachdem die Verzerrungskomponenten auf Grund der Beziehungen (6) und (7) auf den Seiten 29 und 30 durch Ableitungen der Verschiebungskomponenten ausdrückbar sind und daher $\delta e_{x,x} = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial \delta u}{\partial x}$, $\delta e_{y,y} = \frac{\partial \delta v}{\partial y}$ usw. gesetzt werden kann, nachdem ferner δu , δv , δw als stetige und differenzierbare Funktionen von x , y , z angesehen

werden, so erhält man bei partieller Integration nach x bzw. y bzw. z (es ist z. B.

$$\int_V X_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx dy dz = \int_0 \delta u X_x \cos(nx) d\sigma - \int_V \delta u \frac{\partial X_x}{\partial x} dx dy dz$$

usw.) die Gleichung

$$\int_V \left[\delta u \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} \right) + \delta v \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) + \delta w \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) \right] dx dy dz$$

$$= \int_0 [\delta u (X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz) + \delta v (Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz) + \delta w (Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz)] d\sigma.$$

Das Integral rechts verschwindet für endliche Werte der Klammerausdrücke, da wir δu , δv , δw an der Oberfläche mit Null angenommen haben. Das Integral links vom Gleichheitszeichen muß für alle möglichen Werte von δu , δv , δw erfüllt sein, die stetige Funktionen von x , y , z sind; damit das sein kann, müssen die Ausdrücke in den runden Klammern verschwinden, d. h. es muß z. B. die Bedingung $\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} = 0$ usw. erfüllt sein.

Hiermit sind die Gleichgewichtsbedingungen (20) für ein unendlich kleines Prisma, das einem elastischen festen Körper angehört, bei Vernachlässigung des Eigengewichtes als eine Folgerung aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit erkannt. Da die auf die Schubspannungen bezogene virtuelle Arbeit auch durch $Y_x \delta e_{xy} + Z_y \delta e_{yz} - X_z \delta e_{xz}$ ausgedrückt werden kann, ist der Schluß zu ziehen, daß auch die Gleichgewichtsbedingungen (21) als Folge des Prinzipes der virtuellen Arbeit angesehen werden müssen.

c) Form des Prinzipes der virtuellen Arbeit für einen elastischen festen Körper bei virtuellem Spannungszustand. Im folgenden wird eine andere Form des Prinzipes der virtuellen Arbeit entwickelt, welche besonders geeignet ist, der anschauliche Ausgangspunkt von für die Anwendungsgebiete wichtigen Lehrsätzen, die im Punkte 26 behandelt werden, zu sein. Es sei aber betont, daß durch diese neue herzuleitende Form nicht mehr ausgesagt wird als durch die bisherigen Formen dieses Prinzipes. Bisher kam die Definition der virtuellen Arbeit der äußeren im Gleichgewicht befindlichen am festen Körper angreifenden Kräfte dadurch zustande, daß wir die Summe der skalaren Produkte der wirklichen Kräfte in virtuelle Verschiebungen der Angriffspunkte derselben bildeten, und die virtuelle Deformationsarbeit des Körpers ergab sich als ein Integral von auf die einzelnen Raumelemente bezüglichen virtuellen Deformationsarbeiten, die sich als Summe von Produkten aus dem im Gleichgewichtszustand wirklich vorhandenen Spannungskomponenten in virtuelle Änderungen der zugehörigen Verzerrungskomponenten darstellen ließen. Kürzer kann man sagen, daß ein wirklicher Kraft- und Spannungszustand mit einem virtuellen oder, wie man auch sagt, variierten Verschiebungszustand verbunden wurde.

Nunmehr denken wir uns einen virtuellen oder variierten Spannungszustand mit dem wirklichen Verschiebungszustand kombiniert, womit das Folgende gemeint ist. Der elastische feste Körper, etwa der auf Seite 112 angeführte, fest eingespannte Stab, gehorche dem Hooke'schen Gesetz und stehe unter dem Einflusse des äußeren Kraftsystemes $\mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_n$, und der Massenkräfte im Gleichgewicht; diesem Kraftsystem entsprechen ein von den Koordinaten abhängiger Verschiebungszustand u, v, w , ein Verzerrungszustand $e_{xx} \dots e_{zx}$ und ein Spannungszustand $X_x \dots Z_x$. Wir ändern nunmehr den Spannungszustand etwas ab, und zwar dadurch, daß wir für jedes Körperelement zu den wirklichen Spannungskomponenten je einen Zusatz $\delta X_x, \delta X_y, \dots, \delta Z_x$ (lies: Variation X_x , usw.) treten lassen, und zwar sollen diese Zusätze stetige differenzierbare Funktionen von x, y, z sein. Sie sollen aber nicht vollkommen willkürlich angebracht werden, sondern erstens sehr klein und zweitens so gewählt werden, daß durch sie der Gleichgewichtszustand eines jeden Körperelementes im Innern und an der Oberfläche des Kör-

pers nicht gestört wird. Durch eine solche Wahl sollen sie als virtuelle Änderungen der wirklichen Spannungskomponenten definiert sein, insofern als hierdurch die Möglichkeit gegeben erscheint, daß sie in einen wirklichen anderen als dem zugrunde gelegten Gleichgewichtsfall als Folge der Wirkung ihnen zugeordneter äußerer Kräfte auftreten könnten; oder anders ausgedrückt: die gedachte Änderung eines Spannungszustandes ist nicht immer eine virtuelle, sie wird aber zu einer virtuellen, wenn der entstehende Spannungszustand ein möglicher, d. h. ein solcher ist, der die Bedingungen für das Gleichgewicht eines kleinen Körperelementes im Innern und an der Oberfläche des Körpers erfüllt. In ähnlicher Weise wurde oben ein gedachter Verschiebungszustand unter anderem dadurch zu einem virtuellen, daß die Verschiebungen als sehr klein und als möglich angenommen, d. h. als mit den Bedingungen, denen das System unterworfen ist, verträglich wurden. Der Variation des Spannungszustandes im Innern kann eine Variation der Kräfte an der Oberfläche zugeordnet sein, jedoch ist das nicht unbedingt notwendig. Bei Festhaltung der Annahme der Stetigkeit der Variationen könnte man dieselben gegen die Oberfläche hin in stetiger Weise gegen Null abnehmen lassen, woraus das Gesagte folgt. Es kommt das darauf hinaus, daß man Spannungen im Innern ohne ihnen zugeordnete Kräfte an der Oberfläche annimmt. Eine solche Annahme kann auch der Erfahrung entsprechen, worauf A. und L. Föppel (L) besonders hingewiesen haben. Die Gußspannungen im Innern eines nicht gleichmäßig abgekühlten Gußkörpers aus Gußeisen oder Glas sind dafür Belege (S. 25). Wir haben oben gesagt, daß die Zusätze $\delta Y_x \dots \delta Z_x$ sehr klein sein sollen; diese Folgerung muß der Allgemeinheit halber erhoben werden, weil es auch sein könnte, daß der Körper bei endlichen Variationen seinen Zusammenhang verliert oder das Hookesche Gesetz, das wenigstens teilweise eine Voraussetzung für die folgenden Betrachtungen bilden soll, nicht mehr befolgt; der Geltungsbereich des Hookeschen Gesetzes ist nämlich, wie nachgewiesen werden wird, ein beschränkter, d. h. dieses Gesetz bleibt in der Regel nur so lange gültig, als die äußeren Kräfte bzw. die Spannungskomponenten nicht zu groß werden. Ein Spannungszustand muß nach dem Gesagten, wenn er ein virtueller sein soll, die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (X_x + \delta X_x)}{\partial x} + \frac{\partial (X_y + \delta X_y)}{\partial y} + \frac{\partial (X_z + \delta X_z)}{\partial z} + k_x + \delta k_x &= 0, \\ \frac{\partial (Y_x + \delta Y_x)}{\partial x} + \frac{\partial (Y_y + \delta Y_y)}{\partial y} + \frac{\partial (Y_z + \delta Y_z)}{\partial z} + k_y + \delta k_y &= 0, \\ \frac{\partial (Z_x + \delta Z_x)}{\partial x} + \frac{\partial (Z_y + \delta Z_y)}{\partial y} + \frac{\partial (Z_z + \delta Z_z)}{\partial z} + k_z + \delta k_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

und

$$p_x + \delta p_x = (X_x + \delta X_x) \cos(nx) + (X_y + \delta X_y) \cos(ny) + (X_z + \delta X_z) \cos(nz) \dots \quad (b)$$

erfüllen. Das Zeichen \dots soll besagen, daß noch zwei andere Grenzbedingungen, welche sich auf die y - und z -Richtungen beziehen, anzusetzen wären.

Zieht man diese Gleichungen von den zugeordneten Gleichungen ab, welche das Gleichgewicht eines Körperelementes im Innern bzw. an der Oberfläche des Körpers im Falle des tatsächlich eintretenden Spannungszustandes auftreten, so erhält man

$$\frac{\partial (\delta X_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\delta X_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\delta X_z)}{\partial z} + \delta k_x = 0 \dots \quad (c)$$

$$\delta p_x = \delta X_x \cos(nx) + \delta X_y \cos(ny) + \delta X_z \cos(nz) \dots \quad (d)$$

Wir gehen zuerst von den Beziehungen (a) aus. Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit $u \, dx \, dy \, dz$, die zweite mit $v \, dx \, dy \, dz$, die dritte mit $w \, dx \, dy \, dz$,

addieren die so abgeänderten Gleichungen und integrieren über den ganzen vom Körper erfüllten Raum, so erhalten wir, wenn wir der Kürze halber $X_x + \delta X_x = \bar{X}_x$, $(Y_y + \delta Y_y) = \bar{Y}_y$ usw. setzen, eine Summe von Integralen, die den auf Seite 107 angeführten völlig analog gebaut sind, man hat in letzteren nur an Stelle von $X_x \dots Z_x$ die Werte $\bar{X}_x \dots \bar{Z}_x$ einzusetzen. Wir können somit die angeführten Integrale ebenso wie auf Seite 107 partiell integrieren und erhalten schließlich bei Beachtung der Oberflächenbedingungen, wenn wir $p_x + \delta p_x = \bar{p}_x$ usw., $k_x + \delta k_x = \bar{k}_x$ usw. einführen, die Gleichung

$$\int_0 (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) d\sigma + \int_V (\bar{k}_x u + \bar{k}_y v + \bar{k}_z w) dx dy dz \quad (68)$$

$$= \int_V (\bar{X}_x e_{xx} + \bar{Y}_y e_{yy} + \bar{Z}_z e_{zz} + \bar{X}_y e_{xy} + \bar{Y}_z e_{zx} + \bar{Z}_x e_{zx}) dx dy dz.$$

Der erste Ausdruck links kann als Summe der Arbeiten von virtuellen Oberflächenkräften mit den Komponenten $\bar{p}_x d\sigma$, $\bar{p}_y d\sigma$, $\bar{p}_z d\sigma$ gedeutet werden, deren Angriffspunkte Verschiebungen \bar{s}_0 mit den Komponenten u, v, w ausführen; wir bezeichnen ihn kurz als virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte, in der virtuelle Kräfte und wirkliche Verschiebungen verbunden sind. Diese Verbindung von wirklichen Kräften und virtuellen Verschiebungen gilt auch für den zweiten Ausdruck links in Gleichung (68), der die virtuelle Arbeit der Massenkkräfte mit den virtuellen Komponenten $\bar{k}_x dx dy dz$, $\bar{k}_y dx dy dz$, $\bar{k}_z dx dy dz$ und den wirklichen Verschiebungskomponenten u, v, w vorstellt. Nach dem Gesagten ist es ohne weiteres verständlich, daß die rechte Seite der Gleichung (68) als virtuelle Deformationsarbeit für den virtuellen Spannungszustand $\bar{X}_x \dots \bar{Z}_x$ und den wirklichen Verzerrungszustand $e_{xx} \dots e_{zz}$ bezeichnet werden kann. Der durch (68) ausgesprochene Satz besagt wieder, daß im Gleichgewichtsfalle die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte gleich sein muß, ebenso wie der Satz (67) auf Seite 113, nur liegt jetzt ein variierter Spannungszustand, dort aber ein variierter Verschiebungszustand zugrunde.

Durch ähnliche Einführungen, wie wir sie oben für die Form (67) auf Seite 113 gemacht haben, können wir auch jetzt, wenn wir annehmen, daß an der Oberfläche Einzelkräfte wirken, auf die Form

$$\sum \bar{\mathfrak{F}} \cdot \bar{s}_0 + \int_V \bar{\mathfrak{f}} dv \cdot \bar{s}_m = \int_V (\bar{X}_x e_{xx} + \dots + \bar{Z}_z e_{zz}) dx dy dz \quad (68')$$

kommen. In dieser Gleichung haben \bar{s}_0 und \bar{s}_m die Bedeutungen von wirklichen dem vorliegenden Gleichgewichtsfalle entsprechenden, als Vektoren aufgefaßten Verschiebungen, und zwar der Angriffspunkte der virtuellen Oberflächenkräfte $\bar{\mathfrak{F}}$ bzw. der virtuellen Massenkkräfte $\bar{\mathfrak{f}} dv$.

Wenn wir die Oberflächenkräfte allein in Betracht ziehen, demnach uns fragen, in welcher Beziehung die virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte und die zugeordnete virtuelle Arbeit der inneren Kräfte ohne Wirkung von Massenkkräften im Falle des Gleichgewichtes stehen, so haben wir in (68') die Massenkkräfte gleich Null zu setzen, und erhalten hierdurch eine zweite Form des Prinzips der virtuellen Arbeit bei variiertem Spannungszustand:

$$\sum \bar{\mathfrak{F}} \cdot \bar{s}_0 = \int_V (\bar{X}_x e_{xx} + \dots + \bar{Z}_z e_{zz}) dx dy dz. \quad (68'')$$

Diese Gleichung findet in der Technik zur Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke und zur Bestimmung von Verschiebungsgrößen eine ausgedehnte Anwendung, wie sich aus dem zweiten Teil (S. 376 ff.) ergeben wird.

Wir gehen jetzt von den Gleichungen (c) aus, wollen aber jetzt den Einfluß von Massenkräften von vornherein ausschalten, was wir dadurch bewirken, daß $\delta k_x, \delta k_y, \delta k_z$ gleich Null gesetzt werden. Es kommt das darauf hinaus, daß wir wohl Spannungskomponenten und Oberflächenkräfte variieren, die Massenkräfte aber nicht. Die so abgeänderten Beziehungen (c) multiplizieren wir wie im vorhergehenden Fall mit $u dx dy dz, v dx dy dz, w dx dy dz$, addieren die Produkte und integrieren über den vom Körper erfüllten Raum. Wir erhalten dann bei bereits wiederholt angegebener Umformung durch partielle Integration und Beachtung der Oberflächenbedingungen (d) leicht

$$\int_0 (\delta p_x u + \delta p_y v + \delta p_z w) d\sigma \\ = \int (\delta X_x e_{xx} + \delta Y_y e_{yy} + \dots + \delta Z_x e_{zx}) dx dy dz \quad (68''')$$

oder bei an der Oberfläche wirkenden Einzelkräften und Voraussetzung der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes

$$\sum \delta \mathfrak{P} \cdot \dot{s}_0 = \delta \bar{B}_i. \quad (68a)$$

Diese neuen Formen des Satzes der virtuellen Arbeit enthalten links des Gleichheitszeichens wieder eine virtuelle Arbeit der gedachten Oberflächenkräfte, rechts vom Gleichheitszeichen steht wieder eine virtuelle Deformationsarbeit. $\delta \bar{B}_i$ stellt unter Voraussetzung der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes eine vollständige Variation der Deformationsarbeit \bar{B}_i dar, wenn diese Arbeit als Funktion der Spannungskomponenten [Gleichungen (57) und (57a)], d. h. durch

$$\bar{B}_i = \int_V (\bar{a}_i) dx dy dz = \int_V \frac{1}{2G} \left[\frac{X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2}{2} - \frac{(X_x + Y_y + Z_z)^2}{2(m+1)} + X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2 \right] dx dy dz$$

dargestellt wird. Es folgt das aus dem Zutreffen der Beziehungen (60) bei Beachtung der Regeln über die Variation der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion von 6 Veränderlichen.

Die Beziehung (68a) können wir noch vereinfachen, wenn wir, was in unserem Belieben liegt (siehe die obigen Ausführungen), an der Oberfläche keine Variationen der Oberflächenkräfte vornehmen. Wir erhalten dann die zu der Gleichung (67b) auf Seite 114 ähnliche Form

$$\delta \bar{B}_i = 0. \quad (68b)$$

In dieser Form besagt das Arbeitsprinzip: Wenn ein System von Kräften am elastischen festen Körper, der dem Hookeschen Gesetze folgt, im Gleichgewicht steht, so stellt sich ein derartiger wirklicher Spannungszustand ein, daß für ihn die Deformationsarbeit, als Funktion der Spannungskomponenten betrachtet, ein Extremwert wird, im Vergleich zu jenen Deformationsarbeiten, die sich einstellen würden, wenn der Körper bei demselben äußeren Kraftsystem Spannungszustände erlitt, die in die Nachbarschaft des wirklichen Spannungszustandes fallen. Daß dieser Extremwert für stabile Gleichgewichtszustände nur ein Minimum sein kann, wird durch ähnliche Betrachtungen begrifflich gemacht, wie sie oben für den Fall der Gültigkeit der Form (67b) aufgestellt wurden.

Wenn eine der Formeln (67b) oder (68b) angewendet werden soll, dürfen nach dem Gesagten die Grenzen des Körpers oder eines Teiles des Körpers — es ist klar, daß wir dieselben Überlegungen auch auf einen Teil des Körpers anwenden können, für den die von dem Rest des ganzen Körpers auf ihn übertragenen Kräfte als äußere anzusehen wären — in dem einen Fall nicht von den Varia-

tionen des Verschiebungszustandes, in dem anderen Fall nicht von den Variationen des Spannungszustandes betroffen werden.

Besonders muß aber betont werden, daß für die Gültigkeit der Form (68 b) wohl notwendig ist, daß die Kräfte \mathfrak{P} , soweit sie angreifende Kräfte sind, nicht variiert werden; daß aber die gleichfalls auf die Oberfläche des Körpers wirkenden Auflagerreaktionen bei einem gestützten Körper dann variiert werden können, wenn ein im Raume festes als starr anzusehendes Auflager vorliegt, da dann die virtuelle Arbeit einer Auflagerreaktion gleich Null wird, also auf den Wert der linken Seite der Gleichung (68 b) gar keinen Einfluß hat. Wir werden weiter unten von dieser Bemerkung Gebrauch machen.

Die Gleichung (68 b) findet in der Theorie der statisch unbestimmten Systeme sehr häufig Anwendung.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit, das ursprünglich von J. Bernouilli für statische Verhältnisse von aus diskreten Punkten aufgebauten Systemen, von J. L. Lagrange (L) als allgemeines Prinzip der Mechanik aufgestellt wurde, hat insbesondere von G. Kirchhoff, G. Lamé, O. Mohr, H. Müller-Breslau (L) die für elastische feste Körper geeigneten Ausdrucksformen erhalten.

26. Der Satz über das Minimum der Formänderungsarbeit von Menabrea-Castigliano und zwei weitere Lehrsätze von Castigliano.

Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit hängt der in der Technik sehr häufig zur Verwendung gelangende Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit zusammen, der für das Fachwerk zuerst von Menabrea (L) nicht ganz klar ausgesprochen und nicht streng bewiesen wurde. Der strenge Beweis der Richtigkeit des Satzes für ein beliebig belastetes System gelang erst später Castigliano (L), der ihn seiner Bedeutung nach als fundamentalen Lehrsatz kennzeichnete. Föppl (L) und Müller-Breslau (L) haben seine Bedeutung und den Beweis für seine Richtigkeit unmittelbar auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit aufgebaut, aus dem ja nach dem weiter oben Bemerkten jeder Lehrsatz der Statik ableitbar sein muß. Im folgenden sind wesentliche Teil des Beweisganges von Müller-Breslau mit aufgenommen worden, und zwar nicht nur für den Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit, sondern auch für die beiden anderen im Titel dieses Punktes angekündigten Lehrsätze von Castigliano.

a) **Über statisch unbestimmte Systeme im allgemeinen**¹. Der Minimumsatz von Castigliano-Menabrea stellt sich als allgemeine Aussage zur Bestimmung statisch unbestimmter äußerer Reaktionskräfte (Momente) an unfreien elastischen Systemen oder von zwischen den Teilen eines Systemes übertragenen statisch unbestimmbaren inneren Kräften (Momenten) dar. Man kann auch sagen, daß jener Satz die die statisch unbestimmbaren Größen enthaltenden Bestimmungsgleichungen liefert, die zu den statischen Gleichungen für das erstarrt gedachte System hinzutreten und als Elastizitätsbedingungen bezeichnet werden, da sie mit der Verformung des Systemes im Zusammenhang stehen.

Handelt es sich um statisch unbestimmbare Reaktionen, so liegt ein Fall sogenannter äußerer statischer Unbestimmtheit vor, deren genauere begriffliche Bestimmung auf Seite 4ff. festgelegt und auch an einem Beispiel erörtert wurde. Wir haben nur vielleicht noch in Erinnerung zu bringen, daß die statischen Gleichungen für den starren Körper auch auf den deformierten elastischen Körper (bei kleinen Verformungen auch auf den undeformierten) anwendbar sind.

¹ Die folgenden Ausführungen setzen vielfach elementare Begriffsbestimmungen aus den Elementen der techn. Mechanik starrer Körper als bekannt voraus. Es kann über sie z. B. in Th. Pöschl: Lehrbuch der techn. Mechanik, Berlin: Julius Springer 1923, im Bedarfsfalle nachgelesen werden (siehe hierzu auch S. 222).

Sind innere Kräfte (Momente) statisch nicht bestimmbar, d. h. aus statischen für das erstarrt gedachte System geltenden Gleichungen nicht ableitbar, so heißt das System innerlich statisch nicht bestimmt. Der Grad der inneren statischen Unbestimmtheit ist so wie bei äußerer statischer Unbestimmtheit durch die Zahl der statisch nicht bestimmbar Größen (Kräfte, Momente) gegeben. Das Gesagte soll im folgenden an in der Technik sehr häufig vorkommenden elastischen Systemen, den Fach- und Stabwerksträgern, näher erläutert werden.

Ein Stabwerk ist eine Verbindung von geraden oder krummen Stäben zu einem stabilen Ganzen. Die Verbindung der einzelnen Stäbe ist dabei ganz oder wenigstens teilweise eine sogenannte steife, d. h. man stellt sich vor, daß infolge der konstruktiven Anordnung der Verbindungsstellen, welche Knotenpunkte heißen, die Winkel, welche bei geraden Stäben die Stabachsen oder bei krummen Stäben die Tangenten an die Stabachsen an den Verbindungsstellen miteinander einschließen, durch auf das Stabwerk wirkende Kräfte nicht geändert werden sollen; in Wirklichkeit trifft etwas Derartiges infolge der elastischen Verbindung, z. B. durch Knotenbleche, natürlich nur annähernd zu. Wenn die Verbindung der Stäbe durch reibungslos gedachte zylindrische oder Kugelgelenke vorgestellt wird, heißt die Verbindung eine reibungslos gelenkige. Es ist klar, daß die Reibungslosigkeit der Gelenke gleichfalls nur einem idealen Grenzfall zukommen könnte. Beim Stabwerk können zum Teil auch gelenkige Verbindungen vorgesehen sein. Wenn die Verbindung der Stäbe nur durch reibungslose Gelenke zu einem stabilen Ganzen bewerkstelligt wird, entsteht ein Fachwerk. Durch stabile Abstützung des Stab- oder Fachwerkes auf einen anderen festen Körper (Baugrund, Mauerwerk usw.) entsteht der Stabwerks- bzw. Fachwerksträger.

Die Bedingungen dafür, daß die Verbindung der Stäbe zu einem Fach- oder Stabwerk und die Abstützung des letzteren gegen den Baugrund, das Mauerwerk usw. stabil sind (innere und äußere Stabilität), werden hier als zu weit führend nicht näher erörtert¹.

Als einfachste Grenzfälle des Fachwerks- bzw. Stabwerksträgers könnten der auf gelenkigen Stützen gelagerte Stab (einfacher Balkenträger, Balkenträger auf mehr als zwei Stützen) bzw. der auf beiden Seiten fest eingespannte oder auf der einen Seite eingespannte, auf der anderen Seite gelenkig gelagerte gerade oder krumme Stab angesehen werden.

Es ist eine Aufgabe der technischen Mechanik der elastischen festen Körper, die in den einzelnen Stäben eines Fachwerk- oder Stabwerksträgers infolge eines auf denselben wirkenden äußeren Kraftsystemes auftretenden Spannungen und deren Deformationen zu ermitteln, um auf Grund derselben die Dimensionierung, d. h. die Bestimmung der Abmessungen der einzelnen Stäbe bei gegebener Länge derselben und gewählter Querschnittsform durchführen zu können (siehe S. 414 ff.). Hierzu bedürfen wir neben den Auflagerreaktionen auch der an den Verbindungsstellen der Stäbe auf letztere übertragenen mit Bezug auf den Träger inneren Kräfte und inneren Momente. Sind diese durch statische Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper nicht vollständig bestimmbar, dann liegt nach obiger allgemeiner Definition äußere oder innere statische Unbestimmtheit des Fach- bzw. Stabwerksträgers vor.

Es ist klar, daß durch reibungslose Kugelgelenke nur Kräfte und keine Momente, dagegen durch steife Verbindungen sowohl Kräfte als auch Momente übertragen werden können. Ist ein gerader Stab an seine beiden Enden durch reibungslose Kugelgelenke an die übrigen angeschlossen, so kann die im Gelenk auf den Stab übertragene Kraft nur einer in die Stabachse fallenden Einzelkraft gleichwertig sein. Das mit Bezug auf die Wirkung reibungsloser Kugelgelenke Gesagte kann auch für reibungslose zylindrische Gelenke bei bestimmter Orientierung derselben gegenüber dem äußeren Kraftsystem zutreffend sein.

¹ S. z. B. M. Grüning: Statik der ebenen Tragwerke, Berlin: Julius Springer 1925.

Der in Abb. 8. S. 25 dargestellte ebene Fachwerksträger, welcher auf einem Kipp-
lager 7 und einem Rollenkipplager 1 ruht, ist äußerlich statisch bestimmt, da zur Bestimmung
der zwei Reaktionen A, B zwei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen, nämlich

$$A + B = \sum_{r=1}^{r=5} P_r \text{ und } Al - \sum_{r=1}^{r=4} P_r x_r = 0. \text{ Der Träger ist auch innerlich statisch bestimmt,}$$

denn die Zahl der Stäbe ist elf, die Zahl der Knotenpunkte sieben, zur Bestimmung der
Stabkräfte stehen gerade $2 \cdot 7 - 3 = 11$ aus der Statik starrer Körper folgende Gleich-
gewichtsbedingungen zur Verfügung, deren wesentlicher Inhalt das Gleichgewicht jedes
einzelnen Knotenpunktes zum Ausdruck bringt. Würde man die Knotenpunkte 3 und 5
durch zwei weitere Stäbe mit einem dritten Auflagerpunkt C verbinden, in dem sich ein
zweites Rollenkipplager befindet, so würde der Träger äußerlich statisch unbestimmt, weil
der Zahl 3 der unbekanntenen Reaktionen A, B, C nur zwei Gleichgewichtsbedingungen für
den starren Körper entgegenstehen, innerlich wäre er aber noch immer statisch bestimmt,
da jetzt 13 zu bestimmende Stabkräfte und 8 Knotenpunkte vorhanden sind, also die Be-
ziehung $2 \cdot 8 - 3 = 13$ besteht. Würden wir in dem so umgeänderten Fachwerksträger noch
einen Stab 2, 5 einziehen, so wäre die ihm entsprechende Stabkraft nicht mehr durch statische
Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers bestimmbar, die Tragkonstruktion würde
dann auch einfach innerlich statisch unbestimmt.

Der in Abb. 32 gezeichnete Stabwerksträger besitzt einen durchgehenden Stab AB ,
an dem der Stab CD im Knoten C steif angeschlossen ist; die übrigen Stäbe sind in den
Punkten A, B, D gelenkig verbunden. In A befinde sich ein Kippplager, in B ein Rollen-
kipplager. Es wirke eine Belastung q t/m gleichförmig über die eine Stabhälfte verteilt. Die
Kraftebene fällt mit einer Längssymmetrieebene der Stäbe zusammen, die sonach symmetrische
Querschnitte besitzen sollen. Die Stützkräfte in A und B sind aus den zwei zur Verfügung

stehenden statischen Gleichgewichtsbedingungen $A + B = \frac{ql}{2}$, $Al - \frac{ql^2}{8} = 0$ bestimmbar,

der Stabwerksträger ist demnach äußerlich statisch bestimmt. Innerlich ist der Träger,
wenn man von der im Querschnitt C des Stabes CD vom Stabe AB auf den Stab CD
übertragenen Querkraft absieht (siehe hierzu auch weiter unten), zweifach statisch un-
bestimmt, denn sowohl das im Knotenpunkte C vom Stabe AB auf den Stab CD über-
tragene innere Moment, als auch die dort übertragene in die Längsachse des Stabes CD
fallende Kraft, sind durch statische Gleichungen nicht bestimmbar. Daß in C ein inneres
Biegemoment auf CD übertragen wird, geht schon daraus hervor, daß sich dieser Stab
infolge der durch die äußere Belastung bewirkten Durchbiegung des Stabes A, B ebenfalls
durchbiegen muß. Daß auch eine unbekanntene Längskraft in C übertragen wird, folgt daraus,
daß der Stab ACB als auf drei Stützen liegend aufgefaßt werden kann, zwei festen A bzw. B
und einer elastischen C , welche durch die beiden Stäbe AD und DB gehalten wird. Wäre
die Längskraft im Stabe CD und das im Knoten C übertragene Biegemoment bekannt,
so könnten auch die übrigen Stabkräfte unter Heranziehung der statischen Gleichungen be-
stimmt werden, wie aus einer weiter unten erfolgten näheren Untersuchung hervorgehen wird.
Würde sich im Knoten C keine steife Verbindung, sondern ein reibungsloses Halbgelenk be-
finden, durch welches der Stab CD an den steifen Stab AB gelenkig angeschlossen wird, so
würde die so entstehende Konstruktion innerlich einfach statisch unbestimmbar sein, da
dann im Knoten C kein Biegemoment übertragen werden könnte, was heißt, daß sich
der Stab CD bei Durchbiegung des Stabes AB durch die aufgebrauchte Belastung nicht eben-
falls durchbiegen könnte.

Vollkommen klar werden die vorstehenden Bemerkungen werden, wenn man die statischen
Gleichungen für den Stabwerksträger heranzieht, welche sich auf das Gleichgewicht der
einzelnen Knotenpunkte beziehen. Im allgemeinen bekommt man die genannten statischen
Gleichungen, indem man a) durch Schnitte den Träger in zwei Teile teilt und an den Schnitt-
flächen, die man stets als Querschnittsflächen der Stäbe erhalten kann, die dort übertragen
gedachten Kräfte und Momente (z. B. Biegemoment, Querkraft, Längskraft) als äußere
Kräfte anbringt, welche von dem erhaltenen einen Teil auf den anderen bzw. vom anderen
auf den einen wirken (letztere sind nach dem Prinzip der Gleichheit von Aktion und Reaktion
entgegengesetzt gleich den ersteren), und b) hierauf die Gleichgewichtsbedingungen für jeden
oder einen Teil aufstellt, die gelten würden, wenn der Träger starr wäre. Der Wirkungssinn
der in den Schnittflächen übertragenen Kräfte oder Momente wird im vermutlich richtigen
Sinne gewählt; wäre er irrtümlich falsch angenommen, so zeigt sich das dann bei Berechnung
der betreffenden Kraft oder Momentengröße aus den Gleichgewichtsbedingungen, die dann
negativ herauskommt. Es braucht nicht weiter ausgeführt zu werden, daß das in den Schnitt-
flächen übertragene, aus einem Biegemoment einer Quer- und Längskraft bestehende ge-
dachte Kraftsystem statisch gleichwertig sein muß dem Spannungssystem, das in der be-
treffenden Schnittfläche herrscht, da sonst nach Anbringen des Schnittes das Gleichgewicht, das

vor Anbringung des Schnittes vorhanden war, gestört würde¹. Gewöhnlich denkt man sich die Schnitte beliebig nahe um die Knotenpunkte geführt (was freilich in Wirklichkeit bei Anordnung von Knotenblechen nur sehr annähernd zutreffen kann, genau wäre es durchzuführen bei unendlich dünnen Stäben), weil sich dann häufig einfachere statische Verhältnisse ergeben und man bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die beliebig kleinen Distanzen der Schnittflächen von den Knotenpunkten (Schnittpunkten der Stabachsen) nicht zu beachten braucht, d. h. gleich Null setzen darf.

Diese Überlegungen wenden wir nun auf unseren Stabwerksträger an. Wir führen zuerst einen Schnitt $s_1 s_1$, der sehr nahe dem Knotenpunkt C liegt und den Stab CD und die Stabteile AC bzw. CB trifft. Das Kräftespiel am abgeschnittenen Knotenpunkt ist durch Abb. 32a dargestellt. Q_1, Q_2, Q_3 sind Querkräfte, N_1, N_2, N_3 Längskräfte, M_1, M_2, M_3 Biegemomente. Die Gleichgewichtsbedingungen für dieses ebene Kraftsystem lauten in bekannter Weise

$$N_1 - N_2 + Q_3 = 0, \quad Q_1 + Q_2 - N_3 = 0, \quad M_2 + M_3 - M_1 = 0. \quad (a)$$

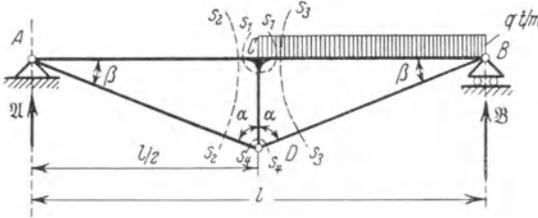


Abb. 32.

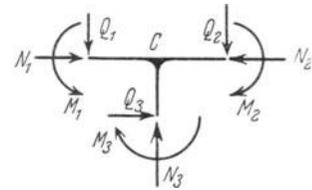


Abb. 32a.

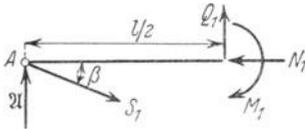


Abb. 32b.

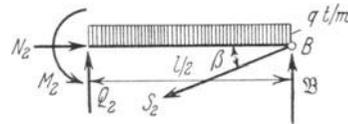


Abb. 32c.

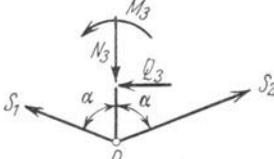


Abb. 32d.

Ferner führen wir je einen Schnitt $s_2 s_2$ bzw. $s_3 s_3$, der sehr nahe links bzw. rechts vom Knoten C verläuft und den Stabteil AC und den Stab AD bzw. den Stabteil CB und den Stab BD trifft. (Siehe die Abb. 32b und 32c, in denen auch die wirkenden Kräfte angebracht sind, bei Beachtung des Gegenwirkungsprinzipes mit Bezug auf die Wirkung des Teiles nach Abb. 32a auf die Teile nach den Abb. 32b und 32c.) Hiezu ist nur noch zu bemerken, daß in den Stäben AD und BD nur Längskräfte S_1 und S_2 angebracht wurden, da dieselben auf

beiden Seiten gelenkig angeschlossen sind.

Die zugehörigen Gleichgewichtsbedingungen lauten jetzt

$$\left. \begin{aligned} A + Q_1 - S_1 \sin \beta &= 0, \\ S_1 \cos \beta - N_1 &= 0, \\ Q_1 \frac{l}{2} - M_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (b) \quad \text{bzw.} \quad \left. \begin{aligned} B - S_2 \sin \beta + Q_2 - \frac{q l}{2} &= 0, \\ S_2 \cos \beta - N_2 &= 0, \\ \frac{q l^2}{8} - Q_2 \frac{l}{2} + M_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Schließlich führen wir noch einen Schnitt $s_4 s_4$ sehr nahe am Knotenpunkt D , der die drei Stäbe AD, CD, BD schneidet (Abb. 32d). Mit Bezug auf das eingezeichnete Kräftespiel ist zu beachten, daß das Biegemoment M_3 im Knoten D bzw. in einem Querschnitt des Stabes CD der unendlich benachbart zum Knoten D ist, gleich Null sein muß. Die Gleichgewichtsbedingungen nehmen jetzt die Gestalt

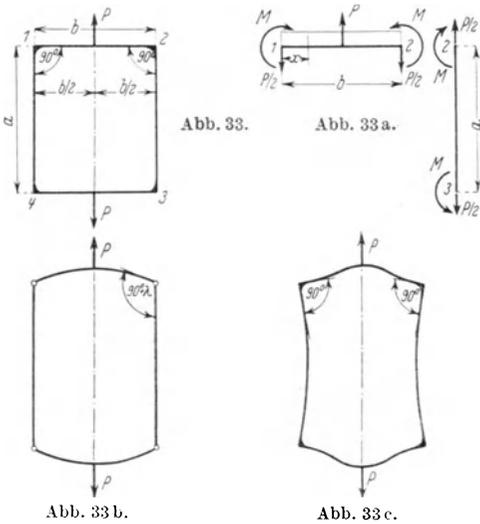
$$(S_1 + S_2) \sin \beta - N_3 = 0, \quad (S_1 - S_2) \cos \beta + Q_3 = 0 \quad (d)$$

¹ Inwieweit das genannte Kraftsystem in den Schnittflächen unter den oben gemachten Annahmen über die Anordnung des Trägers und das auf ihn wirkende äußere Kraftsystem dem wirklich auftretenden Spannungssystem gleichwertig sein kann, wird im zweiten Teile dieses Buches entwickelt werden.

an. Subtrahieren wir die zweiten der Gleichungen (b) und (c) voneinander und die erhaltene Differenz von der zweiten der Gleichungen (d), so erhalten wir die erste der Gleichungen (a), die daher als abhängig von den übrigen Gleichungen zu betrachten ist. Es stehen sonach nur 10 voneinander unabhängige Gleichungen zur Verfügung mit 13 Unbekannten, von welchen 11 auf innere Kräfte und Momente des Stabwerksträgers zwei (A und B) äußere Reaktionen des Stabwerksträgers sind. Daraus folgt dreifache innere statische Unbestimmtheit des Stabwerksträgers. Als statisch unbestimmte Größen können Q_3 , M_3 , N_3 eingeführt werden, die aus Elastizitätsbedingungen oder -Gleichungen bestimmt werden müssen. Vernachlässigen wir wie oben die Querkraft Q_3 des Stabes CD , so setzt sich der Grad der innerlich statischen Unbestimmtheit auf 2 herab wie oben angenommen.

Als weiteres Beispiel innerlicher statischer Unbestimmtheit wählen wir das Folgende. Denken wir uns (Abb. 33) vier prismatische Stäbe von kreisförmigem Querschnitt zu einem Rechteck mit den Seiten a und b steif verbunden. Das so erhaltene Stabwerk, das als Rahmen bezeichnet wird, wird, wie dargestellt, symmetrisch durch zwei entgegengesetzt gleiche in der Stabachse wirkende Kräfte P im Gleichgewicht gehalten. Vom Eigengewicht wird abgesehen. Dieser Rahmen ist innerlich einfach statisch unbestimmt, was man leicht einsehen, wenn man in den Knotenpunkten 1 und 2 den Stab 12 von dem Rest des Rahmens abtrennt und die vor dem Abtrennen von diesem Rest auf den Stab wirksam gewesen inneren Kräfte jetzt durch statisch gleichwertige äußere Kräfte (Momente) ersetzt. Als Ersatzkräfte werden nach Abb. 33a zwei Kräfte

von der Größe $\frac{P}{2}$ und zwei gleiche Momente M angenommen, die in dem angegebenen Sinne wirken und als Folge der steifen Verbindung der Stäbe anzusehen sind. Würden nämlich an Stelle der steifen Verbindung zylindrische reibungslose Gelenke in allen vier Eckpunkten des Rahmens vorhanden sein, so würde sich der Rahmen unter dem Einflusse der Kräfte P nach Abb. 33 b deformieren (es sind nur die Deformationen der Stabachsen dargestellt), da aber eine steife Verbindung herrscht, so deformiert er sich nach Abb. 33 c, weil die steife Verbindung den rechten Winkel zwischen den Stabachsen an den Verbindungsstellen der Stäbe erhalten soll. Letzteres ist nur möglich, wenn die Stäbe aufeinander Momente übertragen, welche die Änderung der Winkel von der Größe gleich 90° im Winkel von der Größe $90^\circ \pm \lambda$ verhindern. Am Stabe 23 bzw. 14 müssen nach dem Gegenwirkungsprinzip Momente bzw. zwei Längskräfte angreifen, welche entgegengesetzt gleich den am Stabe 12 in den Knotenpunkten 1 und 2 übertragenen Momenten bzw. Kräften sind. Das Moment M ist durch keine der Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper bestimmbar und muß aus einer Elastizitätsgleichung bzw. Elastizitätsbedingung, welche die Deformation des Rahmens berücksichtigt, gefolgert werden.



Am Stabe 23 bzw. 14 müssen nach dem Gegenwirkungsprinzip Momente bzw. zwei Längskräfte angreifen, welche entgegengesetzt gleich den am Stabe 12 in den Knotenpunkten 1 und 2 übertragenen Momenten bzw. Kräften sind. Das Moment M ist durch keine der Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper bestimmbar und muß aus einer Elastizitätsgleichung bzw. Elastizitätsbedingung, welche die Deformation des Rahmens berücksichtigt, gefolgert werden.

Wenn ein einfach statisch unbestimmter Träger vorliegt, so kann als statisch unbestimmte Größe eine beliebige äußere Reaktion bzw. eine beliebige an den Verbindungsstellen der Stäbe übertragene von vornherein nicht bekannte Kraft (Moment) gewählt werden. Im Falle der Abb. 116, S. 265 kann A oder B oder C als statisch unbestimmte Größe eingeführt werden, im Falle der Abb. 33 bleibt überhaupt keine Wahl, als statisch unbestimmte Größe muß das an den Eckpunkten des Rahmens übertragene Moment gelten. Liegen mehr als eine statisch unbestimmte Größe vor, so muß die Wahl der statisch unbestimmten Größen so vorgenommen werden, daß sie voneinander unabhängig sind, d. h. es darf nicht eine oder mehrere von ihnen bereits unter Zuhilfenahme der statischen Gleichgewichtsbedingungen des Körpers bestimmbar sein, wenn die übrigen auf irgendeine Weise berechnet werden.

Setzt man die statisch unbestimmten Größen gleich Null, so bleibt das so-

genannte statisch bestimmte Hauptsystem oder der statisch bestimmte Hauptträger übrig, welcher bei richtiger Wahl der statisch unbestimmten Größen stabil ist und nur durch das gegebene Kraftsystem belastet erscheint. Beispiele werden das näher erläutern.

Setzt man für einen eingespannten Träger (Abb. 31, S. 112) M_1 und M_2 gleich Null, so bleibt ein statisch bestimmter Balkenträger, setzt man M_1 und A gleich Null, so bleibt ein statisch bestimmter Kragträger übrig usw. Setzt man im Falle des Stabwerkes nach Abb. 32, das im Knotenpunkt C auf den Stab CD übertragene Moment und die dort übertragene Längs- und Querkraft gleich Null, so kommt das einer Entfernung des Stabes CD gleich, und die zurückbleibende Konstruktion ist ein statisch bestimmter Balkenträger mit zwei spannungslosen Stäben AD und BD , die auch entfernt werden können.

b) Der Minimumsatz von Castigliano-Menabrea im Falle äußerer statischer Unbestimmtheit und der erste der Castiglianoschen Lehrsätze. Es liege ein äußerlich statisch nicht bestimmtes elastisches System von überall gleicher und gleichbleibender Temperatur und ohne Anfangsspannungen vor, das dem Hookeschen Gesetze folgt, beliebig gestützt ist und unter dem Einflusse äußerer Lasten im stabilen Gleichgewichte steht. Nennen wir die Größe der letzteren $P_1 \dots P_n$, die auftretenden Reaktionen in den Stützpunkten V_1, V_2, \dots, V_p und $X_1, X_2 \dots X_r$. Von diesen $p + r$ Reaktionen sollen die r -Größen $X_1 \dots X_r$, statisch nicht bestimmbar sein. Die Zahl p kann höchstens gleich 6 sein (S. 4). Die $p + r$ Auflagerreaktionen hängen mit den Kräften $P_1 \dots P_n$ auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper linear zusammen. Insbesondere sind die Größen $V_1 \dots V_p$ aus diesen Gleichgewichtsbedingungen durch $P_1 \dots P_n$ und die statisch nicht bestimmbar Größen $X_1 \dots X_r$ linear ausdrückbar. Eine Auflagerkraft V_p ist sonach durch einen Ausdruck

$$V_p = v_{0p} + v_{1p} X_1 + \dots + v_{rp} X_r \quad (69)$$

darstellbar. Darin bedeutet v_{0p} die Auflagerkraft in dem zugeordneten Stützpunkt p welche wirksam wird, wenn die statisch nicht bestimmten Größen $X_1 \dots X_r$ Null gesetzt werden, d. h. auf das zugeordnete statisch bestimmte Hauptsystem nur die äußeren Kräfte $P_1 \dots P_n$ wirksam gedacht sind, ferner stellt z. B. v_{rp} die Stützkraft im zugeordneten Stützpunkt p vor, wenn auf das zugeordnete statisch bestimmte Hauptsystem nur eine Kraft $X_r = 1$ wirkt, die äußeren Kräfte aber dabei Null gesetzt werden usw. Werden die Größen $X_1 \dots X_r$ auf irgend einem Wege bestimmt, so sind der letzten Gleichung zufolge auch die Reaktionen $V_1 \dots V_p$ als bekannt anzusehen.

Wenn für einen elastischen Körper das Hookesche Gesetz gilt, so können wir uns die in den Spannungen sich zeigende Wirkung eines äußeren Kraftsystems durch Superposition der bezüglichlichen Wirkungen der Einzelkräfte vorgestellt denken. Aus diesem Grunde, und da unter der gleichen Voraussetzung und im Hinblick auf die Linearität der Gleichgewichtsbedingungen bei gegebener Art des äußeren Kraftsystemes einer n -maligen Vergrößerung der Größe desselben eine n -malige Vergrößerung des Spannungszustandes zugeordnet sein muß, können wir mit Müller-Breslau die folgenden Ansätze machen:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{xx} P_1 + b_{xx} P_2 + \dots + n_{xx} P_n + \alpha_{xx} X_1 + \beta_{xx} X_2 + \dots + \varrho_{xx} X_r, \\ Y_y &= a_{yy} P_1 + b_{yy} P_2 + \dots + n_{yy} P_n + \alpha_{yy} X_1 + \beta_{yy} X_2 + \dots + \varrho_{yy} X_r, \\ &\vdots \\ Z_z &= a_{zz} P_1 + b_{zz} P_2 + \dots + n_{zz} P_n + \alpha_{zz} X_1 + \beta_{zz} X_2 + \dots + \varrho_{zz} X_r. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

In diesen Beziehungen, in welchen $V_1 \dots V_p$ nicht vorkommen, da sie durch $P_1 \dots P_n$ und $X_1 \dots X_r$ zufolge (69) linear ausdrückbar sind, bedeuten $a_{xx} \dots n_{xz}$, $\alpha_{xx} \dots \varrho_{xz}$ Koeffizienten, welche von $P_1 \dots P_n$ und $X_1 \dots X_r$ unabhängig und

von der Lage des Volumenelementes im Körper abhängig sind. Insbesondere bedeutet z. B. n_{xx} dem Zahlenwerte nach jene Spannung X_x , welche auf ein Volumenelement $dx dy dz$ in einem Punkte des elastischen festen Körpers wirken würde, wenn $P_1 \dots P_{n-1}$ und $X_1 \dots X_r$ verschwinden, d. h. der Körper durch Änderung der Auflagerbedingungen zum statisch bestimmten Hauptsystem umgestaltet würde, und dieses nur unter dem Einfluß der Kraft $P_n = 1$ und der dieser Kraft entsprechenden statisch bestimmbareren Reaktionen stünde. Man nennt diese Angriffsweise am statisch bestimmten Körper kurz den Zustand $P_n = 1$. q_{xx} ist der Zahlenwert der Spannung X_x , welche an einer Stelle des Körpers entsteht, wenn $P_1 \dots P_n$ und $X_1 \dots X_{r-1}$ Null gesetzt werden, dagegen $X_r = 1$ angenommen würde (Zustand $X_r = 1$), d. h. wenn am statisch bestimmten Hauptsystem eine Kraft $X_r = 1$ und die zugehörigen statisch bestimmbareren Reaktionen angriffen. Wenn wir im Falle der dreifachen Stützung eines Stabes (Abb. 116) als statisch unbestimmte Größe die Reaktion B im mittleren Auflager wählen, so ergibt sich als Anwendung des Gesagten auf diesen Fall, daß der Zustand $X = 1$ entsteht, wenn auf den Träger nach Entfernung des mittleren Auflagers nur die Kraft $B = X = 1$ samt zugehörigen Reaktionen wirkt.

Es ist wohl selbstverständlich, daß in die Ausdrücke (70) auch auf den Körper wirkende, gegebene oder statisch unbestimmbare äußere Momente, die ja aus Einzelkräften aufgebaut gedacht werden, linear eintreten können.

Mit Bezug auf die Auflager des elastischen Systemes sind folgende Möglichkeiten in Betracht zu ziehen:

a) Die Auflager sind praktisch unverschieblich und unverdrehbar, wie es bei Kipp lagern und bei fester Einspannung zutreffen kann.

b) Die Auflager sind zwar verschieblich oder bzw. und verdrehbar, aber derart, daß die Stützkkräfte (Stützmomente) bei variiertem Spannungszustand und variierten Oberflächenkräften keinesfalls eine virtuelle Arbeit leisten können; das tritt z. B. ein, wenn ein Rollenkipplager vorliegt und die Rollenbahn ebenso wie die zylindrischen Rollen selbst als nahezu starr und reibungslos vorausgesetzt werden, denn in einem solchen Falle steht die wirkliche bzw. virtuelle Auflagerkraft normal auf der Rollenbahn.

c) Die Auflager sind verschieblich (verdrehbar) aber derart, daß die wahren oder virtuellen Auflagerkräfte eine wirkliche oder virtuelle Arbeit leisten; das trifft zu bei Abstützung einer Konstruktion auf elastisch nachgiebigen Widerlagern.

Den Fall (c) setzen wir bei dem eingangs erwähnten elastischen System zunächst voraus.

Wir gehen nunmehr von der Form (68a) auf Seite 118 des Prinzipes der virtuellen Arbeit aus, das die Form

$$\begin{aligned} \delta P_1 m_1 + \dots + \delta P_n m_n + \delta V_1 n_1 + \dots + \delta V_p n_p + \delta X_1 \mu_1 + \dots + \delta X_r \mu_r \\ = \delta \bar{B}_i = \int_V (\delta X_x e_{xx} + \dots + \delta Z_x e_{zx}) dx dy dz \end{aligned}$$

annimmt. Darin bedeuten $m_1 \dots m_n$ wahre Verschiebungen in den Richtungen der Kräfte $P_1 \dots P_n$, ferner $n_1 \dots n_p$ und $\mu_1 \dots \mu_r$ wahre Verschiebungen in den Richtungen der Stützkkräfte $V_1 \dots V_p$ bzw. $X_1 \dots X_r$.

Infolge der Gültigkeit von (69) muß für eine beliebige Stützkraft V_p die Beziehung

$$\delta V_p = \frac{\partial V_p}{\partial P_1} \delta P_1 + \dots + \frac{\partial V_p}{\partial P_n} \delta P_n + \frac{\partial V_p}{\partial X_1} \delta X_1 + \dots + \frac{\partial V_p}{\partial X_r} \delta X_r \quad (69a)$$

bestehen. Ferner müssen zufolge der Gleichungen (70) die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \delta X_x &= a_{xx} \delta P_1 + \cdots + n_{xx} \delta P_n + \alpha_{xx} \delta X_1 + \cdots + q_{xx} \delta X_r, \\ &\vdots \\ \delta Z_x &= a_{xz} \delta P_1 + \cdots + n_{xz} \delta P_n + \alpha_{xz} \delta X_1 + \cdots + q_{xz} \delta X_r \end{aligned} \right\} \quad (70a)$$

zutreffen. Setzen wir die Variationen der Spannungskomponenten in die Formeln für die virtuelle Deformationsarbeit ein, so erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \delta \bar{B}_i = \int_V [&\delta X_1 (\alpha_{xx} e_{xx} + \alpha_{yy} e_{yy} + \cdots + \alpha_{xz} e_{zx}) + \cdots \\ &+ \delta X_r (q_{xx} e_{xx} + q_{yy} e_{yy} + \cdots + q_{xz} e_{zx}) + \\ &+ \delta P_1 (\alpha_{xx} e_{xx} + \cdots + \alpha_{xz} e_{zx}) + \cdots + \delta P_n (n_{xx} e_{xx} + \cdots + n_{xz} e_{zx})] dx dy dz. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer unter dem Integralzeichen ist aber die vollständige Variation der Deformationsarbeit pro Raumeinheit in einem Punkte des Körpers, wenn man sie als Funktionen der äußeren Oberflächenkräfte $P_1 \dots P_n$ und $X_1 \dots X_r$ auffaßt: denn es ist auf Grund der Beziehungen (70)

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} &= \frac{\partial X_x}{\partial X_1} \cdots \cdots \alpha_{xz} = \frac{\partial Z_x}{\partial X_1}, & a_{xx} &= \frac{\partial X_x}{\partial P_1} \cdots \cdots a_{xz} = \frac{\partial Z_x}{\partial P_1}, \\ &\vdots & & \vdots \\ q_{xx} &= \frac{\partial X_x}{\partial X_r} \cdots \cdots q_{xz} = \frac{\partial Z_x}{\partial X_r}, & n_{xx} &= \frac{\partial X_x}{\partial P_n} \cdots \cdots n_{xz} = \frac{\partial Z_x}{\partial P_n}, \end{aligned}$$

demzufolge der Integrand die Form

$$\begin{aligned} &\delta X_1 \left(\frac{\partial X_x}{\partial X_1} e_{xx} + \frac{\partial Y_y}{\partial X_1} e_{yy} + \cdots + \frac{\partial Z_x}{\partial X_1} e_{zx} \right) + \delta P_1 \left(\frac{\partial X_x}{\partial P_1} e_{xx} + \frac{\partial Y_y}{\partial P_1} e_{yy} + \cdots + \frac{\partial Z_x}{\partial P_1} e_{zx} \right) \\ + &\delta X_2 \left(\frac{\partial X_x}{\partial X_2} e_{xx} + \frac{\partial Y_y}{\partial X_2} e_{yy} + \cdots + \frac{\partial Z_x}{\partial X_2} e_{zx} \right) + \delta P_2 \left(\frac{\partial X_x}{\partial P_2} e_{xx} + \frac{\partial Y_y}{\partial P_2} e_{yy} + \cdots + \frac{\partial Z_x}{\partial P_2} e_{zx} \right) \\ &\vdots \\ + &\delta X_r \left(\frac{\partial X_x}{\partial X_r} e_{xx} + \frac{\partial Y_y}{\partial X_r} e_{yy} + \cdots + \frac{\partial Z_x}{\partial X_r} e_{zx} \right) + \delta P_n \left(\frac{\partial X_x}{\partial P_n} e_{xx} + \frac{\partial Y_y}{\partial P_n} e_{yy} + \cdots + \frac{\partial Z_x}{\partial P_n} e_{zx} \right) \end{aligned}$$

annimmt. Sehen wir die Deformationsarbeit pro Volumseinheit \bar{a}_i in der Gleichung (57a) auf Seite 104 als Funktion von $P_1 \dots P_n$ und $X_1 \dots X_r$ an, so erhalten wir, wenn wir sie nach P_n differenzieren, die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{a}_i)}{\partial P_n} &= \frac{1}{2G} \left[X_x \frac{\partial X_x}{\partial P_n} + Y_y \frac{\partial Y_y}{\partial P_n} + Z_z \frac{\partial Z_z}{\partial P_n} - \frac{X_x + Y_y + Z_z}{m+1} \left(\frac{\partial X_x}{\partial P_n} + \frac{\partial Y_y}{\partial P_n} + \frac{\partial Z_z}{\partial P_n} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 X_y \frac{\partial X_y}{\partial P_n} + 2 Y_z \frac{\partial Y_z}{\partial P_n} + 2 Z_x \frac{\partial Z_x}{\partial P_n} \right]. \end{aligned}$$

Fassen wir gleichartige Glieder zusammen, so erhalten wir bei Berücksichtigung des Hookeschen Gesetzes

$$\frac{\partial (\bar{a}_i)}{\partial P_n} = \frac{\partial X_x}{\partial P_n} e_{xx} + \frac{\partial Y_y}{\partial P_n} e_{yy} + \cdots + \frac{\partial Z_z}{\partial P_n} e_{zz}.$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich, wenn wir die Deformationsarbeit \bar{a}_i nach einer anderen Kraft $P_1 \dots P_{n-1}$ oder $X_1 \dots X_r$ differenzieren. Da die vollständige Variation der Deformationsarbeit \bar{a}_i , wenn wir sie als Funktion der Kräfte $P_1 \dots P_n$ und $X_1 \dots X_r$ auffassen, durch

$$\delta (\bar{a}_i) = \frac{\partial (\bar{a}_i)}{\partial P_1} \delta P_1 + \cdots + \frac{\partial (\bar{a}_i)}{\partial P_n} \delta P_n + \frac{\partial (\bar{a}_i)}{\partial X_1} \delta X_1 + \cdots + \frac{\partial (\bar{a}_i)}{\partial X_r} \delta X_r$$

bestimmt, und somit die vorangestellte Behauptung erwiesen ist, können wir das virtuelle Arbeitsprinzip, von dem wir ausgegangen sind, in der Form

$$\delta \bar{B}_i = \int_V \left[\delta P_1 \frac{\partial(\bar{a}_i)}{\partial P_1} + \dots + \delta P_n \frac{\partial(\bar{a}_i)}{\partial P_n} + \delta X_1 \frac{\partial(\bar{a}_i)}{\partial X_1} + \dots + \delta X_r \frac{\partial(\bar{a}_i)}{\partial X_r} \right] dx dy dz$$

$$= \delta P_1 m_1 + \dots + \delta P_n m_n + \delta V_1 n_1 + \dots + \delta V_p n_p + \delta X_1 \mu_1 + \dots + \delta X_r \mu_r \quad (71)$$

schreiben. Wir wollen nunmehr 1. die gewonnenen Beziehungen für den Fall spezialisieren, daß als virtueller Belastungszustand jener genommen wird, der durch die Belastung des statisch bestimmten zugeordneten Hauptsystemes mit δP_n charakterisiert wird, d. h. es sind die Variationen $\delta P_1 \dots \delta P_{n-1}$ und $\delta X_1 \dots \delta X_r$ Null zu setzen. Wir erhalten dann aus dem allgemeinen Ausdruck (71), da zufolge (69 a) $\delta V_p = \frac{\partial V_p}{\partial P_n} \delta P_n$ wird, die Gleichung

$$\delta P_n m_n + \sum_{s=1}^{s=p} \frac{\partial V_s}{\partial P_n} \delta P_n n_s = \int_V \delta P_n \frac{\partial(\bar{a}_i)}{\partial P_n} dx dy dz.$$

Bei Abkürzung durch δP_n , das bei der Integration als konstant zu betrachten ist, ergibt sich die fundamentale Gleichung

$$m_n + \sum_{s=1}^{s=p} \frac{\partial V_s}{\partial P_n} n_s = \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial P_n}. \quad (72)$$

Der Ausdruck auf der linken Seite der Beziehung (72) ist offenbar eine virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte, für den Fall, daß an der dem gegebenen elastischen System zugeordneten statisch bestimmten Hauptsystem nur eine virtuelle Kraft $P_n = 1$ mit den ihr entsprechenden Stützreaktionen angreift.

Ferner wollen wir 2. eine Spezialisierung der allgemeinen Form (71) dadurch vornehmen, daß wir annehmen, es soll nur δX_r nicht verschwinden; d. h. wir lassen $\delta X_1 \dots \delta X_{r-1}$ gleich Null werden, was erlaubt ist, da diese Größen voneinander unabhängig sind, und ebenso sollen $\delta P_1 \dots \delta P_n$ verschwinden. Der virtuelle Belastungszustand der an der zugeordneten statisch bestimmten Hauptkonstruktion angreift, besteht sonach nur in der Belastung δX_r und den diesem Werte entsprechenden Auflagerkräften $\delta V_1 \dots \delta V_p$. Letztere sind durch Ausdrücke von der Form $\delta V_p = \frac{\partial V_p}{\partial X_r} \delta X_r$ gegeben. Die Arbeitsgleichung wird dann

$$\mu_r \delta X_r + \sum_{s=1}^{s=p} \frac{\partial V_s}{\partial X_r} \delta X_r n_s = \int_V \delta X_r \frac{\partial(\bar{a}_i)}{\partial X_r} dx dy dz$$

oder

$$\mu_r + \sum_{s=1}^{s=p} \frac{\partial V_s}{\partial X_r} n_s = \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial X_r}. \quad (72a)$$

In der Gleichung (72a) bedeutet der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für die virtuelle Belastung $X_r = 1$ am statisch bestimmten Hauptsystem.

Nehmen wir 3. schließlich an, es seien sämtliche Auflager unverschieblich und unverdrehbar oder es liege ein verschiebliches (verdrehbares) Auflager vor, das den auf Seite 125 unter (b) angegebenen Bedingungen entspricht, dann geht die Gleichung (72a) in

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial X_r} = 0 \quad (73)$$

über. Diese drückt den Satz von Menabrea-Castigliano über das Minimum der Formänderungsarbeit für äußerlich statisch unbestimmte elastische feste Körper aus und besagt: sieht man bei einem äußerlich statisch unbestimmtem Systeme von überall gleicher und gleichbleibender Temperatur und ohne Anfangsspannungen, das im stabilen Gleichgewicht steht, dem Hookeschen Gesetze folgt, und dessen statisch unbestimmten Reaktionen keine virtuellen Arbeiten entsprechen können, die Deformationsarbeit als Funktion der äußeren Kräfte $P_1 \dots P_n$ und der statisch unbestimmten Reaktionen $X_1 \dots X_r$ an, so sind die Differentialquotienten der Deformationsarbeit nach den statisch unbestimmten Größen gleich Null. Da diese Aussage gleichbedeutend damit ist, daß die Deformationsarbeit als Funktion von $X_1 \dots X_r$ angesehen ein Extremwert wird, dieser Extremwert aber offenbar nur ein Minimum sein kann, so kann man auch sagen, daß die statisch unbestimmten Größen so groß sind, daß für sie die Deformationsarbeit ein Minimum wird.

Wenn r statisch unbestimmbare Reaktionen vorliegen, so gewinnen wir durch den Menabrea-Castiglianoschen Satz r Elastizitätsgleichungen von der Form (73), welche gerade genügen, um die statisch unbestimmten Größen als Funktionen der gegebenen Lasten $P_1 \dots P_n$ auszudrücken.

Wenn unter den Stützenreaktionen auch statisch unbestimmbare Spannungsmomente M_r vorkommen würden, so ergeben sich dann an Stelle von (73)

Bedingungen von der Form $\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial M_r} = 0$, für deren Gültigkeit wieder notwendig

ist, daß den unbekanntem Spannungsmomenten keine virtuelle Arbeit entspricht. Da die Arbeit, welche ein Moment M bei unendlich kleinem in der Ebene des Momentes liegenden Verdrehungswinkel $d\varphi$ eines starren Körpers um eine Momentanachse leistet, gleich $M d\varphi$ ist, so ist die virtuelle Arbeit bei einem, infolge Deformation eines elastisch festen Körpers auftretenden, sehr kleinen wirklichen Drehungswinkel λ_r und einem virtuellen Zusatz δM_r zum wirklichen Moment M_r durch $\delta M_r \lambda_r$ gegeben. Danach bedeutet $\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial M_r} = 0$ das Verschwinden des Drehungswinkel λ_r , wie das z. B. bei einer festen Einspannung eines Stabes zutrifft.

Gleichungen von der Form (72a) wären zur Bestimmung der statisch unbestimmten Größen dann anzuwenden, wenn die Auflager des gegebenen Systemes verschieblich (verdrehbar) sind und die zugehörigen Auflagerkräfte beim Belastungszustande $X_r = 1$ eine virtuelle Arbeit leisten können. Dabei müssen natürlich die wirklichen Verschiebungen μ_r und $n_1 \dots n_p$, welche bei der Belastung des gegebenen Systemes durch die gegebenen Kräfte entstehen, von vornherein als gegeben betrachtet oder geschätzt werden.

Die Gleichung (72) kann zur Bestimmung einer Verschiebung (Verdrehung) m_n in der Richtung einer angreifenden Kraft P_n (in der Ebene eines angreifenden Momentes) bei verschieblichen (verdrehbaren) Auflagern des Hauptsystemes und virtueller Arbeitsleistung der diesen Auflagern beim Belastungszustande $P_n = 1$ zugeordneten Auflagerkräfte benützt werden, wenn die Verschiebungen (Verdrehungen) $n_1 \dots n_p$ an den Auflagern bei der wirklichen Belastung des gegebenen Systemes gegeben sind und, im Falle statischer Unbestimmtheit, die statisch unbestimmten Größen bereits berechnet worden sind.

Für den Fall, daß die Auflager unverschiedlich (unverdrehbar), oder wenn verschieblich (verdrehbar) den Stützkräften keine virtuelle Arbeit zukommen kann, geht die Gleichung (72) in die Form

$$m_n = \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial P_n} \quad (74)$$

über, und drückt den ersten der Castiglianoschen Sätze aus: Faßt man für ein im Gleichgewicht stehendes, statisch bestimmt oder unbestimmt gelagertes System von überall gleicher und gleichbleibender Temperatur ohne Anfangsspannungen, das dem Hookeschen Gesetz folgt und Auflager besitzt, die derart beschaffen sind, daß die Stützkräfte keine virtuelle Arbeit leisten können, die Deformationsarbeit als Funktion der äußeren Kräfte eventuell im Falle äußerer statischer Unbestimmtheit auch als Funktion der statisch unbestimmbaren Größen auf und differenziert die Formänderungsarbeit nach einer angreifenden Kraft (Moment), so erhält man die Verschiebung (Verdrehung) in der Richtung der Kraft (in der Ebene des Momentes).

Dieser Castiglianosche Satz ist ein spezieller Fall des durch die Gleichung (72) ausgedrückten Satzes, der besagt: Faßt man bei einem im Gleichgewicht befindlichen, statisch bestimmt oder unbestimmt gelagerten festen elastischen Körper von überall gleicher und gleichbleibender Temperatur ohne Anfangsspannungen, der dem Hookeschen Gesetze folgt, mit Auflagern, die den auf Seite 125 unter c) gemachten Angaben folgen, die Deformationsarbeit als Funktion der angreifenden Lasten, eventuell auch noch im Falle äußerlich statischer Unbestimmtheit als Funktion der statisch nicht bestimmbaren Größen auf, so ergibt dieselbe nach einer angreifenden Last P_n differenziert, die virtuelle Arbeit, welche im Falle statischer Bestimmtheit eine an der gegebenen Konstruktion oder im Falle statischer Unbestimmtheit an dem zugeordneten statisch bestimmten Hauptsystem angreifende Last $P_n = 1$ und die ihr entsprechenden speziellen Stützwiderstände leisten. In ähnlicher Weise könnte ein Satz formuliert werden, der sich auf die Gleichung (72a) bezieht.

e) Der Minimumsatz von Castigliano-Menabrea im Falle innerer statischer Unbestimmtheit. Es liege nunmehr ein innerlich statisch unbestimmter dagegen äußerlich statisch bestimmter im stabilen Gleichgewicht stehender Körper, etwa ein Stab- oder Fachwerkträger vor, der mit Bezug auf Temperatur, Anfangsspannungen, Elastizitätsgesetz die oben angegebenen Voraussetzungen erfüllt.

Es kommen dann die äußeren Kräfte $P_1 \dots P_n$, die statisch bestimmten Auflagerreaktionen $V_1 \dots V_p$, wobei $p \leq 6$ sein muß, und gewisse statisch nicht bestimmbare innere Kräfte bzw. innere Momente in Betracht, die wir allgemein mit $X_1 \dots X_r$ bezeichnen wollen. Im Falle des Rahmens auf Seite 123 wäre z. B. nur eine einzige Größe $X_1 = M$ vorhanden, wobei M das innere Einspannungsmoment ist usw. Die Stützenreaktionen $V_1 \dots V_p$ sind jetzt lineare Funktionen von $P_1 \dots P_n$ allein. Sonstige speziell bei Stabwerken auftretende Querkräfte, Biegemomente, Längskräfte sind durch $P_1 \dots P_n$ und die statisch unbestimmten Größen linear ausdrückbar, was aus der als bekannt vorausgesetzten Definition dieser Größen folgt (s. hierzu auch S. 222); desgleichen sind die Spannungen für jeden elastischen festen Körper nach dem Schema (70) auf Seite 124 lineare Funktionen der genannten Größen.

Wir denken uns wieder eine Variation des Spannungszustandes vorgenommen, derart, daß die Beziehung $\delta \bar{B}_i = 0$ (S. 118) erfüllt wird. Variationen äußerer Kräfte werden überhaupt nicht vorgenommen, dagegen werden die statisch nicht bestimmbaren inneren Kräfte und Momente deswegen variiert, weil der Spannungszustand variiert wird und letzterer auch von den statisch unbestimmten Größen $X_1 \dots X_r$ abhängig ist. Die weiteren Überlegungen gestalten sich völlig gleichartig mit den bereits oben für äußerlich statisch nicht bestimmte elastische Körper angegebenen. Zu bemerken wäre vielleicht nur noch, daß jetzt die Deformationsarbeit als Funktion der Kräfte $P_1 \dots P_n$ und der statisch nicht bestimmbaren inneren Kräfte (Momente) angesehen wird. Schließlich erhält man als Resultat die Bedingung (73). Also auch die innerlich statisch unbestimmbaren

Größen sind derart beschaffen, daß durch sie die Deformationsarbeit, als Funktion derselben und der äußeren Kräfte betrachtet, ein Minimum wird.

Auch die Bedingungen (72) und (74) können ohne weiteres auch für innerlich statisch unbestimmte Systeme übernommen werden.

d) Der allgemeine Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit für beliebige Stützung und beliebige statisch unbestimmte Systeme. Der durch die Beziehung (73) ausgesprochene Lehrsatz vom Minimum der Formänderungsarbeit kann für jeden elastischen festen Körper angewendet werden, ob er nun äußerlich oder innerlich oder äußerlich und innerlich statisch unbestimmt ist, wenn nur die Auflager so beschaffen sind, daß den Stützkraften keine virtuelle Arbeit zukommt. Wir werden nunmehr zeigen, daß diese Beschränkung der Anwendbarkeit des Minimumsatzes von Menabrea-Castigliano, welche durch die Forderung einer bestimmten Art der Auflager zum Ausdrucke kommt, wegfallen kann, wenn man sich eine besondere Auffassung zu eigen macht.

Diese Auffassung besteht darin, daß man die verschieblichen Auflager durch zylindrische Auflagerstäbe aus passendem elastischen Materiale eventuell auch mit passenden Dimensionen ersetzt, die einerseits sich mit einem reibungslosen Gelenk an den gegebenen elastischen Körper anschließen, andererseits sich auf einen starr gedachten unverschieblichen Körper mit einem bis drei reibungslosen Gelenken abstützen. Der Querschnitt, die Länge bzw. das Material der Auflagerstäbe kann immer so gewählt werden, daß die Verschieblichkeit der Auflager der Verlängerung bzw. Verkürzung der Auflagerstäbe entspricht. Die noch offen gelassene Zahl der Stäbe für ein Auflager stimmt mit der Zahl der Auflagerbedingungen überein, letztere aber hängen von der Art der Auflagerkonstruktion und der Art des wirkenden Kraftsystemes, oder anders ausgedrückt von der Zahl der dem betreffenden Auflager zukommenden und zu bestimmenden Reaktionskomponenten oder Auflagerunbekannten ab. Einem verschieblichen Kipplager entsprechen drei oder zwei oder auch ein Auflagerstab, je nachdem das Kraftsystem ein räumliches, ein allgemeines ebenes, oder ein ebenes Parallelkraftsystem ist, mit zugeordneten Verschiebungsmöglichkeiten in den Richtungen der Auflagerstäbe. Die in den Auflagerstäben entstehenden Längskräfte sind für das durch diese Stäbe ergänzte gegebene System innere Kräfte, für das gegebene System allein aber äußere Kräfte.

Einer weiteren Hinzufügung im Hinblick auf die Einführung von Auflagerstäben bedarf das Vorstehende noch, wenn es sich um äußerlich statisch unbestimmte Systeme mit verdrehbaren Auflagern handelt. In diesem Falle nimmt man nicht gelenkig an den gegebenen Körper angeschlossene Auflagerstäbe, sondern solche mit steifer, oder wie man sich auch ausdrückt biegefesten Verbindung und lagert sie in passender Weise an einem starr gedachten Körper.

Es kann sonach behauptet werden, daß die durch eine wirkliche oder virtuelle Auflagerkraft bei Verschiebung des Auflagers geleistete wirkliche oder virtuelle Arbeit gleichkommt der wirklichen oder virtuellen Deformationsarbeit, welche in den Auflagerstäben steckt. Ferner ist klar, daß man durch Einführung der Auflagerstäbe jedes äußerlich statisch unbestimmte System mit verschieblichen (verdrehbaren) Auflagern zu einem mit unverschieblichen (unverdrehbaren) Auflagern umgewandelt denken kann. Auf letzteres ist aber der Minimumsatz von Castigliano-Menabrea ohne weiteres in der Form (73) anwendbar, so daß derselbe als allgemein gültig für jedes statisch unbestimmte System bei beliebiger Stützung angesehen werden und zur Bestimmung der statisch unbestimmten Größen dienen kann. Die Deformationsarbeit bezieht sich allgemein auf jene, welche in dem gegebenen elastischen System und in den Auflagerstäben steckt.

Für einen dreifach gestützten Stab (Seite 265) könnte man, wenn das mittlere Auflager B nicht im Raume fest und starr ist sondern eine Verschiebung parallel zu den angenommenen Kräften zuläßt, durch einen einzigen Stab, dessen Achse parallel zu den Kräften ist, gegen einen starren Körper abstützen. Ließe das Auflager eine Verschiebung zu, die nicht parallel zu den äußeren Kräften sondern beliebig zu ihnen geneigt wäre, so könnte man den einzigen Auflagerstab beibehalten, müßte aber z. B. seine stoffliche Beschaffenheit abändern.

Ein gerader zylindrischer Stab (Abb. 31, S. 112) sei auf beiden Seiten nicht fest sondern nachgiebig eingespannt, sonstige Verschiebungen der Auflager sollen aber ausgeschlossen sein. Für die dargestellte Belastung treten zwei statisch unbestimmte Einspannungsmomente M_1 und M_2 auf. Würde man die Deformationsarbeit \bar{B}_i in diesem Falle als Funktion der äußeren Kräfte P_1, P_n und der statisch unbestimmten Größen M_1 und M_2 aufgestellt haben, so erhielte man, wenn die als gegeben zu betrachtenden Verdrehungswinkel an den Auflagern mit λ_1 und λ_2 bezeichnet werden, nach dem ersten der Lehrsätze von Castigliano

die Gleichungen $\lambda_1 = \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial M_1}, \lambda_2 = \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial M_2}$. Bei im Verhältnisse zu der Länge dünnen Stäben können wir als Verdrehungswinkel an den Auflagern jene einsetzen, welche die Stabachse an den Einspannungsstellen erleidet.

Stelle ich mir hingegen die nachgiebigen Einspannungen ersetzt durch zwei mit dem gegebenen Stab steif verbundene Auflagerstäbe $1, 3$ und $2, 4$ (Abb. 34) vor, von denen der erste bei 3 in einem starren Körper unverdrehbar und unverschieblich eingespannt wird, der zweite aber gelenkig im Punkte 4 an einen starren unverschieblichen Körper angeschlossen ist, so ist hierdurch an die Stelle des ursprünglich nachgiebig eingespannten Stabes der Rahmen $1, 2, 3, 4$ getreten, welcher denselben Grad der statischen Unbestimmtheit hat, wie der Stab: Die Auflagerunbekannten für den Rahmen sind jetzt A, B als vertikale Reaktionen, die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte H als Horizontal-schübe und ein Einspannungsmoment M in 3 , das sind im ganzen vier Unbekannte, denen nur zwei Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper

$$A + B = P_1 + P_n \quad \text{und} \quad Al - P_1 x_1 - P_n x_n + M = 0$$

gegenüberstehen. Für den Querschnitt des Stabes $1, 3$, der durch den Knotenpunkt 1 geht, entsteht ein Biegemoment $Hb - M$, gleich dem Einspannungsmoment M_1 des Stabes $1, 2$, für den Querschnitt des Stabes $2, 4$, der durch den Knotenpunkt 2 geht, ein Biegemoment Hb , das gleich dem Einspannungsmoment M_2 sein muß. (Diese Biegemomente sind für den Rahmen $1, 2, 3, 4$ innere Momente, die zwischen den Stäben $1, 3$ und $1, 2$ bzw. $2, 4$ und $1, 2$ übertragen werden.) Zur Erfüllung der vorstehenden Bedingungen, und damit

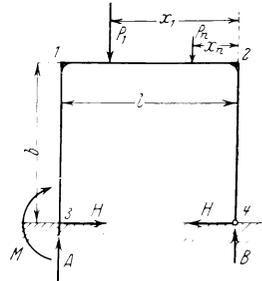


Abb. 34.

in den Knotenpunkten Verdrehungswinkel entsprechend jenen der Stabachse des gegebenen Stabes an den Auflagern entstehen, müssen die Auflagerstäbe $1, 3$ und $2, 4$ entsprechend dimensioniert werden und aus einem entsprechenden Material bestehen. Die weitere Ausführung dieses Gedankens kann erst auf Grund der Biegungstheorie durchgeführt werden und bleibt dem zweiten Teile dieses Buches vorbehalten. Hier kommt es nur darauf an, zu zeigen, daß es möglich ist, den gegebenen Träger durch Hinzufügung von Auflagerstäben in ein System zu verwandeln, das den gleichen Grad der statischen Unbestimmtheit wie der gegebene Stab hat und dabei unverschiebliche und unverdrehbare Auflager besitzt, ferner daß die statisch unbestimmten Größen M und H des durch die Auflagerstäbe ergänzten Trägers auf Grund des Minimumprinzips bestimmbar sind, wogegen dieses Prinzip auf den gegebenen Träger nicht anwendbar ist.

e) Der zweite Lehrsatz von Castigliano. Der zweite der im Titel dieses Punktes angegebenen Sätze von Castigliano beruht auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit in der Form (67a), S. 113, die einen variierten Verschiebungszustand zugrunde legt.

Es liege ein beliebig gestütztes statisch bestimmtes oder statisch unbestimmtes elastisches System mit den unter **b)** genannten Eigenschaften vor, das unter dem Einfluß der Lasten $P_1 \dots P_n$ im stabilen Gleichgewicht steht. Die entstehenden Stützkräfte seien mit $V_1 \dots V_n$ bezeichnet, eventuell vorhandene statisch unbestimmte Stützkräfte werden mit den Zeichen $X_1 \dots X_r$ eingeführt.

Wenn die Beziehungen (70) auf Seite 124 zutreffen, so gilt auch der Satz, daß die Verzerrungskomponenten lineare Funktionen der äußeren Kräfte sind, denn das Hookesche Gesetz fordert den linearen Zusammenhang zwischen den Spannungs-

und den Verzerrungskomponenten. Da aber die Verzerrungskomponenten, wenn sie sehr klein sind, wieder durch einfache Differentiationen nach den Koordinaten aus den Verschiebungskomponenten u, v, w , erhalten werden, so kann auch behauptet werden, daß die Verschiebungskomponenten u, v, w , lineare Funktionen der Kräfte sind. Nennen wir die Verschiebungskomponenten an der Oberfläche des Körpers in der Richtung der Kräfte $P_1 \dots P_n$, der Stützkkräfte $V_1 \dots V_p$ und der statisch unbestimmten Größen $X_1 \dots X_r$ der Reihe nach $m_1 \dots m_n$ bzw. $n_1 \dots n_p$ bzw. $\mu_1 \dots \mu_r$, so kann aus dem Vorstehenden gefolgert werden, daß auch die äußeren Kräfte und mit ihnen die Verzerrungskomponenten lineare Funktionen der Verschiebungen $m_1 \dots m_n$, $n_1 \dots n_p$ und $\mu_1 \dots \mu_r$ sind. Wir können sonach schreiben:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \bar{A}_{xx} m_1 + \dots + N_{xx} m_n + \bar{A}_{xx} n_1 + \dots + \bar{P}_{xx} n_p + \bar{A}_{xx} \mu_1 + \dots + R_{xx} \mu_r \\ \vdots & \\ e_{zx} &= A_{zx} m_1 + \dots + N_{zx} m_n + \bar{A}_{zx} n_1 + \dots + \bar{P}_{zx} n_p + \bar{A}_{zx} \mu_1 + \dots + R_{zx} \mu_r \end{aligned} \right\} (75)$$

In diesen Beziehungen bedeuten $\bar{A}_{xx} \dots N_{xx}$, $\bar{A}_{xx} \dots \bar{P}_{xx}$, $\bar{A}_{xx} \dots R_{xx}$ Koeffizienten, die von den Verschiebungen $m_1 \dots \mu_r$ unabhängig sind und mit der Lage des Volumenelementes im Körper ihre Werte ändern. N_{xx} ist z. B. eine Verzerrung e_{xx} , die in einem Punkte des elastischen festen Körpers auftreten würde, wenn die Verschiebung m_n in der Richtung der Kraft P_n gleich 1 wäre, sämtliche anderen Verschiebungen aber an der Oberfläche verschwinden würden, R_{yy} ist eine Verzerrung e_{yy} in einem Punkte des Körpers, die entsteht, wenn sämtliche Verschiebungskomponenten bis auf μ_r verschwinden, welche gleich 1 gesetzt wird, usw.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Form (67 a) nimmt die Form:

$$\begin{aligned} P_1 \delta m_1 + \dots + P_n \delta m_n + V_1 \delta n_1 + \dots + V_p \delta n_p + X_1 \delta \mu_1 + \dots + X_r \delta \mu_r \\ = \int_V (X_x \delta e_{xx} + \dots + Z_x \delta e_{zx}) dx dy dz \end{aligned}$$

an. Setzen wir die Variationen unter dem Integralzeichen unter Zuhilfenahme der Beziehungen (75) ein, so erhalten wir als Integranden

$$\begin{aligned} \delta m_1 \left(X_x \frac{\partial e_{xx}}{\partial m_1} + \dots + Z_x \frac{\partial e_{zx}}{\partial m_1} \right) + \delta n_1 \left(X_x \frac{\partial e_{xx}}{\partial n_1} + \dots + Z_x \frac{\partial e_{zx}}{\partial n_1} \right) \\ \vdots \\ + \delta m_n \left(X_x \frac{\partial e_{xx}}{\partial m_n} + \dots + Z_x \frac{\partial e_{zx}}{\partial m_n} \right) + \delta n_p \left(X_x \frac{\partial e_{xx}}{\partial n_p} + \dots + Z_x \frac{\partial e_{zx}}{\partial n_p} \right) \\ + \delta \mu_1 \left(X_x \frac{\partial e_{xx}}{\partial \mu_1} + \dots + Z_x \frac{\partial e_{zx}}{\partial \mu_1} \right) \\ \vdots \\ + \delta \mu_r \left(X_x \frac{\partial e_{xx}}{\partial \mu_r} + \dots + Z_x \frac{\partial e_{zx}}{\partial \mu_r} \right). \end{aligned}$$

Man kann nun auch die spezifische Deformationsarbeit für eine beliebige Stelle im Innern des Körpers nicht mehr als Funktion der äußeren Kräfte sondern, weil diese linear mit den Verschiebungen $m_1 \dots \mu_r$ zusammenhängen, als Funktion dieser Verschiebungen selbst auffassen. Tun wir das für die spezifische Deformationsarbeit a_i in der Form (59), S. 104, und bilden die vollständige

Variation derselben, so erhalten wir den obigen Integranden, da z. B.

$$\frac{\partial a_i}{\partial m_n} = G \left[2 e_{xx} \frac{\partial e_{xx}}{\partial m_n} + 2 e_{yy} \frac{\partial e_{yy}}{\partial m_n} + 2 e_{zz} \frac{\partial e_{zz}}{\partial m_n} + e_{xy} \frac{\partial e_{xy}}{\partial m_n} + e_{xz} \frac{\partial e_{xz}}{\partial m_n} + e_{yz} \frac{\partial e_{yz}}{\partial m_n} \right. \\ \left. + \frac{2(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})}{m-2} \left(\frac{\partial e_{xx}}{\partial m_n} + \frac{\partial e_{yy}}{\partial m_n} + \frac{\partial e_{zz}}{\partial m_n} \right) \right],$$

oder zusammengefaßt bei Beachtung des Hookeschen Gesetzes

$$\frac{\partial a_i}{\partial m_n} = X_x \frac{\partial e_{xx}}{\partial m_n} + Y_y \frac{\partial e_{yy}}{\partial m_n} + Z_z \frac{\partial e_{zz}}{\partial m_n} + X_y \frac{\partial e_{xy}}{\partial m_n} + Y_z \frac{\partial e_{yz}}{\partial m_n} + Z_x \frac{\partial e_{zx}}{\partial m_n}.$$

In dieser Form ist $\frac{\partial a_i}{\partial m_n}$ dem bei δm_n stehenden Wert im Integranden der virtuellen Formänderungsarbeit gleich. Wir sehen also, daß das virtuelle Arbeitsprinzip, von dem wir ausgegangen sind, auch wie folgt geschrieben werden kann

$$P_1 \delta m_1 + \dots + P_n \delta m_n + V_1 \delta n_1 + \dots + V_p \delta n_p + X_1 \delta \mu_1 + \dots + X_r \delta \mu_r \\ = \int_V \left(\delta m_1 \frac{\partial a_i}{\partial m_1} + \dots + \delta m_n \frac{\partial a_i}{\partial m_n} + \delta n_1 \frac{\partial a_i}{\partial n_1} + \dots + \delta n_p \frac{\partial a_i}{\partial n_p} \right. \\ \left. + \delta \mu_1 \frac{\partial a_i}{\partial \mu_1} + \dots + \delta \mu_r \frac{\partial a_i}{\partial \mu_r} \right) dx dy dz.$$

Lassen wir, was zulässig ist, alle virtuellen Verschiebungen mit Ausnahme von δm_n verschwinden, was besagt, daß wir mit dem wirklichen Belastungszustand einen virtuellen Verschiebungszustand kombinieren, der sich durch das Verschwinden sämtlicher Verschiebungskomponenten mit Ausnahme der in die Richtung der Kraft P_n fallenden Komponente auszeichnet, so reduziert sich die vorstehende Beziehung auf

$$P_n \delta m_n = \delta m_n \int \frac{\partial a_i}{\partial m_n} dx dy dz,$$

d. h. es muß

$$P_n = \frac{\partial B_i}{\partial m_n} \quad (76)$$

sein. Analog wird

$$X_r = \frac{\partial B_i}{\partial \mu_r} \quad (76a)$$

und

$$V_p = \frac{\partial B_i}{\partial n_p} \quad (76b)$$

erhalten.

Die Gleichungen von der Form (76) beinhalten den zweiten der Lehrsätze von Castigliano, der besagt: Steht ein elastischer fester Körper mit den unter **b)** angegebenen Eigenschaften unter dem Einflusse äußerer Kräfte im Gleichgewicht, und betrachtet man die Deformationsarbeit als Funktion der in die Richtungen der Oberflächenkräfte fallenden Verschiebungskomponenten (oder der in die Ebenen der Oberflächenmomente fallenden Verdrehungswinkel), so ist die Ableitung der Deformationsarbeit nach einer Verschiebungskomponente (nach dem Verdrehungswinkel) gleich der zugehörigen Kraft (dem zugehörigen Moment). Für den Fall von Auflagern, die derart beschaffen sind, daß die Auflagerkräfte keine Arbeit leisten können, besagen die auf die Auflagerreaktionen bezüglichen Gleichungen (76a) bzw. (76b) entweder, daß die Kraftkomponente in der möglichen Verschiebungsrichtung verschwindet oder die genannte Gleichung verliert ihre Bedeutung, wenn die Auflager völlig unverschieblich sind. Im letzteren Falle ist die Deformationsarbeit a_i eine Funktion von $m_1 \dots m_n$ allein.

Die Gleichung (76) könnte praktisch gebraucht werden bei Beantwortung der Frage, welche Größe ein äußeres Kraftsystem besitzen müsse bei gegebenen Kraftangriffspunkten und Kraftrichtungen, damit die Verschiebungen in diesen Richtungen bestimmte gegebene Größen erlangen. Bei äußerlich statisch unbestimmten Systemen könnte (76a) zur Bestimmung der statisch unbestimmten Größen verwendet werden, wenn die Deformationsarbeit als Funktion der Verschiebungen der Angriffspunkte der äußeren Kräfte in deren Richtungen gegeben ist¹.

27. Satz von Maxwell über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Kräfte.

Nach den im vorhergehenden Punkt gegebenen Auseinandersetzungen sind die Verschiebungen $m_1 \dots m_n$ in den Richtungen der an der Oberfläche des im Gleichgewichte gedachten Körpers angreifenden äußeren Kräfte $P_1 \dots P_n$ lineare Funktionen dieser Kräfte, unter der Bedingung, daß das Hookesche Gesetz Gültigkeit besitzt. Wir können sonach unter der Voraussetzung, daß das elastische System statisch bestimmt ist, oder, wenn das nicht zutreffen sollte, die statisch unbestimmten Größen bereits linear durch $P_1 \dots P_n$ ausgedrückt wurden, die Ansätze

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= a_{11} P_1 + a_{12} P_2 + \dots + a_{1n} P_n, \\ m_2 &= a_{21} P_1 + a_{22} P_2 + \dots + a_{2n} P_n, \\ &\vdots \\ m_n &= a_{n1} P_1 + a_{n2} P_2 + \dots + a_{nn} P_n \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

machen. Die Koeffizienten $a_{11} \dots a_{nn}$ hängen von den Kräften $P_1 \dots P_n$ nicht ab. Der Koeffizient a_{rn} bedeutet eine Verschiebung in der Richtung der Kraft P_r , wenn sämtliche Kräfte mit Ausnahme von P_n verschwinden, welche gleich 1 gesetzt wird. Der erste Zeiger bei den Koeffizienten $a_{11} \dots a_{nn}$ weist sonach auf eine Verschiebung an dem Orte des Angriffspunktes einer Kraft, der zweite Zeiger auf den Ort des Angriffspunktes jener Kraft hin, welche diese Verschiebung hervorruft. Greifen z. B. an einem eingespannten Stab (Abb. 31, S. 112) zwei Kräfte P_1, P_n an, so ist a_{1n} die Verschiebung in der Richtung der Kraft P_1 infolge der Wirkung einer Kraft $P_n = 1$, die auf den Träger allein aufgebracht ist, a_{11} ist eine Verschiebung in der Richtung der Kraft P_1 , welche durch diese, vorausgesetzt, daß sie den Wert gleich 1 besitzt, hervorgerufen wird.

Von den Beziehungen (77) gelten natürlich auch die Umkehrungen, so daß die folgenden Gleichungen bestehen müssen

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= A_{11} m_1 + A_{12} m_2 + \dots + A_{1n} m_n, \\ P_2 &= A_{21} m_1 + A_{22} m_2 + \dots + A_{2n} m_n, \\ &\vdots \\ P_n &= A_{n1} m_1 + A_{n2} m_2 + \dots + A_{nn} m_n \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Die Bedeutung der Koeffizienten $A_{11} \dots A_{nn}$, die von den Werten $a_{11} \dots a_{nn}$ in leicht ableitbarer Weise abhängig sind, ist wieder wie in obigem Falle leicht herauszufinden. A_{rn} ist eine Kraft, die im Angriffspunkte der Kraft P_r wirken muß, damit am Angriffspunkte der Kraft P_n in deren Richtung die Verschiebung $m_n = 1$ entsteht. Der erste Zeiger in den Koeffizienten $A_{11} \dots A_{nn}$ weist auf die

¹ Beispiele zu den theoretischen Erörterungen des Punktes 26 folgen auf S. 376ff.

Angriffsstelle der Kraft, der zweite Zeiger auf die Stelle hin, wo die Verschiebung gleich 1 bewirkt werden soll. In dem gegebenen Beispiel des eingespannten Stabes ist z. B. die Kraft A_{12} jene Kraft, die im Angriffspunkte 1 der Kraft P_1 wirken muß, damit im Angriffspunkte n der Kraft P_n eine Verschiebung gleich 1 entsteht.

Auf Grund der Gleichung (74) auf Seite 128, die ganz allgemein auch bei verschieblichen Auflagern gilt, wenn man unter B_i die Deformationsarbeit des gegebenen Systemes vermehrt um die Deformationsarbeit, die in den Auflagerstäben steckt (S. 130), versteht, und zufolge der Gleichungen (77) kann gesetzt werden:

$$\begin{aligned} m_n &= \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial P_n}, & \frac{\partial m_n}{\partial P_r} &= \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial P_n \partial P_r} = a_{nr}, \\ m_r &= \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial P_r}, & \frac{\partial m_r}{\partial P_n} &= \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial P_r \partial P_n} = a_{rn}. \end{aligned}$$

Es folgt daraus

$$a_{nr} = a_{rn}. \tag{79}$$

Diese Beziehung drückt den von Maxwell (L) herrührenden Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen aus: Im Falle der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes und der übrigen im Punkt 26b genannten Zustände eines elastischen Systems ruft eine Kraft 1, die im Angriffspunkte der Kraft P_n in deren Richtung wirkt, an der Stelle des Angriffspunktes der Kraft P_r in deren Richtung eine Verschiebung hervor, die gerade so groß ist, wie die Verschiebung an der Angriffsstelle der Kraft P_n in deren Richtung infolge einer Kraft $P_r = 1$. Die Anwendung dieses Satzes auf den Träger nach Abb. 31 ist selbstverständlich.

Gehen wir andererseits von der Gleichung (76) auf Seite 133 aus und benützen die Gleichungen (78), so kann man schreiben

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{\partial B_i}{\partial m_n}, & \frac{\partial P_n}{\partial m_r} &= \frac{\partial^2 B_i}{\partial m_n \partial m_r} = A_{nr}, \\ P_r &= \frac{\partial B_i}{\partial m_r}, & \frac{\partial P_r}{\partial m_n} &= \frac{\partial^2 B_i}{\partial m_r \partial m_n} = A_{rn}. \end{aligned}$$

Es folgt daraus

$$A_{nr} = A_{rn}. \tag{80}$$

Die Beziehung (80) spricht den Satz von der Gegenseitigkeit der Kräfte aus: Im Falle der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes und unter Voraussetzung des Gleichgewichtes entspricht einer Verschiebung 1 an der Stelle r in Richtung einer Kraft P_r eine an der Stelle n in der Richtung einer Kraft P_n wirkende Kraft, welche gerade so groß ist, wie die in der Richtung von P_r an der Stelle r wirkende Kraft, die eine Verschiebung gleich 1 an der Stelle n in der Richtung der Kraft P_n hervorruft.

Dieser Satz ist eigentlich nur eine andere Form des Maxwellschen Satzes der Gegenseitigkeit der Verschiebungen. Um an der Stelle n eine Verschiebung 1 hervorzurufen durch eine Kraft an der Stelle r , bedürfen wir an letzterer Stelle die Kraft $\frac{1}{a_{nr}}$ und, um an der Stelle r eine Verschiebung 1 hervorzurufen durch eine Kraft an der Stelle n brauchen wir an letzterer Stelle eine Kraft $\frac{1}{a_{rn}}$. Weil aber $a_{nr} = a_{rn}$ sein soll, muß auch die Beziehung (80) bestehen.

Besonders zu bemerken wäre, daß die Größen $a_{11} \dots a_{nn}$ bzw. $A_{11} \dots A_{nn}$ nicht gerade Verschiebungen bzw. Einzelkräfte zu sein brauchen. Ein Teil der Größen $a_{11} \dots a_{nn}$ oder alle können auch Verdrehungswinkel, ein Teil der Größen $A_{11} \dots A_{nn}$ oder alle können Momente sein. Der Satz von der Gegenseitigkeit

der Verschiebungen kann also auch z. B. so lauten, daß ein Moment gleich 1 im Punkte n eine Verschiebung in der Richtung von P_r im Punkte r bewirkt, welche gerade so groß ist, wie die Verdrehung in der Ebene des Momentes im Punkte n , die durch eine Kraft $P_r = 1$ im Punkte r hervorgerufen wird; es ist dann in den Beziehungen (77) die Größe a_{nr} mit einer Kraft P_r multipliziert dagegen die Größe a_{rn} mit einem Moment. Ebenso kann im Satz von der Gegenseitigkeit der Kräfte ein Moment an der Stelle r einer Kraft an der Stelle n entsprechen.

28. Der Satz von Betti.

Betti (L) hat den Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen noch allgemeiner dargestellt, als das von Maxwell geschehen ist. Sein Gedankengang ist der folgende.

An einem elastischen festen, beliebig gestützten Körper, der dem Hookeschen Gesetze folgt, greift ein im Gleichgewichte befindliches Kraftsystem $P_1 \dots P_n$ samt zugehörigen Reaktionen an. Wir denken uns dieses Kraftsystem in 2 Teile getrennt, das eine heiße kurz das P_ρ -System, dem ρ Kräfte angehören sollen, das andere heiße P_ν -System mit ν -Kräften. Das P_ρ -System ruft, wenn es allein wirkt, an den Angriffsstellen des P_ν -Systemes Verschiebungen (Verdrehungen) in den Richtungen der Kräfte (in den Ebenen der Momente) hervor, welche wir mit dem Symbol $\alpha_{\rho\nu}$ bezeichnen. Das P_ν -System bewirkt, wenn es allein vorhanden ist, an den Angriffsstellen des P_ρ -Systemes Verschiebungen (Verdrehungen) in den Richtungen der Kräfte (in der Ebene der Momente), welche unter dem Zeichen $\alpha_{\nu\rho}$ begriffen sein sollen. Jedes der beiden Teilsysteme bildet mit den auf dasselbe entfallenden Reaktionen ein Gleichgewichtssystem. Wir wenden nunmehr den Satz der virtuellen Arbeit bei variiertem Spannungszustand an, und zwar in der Form der Gleichung (68'') auf Seite 117. Das virtuelle Belastungssystem sei das P_ρ -System, das allein wirkend gedacht ist ($P_\nu = 0$). Wir kombinieren mit ihm wirkliche Verschiebungen, die an den Angriffsstellen des P_ρ -Systemes in den Richtungen der Kräfte (der Ebenen der Momente) infolge der Wirkung des P_ν -Systemes auftreten. Wir erhalten dann auf Grund der angegebenen Form des Arbeitsprinzips die Gleichung

$$\sum P_\rho \alpha_{\rho\nu} = \int_V (X_x^\rho e_{x,x}^\nu + \dots + Z_z^\rho e_{z,x}^\nu) dx dy dz, \quad (a)$$

wenn $X_x^\rho \dots Z_z^\rho$ die Spannungskomponenten bedeuten, die bei der Wirkung des P_ρ -Systemes auftreten und $e_{x,x}^\nu \dots e_{z,x}^\nu$ die Verzerrungskomponenten sind, die der Wirkung des P_ν -Systemes entsprechen. Andererseits können wir auch das allein wirkend gedachte P_ν -System mit den wirklichen Verschiebungen (Verdrehungen) kombinieren, die infolge der Wirkung des P_ρ -Systemes an den Angriffsstellen der Kräfte (Momente) des P_ν -Systemes auftreten. Wir erhalten dann in leicht verständlicher Zeichensprache die Gleichung

$$\sum P_\nu \alpha_{\nu\rho} = \int_V (X_x^\nu e_{x,x}^\rho + \dots + Z_z^\nu e_{z,x}^\rho) dx dy dz. \quad (b)$$

Nun ist bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes z. B.

$$E e_{x,x}^\rho = X_x^\rho - \frac{Y_y^\rho + Z_z^\rho}{m}, \quad E e_{x,x}^\nu = X_x^\nu - \frac{Y_y^\nu + Z_z^\nu}{m}$$

usw. Setzen wir die Werte für $e_{x,x}^\rho \dots e_{z,x}^\rho$ bzw. $e_{x,x}^\nu \dots e_{z,x}^\nu$ auf Grund des Hookeschen Gesetzes in die Gleichung (a) bzw. (b) ein, so erhalten wir auf den rechten Seiten dieser Gleichungen dieselben Ausdrücke. Es ist also

$$\sum P_\rho \alpha_{\rho\nu} = \sum P_\nu \alpha_{\nu\rho}. \quad (81)$$

Diese Beziehung drückt den unter Voraussetzung der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes zutreffenden Satz von Betti aus, welcher besagt: Teilt man ein an einem elastischen festen Körper (der im übrigen die im Punkte 26 b genannten Eigenschaften besitzen soll) wirkendes im Gleichgewicht befindliches Kraftsystem in zwei Teile derart, daß jedes Teilsystem für sich im Gleichgewicht steht, so ist die Summe der Produkte der Kräfte des ersten Teilsystemes in die ihnen zugehörigen Verschiebungen infolge der Wirksamkeit des zweiten Teilsystemes gerade so groß, wie die Summe der Produkte der Kräfte des zweiten Teilsystemes in die ihnen zugehörigen Verschiebungen infolge der Wirksamkeit des ersten Teilsystemes.

Setzen wir an Stelle der beiden ersten Teilsysteme je eine Kraft gleich 1, so geht die Gleichung (81) in $\alpha_{\rho r} = \alpha_{r \rho}$ über, wobei jetzt $\alpha_{\rho r}$ und $\alpha_{r \rho}$ offenbar identisch werden mit den Koeffizienten $a_{\rho r}$ und $a_{r \rho}$, die im Maxwell'schen Prinzip eingeführt wurden. Der Bettische Satz ist sonach eine Verallgemeinerung des Maxwell'schen Satzes und schließt dementsprechend auch den Satz von der Gegenseitigkeit der Kräfte ein. Denn denken wir uns wieder das System aus je zwei Einzelkräften (oder Einzelkraft und Moment oder zwei Momenten bestehend) und fordern, daß $\alpha_{\rho r} = 1$ und $\alpha_{r \rho} = 1$ wird, so erhalten wir $P_{\rho} = P_r$, was der obigen Beziehung $A_{\rho r} = A_{r \rho}$ entspricht¹.

29. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes.

a) Allgemeine Bemerkungen. Es ist Aufgabe der experimentellen Forschung, für die verschiedenen Stoffe den Zusammenhang zwischen den Spannungs- und Verzerrungskomponenten, der in gesetzmäßiger Weise bestehen muß, festzustellen. Wenn wir zunächst auch nur die verschiedenen wenigstens durchschnittlich homogenen isotropen Stoffe in Betracht ziehen, so zeigt die Erfahrung doch bereits ziemlich ziemlich verwickelte Verhältnisse. Denn es stellt sich heraus, daß auch für diese Stofftypen jener Zusammenhang nicht nur von der besonderen Art des Stoffes und dessen Zustand (Temperatur usw.) abhängig ist, sondern auch von den folgenden Umständen:

1. von der Art des Spannungszustandes und von dem Bereiche seiner Größe (S. 20);
2. von der Aufbringungsart und dem Charakter der äußeren Belastung (S. 6ff.);
3. von der Geschwindigkeit der Zu- oder Abnahme der äußeren Belastung (Belastungsgeschwindigkeit) und damit im Zusammenhange auch von der Verformungsgeschwindigkeit;
4. von der Geschichte des Stoffes vor der Untersuchung mit Bezug auf vorhergegangene mechanische Beanspruchungen oder allgemeiner Beeinflussungen physikalischer oder chemischer Natur.

b) Technisches und wahres σ - ϵ -Schaubild. Proportionalitätsgrenze. Setzen wir zunächst einmal voraus, daß eine kontinuierliche Belastung unendlich langsam (d. h. praktisch sehr langsam) auf einen geraden Stab (Würfel) aus dem betreffenden Stoff aufgebracht wird, derart, daß derselbe auf Zug (Druck) beansprucht wird. Die Temperatur sei eine mittlere Zimmertemperatur. Es ist somit die Art des Spannungszustandes nach 1., der Charakter und die Aufbringungsart der äußeren Belastung nach 2. festgelegt, die Belastungsgeschwindigkeit nach 3. ist nach dem Gesagten nahezu gleich Null. Bezüglich der Geschichte des Stoffes, aus welchem der Stab besteht, sei angenommen, daß er sich in seinem sogenannten „jungfräulichen“ Zustande befindet, d. h. vor dem Versuch keinerlei Beeinflussungen irgend welcher Art ausgesetzt war, durch

¹ Beispiele zu den Punkten 27 u. 28 folgen im zweiten Teile auf den Seiten 383 bis 395.

welche sein „natürlicher“ Zustand eine Abänderung erfahren hätte. Es bleibt sonach nur mehr der Größenbereich des Spannungszustandes und die besondere Wahl des Stoffes offen. In letzterer Hinsicht denken wir in erster Linie an die als durchschnittlich isotrop und homogen anzusehenden Metalle und Gesteinsarten, die in der Technik als Werkstoffe Bedeutung haben. Holz und Leder gehören zwar nicht zur eingangs erwähnten Stofftype, doch soll deren Verhalten gegenüber Beanspruchung auf Zug parallel zur Faserrichtung, in der sie als durchschnittlich homogen angesehen werden können, zu Vergleichszwecken mit einbezogen werden.

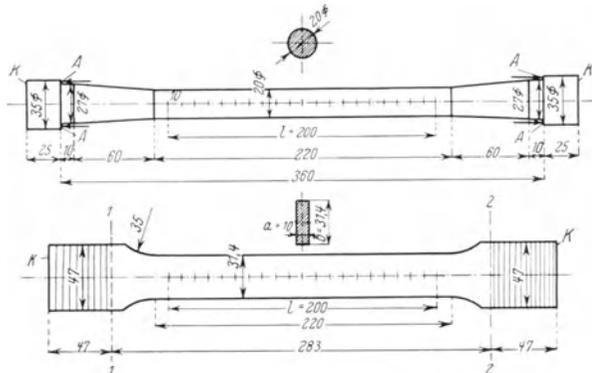


Abb. 35.

Einen guten Überblick über das Verhalten der Stoffe in verschiedenen Größenbereichen des Spannungszustandes bei Beanspruchung auf Zug (Druck) gewinnen wir durch das Spannungs-Dehnungs- (Quetschungs-) Schaubild, das wir dadurch erhalten, daß wir jede Spannung und zugehörige Dehnung (Quetschung) als Koordinaten in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem auffassen. Das erwähnte Schaubild wird entweder als technisches oder als effektives (wahres) aus Zug- (Druck-) Versuchen abgeleitet. Ersteres, kurz technisches σ - ϵ -Schaubild genannt, kann aus dem Kraftverlängerungs- (Verkürzungs-) Schaubild, kurz P - λ -Schaubild genannt, dessen Herstellung für eine Beanspruchung auf Zug zunächst besprochen wird, gewonnen werden.

Ein Stab aus dem betreffenden Material, dessen rechteckiger oder kreisförmiger Querschnitt die Größe F besitzt (siehe die Abb. 35, in welchen der „Normalrundstab“ und der „Normalflachstab“ in den Dimensionen (mm) dargestellt ist, mit welchen sie gewöhnlich im Versuche verwendet werden), auf dem eine bestimmte Länge l als Meßlänge durch Marken abgegrenzt ist, wird in

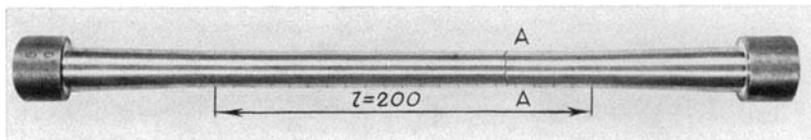


Abb. 36. Normalrundstab aus Gußeisen mit Bruchstelle A nach Beanspruchung auf Zug.

eine Festigkeitsmaschine unter Zuhilfenahme geeigneter Einspannungseinrichtungen eingespannt und durch eine über die innerhalb der Meßlänge liegenden Querschnitte F des Stabes gleichmäßig verteilte hydraulisch oder sonstwie mechanisch erzeugte Kraft auf Zug beansprucht. Stäbe von der in der Abb. 35 dargestellten Form werden insbesondere dann im Zugversuche verwendet, wenn es sich um Metalle oder um Holz handelt (die Abb. 36 und 37 zeigen einen Normalrundstab aus Gußeisen mit der Bruchstelle A bzw. einen nach Zugbeanspruchung gebrochenen Normalflachstab aus Holz), für Leder werden Versuchsstreifen von durchwegs gleicher Breite genommen, bei Erprobung von Steinen eine sogenannte Achterform nach Abb. 38 als Probeform verwendet.

Die auf den Stab aufgebraachte Kraft wird an einem Manometer oder an einer anderen hierzu geeigneten Vorrichtung abgelesen, die zugeordneten Verlängerungen $l = \lambda$ der Meßlänge werden durch Martenssche Spiegelapparate (S. 81 ff.), Anlegemaßstäbe usw. gemessen. Jeder gemessenen Kraft P und jeder zugehörigen gemessenen Verlängerung $l = \lambda$ entspricht ein Punkt in der Ebene des gewählten Koordinatensystems, sämtliche Punkte miteinander verbunden

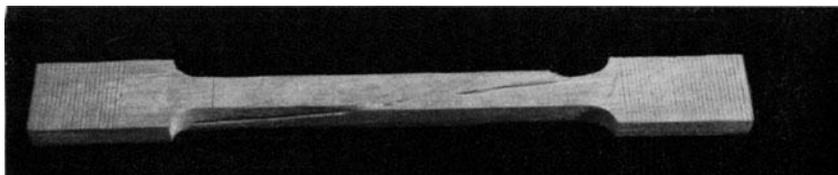


Abb. 37. Bruch eines auf Zug beanspruchten Normalflachstabes aus Eichenholz.

ergeben das P, λ -Schaubild des betreffenden Werkstoffes, das auf Millimeterpapier aufgetragen werden kann. Die neueren Festigkeitsmaschinen zeichnen dieses P, λ -Schaubild durch besondere Einrichtungen während des Versuches selbsttätig auf¹.

Das technische σ - e -Schaubild erhalten wir aus dem P, λ -Schaubild dadurch, daß wir die Kräfte P durch die vor Beanspruchung vorhandene Querschnittsfläche F und die Verlängerungen λ durch die ursprüngliche Meßlänge l dividieren und die gefundenen einander zugeordneten Werte als Koordinaten einer Kurve auffassen. Diese übliche Art der Gewinnung des σ - e -Schaubildes ist hauptsächlich aus drei Gründen ungenau, besonders dann, wenn es sich um sogenannte zähe und plastische Werkstoffe wie z. B. Flußeisen handelt. Der eine Grund ist der, daß die Querschnittsfläche im Laufe des Versuches infolge der Querkontraktion kleiner wird, also die auf die oben geschilderte Weise berechneten Spannungen σ zu klein herauskommen. Der zweite Grund liegt darin, daß die zähen und plastischen Werkstoffe unmittelbar vor dem Bruch, d. h. wenn die äußere Kraft P einen bestimmten Wert durchschreitet, der den Höchstwert vorstellt, den der Stab überhaupt erträgt, die Eigentümlichkeit besitzen, sich nicht mehr über die ganze Meßlänge gleichmäßig, sondern in einem bestimmten in der Regel zu beiden Seiten der Bruchstelle symmetrisch sich erstreckenden Bereich vorzugsweise zu dehnen, derart, daß die bezogenen Dehnungen an der späteren

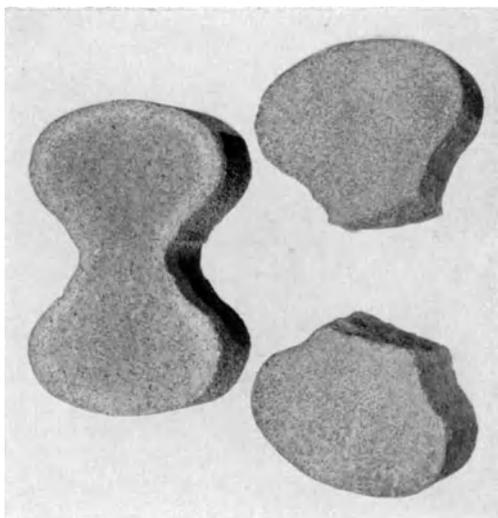


Abb. 38. Versuchsform für Zementmörtel vor und nach dem Bruch bei Zugbeanspruchung.

¹ Zur Einführung in die zur Prüfung der verschiedenen Werkstoffe in techn. mech. Richtung gebräuchlichen Einrichtungen kann das Werk von O. Wawrzyniok, Handbuch des Materialprüfungswesens, Berlin: Julius Springer 1908, dienen.

Bruchstelle am größten sind und von dieser Stelle aus symmetrisch nach beiden Seiten abfallen. Der mehr oder weniger genau abzugrenzende Bereich, in dem dieses stattfindet, wird der der lokalen Dehnung genannt. Der dritte Grund betrifft den unmittelbar vor dem Bruch nicht mehr linearen Spannungszustand im Bereich der lokalen Dehnung, worauf wir weiter unten zurückkommen werden.

In Abb. 39 ist l_e die Länge eines Zugstabes aus Flußeisen mit einer Meßlänge von ursprünglich 20 cm kurz vor Eintritt des Bruches, der sich nahezu in der

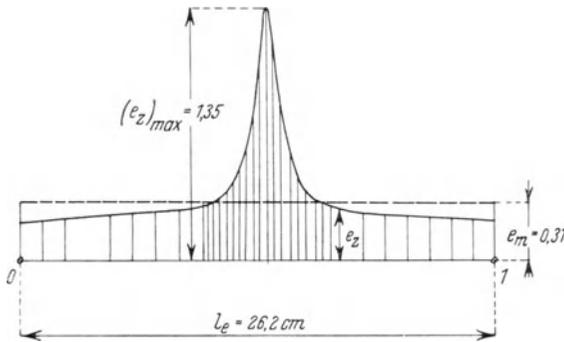


Abb. 39.

Mitte zwischen den Marken 0, 1 ergab (Abb. 35). Bei Annahme eines überall linearen Spannungszustandes (siehe unten) verteilen sich die bezogenen Dehnungen e_z , welche der Stab in verschiedenen Querschnitten erfahren hat, nach der gezeichneten zur Mitte symmetrischen Kurve, derart, daß sich in der Mitte ein Extremwert $(e_z)_{\max}$ ergab, von dem sie gegen die Endmarken 0, 1 abfielen. Die wirkliche Verlängerung des

Stabes ist durch $\int_0^l e_z dx = \lambda$ bestimmt und somit die Länge l_e , welche bei Versuchen gemessen wird, durch $l_e = l + \int_0^l e_z dx$ ausdrückbar. Die auf die übliche Weise berechnete und im technischen σ - e -Schaubild aufgetragene Dehnung ist $\frac{l_e - l}{l} = \int_0^l \frac{e_z}{l} dx = e_m$, die als mittlere Dehnung e_m bezeichnet werden kann.

Dieselbe ist bedeutend kleiner als die maximale Dehnung $(e_z)_{\max}$, welche das Flußeisen wirklich erträgt ohne zu brechen. Der Bereich der lokalen Dehnung ist in der Abb. 39 etwa durch den dicht schraffierten Teil zum Ausdruck gebracht.

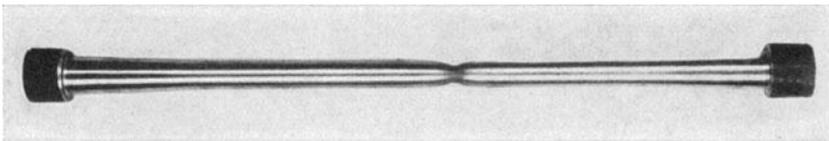


Abb. 40. Flußeiserner Stab mit Einschnürung um die Bruchstelle bei Beanspruchung auf Zug.

Die Erscheinung der lokalen Dehnung hängt damit zusammen, daß zähe und plastische Stoffe, wie z. B. Flußeisen, bei Durchschreiten der oben genannten Höchstlast des Stabes an der Stelle, wo später der Bruch eintritt, und in deren Umgebung sich einschnüren, d. h. dort eine verhältnismäßig sehr bedeutende Querschnittsverminderung zeigen (siehe z. B. den flußeisernen Stab in Abb. 40, der bei einer Belastung von 10520 kg entsprechend einer Spannung bezogen auf den ursprünglichen Querschnitt von 3350 kg/cm² bei Beanspruchung auf Zug mit den in Abb. 41 dargestellten Bruchflächen zerstört wurde). Dementsprechend ist auch der Spannungszustand unmittelbar vor dem Bruch und bei demselben im Bereich der lokalen Dehnung kein streng linearer mehr, sondern ein mehrdimensionaler; wenn man nichtsdestoweniger auch dann noch

von einer Zugspannung σ spricht, so meint man hierunter die durch das Manometer angezeigte Kraft dividiert entweder durch die ursprüngliche Querschnittsfläche oder durch die Querschnittsfläche an der Einschnürungsstelle.

Wird auf die Querschnittsverminderung und lokale Dehnung bei Bildung des σ - e -Schaubildes Rücksicht genommen, d. h. tragen wir parallel zur σ - bzw. e -Achse des Koordinatensystems die für die Beurteilung der Güte des Stoffes wichtigen, im ganzen Bereich der Meßlänge maximalen wahren Spannungen (Kraft durch die wahre Querschnittsfläche dividiert) bzw. maximalen wahren Dehnungen auf, so erhalten wir nach einer Bezeichnungsweise von P. Ludwik (L), der mit Nachdruck auf diese besonderen Verhältnisse hinwies, das effektive oder wahre σ - e -Schaubild. Dasselbe ist zwar auch kein wahres im strengen Sinne des Wortes insofern, als hierzu ein streng linearer Spannungszustand vorausgesetzt wurde, doch fällt dieser Umstand verhältnismäßig wenig ins Gewicht. Zur Beurteilung und Herstellung des wahren σ - e -Schaubildes sei noch folgendes hinzugefügt.

Bevor die äußere Kraft jenen Höchstwert durchschreitet, sind Spannungen und Dehnungen über die ganze Meßlänge als konstant anzusehen, die wahre Spannung und die wahre Dehnung wird dann wegen der verhältnismäßig sehr kleinen Querschnittsänderungen von der in der üblichen Weise berechneten Spannung und Dehnung praktisch nicht wesentlich abweichen. Nachdem die Kraft ihren Höchstwert erreicht bzw. schon etwas vorher, erhalten wir die wahre maximale Spannung, welche der Stab der angreifenden Kraft entsprechend wenigstens annäherungsweise empfängt, indem wir die angreifende Kraft durch die Querschnittsfläche an der schmalsten Einschnürungsstelle dividieren. Bei Durchschreitung der Höchstlast und nach Durchschreitung derselben bis zum Bruch wird die wahre maximale Dehnung, die jetzt eine örtliche ist, an der Stelle gemessen, wo die Querschnittsverminderung am größten ist, denn dort tritt das der jeweiligen Kraft entsprechende $(e_z)_{\max}$ auf. Das kann dadurch geschehen, daß wir den Stab, bevor wir ihn überhaupt auf Zug beanspruchen, über seine ganze Meßlänge l mit einer Halbmillimeterteilung versehen und bei der folgenden Beanspruchung des Stabes die Verlängerung des Halbmillimeterteles messen, der sich an der schmalsten Einschnürungsstelle befindet. Dividiert man diese Verlängerung durch die ursprüngliche Länge von $\frac{1}{2}$ mm, so erhalten wir annäherungsweise die Verlängerung pro Längeneinheit. Der Vorgang ist naturgemäß um so genauer, je kleiner der Teilwert der Teilung ist.

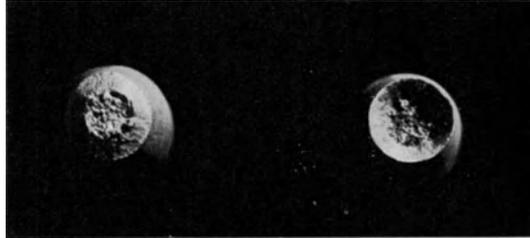


Abb. 41. Draufsicht auf die Bruchflächen eines Normalrundstabes aus Flußeisen nach Zugbeanspruchung.

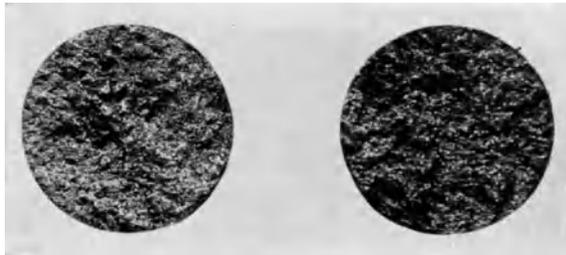


Abb. 42. Draufsicht auf die Bruchflächen eines Normalrundstabes aus Gußeisen nach Beanspruchung auf Zug.

Spröde Stoffe (Gußeisen, Stein) die auf Zug beansprucht werden, zeigen die besprochenen Einschnürungen und lokalen Dehnungen überhaupt nicht oder in kaum in Betracht kommender Weise, für sie kann das technische σ - e -Schaubild als der Wirklichkeit beinahe völlig entsprechend angesehen werden (siehe Abb. 36, die einen Stab aus Gußeisen, der auf Zug beansprucht war, zeigt, und bei einer Belastung von 4220 kg entsprechend einer Spannung von 1350 kg/cm^2 mit den in Abb. 42 dargestellten Bruchflächen gebrochen ist).

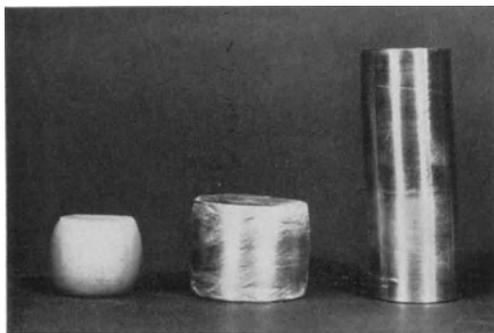


Abb. 43a.

Abb. 43b.

Abb. 43c.

Tonnenförmige Ausbauchungen bei plastischen Stoffen nach Druckbeanspruchung und Knickerscheinung bei einem längeren Zylinder aus Flußeisen.

In ähnlicher Weise wie bei Beanspruchung auf Zug erhebt man die P - λ - und σ - e -Schaubilder für die Beanspruchung der verschiedenen Werkstoffe auf Druck, indem man sich Würfel oder Zylinder aus dem betreffenden Material herstellt und dieselben in einer hierzu geeigneten Festigkeitsmaschine (Presse) zwischen Preßplatten einem z. B. hydraulisch erzeugten Druck, der auf zwei gegenüberliegende Flächen des Würfels oder Zylinders wirkt, aussetzt. Parallel zur Druckrichtung ist wieder eine Meßlänge abgegrenzt, deren Änderung im Laufe des Versuches mit Spiegelapparaten usw. gemessen wird.

Die Kraftmessung erfolgt wie früher mit einem Manometer oder einer sonstigen hierzu geeigneten Einrichtung. Das P - λ -Schaubild kann von der Maschine selbsttätig aufgezeichnet werden oder wird auf Grund zugeordneter Messungen der Kraft und der Verkürzung auf Millimeterpapier aufgetragen. An Stelle der Querschnittsverminderung bei Beanspruchung von zähen und plastischen Stoffen auf Zug treten jetzt Querschnittsvergrößerungen auf, die bei höheren Druckkräften schon mit freiem Auge erkennbar werden und sich nach außen hin durch eine tonnenförmige Gestalt des Probekörpers kundtun. (Die Abb. 43a und 43b

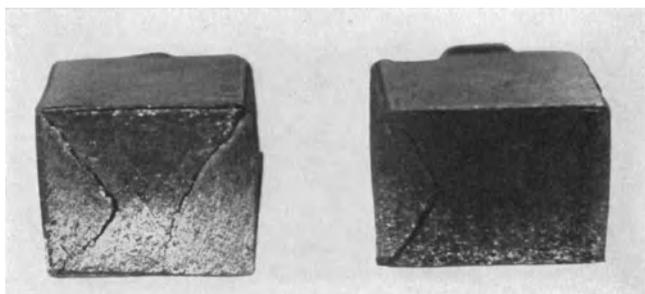


Abb. 44. Gebrochene gußeiserne Würfel nach Beanspruchung auf Druck.

zeigen diese Erscheinung an einer plastischen galaktitischen Masse und an Flußeisen.) Das weist darauf hin, daß der Spannungszustand kein homogener linearer ist. In der Tat bewirkt die Reibung an den Druckflächen, daß in der Nähe derselben der reine Druckspannungszustand getrübt ist (S. 234). Daraus erklärt sich, daß man trachtet, die Meßlänge in größeren Entfernungen von den Preß-

platten endigen zu lassen, d. i. den Meßbereich gegen die Mitte der Probe hin zu verlegen, was wieder, um nicht zu kleine Meßlängen zu erhalten, die Wahl möglichst großer Dimensionen des Probekörpers zur Folge hat. (Über die in Abb. 43c sichtbaren Knickeerscheinungen zu langer Probekörper siehe die S.193ff. und 235). Wenn das Spannungsschaubild für Druckbeanspruchung in der üblichen Weise, wie es bei Beanspruchung auf Zug erörtert wurde, hergestellt wird (Bezugnahme auf den ursprünglichen Querschnitt und die ursprüngliche Meßlänge), so ergibt sich bei der geschilderten Sachlage für zähe und plastische Werkstoffe eine wesentliche Differenz gegenüber dem effektiven σ - ϵ -Schaubild. Im technischen σ - ϵ -Schaubild für die Beanspruchung auf Druck sind die Spannungen zu groß, die Quetschungen in der Druckrichtung infolge der auch

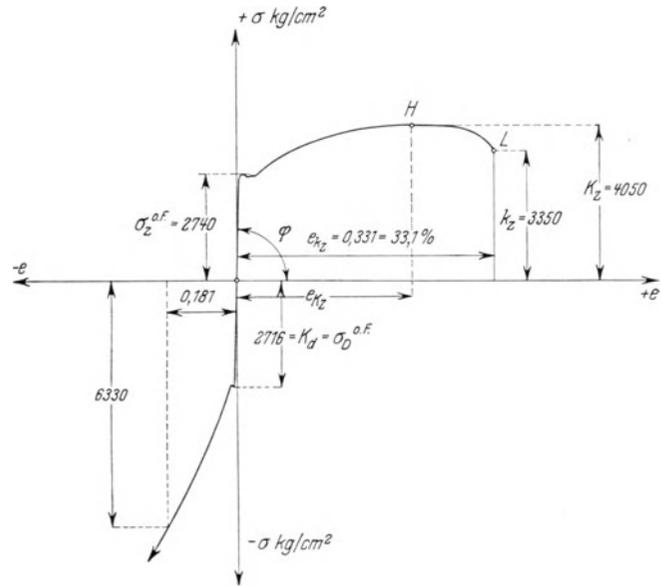


Abb. 45. Techn. σ - ϵ -Schaubild für Flußeisen bei Beanspruchung auf Zug und auf Druck.

hier eintretenden lokalen Quetschungen (verbunden mit lokalen Querschnittserweiterungen, die allerdings nur bei längeren Stäben in Erscheinung treten, wenn es hierbei gelingt, die Druckkraft zentrisch auf die Endquerschnittsflächen zu über-

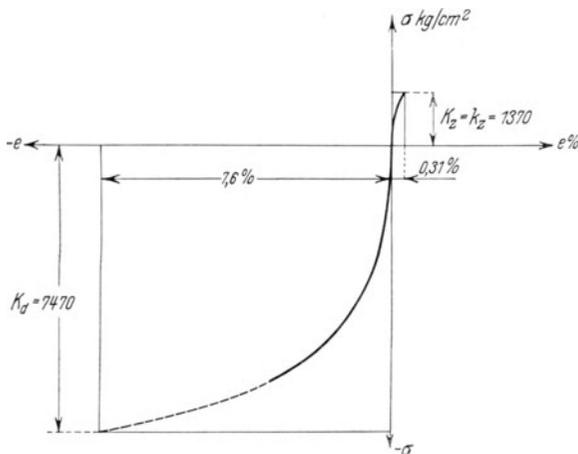


Abb. 46. Techn. σ - ϵ -Schaubild für Gußeisen bei Beanspruchung auf Zug und Druck.

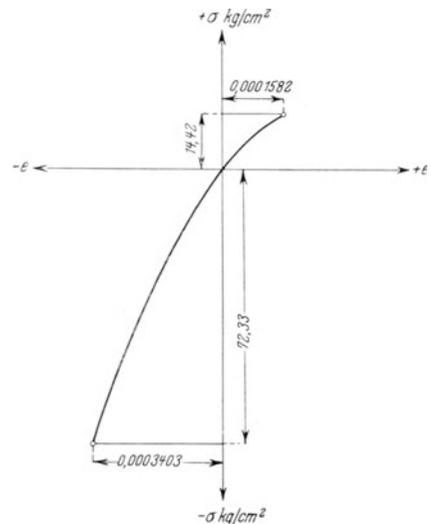


Abb. 47. Techn. σ - ϵ -Schaubild für Marmor bei Beanspruchung auf Zug und Druck nach C. Bach.

tragen) zu klein eingetragen. Besonders sei noch hervorgehoben, daß zähe und plastische Stoffe, wie z. B. gutes Flußeisen, Blei usw., bei Beanspruchung

auf Druck auch bei einer noch so großen äußeren Belastung nicht brechen, sondern seitlich ausweichen (S. 2).

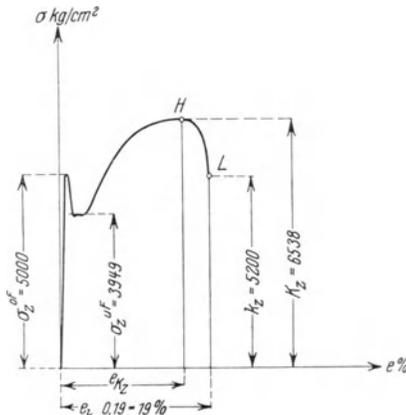


Abb. 48. Techn. σ - e -Schaubild für Flußstahl bei Beanspruchung auf Zug nach C. Bach.

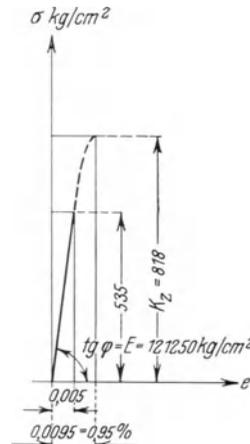


Abb. 49. Techn. σ - e -Schaubild für Eichenholz bei Beanspruchung auf Zug parallel zur Faser.

Für spröde auf Druck beanspruchte Körper kann man auf das effektive σ - e -Schaubild, wenn es sich nicht um besondere Zwecke handelt, in der Regel verzichten, denn für derartige Stoffe sind lokale Quetschungen und ins Gewicht fallende Querschnittsvergrößerungen kaum vorhanden (siehe Abb. 44, die einen gußeisernen Würfel mit den für Gußeisen charakteristischen zur Druckrichtung geneigten Bruchklüften zeigt).

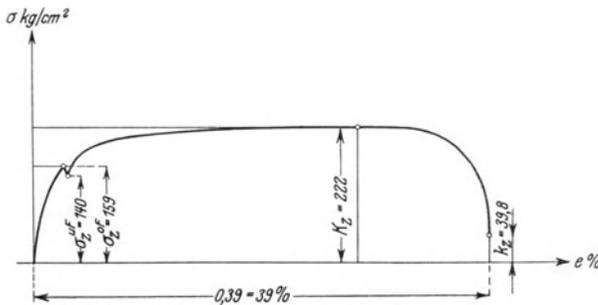


Abb. 50. Techn. σ - e -Schaubild für Weichblei bei Beanspruchung auf Zug.



Abb. 50 a. Durch Zugbeanspruchung gebrochener Stab aus weichem Blei mit Fließfiguren. (Ansicht der Bruchflächen.)

Stoffes auf Zug bzw. Druck; daß zweitens das Hookesche Gesetz, wenn es überhaupt erfüllt ist, nur in einem bestimmten Spannungsbereiche zutrifft (Flußeisen,

verziehen, denn für derartige Stoffe sind lokale Quetschungen und ins Gewicht fallende Querschnittsvergrößerungen kaum vorhanden (siehe Abb. 44, die einen gußeisernen Würfel mit den für Gußeisen charakteristischen zur Druckrichtung geneigten Bruchklüften zeigt).

In den Abb. 45 bis 53 sind technische σ - e -Schaubilder für die Beanspruchung auf Zug (Druck) mit Berücksichtigung des Zeichens der Spannungen und Dehnungen für verschiedene Stoffe und fallweise zugehörige Brucherscheinungen dargestellt. Wir sehen aus den Schaubildern (Abb. 45, 46, 47) für Flußeisen, Gußeisen und Stein, daß erstens der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen nicht der gleiche ist bei Beanspruchung eines und desselben

Stahl, Holz parallel zur Faser, Abb. 45, 48, 49), d. h. bis zu einer bestimmten durch eine Grenzspannung oder Grenzdehnung charakterisierten Grenze. Es ist das daraus zu erkennen, daß für die genannten Stoffe die Kurve nur in ihrem ersten Teile eine Gerade ist, dann aber in eine Kurve übergeht. Drittens geht

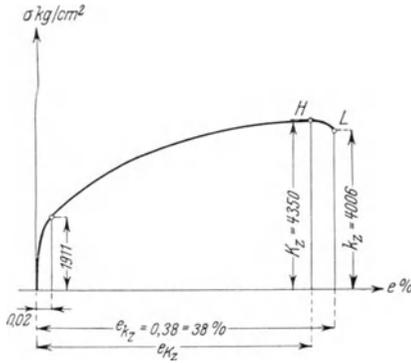


Abb. 51.

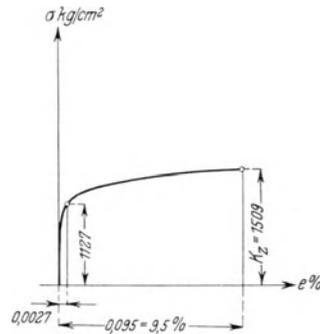


Abb. 52.

Techn. σ - e -Schaubild für Messing und Bronze bei Beanspruchung auf Zug.

aus den in den Abb. 46, 47, 50, 51, 52, 53 dargestellten Schaubildern hervor, daß für Gußeisen, Marmor, Blei, Messing, Bronze, Leder das Hookesche Gesetz überhaupt keine Gültigkeit besitzt, da für diese Stoffe das σ - e -Schaubild in keinem Bereiche der Spannungen eine volle Gerade ist. Schließlich zeigen die beiden Schaubilder (Abb. 54) für plastisches Flußeisen nach Ludwik (L), daß das technische σ - e -Schaubild für Beanspruchung auf Zug von dem effektiven Schaubild ganz erheblich abweicht.

Aus den technischen σ - e -Schaubildern für Flußeisen, Stahl, Messing bemerken wir ferner, daß die Kurve nach Erreichen je eines Maximums in H wieder absinkt und der Bruch bei kleineren Spannungen erfolgen soll, als diesen maximalen Werten entspricht; in Wirklichkeit ist das nicht zutreffend, denn die Spannung beim Bruch wurde aus dem Werte der für ihn angezeigten Kraft dividiert durch die ursprüngliche Querschnittsfläche erhalten. Um die wahre (effektive) Spannung beim Bruch wenigstens angenähert zu erhalten, hätten wir durch den wirklichen Bruchquerschnitt dividieren müssen, der bei den genannten Stoffen infolge der Einschnürung bedeutend kleiner ist als der ursprüngliche Querschnitt. Wenn die technische σ - e -Kurve sich nach Erreichung eines Maximums senkt, so ist das ein Zeichen dafür, daß sie einem stark einschnürenden plastischen Materiale entspricht.

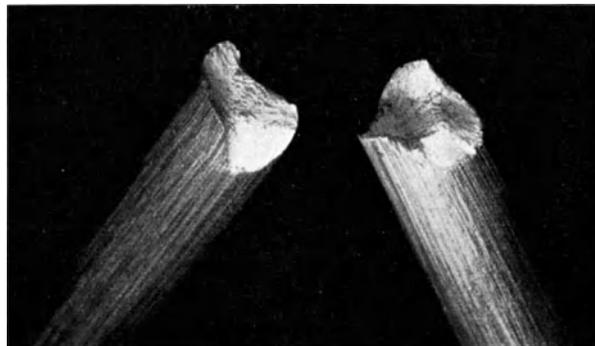


Abb. 51a. Bruch eines Normalrundstabes aus Messing nach Zugbeanspruchung (Ansicht der Bruchflächen).

Die Gültigkeit des einfachen Hookeschen Gesetzes in einem bestimmten Spannungsbereiche für Holz, das in der Richtung der Fasern auf Zug beansprucht

wird, wie sie durch Abb. 49 zum Ausdruck gebracht ist, zeigt, daß jenes Gesetz auch für anisotrope und inhomogene Körperstoffe in bestimmten Richtungen, für welche sie als durchschnittlich homogen angesehen werden können, erfüllt sein kann.

Die Spannung, bis zu welcher das einfache Hookesche Gesetz, also das Gesetz der Proportionalität der Spannungen und zugehörigen Dehnungen für einen

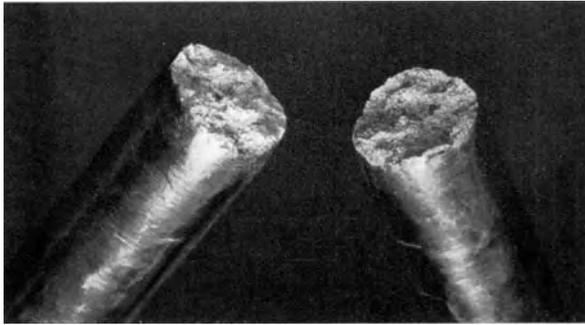


Abb. 52a. Durch Zugbeanspruchung gebrochener Normalrundstab aus Bronze mit Fließfiguren (Ansicht der Bruchflächen).

Werkstoff, wenn auch nur annähernd, erfüllt ist, heißt

Proportionalitätsgrenze. Sie kann für die Beanspruchung eines Stoffes auf Zug eine andere sein als für die Beanspruchung desselben Stoffes auf Druck. Ihre Höhe hängt von der Meßgenauigkeit ab. So hat beispielsweise die Commission des methodes d'essai, Paris, 1891 festgelegt, daß die

Proportionalitätsgrenze jene Spannung ist, für welche die Abweichung vom Hookeschen Gesetze bei 20 cm Meßlänge $\frac{1}{1000}$ mm zu überschreiten beginnt (siehe hierzu auch die Punkte 31 und 32).

Die Proportionalitätsgrenze liegt für die verschiedenen Flußeisensorten, Kohlenstoffstahl inbegriffen, bei gewöhnlicher Temperatur und Beanspruchung auf Zug zwischen 1800 kg/cm^2 und 8000 kg/cm^2 . Flußeisensorten mit einem verhältnismäßig kleinen Elastizitätsmodulus ($E = 2000000 \text{ kg/cm}^2$) haben eine niedrigere Proportionalitätsgrenze als jene mit einem

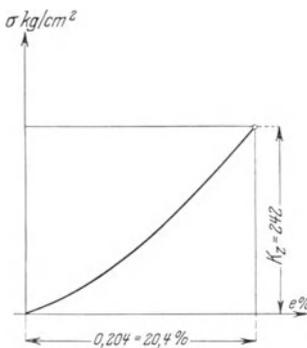


Abb. 53. Techn. σ - e -Schaubild von Leder bei Beanspruchung (nach C. Bach).

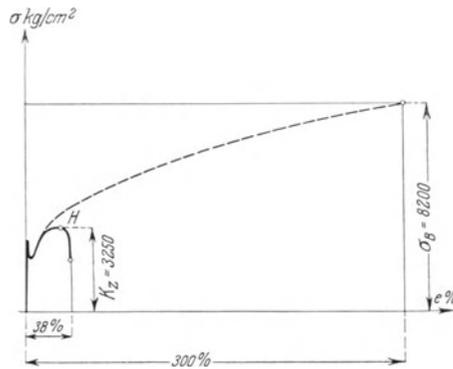


Abb. 54. Techn. u. wahres σ - e -Schaubild von Flußeisen (nach P. Ludwik).

verhältnismäßig großen Elastizitätsmodulus ($E = 2200000 \text{ kg/cm}^2$), wie ihn gehärteter Stahl besitzt. Bei Beanspruchung der verschiedenen Holzgattungen auf Zug parallel zur Holzfaser liegt die Proportionalitätsgrenze etwa zwischen 200 kg/cm^2 und 600 kg/cm^2 .

Die Höhe der Proportionalitätsgrenze ist bei den verschiedenen Metallen, abgesehen von ihrer Abhängigkeit von der Temperatur, noch stark vom technologischen Herstellungsprozeß beeinflusst, und, wenn dieser gegeben ist, noch von Erscheinungen abhängig, die im Punkte 37 unter Nachwirkungsercheinungen besprochen werden.

Für Steine, Leder, Gußeisen, weiches Kupfer, Messing, Bronze existiert keine Proportionalitätsgrenze, da sie das einfache Hookesche Gesetz nicht erfüllen. In der Praxis

wird aber auch für diese Stoffe das genannte Gesetz den Berechnungen zugrunde gelegt, was damit begründet werden kann, daß die für technische Konstruktionen in Betracht kommenden zulässigen Spannungen so tief liegen, daß bei der sanften Krümmung, welche die σ - e -Kurven der genannten Stoffe in den in Betracht kommenden Bereichen besitzen, die Kurve durch eine Gerade ersetzt werden kann.

Es sei hier daran erinnert, daß das einfache Hookesche Gesetz verlangt, daß sich ein vorgelegter Stoff auf Zug und Druck gleich verhält. Wie aber aus den dargestellten σ - e -Schaubildern hervorgeht, ist das im allgemeinen nicht zutreffend. Am ehesten könnte man es noch von Flußeisen und Stahl bis zur Erreichung der Proportionalitätsgrenze behaupten.

Existiert für einen Stoff eine Proportionalitätsgrenze, so kann aus dem σ - e -Schaubild desselben der Wert des Elastizitätsmodulus, der bei Beanspruchung auf Zug und Druck verschieden sein kann, unmittelbar als trigonometrische Tangente eines Winkels φ (Abb. 45) abgelesen werden. Je steiler die Gerade, welche den Zusammenhang der Spannung σ und Dehnung e im Bereiche der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes darstellt, ansteigt, um so weniger Dehnung zeigt ein Stoff bei vorgegebener Spannung.

In der technischen Elastizitäts- und Festigkeitslehre spricht man vielfach von „weicheren“ und „härteren“ Materialien, je nachdem die Größe E kleiner oder größer ist. Diese Bezeichnungsweise ist aber eher verwirrend als aufklärend.

30. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung).

Das Potenzgesetz. Veränderlicher Elastizitätsmodulus. Für Stoffe, welche nicht dem einfachen Hookeschen Gesetze gehorchen (Gußeisen, überhaupt spröde Metalle, Steine, Mörtel, Leder), wurde für lineare Spannungszustände teilweise mit Erfolg versucht, bis zum Bruch oder wenigstens für die in der Praxis in Betracht kommenden Spannungsbereiche gültige andere Elastizitätsgesetze einzuführen, von denen das von Hodgkinson (1824), Bach (1888) und Schüle (1902) eine weitere Verbreitung als Potenzgesetz gewonnen hat; es führt zwei für den betreffenden Stoff in einem bestimmten Spannungsbereiche gelten sollende positive Stoffkonstante a und n ein, und hat die Form

$$e = a \sigma^n \quad (82)$$

mit e als Dehnung und σ als zugehörige Spannung. Nach Versuchen von Bach (L) ergab sich für graues zähes Gußeisen, das vor dem Versuch zur Feststellung des Elastizitätsgesetzes nicht beansprucht war, bei Beanspruchung auf Druck bis $\sigma = 596 \text{ kg/cm}^2$, $a = \frac{1}{1320000}$, $n = 1,0685$, bei Beanspruchung auf Zug bis $\sigma = 409 \text{ kg/cm}^2$, $a = \frac{1}{1338000}$, $n = 1,083$, für einen Riemen aus Leder, der vor dem Versuche bereits vielfach belastet war, bei Beanspruchung auf Zug bis $\sigma = 27,2 \text{ kg/cm}^2$, $a = \frac{1}{415}$, $n = 0,7$. Ferner fand Bach (L) bei Versuchen mit Granit bei Beanspruchung auf Zug bis $\sigma = 21 \text{ kg/cm}^2$, $a = \frac{1}{235000}$, $n = 1,374$, bei Beanspruchung auf Druck bis $\sigma = 50 \text{ kg/cm}^2$, $a = \frac{1}{250000}$, $n = 1,132$.

Man kann die Definition des Elastizitätsmodulus als trigonometrische Tangente eines Winkels für einen Stoff, der dem einfachen Hookeschen Gesetze nicht folgt, auf die Weise durchführen, daß man sagt: Es sei der Elastizitätsmodulus $E = \frac{d\sigma}{de} = f(\sigma)$ als eine Funktion der Spannung σ durch die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels, welchen die geometrische Tangente an die Spannungs- (Dehnungs-) Kurve mit der e -Achse einschließt, bestimmt. Für einen bestimmten Spannungsbereich kann auch E im Mittel durch $E_m = \frac{\Delta\sigma}{\Delta e}$, d. h. als Verhältnis der dem Spannungsbereich entsprechenden Sehnenlänge im σ - e -Schaubild zur zugehörigen Dehnungsänderung definiert werden. Es

entspricht diese letztere Definition dem näherungsweise Ersatz eines Kurvenstückes durch eine Gerade, worüber schon oben einiges bemerkt wurde. Offenbar ist dann $E = \lim_{\sigma \rightarrow 0} E_m$.

Auf Grund dieser Definitionen ergäbe sich bei Voraussetzung der Gültigkeit des Potenzgesetzes allgemein $E = \frac{1}{a n \sigma^{n-1}}$ und $E_m = \frac{\sigma}{e} = \frac{1}{a \sigma^{n-1}}$, wenn für die Definition von E_m als Spannungsbereich der zwischen Null und σ gelegene gewählt wird. Im speziellen wäre für das oben angeführte graue zähe Gußeisen bei Beanspruchung auf Zug $\frac{E_m}{E} = n = 1,083$, wenn dieses Verhältnis für die obere Grenze des Spannungsbereiches, für den E_m definiert wurde, aufgestellt wird.

Aus dem Werte von E bei Geltung des Potenzgesetzes ist zu schließen, daß für $\sigma = 0$ und $0 < n \geq 1$ entweder $E = \infty$ oder Null sein müsse. Keiner von diesen Werten kommt für die natürlichen Stoffe in Frage. Es ist daraus der Schluß zu ziehen, daß das Potenzgesetz für $\sigma = 0$ seine Bedeutung verliert.

31. Gültigkeitsbereich des Hooke'schen Gesetzes (Fortsetzung).

Linearitätsgrenze. Reduzierte Spannungen. Es sei nunmehr vorausgesetzt, daß in einem Punkte oder in einem in Betracht gezogenen Bereiche eines festen elastischen Körpers, der unter den Einfluß eines äußeren Kraftsystems gegebener Art gestellt ist, welches beim Anwachsen jeweilig im Gleichgewicht steht, ein vorgegebener dreidimensionaler Spannungszustand vorhanden sei. Bezüglich der Natur des Stoffes, dessen Temperaturzustand und die auf Seite 137 unter 3., 4. genannten Umstände seien dieselben Voraussetzungen gemacht wie dort für den auf Zug bzw. auf Druck beanspruchten Stab. Außerdem wollen wir voraussetzen, daß aus den Erfahrungen, die man mit dem vorgelegten Stoff gemacht hat, der Schluß gezogen werden kann, daß das erweiterte Hooke'sche Gesetz für nicht zu große Spannungszustände gültig ist. Ein Beispiel hierfür wäre Kohlenstoffstahl.

Für das anisotrope Holz ist natürlich gar nicht zu erwarten, daß das allgemeine Hooke'sche Gesetz zutrifft. Nichtsdestoweniger wenden die Ingenieure in Ermanglung von Besserem dieses Gesetz auch auf Holz, allerdings unter Einführung gewisser im zweiten Teile dieses Buches zu erörternder, aus der Erfahrung erschlossener Korrektionsziffern an, um wenigstens einen Anhaltspunkt oder ein Leitmotiv für ihre Berechnungen zu besitzen.

Zur Feststellung, ob ein Stoff dem erweiterten Hooke'schen Gesetze überhaupt folgt, begnügt man sich derzeit vielfach damit, nachzuweisen, daß die auf Grund der Annahme dieses Gesetzes durchgeführten Berechnungen dann, wenn die Größe des Spannungszustandes nicht zu bedeutend wird, zu Folgerungen bezüglich der Verformungen führen, die mit der Erfahrung in keinem zu großen Gegensatz stehen.

Aus dem, was über den linearen Spannungszustand von Stoffen, die dem einfachen Hooke'schen Gesetze folgen, bemerkt wurde, ist zu erwarten, daß das erweiterte Hooke'sche Gesetz, wenn es überhaupt für den betreffenden Stoff zutreffend ist, bei gegebener Art des Spannungszustandes nicht für eine beliebige Größe desselben bis zum Bruche gültig ist, sondern die Gültigkeit an eine Grenze gebunden sein wird, die man als Linearitätsgrenze bezeichnen könnte. War aber die Festlegung der analogen Proportionalitätsgrenze beim linearen Spannungszustand durch eine physikalische Größe (Spannung oder zu ihr proportionale Dehnung) einfach, so ist das bei der unendlichen Mannigfaltigkeit der dreidimensionalen und zweidimensionalen Spannungszustände nicht der Fall.

Unter den diesbezüglichen Möglichkeiten — exakte Erfahrungen liegen nicht vor — wollen wir hier nur jene Annahme berühren, welche behauptet, daß für die Erreichung der Linearitätsgrenze für jede Art des Spannungszustandes die Größe des Verzerrungszustandes in dem Sinne maßgebend ist, daß dann, wenn die dem Zahlenwerte nach größte Hauptdehnung einen bestimmten für jeden Stoff aus der Erfahrung folgenden Wert erlangt hat, die Linearitätsgrenze erreicht ist. Es ist klar, daß bei einer solchen Annahme die Linearitätsgrenze durch Angabe des Meßwertes einer physikalischen Größe definiert ist. In der Technik ersetzt man aus praktischen Gründen die Größe des zahlenmäßig sehr kleinen Verzerrungszustandes durch die zu ihm proportionale Größe des Zustandes der sogenannten reduzierten Spannungen, deren begriffliche Festlegung sich aus dem Folgenden ergibt.

Der dreidimensionale Spannungszustand besitze die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und Hauptdehnungen e_1, e_2, e_3 . Wir legen uns die Frage vor, welche lineare Spannung S_1 in der Richtung der Spannung σ_1 herrschen müßte, damit durch sie eine Dehnung hervorgerufen wird gleich der Hauptdehnung e_1 . Die Antwort wird durch die erste der Gleichungen (42a) auf Seite 76 gegeben: Es müßte offenbar die lineare Spannung S_1 durch

$$S_1 = \sigma_1 - \frac{1}{m}(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (83)$$

bestimmt werden. S_1 heißt die auf den linearen Spannungszustand reduzierte Spannung in der Richtung der Hauptspannung σ_1 . Ähnlich ergeben sich die reduzierten Spannungen in den Richtungen der Hauptspannungen σ_2 und σ_3 durch

$$S_2 = \sigma_2 - \frac{1}{m}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad \text{und} \quad S_3 = \sigma_3 - \frac{1}{m}(\sigma_1 + \sigma_2). \quad (83)$$

Natürlich sind S_1, S_2, S_3 nicht etwa wirkliche, sondern ideelle Spannungen, unter welchem Namen sie auch häufig in der Literatur zu finden sind. Das Zeichen der reduzierten Spannungen richtet sich nach dem Zeichen der betreffenden Hauptdehnungen.

Wenn demnach die Größe des Verzerrungszustandes in dem angegebenen Sinne tatsächlich die Grenze für den Gültigkeitsbereich des erweiterten Hookeschen Gesetzes festlegen könnte, so könnten wir sagen, die Grenze des genannten Gültigkeitsbereiches sei für jede Art des Spannungszustandes durch eine zahlenmäßig größte reduzierte Spannung festgelegt, welche für jeden Werkstoff, der das erweiterte Hookesche Gesetz überhaupt befolgt, charakteristisch wäre.

Die geschilderte Annahme kann nur dann richtig sein, wenn die Proportionalitätsgrenzen bei Beanspruchung auf Zug und auf Druck gleich hoch liegen, weil sonst diese beiden Fälle nicht inbegriffen wären. Im Falle der Ungleichheit der genannten Proportionalitätsgrenzen müßte die Annahme abgeändert werden, worauf aber erst im Punkte 33, und zwar mit Bezug auf die Festlegung der sogenannten Elastizitätsgrenze eingegangen wird, für welche ähnliche Überlegungen gelten wie für die Linearitätsgrenze und auch geeignete Beobachtungsreihen zur Prüfung der Richtigkeit der Annahme vorliegen.

32. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung).

Wechselnde Aufbringungsart. Federnde und bleibende Formänderung. Wahrer Elastizitätsmodulus. Elastizitätsgrenze für linearen Spannungszustand. Wir halten im folgenden die mit Bezug auf Stofftype, Temperatur, Belastungsgeschwindigkeit, Geschichte des Materials bereits im Punkte 29 gemachten Annahmen aufrecht. Die Aufbringungsart der Belastung soll aber nunmehr eine wechselnde

in dem Sinne sein, daß die äußere Belastung vorerst einmal mit einer nahezu verschwindenden Belastungsgeschwindigkeit aufgebracht wird und hierauf gleichfalls mit verschwindender Geschwindigkeit wieder völlig abgebracht wird. Gegebenenfalls kann dieser Wechsel mehrere Male hintereinander erfolgen. Die Art des Spannungszustandes sei ein homogener linearer.

Schon im Punkte 3 der Einleitung wurde angedeutet, daß die Verformungen, welche ein im Gleichgewicht befindlicher elastischer fester Körper erleidet, in der Regel nicht völlig umkehrbar (reversibel) sind, und daß der Grad der Umkehrbarkeit unter sonst gleichen Umständen mit der Größe der äußeren Belastung oder, wie man auch bei gegebener äußerer Beanspruchungsart sagen kann, mit der Größe des Spannungszustandes in Zusammenhang gebracht werden kann.

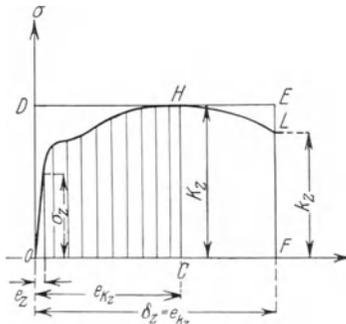


Abb. 55.

Um hierüber an der Hand der Erfahrung Klarheit zu gewinnen, denken wir uns einen Stab aus Flußeisen mit abgegrenzter Meßlänge auf Zug beansprucht und das σ - e -Schaubild aufgezeichnet. In Abb. 55 sei dieses Schaubild in schematischer Form dargestellt. Der Stab werde bis zu einer unterhalb der Proportionalitätsgrenze liegenden Spannung σ_z und zugehörigen bezogenen Dehnung e_z belastet, hierauf aber wieder völlig entlastet. Nach der Entlastung zeigt sich, daß die Meßlänge l nicht die gleiche Länge wie vor Aufbringung der Belastung besitzt, d. h. die aufgebrachte Dehnung e_z ist nur zum Teile wieder vollkommen zurückgegangen, ein Teil ist geblieben. Demnach unterscheidet man für die Dehnung e_z einen federnden oder elastischen Dehnungsanteil μ_z und einen bleibenden Dehnungsanteil oder Dehnungsrest v_z derart, daß die gesamte bei der Belastung sich einstellende bezogene Dehnung der Gleichung $e_z = \mu_z + v_z$ genügt. v_z ist erfahrungsgemäß im allgemeinen um so kleiner, je kleiner die Belastungsspannung σ_z war. Um über die Größenordnung von v_z

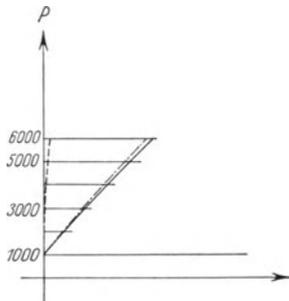


Abb. 56.

bei kleinen Spannungen Aufschluß zu gewinnen, sei das folgende Versuchsergebnis von Bach mitgeteilt. Ein flußeiserner Probestab von 2,007 cm Durchmesser mit $l = 15$ cm Meßlänge zeigte bei der Belastung in kg von 3000, 5000, 6000 entsprechend den Spannungen in kg/cm^2 von 949,9, 1582,3 und 1898,7, die gesamten Verlängerungen in $\frac{1}{100}$ mm von 4,61, 9,21, 11,90, die bleibenden Verlängerungen in $\frac{1}{100}$ mm von 0,17, 0,22, 0,63 und die federnden Verlängerungen in $\frac{1}{100}$ mm von 4,44, 8,99, 11,27, und zwar bezogen auf 1000 kg Belastung, entsprechend einer Spannung von $316,5 \text{ kg/cm}^2$ (die angegebenen Verlängerungen beziehen sich demnach auf die Länge, welche die Meßlänge bei Belastung mit 1000 kg angenommen hat; sie wurden mit Spiegelapparaten nach Martens (S. 81ff.) gemessen. Man bemerkt das Anwachsen der federnden und bleibenden Verlängerungen mit der Größe der Kraft bzw. der Spannung. In der Abb. 56 sind die Resultate graphisch im σ - e -Schaubild aufgetragen, und zwar ist die Linie der gesamten Verlängerungen voll ausgezogen, die Linie der federnden bzw. bleibenden Verlängerungen sind strichpunktiert bzw. punktiert. Die angegebenen gesamten, bleibenden und federnden Verlängerungen stellten sich erst nach einer Reihe von Belastungen und Entlastungen zwischen 1000 kg und 3000 kg

und 5000 kg, 1000 kg und 6000 kg ein, die so oft wiederholt wurden, bis sich konstante Werte von ν_z und μ_z herausstellten. Diese Erscheinung der allmählichen Herstellung der Konstanz der genannten Dehnungen bei wiederholter Belastung und Entlastung heißt Akkomodation und ist als eine sog. Nachwirkungerscheinung zu werten, auf welche später zurückgekommen werden wird.

Nach Erreichung dieser konstanten Verhältnisse wurde der Stab bis auf Null entlastet und dann neuerdings in der angeführten Weise in den angegebenen Stufen belastet und entlastet. Es stellten sich jetzt als federnde Verlängerungen 4,50, 9,01 und 11,28 in $\frac{1}{100}$ mm heraus. Diese allerdings recht minimale Änderung der federnden Dehnungen der zweiten Versuchsreihe gegenüber jenen der ersten ist ebenfalls als eine Nachwirkungerscheinung der früheren Belastungen und Entlastungen anzusehen.

Legen wir die erste Versuchsreihe zugrunde, so bemerken wir, daß die gesamten Verlängerungen in dem Bereich von 1000 kg bis 5000 kg auf 1000 kg Belastungszuwachs um 2,30, dagegen von 5000 kg bis 6000 kg um 2,69 in $\frac{1}{100}$ mm zunehmen. Die federnden Verlängerungen nehmen für je 1000 kg Belastungszuwachs in der Stufe 1000 kg bis 3000 kg um 2,22 in der Stufe 3000 kg bis 5000 kg um 2,275, in der Stufe 5000 kg bis 6000 kg um 2,28 in $\frac{1}{100}$ mm zu. Die bleibenden Verlängerungen nehmen, wenn man die gesamten Verlängerungen der ersten Versuchsreihe und die federnden der zweiten Versuchsreihe zugrunde legt, auf je 1000 kg Belastungszuwachs in der ersten Belastungsstufe um 0,036, in der zweiten um 0,045, in der dritten um 0,42 in $\frac{1}{100}$ mm zu, woraus das rapide Anwachsen der bleibenden Verlängerungen in der dritten Belastungsstufe zu erkennen ist. Die Zunahme der federnden (zweite Versuchsreihe) und gesamten Verlängerungen (erste Versuchsreihe) erfolgt in der ersten und zweiten Belastungsstufe proportional der Zunahme der Spannungen, was für diese Belastungsstufen das Hookesche Gesetz sowohl für die gesamten als auch federnden Verlängerungen bestätigt. Die Proportionalitätsgrenze könnte demnach bei 1582,3 kg/cm² angenommen werden, entsprechend der Belastung von 5000 kg. Würden die zweiten Dezimalstellen in den Zahlenangaben für die federnden Verlängerungen vernachlässigt, so könnte die Proportionalitätsgrenze, wenn für deren Bestimmung die federnden Verlängerungen zugrunde gelegt werden, auch bei 1898,7 kg/cm² Spannung entsprechend der Belastung von 6000 kg angenommen werden. Würde nach den Pariser Vereinbarungen (S. 146) $\frac{1}{1000}$ mm Abweichung vom Hookeschen Gesetze bei 20 cm Meßlänge als Grundlage für die Höhe der Proportionalitätsgrenze gewählt werden, so wäre die Spannung 1898,7 kg/cm², als Proportionalitätsgrenze aufgefaßt, bereits zu hoch, wenn die gesamten Dehnungen zugrunde gelegt werden, da für diesen Wert die gesamten Dehnungen, die auf 20 cm Meßlänge zu reduzieren sind, eine Abweichung von 4,95 in $\frac{1}{1000}$ mm zeigen. Sie würde dann, wie man sich leicht überzeugt, bei 1663 kg/cm² liegen.

Zur Berechnung des sog. wahren Elastizitätsmodulus auf Zug legt man nach einem Vorschlage von Bach die federnden Verlängerungen zugrunde. Der wahre Elastizitätsmodulus E ergibt sich sonach aus der obigen zweiten Versuchsreihe mit

$$E = \frac{(1582,3 - 316,5) 15000}{9,01} = 2107514 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei Zugrundelegung der gesamten Dehnungen würde sich der Elastizitätsmodulus ganz unbedeutend kleiner ergeben.

Im allgemeinen wird man den wahren Elastizitätsmodulus als Mittelwert der Werte finden, welche einzelnen Belastungsbereichen entsprechen. Werden die oberen Grenzen der n Belastungsbereiche, denen federnde Verlängerungen $\mu_1 \dots \mu_n$ zugeordnet sind, mit $P_1 \dots P_n$, die gemeinsame untere Grenze derselben mit P_0 bezeichnet, so können, wenn F die Quer-

schnittsfläche des Probestabes bedeutet, die Gleichungen

$$\begin{aligned}\mu_1 E &= \frac{1}{F} (P_1 - P_0), \\ &\vdots \\ \mu_n E &= \frac{1}{F} (P_n - P_0)\end{aligned}$$

aufgestellt werden, aus welchen

$$E = \frac{1}{F} \frac{\sum_{r=1}^{r=n} (P_r - P_0)}{\sum_{r=1}^{r=n} \mu_r} \quad (84)$$

folgt.

Wenn ein isotroper, quasiisotroper oder anisotroper Stoff bei Beanspruchung auf Zug in einem bestimmten Spannungsbereiche die Eigenschaft zeigte, daß für jede Spannung des Bereiches bei Entlastung auf Null (oder einen in der Nähe von Null gelegenen Wert) der Dehnungsrest ν_z verschwindet, so heißt der Stoff in dem genannten Bereiche für die Beanspruchung auf Zug vollkommen elastisch. Die größte Spannung, bis zu welcher vollkommene Elastizität besteht, wird als Elastizitätsgrenze bei Beanspruchung auf Zug definiert. Von den in dieser Hinsicht untersuchten Stoffen sind die Kristalle (Quarz) in einem verhältnismäßig großen Bereiche als vollkommen elastisch zu bezeichnen, dagegen sind die Werkstoffe der Technik, insbesondere die quasiisotropen Metalle und die Steine, die aus Kristalliten aufgebaut sind (Vielkristalle im Gegensatz zu dem Einkristall), nicht vollkommen elastisch, es existiert für sie eigentlich gar keine Elastizitätsgrenze. Nichtsdestoweniger hat man auch für diese Stoffe, ebenso für Holz, eine Elastizitätsgrenze bei Beanspruchung auf Zug definiert in Anbetracht dessen, daß für sie häufig die Dehnungsreste, solange die Belastungen nicht zu groß werden, so klein sind, daß sie vernachlässigt werden können. Man sagt dann, die Elastizitätsgrenze sei erreicht, wenn der Dehnungsrest eine bestimmte durch Vereinbarung festgelegte Grenze zu überschreiten beginnt. Nach den Brüsseler Vorschlägen (1906) soll diese Grenze 15 Minuten nach Abbringen der Belastung (siehe Nachwirkungserscheinungen, S. 168 ff.) durch $100 \nu_{zE} = 0,001$, nach den Vorschlägen von Krupp in Essen durch $100 \nu_{zE} = 0,03$ und nach der Materialprüfungsanstalt Großlichterfelde bei Berlin durch $100 \nu_{zE} = 0,003$ ausgedrückt sein. Die Zahlenwerte stellen die bleibende Verlängerung der Meßlänge in Prozenten der ursprünglichen Länge derselben vor. Ist die ursprüngliche Meßlänge l , die Meßlänge l vermehrt um die bleibende Verlängerung an der Elastizitätsgrenze gleich l_{zE} , so ist die bleibende Verlängerung in Prozenten durch $100 \frac{l_{zE} - l}{l} = 100 \nu_{zE}$ gegeben. Für unser obiges Beispiel hätten wir, wenn die bleibenden Dehnungen, die sich bis zur Spannung $\sigma = 316,5 \text{ kg/cm}^2$ entsprechend der Belastung von 1000 kg ergeben, vernachlässigt werden, bei Belastung von 5000 kg entsprechend $\sigma = 1582,3 \text{ kg/cm}^2$

$$100 \frac{l_z - l}{l} = 100 \cdot \frac{15000 + 0,22 - 15000}{15000} = 0,0014.$$

Nach den Brüsseler Vorschlägen wäre sonach bei $\sigma = 1582,3 \text{ kg/cm}^2$ die Elastizitätsgrenze für das vorgelegte Fluß Eisen überschritten, nach den beiden anderen Vorschlägen noch nicht erreicht. Für die Belastung von 6000 kg entsprechend $\sigma = 1898,7 \text{ kg/cm}^2$ ergibt sich $100 \nu_z$ mit 0,0042, es wäre die Elastizitätsgrenze

dann nach dem Vorschlage von Krupp noch nicht erreicht, nach den beiden anderen Vorschlägen bereits überschritten. Man sieht daraus, daß die Größe der Elastizitätsgrenze Sache der Vereinbarung bzw. der Meßgenauigkeit ist. Man wird nicht viel fehlen, wenn man für Flußeisen die Elastizitätsgrenze mit der Proportionalitätsgrenze zusammenfallen läßt.

Es sind zwar auch noch andere Vorschläge zur Bestimmung der Elastizitätsgrenze gemacht worden, welche sich nicht auf die Messung der umkehrbaren Dehnungen stützen, sondern auf die Beobachtung von mit den bleibenden Gestaltsänderungen verbundenen thermischen Effekten bzw. Veränderungen der mikroskopischen Struktur der Oberfläche des beanspruchten Stabes [siehe E. Rasch (L), O. Faust (L) und G. Tammann (L)], doch würde eine nähere Erörterung dieser Vorschläge zu weit führen.

Ähnlich wie die Elastizitätsgrenze auf Zug, kann auch die Elastizitätsgrenze bei Beanspruchung auf Druck definiert werden. Natürlich muß hier statt eines Dehnungsrestes ein Quetschungsrest eingeführt werden. Manche der quasiisotropen, homogenen Körper verhalten sich bei Beanspruchung auf Zug und jener auf Druck bis zur Elastizitätsgrenze völlig gleich, wie z. B. manche Sorten von Flußeisen und Flußstahl, häufig aber auch recht verschieden, wie z. B. Gußeisen, dessen Elastizitätsgrenze auf Druck in der Regel höher als jene auf Zug liegt. Die Erhebung der Elastizitätsgrenze auf Druck durch den Versuch erfolgt ganz ähnlich wie jene auf Zug.

33. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung).

Poncelet-De Saint Venant-Grashofsche und Mohrsche Ansicht über die Elastizitätsgrenze bei beliebigem Spannungszustand. Es fragt sich nun, was wir bei Festhaltung der übrigen, im ersten Absatz des Punktes 32 gemachten Voraussetzungen unter Elastizitätsgrenze für einen beliebigen Spannungszustand verstehen sollen, und was für eine physikalische Größe dann für das Erreichen der Elastizitätsgrenze maßgebend ist.

Was die erste Frage nach der Definition der Elastizitätsgrenze für den Fall eines mehrdimensionalen Spannungszustandes anbelangt, so können wir in Analogie zum eindimensionalen Fall annehmen, daß die Elastizitätsgrenze in einem Punkte eines elastischen Körpers, der auf gegebene bestimmte Art belastet wird, dann erreicht ist, wenn nach Abbringen der Belastung der in dem genannten Punkte entstanden gewesene Deformationszustand bis auf einen geduldeten Rest zurückgeht, der die bleibende Deformation vorstellt. Hierzu wäre noch zu bemerken, daß die Elastizitätsgrenze für einen Spannungszustand gegebener Art durch eine bestimmte Größe dieses Spannungszustandes gegeben sein wird, welche durch die Größe der Hauptspannungen definiert ist. Der geduldete Deformationsrest kann bei gegebener Art des Spannungszustandes und gegebenem Elastizitätsgesetz, als welches wir im folgenden sowohl für Belastung als auch Entlastung das erweiterte Hookesche Gesetz annehmen wollen, durch den nach Abbringen der Belastung zurückbleibenden Dehnungsrest, der der dem Zahlenwert nach größten Hauptdehnung zugeordnet ist, definiert werden, und zwar unter der Voraussetzung, daß dieser Rest der größte unter den drei in Betracht kommenden Hauptdehnungsresten ist.

Der geduldete Deformationsrest für den mehrdimensionalen Fall muß in einer Beziehung stehen zu dem geduldeten Rest bei linearer Beanspruchung. Es handelt sich dann z. B. um die Frage, wie groß der geduldete Dehnungsrest bei einem mehrdimensionalen Fall sein müßte, wenn er bei linearer Beanspruchung nach dem Vorschlage von Krupp mit $100 \nu_z E = 0,03$ angegeben wurde. Eine Antwort hierauf ist natürlich nur dann zu geben, wenn man erfahrungsgemäß weiß, wodurch das Erreichen der Elastizitätsgrenze bedingt ist, oder welche

physikalische Größe für das Erreichen der Elastizitätsgrenze maßgebend ist. Am nächstliegenden wäre die Größe des Verzerrungszustandes selbst bei jeder Art des Spannungszustandes als Maß für die Erreichung der Elastizitätsgrenze heranzuziehen. Demnach kämen wir wie auf Seite 149 zur Vermutung, daß unabhängig von der Art des Spannungszustandes die dem Zahlenwerte nach größte Hauptdehnung maßgebend für die Erreichung der Elastizitätsgrenze ist, oder was auf das gleiche hinauskommt, die dem Zahlenwerte nach größte reduzierte Spannung. Andererseits könnte eine derartige Annahme nur richtig sein, wenn für den betreffenden Stoff die Elastizitätsgrenze bei Beanspruchung auf Zug und auf Druck gleich hoch liegt, da sonst die Annahme in diesen beiden speziellen Fällen nicht stimmen würde. Würden wir der Erfahrung entsprechen wollen, daß der betreffende Stoff bei Beanspruchung auf Zug und auf Druck mit Bezug auf die Höhe der Elastizitätsgrenze ein verschiedenes Verhalten zeigt, so müßten wir unsere Annahme so formulieren, daß wir für das Erreichen der Elastizitätsgrenze bei allgemeinem Spannungszustand entweder die größte positive Hauptdehnung oder die dem Zahlenwerte nach größte negative Hauptdehnung als maßgebend ansehen, je nach den absoluten Größenverhältnissen der Hauptdehnungen zu einander und je nachdem die Elastizitätsgrenze auf Zug niedriger oder höher liegt als jene auf Druck. Anstatt der dem Zahlenwerte nach größten positiven oder negativen Hauptdehnung könnte natürlich auch die dem Zahlenwerte nach größte positive oder negative reduzierte Spannung gesetzt werden. In weiterer Verfolgung dieses Gedankens müßte man schließen, daß an der Elastizitätsgrenze die dem Zahlenwerte nach größten positiven Hauptdehnungen (reduzierten Spannungen) oder die dem Zahlenwerte nach größten negativen Hauptdehnungen (reduzierten Spannungen) für alle denkbaren Spannungszustände für einen gegebenen Werkstoff einander gleich seien. Nennen wir die aus dem Versuch gefolgerte Elastizitätsgrenze bei Beanspruchung auf Zug $\sigma_{ZE} = Ee_{ZE}$, jene bei Beanspruchung auf Druck $\sigma_{DE} = Ee_{DE}$, so würde bei unserer Annahme an der Elastizitätsgrenze eines beliebigen räumlichen Spannungszustandes, wenn $|e_{+E}|$ die dem Zahlenwerte nach größte positive Hauptdehnung, $|e_{-E}|$ die dem Zahlenwerte nach größte negative Hauptdehnung vorstellen, das Folgende zutreffen:

$$\begin{aligned} &\text{Entweder } e_{+E} = e_{ZE} \quad \text{und damit verknüpft } |e_{-E}| \leq |e_{DE}|, \\ &\text{oder } |e_{-E}| = |e_{DE}| \quad \text{und damit verknüpft } e_{+E} \leq e_{ZE}. \end{aligned}$$

In einem konkreten Fall wäre hierdurch die experimentelle Bestimmung der Elastizitätsgrenze für einen beliebigen Spannungszustand auf die experimentelle Erhebung der Elastizitätsgrenze bei Beanspruchung auf Zug und auf Druck zurückgeführt. Nehmen wir im besonderen einen Stoff an, für den $\sigma_{ZE} > |\sigma_{DE}|$ und setzen voraus, es seien die absoluten Werte der Hauptdehnungen eines vorgegebenen Spannungszustandes derart beschaffen, daß die Bedingung $|e_1| > |e_2| > |e_3|$ erfüllt wird. Im algebraischen Sinne sollen die Hauptdehnungen der Annahme $e_3 > 0$, $e_1 < 0$, $e_2 < 0$ folgen. Die Elastizitätsgrenze für den vorgegebenen Spannungszustand wäre dann erreicht, wenn die Bedingung $|e_1| = |e_{DE}|$ erfüllt ist, welche die Bedingung $e_3 < e_{ZE}$ notwendig nach sich zieht. Würden wir voraussetzen, es läge ein Stoff vor, für den $e_{ZE} < |\sigma_{DE}|$, sonst aber die Annahmen über die Größenverhältnisse der Hauptdehnungen und deren Zeichen, wie angegeben aufrechterhalten, so können zwei Fälle für die Erreichung der Elastizitätsgrenze in Frage kommen: entweder $|e_1| = |e_{DE}|$ und $e_3 \leq e_{ZE}$ oder, wenn diese Bedingungen nicht zutreffen, $e_3 = e_{ZE}$ und $|e_1| \leq |e_{DE}|$.

Nach der oben angegebenen Kruppschen Annahme wäre unter Voraussetzung, daß die entwickelte Anschauung über die für Erreichung der Elastizitäts-

grenze maßgebende physikalische Größe richtig ist, die Elastizitätsgrenze in einem Punkte eines elastischen festen Körpers mit räumlichem Spannungszustand dann erreicht, wenn der dem Zahlenwerte nach größte positive Hauptdehnungsrest oder der dem Zahlenwerte nach größte negative Hauptdehnungsrest nach Abbringen der Belastung gerade 0,03% der zugeordneten Hauptdehnung ist, welche bei Aufbringen der Belastung erreicht wurde.

Lassen wir zu den vorangestellten ein Erfahrungsergebnis folgen. Bauschinger (L) beanspruchte einen geraden Stab aus Flußeisen auf Zug, Druck und Verdrehung bis zur Elastizitätsgrenze. Die Beanspruchung auf Verdrehung ist eine solche auf reinen Schub und wird z. B. durch Verdrehen eines kreiszylindrischen Stabes verwirklicht, dessen eines Ende fest eingespannt wird, an dessen anderem Ende in der Endquerschnittsfläche ein Verdrehungsmoment M_D wirkt (Abb. 151 auf S. 325). Es entsteht dann im Stab ein reiner Schubspannungszustand T für Volumenelemente, die nach Art der Abb. 25, S. 90 aus dem Stabe herausgeschnitten werden. Die z -Achse dieser Abbildung entspricht der Stabachse. Von den in Abb. 26, S. 90 eingezeichneten Spannungen sind nur die Schubspannungen $\tau_{zt} = \tau_{tz} = T$ vorhanden, die normal zum Radius des Kreisquerschnittes stehen. Die Größe der Schubspannungen erweist sich als proportional der Größe der Entfernungen des betrachteten Volumenelementes von der Stabachse. Infolge dieser Beanspruchung werden die Radien zweier Querschnitte in der Entfernung 1 voneinander, die vor der Deformation in einer Ebene durch die Stabachse lagen, gegeneinander verdreht, und die Schubspannung T ist diesem Verdrehungswinkel proportional. (Siehe hierzu S. 325 ff. des zweiten Teiles.) Aus dem annähernd vollständigen Zurückgehen der an der Mantelfläche des Stabes beobachtbaren Verdrehungswinkel nach Entlastung kann auf die Höhe der Elastizitätsgrenze bei reiner Schubbeanspruchung ein Schluß gezogen werden. Nennen wir die Elastizitätsgrenze auf Zug, Druck und reinen Schub der Reihe nach σ_{ZE} , σ_{DE} , τ_E und die zugehörigen Hauptdehnungen e_{ZE} , e_{DE} , $e_{\tau E}$, so muß bei Verwendung des einfachen und erweiterten Hookeschen Gesetzes

$$e_{ZE} = \frac{\sigma_{ZE}}{E}, \quad e_{DE} = \frac{\sigma_{DE}}{E}, \quad e_{\tau E} = \pm \frac{\tau_E}{E} \frac{m+1}{m}$$

zutreffen (S. 72). Für das untersuchte Flußeisen ergab sich die Elastizitätsgrenze auf Zug gleich jener auf Druck, d. h. $\sigma_{ZE} = |\sigma_{DE}|$. Wenn die Annahme, daß für das Erreichen der Elastizitätsgrenze entweder die größte positive Hauptdehnung oder die größte negative Hauptdehnung maßgebend ist, richtig ist, so müßte $e_{ZE} = |e_{DE}| = |e_{\tau E}|$ also $\sigma_{ZE} : |\sigma_{DE}| : |\tau_E| = 1 : 1 : 0,8$ zutreffen, wenn $m = 4$ gesetzt wird. Aus dem Versuch wurde nicht dieses Verhältnis, sondern das Verhältnis 1 : 1 : 0,5 gefunden, woraus sich ergibt, daß die vorangestellte, auf Poncelet, de Saint Venant und Grashof zurückgehende Annahme für Flußeisen nicht vollkommen zutreffend sein kann. Nichtsdestoweniger wird sie — das sei gleich hier erwähnt — in der Praxis derzeit festgehalten und angewendet.

Hätte nicht Flußeisen, sondern ein Stoff vorgelegen, für welchen die Elastizitätsgrenze auf Zug niedriger ist als jene auf Druck (Gußeisen), so müßte bei Festhaltung unserer Annahme für die Erreichung der Elastizitätsgrenze bei reinem Schub die Bedingung $|\tau_E| = \sigma_{ZE}$ erfüllt sein. In den Abb. 57a und 57b sind die Elastizitätsgrenzen auf Zug, Druck und reinen Schub durch die zugehörigen Hauptkreise nach Art der Mohrschen Darstellung (siehe Punkt 13, S. 61) wiedergegeben, und zwar für die Fälle $\sigma_{ZE} = |\sigma_{DE}|$ und $\sigma_{ZE} < |\sigma_{DE}|$.

Als zweite Annahme für jene physikalische Größe, welche die Elastizitätsgrenze charakterisieren soll, wollen wir jene von O. Mohr (L) besprechen, die

sehr bemerkenswert ist und besagt, daß für das Erreichen der Elastizitätsgrenze eine der Erfahrung zu entnehmende, jedem Material eigentümliche Funktion $f(\sigma_1, \sigma_3)$ der algebraisch größten und kleinsten Hauptspannung σ_3 und σ_1 maßgebend ist. Nach Mohr soll diese Funktion an der Elastizitätsgrenze einen bestimmten Wert annehmen. Die algebraisch in der Mitte zwischen σ_1 und σ_3 liegende Hauptspannung σ_2 soll demnach laut Annahme keinen Einfluß auf das Erreichen der Elastizitätsgrenze besitzen.

Bei der angegebenen algebraischen Ordnung der Hauptspannungen ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$) ist die Art des Spannungszustandes durch das Verhältnis der Hauptspannungen zueinander gegeben; es sei dementsprechend $\sigma_2 = \sigma_1 \alpha$ und $\sigma_3 = \sigma_1 \beta$, wobei α und β zwei gegebene Konstante sind. An der Elastizitätsgrenze nimmt die Funktion der beiden Hauptspannungen σ_1 und σ_3 nach der vorangestellten Annahme einen für den vorgelegten Stoff charakteristischen Grenzwert p an, d. h. $f(\sigma_1, \sigma_1 \beta) = p$. Aus dieser Beziehung müßte sich σ_{1E} , d. h. die Hauptspannung σ_1 an der Elastizitätsgrenze eindeutig bestimmen lassen, wodurch

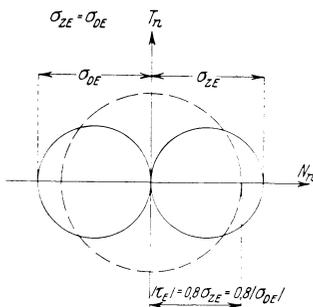


Abb. 57 a.

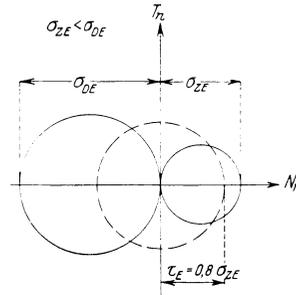


Abb. 57 b.

auch für die gegebene Art des Spannungszustandes die Elastizitätsgrenze durch die Angabe der zwei Hauptspannungen σ_1 und σ_3 festgelegt wäre.

Wenn wir uns an die Mohrsche Darstellung des Spannungszustandes erinnern, können wir das Vorstehende auch so formulieren: An der Elastizitätsgrenze eines Spannungszustandes gegebener Art hat der Hauptkreis des Spannungszustandes im $N_n T_n$ -System eine bestimmte Lage und Größe; die Lage des Hauptkreises mit dem Mittelpunkt auf der N_n -Achse ist durch seine Mittelpunktskoordinate $\frac{\sigma_{1E} + \sigma_{3E}}{2} = \frac{\sigma_{1E}(1 + \beta)}{2}$, die Größe des Hauptkreises durch die Größe seines Radius, d. i. durch $\frac{\sigma_{3E} - \sigma_{1E}}{2} = \frac{\sigma_{1E}(\beta - 1)}{2}$ gegeben, wobei σ_{1E} aus der gegebenen gedachten Funktion $f(\sigma_1, \sigma_3)$ und aus p zu bestimmen ist. Die Nebenkreise in der Mohrschen Darstellung des Spannungszustandes spielen nach der genannten Annahme für die Erreichung der Elastizitätsgrenze keine Rolle, einzig und allein maßgebend ist der dem betreffenden Spannungszustand zugeordnete Hauptkreis.

Die Funktion $f(\sigma_1, \sigma_3)$, welche an der Elastizitätsgrenze einen bestimmten Wert besitzen soll, hängt nach Mohr von der Erfahrung ab, muß also für jeden besonderen Stoff aus derselben geschöpft werden.

Zur Klärung dieser Annahme sei das Folgende mitgeteilt. Mohr sagt, daß die Erreichung einer Grenze — darunter braucht nicht nur die Elastizitätsgrenze verstanden werden, es kann auch z. B. die Grenze sein, welche wir eingangs im Punkt 12, S. 23 als relative Festigkeit bezeichnet haben, die häufig auch Bruchgrenze für einen bestimmten Spannungszustand genannt wird — für einen

bestimmten Spannungszustand $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in einem Punkte eines elastischen festen Körpers an ein bestimmtes, diesem Punkte unendlich naheliegendes Flächenelement gebunden ist, und zwar an jenes, in dem zur Normalspannung die größte Schubspannung hinzutritt. An der Hand der Abb. 19a besagt diese Anschauung, daß jenes Flächenelement nur tangentiell an den Durchmesserkreis der unendlich kleinen Kugel in Abb. 19 liegen kann, dessen Ebene durch die Hauptspannungen σ_1 und σ_3 festgelegt ist; denn für solche Flächenelemente bestimmen die Normalspannungs- und Schubspannungskomponenten je zwei zugeordnete Punkte des Hauptkreises, die bezüglich der N_n -Achse symmetrisch liegen, und für jeden Punkt des Hauptkreises trifft es zu, daß für eine gewählte Normalspannung N_n die zugeordnete Schubspannung die größte unter allen möglichen Schubspannungen ist, welche dieser Normalspannung zugeordnet werden könnten. Mit anderen Worten, nur die den einzelnen Punkten des Hauptkreises zugeordneten Flächenelemente der unendlich kleinen Kugel samt den diesen kleinen Flächenelementen zugeordneten $N_n T_n$ -Komponenten kommen für die Erreichung der Elastizitätsgrenze in Frage, und die $N_n T_n$ -Komponenten dieser Flächenelemente können demnach nur von σ_1 und σ_3 abhängen, nicht aber von der mittleren Hauptspannung σ_2 . Es ist nach Mohr Sache der Erfahrung, für jeden Spannungszustand den Hauptkreis zu finden, der der Elastizitätsgrenze entspricht. Für stetig ineinander übergehende verschiedene Spannungszustände erhalten wir für einen gegebenen Werkstoff an der Elastizitätsgrenze eine unendliche Schar von Hauptkreisen, deren einhüllende Kurve g (Abb. 58) den geometrischen Ort aller Punkte vorstellt, welche für die verschiedenen Spannungszustände den Bedingungen genügen, daß sie Flächenelementen der unendlich kleinen Kugel in der Darstellung Abb. 19 entsprechen, für die zu einer gegebenen Normalspannung die für den gegebenen Spannungszustand denkbar größte Schubspannung hinzutritt. Die einhüllende Kurve muß offenbar symmetrisch mit Bezug auf die N_n -Achse sein. Zwei symmetrisch zur N_n -Achse gelegene Punkte, z. B. A, A' oder B, B' usw., in welchen die einhüllende Kurve g der Hauptkreise, auch Grenzkurve für die Elastizitätsgrenze genannt, je einen Hauptkreis berührt, bestimmen für diesen Hauptkreis nach Seite 66ff. ein im allgemeinen schiefwinkeliges Prisma, dessen Flächenelemente die Winkel $2(n, \alpha) = \varphi$ und $2(n, \gamma) = \psi$, wobei $\varphi + \psi = 180^\circ$ ist, miteinander einschließen. In diesen Flächenelementen wird die Elastizitätsgrenze in dem betreffenden Punkt des elastischen Körpers zuerst erreicht, und ist bestimmt durch die in diesen Flächenelementen übertragene aus den Komponenten N_n und T_n zusammengesetzte Totalspannung. Die Gestalt der Grenzkurve ist für die verschiedenen Stoffe verschieden und Sache der Erfahrung. Allgemein kann über sie nur ausgesagt werden, daß der Punkt, in welchem sie die positive N_n -Achse schneidet, dem Spannungszustand $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ mit $\sigma_1 > 0$, d. i. dem Fall der allseitigen Zugbeanspruchung entsprechen muß, und daß der Punkt der Grenzkurve, welcher allseitiger Druckbeanspruchung entspricht (hydrostatischer räumlicher Spannungszustand $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ mit $\sigma_1 < 0$) dem zweiten Schnittpunkt der Grenzkurve mit der negativen N_n -Achse zugeordnet sein muß. Letzterer dürfte in sehr großem Ab-

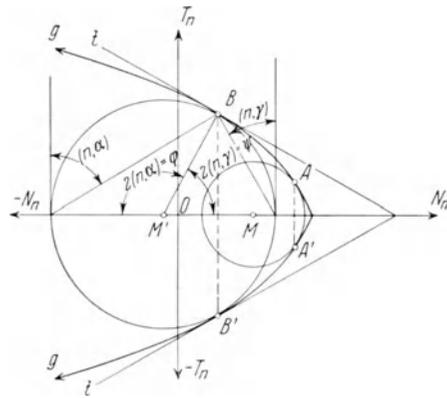


Abb. 58.

Abb. 58 zeigt ein Koordinatensystem mit der horizontalen N_n -Achse und der vertikalen T_n -Achse. Die N_n -Achse ist beschriftet mit $-N_n$ auf der linken Seite und N_n auf der rechten Seite. Die T_n -Achse ist beschriftet mit T_n oben und $-T_n$ unten. Eine unendliche Schar von Hauptkreisen ist durch eine einhüllende Kurve g dargestellt, die symmetrisch zur N_n -Achse ist. Zwei Hauptkreise sind hervorgehoben: einer mit dem Mittelpunkt M' auf der N_n -Achse, der die Kurve g in den Punkten A und A' berührt, und ein anderer mit dem Mittelpunkt M auf der N_n -Achse, der die Kurve g in den Punkten B und B' berührt. Die Punkte A, A', B, B' sind symmetrisch zur N_n -Achse angeordnet. Die Winkel $2(n, \alpha) = \varphi$ und $2(n, \gamma) = \psi$ sind zwischen den Hauptkreisen und der Kurve g eingezeichnet. Die Kurve g schneidet die N_n -Achse an zwei Stellen: einer positiven und einer negativen N_n -Achse.

stand von der T_n -Achse liegen, weil die Elastizitätsgrenze bei dieser Beanspruchung, wenn sie überhaupt vorhanden ist, vermutlich sehr hoch liegt.

Es sei die Gleichung der Grenzkurve g im $N_n = x, T_n = y$ -System durch $F(x, y) = p$ gegeben. Dann müssen für einen Berührungspunkt mit den Koordinaten ξ, η eines Hauptkreises mit der Grenzkurve die Bedingungen

$$F(\xi, \eta) = p, \left(\xi - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2, \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=\xi, y=\eta} = - \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \right)_{x=\xi, y=\eta} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_E}{2} \eta$$

erfüllt sein, welche besagen, daß der Punkt ξ, η sowohl auf dem Hauptkreis wie auf der Grenzkurve liegen soll und die Tangenten an Hauptkreis und Grenzkurve in diesem gemeinsamen Punkte zusammenfallen. Mit den aus den beiden letzten Bedingungen berechneten Werten von ξ und η erhält man aus der ersten Bedingung eine Beziehung $f(\sigma_1, \sigma_3) = p$, wobei die Form der Funktion f von jener der Funktion F abhängig ist.

Der Wert von p ist festgelegt durch die Annahme des geduldeten Deformationsrestes. Für die Beanspruchung auf Zug und auf Druck müssen nämlich an der Elastizitätsgrenze die Bedingungen $f(0, \sigma_3) = p$ und $f(\sigma_1, 0) = p$ erfüllt sein. Aus diesen beiden Beziehungen müssen sich σ_3 und σ_1 entsprechend den experimentell erhobenen Elastizitätsgrenzen auf Zug bzw. Druck ergeben, was eine bestimmte Wahl von p voraussetzt. Ist die Elastizitätsgrenze auf Zug gleich der Elastizitätsgrenze auf Druck, so müssen aus den beiden Beziehungen Werte σ_1 und σ_3 folgen, die einander gleich sind, was nur bei einem besonderen Charakter der Funktion f möglich ist.

Besonders sei noch hervorgehoben, daß dann, wenn für zwei Spannungszustände an der Elastizitätsgrenze sich die Hauptkreise decken, die Elastizitätsgrenzen für diese Spannungszustände gleich sein müssen.

Als Beispiel wollen wir eine besondere Art von Flußeisen wählen, das nur Spannungszuständen unterworfen sein soll, die zwischen der reinen Beanspruchung auf Zug und auf Druck liegen.

Die besondere Art des Flußeisens soll dadurch zum Ausdruck kommen, daß die Elastizitätsgrenze auf Zug desselben gleich sein soll der Elastizitätsgrenze auf Druck, d. h. bei Annahme eines geduldeten Dehnungsrestes sollen die Hauptspannungskreise der Elastizitätsgrenzen σ_{ZE} und σ_{DE} für die Beanspruchung auf Zug bzw. auf Druck gleich groß und symmetrisch mit Bezug auf die T_n -Achse gelegen sein (Abb. 59). Nach den bereits oben erwähnten Versuchen von Bau-

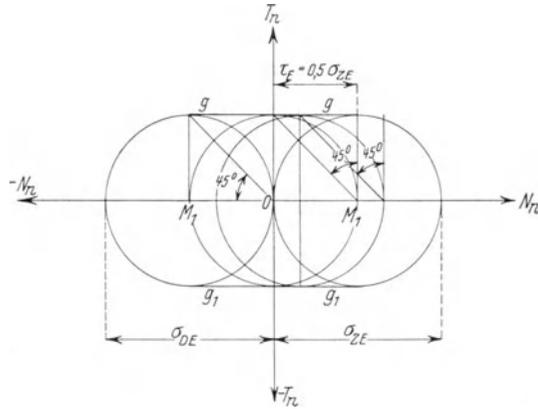


Abb. 59.

schieger mit einer bestimmten Sorte Flußeisen liegt die Elastizitätsgrenze τ_E auf reinen Schub derart, daß $|\tau_E| = 0,5 \sigma_{ZE} = 0,5 |\sigma_{DE}|$ wird. Der zu τ_E gehörige Hauptkreis mit seinem Mittelpunkt in 0 ist demnach gleich groß mit jenen der Elastizitätsgrenzen auf Zug und Druck. Würde man als wahrscheinlichsten Verlauf der Grenzkurve für Spannungszustände, die zwischen der Beanspruchung auf

Zug und der Beanspruchung auf Druck liegen, je eine zur N_n -Achse parallele Gerade g bzw. g_1 ansehen, so ergäbe sich als Resultat, daß für die angegebenen Spannungszustände die Elastizitätsgrenzen durch die ihnen zugeordnete gemeinsame größte Schubbeanspruchung τ_E charakterisierbar sind, die unter 45° zu den Hauptspannungsrichtungen geneigt auftritt. Diese Folgerung deckt sich mit einer erst später zu besprechenden (S. 181ff.) Annahme von Coulomb, die dieser Forscher für das Erreichen der Bruchgrenze, allerdings für jede beliebige Stoffgattung, als maßgebend angesehen hat. Da die Grenzkurve jetzt die Gleichung $y = \pm p$ besitzt, so ist die Funktion, welche das Erreichen der Elastizitätsgrenze bestimmt, durch

$$f(\sigma_1, \sigma_3) = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \pm p = \pm \tau_{\max}$$

gegeben. Der Versuch von Bauschinger ist demnach durch die Mohrsche Theorie gedeckt.

Ferner hat J. Guest (L) Versuche mit dünnen Röhren aus Stahl, Flußeisen, Kupfer und Messing gemacht, die gleichzeitig oder nacheinander einem inneren Flüssigkeitsdruck, Drehmomenten mit Ebenen normal zur Rohrachse, und einer Zugkraft, parallel zur Rohrachsenrichtung, ausgesetzt werden konnten. Es war durch entsprechende Kombination der Kraftwirkungen möglich, sämtliche Spannungszustände, die zwischen reiner Zug- und Druckbeanspruchung liegen, zu verwirklichen. Die Versuche sollten die Frage beantworten, ob die mittlere Hauptspannung Einfluß auf die Erreichung der Elastizitätsgrenze besitzt oder nicht. Die Versuche von Guest bestätigten die Mohrsche Theorie.

Dagegen widerspricht die Mohrsche Theorie gewissen Versuchen mit spröden Körpern, worauf wir später zurückkommen werden (S. 191).

34. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung).

Grad der Vollkommenheit und Größe der Elastizität. Ein allgemeines Maß des Grades der Vollkommenheit der Elastizität eines wenigstens durchschnittlich isotropen und homogenen Stoffes, der einem beliebigen Spannungszustande in einem bestimmten Größenbereiche desselben unterworfen wird, könnte nur auf einem Vergleich zwischen den Verzerrungskomponenten nach Aufbringen der äußeren Belastung mit den federnden Verzerrungen nach Abbringen der Belastung beruhen. Es dürfte nach den Auseinandersetzungen des vorhergehenden Punktes klar sein, daß eine von der Art des Spannungszustandes unabhängige wirkliche Definition dieses Maßes nur dann erfolgen könnte, wenn man wüßte, welche physikalische Größe für das Auftreten eines Deformationsrestes vorgegebener Größe bestimmend ist. Nachdem das bisher nicht der Fall ist, begnügt man sich, jenes Maß aus einem linearen Spannungszustand abzuleiten. Wenn in diesem Falle die dem Grenzwert der Zug- oder der Druckspannung entsprechende Kraft mit P , die dieser Kraft zugeordnete gesamte Dehnung mit e_P und die federnde Dehnung nach Abbringen der Belastung P mit μ_P bezeichnet wird, so ist es üblich, den Grad der Vollkommenheit der Elastizität in dem der Kraft P zugeordneten Spannungsbereiche aus dem Werte $g = \frac{\mu_P}{e_P}$ zu beurteilen. Der Wert g kann sonach höchstens gleich 1 sein, er wird nach den obigen Auseinandersetzungen um so mehr sich 1 nähern, je kleiner die aufgebrachte Kraft P bzw. die ihr zugeordnete Spannung war.

Es sind noch vielfache andere Vorschläge zur Beurteilung des Grades der Vollkommenheit der Elastizität gemacht worden, von welchen ich nur noch den einen hervorheben will, der ihn aus dem Verhältnis der Deformationsarbeit beurteilt, welche aus dem auf Zug (Druck) beanspruchten Stab (Würfel) bei Entlastung zurückgewonnen wird, zu jener Deformationsarbeit, die bei der vorhergehenden

Belastung des Stabes (Würfels) hineingesteckt wurde. Die letztere ist offenbar größer als die erstere.

Häufig führt man noch die bei linearem Spannungszustande auftretende federnde Dehnung (Quetschung) für 1 kg cm^2 Spannungszuwachs als Größe der Elastizität ein. Gilt das Hookesche Gesetz $\sigma = \mu E$ für die federnden Dehnungen μ , so deckt sich die Größe der Elastizität mit jener des Zug- (Druck-) Spannungskoeffizienten $\alpha = \frac{1}{E}$, und man kann dann die Größe der Elastizität bis zur Elastizitätsgrenze auf Zug (Druck) konstant setzen. Bei Gültigkeit eines anderen Elastizitätsgesetzes (Gußeisen) wäre bei dieser Auffassung des Begriffes die Größe der Elastizität eine Funktion der Spannung.

35. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung).

Gebiet der bleibenden Deformationen. Streck- und Fließgrenze, Fließfiguren. Verfestigung, technische Zug- und Druckfestigkeit. Bruchgrenze. Reißwiderstand. Oberhalb der Elastizitätsgrenze zeigen die verschiedenen wenigstens durchschnittlich isotropen und homogenen Stoffe bei Beanspruchung auf Zug oder Druck und Festhaltung der im Punkt 29b) gemachten Annahmen in der Regel die gemeinsame Eigentümlichkeit, daß die bleibenden Formänderungen (Dehnungsreste) sowohl absolut als auch im Verhältnis zu den Gesamtdehnungen wachsen. Man nennt aus diesem Grunde den Bereich der Deformationen oberhalb der Elastizitätsgrenze den Bereich der bleibenden Deformationen, wobei aber festgehalten werden muß, daß auch oberhalb der Elastizitätsgrenze noch federnde Deformationen vorhanden sind, nur wird deren Bedeutung um so geringer, je größer der Spannungszustand wird, oder je mehr wir uns der Zerstörung des Stoffes nähern.

Besonders augenfällig ist bei Beanspruchung auf Zug oder auf Druck das Anwachsen der totalen Dehnungen und Quetschungen für Stoffe, die schon oben als plastische (zähe) Metalle, wie z. B. Flußeisen, eingeführt wurden. Zunächst wollen wir das in dem besonderen Falle der Beanspruchung eines Stabes mit kreisförmigem Querschnitte aus Flußeisen auf Zug verfolgen. Kurz nach Überschreiten der Elastizitätsgrenze biegt die Spannungs-Dehnungskurve stetig, oft auch scheinbar unstetig von der σ -Achse ab und die Dehnungen wachsen in einem mehr oder weniger großen Bereiche, ohne daß im Mittel besondere Spannungsänderungen auftreten. Es kann sogar sein, daß die Dehnungen wachsen und die Spannungen abnehmen. Man sagt, das Flußeisen befinde sich im Streck- oder Fließbereich (siehe hierzu die Schaubilder für Flußeisen, Bronze, Messing in den Abb. 45, 48 und 51, 52), oder auch, es sei die Streckgrenze oder Fließgrenze erreicht. Letztere Bezeichnungsweise wird besonders gebraucht, wenn das Umbiegen der Spannungs-Dehnungskurve nahezu plötzlich (wie in Abb. 48) eintritt, dagegen ist der Name Streckgrenze bei stetigem Umbiegen der Spannungs-Dehnungskurve (wie in Abb. 52) üblich. Aus dem Gesagten geht schon hervor, daß von einer eindeutigen Bestimmung der Streckgrenze im Sinne einer besonderen Spannung nicht gesprochen werden kann. Bach (L) schlägt vor, gegebenenfalls eine obere Fließgrenze σ_z^{oF} und eine untere Fließgrenze σ_z^{uF} (siehe Abb. 48) zu unterscheiden und meint darunter den annähernd größten und kleinsten Wert der Spannungen im Fließbereich. Manchmal sind auch mehrere scharfe Knicke der Kurve in diesem Bereiche zu bemerken, es existieren dann mehrere obere bzw. untere Fließgrenzen.

Das Maximum bzw. Minimum der Spannungen im Fließbereich zeigt sich in einem augenblicklichen Stillstehen und darauffolgenden Zurückgehen (Vor-

gehen) des Kraftzeigers an der Festigkeitsmaschine, unter Zuhilfenahme welcher der Zugversuch ausgeführt wird. Existiert nur eine Streckgrenze, so zeigt sich während der Periode des Streckens eine auffällige Verlangsamung oder auch ein scheinbares Stillestehen des Kraftzeigers trotz unveränderter Geschwindigkeit des Kraftantriebes, z. B. der Pumpengeschwindigkeit bei hydraulischer Kraftübertragung, wenigstens bei den durchschnittlichen nicht besonders kleinen Deformationsgeschwindigkeiten (die Pumpe dient zur Erzeugung des nötigen hydrostatischen Druckes, der den einen Einspannkopf der Maschine relativ zum zweiten bewegt und hierdurch auf dem in den Einspannköpfen befestigten Versuchsstab die Zugkraft erzeugt). Bei größeren Deformationsgeschwindigkeiten ist dieses Verhalten des Kraftzeigers so augenfällig, daß der Beobachter

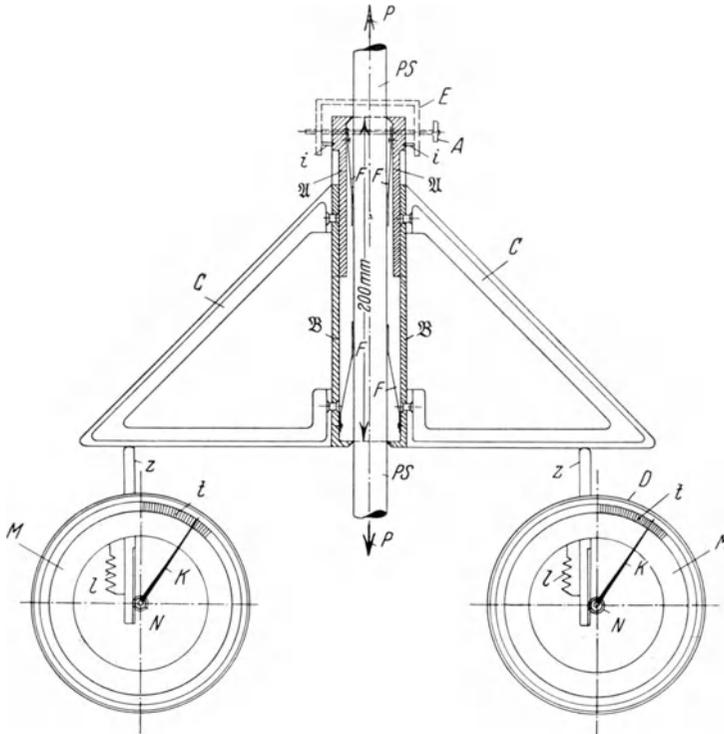


Abb. 60.

hierdurch einen Anhaltspunkt zur Bestimmung eines mittleren Wertes der Fließ- bzw. Streckgrenze gewinnen kann. An jener Einrichtung, z. B. einer Meßuhr (s. unten), welche zur Ermittlung der Längenänderung des Stabes vorgesehen wird, kann man das Erreichen der Streckgrenze (Fließgrenze) an dem raschen Wandern des Zeigers augenfällig beobachten. Unabhängig davon, ob eine Fließ- oder Streckgrenze, also der Beginn des Streckens oder Fließens mehr oder weniger augenfällig durch das Verhalten der Meßeinrichtungen beobachtbar wird, ist der Vorschlag gemacht worden, von der Erreichung der Streck- bzw. Fließgrenze dann zu sprechen, wenn die bleibenden Dehnungen 0,2% oder 0,3%, bezogen auf die ursprüngliche Stablänge, zu überschreiten beginnen. Im folgenden sind Versuchsergebnisse mit einem Stab aus Flußstahl angegeben.

Der als Normalrundstab ausgebildete Probestab besaß eine Meßlänge von 20,07 cm und einen Kreisdurchmesser von 2 cm. Zur Messung der Längenänderung im Bereiche des Streckens kann die Einrichtung nach Abb. 60 verwendet werden. In die beiden mit Schnei-

den 1, 2 versehenen Schienen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$ greifen in schwalbenschwanzförmigen Nuten die beiden gleichfalls mit Schneiden 3, 4 versehenen Schienen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}$ ein. Bei Anlegen der Schneiden an diametral gegenüberliegenden Stellen des Probestabes PS , der unter dem Einflusse der über die Querschnitte gleichförmig verteilt gedachten Zugkraft P steht, gleiten die Schienen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}$ in den Nuten der Schienen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$ dann, wenn eine Verlängerung des zwischen den Schneiden liegenden Stückes (Meßlänge) des Probestabes eintritt. Die Feststellung der Schienen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$ am Probestab erfolgt, nachdem die Schneiden 1, 2 und 3, 4 in am Stabe eingerissene in der Ebene der Schneiden liegende Striche eingesetzt wurden, durch Anziehen der Schraube A , die in dem federnden Bügel E gelagert ist. Durch Vermittlung von in Spitzen auf den Schienen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$ gelagerten Stiften i, i wird die Übertragung der Schraubenkraft auf die Schienen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$ gesichert. Die Federn F, F dienen zur nachgiebigen Lagerung der Schienen am Probestab und zur klaglosen Führung der Schienen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}$ in den zugehörigen Nuten parallel zur Stabachse. An den Schienen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}$ sind zwei im Dreieck gebogene Stäbe C, C

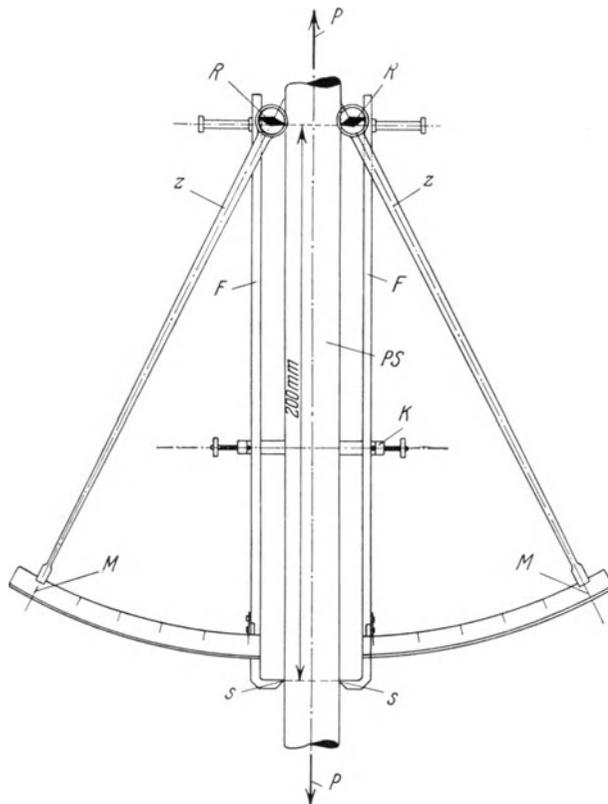


Abb. 61.

aus Aluminium mit biegungssteifen Querschnitten verschraubt, die auf die Fühlerstifte Z, Z zweier geeichter Meßuhren M, M mit $\frac{1}{100}$ mm Teilwert einwirken, wenn eine Verlängerung der Meßlänge eintritt. Die in vertikaler Richtung federnd außerordentlich leicht beweglichen Fühlerstifte sind zum Teile als feine Zahnstangen ausgebildet, die in Zahntriebe N, N eingreifen, auf deren zylindrischen Lagern auf den Teilungen t, t spielende Zeiger K, K sitzen. Werden die Fühlerstifte Z, Z freigegeben, so gehen die Zeiger K, K infolge der Federn l, l von selbst wieder in die Nullstellung zurück. Der Meßbereich einer Meßuhr ist 2 cm, so daß also Verlängerungen von 2 cm des Probestabes noch gemessen werden können. Der Meßvorgang ist der, daß, solange der Stab nicht in den Streckbereich eingetreten ist, zwischen 500 kg und der höher liegenden Belastung so lange hin- und hergegangen wird, bis sich konstante Anzeigen der Meßuhr zeigen. Als Verlängerung λ des Stabes wird das Mittel der Anzeigen der

$$\text{beiden Meßuhren } \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \text{ ge-}$$

nommen. Bei Eintritt des Streckens wird nach Erreichen einer Laststellung und Ablesung an der Meßuhr sofort, und zwar nur einmal bis auf 500 kg zurückgegangen, um die bleibende Dehnung zu konstatieren. Im Streckbereich gehört Übung dazu, um sogleich bei Ausrufen des Kraftwertes die zugehörigen Zeigerstellungen an den Meßuhren abzulesen, da die Zeiger sich verhältnismäßig rasch bewegen (siehe oben).

Die Dreieckansätze C, C können auch weggelassen werden und dafür die am Stabe festen Schienen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$ mit je einer Millimeterteilung und die bei Verlängerung des Stabes bewegten Schienen $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}$ mit einem Nonius versehen werden.

An Stelle der beschriebenen Einrichtungen wird häufig auch der Apparat von Martens-Kennedy zur Messung von Verlängerungen verwendet. Derselbe (Abb. 61) ist im wesentlichen nach Martens gebaut (Seite 81 ff. und Abb. 24 und 24a), nur sind jetzt die Stahlprismen R, R mit Zeigern Z, Z verbunden, die auf Millimeterteilungen M, M spielen. Verdreht sich ein Prima und mit ihm der Zeiger Z um den Winkel φ_1 entsprechend einer Ver-

längerung des Stabes um λ_1 , so gilt die Beziehung $\operatorname{tg} \varphi_1 = \varphi_1 = \frac{\lambda_1}{s}$, wenn s wieder die Länge der Stahlprismen zwischen den beiden Schneiden vorstellt. Der Verdrehung φ_1 sind $D\varphi_1 = n_1$ Teilwerte der Skala M zugeordnet mit D als Zeigerlänge, so daß $\lambda_1 = \varphi_1 s = n_1 \left(\frac{s}{D} \right)$.

Wenn $\frac{s}{D} = \frac{1}{50}$ das gegebene Übersetzungsverhältnis des Instrumentes ist, so entspricht einem Millimeter der Skala $\frac{1}{50}$ mm Verlängerung. Der Meßbereich der Skala beträgt in der Regel 1 mm, d. h. es können Verlängerungen von dieser Größenordnung noch gemessen werden. Zur Ermittlung der Verlängerungen werden stets die Mittelwerte der Ablesungen der zwei Zeigerstellungen genommen.

In folgender Tabelle ist das Versuchsergebnis mit dem oben genannten Stahl zusammengestellt:

Belastung kg	Spannung kg/cm ²	Gesamte Verlängerung $\frac{1}{50}$ mm	Zurückbleibende	
			Verlängerung $\frac{1}{50}$ mm	bezogene Dehnung %
500	159	0	0	0
3000	954	4	0	0
8000	2547,7	12,95	0,3	0,003
12000	3821,6	21,35	0,55	0,0055
13100	4171,9	23,7	0,65	0,0065
14200	4522,3	26,4	0,85	0,0085
14530	4627,4	28,0	1,15	0,0115
15100	4824,8	28,5	1,35	0,0135
15900	5063,7	31,1	1,7	0,017
17200	5477,7	36,55	4,2	0,042
17300	5509,5	38,75	6,15	0,0615

Sieht man von den bis zur Belastung von 500 kg sich einstellenden Dehnungen ab, so ist nach dieser Tabelle die Elastizitätsgrenze nach den Vorschlägen der Materialprüfungsanstalt Groß-Lichterfelde (Seite 152) bei 8000 kg Belastung entsprechend einer Spannung von 2547,7 kg/cm² erreicht. Oberhalb dieser Spannung beginnen die bleibenden Verlängerungen eine wesentlichere Rolle zu spielen (Gebiet der bleibenden Deformationen).

Etwa von der Spannung 5063,7 kg/cm² an ist die starke Zunahme der bleibenden Verlängerungen in die Augen springend. Die 0,3%-Grenze ist aber selbst bei der Spannung von 5509,5 kg/cm² noch nicht erreicht.

Im Bereiche des Fließens (Streckens) tritt bei Flußeisen insbesondere, wenn sog. Flachstäbe verwendet werden, d. h. Stäbe mit rechteckigem Querschnitt,

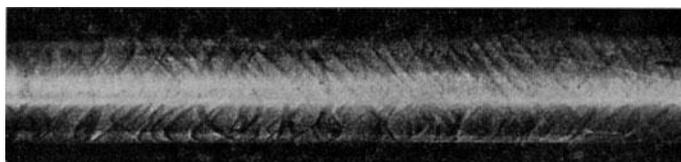


Abb. 62. Fließfiguren an einem Rundstab aus Flußeisen nach Zugbeanspruchung.

eine auffällige Veränderung der ursprünglich glänzend polierten Oberfläche des Stabes auf. Sie wird matt ausschend, wie mit Tau belegt, im weiteren Verlaufe bekommt der Stab oft ein eigentümlich verknittertes Aussehen. Diesen Erscheinungen läuft parallel das Auftreten von Liniensystemen, die etwa unter 45 Grad zur Stabachse geneigt stehen, derart, daß sie ein mehr oder weniger weitmaschiges Liniennetz bilden, für welches der Name Lüderssche (L) oder Hartmannsche (L) Fließfiguren gebräuchlich wurde. (Siehe Abb. 62, 50a und 52a.)

Man kann diese Figuren durch besondere Verfahren deutlich sichtbar machen, z. B. durch das Ätzverfahren (Tauchen der auf 200 bis 300^o erwärmten Stäbe in eine Lösung von HCl und CuCl₂.)*

Nach Überschreiten der Streckgrenze steigt die Spannungs-Dehnungskurve der in Betracht kommenden Stoffe wieder bis zu einem Punkte *H* an (Abb. 45, 48 und 51), der dem Höchstwerte der Zugkraft entspricht (Seite 145). Man spricht von einer Verfestigung des Stoffes in diesem Bereiche. Vom Punkte *H*, dem eine Spannung K_z und eine Gesamtdehnung von e_{K_z} entspricht, fällt die Kurve im technischen σ - e -Schaubild bei den sog. einschnürenden Materialien, z. B. weichem Flußeisen, Stahl, Blei (nicht einschnürende Materialien bei ausgesprochener Streckgrenze sind z. B. gewisse Messing- und Bronzesorten) bis zum Punkte *L*, dem eine Spannung k_z und Gesamtdehnung e_{k_z} zugeordnet ist. K_z heißt in der technischen Mechanik Traggrenze auf Zug oder Zugfestigkeit, k_z Bruchgrenze auf Zug, e_{k_z} Bruchdehnung. Wenn für die betreffenden Stoffe die Spannung den Wert K_z erreicht hat, oder schon bei etwas kleineren Werten setzt die Einschnürung und damit zusammenhängend die lokale Dehnung ein (Seite 139ff.). Für nicht einschnürende Stoffe mit Streckgrenze und sog. spröde Stoffe (Gußeisen, Steine) fallen die Werte von K_z und k_z zusammen (Abb. 46, 52). Die Werte K_z und k_z bzw. e_{K_z} im technischen σ - e -Schaubild für plastische und zähe Stoffe sind gegen den wahren Wert der Spannung beim Bruch, für welchen P. Ludwik (*L*) den Namen Reißwiderstand vorschlägt, bzw. die im Bereiche des dem Versuche unterworfenen Zugstabes auftretenden maximalen Dehnungen bekanntlich zu klein. Doch haben K_z und e_{K_z} den Vorzug leichter Bestimmung für sich. Infolge Abweichung ihrer Zahlenwerte im negativen Sinne vom Reißwiderstand und von der maximalen lokalen Bruchdehnung läuft die Wertbeurteilung z. B. der betreffenden Sorte Flußeisen auf Grund der üblichen Ermittlung von K_z und e_{K_z} auf die Einführung eines Sicherheitsgrades gegen die Überwindung der dem Reißwiderstand gleichkommenden Kohäsion bzw. der ohne Bruch erreichbaren wirklichen Dehnung hinaus. Für spröde Stoffe weicht das Gesetz, welches für die Zugbeanspruchung den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen oberhalb der Elastizitätsgrenze festlegt, von jenem, welches unterhalb der Elastizitätsgrenze gültig ist, bei weitem nicht in dem Maße ab, wie es für plastische und zähe Stoffe in einem Beispiel geschildert wurde. (Vgl. hierzu die Spannungsschaubilder von Flußeisen, Gußeisen und Marmor in den Abb. 45, 46 und 47.)

Die spezifische Deformationsarbeit bei Beanspruchung eines Stabes auf Zug bis zu einer Spannung gleich K_z (Abb. 55) ist laut Gleichung (53a) auf Seite 100 durch

$$(a_i) = \int_0^{e_{K_z}} \sigma_z d e_z = f_{K_z} = \frac{1}{F l} \int_0^{\lambda_{K_z}} P_z d \lambda_z$$

gegeben, wenn F bzw. l die Querschnittsfläche bzw. Meßlänge des Versuchsstabes, $\sigma_z = \frac{P_z}{F}$, ferner $e_z = \frac{\lambda_z}{e}$ und f_{K_z} die in Abb. 55 schraffierte Fläche des σ - e -Schaubildes bedeuten. Diese einfache Überlegung gilt bei einschnürenden Stoffen nur bis etwa zum Punkte *H* des σ - e -Schaubildes, denn im weiteren Bereiche desselben bis zum Bruch setzen nach obigem örtliche Dehnungen ein. In Wirklichkeit kann der Stoff mit dem schematischen σ - e -Schaubild nach Abb. 55 eine viel größere Formänderungsarbeit aufnehmen, weil a) bei Berechnung der Formänderungsarbeit pro Raumeinheit die Spannungen σ_z auf die ursprüngliche

* Siehe hierzu A. Fry (*L*) und L. Prandtl (*L*).

Querschnittsfläche bezogen sind und weil b) die sehr erhebliche lokale Formänderungsarbeit, die nach Erreichen der Höchstlast um die Einschnürungsstelle herum aufgespeichert wird, nicht mitgerechnet worden ist.

Für eine bestimmte sehr dehnbare Sorte Flußeisen, für welche $K_z = 3694 \text{ kg/cm}^2$ und $e_{kz} = 0,25$ war, ergab sich die wie oben geschildert berechnete Formänderungsarbeit mit $9,08 \text{ mkg/cm}^3$ auf eine Meßlänge von 20 cm und einen Durchmesser des kreiszylindrischen Versuchsstabes von 2 cm. Dagegen ergab sich für ein sehr wenig dehnbares Gußeisen das „Arbeitsvermögen“ bis zum Bruch nur mit $0,071 \text{ mkg/cm}^3$.

Völlig analoge Erfahrungen und Überlegungen ergeben sich in vielen Hinsichten auch für die Beanspruchung von plastischen und zähen Körpern auf Druck. Dieselben zeigen in Zylinder- oder Würfelform oberhalb der Elastizitätsgrenze auf Druck ein rasches Zunehmen der bleibenden Quetschungen. Die starke Änderung der Quetschungen kurz nach Überschreiten der Elastizitätsgrenze auf Druck bei geringer Änderung der Spannung macht sich wieder in einer Verlangsamung bzw. einer scheinbaren Stilllegung oder sogar auch einem Zurückgehen der Bewegung des Manometerzeigers an der Festigkeitsmaschine und durch das Auftreten von Fließfiguren (Abb. 63) auffällig deutlich. Dementsprechend wird auch bei derartigen Körpern von einer Streck- bzw. Fließgrenze auf Druck gesprochen, die auch kürzer als Quetschgrenze bezeichnet wird. Die Streckgrenze kann fallweise wieder als 0,2%-oder 0,3%- Grenze festgelegt werden. Nach Durchschreiten des Streck- bzw. Fließbereiches zeigt sich bei Flußeisen ähnlich wie bei Beanspruchung auf Zug eine Verfestigung (Abb. 45), ein wirklicher Bruch tritt aber nicht ein, weil das Material nach der Seite zu ausweicht. Aus diesem Grunde bezeichnet man aus praktischen Gründen die Quetschgrenze als Druckfestigkeit K_D oder Traggrenze auf Druck.

Eine ausgesprochene Bruchgrenze $k_D = K_D$ auf Druck haben die spröden Stoffe, für welche übrigens das oben für sie bezüglich des Verhaltens oberhalb der Elastizitätsgrenze bei Beanspruchung auf Zug Gesagte auch bei Beanspruchung auf Druck in entsprechender Übertragung gilt. Besonders hervorzuheben wäre die Tatsache, daß spröde Stoffe im allgemeinen eine bedeutend höhere Bruchgrenze auf Druck als auf Zug aufweisen. So ist beispielsweise das Verhältnis $k_z:k_D$ für aus einem Teil Zement, drei Teilen gewaschenem Quarzsand von normalisierter Korngröße und einem experimentell festzulegenden Zusatz von Wasser nach einer Erhärtingszeit von 28 Tagen (1 Tag an der Luft, 27 Tage unter Wasser), etwa 1:8 ($k_z = 25 \text{ kg/cm}^2$, $k_D = 200 \text{ kg/cm}^2$), ferner gibt es Gußeisensorten, bei welchen dieses Verhältnis 1:4 ($k_z = 2000 \text{ kg/cm}^2$, $k_D = 8000 \text{ kg/cm}^2$) ist usw.

Wenn die Druckspannung des Stabes beim Bruch so erhoben wird, wie das für das technische σ - ϵ -Schaubild geschieht, so erhält man eine etwas zu große Druckfestigkeit. Ein weit bedeutenderer Einfluß auf die Druckfestigkeit kommt aber der Reibung zu. Durch sie wird die Druckfestigkeit wesentlich erhöht (siehe S. 186 u. 235).

Wird ein elastischer fester Körper so durch im Gleichgewichte befindliche äußere Kräfte beansprucht, daß sich im ganzen Bereiche des Körpers im allgemeinen ein seiner Art nach von Punkt zu Punkt veränderlicher Spannungszustand herstellt, so kann bei Wachsen der Größe des äußeren Lastsystems nach Überschreiten der Elastizitätsgrenze in bestimmten Bereichen des Körpers

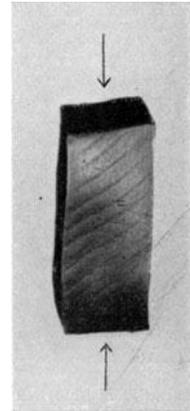


Abb. 63. Fließfiguren an einem auf Druck beanspruchten Prisma aus Siliziumstahl.

ein Fließen und schließlich der Bruch eintreten. Dementsprechend wird auch für eine beliebige Art des Spannungszustandes von einer Bruchgrenze (relativer Festigkeit siehe S. 23) evtl. einer Fließgrenze, deren Definition ähnlich jener der Elastizitätsgrenze auf Seite 153 erfolgen müßte, die Rede sein können. Nur ergibt sich dabei die eigentümliche Tatsache, daß nicht nur die Konstitution des Körpers, sondern auch die Art des Spannungszustandes selbst dafür mitbestimmend ist, ob z. B. Fließen oder ein dem Fließen ähnlicher Gleitzustand oberhalb der Elastizitätsgrenze eintritt oder nicht (S. 137 unter 1). Es können Stoffe, die sich bei linearer Beanspruchung spröde verhalten, bei einem mehrdimensionalen Spannungszustand plastisch werden. Schon F. Kick (L) und nachher L. Prandtl (L) und T. v. Kármán (L) haben gezeigt, daß z. B. Marmor, also ein unter gewöhnlichen Verhältnissen spröder Stoff, dann, wenn man ihn unter allseitig hohen Druck setzt, sich bei zusätzlicher Beanspruchung auf reinen Zug (Druck oder Biegung) sich wie ein plastischer Körper verhält, also z. B. wie Flußeisen; ein Marmorzylinder, der unter hohen allseitigen Druck gesetzt wird und dann zusätzlich auf Druck parallel zu seiner Achse beansprucht wurde,

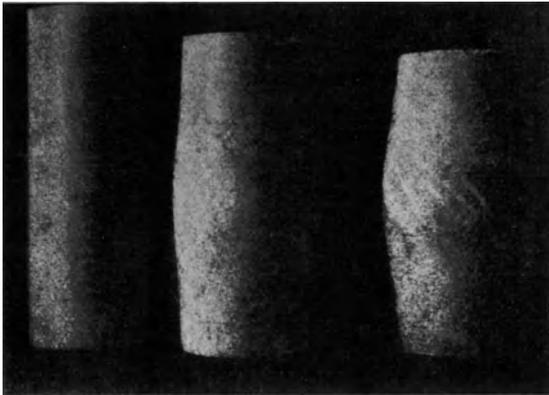


Abb. 64. Marmorzylinder unter 685 und 500 Atmosphären allseitigem Druck und zusätzlicher Druckbeanspruchung parallel zur Achse (nach T. v. Kármán).

zeigte eine ähnliche tonnenförmige Ausbauchung wie ein auf Druck beanspruchter Zylinder aus Flußeisen und auch ein Liniensystem ähnlich den Lüderschen Figuren (Abb. 64). Es kann aber auch andererseits, wie P. Ludwik (L) ausführt, ein zäher plastischer Körper, z. B. Flußeisen, im Falle mehrdimensionaler Beanspruchung sich wie ein spröder verhalten, d. h. zum Bruch kommen, ohne überhaupt Fließerscheinungen gezeigt zu haben.

Für die Fließ- bzw. Bruchgrenze für wenigst durchschnittlich isotrope und ho-

mogene Stoffe bei allgemeinem Spannungszustand erhebt sich wieder die Frage nach jener physikalischen Größe, die das Erreichen dieser Grenzen unabhängig von der Art des Spannungszustandes bestimmt. Es wäre möglich, daß auch für diese Grenzen ähnliche Überlegungen angewendet werden könnten wie auf Seite 153ff. mit Bezug auf die Elastizitätsgrenze. Im übrigen sei hier auf die Auseinandersetzungen im Punkte 39 (Seite 179ff.) verwiesen.

36. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung).

Hysterese. Ein Stab aus wenigstens durchschnittlich isotropem und homogenem Stoff werde auf Zug bis zu einer bestimmten Spannung σ sehr langsam belastet und hierauf entlastet. Wir verfolgen an der Hand des Versuches die Zuordnung der Spannungen und Dehnungen bei Belastung und Entlastung. Es zeigt sich im allgemeinen, daß a) die Spannungs-Dehnungskurve bei Entlastung von der Spannungs-Dehnungskurve bei Belastung abweicht, und zwar um so mehr, je höher die obere Grenzspannung σ bei der Belastung war, b) bei der Entlastung einem Werte der Spannung eine größere Dehnung der ursprüng-

lichen Stablänge entspricht als jene ist, welche sich bei Belastung für die gleiche Spannung einstellt, c) der Charakter der Entlastungskurve häufig ein anderer ist als jener, der der Kurve bei Belastung zukommt. Zu dem unter a) und b) Gesagten siehe die Abb. 65 und 66a, 66b und 66c, die sich auf Flußstahl beziehen. Abb. 65 zeigt das P - λ -Schaubild, welches sich ergibt, wenn der Versuchsstab fortlaufend von den mit 0 bis 13 bezeichneten Belastungen entlastet und wieder steigend belastet wird, bis er schließlich bricht. Die Abb. 66a, 66b und 66c zeigen in den schraffierten Flächen (Seite 164) den Arbeitsverlust, welcher eintritt, wenn der Versuchsstab der Reihe nach bis etwas über die Elastizitätsgrenze, etwas über die Fließgrenze, schließlich etwas unter die Höchstlast belastet und hierauf jedesmal entlastet wird. Im ersten Falle ist derselbe kaum

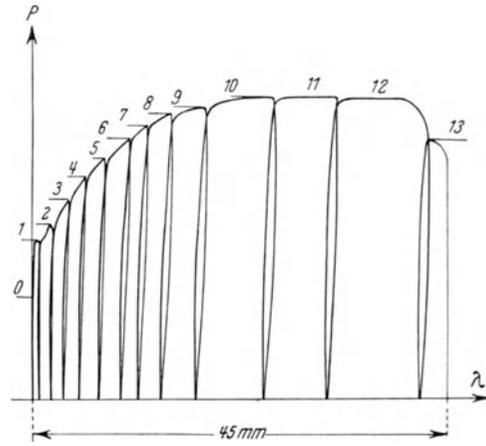


Abb. 65.

vorhanden, er wird um so größer, je höher die Belastung wird. Dieser Arbeitsverlust zeigt sich durch das Auftreten von Wärme- und magnetischer Energie.

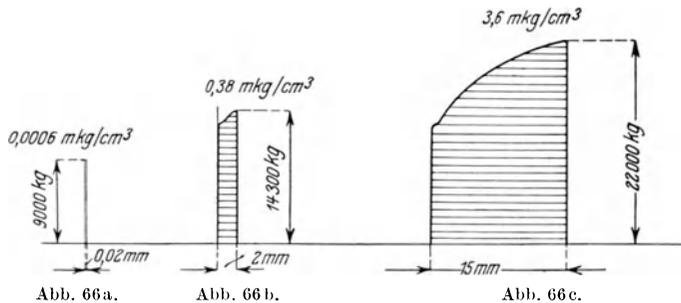


Abb. 66a.

Abb. 66b.

Abb. 66c.

Ein zerrissener Stab aus Flußeisen fühlt sich unmittelbar nach dem Zerreißen in der Umgebung der Bruchstelle, wo örtlich besonders starke bleibende Deh-

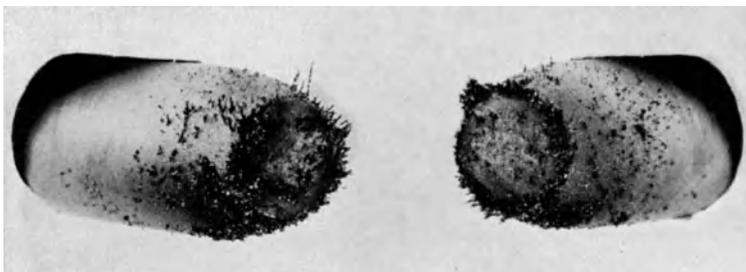


Abb. 67. Bruchenden eines Rundstabes aus Flußeisen mit angezogenen Eisenfeilspänen nach Bruch bei Zugbeanspruchung.

nungen auftreten, heiß an, und Eisenfeilspäne werden in diesem Bereiche angezogen (Abb. 67).

Ganz analoge Erscheinungen, wie die beschriebenen, zeigen sich bei Magnetisierung von Eisen und anderen magnetisierbaren Körpern. Die Rolle der Spannung wird dann durch

die magnetische Feldstärke, jene der Dehnungen durch die magnetische Induktion übernommen.

Die Erscheinung des Eintrittes eines Arbeitsverlustes bei Entlastung eines auf Zug beanspruchten Stabes, die sich im σ - e -Schaubild in der Verschiedenheit der Belastungs- und Entlastungskurve zeigt, heißt elastische oder unelastische Hysterese, je nachdem sich der Belastungs- und Entlastungsvorgang ganz im Gebiete der elastischen Formänderung oder teilweise im Gebiete der unelastischen Deformationen befindet. Belastungs- und Entlastungskurve zusammen wird als Hysteresschleife bezeichnet. Im elastischen Gebiet ist die Hysteresschleife, wenn von den geduldeten Deformationsresten abgesehen wird, eine geschlossene Kurve.

Ähnliche Hystereseerscheinungen wie bei Beanspruchung auf Zug zeigen sich auch bei Beanspruchung eines Zylinders oder Würfels auf Druck bei aufeinanderfolgender Belastung und Entlastung.

Manche der eingangs erwähnten Stoffe zeigen eine sehr geringe, kaum in Betracht kommende elastische Hysterese, wie z. B. gehärteter Stahl, andere (Gußeisen) zeigen dieselbe in besonders ausgesprochenem Maß. Für Kristalle ist nicht nur die elastische Hysterese, sondern auch die unelastische häufig verschwindend klein (Quarz).

Als besonders in die Augen springendes Beispiel für das oben unter c) über die Änderung des Charakters der σ - e -Kurve bei Belastung und darauffolgender Entlastung Gesagte, wäre weiches ausgeglühtes Kupfer anzuführen, das im Gebiete der elastischen Hysterese nahezu eine geradlinige Entlastungskurve entsprechend dem Hookeschen Gesetze, dagegen eine Belastungskurve besitzt, die von der Geraden abweicht.

Wenn bei zwei aufeinander folgenden Wechslen eines Sinnes (Zug oder Druck) von Belastung und Entlastung der Belastung im zweiten Wechsel absolut genommen ein höherer oberer Grenzwert als jener bei der ersten Belastung entspricht, so ist die Hysteresschleife des zweiten Wechsels in der Richtung der Dehnungen (Quetschungen) im allgemeinen größer als beim ersten Wechsel, d. h. die bleibenden positiven oder negativen Verformungen für ein und dieselbe Spannung wachsen ihrem absoluten Zahlenwerte nach. (Siehe schematische Abb. 68 und Abb. 65.)

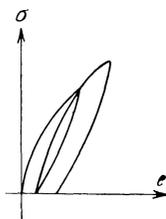


Abb. 68.

Wenn man einem Stab aus Flußeisen oder Gußeisen im Bereiche elastischer Hysterese mehrere Male hintereinander Wechsel zwischen denselben Spannungen aufzwingt, so zeigt sich die Hysteresschleife merkwürdigerweise nach einer gewissen Zahl von Wechslen gleichbleibend. Die Verwertung dieser als Akkommodation bezeichneten Erscheinungen wurde schon im Punkte 32 (Seite 151) anlässlich der Besprechung der federnden und bleibenden Dehnungen eines durch Zug beanspruchten Stabes erwähnt.

Auch im Falle allgemeiner räumlicher Spannungszustände existieren der Hysterese bei linearer Beanspruchung entsprechende analoge Erscheinungen, denen zufolge das Gesetz des Zusammenhanges der Spannungen und Dehnungen bei Entlastung im allgemeinen anders beschaffen ist als jenes bei Belastung. Allgemeine diesbezügliche Gesetze sind derzeit noch nicht gefunden. Die wenigen Ergebnisse fallen als zu weitführend aus dem Rahmen dieses Buches.

37. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung).

Nachwirkungerscheinungen. Bisher wurde stets die Voraussetzung gemacht, daß die äußeren Belastungen und Entlastungen theoretisch unendlich langsam, praktisch sehr langsam durchgeführt werden, und daß sich der Stoff vor Inanspruchnahme in seinem jungfräulichen Zustande befinde (Seite 137). Diese An-

nahmen sollen nun fallen gelassen werden, wodurch es notwendig wird, einen neuen und sehr wichtigen Einfluß auf das den Spannungs- und Verzerrungszustand verbindende Gesetz, bzw. auf einzelne in dasselbe eintretende besonders wichtige Größen (Proportionalitäts-, Elastizitäts-, Fließ-, Bruchgrenze), den der Zeit zu erörtern.

Wir denken uns einen wenigstens durchschnittlich isotropen und homogenen Körper bei gegebener Art der kontinuierlich wirkend gedachten äußeren Belastung von der Belastung Null in einer bestimmten Zeitdauer auf einen Endbelastungszustand, dessen Wirksamkeitsdauer offen gelassen wird, gebracht, derart, daß zu jedem Zeitaugenblick Gleichgewicht zwischen der äußeren Belastung, den Reaktionskräften und den fallweise nicht mehr zu vernachlässigenden Trägheitskräften besteht. Man wird dann im allgemeinen zu jeder Zeit von einer bestimmten Belastungsgeschwindigkeit als Zunahme der Belastung pro Zeiteinheit, ferner in jedem Punkte von einer inneren Beanspruchungsgeschwindigkeit, charakterisiert durch die Zunahme der Größe des Spannungszustandes pro Zeiteinheit und von einer bestimmten Verformungsgeschwindigkeit (Seite 45ff.) sprechen können oder zusammenfassend von einer im allgemeinen in der Zeit veränderlichen Versuchsgeschwindigkeit. Man würde, wenn man auf Grund der bisher eingeführten Erfahrungstatsachen Schlüsse ziehen wollte, zur Meinung kommen können, daß z. B. durch Angabe der Belastungsgeschwindigkeit auch bereits die Verformungs- und innere Beanspruchungsgeschwindigkeit gegeben seien: die noch zu besprechenden Erfahrungstatsachen zeigen aber, daß eine solche Meinung nicht richtig wäre. Wenn z. B. die Belastungsgeschwindigkeit Null wird, also das äußere Kraftsystem konstant ist (dauernd zur Wirksamkeit gelangt), braucht nicht auch die Verformungsgeschwindigkeit Null zu sein, wenn umgekehrt letztere Null ist, braucht für bestimmte Stoffe noch nicht die Beanspruchungsgeschwindigkeit zu verschwinden; es kann die Verformungs- und Beanspruchungsgeschwindigkeit sich ändern ohne Änderung der Belastungsgeschwindigkeit, ja sogar ohne Wirksamkeit eines zugeordneten äußeren Belastungssystems.

Es zeigt sich ferner, daß das die Spannungen und Dehnungen verbindende Gesetz nicht nur von der Versuchsgeschwindigkeit selbst, sondern von der der Belastung der Zeit nach vorhergegangenen Inanspruchnahme des Stoffes (S. 137, 4), d. h. der Vorgeschichte des Stoffes, abhängig ist. Demgemäß kann die Abhängigkeit jenes Gesetzes von der Zeit in einem sehr allgemeinen Sinn betrachtet werden, insoferne a) der Zeitpunkt der Untersuchung des Stoffes in dem ganzen Zeitraum, in welchem der Stoff überhaupt verwendet wird, eine Rolle spielt und b) insoferne die Versuchsgeschwindigkeit selbst als eine Funktion der Zeit angesehen werden kann.

Alle Erscheinungen, welche durch Rücksichtnahme auf, sei es die Versuchsgeschwindigkeit, sei es die Geschichte des Stoffes, zwar nicht ihre Erklärung im letzten Sinne dieses Wortes, wohl aber ihre kausale Verknüpfung finden, sollen im folgenden als Nachwirkungserscheinungen bezeichnet werden. Mit Bezug auf die Geschichte des Stoffes ist diese Bezeichnungsweise ohne weiteres klar, wir werden sie dementsprechend solche im engeren Sinne nennen. Aber auch mit Bezug auf die Versuchsgeschwindigkeit ist sie berechtigt, insofern die in der Versuchsgeschwindigkeit ihren Ausdruck findenden Komponenten, das sind Belastungsgeschwindigkeit, Verformungsgeschwindigkeit und innere Beanspruchungsgeschwindigkeit sich in der Zeit in besonderer Weise auswirken und in eigenartigen Erscheinungen zutage treten, die wir als Nachwirkungserscheinungen im weiteren Sinne einführen wollen.

Sämtliche Nachwirkungserscheinungen sollen ferner in elastische und unelastische eingeteilt werden, je nachdem sie ganz im sog. elastischen Ge-

biete oder ganz oder teilweise im sog. unelastischen Gebiete des Stoffes liegen.

Die im vorhergehenden Punkte besprochene Hysterese muß, wenn sie auch bei sehr kleiner Belastungs- und Entlastungsgeschwindigkeit erfolgt, dann zu den Nachwirkungserscheinungen im engeren Sinne des Wortes gerechnet werden, wenn die Belastung, die der Entlastung vorausgeht, in die Geschichte des Materiales einbezogen wird.

Wir wollen uns nunmehr zur Beschreibung einiger der auffälligsten Nachwirkungserscheinungen der Mehrzahl nach im engeren Sinne des Wortes wenden. Es handelt sich dabei durchwegs um lineare Spannungszustände.

1. Verzögerte Deformation. W. Weber (L) dehnte einen Seidenfaden über seine Elastizitätsgrenze durch eine kontinuierlich wirkende Kraft und entlastete ihn hierauf plötzlich. Er beobachtete die Verlängerung des Seidenfadens bei Aufbringen der Belastung und dessen Verkürzung nach Abbringen der Belastung und sah, daß der Faden nach der Entlastung beinahe plötzlich sich stark verkürzte, hierauf durch längere Zeit in seiner Länge sehr wenig stark abnahm, um schließlich einen in der Zeit konstanten Deformationsrest aufzuweisen.

In der Lehre vom Elektromagnetismus entsprechen die Stadien der Verlängerung und Verkürzung des Fadens dem permanenten, temporären und remanenten Magnetismus eines Elektromagneten.

Nach den obigen allgemeinen Auseinandersetzungen haben wir es hier mit einer unelastischen Nachwirkungserscheinung zu tun. Die Belastung und demzufolge die Belastungsgeschwindigkeit während der Dauer der Nachwirkungserscheinung, d. i. der Verkürzung des Fadens, ist konstant Null, nichtsdestoweniger ist eine Deformation und eine Deformationsgeschwindigkeit, die eine Funktion der Zeit vorstellt, während der Dauer der Kürzung des Fadens vorhanden. Diese Erscheinung heißt die der verzögerten Deformation.

Ähnlich wie der von Weber untersuchte Faden, verhält sich Leder nach einer Beanspruchung auf Zug. Auch Metalle zeigen diese Nachwirkungserscheinungen, z. B., wenn auch im geringen Maße, der zur Erzeugung von Längen- und Winkelmaßen vielfach verwendete gehärtete Stahl, was der geforderten Konstanz der Teil- bzw. Mittelwerte abträglich erscheint.

Die verzögerte Deformation macht sich auch als Begleiterscheinung der elastischen Hysterese, besonders aber der unelastischen Hysterese bemerkbar. Nach Abbringen der Belastung braucht es noch einige Zeit, oft auch sehr lang, bis der endgültige Deformationszustand hergestellt ist. (Siehe hierzu die Festlegung der Elastizitätsgrenze auf Seite 152.)

Die verzögerte Deformation bei Metallen ist wahrscheinlich auf Spannungen zurückzuführen, die nach Abbringen der Belastung im Versuchsstabe zurückbleiben (daher Nachspannungen genannt), die das Bestreben haben, dem Stab wieder die ursprüngliche Länge zu geben. (Siehe hierzu H. Hencky (L).) Bei dieser Annahme ist also der Deformationsgeschwindigkeit nach Abbringen der Belastung eine Geschwindigkeit der Spannungsänderung zugeordnet, ohne daß äußere Belastungen vorhanden wären.

Das Zuordnungsgesetz der Spannungen und Deformationen bei der Nachkürzung ist noch nicht gefunden worden, dagegen hat sich gezeigt, daß das Gesetz

$$e_x = e_0 + \sum C e^{-Kt}, \quad (85)$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen, e_x die zurückbleibende bezogene Dehnung zur Zeit t , e_0 den endgültigen auf die Längeneinheit bezogenen Deformationsrest (die endgültig zurückbleibende Dehnung) C und K Konstante des Materiales sind, den Sachverhalt der verzögerten Deformation gut wiedergeben kann. Für $t = \infty$ ist nach diesem Gesetz der endgültige Verformungszustand erreicht.

2. Bauschinger Effekt. Bauschinger (L) machte Versuche mit Stäben und Prismen aus Bronze, Zink und Bessemerstahl. Er belastete dieselben auf Zug (Druck) bis zur Elastizitätsgrenze, ging dann mit der Belastung über die Elastizitätsgrenze hinaus, entlastete und erhob a) unmittelbar neuerdings die Elastizitätsgrenze, b) schaltete nach Entlastung eine Ruhepause ein und bestimmte dann wieder die Elastizitätsgrenze. Es zeigte sich im Falle a), daß die Elastizitätsgrenze höher als ursprünglich lag. Im Falle b) ergab sich eine weitere Erhöhung der Elastizitätsgrenze mit Bezug auf jene, welche im Falle a) vorhanden war. Ähnliches ergab sich auch mit Bezug auf die Streckgrenze. Die Nachwirkung einer vorhergegangenen Belastung bestand hier somit in einer Erhöhung der Elastizitäts- (Streck-)grenze und es zeigte sich ein Einfluß der Zeit, welcher zwischen Entlastung und neuerlicher Belastung verstrichen war. Die Einflußnahme auf das Zuordnungsgesetz zwischen Spannungen und Dehnungen bei der Wiederbelastung fand hier seinen Ausdruck in der Änderung des Bereiches der federnden Dehnungen (Quetschungen).

Ferner unternahm Bauschinger Versuche bei wechselnder Beanspruchung auf Zug und auf Druck mit Schweißstahl und Bessemerstahl. Zuerst wurde die Elastizitätsgrenze auf Zug und auf Druck bestimmt, hierauf ein noch nicht beansprucht gewesener Stahl bis über seine Elastizitätsgrenze auf Zug beansprucht, dann wurde entlastet und die Elastizitätsgrenze auf Zug und Druck neuerdings ermittelt; die erstere zeigte sich erhöht, die letztere erniedrigt gegenüber den ursprünglich vorhanden gewesenen Elastizitätsgrenzen. Der auf die beschriebene Weise belastet und entlastet gewesene Stab wurde hierauf auf Druck bis über die ursprüngliche Elastizitätsgrenze belastet, es zeigte sich nunmehr eine Herabsetzung der Elastizitätsgrenze auf Zug, eine Erhöhung der Elastizitätsgrenze auf Druck mit Bezug auf jene Grenzen, welche nach der ersten Wiederbelastung sich ergeben hatten. Eine neuerliche Belastung erhöht sonach die Elastizitätsgrenze, die ihr entspricht und setzt die entgegengesetzt bezeichnete Elastizitätsgrenze hinab. Ein Einfluß von Ruhepausen zwischen der Belastung von Zug und auf Druck war nicht oder nur in sehr geringem Maße zu konstatieren.

Die geschilderten Erscheinungen werden unter dem Namen Bauschinger Effekt zusammengefaßt.

Ein neueres Versuchsergebnis von Masing-Mauksch (L) sei hier zahlenmäßig angeführt. Für gezogenes Messing ergab sich bei Anlieferung eine Elastizitätsgrenze auf Zug von 2400 kg pro cm² eine solche auf Druck von 1760 kg/cm². Das bei Erhebung der Elastizitätsgrenze auf Druck beansprucht gewesene Messing wurde dann zusammengedrückt, derart, daß sich eine Quetschung von 1,7% bezogen auf die ursprüngliche Meßlänge ergab. Hierauf wurde neuerlich die Elastizitätsgrenze auf Zug und auf Druck bestimmt. Sie ergab sich jetzt auf Druck mit 2870 kg/cm² auf Zug mit 850 kg/cm².

3. Die Gesetze von Wöhler. Ermüdung des Materiales. Anschließend an die Besprechung des Bauschinger Effektes bei wechselnder Beanspruchung auf Zug und Druck ist nunmehr die gerade in der heutigen Zeit sehr wichtig gewordene Frage nach der den Charakter einer Nachwirkungserscheinung tragenden Einflußnahme einer sehr oft wechselnden Aufbringungs- bzw. Beanspruchungsart (Seite 8ff.) auf die relative Festigkeit eines vorgeschriebenen Stoffes wenigstens in den Grundlinien zu erörtern. Eine oftmals wechselnde Aufbringungsart mit wechselnder oder gleicher Beanspruchungsart wird häufig als Dauerbeanspruchung bezeichnet, deren Wirkung auf einen vorgeschriebenen Werkstoff im Laboratorium in den sog. Dauerversuchen erprobt wird.

Die Feststellung der hierher gehörigen Grundtatsachen geht auf Wöhler (L) und Bauschinger (L) zurück. Das Ergebnis der Wöhlerschen Versuchsreihen, die die Untersuchung der Festigkeit von Stäben aus verschiedenen Stoffen bei

wechselnden Beanspruchungs- bzw. Ausbringungsarten auf Zug, Zug und Druck, Verdrehung (Seite 155) und auf Biegung (im letzteren Falle waren die Stäbe als Kragträger ausgebildet und in der Längssymmetrieebene durch eine Einzelkraft belastet, derart, daß die Kraft den Stab abwechselnd in verschiedenen Richtungen durchbog), zum Gegenstande hatten, wird als Wöhlersches Gesetz wie folgt ausgesprochen.

Der Bruch eines Materiales läßt sich auch durch vielfach wiederholte Schwingungen, von denen keiner die Bruchgrenze bei gewöhnlich statischer Beanspruchung erreicht, herbeiführen. Die Differenzen der Spannungen, welche die Schwingungen eingrenzen, die auch als Anspannungen bezeichnet werden, sind dabei für die Störung des Zusammenhanges maßgebend. Die absolute Höhe der Grenzspannungen ist nur insoweit von Einfluß, als mit wachsenden Spannungen die Differenzen, welche den Bruch herbeiführen, sich verringern. In die Differenzen der Spannungen sind die letzteren mit ihren Zeichen einzuführen.

Um dieses Gesetz klar hervortreten zu lassen, wählen wir ein von Wöhler gegebenes Beispiel. Eine Flußeisensorte besitzt eine durch Versuch erhobene Zugfestigkeit von $K_z = 3250 \text{ kg/cm}^2$. Auf einen zweiten Versuchsstab wird wechselnd eine Zuglast auf- und wieder abgebracht, so daß die Zugspannung zwischen Null und einem oberen Werte σ_{zu} schwankt. Es fragt sich um jene obere Grenzspannung, welche von dem Material noch beliebig oft ertragen wird, ohne daß der Stab bricht. Die Frage wurde von Wöhler dadurch zur Lösung gebracht, daß er den Versuchsstab in eine von ihm erbaute Festigkeitsmaschine einspannte, die es gestattete den Stab auf selbsttätige Weise zwischen Null und einer oberen einstellbaren Spannung beliebig oft zu beanspruchen. Er fand die obere Grenzspannung mit $K_{zu} = 2190 \text{ kg/cm}^2$, also bedeutend kleiner als K_z . In ähnlicher Weise wurde gefunden, daß ein dritter Stab aus dem gleichen Stoffe bei wechselnder Beanspruchung auf Zug und gleich hoher Beanspruchung auf Druck eine positive bzw. negative Grenzspannung $K_{zs} = \pm 1170 \text{ kg/cm}^2$ beliebig oft ertrug. Der Wert von K_{zs} ist also wieder kleiner als K_{zu} . Wöhler fand auch bei Fortsetzung seiner Veruche, daß ein Wechsel von Zugspannungen zwischen 3220 kg/cm^2 und 1750 kg/cm^2 noch beliebig oft ertragen wird, woraus ersichtlich ist, daß bei Anwachsen der oberen Grenzspannung die Differenz der Spannungen, welche noch beliebig oft getragen wird, kleiner ist als bei kleineren Werten der oberen Grenzspannung. Das Verhältnis der positiven Grenzspannung an der Grenze in den drei Fällen ist sonach annähernd

$$K_z : K_{zu} : K_{zs} = 3 : 2 : 1.$$

Nach neueren Versuchen von H. Moore (L) ergab sich für Stahl ein wesentlich günstigeres Verhältnis der drei Werte, nämlich $1 : 0,8 : 0,5$. Man nennt etwas unzutreffend K_{zu} die Ursprungsfestigkeit bei Beanspruchung auf Zug zwischen Null und einer positiven Grenzspannung, K_{zs} die Schwingungsfestigkeit auf Zug und Druck zwischen zwei gleich hohen entgegengesetzten Beanspruchungen.

Eine Festigkeit bei wechselnder Aufbringungsart und wechselnder Beanspruchungsart, die durch die Größen gewisser Grenzspannungszustände, die natürlich auch nicht linearer Art sein können, gegeben ist, wird als Dauer- oder Arbeitsfestigkeit bezeichnet (Seite 24). Die Arbeitsfestigkeit kann zahlenmäßig durch die Größenwerte der Spannungskomponenten (Hauptspannungen) der Grenzspannungszustände, die gerade noch beliebig oft getragen werden oder in einer sonstigen, durch Vereinbarung geregelten Art festgelegt werden. Die Eigenschaft der Werkstoffe, bei wechselnder Beanspruchungs- und wechselnder Aufbringungsart eine Herabsetzung der Festigkeit zu erfahren, hat man mit dem Namen der Ermüdung des Materiales belegt.

Tetmayer (L) sucht die Wöhlerschen und Bauschingerschen sowie eigene Resultate, soweit sie sich auf wechselnde Zug- und Druckbeanspruchungen beziehen, in eine praktische Formel zu bringen, die sich für plastische Metalle (Flußeisen) gut bewährt hat. Er setzt die Arbeitsfestigkeit A_n , die als zahlenmäßig größerer Wert der Grenzspannungen angesehen wird, in Abhängigkeit von dem Material von der Aufbringungs- und Beanspruchungsart durch die Beziehung

$$A_n = a + b n + c n^2 \quad (86)$$

an, worin $n = \frac{P_{\min}}{P_{\max}}$ d. i. das Verhältnis der minimalen zur maximalen Last des Stabes bedeutet und a, b, c Materialkonstante sind. Für die Festigkeit bei statischer Beanspruchung K_z , die Ursprungsfestigkeit K_{zu} bzw. die Schwingungsfestigkeit K_{zs} ergeben sich der Reihe nach die Werte $n = 1$, $n = 0$, $n = -1$. Die Konstanten a, b, c sind sonach aus den 3 Gleichungen $K_z = a + b + c$, $K_{zu} = a$, $K_{zs} = a - b + c$ bestimmbar.

Es seien für ein Material, das einem wiederholten Wechsel der Zugspannungen zwischen Null und einer oberen Grenze σ_u ausgesetzt wird, durch Versuche für jeden oberen Grenzwert die Zahl der Wechsel konstatiert worden, die zum Bruch führen. (Einem Wechsel entspricht allgemein eine einmalige Erreichung der Grenzspannungszustände, wobei man vom Spannungszustand 0 ausgeht und wieder zu ihm zurückkehrt.) Die zusammengehörigen Werte der Grenzspannungen und der Zahl der Wechsel sollen als Koordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufgefaßt werden. Man erhält dann mit A. Martens (L) die Darstellung nach Abb. 69, in der die Zahl n der Wechsel etwa in Millionen als Abszissen aufgetragen sind. Die Kurve C nähert sich asymptotisch der zur n -Achse parallelen Geraden, die einen Abstand gleich der Ursprungsfestigkeit K_{zu} von der n -Achse besitzt und schneidet die Koordinatenachse in einem Punkte mit der Ordinate $\sigma_u = K_z$, d. i. der Festigkeit bei gewöhnlicher statischer Beanspruchung auf Zug.

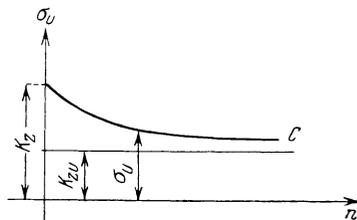


Abb. 69. Zuordnung der Grenzspannung zur Wechselzahl (nach Martens).

Um einen Anhaltspunkt über die Größenordnung der Zahl der Wechsel bis zum Bruch zu gewinnen, sei angeführt, daß Wöhler für Stahl bei Wechsel der Zusammenspannungen zwischen Null und dem Werte $\sigma_u = 3130 \text{ kg/cm}^2$ die Zahl der zum Bruche führenden Wechsel mit $n = 13,6$ Millionen gefunden hat.

Wöhler fand auch bereits die interessante Tatsache, daß die Form des Probestabes und dessen Oberflächenbeschaffenheit einen Einfluß auf das Resultat der Dauerversuche in recht empfindlicher Weise besitzt. Er verwendete Rundstäbe ähnlich jenen nach Abb. 35, das eine Mal mit scharf abgesetzten Übergangsstellen zwischen dem zylindrischen Mittelteil und den konischen Enden, das andere Mal mit sanften nach einer Hohlkehle gestalteten Übergangsformen und fand, daß in ersterem Falle die Ursprungsfestigkeit K_{zu} kleiner als im zweiten Falle ist. In gleicher Weise machen sich nach A. Martens (L) kleine oberflächliche Fehlstellen, wie sie z. B. durch Einreißen von Meßmarken am Stab gebildet werden, in einer Erniedrigung der Arbeitsfestigkeit bemerkbar. Die Brüche gehen beinahe ausnahmslos von diesen minimalen Fehlstellen aus. Auf Grund dieser Erkenntnis machte H. Moore (L) den berechtigten Vorschlag, statt „Ermüdung des Werkstoffes“ besser „Fortschreiten des Dauerbruches von einer Fehlstelle aus“ zu setzen. R. Mailänder (L) fand, daß ein Stahl mit einer statischen Zugfestigkeit von 10700 kg/cm^2 dann, wenn er schwingend zwischen gleich hohen Spannungen auf Zug und auf Druck beansprucht wurde, in wenig gut poliertem Zustande eine Schwingungsfestigkeit K_{zs} von 5000 kg/cm^2 , da-

gegen in sehr gut poliertem Zustand eine Schwingungsfestigkeit von 6000 kg/cm^2 besitzen kann.

Bauschinger (L) fand bei oftmals wechselnder Beanspruchung von Schweiß-eisen, Flußeisen und anderen Metallen auf Zug zwischen Null und einer oberen Grenze, daß a) dann, wenn die obere Grenze zwischen der Proportionalitätsgrenze und der Streckgrenze liegt, die Proportionalitätsgrenze um so mehr erhöht wird (sogar über die ursprüngliche Streckgrenze), je größer die Zahl der Schwingungen war; daß aber b) dann, wenn die Anspannung die Streckgrenze überschreitet, einmal der Fall eintritt, daß selbst eine noch so große Zahl der Wechsel, die Proportionalitätsgrenze nicht mehr an die obere Grenzstabspannung bringt. Im Falle a) kann der Bruch durch eine noch so große Zahl von Wechseln nicht herbeigeführt werden. Im Falle b) tritt der Bruch bei einer begrenzten Zahl der Wechsel dann ein, wenn die Anspannung so groß geworden ist, daß die Proportionalitätsgrenze nicht mehr erhöht werden kann. Besonders interessant ist das weitere Ergebnis der Versuche von Bauschinger, nach welchem sich die Bruchgrenze bei gewöhnlicher statischer Erprobung als nicht geändert ergab, wenn derselben auch ein millionenfacher Belastungswechsel vorausgegangen war.

Die Dauerversuche ließen auch erkennen, daß die den Grenzspannungen zugeordneten Dehnungen (Quetschungen) nicht den entsprechenden bei statischer linearer Beanspruchung gleichkommen. Es kann sein, daß ein Stoff bei statischer Beanspruchung bis zum Bruch verhältnismäßig sehr starke Dehnungen zuläßt, bei Dauerbeanspruchung aber das gerade Gegenteil der Fall ist. Ferner ist der Schluß unzulässig, daß bei Vergleich zweier verschiedener Werkstoffe der größeren von den beiden statischen Zugfestigkeiten auch z. B. die größere der beiden Schwingungsfestigkeiten zugeordnet sein müsse.

Bei Dauerversuchen führt man an Stelle der aus statischen Versuchen sich ergebenden Verformungsgrößen wie z. B. bezogenen Dehnungen die bei einem Wechsel infolge der Hysterese verlorene Arbeit pro Raumeinheit ein, die als Werkstoffdämpfung für die betreffende innere Beanspruchung bezeichnet wird und für einfache Spannungszustände verhältnismäßig leicht zu bestimmen ist.

Die Erprobung der Werkstoffe in Dauerversuchen, hat naturgemäß eine außerordentliche praktische Wichtigkeit im Hinblick darauf, daß insbesondere im Maschinenbau aber auch im Eisenbahn-Brücken-Hochbau in der Regel Dauerbeanspruchungen vorliegen. Durch die Dauerprüfung werden Anhaltspunkte gewonnen für die zuzulassende Beanspruchung bei Verwendung der verschiedenen Materialien in der Praxis und auch Fingerzeige für die Formgebung und Oberflächenbeschaffenheit der Konstruktionsteile gegeben. Sie ist dementsprechend auch Gegenstand einer ausgedehnten Literatur geworden, von der ich nur die zusammenfassenden Werke O. Graf¹ und Föppl-Becker-von Heydekampf² anführen will, die den Leser über das Gesagte hinausgehend in diesen Spezialzweig moderner Stoffkunde einführen. Hervorgehoben soll hier nur noch werden, daß Brüche in Metallen, die infolge wechselnder Beanspruchungs- und Aufbringungsart entstehen, ein ganz besonders charakteristisches Aussehen zeigen. Das hervorstechendste Merkmal eines Dauerbruches, im Vergleich zu einem unter statischen Verhältnissen bewirkten Bruch, ist die Glätte eines Teiles oder der ganzen Bruchfläche, die oft so stark ausgebildet ist, daß man gut von „poliertem“ Aussehen der Bruchfläche sprechen kann. In Abb. 70, welche die Photographie eines Dauerbruches eines Lenkhebels für ein Automobil zeigt, sind diese glatten Stellen A, A deutlich sichtbar. Der Lenkhebel war kontinuierlich und stoßartig wechselnd auf Biegung beansprucht.

¹ Graf, O.: Die Dauerfestigkeit der Werkstoffe und Konstruktionselemente, 1929.

² Föppl-Becker-von Heydekampf: Die Dauerprüfung der Werkstoffe, 1929.

4. Nachfließen und Relaxation. Wenn bei einem auf Zug beanspruchten Stab aus einem plastischen Stoffe (Flußeisen, Blei, Zinn, Kupfer usw.) unterhalb, aber ganz besonders oberhalb der Elastizitätsgrenze einer Last entsprechend einer Spannung σ längere Zeit konstant aufgebracht erhalten wird, so daß ihre Belastungsgeschwindigkeit Null entspricht, so zeigen sich die Dehnungen als mit der Zeitdauer veränderlich, derart, daß erst nach einer kürzeren oder längeren Zeit sich eine endgültige Dehnung einstellt. Man nennt diese Nachwirkungserscheinung im weiteren Sinne das Nachstrecken oder auch Nachfließen. Wir sehen hier, daß einer konstanten Kraft und einer infolge der fortschreitenden Querschnittsverminderung nur nahezu konstanten Spannung verschiedene Dehnungen zugeordnet sein können, ganz in Abweichung von der bisher stets als richtig angenommenen Forderung einer eindeutigen Zuordnung von Belastungs- und Verzerrungszustand (siehe hierzu auch den auf Seite 24 entwickelten Begriff der Dauerstandfestigkeit).

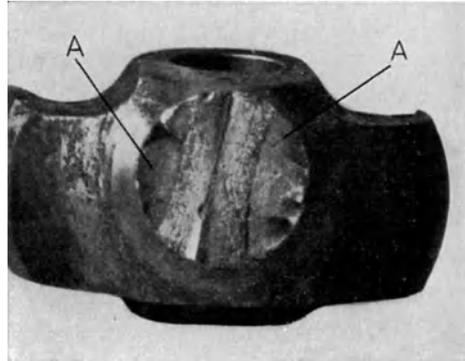


Abb. 70.

Wenn umgekehrt im Bereiche der elastischen aber insbesondere im Bereiche der unelastischen Deformationen die Dehnung, die bei einer bestimmten Last P auftritt, auf künstliche Weise konstant erhalten werden soll, so muß die Kraft P und damit die Spannung vermindert werden bis zu einer gewissen mit dem Material wechselnden unteren Grenzspannung. Diese Nachwirkungserscheinung im weiteren Sinne nennt man Relaxation.

J. Cl. Maxwell (L) hat für die Spannungsabnahme bei konstanter Dehnung das Gesetz $\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t}{T}}$ aufgestellt, worin e die Basis der natürlichen Logarithmen, σ_0 die ursprüngliche Spannung und σ die untere Grenzspannung ist, die erreicht wird, T aber eine Materialkonstante ist, die Maxwell als Relaxationszeit bezeichnet.

Sowohl Nachfließen als auch Relaxation lassen sich bei Aufnahme des σ - e -Schaubildes für das betreffende Material verfolgen; erstere zeigt sich dadurch, daß die σ - e -Kurve ein kleines Stück parallel zur e -Achse verläuft, letztere durch Absinken der Kurve parallel zur σ -Achse. Wird nach dem Konstantwerden der Dehnung bzw. der Spannung die Last mit ähnlicher Geschwindigkeit gesteigert bis zu der Belastungsgeschwindigkeit, welche ursprünglich (vor Konstantlassen der Last bzw. der Dehnung) herrschte, so steigt die σ - e -Kurve wieder an und lenkt in die ursprüngliche Kurve wieder ein.

Es ist klar, daß man das Nachfließen auch als verzögerte Deformation auffassen kann, d. h. also eine Nachwirkungserscheinung im engeren Sinne des Wortes, wenn man die Dehnung, welche bis zur konstant gehaltenen Kraft P erzeugt wurde, bzw. die Wirkung der zeitlich vor der konstant gelassenen Kraft P wirkenden anwachsenden Kraft in die Geschichte des Materiales einbezieht.

5. Änderung des σ - e -Schaubildes mit der Verformungsgeschwindigkeit. Wenn ein Stab aus bestimmtem Material in einer Festigkeitsmaschine einem Zugversuche unterworfen wird, so kann dabei eine von den Komponenten der Versuchsgeschwindigkeit, z. B. die Verformungsgeschwindigkeit von vornherein absichtlich konstant gehalten und die Frage aufgeworfen werden, wie sich das σ - e -Schaubild ändert, wenn die während eines Versuches konstante Verformungsgeschwindigkeit verschiedene Zahlenwerte annimmt.

Um die Bedeutung der konstanten Verformungsgeschwindigkeit durch Gegenüberstellung der Begriffe der konstanten Belastungsgeschwindigkeit bzw. der konstanten Geschwindigkeit der inneren Inanspruchnahme (im folgenden kurz Spannungsgeschwindigkeit genannt) ins Licht zu rücken, sei an der Hand der schematischen Abb. 71 die Wirkung einer Festigkeitsmaschine mit hydraulischem Antrieb kurz auseinandergesetzt. Der Probestab S wird an seinen Köpfen K durch die Mäuler M_1 und M_2 der Maschine gepackt, von welchen M_1 unbeweglich mit dem Maschinengestell H verbunden ist, während M_2 mit dem Kolben L in Verbindung steht, der in einem Preßzylinder C beweglich ist. Die Preßflüssigkeit, die bei A in den Preßzylinder ein und bei B aus demselben tritt, wird durch eine elektrisch angetriebene Pumpe, deren Gang einstellbar ist, unter Druck gehalten. Der Zutritt der Preßflüssigkeit zum Zylinder ist durch Ventile regulierbar. Wenn der Stab S während des ganzen Versuches eine konstante Verformungsgeschwindigkeit besitzen soll, so muß sich der Kolben, oder was

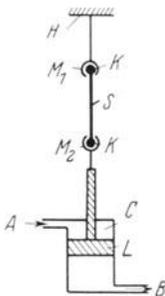


Abb. 71.

auf das Gleiche hinauskommt, eine mit ihm fest verbundene Marke mit konstanter Geschwindigkeit nach abwärts bewegen. Nehmen wir nunmehr an, es soll ein Stab aus Flußeisen bei der konstanten Verformungsgeschwindigkeit $v = c_1$ erprobt werden. Der Gang der Pumpe sei von vornherein eingestellt und der Zufluß der Preßflüssigkeit durch eine bestimmte Stellung der Ventile geregelt. Es kann dann auf den Kolben L ein bestimmter Druck und daher auf den Stab S ein bestimmter Zug ausgeübt werden, der einer zugeordneten Spannung entspricht. Je mehr die Ventile geöffnet werden bei gleicher Pumpengeschwindigkeit, um so größer kann die Zugwirkung im Stabe und demzufolge die Spannung in demselben sein. Zur Erzielung einer konstanten Verformungsgeschwindigkeit muß die Geschwindigkeit der Öffnung der Ventile in einer bestimmten Abhängigkeit von der Zeit stehen. Bei Beginn des Versuches wird es allerdings eine möglichst kurz zu haltende Periode geben müssen, in der die Verformungsgeschwindigkeit vom Werte Null bis zu dem konstant zu haltenden Werte ansteigt, also keinesfalls konstant gehalten werden kann. Kommt das Flußeisen in den Streckbereich, so tritt der besondere Fall ein, daß ohne Änderung der Ventilstellung und bei unveränderter Pumpengeschwindigkeit die Verformungsgeschwindigkeit steigt; um sie auch jetzt konstant zu halten muß entweder das Ventil etwas gedrosselt werden, oder man muß mit der Weiteröffnung des Ventils, die nach Ablauf der Streckperiode wieder notwendig wird, weil sich dann das Flußeisen wieder verfestigt, so lange warten bis eben die Geschwindigkeit in der Streckperiode im Mittel wieder als konstant zu betrachten ist. Hat die Last die Traggrenze erreicht, so muß wieder in der Zeitspanne bis zum Bruch in ähnlicher Weise vorgegangen werden.

Bei konstanter oder nahezu konstanter Verformungsgeschwindigkeit ist die Belastungsgeschwindigkeit im ganzen Bereiche des σ - e -Schaubildes nicht ebenfalls konstant. Bis zur Fließgrenze kann man die Konstanz wohl annehmen, nicht aber im Streckbereiche, wo sie bei Drosselung des Ventiles sogar negativ werden kann, desgleichen nicht in der Periode vom Erreichen der Höchstlast bis zum Bruche. Bei Beurteilung der Spannungsgeschwindigkeit bei konstanter Verformungsgeschwindigkeit ist in Betracht zu ziehen, daß der Querschnitt sich ändert. Bis zum Erreichen der Höchstlast kann eventuell die Querschnittsverminderung vernachlässigt und dann die Geschwindigkeit, mit der die innere Inanspruchnahme wächst, der Belastungsgeschwindigkeit proportional gesetzt werden. Vom Erreichen der Höchstlast bis zum Bruch ist die Belastungsgeschwindigkeit negativ, die Geschwindigkeit der inneren Inanspruchnahme aber positiv. Wenn man von konstanter Versuchsgeschwindigkeit bei Versuchen schlechthin spricht, meint man in der Regel konstante Verformungsgeschwindigkeit.

Kehren wir nun zu der eingangs aufgeworfenen Frage nach der Abhängigkeit des σ - e -Schaubildes eines Stoffes bei verschiedenen aber während eines Versuches konstanter Verformungsgeschwindigkeit zurück. Die Erfahrung zeigt, daß die Spannung σ , welche in der technologischen Mechanik auch als Formänderungswiderstand bezeichnet wird, bei gegebener Dehnung des Stabes für die verschiedenen Stoffe mehr oder weniger stark von der Verformungsgeschwindigkeit, und zwar vornehmlich wieder in unelastischem Gebiet abhängig ist. In Versuchsreihen, welche P. Ludwik (L) durchführte, wurde Zinn bei verschiedenen Verformungsgeschwindigkeiten auf Zug beansprucht. Nachdem der Versuchsstab 15 % Dehnung seiner eigenen Meßlänge erfahren hatte, wurde der Formänderungswiderstand am Kraftanzeiger der Festigkeitsmaschine abgelesen. Trägt man die Formänderungsgeschwindigkeiten als Abszissen, und zwar in Pro-

zenten der Verlängerung der Meßlänge pro Sekunde, den Formänderungswiderstand nach 15% Dehnung als Ordinaten auf, so erhält man die Kurve nach Abb. 72, welche deutlich das Ansteigen des Formänderungswiderstandes mit der Verformungsgeschwindigkeit zeigt.

Martens (L) erhielt als σ - e -Schaubilder für Zink bei drei verschiedenen Verformungsgeschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 mit $v_1 < v_2 < v_3$ die drei in Abb. 73 schematisch dargestellten voll ausgezogenen Kurven, aus denen man ersieht,

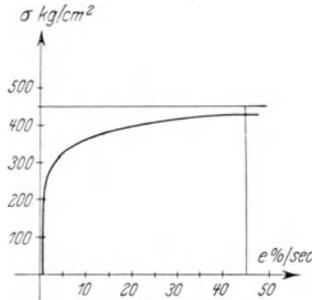


Abb. 72. Änderung des Formänderungswiderstandes von Zinn mit der Verformungsgeschwindigkeit (nach Ludwik).

daß der kleinsten Geschwindigkeit die kleinsten Formänderungswiderstände, die kleinste Höchstlast (Zink ist ein einschnürendes Material) und Bruchgrenze aber die größte Bruchdehnung entspricht. Man kann auch bei einem und demselben Versuche in mehreren Bereichen verschiedene Formänderungsgeschwindigkeiten wählen. Man erhält dann für Zink nach Martens z. B. das Schaubild 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

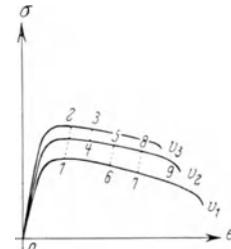


Abb. 73. Änderung des σ - e -Schaubildes von Zink mit der Versuchsgeschwindigkeit (nach Martens).

das zeigt, daß bei plötzlicher Erhöhung oder Erniedrigung der Formänderungsgeschwindigkeit das σ - e -Schaubild plötzlich in die Kurve der zugehörigen Formänderungsgeschwindigkeit eintritt.

Bei Flußeisen und Stahl ist der Einfluß der Formänderungsgeschwindigkeit auf das σ - e -Schaubild nach Bauschinger (L) sehr gering.

Theoretisch sind für jeden Stoff unendlich viele σ - e -Schaubilder denkbar, die zwischen den Grenzen liegen, die der konstanten Formänderungsgeschwindigkeit 0 und unendlich entsprechen. Die der Geschwindigkeit Null entsprechende σ - e -Kurve nähert sich in ihrem Verlauf jener, welche praktisch bei sehr kleiner Geschwindigkeit erhalten wird. Zur Ableitung von σ - e -Schaubildern dienende Versuche mit sehr großen Verformungsgeschwindigkeiten, die auch als solche dynamischer Art bezeichnet werden, kommen den als Stoß- oder Schlagversuche eingeführten, mit sog. momentanen, in Wirklichkeit aber auf die Stoßzeit eingeschränkten Kraftwirkungen nahe oder sind mit ihnen identisch.

Die Abhängigkeit der σ - e -Schaubilder eines Stoffes von der Deformationsgeschwindigkeit kann zu den Nachwirkungsercheinungen im weiteren Sinne gerechnet werden, und zwar aus folgendem, oben bereits angedeutetem, jetzt noch etwas auszuführendem Grunde. Bei der oben geschilderten Erscheinung der Relaxation wird die Deformationsgeschwindigkeit gleich Null vorausgesetzt und die Änderung der augenblicklich vorhanden gewesenen Spannung in einem bestimmten Zeitraum verfolgt. Setzen wir die Verformungsgeschwindigkeit in vorgegebener Weise konstant, so wirkt sich dieselbe im gleichen Zeitraum als eine dem Werte der konstanten Verformungsgeschwindigkeit und dem Anfangswerte der Spannung und Dehnung entsprechende besondere Zuordnung der Spannungen und Dehnungen des Stabes aus. Der Verlauf der σ - e -Schaubilder bis zu einem bestimmten Werte der Spannung und Dehnung ist bei dieser Auffassung nur der schließliche Ausdruck von Wirkungen, welche zeitlich vor jenem Zeitpunkte liegen, in welchem die genannte Spannung und Dehnung auftritt und verschieden je nach der Zeit, welche seit Beginn des Versuches verflossen ist. Wird die Verformungsgeschwindigkeit plötzlich geändert, so entspricht das vollkommen der bei der Besprechung der Erscheinung der Relaxation angenommenen plötzlichen Änderung von der Verformungsgeschwindigkeit, welche der Stoff eben besaß bis zu der Verformungsgeschwindigkeit mit dem Werte Null, die dem Konstanthalten der Dehnung zugeordnet ist. Die Erscheinung der Relaxation würde sonach ein Ausdruck dafür sein, daß der Formänderungswiderstand von der Verformungsgeschwindigkeit abhängig ist. Wird dieselbe auf Null gebracht, so sinkt die Spannung bis zu dem der Konstanz der Dehnung entsprechenden Wert. Leider liegen noch keine Erfahrungsergebnisse darüber vor, ob der End-

wert der Spannung bei der Relaxation tatsächlich dem Werte der Spannung bei der Deformationsgeschwindigkeit Null entspricht.

Bei den beschriebenen Nachwirkungserscheinungen haben wir eine Erklärung aus dem Grunde offen gelassen, weil ein diesbezügliches abschließendes Urteil noch nicht gewonnen worden ist und eine Auseinandersetzung der zahlreichen bereits erhaltenen Ergebnisse und Untersuchungsmethoden aus dem Rahmen dieses Buches herausfällt. Die Erklärung muß in erster Linie in der chemisch-physikalischen Konstitution der Körper gesucht werden¹.

38. Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes (Fortsetzung).

Einflußnahme der Temperatur. Die Einflüsse der Temperatur auf das Zuordnungsgesetz zwischen Spannungs- und Verzerrungskomponenten sind im wesentlichen in zweifacher Hinsicht von Bedeutung.

In erster Linie zeigen die Stoffe eine mehr oder weniger große Empfindlichkeit gegenüber dauernd fortgesetzten Temperaturschwankungen. Dabei ist die Differenz der Temperaturgrenzen, zwischen welcher die Schwankung vor sich geht, die absolute Höhe der Grenztemperaturen und die Zeitdauer ihrer Wirkung erfahrungsgemäß von Bedeutung für das Resultat, ohne daß man zu einer diesbezüglichen Gesetzmäßigkeit ähnlich etwa jener von Wöhler für Spannungsschwankungen zwischen zwei Grenzspannungen gekommen wäre. Diesbezügliche praktische Untersuchungen spielen bei der Prüfung von Steinen eine Rolle, welche z. B. als Straßen- oder Eisenbahnschotter in unseren Gegenden natürlichen Temperaturschwankungen von etwa -35° bis etwa $+35^{\circ}$ ausgesetzt sind. Man stellt derartige Schwankungen der Temperatur der Steine im Laboratorium in oftmaliger Aufeinanderfolge auf künstlichem Wege unter Zuhilfenahme von Kältemischungen, Kohensäureschnee usw. her (vielfach sättigt man den Stein vorher mit Wasser) und vergleicht dann die Druckfestigkeit nach dem Versuch mit jener, welche der Stein vor dem Versuche hatte. Häufig findet man dann eine Herabsetzung der Druckfestigkeit. Viel besser ist die Einflußnahme einer einzigen Schwankung und der Dauer derselben zwischen der Zimmertemperatur oder einer ihr naheliegenden Temperatur über eine höhere oder tiefere Temperatur wieder zurück zur Zimmertemperatur, insbesondere bei Metallen (für welche derartige Schwankungen oft von ausschlaggebender Bedeutung für die Materialeigenschaften sind) verfolgt werden.

Ein Beispiel für die Einflußnahme des Ausglühens auf das σ - ϵ -Schaubild betrifft die Rückgängigmachung des Bauschingereffektes (siehe oben) durch dasselbe. In dem auf Seite 171 gegebenen Beispiel für das Auftreten des Bauschingereffektes bei gezogenem Messing nach Versuchen von Masing-Mauksch, ergab sich nach Ausglühen des Messings bei 225° die Elastizitätsgrenze auf Zug, die infolge der Druckbeanspruchung auf 850 kg/cm^2 gesunken war, mit 1850 kg/cm^2 näherte sich also bereits wieder der ursprünglichen Elastizitätsgrenze auf Zug von 2400 kg/cm^2 .

In zweiter Linie zeigen sich Einflüsse des Temperaturgrades, auf welcher sich ein Stoff befindet insofern, als das Zuordnungsgesetz zwischen Spannungs-

¹ Wer sich in dieses ganz moderne Gebiet mit Bezug auf die in erster Linie wichtigen Baustoffe der Technik, die Metalle, die aus Kristalliten (kleinen Kriställchen) aufgebaut sind, einführen will, lese die Bücher von E. Heyn: Die techn. wichtigen Eigenschaften der Metalle und ihrer Legierungen im Handbuch für Materialkunde von Martens-Heyn, Bd. II; ferner E. Sachs und G. Fiek: Der Zugversuch, Leipzig 1926 und G. Sachs: Grundbegriffe der mechanischen Technologie, der Metalle, ferner den Artikel IV, 31 von J. v. Kármán in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften über die physikalischen Grundlagen der Festigkeitslehre nach.

und Verzerrungskomponenten sich als abhängig von dem Zahlenwerte der konstant erhalten gedachten Temperatur zeigt. Auch hier erfolgte das Studium der Einflußnahme nur bei einfachen Spannungszuständen des betreffenden Materiales, am häufigsten bei linearer Beanspruchung. Das σ - e -Schaubild eines Stoffes bei der einen Temperatur ist oft wesentlich verschieden von jenem, das einer anderen bedeutend höher oder niedriger gelegenen Temperatur entspricht. Hierbei zeigt sich die weitere sehr bemerkenswerte Tatsache, daß der Grad der Verschiedenheit der σ - e -Kurve bei verschiedenen Temperaturen oft sehr stark durch die Verformungsgeschwindigkeit, die beim Versuche eingehalten wird, beeinflußt erscheint.

Bei wachsenden Temperaturen zeigt sich die Zugfestigkeit bei reinen Metallen um so mehr verringert, je höher die Temperatur wird, dagegen nehmen die Querschnittsverminderungen beim Bruch und die Bruchdehnungen in der Regel zu, von Ausnahmefällen, wie z. B. bei reinem Nickelmetall, abgesehen.

Besonders merkwürdig ist das Verhalten von Flußeisen, das bekanntlich kein reines Metall, sondern eine Eisen-Kohlenstofflegierung ist. Eine bestimmte Flußeisensorte, welche bei Temperaturen zwischen 20° und 600° auf Zug beansprucht wurde, zeigte nach Martens bei 200° seine größte Festigkeit von 5100 kg/cm^2 , während dieselbe bei 20° 3850 kg/cm^2 , bei 600° aber nur mehr 1070 kg/cm^2 betrug. Die Bruchdehnung fiel von 37 % bei 20° bis zu einem Minimum bei 200° und stieg dann wieder bis zum Werte von 99 % bei 600° . Einen ähnlichen Verlauf zeigte die Querschnittsverminderung beim Bruch, die von 58 % bei 20° auf 23 % bei 300° fiel, um bei 600° den Wert 90,5 % zu erreichen. Der Elastizitätsmodulus fiel bei wachsender Temperatur von 2070 t/cm^2 bei 20° über 1950 t/cm^2 bei 200° auf 1340 t/cm^2 bei 600° .

Der Einfluß der Verformungsgeschwindigkeit bei reinen Metallen und Legierungen von Metallen zeigt sich in Versuchen bei verschiedenen Temperaturen in der Regel dadurch, daß bei wachsenden Temperaturen die Empfindlichkeit für eine Änderung des σ - e -Schaubildes mit der Verformungsgeschwindigkeit wächst.

39. Über das Maß der Anstrengung oder der Bruchgefahr unter statischen Verhältnissen.

Wenn irgendein elastischer fester Körper mit gegebenem Elastizitätsgesetz — nehmen wir als Beispiel den nach Abb. 1 belasteten Balken — unter den Einfluß eines im Gleichgewicht stehenden Kraftsystemes, gebracht wird, so sagt man, es sei der Körper in jedem Punkte auf eine, dem dort entstandenen Spannungs- und Verformungszustand entsprechende Weise angestrengt und meint damit in bildlicher Weise, daß der Werkstoff an der betreffenden Stelle einer Erprobung seiner Widerstandsfähigkeit ausgesetzt ist. Dem Anwachsen des äußeren Lastsystemes ohne Änderung seiner Art, entspricht im allgemeinen ein Anwachsen des Spannungs- und Verformungszustandes und der Anstrengung in den verschiedenen Punkten des Körpers. Es kann auch einmal eintreten, daß das Material in einem oder mehreren Punkten oder längs Flächen oder in ganzen Räumen überanstrengt wird, derart, daß es seine Widerstandsfähigkeit verliert, d. h. seinen Zusammenhang aufgibt, also bricht. Je stärker ein Stoff in einem Punkte angestrengt wird, um so größer wird die Bruchgefahr, um so größer wird auch die Gefahr unzulässig großer bleibender Deformationen. Es ist ohne weiteres klar, daß ein Körper von gegebenen Ausmaßen, der als irgendein Konstruktionsglied Verwendung finden soll, nie so stark belastet werden darf, daß er sich unmittelbar vor dem Bruch befindet oder auch nur bleibende Verfor-

mungen einginge, die zu einer Gefährdung des Gebildes führen könnten, dem er als Glied angehört, und daß umgekehrt die Vermeidung des Bruches oder auch nur zu großer bleibender Verformungen die zu erfüllenden Forderungen dann sein werden, wenn es sich um die Bestimmung der Ausmaße eines Körpers von gegebener Form, z. B. eines I-Trägers handelt, der auf eine vorgegebene Weise belastet werden soll.

Bei dem in Abb. 33, S. 123 dargestellten Rahmen wird man es vermeiden müssen, die äußere Belastung so groß werden zu lassen, daß die Elastizitätsgrenze oder gar die Fließgrenze in einem Punkt des Rahmens erreicht wird.

Es erhebt sich dementsprechend die Frage nach einem Maß der Anstrengung oder der Bruchgefahr, d. h. nach dem Meßwerte einer zu definierenden physikalischen Größe, welche für einen gegebenen Stoff für jede beliebige Art des Spannungszustandes die Anstrengung des Stoffes anzeigt, wenn dieser Spannungszustand eine vorgeschriebene Größe erreicht hat und die uns einen Anhaltspunkt dafür gibt, wie weit wir noch von Grenzen (Elastizitätsgrenze, Fließgrenze, Bruchgrenze) entfernt sind, deren Erreichung mit Sicherheit vermieden werden soll.

Man könnte sich begnügen, jene physikalische Größe für die Erreichung der Elastizitäts- oder Fließgrenze gefunden zu haben, da ja die Stoffe ohnehin, wie ausgeführt, bis zu diesen Grenzen nicht beansprucht werden dürfen. Es hätten dann z. B. jene bereits durchgeführten Erörterungen Platz zu greifen, welche die Erreichung der Elastizitätsgrenze (Seite 153 ff.) resp. Fließgrenze (Seite 166) betreffen. Als Maß der Anstrengung würden wir uns dann die Meßwerte jener physikalischen Größe, die an jenen Grenzen den besonderen Stoffen eigentümliche Werte annehmen, denken können. Wäre z. B.

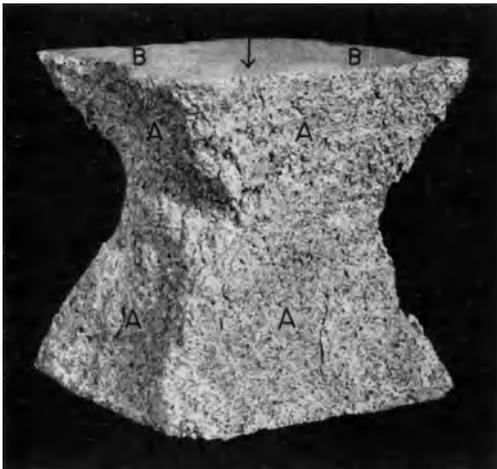


Abb. 74. Verschiebungsbruch eines Würfels aus Zementmörtel (1 Teil Zement und 3 Teile Normalsand und Wasser) nach Druckbeanspruchung.

der Wert der größten positiven Hauptdehnung maßgebend für das Erreichen der Elastizitätsgrenze, so könnte die Größe der Hauptdehnung auch unterhalb der Elastizitätsgrenze als Meßwert der Anstrengung angesehen werden.

Nach einem Vorschlage von Prandtl unterscheidet man Verschiebungsbrüche und Trennungsbrüche. Erstere entstehen, wenn beim Bruche die Bruchflächen gegeneinander abgeschoben werden, was sich z. B. bei Steinen dadurch nach außen hin zeigt, daß die Bruchflächen mit zerstäubtem Materiale bedeckt sind. Die Flächenelemente des Verschiebungsbruches in einem Punkte des elastischen Körpers sind schief gegen die Hauptspannungsebenen liegend. Ein nahezu reiner Verschiebungsbruch entsteht bei Beanspruchung eines Steinwürfels auf Druck (Abb. 74). Es entstehen da Druckpyramiden *A, A*, gegen deren Flächen das übrige Material abgeschoben wird. Die auf Druck beanspruchende Kraft ist in der Abbildung auf der oberen Druckfläche *B, B* durch einen Pfeil angedeutet.

Trennungsbrüche entstehen längs Bruchflächen dann, wenn letztere ohne Verschiebung gegeneinander in zu denselben normalen Richtungen voneinander

getrennt werden. Reine Trennungsbrüche entstehen bei Beanspruchung spröder Körper auf Zug in Flächen normal zur Zugrichtung (für Gußeisen in Abb. 36, S. 138 und in Draufsicht auf die Bruchflächen in Abb. 42, S. 141 dargestellt) oder bei Beanspruchung von geraden Stäben aus sprödem Stoffe auf Verdrehung nach Abb. 75 und 75a mit Verdrehungsmomenten, die in den beiden Endquerschnittsflächen mit Ebenen normal zur Stabachse wirksam waren. Die schraubenartigen Bruchflächen stehen etwa unter 45 Grad zur Stabachse geneigt, entsprechend Flächenelementen, in denen extreme Werte der Zugspannungen auftreten.

Im allgemeinen sind die Brüche weder reine Verschiebungsbrüche noch reine Trennungsbrüche, sondern eine Verquickung derselben. Abb. 41 zeigt die besonders regelhaft ausgebildeten Bruchflächen eines flußeisernen Stabes, der auf Zug beansprucht war. Der Bruch stellt teilweise einen Trennungs-

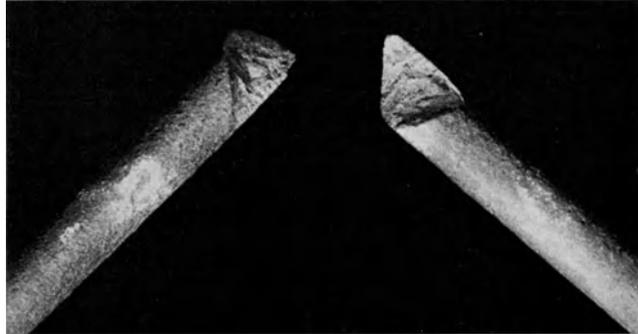


Abb. 75

bruch vor (die nahezu ebenen körnigen Flächen in der Mitte normal zur Stabachse) teilweise einen Verschiebungsbruch (die Flächen, welche als Mantel eines Kegelstumpfes ausgebildet sind). Gemischte Brüche sind auch die in den Abb. 51 a, S. 145 und 37, S. 139 dargestellten.

Man kann nicht sagen, daß die oben gestellte Frage nach dem Maß der Anstrengung eine vollkommen befriedigende Beantwortung gefunden hat. Im folgenden sollen einige besonders wichtige diesbezügliche Meinungen wiedergegeben werden, unter Hervorhebung derjenigen, welche in Europa derzeit als Grundlage für die Dimensionierungspro-



Abb. 75 a.

Abb. 75 und 75 a. Trennungsbrüche an gußeisernen Stäben von kreisförmigen und quadratischen Querschnitten nach Beanspruchung auf Verdrehung.

bleme des Ingenieurs angenommen wird. Sie lassen sich nach ihren Urhebern bzw. ihren namhaften Vertretern einteilen in jene von 1. Coulomb, 2. Lamé und Clebsch, 3. Poncelet, De Saint Venant, Grashof, 4. Mohr, 5. Beltrami.

1. Coulombsche Anschauung. Nach A. Ch. Coulomb (L) ist für den Fall als von Reibungseinflüssen im Augenblicke des Bruches abgesehen wird, als Maß der Anstrengung in einem Punkte eines elastischen festen Körpers die dort auftretende größte Schubspannung anzusehen, die im Augenblicke des Bruches in den in Betracht kommenden Flächen einen dem betreffenden Stoff eigentümlichen Grenzwert erlangt. Sind $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die Hauptspannungen des an der betrachteten Stelle herrschenden Spannungszustandes und im algebraischen Sinne $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, so ist der Zahlenwert der größten Schubspannung $|\tau_{\max}| = \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right|$. Sie wirkt mit ihrem positiven und negativen Werte in Flächenelementen, die unter 45° geneigt zu jenen liegen, in welchen die Hauptspannungen σ_1 und σ_3 übertragen werden.

Für den Fall, daß innere Reibung angenommen wird, ist als Maß der Anstrengung nach Coulomb eine Schubspannung anzusehen, welche von der Kohäsion des Stoffes und dem Koeffizienten der inneren Reibung abhängt. Sie wird in Flächenelementen übertragen, deren Neigungen zu den Flächenelementen, in welchen die Hauptspannungen σ_1 und σ_3 übertragen werden, mit der inneren Reibung allein im Zusammenhang stehen.

Coulomb ging bei seiner Annahme von dem besonderen Fall der Beanspruchung eines spröden Körpers auf reinen Druck aus, für welchen sich, wenn man als Probeform Würfel zugrunde legt, die in der Abb. 74 dargestellten Druckpyramiden ausbilden¹. In den Bruchflächen sollen die infolge der Beanspruchungen auftretenden Schubspannungen so groß werden, daß die Kohäsionskraft und die innere Reibung überwunden wird. Erstere wird als eine für jeden Stoff eigenartige Konstante K angesehen, letztere wird proportional dem Normaldruck N_n auf die Bruchfläche, d. h. gleich $N_n f$ gesetzt, wenn f den Reibungskoeffizienten bedeutet, dessen Wert gleich der Tangente des Reibungswinkels ϱ ist.

Auf die Flächenelemente $AB = df_x$ bzw. $BC = \frac{df_x}{\cos \alpha}$ des unendlich kleinen Prismas ABC (Abb. 76a) sollen, bezogen auf die Flächeneinheiten, die Normalkraft X_x bzw. die Normalkraft N_n und die Tangentialkräfte $K + N_n f$ und T wirken. Die Gleichgewichtsbedingungen für diese Kräfte lauten offenbar

$$X_x \cos \alpha - (K + N_n f) \sin \alpha - N_n \cos \alpha + T \sin \alpha = 0,$$

$$N_n \sin \alpha - (K + N_n f) \cos \alpha + T \cos \alpha = 0.$$

Es folgt

$$N_n = \frac{(K - T) \cos \alpha}{\sin \alpha - f \cos \alpha} = X_x \cos^2 \alpha, \quad T = K - X_x \cos \alpha \frac{\sin(\alpha - \varrho)}{\cos \varrho}.$$

Wir suchen nunmehr den kleinsten Wert der Kraft T auf, die als Funktion von α betrachtet wird. Derselbe ergibt sich für den Winkel α , der der Bedingung $\frac{d}{d\alpha}(\cos \alpha \sin(\alpha - \varrho)) = 0$ genügen muß, woraus

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\varrho}{2} = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$$

abgeleitet wird. Der Wert α_1 entspricht dem maximalen, der Wert α_2 dem minimalen Wert des Ausdruckes $\cos \alpha \sin(\alpha - \varrho)$. Für jenen Winkel $\alpha = \alpha_1$, für welchen T am kleinsten wird, ist die Möglichkeit gegeben, daß T gleich dem

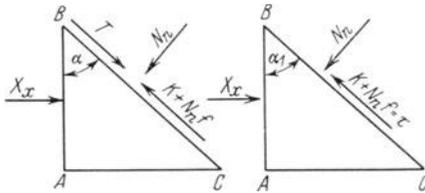


Abb. 76a.

Abb. 76b.

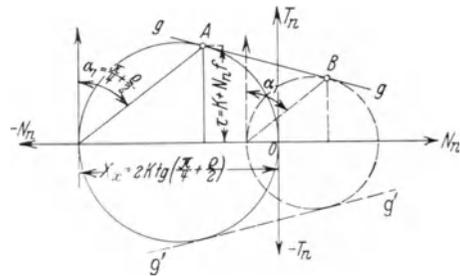


Abb. 76c.

Werte $K + N_n f$ wird, also ein Bruch längs BC eintritt; denn wenn T am kleinsten ist, dann nähert sich das in Abb. 76a dargestellte Kraftsystem dem aus der Abb. 76b ersichtlichen. Der Wert $K + N_n f$ für T wird erreicht, wenn X_x entsprechend groß geworden ist. Die Kraft pro Flächeneinheit $K + N_n f$ stellt jetzt eine Schubspannung vor, die als Folge der Wirkung der Druckspannung X_x

¹ Siehe hierzu auch Abb. 44 auf Seite 142.

angesehen werden kann. Die Abb. 76b stellt nach Coulomb das System der inneren Kräfte vor, das an einem unendlich kleinen Prisma im Innern eines auf Druck beanspruchten Würfels mit X_x als Druckspannung herrscht, und zwar unmittelbar vor dem Bruch. Aus den Gleichgewichtsbedingungen für dieses Prisma erhalten wir die Druckspannung X_x , welche unmittelbar vor dem Druck wirken muß. Dieselben nehmen, wie leicht ersichtlich ist, die folgende Form an

$$N_n = X_x \cos^2 \alpha_1 = X_x \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2} \right), \quad \tau = K + N_n \operatorname{tg} \varrho = X_x \frac{\sin^2 \alpha_1}{2} = X_x \frac{\cos \varrho}{2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, wenn bedacht wird, daß

$$\cos \varrho = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2} \right), \quad \sin \varrho = \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2} \right)$$

der Wert von X_x mit

$$X_x = 2 K \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2} \right). \quad (87)$$

Die zugehörigen Werte von τ und N_n folgen mit $N_n = K \cos \varrho$,

$$\tau = 2 K \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2} \right) = K (1 + \sin \varrho). \quad (87a)$$

Die zugehörige Mohrsche Darstellung ist durch den in Abb. 76c voll ausgezogenen Hauptkreis gegeben.

Wenn die Coulombsche Anschauung nicht nur für den reinen Druckzustand, sondern auch für andere Spannungszustände gelten soll, so müßte die Grenzkurve der Hauptkreise derselben für den Bruch (so wie für die Elastizitätsgrenze kann nach Mohr auch eine Grenzkurve für die Fließgrenze oder, wie sie hier benötigt wird, auch eine Grenzkurve für die Bruchgrenze aus der Erfahrung abgeleitet werden [Seite 156 ff.]) durch zwei symmetrisch zur N_n -Achse liegende Gerade g, g und $g'g'$ repräsentiert sein, die die den Bruchgrenzen für die verschiedenen Spannungszustände entsprechenden Hauptkreise berühren. Ein derartiger Verlauf der Grenzkurve ist aber nur für besondere Stoffe und für Spannungszustände, die zwischen der Beanspruchung auf reinen Zug und auf reinen Druck liegen, als nahezu zutreffend anzusehen, für beliebige Spannungszustände widerspricht sie der Wirklichkeit.

Wenn $\varrho = 0$ vorausgesetzt wird, woraus $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ folgt, müßte sich die Grenzkurve durch zwei zur N_n -Achse parallele Gerade darstellen lassen. Die Flächenelemente, in denen der Bruch erfolgen soll, wären dann unter 45° geneigt zu den Hauptspannungsrichtungen, und die in ihnen herrschende Schubspannung würde gleich der Kohäsion des Materiales, ferner würde die unmittelbar vor dem Bruch vorhandene Druckspannung gleich dem doppelten Werte der Schubspannung in der Bruchfläche werden, was besagt, daß letztere die extreme Schubspannung ist. In einem solchen Falle könnte man dann behaupten, daß die extreme Schubspannung Maß der Anstrengung ist, und der Bruch in den den extremen Schubspannungen zugeordneten Flächenelementen auftritt, und zwar für jede Art des Spannungszustandes (siehe hierzu auch S. 158 ff.). Auch diese Folgerungen der Coulombschen Theorie sind im allgemeinen nicht zutreffend.

Wie man sieht, ist die Coulombsche Theorie nur auf Verschiebungsbrüche zugeschnitten, die aber auch nicht allgemein, sondern nur in speziellen Fällen erklärt werden.

Bei auf reinen Zug beanspruchtem Flußeisen einer bestimmten Sorte, für welche man als Grenzkurve an der Fließgrenze für alle Spannungszustände, welche zwischen der Beanspruchung auf reinen Zug und reinen Druck liegen, ein Geradenlinienpaar parallel zur N_n -Achse annehmen kann, wird das Auftreten der Lüders-

schen Figuren an der Fließgrenze begreiflich, wenn man die Coulombsche Annahme auf diese überträgt, denn das Liniensystem der Lüdersschen Figuren verläuft bei bestimmten Sorten von Flußeisen bei Beanspruchung auf Zug unter 45° geneigt zur Stabachse, entsprechend den Flächenelementen, in denen die extremen Werte der Schubspannungen auftreten. Die zwei Scharen einander schneidender Linien, die an der Fließgrenze zutage treten, entsprechen den zwei Berührungspunkten der Grenzgeraden mit den Hauptkreisen bzw. den diesen Berührungspunkten auf der unendlich kleinen Kugel in Abb. 19. Seite 61 zugeordneten Flächenelementen.

Bei sehr „harten“ Stählen zeigen sich bei Beanspruchung auf Zug Fließlinien, die in der Zugrichtung einen Winkel größer als $\frac{\pi}{2}$ miteinander einschließen, bei Beanspruchung auf Druck solche, welche in der Druckrichtung einen kleineren Winkel als $\frac{\pi}{2}$ bilden. Beide Winkel ergänzen sich zu π^* . Das würde mit der Coulombschen Regel in Übereinstimmung gebracht werden können, wenn man dieselbe auf die Fließgrenze anwendet; denn nach dem oben Gesagten schließen die Flächenelemente, längs welchen der Bruch bei Beanspruchung auf Druck auftreten soll, einen Winkel von $2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2}\right)$ ein, da ihre Normalen unter $\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2}$ zur Druckrichtung geneigt sind; bei Beanspruchung auf Zug müßten diese Flächenelemente offenbar einen Winkel von $2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2}\right)$ miteinander bilden. Allerdings ist nicht recht einzusehen, warum bei „harten“ Stählen die Reibung an der Fließgrenze eine Rolle spielen soll, bei anderen Flußeisensorten aber, für welche ein Teil der Grenzkurve aus parallelen Geraden zur N_n -Achse besteht, ein Einfluß der Reibung aber wieder nicht vorhanden sein soll (siehe hierzu auch Seite 189 ff.).

2. Anschauung von Lamé und Clebsch. Die ursprünglich ziemlich gleichzeitig von Lamé und Clebsch vertretene Anschauung bezeichnet als Maß der Anstrengung entweder die dem Zahlenwerte nach größte positive Hauptspannung oder, wenn das nicht der Fall ist, die dem Zahlenwerte nach größte negative Hauptspannung, je nach dem Stoff und Spannungszustand, der gerade vorliegt. Hierzu wird zunächst bemerkt, daß es notwendig ist, die Wahl zwischen der größten positiven bzw. der dem Zahlenwerte nach größten negativen Hauptspannung offen zu lassen, da sich sonst schon in den einfachen Fällen der Beanspruchung auf Zug und auf Druck dann ein Widerspruch ergäbe, wenn die Druckfestigkeit einen von der Zugfestigkeit verschiedenen Wert besitzt und die Bruchflächen normal zur Zug- bzw. Druckrichtung liegen.

Bezeichnen wir die effektive Zugfestigkeit bzw. effektive Druckfestigkeit (Seite 137 ff. u. 186 ff.) mit σ_{BZ} bzw. σ_{BD} , so müßte nach dieser Annahme, wenn an der Bruchgrenze σ_3 die größte positive Hauptspannung für einen Spannungszustand gegebener Art, σ_1 die dem Zahlenwerte nach größte negative Hauptspannung wäre, entweder $\sigma_3 = \sigma_{BZ}$ und $\sigma_1 \leq \sigma_{BD}$ oder $\sigma_1 = \sigma_{BD}$ und $\sigma_3 \leq \sigma_{BZ}$ zutreffend sein.

Die endgültige Entscheidung ließe sich stets bei Angabe der Zahlenwerte der Hauptspannungen an der Bruchgrenze unter der Voraussetzung, daß σ_{BZ} und σ_{BD} experimentell erhoben wurden, treffen.

Es sollen zuerst jene Versuche von Föppl und Voigt angeführt werden, welche zuungunsten der Annahme sprechen. Föppl (L) unterwarf Würfel aus den verschiedensten spröden und zähen Stoffen (Kalkstein, Sandstein, Zement,

* Siehe die Versuche von Hartmann in dessen auf Seite 163 zitiertem Buche.

Mörtel, Ziegel, Glas, Kupfer, Aluminium, Blei, Zinn, Gußeisen) einem homogenen, räumlichen, hydrostatischen Spannungszustand (Seite 99), indem er sie in mit Rizinusöl gefüllte starkwandige Mörser aus Bessemerstahl brachte und die Flüssigkeit einem hohen äußeren Kolbendruck aussetzte. Abgesehen vom Eigengewicht der Flüssigkeit und der Würfel, das bei den hohen angewendeten Drücken einen verschwindenden Einfluß hat, entsteht dann in jedem Punkte des Würfels ein Spannungszustand mit drei gleichen negativen Hauptspannungen, deren Zahlenwert dem Druck pro Flächeneinheit des Kolbens auf die Flüssigkeit gleichkommt. Es zeigte sich, daß die Würfel, je nach dem Material, aus dem sie bestanden, bei sehr hohem Atmosphärendruck — der höchste zur Verwendung gelangende Druck pro Flächeneinheit war 3445 kg/cm^2 — mehr oder weniger oft kaum zu messende, bleibende Verkürzungen erlitten, und daß sehr wenige überhaupt zerbrochen werden konnten. Beispielsweise hielt ein mehrere Jahre alter Würfel aus Zementmörtel einen allseitigen Druck von 2000 kg/cm^2 aus, ohne die geringsten Beschädigungen zu zeigen. Es ist in der zitierten Abhandlung nicht angegeben, wie groß die Druckfestigkeit des verwendeten Zementmörtels war, jedenfalls wäre eine Druckfestigkeit von 500 bis 600 kg/cm^2 schon ein hoher Wert. Wäre die vorangestellte Annahme richtig, so müßte der Würfel aus Zementmörtel auch bei allseitigem Flüssigkeitsdruck bei einer Hauptspannung von 500 bis 600 kg/cm^2 gebrochen sein. Föppl und Mohr nehmen an, daß homogene, isotrope Stoffe bei allseitigem Druck nur bei ungeheuren Werten der Spannungen, wahrscheinlich aber überhaupt nicht zerbrochen werden können. Der tatsächlich eingetretene Bruch einiger Würfel dürfte seine Ursache in Inhomogenitäten des Materiales haben.

Voigt (L) zerriß Steinsalz, ferner ein Gemisch aus Stearin- und Palmitinsäure, also spröde Körper in Stäbchenform, das eine Mal in Luft unter dem normalen Druck von einer Atmosphäre, das andere Mal in Kohlensäure unter hohem Druck und fand die Zugfestigkeit in beiden Fällen gleich. Durch den allseitigen Luftdruck bzw. den allseitigen Druck der Kohlensäure entsteht im Stäbchen ein hydrostatischer, räumlicher Spannungszustand $-\sigma_{DL}$ bzw. $-\sigma_{DK}$ ($-\sigma_{DL}$ ist vergleichsweise außerordentlich gering und wird nur aus formalen Gründen eingeführt). Wirkt in der Richtung des Stäbchens außerdem noch eine zum Bruch führende Zugkraft, entsprechend den Spannungen σ_{ZL} bzw. σ_{ZK} (erstere wird nahezu gleich σ_{BZ} , d. h. der effektiven Zugfestigkeit sein), so entsteht in dem Stäbchen das eine Mal der Spannungszustand mit den Hauptspannungen $\sigma_1 = -\sigma_{DL}$, $\sigma_2 = -\sigma_{DL}$, $\sigma_3 = \sigma_{ZL} - \sigma_{DL}$, das andere Mal der Spannungszustand mit den Hauptspannungen $\sigma'_1 = -\sigma_{DK}$, $\sigma'_2 = -\sigma_{DK}$, $\sigma'_3 = \sigma_{ZK} - \sigma_{DK}$, wobei in beiden Fällen σ_1 die algebraisch kleinste, σ_3 die algebraisch größte Hauptspannung ist. Gemessen wurden im Augenblicke des Bruches die Größen σ_{ZL} und σ_{ZK} , die gleich befunden wurden. Ein Stäbchen aus Stearin- und Palmitinsäure zerriß sogar bei einem negativen Werte von σ'_3 , d. h. bevor σ_{ZK} gleich $|\sigma_{DK}|$ geworden war, also bei einem Spannungszustand, für den alle drei Hauptspannungen negativ waren. Die Bruchfläche war in allen Fällen nahezu normal zur Zugspannung σ_{ZL} bzw. σ_{ZK} , hatte also den Charakter eines Trennungsbruches. Voigt schloß, daß die Differenz zwischen den gleichsinnig gerechneten Spannungen normal und parallel zur Zerreißungsfläche eine der Substanz individuelle, für den Moment des Zerreißens charakteristische Konstante sei. In der Tat ergibt sich $\sigma'_3 - \sigma'_1 = \sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_{ZK} = \sigma_{ZL} = \sigma_{BZ}$. Nachdem die größte Schubspannung dem Zahlenwerte nach der halben Differenz der Hauptspannungen gleichkommt, würde jetzt formal die Coulombsche Anschauung über das Maß der Bruchgefahr passen, wenn man davon absieht, daß jetzt ein Trennungsbruch vorliegt. Insofern aber die Coulombsche Anschauung

zur Folgerung führt, daß der Bruch längs jenen Flächenelementen erfolgen soll, in denen die Schubspannung ein Maximum wird, ist auch sie hinfällig. Ebenso ist die Theorie von Lamé-Clebsch auf das beschriebene Versuchsergebnis nicht anwendbar, da $\sigma'_3 = \sigma_{BZ}$ oder $\sigma'_1 = \sigma_{BD}$ mit den Versuchsergebnissen resp. Versuchsbedingungen (der Druck der Kohlensäure wurde verschieden hoch gewählt und stets zeigte sich dasselbe Resultat) in Widerspruch steht.

Die Voigtschen Versuche scheinen auch zu beweisen, daß ein Trennungsbruch eintreten kann, ohne daß Zugspannungen normal zur Trennungsfläche vorhanden sind, ja sogar, wenn nur Druckspannungen in der Trennungsfläche auftreten.

Die Umschlingungs-Druckversuche von Föppl (L) deuten in der gleichen Richtung. Die Versuche wurden mit Würfeln aus Zement, Sandstein und Basalt ausgeführt, die das eine Mal unter Zuhilfenahme einer als Druckkreuz bezeichneten Einrichtung einem nahezu homogenen ebenen hydrostatischen Spannungszustand (Seite 72) mit zwei gleichen negativen Hauptspannungen und einer dritten verschwindenden ausgesetzt wurden, d. h. es war bei algebraischer Ordnung der Hauptspannungen derart, daß $\sigma_1 = \sigma_2 < 0$ die algebraisch kleinste, $\sigma_3 = 0$ die algebraisch größte Hauptspannung bedeuten. Das andere Mal wurden die Würfel einem Druckversuch $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ unterworfen. Die als Druckkreuz bezeichnete Einrichtung bestand im wesentlichen aus vier Druckplatten, von welchen je zwei auf einander gegenüberliegende Flächen des Würfels zur Wirksamkeit gebracht wurden. Dieselben waren miteinander durch ein Gestänge derart verbunden, daß bei Übertragung einer Kraft auf das Gestänge gleichzeitig je ein gleicher Druck auf die Druckplatten übertragen wurde. Der Wert der Festigkeit, der sich bei den Umschlingungsversuchen ergab, wird Umschlingungsdruckfestigkeit genannt.

Dadurch, daß die Versuche teilweise mit geschmierten, teilweise mit ungeschmierten Druckflächen ausgeführt wurden, konnte der wesentliche Einfluß der Reibung auf die zugeordnete relative Festigkeit mit Annäherung erschlossen werden.

Föppl fand, a) daß die Druckfestigkeit und die Umschlingungsdruckfestigkeit bei ungeschmierten Druckflächen bedeutend größer waren als bei geschmierten Druckflächen, b) daß die Umschlingungsdruckfestigkeit bei geschmierten Druckflächen gleich der Druckfestigkeit ist, c) daß bei nicht geschmierten Druckflächen die Umschlingungsdruckfestigkeit bedeutend höher liegt als die Druckfestigkeit.

So fand Föppl die Druckfestigkeit für Würfel aus Zementmörtel (ein Teil Zement plus 3 Teile Normalsand plus Wasser) nach 60 tägiger Erhärtung bei geschmierten Druckflächen mit 139 kg/cm^2 , bei ungeschmierten Druckflächen mit 247 kg/cm^2 . Die Umschlingungsdruckfestigkeit wurde bei dem gleichen Material unter denselben Verhältnissen bei geschmierten Druckflächen mit 144 kg/cm^2 , bei ungeschmierten Druckflächen mit 477 kg/cm^2 gefunden.

Bei Beurteilung der unter a) und c) genannten Versuchsergebnisse darf nicht vergessen werden, daß dann, wenn die Reibung nicht nahezu ausgeschaltet wird, wie das bei Schmierung zutrifft, der im Würfel entstehende Spannungszustand kein homogener und auch nicht der von vornherein gewollte ebene hydrostatische resp. reine Druckspannungszustand ist. Man kann demnach von einer wahren oder effektiven und scheinbaren Umschlingungsdruck- bzw. Druckfestigkeit auch in dem Sinne sprechen, daß für erstere Reibung ausgeschaltet, für letztere aber vorhanden gedacht ist (siehe hierzu auch Seite 234).

Das unter b) gefundene Ergebnis wird durch die Lamé-Clebschsche Anstrengungstheorie formal gedeckt. Dagegen entsprechen dieser Theorie nicht

die erhaltenen Bruchflächen. Die Würfel zerfielen nämlich in Platten parallel zur Fläche, die keinem Druck ausgesetzt waren, d. h. parallel zur Kräfteebene. In den Bruchflächen war keine oder nur eine sehr geringe nicht gewollte Normalspannung vorhanden, die nicht Ursache des den Charakter eines Trennungsbruches tragenden Bruches sein konnte. Die Würfel zerbrachen also völlig entsprechend den Stäbchen der Voigtschen Versuche. Wird bei letzteren $\sigma_{zK} = |\sigma_{DK}|$, d. h. wird der allseitige Druck der Kohlensäure durch die hinzukommende Zugbeanspruchung gerade aufgehoben, so erhält man eine Beanspruchung nach Art der Umschlingungsdruckfestigkeit. Der Schluß, den Voigt aus seinen Versuchen gezogen hat, stimmt aber mit den Resultaten der Versuche von Föppl nicht zusammen; denn wenn jener Schluß auf die Umschlingungsdruckbeanspruchung angewendet wird, so müßte sich letztere gleich der Zugfestigkeit ergeben, was aber für die Zementwürfel ganz bestimmt unrichtig ist.

Wahrscheinlich vollinhaltlich stimmt die Theorie von Clebsch-Lamé auf die Brüche, welche bei spröden Körpern bei Beanspruchung auf Zug, Biegung (ein gerader Stab, der beiderseits möglichst reibungslos auf zylindrischen Walzen

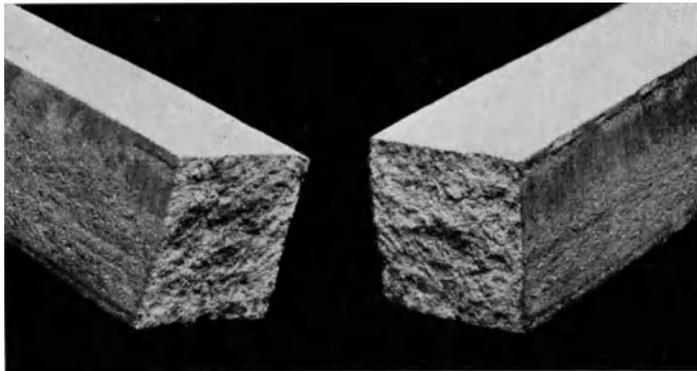


Abb. 77. Trennungsbruch eines quadratischen Stabes aus Gußeisen nach Beanspruchung auf Biegung.

aus Stahl ruht, wird nach Abb. 108 (Seite 252) in seiner Längssymmetrieebene durch eine in der Mitte des Stabes wirkende Kraft P bis zum Bruche belastet) und Verdrehung (Abb. 151, Seite 325). Siehe hierzu die Brucherscheinungen von Normalrundstäben aus Gußeisen nach Abb. 36, Seite 138 und 42, Seite 141 und Zement nach Abb. 38 bei Beanspruchung auf Zug und von gußeisernen zylindrischen Stäben nach Abb. 75 und 75 a bei Beanspruchung auf Verdrehung, schließlich des quadratischen in der angegebenen Weise auf Biegung beansprucht gewesenen Stabes aus Gußeisen nach Abb. 77.

Infolge der Biegungsbeanspruchungen treten Bruchflächen unter der Last P normal zur Stabachse auf, die von der Unterseite des Stabes ausgehen. Sie stehen auch normal auf die im Lastquerschnitt auftretenden größten Zugspannungen, die an der Unterseite des Stabes zustande kommen (siehe Seite 251 ff. des zweiten Teiles). Der Bruch hat zu Beginn, wo die genannten Zugspannungen allein wirksam werden, den Charakter eines Trennungsbruches, im weiteren Verlaufe stellt er eine Verquickung von Trennungs- und Verschiebungsbruch vor. Für Gußeisen wurde bei Annahme des Potenzgesetzes (Seite 147) von Bach (L) nachgewiesen, daß im Augenblicke des Bruches die größte Zugspannung im Bruchquerschnitt, im Falle der Beanspruchung auf Biegung gleich ist der Zugfestigkeit bei Beanspruchung auf Zug. Es ist wahrscheinlich, daß auch im Falle der Beanspruchung

auf Verdrehung im Augenblicke des Bruches die in den Bruchflächen übertragene Hauptspannung (siehe P. 20, Seite 345ff. des zweiten Teiles) gleichkommt der Zugfestigkeit des Materiales.

3. Anschauung von Poncelet, De Saint Venant, Grashof. Bezüglich der ursprünglich von Poncelet auf Grund theoretischer Erwägungen gefaßten und später von De Saint Venant und Grashof in besonderer Art vertretenen Anschauung über das Maß der Anstrengung kann zunächst auf Seite 153ff. hingewiesen werden, wo die insbesondere durch F. Grashof (L) vertretene Abart dieser Anschauung mit Bezug auf die Elastizitätsgrenze eines Stoffes ausführlich behandelt wurde. Danach soll entweder die größte positive Hauptdehnung oder die dem Zahlenwerte nach größte negative Hauptdehnung Maß der Anstrengung sein. Die ursprüngliche Anschauung von De Saint Venant ging wie jene von Poncelet dahin, daß die größte positive Hauptdehnung allein maßgebend für die Anstrengung oder für die Erreichung einer Grenze sei. De Saint Venant glaubte, daß die bei einem Druckversuch an der Elastizitätsgrenze normal zur Druckrichtung auftretende positive Dehnung der positiven Dehnung der Elastizitätsgrenze auf Zug gleich sein müßte. Diese Meinung wird aber durch die Erfahrung nicht allgemein bestätigt.

Es ist klar, daß die Auffassungen von Poncelet, De Saint Venant und Grashof zu der Folgerung drängen, jeden Bruch als Trennungsbruch im weiteren Sinne anzusehen, d. h. als einen solchen, für den Zugspannungen normal zu den getrennten Flächen nicht unbedingt auftreten müssen.

Durch die Versuche von Bauschinger (Seite 155) und durch jene von Wehage (L) ist die De Saint Venant-Grashofsche Theorie für bestimmte Beanspruchungsarten als nicht völlig zutreffend erkannt worden. Wehage machte Versuche mit allseitig aufgelagerten kreisförmigen flußeisernen Platten, die in der Mitte mittels Stempel mit kugelförmig abgerundeter Druckfläche belastet wurden, und schloß aus denselben, daß die in der Mitte der Platte bei ihrer Durchbiegung sich ergebende bleibende Hauptdehnung etwa $0,57 e_B$ sein müsse, wenn e_B die allerdings annähernd ermittelte effektive bleibende Bruchdehnung eines auf Zug beanspruchten Stabes aus dem gleichen Material ist. Die Platte war dabei beim Bruch in der Mitte ihrer oberen Seite (auf die der Stempel aufgesetzt wurde) auf Umschlingungszugfestigkeit beansprucht, d. h. ein kleines Volumenelement erlitt dort Hauptspannungen $\sigma_2 = \sigma_3 \neq 0$, $\sigma_1 = 0$. Die Hauptdehnungen in der Ebene der Hauptspannungen σ_2, σ_3 waren dementsprechend nach allen Richtungen gleich groß. Der Bruch erfolgte normal auf die Ebene von σ_1 und σ_3 und muß in seinem Anfangsstadium als Trennungsbruch aufgefaßt werden. Aus dem Versuch von Wehage geht hervor, daß die größten Hauptdehnungen bei zwei verschiedenen Beanspruchungsarten beim Bruch nichts weniger als gleich sein konnten. Letzteres wird aber durch die De Saint Venantsche Theorie gefordert.

Auch der oben näher verfolgte Föpplsche Umschlingungsdruckversuch mit geschmierten Druckflächen deutet in seinen Resultaten darauf hin, daß die bei ihm auftretenden Bruchquetschungen keinesfalls der bei einfacher Druckerprobung mit geschmierten Druckflächen auftretenden Quetschung gleichkommen können.

Die Anschauung von Grashof hat, wie bereits oben in einem anderen Zusammenhange erwähnt, deswegen praktische Wichtigkeit, weil sie eine Grundlage für die Dimensionierungsprobleme des Ingenieurs geworden ist. Dabei werden an Stelle der Hauptdehnungen aus praktischen Gründen entweder die größte positive oder die dem Zahlenwerte nach größte negative reduzierte Spannung (Seite 149) in die Dimensionierungsgleichungen eingeführt (Seite 414ff.). Wie wir später noch sehen werden, schafft man die sich notwendig ergebenden Un-

stimmigkeiten mit der Erfahrung durch Einführung von der Korrektur dienenden Erfahrungskoeffizienten aus der Welt. Ein derartiger Vorgang ist allerdings nicht befriedigend, er muß aber gewählt werden, weil eben derzeit eine sämtliche Erscheinungen umfassende Anstrengungstheorie noch nicht existiert.

4. Die Anschauung von Mohr. Die Mohrsche Anstrengungstheorie ist in ihren Grundzügen bereits entwickelt worden (Seite 155ff.). Wir erinnern zunächst an die von Bauschinger und Guest durchgeführten Versuche über die Größe der Elastizitätsgrenze für verschiedene Stoffe und bei verschiedenen Spannungszuständen, welche die Theorie von Mohr bestätigt haben.

Die oben bereits erwähnte Erscheinung der verschiedenen Winkel der Fließlinien in der Zug-(Druck-)Richtung für verschiedene Flußeisensorten kann durch die Mohrsche Theorie der Anstrengung ebenfalls erklärt werden. Nehmen wir an, es liege gehärteter Stahl vor, der auf Zug bzw. Druck bis zur Fließgrenze beansprucht wird, bei deren Überschreitung die Fließfiguren auftreten. Die Fließgrenze σ_D^F auf Druck liegt bei diesem Stoffe höher als die Fließgrenze σ_Z^F auf Zug. Daher werden die zugehörigen Hauptkreise in der Mohrschen Darstellung (Abb. 78) verschieden groß erscheinen. Der Beanspruchung auf Zug $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_Z^F$ ist mit Bezug auf eine unendlich kleine Kugel (Abb. 78a), welche wir uns um einen Punkt O des auf Zug beanspruchten Stabes konstruiert denken, als

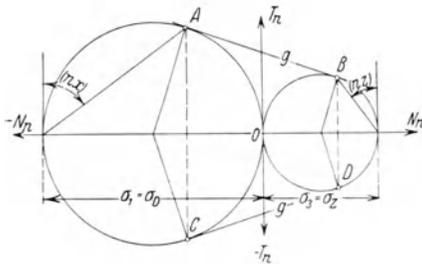


Abb. 78.

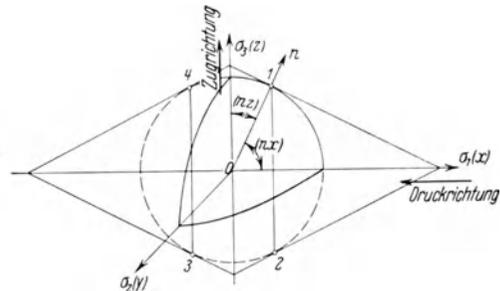


Abb. 78a.

Richtung von σ_3 die positive z -Achse, der Beanspruchung auf Druck $\sigma_1 = \sigma_D^F$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ist die negative Richtung der x -Achse zugeordnet. Der Teil der Grenzkurve an der Fließgrenze, der den zwischen der Beanspruchung auf Zug und Druck liegenden Spannungszuständen zugeordnet ist, sei, wie es für Flußeisen sehr wahrscheinlich ist, durch das Geradenpaar g, g dargestellt. Wenn das zutrifft, dann sind bei Zug- bzw. Druckbeanspruchung die komplementären Winkel, die die Normale n des Flächenelementes (längs welchem die Fließgrenze nach Mohr erreicht werden soll) mit der x - bzw. z -Achse einschließt, durch (n, x) bzw. (n, z) gegeben. Den Punkten A, C bzw. B, D der der Zug- bzw. Druckbeanspruchung zugeordneten Hauptkreise entsprechen sonach je zwei zueinander parallele Flächenelemente, welche die unendlich kleine Kugel in Abb. 78a in Meridiankreisen berühren, deren Ebenen durch σ_1 gehen. Von den unendlich vielen in Betracht kommenden zusammengehörigen Paaren von Flächenelementen sind in Abb. 78a nur jene dargestellt, welche den in die Zeichenebene fallenden Meridiankreis in den Punkten 1, 2, 3, 4 berühren. Der Winkel, den die Flächenelemente miteinander bilden, ist in der Zugrichtung ein stumpfer, in der Druckrichtung ein spitzer. Zug und Druckwinkel ergänzen sich auf 180° .

Für weiches Flußeisen liegen die Fließgrenzen auf Druck und Zug gleich hoch, die Hauptkreise an dieser Grenze werden dann einander gleich, und die Geraden g, g gehen in Parallele zur N_n -Achse über. Ferner wird dann offenbar $(n, x) = (n, z) = 45^\circ$ und die Flächenelemente, welche sich in der Zug- bzw. Druck-

richtung schneiden, stehen aufeinander normal. Für ein derartiges Flußeisen ist für Spannungszustände, die zwischen reiner Druck- und reiner Zugbeanspruchung liegen, die Differenz der größten und kleinsten Hauptspannung Maß der Anstrengung (Seite 183 ff.). Die Coulombsche Theorie der Anstrengung kann sonach als ein Spezialfall der Mohrschen Theorie aufgefaßt werden.

Wenn die Ausmündung der Flächenelemente, in welchen nach Mohr die Fließgrenze erreicht wird, an der Oberfläche der auf Zug bzw. Druck beanspruchten Körper als Fließfiguren sichtbar werden, so muß die oben erwähnte von Hartmann gemachte Erfahrung als erklärt angesehen werden.

Die Kármánschen Versuche mit Marmor und Sandstein unter hohem allseitigen Druck, die noch einem zusätzlichen Druck in der Achsenrichtung unterworfen wurden (Seite 166), sprechen ebenfalls für die Mohrsche Theorie. Nach dem oben Gesagten war der Spannungszustand bei diesen Versuchen durch die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3$ festgelegt, worin sämtliche Hauptspannungen negativ sind und algebraisch genommen $\sigma_1 < \sigma_2$ ist. Als Belastungsspannung in axialer Richtung wurde sinngemäß die Differenz $\sigma_1 - \sigma_2$ aufgefaßt, und daher auch als Elastizitätsgrenze ein bestimmter Wert von $\sigma_{1E} - \sigma_{2E}$ bezeichnet, für den die bleibenden Verkürzungen in axialer Richtung einen vorgegebenen Wert erlangen, der, in % der ursprünglichen Länge ausgedrückt, z. B. mit 0,25 festgelegt wurde. Für die Hauptkreise, die dieser Grenze entsprechen, wurde eine stetig verlaufende Grenzkurve gefunden, die die Eigentümlichkeit zeigte, mit wachsender Elastizitätsgrenze $\sigma_{1E} - \sigma_{3E}$ und wachsendem allseitigen Druck immer flacher, d. h. weniger geneigt zur N_n -Achse, um schließlich bei hohem, sehr allseitigem Druck parallel zur genannten Achse zu werden. Das stimmt mit der Föpplschen (Seite 184 ff.) und auch der von Mohr ausgesprochenen Anschauung überein, daß bei allseitigem Flüssigkeitsdruck der demselben an einer Grenze entsprechende Punkt auf der negativen N_n -Achse um so weiter hinausrückt, je größer der Flüssigkeitsdruck wird, oder im besonderen, daß mit letzteren auch die Elastizitätsgrenze zu sehr hohen Werten ansteigt. Bei hohen Manteldrücken auf den Zylinder wird dementsprechend die Differenz $\sigma_{1E} - \sigma_{2E}$ immer mehr konstant, d. h. es gilt dann die Coulombsche Anschauung über das Maß der Anstrengung.

Auch die ganz nach Art wie bei zähen Metallen auftretenden Fließfiguren folgten in ihrem Verlauf den oben für Flußeisen auseinandergesetzten Gesetzmäßigkeiten und Kármán konnte deutlich beobachten, daß die primären Brucherscheinungen ungefähr diesen Fließfiguren entsprechen und alle Merkmale eines Verschiebungsbruches zeigten.

Kármán nahm auch Schaubilder auf, die den Zusammenhang zwischen $\sigma_1 - \sigma_2$ und der axialen Verkürzung zeigen und fand, daß bei wachsendem Manteldruck von Null bis zu hohen Werten die Kurven zuerst den Charakter der Druckkurven bei spröden Körpern, dann jenen von stark plastischen und schließlich von zähen Körpern zeigen.

Zur richtigen Einschätzung dieser Resultate wollen wir schließlich noch erwähnen, daß Kármán seine Probekörper mit sehr dünnen genau passenden Zylindermänteln aus ausgeglühtem Messingblech von 0,1 mm Stärke versehen ließ, wodurch Einwände, die darauf zielen, der Druckflüssigkeit (Glyzerin) einen Teil der Wirkung zur Erzielung der beschriebenen Erscheinungen zuzuschreiben (etwa im Sinne einer Auflockerung der Teile der Probekörper durch die Bruchflüssigkeit) von vornherein ausgeschaltet werden.

Die Föpplschen Versuche mit spröden Körpern (Seite 186 ff.) über Umschlingungsdruckfestigkeit und gewöhnliche Druckfestigkeit bei geschmierten Druckflächen lassen sich formal der Mohrschen Anschauung insofern unterordnen,

als die Hauptkreise für die Beanspruchung auf Umschlingungsdruck und auf gewöhnlichen Druck an der Bruchgrenze gleich sind. Daraus kann geschlossen werden, daß der Wert der mittleren Hauptspannung, der in dem einen Falle gleich σ_1 , in dem anderen Falle gleich Null war, keinen Einfluß auf die Bruchgrenzen dieser Spannungszustände besitzt. Der oben beschriebene im Falle der Umschlingungsdruckbeanspruchung auftretende plattige Zerfall der Versuchswürfel, parallel zur Kraftebene mit dem Charakter von Trennungsbrüchen, paßt aber nicht zur Mohrschen Vorstellung einer stetigen Grenzkurve an der Bruchgrenze.

Das Resultat der Versuche von Voigt würde mit der Mohrschen Theorie formal in Übereinstimmung gebracht werden können, wenn die Grenzkurve der untersuchten Stoffe für Spannungszustände, die zwischen allseitiger Druck- und einfacher Zugbeanspruchung liegen, parallel zur N_n -Achse wäre. Das kann aber nicht sein, da die untersuchten Stoffe eine Druckfestigkeit besaßen, die bedeutend höher als die Zugfestigkeit lagen. Auch der Charakter des Bruches, der ein Trennungsbruch normal zur Stabachse war, scheint der Mohrschen Annahme zu widersprechen (L). Die neuerlichen Versuche, welche Lode [siehe Nadai (L)] mit Rohren aus Eisen, Kupfer und Nickel unternahm, die wie bei den Guestischen Versuchen (Seite 159) einem inneren Flüssigkeitsdruck und gleichzeitig einem axialen Zug ausgesetzt waren — wodurch es möglich war, 3 Spannungszustände im Gebiete der Zugspannungen herzustellen von der Art, daß die kleinste Hauptspannung stets Null und a) die mittlere Hauptspannung nahezu der kleinsten, b) die mittlere Hauptspannung nahezu der größten, c) die mittlere Hauptspannung gleich der Hälfte der größten war —, scheinen darauf hinzudeuten, daß die Erreichung der Fließgrenze nicht nur von der größten und kleinsten Hauptspannung abhängt, sondern daß auch die Größe der mittleren Hauptspannung hierbei eine Rolle spielt, wenn sie auch gering ist. Daraus würde allerdings folgen, daß die Mohrsche Theorie auch bei zähen Metallen nicht völlig zutreffend sein kann.

Auch die Versuche, welche Kármán (L) bei allseitiger Druckbeanspruchung und hinzukommender Zugbeanspruchung mit Marmorstäben machte, deuten auf einen Einfluß der mittleren Hauptspannung hin.

5. Anschauung von Beltrami. Beltrami (L) sprach zuerst vom Standpunkt des Mathematikers die Anschauung aus, daß die spezifische Formänderungsarbeit, die in einem Punkte eines elastischen festen Körpers infolge der Wirksamkeit äußerer Kräfte hervorgerufen wird, als Maß der Anstrengung in diesem Punkte gelten könnte.

Der Verfasser hat¹, als er Glaszylinder aus fein gekühltem Jenenser Glas unter Einfluß der Reibung an den Preßplatten Druckversuchen unterwarf, Bruchfiguren gefunden, die darauf hindeuten, daß längs ihnen die spezifische Formänderungsarbeit extreme Werte erlangt haben.

Später wurde unabhängig von den Genannten durch Prof. Huber in Lemberg der Meinung Ausdruck gegeben, daß die Anstrengung durch die Summe jener Teile der bezogenen Formänderungsarbeit, welche durch reine Gestaltsänderung und reine Volumsänderung bedingt sind², zu messen sei, und zwar in dem Sinne, daß dann, wenn die kubische Dilatation $e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ positiv ist, die gesamte bezogene Deformationsarbeit als Maß der Anstrengung, dann wenn e negativ ist, aber nur der Teil der bezogenen Deformationsarbeit, der sich auf die Gestaltsänderung bezieht (Seite 108 ff.), zu gelten habe.

In neuerer Zeit wurde von Mises (L), unabhängig von Huber, die zur Ge-

¹ Sitzgsber. d. Wiener Akad. d. Wiss. 1907.

² Siehe A. und L. Föppl: Drang und Zwang 1, 50 (1920).

staltsänderung aufgewendete bezogene Deformationsarbeit als maßgebend für die Erreichung der Plastizitätsgrenze (Fließgrenze) angesehen.

Wie aus der vorstehend gedrängten, auf Vollständigkeit keinen Anspruch erhebenden Darstellung hervorgehen dürfte, sind wir heute noch weit davon entfernt, eine allen Erfahrungen gerecht werdende einheitliche Grundlage zur Beurteilung der Anstrengung eines Stoffes bei beliebiger Art des Spannungszustandes zu besitzen, doch sind immerhin viel versprechende Ansätze und Erfahrungen gemacht worden, durch deren Vergleich im Zusammenhang mit der immer mehr an Ausdehnung gewinnenden Untersuchung des physikalisch-chemischen Aufbaues der Stoffe und der Veränderung desselben bei Einflußnahme mechanischer Kraftsysteme wesentliche Fortschritte zu erwarten sind.

40. Über stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht.

Wenn wir (Abb. 79) im höchsten Punkte einer Kugel K eine kleinere homogene Kugel K_1 auflegen, die unter dem Einflusse der Schwere steht, so befindet sich letztere, als starrer Körper betrachtet, im labilen Gleichgewicht. Dieses ist dadurch gekennzeichnet, daß die kleine Kugel bei einer geringen Störung ihre Gleichgewichtslage verläßt und sich in eine neue Gleichgewichtslage begibt, deren potentielle Energie kleiner ist als sie ursprünglich war (der Schwerpunkt der Kugel sinkt). Würde der Kugel K_1 der Weg zwischen der Kugel K und einer ihr konzentrischen Kugelschale K_2 vorgeschrieben sein, so begäbe sich dieselbe in die tiefste Lage K'_1 , die eine stabile Gleichgewichtslage ist. Wenn mg das Gewicht der Kugel K_1 vorstellt und z deren Schwerpunktskoordinate in einem rechtwinkligen Koordinatensystem xyz bedeutet, so ist jedenfalls $-mgz_2 < -mgz_1$, mit z_1 und z_2 als Schwerpunktskoordinaten in der ursprünglichen Lage, bzw. der Lage nach der Störung. $mg(z_2 - z_1)$ ist die Arbeit, welche die Schwere während der Bewegung der Kugel K_1 leistet, d. i. also eine Arbeit, die, von Reibungsverlusten abgesehen, nach der Störung gewonnen werden kann. Legen wir (Abb. 79a)

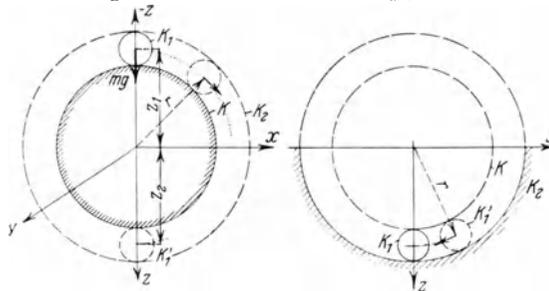


Abb. 79.

Abb. 79a.

die Kugel K_1 zwischen K und Kugelschale K_2 in den tiefsten Punkt der letzteren, so wirkt sich eine auf K_1 übertragene kleine Störungskraft jetzt in einem Heben des Schwerpunktes aus, die potentielle Energie in der gestörten Lage wird größer als in der ursprünglichen Lage, d. h. es muß von außen her positive Arbeit gegen die Schwere und Reibung geleistet

werden. Nach Abklingen der dieser positiven Arbeit entsprechenden lebendigen Kraft kehrt die Kugel wieder in ihre stabile Gleichgewichtslage zurück.

Die labile Lage der Kugel K_1 in Abb. 79 nennen wir eine Verzweigungslage für das Gleichgewicht oder sagen auch das Gleichgewicht habe in der labilen Lage einen Verzweigungspunkt, weil von dieser Lage bei der geringsten Störung mögliche Bahnen abzweigen, die zur stabilen Gleichgewichtslage führen. Wir können diesen Sachverhalt noch etwas genauer dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir sagen: die Kugel K_1 , die unter dem Einflusse der Schwere steht und deren Bewegung der Bedingung unterworfen ist, daß dieselbe nur zwischen der Kugel K und der Hohlkugel K_2 möglich ist, kann eine bestimmte ausgezeichnete Lage annehmen, aus der sie durch eine kleine Störung, ohne daß sich an den angreifen-

den Kräften und den Bewegungsbedingungen etwas zu ändern brauchte, eine Bewegung eingeht, die zu einer zweiten ausgezeichneten Lage, d. i. zur stabilen Gleichgewichtslage führt.

Schließlich können wir uns dieselbe Kugel K_1 auf einer horizontalen reibungslosen Tischfläche liegend vorstellen, wo sie sich im indifferenten Gleichgewicht befindet. Nunmehr bewirkt eine geeignete kleine Störung (die Kugel soll sich nur parallel zur Tischfläche bewegen können), eine kleine Bewegung längs der Tischfläche, wodurch die Kugel in eine neue Lage kommt, in der die potentielle Energie dieselbe ist wie in der ursprünglichen Lage.

Zusammenfassend können wir sagen: im Falle des stabilen, labilen, indifferenten Gleichgewichtes ist die potentielle Energie in der Gleichgewichtslage kleiner, größer, gleich mit Bezug auf die potentiellen Energien möglicher, d. h. mit den Bewegungsbedingungen vereinbarter Nachbarlagen.

Die virtuelle Arbeit [Gleichung (66), Seite 111] der Schwerkraft bei einer sehr kleinen möglichen Verrückung der Kugel K_1 längs eines Durchmesserkreises der Kugel K , z. B. in der xz -Ebene, ist für stabiles und labiles Gleichgewicht durch $mg\delta z$ bestimmt, worin $\delta z = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0} \delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{x=0} \delta x^2 + \dots$ die Änderung der Schwerpunktskoordinate z der Kugel bei der gedachten Verrückung ist. Dieselbe ist entsprechend der Gleichung des Kreises $x^2 + z^2 = r^2$, auf dem sich der Schwerpunkt der Kugel K_1 bewegt, als Funktion von x aufzufassen. Da $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$ und $\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}$, ferner für die Ausgangslage $x = 0$ ist, so wird die virtuelle Arbeit mit Berücksichtigung von Größen zweiter Ordnung

$$mg\delta z = \frac{mg}{2} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} \delta x^2 = -\frac{mg}{2z} \delta x^2. \quad (a)$$

Würde man nur Größen erster Ordnung berücksichtigt haben, wie es bei Anwendung des Prinzipes bei virtueller Arbeit gewöhnlich geschieht, so hätten wir, da für $x = 0$ $\frac{dz}{dx} = 0$ ist, $mg\delta z = 0$ erhalten, wie es sein muß. Der Ausdruck (a) für $mg\delta z$ stellt sonach die virtuelle Arbeit bei Berücksichtigung von Gliedern zweiter Ordnung vor und kann auch als negativer Wert der zweiten Variation der potentiellen Energie $-mgz$ aufgefaßt werden. Diese zweite Variation stellt sich für den labilen Gleichgewichtsfall (z negativ) als negative Größe, für den stabilen Fall (z positiv) als positive Größe heraus. Auch der dritte Fall des indifferenten Gleichgewichtes ist im vorstehenden enthalten, wenn wir uns vorstellen, daß sich die Kugel K längs eines Kreises mit unendlich großem Radius ($r = z = \infty$) bewegt. Die Kugelflächen K und K_2 werden dann Ebenen, und die virtuelle Arbeit $mg\delta z$ wird auch dann, wenn wir Größen zweiter Ordnung berücksichtigen, zufolge (a) gleich Null. Bezeichnen wir die potentielle Energie mit V , so können wir zusammenfassend

$$\delta^2 V \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \quad (b)$$

schreiben, worin das Zeichen $>$ für stabiles, das Gleichheitszeichen für indifferentes, das Zeichen $<$ für labiles Gleichgewicht der Kugel K_1 gültig ist. Die Bedingungen (b) müssen für die betreffenden Gleichgewichtsarten für alle denkbar möglichen Verrückungen erfüllt sein.

Auch für elastische feste Körper sind, wie zu erwarten ist, und auch die Erfahrung reichlich lehrt, labile und indifferente Gleichgewichtszustände neben stabilen, die wir bis jetzt stets voraussetzten, möglich. Der bekannteste Fall ist der bereits von Euler untersuchte, der die sog. Knickbeanspruchung

eines geraden Stabes betrifft. Wenn wir einen langen dünnen Stab, der z. B. auf der einen Seite fest eingespannt, auf der anderen Seite frei ist (Abb. 80), durch je eine Druckkraft P , die sich genau gleichförmig über die Endquerschnittsflächen verteilen sollen, derart beanspruchen, daß P von Null aus sehr langsam wächst, so kommen wir, wenn die Größe der Kraft durch einen bestimmten Wert, kritische Belastung genannt, hindurchgeht, aus dem Gebiet des stabilen

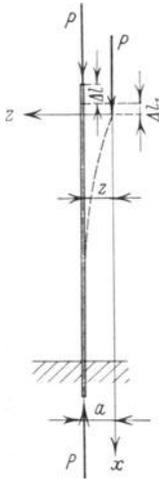


Abb. 80.

Gleichgewichtszustandes (Kraft unterhalb des kritischen Wertes) über das indifferente Gleichgewicht (Kraft gleich dem kritischen Wert) in das Gebiet des labilen Gleichgewichtszustandes (Kraft größer als der kritische Wert). In der labilen Gleichgewichtslage braucht nur eine kleine Störung einzusetzen, so nimmt der Stab, ohne daß sich die äußere Belastung zu ändern brauchte, eine zweite stabile Lage an (in der Abb. 80 strichliert und übertrieben verkürzt gezeichnet, in Wahrheit liegt die strichlierte Lage der ursprünglichen sehr nahe), d. h. der Stab knickt seitlich aus, wodurch z. B. eine Konstruktion, der der Stab zum Teile angehört, in ihrer Sicherheit bedroht wird. Wird jener kritische Wert nun um unendlich wenig überschritten, so ist zwar noch immer neben der labilen Lage auch die stabile denkbar, da aber mit der Laststeigerung in der Regel eine Störung verbunden sein wird, so nimmt der Stab tatsächlich die ausgeknickte stabile Lage an. Dem kritischen Werte der Last entspricht demnach ganz so wie oben im Falle der Schwerewirkung eine Verzweigungsstelle des Gleichgewichts. Eine weitere Analogie bezieht sich auf die sog. potentielle Energie des festen elastischen Körpers, die an Stelle des Potentials der Schwere tritt. Das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Form (67a), auf Seite 113 können wir nämlich, da für dieselbe ein konstanter wahrer Belastungszustand mit einem virtuellen Verschiebungszustand kombiniert wird, auch in der Form

$$\delta V = \delta (B_i - \sum \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{s}_0) = \delta (B_i - \sum P_x u + P_y v + P_z w) = 0 \quad (88)$$

oder in der Form

$$\delta V = \delta (B_i - \sum P_x x + P_y y + P_z z) = 0 \quad (88a)$$

schreiben, worin P_x, P_y, P_z die Komponenten einer an der Oberfläche des Körpers wirkenden Kraft, u, v, w die einer Oberflächenkraft zugehörigen Verschiebungskomponenten und x, y, z die Koordinaten des Angriffspunktes einer Oberflächenkraft in der deformierten Lage des Körpers bedeuten. Für die Ausführung der Variationen in den Ausdrücken (88) oder (88a) ist zu beachten, daß die Kraft \mathfrak{F} bzw. deren Komponenten bei der virtuellen Verschiebung als konstant anzunehmen sind. Bei einer derartigen Betrachtungsweise kann man V ohne Rücksicht darauf, ob die Kräfte ein Potential im gang und gäben Sinne (Seite 105) besitzen, als potentielle Energie des Körpers in der deformierten Lage auffassen. Das oben für den starren Körper zur Verwendung gebrachte Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist ein Sonderfall der Gleichung (88a), insofern für den starren Körper die Deformationsarbeit B_i verschwindet. Die Form (88a) des Prinzips der virtuellen Arbeit kann als eine Erweiterung der Gleichung (67b), auf Seite 114 angesehen werden. Sie bringt zum Ausdruck, daß im Gleichgewichtsfalle unter allen möglichen Verrückungssystemen jenes wirklich eintritt, das die potentielle Energie zu einem Extrem macht. Welcher Art letzteres wird, hängt wie im oben gegebenen Beispiel für den starren Körper von der Art des Gleichgewichtszustandes (stabil, indifferent oder labil) ab.

Bryan (L) hat allgemein nachgewiesen, daß die oben für einen starren Körper durch die Beziehungen (b) zum Ausdruck gebrachten Bedingungen für den Eintritt von stabilen, indifferenten oder labilen Gleichgewichten für den elastischen festen Körper die Formen

$$\delta^2 V = \delta^2 (B_i - \sum P_x u + P_y v + P_z w) = \delta^2 (B_i - \sum P_x x + P_y y + P_y z) \geq 0 \quad (89)$$

annehmen, worin die Zuordnung der Zeichen zu den drei denkbaren Gleichgewichtsarten ganz so erfolgt, wie das oben zur Beziehung (b) für den starren Körper auseinandergesetzt wurde.

Wenden wir die Beziehung (89) auf den Fall der Knickung an, so können wir sagen, daß die stabile, labile indifferente Gleichgewichtslage sich dadurch auszeichnet, daß für sie die potentielle Energie des unverbogenen Stabes kleiner, größer, gleich ist im Vergleich zu jener möglicher benachbarter Lagen. Die Herleitung der kritischen Belastung für den durch Abb. 80 dargestellten Knickungsfall auf Grund des allgemeinen Energiekriteriums folgt auf Seite 353ff.

Im vorstehenden haben wir für die Knickung angenommen, daß die Kraft P stets gleichförmig über die Endquerschnittsflächen des Stabes verteilt sei. Nur unter dieser Voraussetzung sind die theoretischen Überlegungen richtig, d. h. wird der Stab bis zur Erreichung der kritischen Belastung gerade bleiben, und dann bei einer kleinen Störung in die ausgebogene stabile Lage übergehen. In Wirklichkeit gelingt diese gleichförmige Verteilung höchstens zufällig, und zwar nur bei Kräften, die in der Nähe von Null liegen, d. h. es wird in der Regel eine kleine Exzentrizität bezüglich der Stabachse vorhanden sein, wodurch der Stab von vornherein eigentlich auf exzentrischen Druck beansprucht ist, zufolge welcher er schon an sich Durchbiegungen erleidet. Beim Versuch zeigt sich dann, daß die Durchbiegungen bei gleichbleibender Versuchsgeschwindigkeit sehr rasch zu wachsen beginnen, wenn die Kraft sich dem kritischen Werte nähert. Ähnlich so wie ursprüngliche Exzentrizitäten wirken ursprüngliche, wenn auch außerordentlich kleine, kaum nachweisbare Krümmungen des Stabes und wie diese Inhomogenitäten desselben, durch die eine ungleichmäßige Zusammendrückung und damit Krümmungen verursacht werden.

Eine praktisch sehr wichtige andere Labilitätserscheinung an festen elastischen Körpern ist das sog. Kippen eines geraden oder krummen Stabes. Ein langer einseitig eingespannt gedachter Stab von sehr schmalen rechteckigem Querschnitt (Abb. 81) wird parallel zur Langseite des Rechteckes durch eine durch den Schwerpunkt gehende Kraft P auf Biegung beansprucht. Bei Anwachsen dieser Kraft von Null aus ist der Stab zuerst im stabilen Gleichgewicht (Lage A), kommt dann in eine indifferente Gleichgewichtslage, von der aus eine labile und eine stabile Gleichgewichtslage B abzweigen. Aus der labilen Lage führt eine kleine Störung in die stabile Lage B , die sich dadurch auszeichnet, daß der Stab aus der Biegungsebene herausgedreht wird. Diese Verdrehung nennt man Kippen. Die Erscheinung ist völlig analog dem Knicken und kann auf ähnliche Weise wie das Knicken theoretisch verfolgt werden.

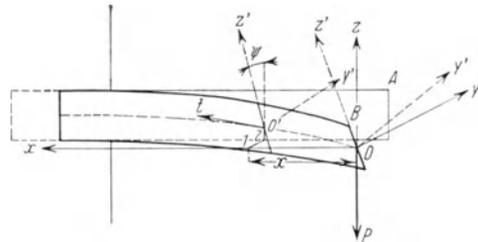


Abb. 81.

Die Existenz des stabilen neben dem labilen Verschiebungs- und Verformungszustand bei dem gleichen wirkenden äußeren Kraftsystem steht im Widerspruche mit dem Eindeutigkeits-

beweise auf Seite 87 ff., nach welchem einem gegebenen System äußerer Kräfte unter der Voraussetzung, daß Eigen- und Temperaturspannungen nicht da sind, nur ein Verschiebungs- und Verformungszustand entsprechen kann. Zur Aufklärung dieses Widerspruches werden in der Literatur zwei Gründe angeführt: Der erste besagt, daß die elastischen Grundgleichungen (48) und (49) auf den Seiten 86 und 87, dank ihrem Charakter als lineare partielle Differentialgleichungen der Eindeutigkeitsbeweis erbracht werden konnte, nur so lange gelten, als die Verzerrungskomponenten klein sind. Werden dieselben bedeutender, wie bei Stoffen, welche schon bei geringen äußeren Kräften starke Formänderungen erleiden — was stets zutrifft, wenn Elastizitäts- und Gleitmodul die Größenordnungen der durch den Stoff ohne Bruch ertragbaren Spannungen besitzen (Gummi), so gelten für die Verzerrungskomponenten ausgedrückt als Funktion der Ableitungen der Verschiebungskomponenten nicht mehr die Gleichungen (6) und (7) auf den Seiten 29 und 30, für deren Gewinnung höhere als die ersten Potenzen der partiellen Differentialquotienten der Verschiebungskomponenten oder Produkte der ersten Ableitungen derselben vernachlässigt wurden, da letzteres bei größeren Verzerrungen nicht mehr statthaft ist. Infolgedessen verlieren die aus den Spannungsgleichungen (20) und (21) auf den Seiten 48 und 49 und den Grenzbedingungen (24) auf Seite 53 durch Ersatz der Spannungskomponenten durch die Verzerrungskomponenten auf Grund des Hookeschen Gesetzes erhaltenen Grundgleichungen der Elastizitätstheorie ihren Charakter als lineare partielle Differentialgleichungen, wodurch das Fundament des Eindeutigkeitsbeweises fällt.

Der zweite Grund, der zur Aufklärung des obigen Widerspruches angegeben wird, will feststellen, daß für den Fall als eine oder zwei Dimensionen des Körpers gegenüber den restlichen Dimensionen sehr klein sind, wie bei dünnen Stäben und dünnen Platten, bei welchen das Eintreten labiler Gleichgewichtszustände bei geeigneter Wirksamkeit äußerer Kräfte vor allem beobachtbar wird, große Verschiebungen möglich sind. Bei derartig großen Verschiebungen können zwar die Verzerrungskomponenten von den oben bereits genannten Ausnahmefällen abgesehen, nichtsdestoweniger sehr klein bleiben, man kann aber nunmehr die Gleichungen (6) und (7) deswegen nicht mehr ohne weiteres zur Verwendung bringen, weil die dann auftretenden Fehler wie die Analyse in besonderen Fällen lehrt, die Größenordnung der kleinen Dimensionen des Körpers besitzen, woraus die Notwendigkeit erhellt, in den Gleichungen (6) und (7) für die Verzerrungskomponenten auch Glieder höherer Ordnung zu berücksichtigen.

Beide Gründe zur Erklärung des Widerspruches können als nicht stichhaltig bezeichnet werden, denn sowohl Verzerrungen als auch Verschiebungen können z. B. im Falle der Knickung bei Abweichung aus der labilen Lage in die stabile, d. h. in der Nähe der kritischen Last oberhalb derselben sehr klein sein. v. Mises (L) hat hierauf mit Nachdruck hingewiesen, und insbesondere betont, daß die unsichere Grenzziehung zwischen kleinen und großen Dimensionen in praktischen Fällen nicht Grundlage für eine Beweisführung sein kann. Er betont, daß der Kernpunkt des Eindeutigkeitsbeweises eigentlich darin zu bestehen hätte, zu zeigen, daß durch die Vernachlässigungen, welcher man sich bei Annahme der linearen Differentialgleichungen (48) und (49) als Grundlage zur Lösung von Gleichgewichtsproblemen schuldig machte, unabhängig von den Dimensionen des Körpers keine mögliche Lösung des Gleichgewichtsproblems verloren gegangen sei. Dieser Nachweis sei aber nicht zu erbringen, weil auch bei sehr kleinen Verschiebungen (unendlich klein werden sie ja in praktischen Fällen nie) in den genannten Gleichungen Größen vernachlässigt werden, die für die Vieldeutigkeit der Lösung ausschlaggebend sind. In der Tat spielen ja, wie wir oben bemerkten, die zweiten Variationen für die Entscheidung der Art des Gleichgewichtes eine Rolle, in die Größen eintreten, die mit Bezug auf die Verschiebungen selbst unendlich klein sind.

Der eigentliche, allerdings in der gewöhnlichen Fassung nicht enthaltene Inhalt des Satzes über die Eindeutigkeit der Lösung ist nach von Mises der, daß, solange ein bei gegebener Art der Beanspruchung eines Körpers die Größe der Beanspruchung bestimmender Faktor λ einen gewissen kritischen Wert nicht erreicht, das Gleichgewicht stabil und die Lösung eindeutig ist. Bei Überschreiten dieses kritischen Wertes, das an die mit dem Gleichheitszeichen zu nehmende Bedingung (89) geknüpft ist, wird zufolge des Einflusses der in den Gleichungen (48) und (49) vernachlässigten Glieder die Lösung des Gleichgewichtsproblems mehrdeutig. Der kritische Wert λ , der auch unendlich groß werden kann, liegt z. B. im Falle der Knickung von im Vergleich zur Länge sehr dünnen Stäben, sehr niedrig, derart, daß die ihm zugeordnete kritische Last einer Druckbeanspruchung entspricht, die unter der Elastizitätsgrenze liegt. Deswegen ist die kritische Laststellung in diesem Falle besonders augenfällig, und ist der labile Fall der Knickung gerader Stäbe frühzeitig Gegenstand der Beobachtung geworden.

V. Elastokinetik.

1. Die elastokinetischen Grundgleichungen. Satz über die lebendige Kraft.

Gegenstand der Elastokinetik ist das Studium der Bewegungen und des Spannungszustandes von elastischen festen Körpern, die unter dem Einflusse von sich nicht das Gleichgewicht haltenden äußeren Kräften stehen. Dabei ist die äußere Beanspruchungsart im allgemeinen von Zeitaugenblick zu Zeitaugenblick verschieden. Um die Bewegungen festzulegen, führen wir zunächst 2 Koordinatensysteme ein. Das erste, mit xyz bezeichnete, liegt im Raume fest, das zweite XYZ , das wir als bewegliches Koordinatensystem einführen wollen, habe seinen Ursprung im Schwerpunkte des Körpers und besitze Achsen, die mit dem erstarrt gedachten Körper fest verbunden sind. Die wirkliche Bewegung des Körpers kann dann durch Übereinanderlagerung der Bewegung, welche entstünde, wenn der Körper starr wäre, und jener infolge der Verformbarkeit des Körpers gewonnen werden. Die Koordinaten eines Punktes des erstarrt gedachten festen Körpers zur Zeit t seien mit Bezug auf das feste Koordinatensystem x, y, z , mit Bezug auf das bewegliche Koordinatensystem seien sie X, Y, Z . Die wirklichen Koordinaten eines Punktes des Körpers zur Zeit t (d. h. die Koordinaten, die dem festen deformierten Körper zukommen) seien mit Bezug auf das feste Koordinatensystem $x + u, y + v, z + w$, mit Bezug auf das bewegliche Koordinatensystem aber $X + U, Y + V, Z + W$; U, V, W sind demnach die nur den elastischen Deformationen zugeordneten Verschiebungskomponenten zur Zeit t mit Bezug auf das mit dem starren Körper fest verbunden gedachten Koordinatensystem XYZ in der Lage, welche dasselbe zur Zeit t besitzt, und sind als solche nicht nur Funktionen der Koordinaten X, Y, Z , sondern auch der Zeit t (Seite 10). Den Verschiebungskomponenten U, V, W sind in jedem Zeitaugenblicke in jedem Punkte des Körpers gewisse Komponenten der Verschiebungsgeschwindigkeiten $\frac{\partial U}{\partial t}$ usw. und der Verschiebungsbeschleunigungen $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ usw., sowie Verzerrungskomponenten $E_{xx} \dots E_{zx}$, ferner Komponenten der Verformungsgeschwindigkeit $\frac{\partial E_{xx}}{\partial t} \dots \frac{\partial E_{zx}}{\partial t}$ und der Verformungsbeschleunigung $\frac{\partial^2 E_{xx}}{\partial t^2} \dots \frac{\partial^2 E_{zx}}{\partial t^2}$ zugeordnet (Seite 45ff.).

Hat man für jede Zeit t , in jedem Punkte des elastischen Körpers, dessen Koordinaten x, y, z bezogen auf das im Raum feste Koordinatensystem und die Verschiebungskomponenten, sowie die aus ihnen folgenden Verzerrungskomponenten gegeben, so ist die Lage des festen elastischen Körpers, sowie die Gestalt- und Raumänderung desselben jederzeit bekannt. Desgleichen ist dann in jedem Punkte, die Geschwindigkeit, die vorhanden wäre, wenn der Körper starr wäre und die Verschiebungsgeschwindigkeit, also der Bewegungszustand zur Zeit t gegeben.

Hierzu sei noch bemerkt, daß die Aufsuchung der Koordinaten x, y, z als Funktion der Zeit bei gegebenem Lagen- und Geschwindigkeitszustand zur Zeit $t = 0$ und gegebenem äußeren Kraftsystem, ferner die Aufsuchung der Lage des Koordinatensystemes XYZ als Funktion der Zeit, Aufgaben der Kinetik starrer Körper sind, die hier als bekannt vorausgesetzt und daher nicht weiter behandelt werden. Für ihre Lösung muß von dem Schwerpunktssatze ferner von den Eulerschen dynamischen und geometrischen Gleichungen Gebrauch gemacht werden¹.

¹ Siehe z. B. E. J. Routh: Die Dynamik der Systeme starrer Körper 1, Leipzig: B. G. Teubner 1898.

Den Verschiebungs- und Verformungszustand ist zu jeder Zeit t ein Spannungszustand $X_X \dots Z_Z$ zugeordnet, von dem angenommen werden soll, daß er verschwindet, wenn der Körper bei seiner Bewegung keine Deformationen erleidet. Die Spannungskomponenten sind jetzt als Funktionen der Koordinaten X, Y, Z und der Zeit t anzusehen. Die bei der Bewegung des Körpers auftretenden Trägheitskräfte können wir ebenfalls trennen in solche, die vorhanden wären, wenn der Körper starr wäre und in solche, die zu diesen infolge der elastischen Bewegung hinzutreten. Bezogen auf das Koordinatensystem XYZ in jener Lage, welche dasselbe zur Zeit t besitzt, sind die Komponenten der ersteren für ein Volumenelement durch

$$-\mu \frac{d^2 X}{dt^2} dX dY dZ, \quad -\mu \frac{d^2 Y}{dt^2} dX dY dZ, \quad -\mu \frac{d^2 Z}{dt^2} dX dY dZ$$

ausdrückbar mit μ als Masse pro Volumeneinheit an der betreffenden Stelle des Körpers. Die Komponenten parallel zu den gleichen Achsen X, Y, Z der Trägheitskräfte infolge der elastischen Bewegung sind in ähnlicher Weise zur Zeit t durch

$$-\mu \frac{d^2 U}{dt^2} dX dY dZ, \quad -\mu \frac{d^2 V}{dt^2} dX dY dZ \quad \text{und} \quad -\mu \frac{d^2 W}{dt^2} dX dY dZ$$

darstellbar. Nach dem d'Alembertschen Prinzipie kann jeder Fall der Kinetik dadurch auf einen Fall der Statik zurückgeführt werden, daß man zu den angreifenden Kräften und den Reaktionen die Trägheitskräfte hinzufügt und dann die gewöhnlichen statischen Gleichgewichtsbedingungen anschreibt. Fügen wir so nach in den Spannungsgleichungen (20) auf Seite 48 zu den Volumskräften die Trägheitskräfte pro Volumeneinheit hinzu, so erhalten wir für das Gleichgewicht in der X -Richtung des Koordinatensystems in der Lage, welche dasselbe zur Zeit t besitzt, die Bedingung

$$\mu \left(\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{d^2 U}{dt^2} \right) = \frac{\partial X_X}{\partial (X+U)} + \frac{\partial X_Y}{\partial (Y+V)} + \frac{\partial X_Z}{\partial (Z+W)} + S_X \mu \dots \quad (90)$$

Hierzu kommen noch zwei analoge Gleichungen für das Gleichgewicht in der Y - und Z -Richtung, auf welche das Zeichen \dots hindeuten soll. Die Größen s_x usw. beziehen sich auf die Komponenten der Massenkkräfte, bezogen auf die Masseneinheit ($S_X \mu = K_X$). Auf der rechten Seite der Gleichungen (90) stehen die partiellen Differentialquotienten nach den Koordinaten $X+U, Y+V, Z+W$, da wir uns im allgemeinen das rechtwinklige Volumenelement, auf welches wir die Gleichgewichtsbedingungen anwenden, aus dem deformierten Körper herausgeschnitten denken müssen. Sind die Verschiebungen aus der undeformierten Lage aber klein, so können wir die Differentiation auf der rechten Seite von (90) nach X, Y, Z vornehmen, wodurch, wenn $X+U = \Xi, Y+V = H, Z+W = Z$ gesetzt wird, die einfachere Form erhalten wird

$$\mu \frac{d^2 \Xi}{dt^2} = \mu \left(\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{d^2 U}{dt^2} \right) = \frac{\partial X_X}{\partial X} + \frac{\partial X_Y}{\partial Y} + \frac{\partial X_Z}{\partial Z} + K_X \dots \quad (90a)$$

Nennen wir die Koordinaten der Punkte des deformierten Körpers bezogen auf das im Raume feste Koordinatensystem, welche derselbe in seinem natürlichen Zustande (Seite 25) zur Zeit $t=0$ besitzt, x_0, y_0, z_0 und die sowohl der Bewegung des erstarrt gedachten Körpers als auch der elastischen Bewegung zugeordneten Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ , so finden wir nach dem d'Alembertschen Prinzip die Form

$$\mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{\partial X_x}{\partial (x_0 + \xi)} + \frac{\partial X_y}{\partial (y_0 + \eta)} + \frac{\partial X_z}{\partial (x_0 + \zeta)} + k_x \dots \quad (91)$$

an. Die Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ hängen mit den nur infolge der elastischen Deformation auftretenden Verschiebungskomponenten u, v, w durch

$$\xi = u + x - x_0, \quad \eta = v + y - y_0, \quad \zeta = w + z - z_0, \quad (\text{a})$$

zusammen. Sind die Verschiebungskomponenten u, v, w sehr klein, so kann auf der rechten Seite von (91) $x_0 + \xi = x, y_0 + \eta = y, z_0 + \zeta = z$ gesetzt werden, und es geht die genannte Gleichung in

$$\mu \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 u}{dt^2} \right) = \mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + k_x \dots \quad (91a)$$

über.

In den Gleichungen (90a) und (91a) sind die Komponenten $\frac{d^2 U}{dt^2}$ bzw. $\frac{d^2 u}{dt^2}$ nicht mit den Komponenten der Verschiebungsbeschleunigungen $\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2}$ bzw. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ identisch, denn die mit dem totalen Differentialzeichen versehenen Größen beziehen sich auf die elastische Bewegung eines Massenteilchens, für welche die Verschiebungen als Funktionen der Zeit und der Koordinaten aufzufassen sind, während die partiellen Zeichen auf die Änderung der Verschiebungsgeschwindigkeit mit der Zeit für einen bestimmten herausgegriffenen Punkt, der sich mit dem erstarrt gedachten Körper bewegt, hinweisen sollen. Bei kleinen totalen Verschiebungen kann das totale Differentialzeichen durch das partielle ersetzt werden.

Zu den Spannungsgleichungen (90a) bzw. (91a) für kleine Verschiebungen treten noch jene, welche sich auf die Anwendung des Momentensatzes mit Bezug auf drei aufeinander normale Achsen für die an einem Volumelement des Körpers angreifenden Kräfte, einschließlich der Trägheitskräfte beziehen. Hierbei kommt man aber wieder auf den Satz der Gleichheit zugeordneter Schubspannungen nach den Gleichungen (21) auf Seite 49, da die Richtigkeit dieses Satzes von der Existenz von Volumskräften also auch von Trägheitskräften unabhängig ist. Auch die Grenzbedingungen (24) auf Seite 53 können aus dem gleichen Grunde ohne weiteres für die Elastokinetik übernommen werden.

Setzen wir die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes und kleine Verschiebungen voraus, so können wir, wenn wir in (91a) die Spannungskomponenten durch die Verzerrungskomponenten ausdrücken, Gleichungen von der Form

$$\nabla^2 u + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{k_x}{G} = \mu \frac{d^2 \xi}{dt^2} \dots \quad (92)$$

erhalten, welche den Gleichungen (48) auf Seite 86 entsprechen. Die unter Zuhilfenahme des Hookeschen Gesetzes umgewandelten Grenzbedingungen (49) auf Seite 87 bleiben ungeändert. Die Gleichungen (92) mit den Grenzbedingungen (49) heißen die elastokinetischen Grundgleichungen für kleine Verschiebungen mit Bezug auf ein festes Koordinatensystem. Zu den Gleichungen (92) formal ähnliche Gleichungen mit Bezug auf ein bewegtes Koordinatensystem XYZ können aus dem System (90a) in selbstverständlicher Weise hergeleitet werden.

Das Grundproblem der Elastokinetik kann nunmehr dahin formuliert werden, bei gegebenen äußerem Kraftsystem und gegebenen Anfangsbedingungen (d. h. bei gegebenen Bedingungen bezüglich Lage und Geschwindigkeit der einzelnen Punkte des elastischen festen Körpers zur Zeit $t = 0$) den Spannungs-, Verschiebungs- und Verzerrungszustand für jeden beliebigen Zeitaugenblick und jeden beliebigen Punkt des Körpers auf Grund der Lösung der Differentialgleichungen (92) unter Beachtung der Grenzbedingungen und der Gültigkeit

des Hooke'schen Gesetzes zu bestimmen. Der sich ergebende Verzerrungszustand muß jedenfalls ein solcher sein, daß für kleine Verschiebungen die Kompatibilitätsbedingungen (17a), (17b), auf Seite 44, die offenbar auch jetzt gelten müssen, für jeden Zeitaugenblick erfüllt werden.

Folgende Sonderfälle sind von besonderer praktischer Wichtigkeit.

A. Es werden die infolge der elastischen Bewegung auftretenden Trägheitskräfte vernachlässigt. In diesem Falle bleiben in den Gleichungen (90a) auf den linken Seiten nur die von den Trägheitskräften des erstarrt gedachten Körpers herrührenden Glieder übrig. Man denkt sich also dann den Körper unter dem Einflusse des äußeren angreifenden Kraftsystems und der Trägheitskräfte des starren Körpers stehend und bestimmt für diese Wirkungsweise die Verschiebungskomponenten als Funktion der Koordinaten X, Y, Z und der Zeit t und dann unter Zuhilfenahme des Hooke'schen Gesetzes die Spannungskomponenten. Der Teil der Elastokinetik, in dem man derartig vorgeht, um den Spannungszustand zu bestimmen, wird nach Heun als Kinetostatik bezeichnet. Darunter fiel z. B. die Aufgabe, den Spannungszustand in einem kreisförmig gebogenen Ringe zu bestimmen, der um eine raumfeste, in einen Durchmesser fallende Achse, die als z -Achse angenommen werden kann und mit der Z -Achse zusammenfällt, mit konstanter oder veränderlicher Winkelgeschwindigkeit rotiert oder die Berechnung der in einer Ebene sich bewegenden Bleuel-Stange B (Abb. 2, Seite 4) eines Schubkurbelgetriebes auftretenden Biegungs- und Normalspannungen. Für diesen Fall wird man die z -Achse ebenso wie die Z -Achse normal zur Ebene der Bewegung annehmen.

B. Die Trägheitskräfte des erstarrt gedachten Körpers sind überhaupt nicht vorhanden. In diesem Falle reduzieren sich die Gleichungen (90a) auf

$$\mu \frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{\partial X_x}{\partial X} + \frac{\partial X_y}{\partial Y} + \frac{\partial X_z}{\partial Z} + K_x \cdot \cdot \quad (90b)$$

und fallen dann mit den Gleichungen (91a) formal zusammen. Das wäre z. B. zutreffend für einen geraden einseitig fest eingespannten Stab, der Schwingungen um eine spannungslose mittlere Lage macht. Das xyz -System, das jetzt mit dem System XYZ zusammenfällt, wird man in diesem Falle mit der x -Achse in die Stabachse mit den beiden anderen Achsen in die Trägheitshauptachsen eines der beiden Endquerschnitte legen.

In den Anwendungsgebieten wird häufig auch der Energiesatz gebraucht. Wir erhalten denselben für kleine Verschiebungen aus den drei auf das Koordinatensystem x, y, z bezüglichen Gleichungen (91a), indem wir sie der Reihe nach mit $\frac{\partial \xi}{\partial t} dt dx dy dz$, $\frac{\partial \eta}{\partial t} dt dx dy dz$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial t} dt dx dy dz$ multiplizieren, addieren und über den ganzen vom Körper erfüllten Raum integrieren. Die Summe der linken Seiten der Gleichung (91a) wird dann

$$dT = \int_V \mu \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{d^2 \eta}{dt^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) dt dx dy dz,$$

wobei dT die im Zeitdifferential dt sich ergebende Änderung der lebendigen Kraft

$$T = \int_V \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] dx dy dz$$

vorstellt. Entsprechend den rechten Seiten der Gleichung (91a) erhalten wir Integrale nach Art jener, welche aus der Herleitung des Satzes über die Arbeit auf Seite 107 bekannt sind. In dem dort mit $J_{xx} \dots J_{zx}$ bezeichneten Inte-

gralen sind die Verschiebungskomponenten u, v, w durch $\frac{\partial \xi}{\partial t} dt, \frac{\partial \eta}{\partial t} dt, \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt$ zu ersetzen. Durch partielle Integration der die Spannungskomponenten enthaltenden Integrale nach x, y, z und entsprechende Zusammenfassung ergibt sich bei Benützung der Grenzbedingungen (24) sowie der Gleichungen (21) auf den Seiten 53 bzw. 49, ähnlich wie an der zitierten Stelle, wenn wir auch noch die die Massenkräfte enthaltenden Ausdrücke hinzunehmen,

$$\begin{aligned} & \int_0 \left(p_x \frac{\partial \xi}{\partial t} dt + p_y \frac{\partial \eta}{\partial t} dt + p_z \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt \right) d\sigma \\ & + \int_V \left(k_x \frac{\partial \xi}{\partial t} dt + k_y \frac{\partial \eta}{\partial t} dt + k_z \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt \right) dx dy dz \\ & - \int_V \left[X_x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + Y_y \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \dots + X_y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) + \dots \right. \\ & \quad \left. + Z_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \right) \right] dt dx dy dz, \end{aligned}$$

worin das erste Integral über die Oberfläche des Körpers, die beiden letzten Integrale über den vom Körper erfüllten Raum zu nehmen sind. Das an dritter Stelle stehende Integral, für dessen Integranden die Beziehungen (a) auf Seite 199 zu beachten sind, können wir, wie bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes ohne weiteres einzusehen ist, als das dem Zeitelemente dt entsprechende Differential der Deformationsarbeit B_i , wenn letztere als Funktion der Spannungs- oder der Verzerrungskomponente betrachtet wird, ansehen. (Siehe hierzu die Gleichungen (57) und (59) für die elementare Deformationsarbeit auf Seite 104 und die Gleichung (61) auf Seite 106.) Wir können somit setzen

$$\begin{aligned} dT + dB_i = & \int_0 \left(p_x \frac{\partial \xi}{\partial t} + p_y \frac{\partial \eta}{\partial t} + p_z \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) dt d\sigma \\ & + \int_V \left(k_x \frac{\partial \xi}{\partial t} + k_y \frac{\partial \eta}{\partial t} + k_z \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) dt dx dy dz. \end{aligned} \quad (93)$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung offenbar der im Zeitdifferential dt durch die äußeren Kräfte geleisteten Arbeit gleichkommt, so können wir den Energiesatz (93) in der Form aussprechen: Die im Zeitelement dt von den äußeren Kräften geleistete Arbeit ist gleich der gleichzeitigen Änderung der Summe aus lebendiger Kraft T und Deformationsarbeit B_i . Der Satz über die Arbeit im Falle des Gleichgewichtes ist ein Sonderfall der allgemeineren Gleichung (93), welche natürlich nur unter den bereits oben (Seite 108) für den Satz von Clapeyron gemachten Voraussetzungen bezüglich Anfangsspannungen, Temperatur, Energie-Zu- und Abfuhr gültig ist. Es ist ferner klar, daß (93) auch bei beliebigem Elastizitätsgesetz zutreffend sein muß, wenn dB_i die der Zeit dt entsprechende elementare Deformationsarbeit vorstellt (Seite 108).

2. Das Stoßproblem und verschiedene Stoßtheorien. Folgerung aus dem Energiesatz über Verschiebungen durch Stoßkräfte.

Wenn auf einen in Ruhe oder in Bewegung befindlichen Körper in einem bestimmten Zeitaugenblick t Kräfte wirksam werden, die scheinbar plötzlich in Wirklichkeit in einer von der Zeit t an gerechneten kleinen Zeitperiode der Stoßdauer von Null aus bis zu ansehnlichen Endwerten anwachsen, so sagt man,

der Körper sei nicht statisch oder kontinuierlich wirksamen, d. h. sehr langsam oder in ideeller Art unendlich langsam von Null bis zu ihren Endwerten anwachsenden Kräften, sondern Stoßkräften ausgesetzt (Seite 7). Diese Stoßkräfte, durch welche scheinbar plötzlich Änderungen des Spannungs- und Verzerrungszustandes sowie der Verschiebungsgeschwindigkeiten bewirkt werden, können wesentlich in zweierlei Weise von anderen Körpern auf den ins Auge gefaßten Körper übertragen werden, je nachdem dem den Stoß übertragenden Körper bei Beginn des Stoßes eine ins Gewicht fallende lebendige Kraft inne wohnt (von der ein Teil auch auf den gestoßenen Körper übertragen wird) oder nicht. Der erste Fall liegt z. B. vor, wenn auf einen auf zwei Stützen gelagerten Stab — z. B. eine Schiene aus Flußeisen, die auf ihre Widerstandsfähigkeit gegen Stoßkräfte erprobt werden soll — ein massiges Gewicht (Bär) aus geringerer oder größerer Höhe auf die Stabmitte fallen gelassen wird, oder (Abb. 82) auf das freie mit Ansätzen *A* versehene Ende eines vertikal aufgehängten Stabes plötzlich ein fallendes Gewicht *G* zur Wirkung gebracht wird, wie das bei Stoß-Zug-Erprobungen eines Stabmaterials üblich ist. Der zweite Fall tritt z. B. ein, wenn auf der genannten Schiene in Stabmitte bzw. an dem Ende des vertikal hängenden Stabes ein Gewicht plötzlich aufgelegt oder ein Draht befestigt wird, an dem normal bzw. parallel zur Stabachse stoßartig ein Zug ausgeübt wird.

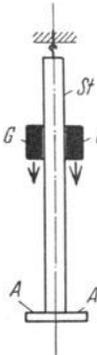


Abb. 82.

Das Stoßproblem für feste Körper im allgemeinen besteht darin, bei bekannter Lage Spannungs-, Verzerrungs- und Verschiebungsgeschwindigkeitszustände der beiden einander stoßenden Körper zur Zeit unmittelbar vor dem Stoß, Lage und die genannten Zustände zur Zeit unmittelbar nach dem Stoß und die Größe und die Verteilung der an der Stoßstelle übertragenen Kräfte auf letztere zu bestimmen. Gewöhnlich wird zur Lösung die Voraussetzung der Erfüllung des Hookeschen Gesetzes und nahezu vollkommener Umkehrbarkeit der elastischen Verschiebungen (vollkommene Elastizität) genommen. Das Stoßproblem wird dann kurz als ein vollkommen elastisches bezeichnet. Besonders fruchtbar zur Erhaltung von Teilergebnissen der Lösung von elastischen Stoßproblemen erweist sich der Energiesatz, nach welchem die während der sehr kurzen Stoßdauer durch die Stoßkräfte geleistete Arbeit gleich sein muß der scheinbar plötzlichen Änderung der Summe aus lebendiger Kraft und Deformationsarbeit. Die vollständige Lösung des Stoßproblems kann nur unter bestimmter Annahme über den Ablauf des eigentlichen Stoßvorganges, der zur Zeit noch durchaus nicht einwandfrei klargestellt ist, erfolgen. Man wird sich daher durchwegs mit mehr oder weniger zutreffenden Näherungslösungen begnügen müssen, auf die in den Anwendungsgebieten sowieso in erster Linie hingearbeitet werden muß (siehe hierzu auch S. 407 ff.).

Durch eine einfache Überlegung kann man einsehen, daß eine Lösung des allgemeinen Stoßproblems keinesfalls in befriedigender Weise unter der Annahme erfolgen kann, daß die stoßenden Körper starr sind. Wirken auf einen starren Körper kontinuierliche Kräfte \mathfrak{F} ein, so sind die kinetischen Grundgleichungen für denselben bekanntlich durch den Schwerpunkts- und Flächensatz ausdrückbar. Ersterer hat in vektoralgebraischer Darstellung die Form

$$\Sigma \mathfrak{F} = M \frac{d^2 \mathfrak{R}}{dt^2}, \quad (\text{a})$$

worin sich die Summe über sämtliche an dem Körper angreifende Kräfte erstreckt, M die Masse des gesamten Körpers und \mathfrak{R} der Vektor ist, welcher die jeweilige Lage des Schwerpunktes des Körpers mit Bezug auf den Ursprung eines festen Koordinatensystemes festlegt, und t die Zeit bedeutet. Setzt man $M \frac{d \mathfrak{R}}{dt} = M \mathfrak{V} = \mathfrak{C}$, worin \mathfrak{V} die Geschwindigkeit

des Schwerpunktes, $M\mathfrak{B}$ den Schiebeimpuls oder Schiebestoß vorstellt, so kann die Gleichung (a) auch in der Form

$$\Sigma \mathfrak{F} = \frac{d\mathfrak{E}}{dt} \tag{a'}$$

geschrieben werden. Der Flächensatz nimmt mit Bezug auf ein mit dem Ursprung in den bewegten Schwerpunkt gelegtes parallel zu sich selbst fortschreitendes Koordinatensystem die Form

$$\Sigma \mathfrak{M} = \Sigma \mathfrak{r} \times \mathfrak{F} = \Sigma m \left(\mathfrak{r} \times \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \right) \tag{b}$$

an mit \mathfrak{M} als Moment einer Kraft \mathfrak{F} mit Bezug auf den Koordinatenursprung, \mathfrak{r} als Radiusvektor, der dem Angriffspunkt einer Kraft oder einem Massenpunkt des Körpers zugeordnet ist, \mathfrak{v} als Geschwindigkeit eines Massenpunktes und m als Masse eines Teilchens des starren Körpers. Das liegende Kreuz bedeutet die Operation des äußeren oder Vektorproduktes. Setzt man $\Sigma (\mathfrak{r} \times m\mathfrak{v}) = \mathfrak{B}$ und nennt \mathfrak{B} in üblicher Weise den Drehstoß oder den Drall ($\mathfrak{r} \times m\mathfrak{v}$ ist bekanntlich der Drehimpuls der Masse m mit Bezug auf den Ursprung des Koordinatensystemes), so kann die Gleichung (b) auch in die Form

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \Sigma \mathfrak{M} \tag{b'}$$

umgewandelt werden.

Wirken nicht kontinuierliche Kräfte, sondern während der sehr kleinen Stoßdauer τ Stoßkräfte, so empfiehlt es sich, die Gleichungen (a') und (b') nach Multiplikation mit dem Zeitdifferential dt über die Zeit τ zu integrieren. Man erhält dann

$$M\Delta \mathfrak{B} = \Delta \mathfrak{E} = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = \int_0^\tau \Sigma \mathfrak{F} dt = \Sigma \mathfrak{F}_a \tag{c}$$

mit $\mathfrak{F}_a = \int_0^\tau \mathfrak{F} dt$ und

$$\Sigma m (\mathfrak{r} \times \Delta \mathfrak{v}) = \Delta \mathfrak{B} = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0 = \int_0^\tau \Sigma \mathfrak{M} dt = \Sigma \mathfrak{M}_a \tag{d}$$

mit $\mathfrak{M}_a = \int_0^\tau \mathfrak{M} dt$, worin $\Delta \mathfrak{E}$ die scheinbar plötzliche Änderung des Schiebestoßes, $\Delta \mathfrak{B}$ die

scheinbar plötzliche Änderung des Drehstoßes bedeuten, ferner $\Delta \mathfrak{B}$ und $\Delta \mathfrak{v}$ sich auf die zugeordneten Änderungen der Geschwindigkeit des Schwerpunktes bzw. eines Massenteilchens, \mathfrak{E} und \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{E}_0 und \mathfrak{B}_0 sich auf die zu Ende bzw. Beginn des Stoßes vorhandenen Werte des Schiebestoßes bzw. Drehstoßes beziehen. Wenn $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{B}_0 = 0$ sind, also zu Beginn des Stoßes weder ein Schiebestoß noch ein Drehstoß existieren, wird $\Delta \mathfrak{E} = \mathfrak{E}$ und $\Delta \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$, d. h. \mathfrak{E} und \mathfrak{B} sind die infolge der Stoßwirkung auftretenden bezüglichen Impulse, wodurch die Bezeichnungen Schiebe- und Drehstoß erklärt sind. Bei Ansatz des Ausdruckes $\Sigma m (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v})$ wurde angenommen, daß sich während der Stoßdauer die einen Massenpunkt festlegenden Vektoren \mathfrak{r} so wenig ändern, daß sie als konstant betrachtet werden dürfen. \mathfrak{F}_a und \mathfrak{M}_a werden als Stoßkräfte und Stoßmomente eingeführt, die also nichts anderes als die Zeitintegrale der kontinuierlich wirkend gedachten Kräfte bzw. Momente über die Stoßdauer vorstellen. Um die wirkliche Stoßkraft (Stoßmoment) zu kennen, müßte die Änderung der Kraft \mathfrak{F} (\mathfrak{M}) während der Stoßdauer bekannt sein, was nur durch eine genaue Verfolgung des Stoßvorganges und der mit ihm verknüpften Deformationen ermöglicht würde. Die Gleichungen (c) und (d) sagen aus, daß die Stoßkräfte bzw. Stoßmomente so groß sind, daß sie während einer sehr kleinen Zeit τ endliche Änderungen des Schiebe- und Drehimpulses hervorbringen. So wie $\Sigma \mathfrak{F}$ und $\Sigma \mathfrak{M}$ die sogenannte Kraftdynamik für den gegebenen starren Körper bei kontinuierlich wirkenden Kräften festlegen, bestimmen $\Sigma \mathfrak{F}_a$ und $\Sigma \mathfrak{M}_a$ den als Stoßdynamik eingeführten aus einem resultierenden Stoßmoment und einer resultierenden Stoßkraft mit gleichgerichteten zugeordneten Vektoren bestehenden Komplex. Die Stoßdynamik ist für jeden der beiden stoßenden Körper bestimmt, wenn die an der Stoßstelle übertragenen und dort in von vornherein unbekannter Weise sich verteilenden Stoßkräfte berechnet sind. Schiebestoß und Drall müssen infolge der Gleichheit von Aktion und Reaktion für den stoßenden und gestoßenen Körper entgegengesetzt gleich sein. Es folgt daher aus (c) und (d)

$$\mathfrak{E} + \mathfrak{E}' = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}'_0 \tag{c'}$$

und

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}'_0, \tag{d'}$$

wenn \mathfrak{S}' , \mathfrak{V}' und \mathfrak{S}'_0 , \mathfrak{V}'_0 sich auf den stoßenden Körper nach und vor dem Stoß, \mathfrak{S} , \mathfrak{V} und \mathfrak{S}_0 , \mathfrak{V}_0 sich auf den gestoßenen Körper nach und vor dem Stoß beziehen. Die Gleichungen (c') und (d') sagen aus, daß die Summe der Schiebe- bzw. Drehimpulse für beide Körper durch den Stoß nicht abgeändert werden kann. Die Lösung des Stoßproblems bei Annahme starrer Körper verlangt, daß für jeden der einander stoßenden Körper nach Beendigung des Stoßes der Geschwindigkeitszustand eindeutig festgelegt werde und die Stoßdynamik berechenbar ist. Ersteres ist möglich, wenn man für jeden der gestoßenen Körper im allgemeinen sechs Geschwindigkeitskoordinaten angeben kann, entsprechend dem denkbar höchsten Freiheitsgrad eines starren Körpers, der gleich 6 ist. Die Stoßdynamik ist bestimmt, wenn wir je drei Komponenten des Schiebe- und Drehstoßes angeben können. Nun sind für jeden der beiden aufeinander wirkenden Körper je sechs Bestimmungsgleichungen (c) und (d) von vornherein gegeben, denen aber $6 + 6 + 6 = 18$ Unbekannte gegenüberstehen, d. h. das Stoßproblem ist im allgemeinsten Falle sechsfach dynamisch unbestimmt, weil die Differenz der Zahl der zur Verfügung stehenden, für das System der starren Körper gültigen dynamischen Gleichungen und der Zahl der zu bestimmenden Unbekannten sechs beträgt. So wie bei statischer Unbestimmtheit müssen auch bei dynamischer Unbestimmtheit die Deformationsverhältnisse bestimmt werden, d. h. das Stoßproblem ist im wesentlichen, solange die Formänderungen umkehrbar sind, ein elastisches Problem. In einer durch die tatsächlichen Verhältnisse nicht zu begründenden Weise wurde das Stoßproblem zu einem elastischen, ja sogar auch nicht umkehrbare Formänderungen an der Stoßstelle berücksichtigenden Problem durch die sog. Newtonsche Regel ausgebildet. Nach derselben wird angenommen, daß erstens die Stoßeinwirkung der beiden Körper aufeinander auf einer so kleinen Fläche stattfindet, daß das an derselben im allgemeinen übertragene Stoßmoment unbedeutend ist, d. h. die Stoßdynamik sich auf eine an der Stoßstelle zur gemeinsamen Berührungsfläche der aufeinander wirkenden Körper normale Stoßkraft allein reduziert, wodurch die Zahl der Unbekannten um drei herabgesetzt wird. Ferner soll zweitens das Verhältnis der Komponenten der relativen Geschwindigkeiten der Berührungspunkte der beiden Körper in der Stoßrichtung (d. i. normal zur gemeinsamen Berührungsfläche)

nach und vor dem Stoß, d. i. $\frac{c - c'}{c'_0 - c_0}$ ($c > c'$, $c'_0 > c_0$), worin die Geschwindigkeitskomponenten in der Stoßrichtung, d. i. c und c_0 sich auf den einen Körper, die Geschwindigkeitskomponenten in der gleichen Richtung c' und c'_0 sich auf den anderen Körper nach und vor dem Stoß beziehen, eine von dem Material der aufeinander einwirkenden Körper abhängige Konstante k sein, die auch Stoßziffer genannt wird und aus Versuchen zu bestimmen wäre. Schließlich wird drittens angenommen, daß die Komponenten der relativen Geschwindigkeiten der Berührungspunkte der beiden Körper normal zur Stoßrichtung durch den Stoß keine Veränderung erfährt. Für den vollkommen elastischen Stoß, für den die durch die Stoßkräfte hervorgerufenen Deformationen nach Beendigung des Stoßes wieder vollkommen rückgängig werden, soll $k = 1$ sein, für den vollkommen unelastischen Stoß, für den nur bleibende Deformationen auftreten, soll $k = 0$ sein, und für den sog. physikalischen Stoß, für den die Deformationen wieder teilweise rückgängig werden, soll k zwischen 0 und 1 liegen. Durch die oben an zweiter und dritter Stelle genannten Bedingungen ist die Geschwindigkeit des Berührungspunktes des einen Körpers nach dem Stoß bekannt, wenn die Geschwindigkeit des Berührungspunktes des anderen Körpers nach dem Stoß berechnet wurde. Im ganzen sind dann 15 Unbekannte vorhanden, zu deren Bestimmung je 6 algebraische, den Vektorgleichungen (c) und (d) zugeordnete Gleichungen, ferner jene 3 algebraischen Gleichungen dienen, welche sich aus den Annahmen über die Geschwindigkeit der Berührungspunkte vor und nach dem Stoß ergeben. Eine weitere Verfolgung der Rechnung, die dadurch sehr vereinfacht werden kann, daß man den Ursprung des Koordinatensystemes in den Berührungspunkt und eine Achse in die Stoßnormale legt, fällt nicht in den Rahmen dieses Buches. Wer in die Einzelheiten eindringen will, lese die zusammenfassende Darstellung hierüber in der Arbeit von Th. Pöschl¹ nach.

Eigentliche Elastizitätstheorien des Stoßes wurden von Poisson (L), Neumann (L), De Saint Venant (L), Voigt (L) und Hertz (L) aufgestellt. Mit Ausnahme des letztgenannten haben diese Forscher die von der Stoßstelle ausgehenden elastischen Wellen zur Lösung des Stoßproblems herangezogen (Wellentheorie). Hertz nimmt, im Gegensatz zu den genannten anderen, die Deformationsverhältnisse an der Stoßstelle selbst als Ausgangspunkt zur Erklärung und Lösung des Stoßproblems.

¹ Pöschl, Th.: Der Stoß, im Handbuch für Physik 6, herausgegeben von Geiger und Scheel. Berlin: Julius Springer 1928.

Auf Seite 211ff. soll die Wellentheorie in einem einfachen Falle näher erklärt werden. Zunächst wollen wir aber im folgenden den Energiesatz verwenden, um zu einer Abschätzung der durch Stoßkräfte bewirkten elastischen Verschiebungen zu gelangen, und dabei der Anschaulichkeit und Einfachheit halber nur statisch bestimmt oder statisch unbestimmt gestützte Körper in Betracht ziehen, die für den Fall, als sie starr wären, unter dem Einflusse von beliebigen Stoßkräften überhaupt keine Verschiebungen erleiden würden. Vor Einwirken der Stoßkräfte soll sich der Körper in seinem natürlichen Zustande befinden. Als einfachste Beispiele hierfür können die beiden eingangs angeführten Beispiele, die sich auf einen auf Stützen gelagerten oder vertikal aufgehängten unter dem Einflusse einer Stoßkraft gestellten Stab bezogen, gelten.

Für derartige Sonderfälle soll zunächst angenommen werden, daß der die Stoßkraft übertragende Körper vor dem Stoß keine lebendige Kraft besitzt (plötzlich aufgehängtes Gewicht). Einer scheinbar plötzlich bis auf ihren Endwert H anwachsenden äußeren Kraft entspricht während der sehr kleinen Stoßdauer eine Arbeit, die wir in dem idealen Grenzfall, daß H plötzlich, d. h. ohne Zeitaufwand ihren Endwert erreicht, mit $H\mu$ ansetzen können, wenn μ die Verschiebung in der Richtung der Kraft bei stoßartiger Wirkung bedeutet. Man kann es auch so deuten, daß H wie eine statische Kraft angesehen wird, die während der sehr kurzen Stoßdauer in konstanter Größe wirkt. Würde die Kraft sehr langsam bis zu einem Endwerte P angewachsen sein, so wäre ihre Arbeitsleistung $\frac{1}{2}Pm$ mit m als elastische Verschiebung in der Richtung der Kraft bei statischer Wirkung. Bei stoßartiger Wirkung wird der Körper scheinbar plötzlich in den dem Ende der Stoßdauer zugeordneten Verschiebungs- und Verzerrungszustand versetzt und treten ins Gewicht fallende Verschiebungsgeschwindigkeiten und Verschiebungsbeschleunigungen auf, die bei statischer Wirkung als verschwindend angesehen werden müssen. Damit im Zusammenhange setzt sich ein Teil der äußeren Arbeit der Stoßkraft in einer ersten Periode der Wirkung der Kraft H zunächst nicht nur in Deformationsarbeit, sondern auch in lebendige Kraft um, die in einer weiteren zweiten Periode der Wirkung der Stoßkraft wieder in Deformationsarbeit rückverwandelt wird. Die zweite Periode dauert so lange, bis die erzeugte lebendige Kraft wieder aufgebraucht ist, also die Verschiebungsgeschwindigkeiten wieder zu Null geworden sind. In der ersten und zweiten Periode (die Summe aus beiden Perioden wird hier als Stoßdauer angesehen) wachsen die Verschiebungskomponenten μ , bis sie am Schlusse der zweiten Periode ihren Größtwert erreicht haben. War der Körper ursprünglich in Ruhe, so kann er nach Ende der zweiten Periode nicht wieder zur Ruhe kommen, da die Lage, in welche der Körper durch die Stoßkräfte gebracht wurde, insofern keine Gleichgewichtslage sein kann, als die Arbeit, durch welche der Körper diese Lage erreichte, größer ist als sie gewesen wäre, wenn er durch eine gleich große statische Kraft in dieselbe gebracht worden wäre. Der Energiesatz (93) nimmt nämlich bei Vernachlässigung der Volumskräfte unter der Annahme, daß die Oberflächenkräfte n stoßartig wirkende Einzelkräfte sind, bei Integration über die Summe der Zeitdauern der ersten und zweiten Periode (Zeit $t = 0$, wenn der Stoß beginnt), zu deren Beginn und Ende die lebendige Kraft Null ist, die Form

$$B_i = \sum_{r=1}^{r=n} H_r \mu_r = \int_V \left[X_x \frac{\partial u}{\partial x} + \dots + Z_x \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dx dy dz \quad (93a)$$

an, aus der zu schließen ist, daß bei stoßartig wirkenden Kräften (z. B. plötzlich aufgelegte Gewichte), die Deformationsarbeit doppelt so groß ist, als sie bei gleich

großen, aber statisch wirkenden Kräften (z. B. bei denselben, aber unendlich langsam aufgelegten Gewichten) wäre. Wenn statisch wirkende Kräfte P_r die gleiche Deformationsarbeit leisten sollen, wie stoßartig wirkende Kräfte II_r , die mit jenen die gleichen Angriffspunkte und Richtungen und in gleichen Verhältnissen stehen, so muß $\sum_{r=1}^{r=n} II_r \mu_r = \sum_{r=1}^{r=n} P_r \frac{m_r}{2}$ sein. Soll hierzu $\mu_r = m_r$, $r = 1 \dots n$ sein, so folgt

$$P_r = 2 II_r \quad r = 1 \dots n. \quad (e)$$

Das heißt, damit eine statisch wirkende Kraft die gleiche Verschiebung in ihrer Richtung erfährt, wie eine stoßartig wirkende von gleichem Angriffspunkt und Richtung, muß sie doppelt so groß als diese sein, oder stoßartig aufgebrachte Lasten II_r erzielen doppelt so große Verschiebungen in ihren Richtungen als statisch aufgebrachte Lasten P_r von derselben Größe. Wirkt also eine und dieselbe Kraft auf einen freiaufliegenden Balkenträger einmal stoßartig, das andere Mal statisch durchbiegend, so entsteht bei den gemachten Voraussetzungen am Ende der zweiten Periode im ersten Falle unter der Kraft eine doppelt so große Durchbiegung als im zweiten Falle oder eine auf den Balkenträger wirkende statische Kraft muß doppelt so groß sein, als eine stoßartige Kraft, wenn erstere die gleiche Durchbiegung wie die letztere hervorrufen soll.

In einer den obengenannten zwei Perioden folgenden dritten Periode sucht der Körper die der statischen Wirkung der Stoßkraft II entsprechende Gleichgewichtslage oder die ursprüngliche, vor Wirken der Stoßkraft vorhanden gewesene Gleichgewichtslage wieder zu gewinnen, je nachdem die Kraft II nach Ende der zweiten Periode auf den Körper dauernd wirksam bleibt oder vom Körper abgebracht wird. In dieser dritten Periode wird zunächst die aufgespeicherte Deformationsarbeit wieder in lebendige Kraft umgesetzt, welche den Körper über die Gleichgewichtslage so lange hinaustreibt, bis sie wieder aufgezehrt ist usw. Mit anderen Worten, der Körper kommt in Schwingungen, die infolge Hysterese, Luftwiderstand und Reibung nach einiger Zeit abklingen (Seite 8).

Die vorstehenden Auseinandersetzungen entsprechen der Wirklichkeit aus mehreren Gründen keineswegs vollständig. So wurde eine Stoßdauer eingeführt, die gleich jener Zeit angenommen wurde, in der die Verschiebungen μ bis zu ihrem Größtwerte anwachsen. Offenbar kann aber der Stoß bereits beendet sein, bevor der Maximalausschlag erreicht ist. Das Verhältnis jener Zeiten wird von verschiedenen Umständen, wie z. B. den Massen, Stoffen, Formen und Art der Stützungen der einander stoßenden Körper abhängig sein. Ferner wurde die Arbeit der Stoßkraft während der Stoßdauer gleich $II\mu$ gesetzt, als ob die Stoßkraft während der sehr kurzen Stoßdauer stets in gleicher Stärke wirken würde. Tatsächlich wird sie veränderlich sein und ihre Stärke von den an der Stoßstelle und in deren nächster Umgebung auftretenden Deformationen (siehe die oben angedeutete Hertzsche Theorie) und damit im Zusammenhange wieder von dem Stoffe der stoßenden Körper abhängen. Ferner ist in dem verwendeten Ansatz des Energiesatzes, der nur für elastische Deformationen gültig ist, nicht berücksichtigt, daß lokal um die Stoßstelle und an derselben bleibende mit Wärmetönungen verknüpfte Deformationen auftreten können, denen ein nicht in Rechnung gezogener Arbeitsverlust entspricht. Ein solcher kommt noch, wenn auch im geringen Grade, zustande infolge der auftretenden Schallwellen, des Luftwiderstandes, der Luftreibung und der inneren Reibung. Um allen diesen Umständen Rechnung zu tragen, könnte man die obige Gleichung (e) durch

$$P_r = 2 K II_r \quad (94)$$

ersetzen, worin $K < 1$ und K als ein aus Versuchen zu folgender Erfahrungskoeffizient zu betrachten wäre.

In jenen besonderen Fällen — wir haben sie eingangs in zweiter Reihe namhaft gemacht —, in denen auf einen irgendwie statisch bestimmt oder unbestimmt gestützten Körper während der Stoßdauer auch lebendige Kräfte von dem stoßenden Körper auf den gestoßenen übertragen werden, wie z. B. wie bei der Stoßbiegung eines beiderseits gestützten geraden Stabes durch ein mit lebendiger Kraft begabtes Gewicht, kommen wir, wenn wir den Energiesatz (93) wieder auf das Zeitintervall zwischen Beginn und Ende des Stoßes anwenden, d. h. über die Stoßdauer τ integrieren auf die Gleichung

$$B_i - T = \sum_{r=1}^{r=n} \Pi_r \mu_r, \quad (93b)$$

worin T die dem gestoßenen Körper vom stoßenden zugeführte lebendige Kraft bedeutet, von der angenommen wird, daß sie nach Beendigung des Stoßes bei Erreichung der Größtwerte von μ_r zu Null geworden ist, da sie in Deformationsarbeit umgesetzt wurde und B_i die doppelte Deformationsarbeit vorstellt im Vergleich zu jener, die vorhanden wäre, wenn die Kräfte Π_r statisch wirken würden. Setzt man in dieser Gleichung $T = 0$, so erhalten wir die Gleichung (93a). Die Deformationsarbeit ist gleich der Arbeit der Stoßkräfte (die hier wieder so betrachtet werden, als ob sie statische, während der Stoßdauer konstante Kräfte wären), vermehrt um die lebendige Kraft, welche durch den stoßenden Körper übertragen wird. Fragen wir uns wieder um die Größen jener statischen Lasten, welche, in den Angriffspunkten der Stoßkräfte in deren Richtungen übertragen, die gleichen Verschiebungen hervorrufen wie die Stoßkräfte samt der mit ihnen oder, wenn man will, zufolge ihnen übertragenen lebendigen Kraft, so haben wir wie folgt zu schließen. Ist P_r ($r = 1 \dots n$) eine von den statisch wirkenden Kräften, so besteht die Beziehung

$$B_i = \sum_{r=1}^{r=n} P_r \frac{m_r}{2} = \sum_{r=1}^{r=n} P_r \frac{\mu_r}{2},$$

woraus sich im Hinblick auf die Ausgangsgleichung

$$\sum_{r=1}^{r=n} P_r \frac{\mu_r}{2} - \sum_{r=1}^{r=n} \Pi_r \mu_r = T \quad \text{oder} \quad \sum_{r=1}^{r=n} (P_r - 2 \Pi_r) \mu_r = 2 T \quad (f)$$

ergibt. Wird $T = 0$, so erhalten wir wie früher $P_r = 2 \Pi_r$, $r = 1 \dots n$ bzw. mit Rücksicht auf die oben erörterten Umstände $P_r = 2 K \Pi_r$ mit $K < 1$. Wenn wir die lebendige Kraft, als in der Größe der Arbeit der Stoßkraft sich zeigend, durch $T = \sum_{r=1}^{r=n} \Pi_r h_r$ ausdrücken, worin h_r eine der Stoßkraft Π_r zugeordnete Geschwindigkeitshöhe $\frac{V_r^2}{2g}$ ist, geht die Beziehung (f) in

$$\sum_{r=1}^{r=n} P_r \mu_r = \sum_{r=1}^{r=n} 2 \Pi_r (h_r + \mu_r) \quad (g)$$

oder besser

$$\sum_{r=1}^{r=n} P_r \mu_r = \sum_{r=1}^{r=n} 2 K_1 \Pi_r (h_r + \mu_r) \quad (95)$$

mit $K_1 < 1$ über. Für die eingangs erwähnten beiden Beispiele (Stab mit einer einzigen Stoßbelastung Π quer zu demselben bzw. in dessen Richtung) spezialisiert sich die letzte Gleichung in $P\mu = 2 K_1 \Pi (h + \mu)$. D. h. die statisch wir-

kende Kraft P , welche die gleiche Formänderung wie die stoßende Kraft hervorruft, ist durch

$$P = 2 K_1 \Pi \left(1 + \frac{h}{\mu} \right) \quad (95a)$$

bestimmt. Die lebendige Kraft T wird in Wirklichkeit nicht, wie vorausgesetzt wurde, bei Erreichung der maximalen Werte μ völlig in Deformationsarbeit umgewandelt worden sein, sondern während der Stoßdauer zum Teile in der bereits oben berührten Weise zerstreut (Schall, Wärme, lokal bleibende Deformation usw.), zum Teil geht sie in den stützenden Körper über, zum Teil bleibt sie dem stoßenden Körper erhalten. Daher ist der Zahlenwert K_1 in (95) und (95a) unter Umständen beträchtlich kleiner als 1.

3. Freie Längsschwingungen von geraden Stäben.

Wenn ein gerader Stab in der Richtung seiner Achse einem gleichförmig über seine Endflächen verteilten Stoßdruck oder Stoßzug ausgesetzt und nach Aufhören der Stoßwirkung sich selbst überlassen wird, so gerät er in sog. freie Längsschwingungen, die infolge Hysterese, innerer Reibung und äußerem Luftwiderstand immer kleiner werden und schließlich völlig abklingen. Diese Längsschwingungen heißen freie, weil sie nur unter dem Einflusse der Trägheitskräfte und der ihnen entsprechenden Reaktionskräfte zustande kommen und nicht etwa durch eine periodische parallel zur Stabachse wirkende, über die Endflächen des Stabes gleichförmig verteilte angreifende Kraft. Die in letzterem Falle auftretenden Schwingungen des Stabes werden als erzwungene Schwingungen bezeichnet.

Wir denken uns ein Volumenelement des Stabes parallel zur Stabachse herausgeschnitten und unter dem Einflusse der auf es wirkenden, der Stabachse parallelen Spannungen, die bald Zug- bald Druckspannungen sein werden, und der infolge der mit der Zeit veränderlichen Verschiebungsgeschwindigkeit auftretenden Trägheitskraft gestellt. Berücksichtigen wir von letzterer die hauptsächlich ins Gewicht fallende Komponente parallel zur Stabachse und sehen von einer inneren Reibung ab, so reduzieren sich die drei Gleichungen (90b), da dann nur Spannungen X_x in Frage kommen (x -Achse mit der Stabachse zusammenfallend) und für die vorausgesetzten kleinen Verschiebungen $\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ist, auf die einzige Gleichung $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x}$. Setzen wir in dieser Beziehung auf Grund der Annahme des Hookeschen Gesetzes $X_x = E \frac{\partial u}{\partial x}$, so geht sie in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (96)$$

über mit

$$K^2 = \frac{E}{\mu}. \quad (a)$$

Diese partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ist die Grundgleichung für die freien Längsschwingungen von Stäben. Nach D. Bernoulli setzen wir, um eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung zu gewinnen, $u = r(t)s(x)$ mit $r(t)$ bzw. $s(x)$ als Funktion der Zeit t bzw. der Koordinate x und erhalten durch Einsetzen dieser Funktionen in die Differentialgleichung (96)

$$s(x) \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = K^2 r(t) \frac{d^2 s(x)}{dx^2}.$$

Diese Differentialgleichung ist eine gewöhnliche zweiter Ordnung nach r oder nach s . Wir können sie in die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = -K^2 c^2 r(t) \tag{b}$$

und

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} = -c^2 s(x) \tag{c}$$

zerlegen mit c als einem aus den Grenzbedingungen zu bestimmenden Parameter. Dieselben haben die bekannten Lösungen $r = A \sin Kct + B \cos Kct$ und $s = C \sin cx + D \cos cx$, mit A, B, C, D als Integrationskonstanten, aus denen sich die partikuläre Lösung der Differentialgleichung (96)

$$u = (A \sin Kct + B \cos Kct) (C \sin cx + D \cos cx)$$

zusammensetzt. Zur weiteren Rechnung nehmen wir an, daß der Stab auf der einen Seite fest eingespannt und auf der anderen Seite frei ist. Die Grenzbedingungen besagen dann, wenn das fest eingespannte Ende durch $x = 0$, das freie, der Stablänge l entsprechend, durch $x = l$ festgelegt ist, daß zu jeder Zeit t für $x = 0$ die Verschiebung $u = 0$, d. h. $s(0)r(t) = 0$, also $s(0) = 0$ sein muß, und daß für $x = l$ die Bedingung $X_x = 0$, d. h. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ oder $\left. \frac{ds(x)}{dx} \right|_{x=l} = 0$ zu erfüllen ist. Aus der ersten Grenzbedingung ergibt sich somit $D = 0$, die zweite verlangt $Cc \cos cl = 0$, woraus, da nicht auch C verschwinden kann, $\cos cl = 0$, d. h. $cl = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{n\pi}{2}$ oder $c = \frac{\pi}{2l}, \frac{3\pi}{2l}, \dots, \frac{n\pi}{2l}$ folgt. Die aus den Grenzbedingungen folgenden Werte c heißen Eigenwerte des vorliegenden Schwingungsproblems. Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (96) nimmt demnach die allgemeinere Form

$$u_n = \left(A_n \sin \frac{n\pi K}{2l} t + B_n \cos \frac{n\pi K}{2l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{2l} \tag{97}$$

mit A_n, B_n als dem gewählten positiven ungeraden Zahlenwert n zugeordneten Konstanten. Jedem Zahlenwert n entspricht eine sog. Eigen- oder Normal-schwingung des Stabes. Die Funktion $\sin \frac{n\pi x}{2l}$ heißt Eigenfunktion der Schwingung. Die Zeit τ_n für eine ganze Eigenschwingung eines Stabteilchens bei festem Wert von x ergibt sich aus der Beziehung $\frac{n\pi K}{2l} \tau_n = 2\pi$ mit $\tau_n = \frac{4l}{nK}$. Die Schwingungsdauer wächst daher mit der Länge des Stabes und der Wurzel aus der Massendichtigkeit und nimmt ab, wenn \sqrt{E} wächst. Die Zahl der Schwingungen in der Zeiteinheit, Eigenschwingungszahl β_n genannt, folgt daher mit $\beta_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{nK}{4l}$.

Als Eigenfrequenz wird $\gamma_n = \frac{n\pi K}{2l}$ bezeichnet. Es ist $\frac{2\pi}{\gamma_n} = \tau_n = \frac{1}{\beta_n}$, d. h. je größer γ_n ist, um so kleiner wird die Schwingungsdauer, um so mehr Schwingungen werden in der Zeiteinheit ausgeführt. Fassen wir einen bestimmten Zeitaugenblick ins Auge, so können wir sagen, daß die Verschiebungen nach dem Gesetze

$$u_n = C_n \sin \frac{n\pi}{2l} x, \tag{97a}$$

d. h. einer Sinuslinie erfolgt, für die C_n den in der Gleichung (97) in der runden Klammer stehenden Wert für die betreffende Zeit vorstellt. Setzen wir

$$A_n = H_n \cos \varphi_n \quad \text{und} \quad B_n = H_n \sin \varphi_n$$

mit H_n und φ_n als zwei neuen Konstanten, so können wir statt der Gleichung (97) auch

$$u_n = H_n \sin\left(\frac{n\pi K}{2l}t + \varphi_n\right) \sin \frac{n\pi x}{2l} \quad (97b)$$

schreiben. Der Wert C_n , den $H_n \sin\left(\frac{n\pi K}{2l}t + \varphi_n\right)$ für eine bestimmte Zeit t annimmt, bestimmt für diese Zeit den größten im Bereiche des Stabes auftretenden Wert von u_n . Die n -te Normalschwingung, entsprechend dem Zahlenwert n , besitzt $\frac{n+1}{2}$ Knotenpunkte, in welchen die Stabelemente dauernd keine

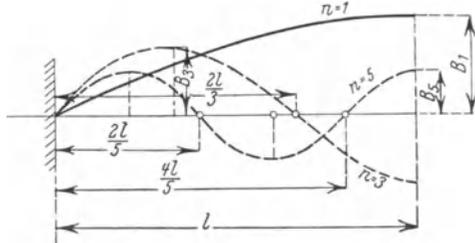


Abb. 83.

Verschiebung erleiden. In Abb. 83 sind beispielsweise die Werte von u_n für $n = 1, n = 3, n = 5$ zur Zeit $t = 0$ als Funktionen von x dargestellt, wobei die einem bestimmten Wert x zugeordneten Verschiebungen, die in Wirklichkeit parallel zur Stabachse erfolgen, normal zur Stabachse aufgetragen wurden. Um zu einer allgemeinen Aussage zur Bestimmung der Koeffizienten A_n, B_n in Gleichung (97)

zu gelangen, wollen wir zunächst das allgemeine Integral von Gleichung (96) ansetzen. Da diese Differentialgleichung linear ist und demnach auch eine Summe von partikulären Lösungen u_n dieselbe befriedigt, so ist das allgemeine Integral durch die Summe

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(A_n \sin \frac{n\pi K}{2l}t + B_n \cos \frac{n\pi K}{2l}t \right) \sin \frac{n\pi x}{2l}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (98)$$

darstellbar, wenn wir voraussetzen, daß diese unendliche Reihe konvergiert und erste und zweite Differentialquotienten nach t und x besitzt, die durch gliedweise Differentiationen erhalten werden. Die Koeffizienten $A_1 \dots B_1 \dots$ können dann, wenn die Lage und die Verschiebungsgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ für jeden Wert x festgelegt sind, d. h. bzw. durch Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bestimmt werden, und sich letztere in Fouriersche Reihen entwickeln lassen, wie folgt berechnet werden. Es wird

$$f(x) = u|_{t=0} = \sum_1^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{2l} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_1^{\infty} \frac{n\pi K}{2l} A_n \sin \frac{n\pi x}{2l}.$$

Multiplizieren wir jede dieser Gleichungen mit $\sin \frac{n\pi x}{2l} dx$ und integrieren von 0 bis l , so fallen bei der Integration alle Glieder, in denen zwei Sinusse mit verschiedenen Werten n miteinander multipliziert erscheinen, weg, und es wird, da

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{2l} dx = \frac{l}{2} \quad \text{schließlich}$$

$$A_n = \frac{4}{n\pi K} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{2l} dx, \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{2l} dx. \quad (98a)$$

Nach Berechnung dieser Werte, die vielfach bei gegebenen graphischen Werten von $f(x)$ und $g(x)$ rein mechanisch durch die sog. harmonischen Analysatoren

erfolgen kann, sind alle Eigenschwingungen nach Gleichung (97) und durch Übereinanderlagerung der Eigenschwingungen allgemeinere Schwingungen und die allgemeinste Schwingung nach Gleichung (98) festgelegt. Die graphische Festlegung der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ während des, wie oben vorausgesetzt, die Schwingungen des Stabes auslösenden Stoßvorganges und zur Zeit des Stoßendes ($t = 0$) kann durch Beobachtung der verschiedenen Werte von x zugeordneten Verschiebungen und Geschwindigkeiten auf Grund sehr feiner Beobachtungsmethoden, die von Ramsauer (L) begründet wurden, erfolgen.

Je größer n ist, um so kleiner werden die Werte A_n und B_n . Der dem Zahlenwerte $n = 1$ zukommende größte Wert B_n bestimmt die überhaupt größte mögliche Verschiebung am freien Stabende und gehört der Grundschwingung an (Abb. 83). Die höheren Werten von n zugeordneten Eigenschwingungen heißen Nebenschwingungen.

4. Wellentheorie des Längsstoßes auf einen einseitig eingespannten Stab.

Als Ergänzung des im vorstehenden Punkte über die Längsschwingungen eines einseitig eingespannten Stabes Gesagten soll der die Schwingungen auslösende Stoßvorgang auf Grund der Wellentheorie des Stoßes von Poisson, Neumann und De Saint Venant nunmehr näher betrachtet werden. Es geschieht das deswegen, um überhaupt eine Vorstellung von der Schwierigkeit der Lösung des Stoßproblems schon in einem verhältnismäßig einfachen Falle und von der Wellentheorie des Stoßes im besonderen zu gewinnen und nicht, weil die im zweiten Teile dieses Buches zu behandelnden Näherungstheorien, vom praktischen Gesichtspunkte aus gesehen, wesentlich unbefriedigender als jene Wellentheorien wären, die übrigens durch die Versuchsergebnisse auch nicht völlig bestätigt wurden. Vom Standpunkt der Erforschung der wahren Verhältnisse während des Stoßes und nach demselben ist freilich die Wellentheorie jenen Theorien vorzuziehen, da sie Aufschluß über die infolge des Stoßes auftretenden Schwingungen des Stabes zu geben vermag.

Der einseitig eingespannte vertikal stehende Stab St (Abb. 84) von der Länge l , dem Querschnitte F , der Dichtigkeit μ und dem Elastizitätsmodulus E wird durch einen Körper K mit der Masse M , der vertikal herabfällt, gestoßen. Die Geschwindigkeit, mit der die Masse M den Stab erreicht, sei v , die Zeit t , zu welcher das geschieht, sei mit $t = 0$ angenommen. Der Ursprung 0 des Koordinatensystemes liege im Schwerpunkt der freien Endfläche des Stabes, die x -Achse falle mit der Stabachse zusammen. Durch den Stoß gerät der Stab in Längsschwingungen, welche, so wie oben entwickelt, der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ mit $K^2 = \frac{E}{\mu}$ genügen. Die Lösung

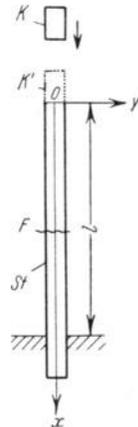


Abb. 84.

dieser Differentialgleichung wollen wir jetzt in einer anderen als der oben gewählten Form angeben, und zwar in der von d'Alembert herrührenden, in die, wie sich zeigen läßt, erstere überführt werden kann. Wir verzichten aber auf diese Transformation der Lösung (98) und beschreiten einen üblichen anderen Weg, d. h. wir führen zwei neue Variable ξ und ϑ ein, die mit t und x durch die Gleichungen $t = \frac{\xi + \vartheta + 2l}{2K}$ und $x = \frac{\vartheta - \xi + 2l}{2}$ zusammen-

hängen. Wir erhalten dann $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \vartheta} = 0$ als transformierte Gleichung, aus der unmittelbar

$$u = \xi \varphi(\xi) + f(\vartheta) = F(\xi) + f(\vartheta) = F(Kt - x) + f(Kt + x - 2l) \tag{99}$$

gefolgert werden kann mit φ , f und F als willkürliche Funktionen ihrer Argumente. Wir betrachten zunächst die willkürliche Funktion $F(Kt - x)$, die für $t = t_1$ und $x = x_1$ einen Wert u_1 annahme, zu einer späteren Zeit $t_2 > t_1$ und für $x_2 > x_1$ werde der Wert u_2 erreicht. Sollen die Werte u_1 und u_2 gleich sein, so muß $Kt_1 - x_1 = Kt_2 - x_2$ oder $K(t_2 - t_1) = x_2 - x_1$ bestehen. In der Zeit $t_2 - t_1$ ist daher die Verschiebung u_1 vom Querschnitt mit der Koordinate x_1 nach dem Querschnitte mit der Koordinate x_2 fortgeschritten. Die Geschwindigkeit dieses Fortschreitens ist durch $K = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ bestimmt.

Man überzeugt sich leicht, daß $K = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$ auch wirklich die Dimension einer Geschwindig-

keit besitzt. Durch die willkürliche Funktion $F(Kt - x)$ ist sonach eine in der Richtung der positiven x -Achse mit der Geschwindigkeit K vom freien Ende des Stabes fortschreitende Längswelle charakterisierbar, die in dem Augenblicke $t = 0$ einsetzt, in dem der Stoß beginnt. In ähnlicher Weise kann man nachweisen, daß der willkürlichen Funktion f eine vom eingespannten Ende in der negativen x -Richtung fortschreitende Welle entspricht, denn wir erhalten dann $K(t_2 - t_1) = x_1 - x_2$, was, wenn $t_2 > t_1$ und $K > 0$ nur einen Sinn hat, wenn $x_1 > x_2$ ist. Die Längsverschiebung u an irgendeiner Stelle des Stabes kann sonach bei dieser Auffassung durch Übereinanderlagerung (Interferenz zweier in entgegengesetzter Richtung fortschreitender Wellen) entstanden gedacht werden. Wird das unfreie Ende des Stabes unverschieblich angenommen, so muß zu jeder Zeit t für $x = l$ die Verschiebung Null werden, d. h. zufolge der Gleichung (99) die Beziehung $F(Kt - l) = f(Kt - l)$ bestehen, woraus $F(Kt - l) = -f(Kt - l)$ folgt. Die willkürlichen Funktionen müssen sonach entgegengesetzt gleich sein, und die Lösung (99) nimmt die Form

$$u = f(Kt - x) - f(Kt + x - 2l) \quad (99a)$$

an. Die von den beiden Enden des Stabes fortschreitenden Wellen sind demzufolge entgegengesetzt gleich, d. h. gleichen Werten x entsprechen entgegengesetzt gleiche Verschiebungen. Die vom festen Ende in der negativen x -Richtung fortschreitende Welle ist nach den Elementen der Physik als die am unfreien Stabende reflektierte ursprünglich in der positiven x -Richtung fortschreitende Welle aufzufassen.

Nachdem die Masse M mit der Geschwindigkeit v das freie Stabende zur Zeit $t = 0$ erreicht hat, wird letzteres nicht zur gleichen Zeit die genannte Geschwindigkeit annehmen, sondern etwas, wenn auch sehr wenig, später, sagen wir zur Zeit $t = \tau_1$. Während des Intervalles τ_1 steht die Masse M unter den Einflüssen a) ihrer Trägheitskraft $-M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, die in

der Richtung der positiven x -Achse gerichtet ist ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ist negativ) ferner b) der nach aufwärts gerichteten elastischen Reaktion des Stabes $F E \frac{\partial u}{\partial x}$, wenn $E \frac{\partial u}{\partial x}$ ($\frac{\partial u}{\partial x}$ negativ) nach dem Hookeschen Gesetze die Spannung bedeutet, die am gestoßenen Ende während der Zeitspanne τ_1 herrscht schließlich c) auch noch des Schiebestoßes, den wir in jedem

Zeitaugenblick mit $M \frac{dc}{dt}$ (die gesamte Stoßkraft für die Zeitspanne τ_1 ist $\int_0^{\tau_1} M \frac{dc}{dt} dt$) mit

$c = \varphi(t)$ als Geschwindigkeit des gestoßenen Stabendes für einen beliebigen zwischen 0 und τ_1 liegenden Zeitwert t . Zur Zeit $t = \tau_1$ wird $c = v$. Als kinetische Gleichung für die Masse M in dem angegebenen Zeitintervall haben wir nach dem d'Alembertschen Prinzip

$$-M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + E F \frac{\partial u}{\partial x} + M \frac{d\varphi(t)}{dt} = 0. \quad (a)$$

Sie kann auch als Grenzbedingung für den Stab im Zeitintervall τ_1 aufgefaßt werden und muß infolgedessen durch die Lösung (99a) für $x = 0$ befriedigt werden. Da nach (99a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = K^2 f''(Kt) - K^2 f''(Kt - 2l)$ und $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -f'(Kt) - f'(Kt - l)$,

mit f' und f'' als erste und zweite Ableitung der Funktion f nach dem Argument Kt , geht die Gleichung (a) in

$$f''(Kt) + \frac{P}{Ql} f'(Kt) = f''(Kt - 2l) - \frac{P}{Ql} f'(Kt - 2l) + \frac{1}{K^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad (b)$$

über, wobei $P = F\mu gl$ und $Q = Mg$ als die Gewichte des Stabes und des stoßenden Körpers eingeführt wurden. Integrieren wir diese Gleichung nach Einführung von $\zeta = Kt$ als neuer Variabler von 0 bis ζ unter der Annahme, daß $t = \frac{\zeta}{K}$ innerhalb des Intervalles τ_1 liegt, so erhalten wir

$$f'(\zeta) + \frac{1}{m\bar{l}} f(\zeta) = f'(\zeta - 2l) - \frac{1}{m\bar{l}} f(\zeta - 2l) + \frac{1}{K} \varphi\left(\frac{\zeta}{K}\right) \quad (c)$$

mit $m = \frac{Q}{P}$, da $\int_0^{\zeta} \frac{1}{K^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} d\zeta = \int_0^{\zeta} \frac{1}{K^2} \cdot \frac{d\varphi}{d\zeta} K d\zeta = \frac{1}{K} \varphi\left(\frac{\zeta}{K}\right)$, und weil $f'(\zeta)$ und $f(\zeta)$, ferner

$f'(\zeta - 2l)$ und $f(\zeta - 2l)$ für $t = 0$ verschwinden müssen. Letzteres folgt daraus, daß zur Zeit $t = 0$ für jeden Wert x die Werte u und $\frac{\partial u}{\partial x}$ Null sind, d. h. die Bedingungen

$$u|_{t=0} = f(-x) - f(x - 2l) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=0} = -f'(-x) - f'(x - 2l) = 0$$

zu erfüllen sind; die aus der zweiten Bedingung gezogene Folgerung $f(-x) + f(x - 2l) = C$ mit C als willkürlicher Konstanten gibt im Zusammenhalt mit der ersten Bedingung zur Zeit $t = 0$ für jedes x

$$f(-x) = \frac{C}{2} = f(x - 2l) \quad \text{und} \quad f'(-x) = f'(x - 2l) = 0.$$

Es ist somit auch $f(0) = f'(0) = 0$ und $f(-2l) = f'(-2l) = 0$, wenn wir C gleich Null wählen.

Setzen wir in den auf der rechten Seite der Gleichung (c) stehenden Funktionen $f(\zeta - 2l)$ und $f'(\zeta - 2l)$ für $\zeta = x$ bzw. für $\zeta - 2l = -x$, so sehen wir auf Grund des Vorstehenden, daß sie für alle Werte von x in den Grenzen $0 < x < l$, entsprechend $0 < Kt = \zeta < 2l$ verschwinden müssen.

Die Gleichung (c) besitzt den integrierenden Faktor $\frac{1}{f(\zeta)} = e^{\frac{P\zeta}{Ql}} = e^{\frac{\zeta}{ml}}$. Wir erhalten so nach durch abermalige Integration der Gleichung (c)

$$f(\zeta) = e^{-\frac{\zeta}{ml}} \left[C_1 + \int e^{\frac{\zeta}{ml}} \left\{ f'(\zeta - 2l) - \frac{1}{ml} f(\zeta - 2l) + \frac{1}{K} \varphi\left(\frac{\zeta}{K}\right) \right\} d\zeta \right],$$

oder da die Integrationskonstante Null ist

$$f(\zeta) = e^{-\frac{\zeta}{ml}} \int_0^{\zeta} e^{\frac{\zeta}{ml}} \left[f'(\zeta - 2l) - \frac{1}{ml} f(\zeta - 2l) + \frac{1}{K} \varphi\left(\frac{\zeta}{K}\right) \right] d\zeta. \quad (d)$$

Wir wollen nunmehr annehmen, daß die Zeit τ_1 , in der das gestoßene Stabende die Geschwindigkeit v annimmt, unendlich klein sei. Wendet man die Gleichung (d) auf die unendlich kleine Zeit τ_1 mit $\tau_1 = \frac{\zeta_1}{K}$ als unendlich kleine Größe an, so bemerkt man, daß $f(\zeta)$ in dem genannten Zeitraum selbst unendlich klein wird und aus Gleichung (c) finden wir, daß für dasselbe Intervall $f'(\zeta) = \frac{v}{K}$ wird, da in demselben $f(\zeta - 2l)$ und $f(\zeta - 2l)$ zu

Null werden und $\varphi\left(\frac{\zeta}{K}\right)$ jetzt den Wert bedeutet, den die Funktion φ für das Ende des Intervalles annehmen soll, das ist den Wert der Geschwindigkeit v .

Die Gültigkeit der Gleichungen (c) und (d) ist, wie ohne weiteres einzusehen ist, nicht an die Zeit von $t = 0$ bis $t = \tau_1$ gebunden. Wir wollen sie nunmehr auf Werte der Zeit anwenden, die größer als τ_1 sind, um die Frage beantworten zu können, wie sich der Stab in elastischer Hinsicht weiter verhält, nachdem sein gestoßenes Ende die Geschwindigkeit v erlangt hat. Die Gleichungen (c) und (d) können wir dann in den Formen

$$f'(\zeta) + \frac{1}{ml} f(\zeta) = f'(\zeta - 2l) - \frac{f(\zeta - 2l)}{ml} + \frac{v}{K}, \quad (c')$$

$$f(\zeta) = \frac{mlv}{K} \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{ml}} \right) + e^{-\frac{\zeta}{ml}} \int_0^{\zeta} e^{\frac{\zeta}{ml}} \left[f'(\zeta - 2l) - \frac{1}{ml} f(\zeta - 2l) \right] d\zeta \quad (d')$$

ansetzen. Liegt die Zeit t in einem Intervalle, derart, daß $0 < \zeta < 2l$, so nimmt $f(\zeta)$ die aus (d') sich ergebende Form

$$f(\zeta) = \frac{mlv}{K} \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{ml}} \right) = f_1(\zeta) \quad (A)$$

an, da $f'(\zeta - 2l)$ und $f(\zeta - 2l)$ in dem genannten Intervall verschwinden und $f'(\zeta)$ wird mit Ausschluß des Zeitintervalles 0 bis τ_1 in dem $f'(\zeta) = \frac{v}{K}$ ist, auf Grund der Gleichung (c')

$$f'(\zeta) = \frac{v}{K} e^{-\frac{\zeta}{ml}} = f'_1(\zeta). \quad (B)$$

Liegt die Zeit t entsprechend dem Intervalle $2l < \zeta < 4l$, so liegt $\zeta - 2l$ in dem Bereiche $0 < \zeta < 2l$, in dem wir $f'(\zeta - 2l)$ und $f(\zeta - 2l)$ bereits kennen. Es ist daher möglich, das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (d') für den neuen Bereich zu berechnen, das, wenn wir $\zeta - 2l = \zeta'$ setzen und bemerken, daß die Grenzen des Intervalles im Bereiche $0 < \zeta < 2l$ liegen, in

$$J_1 = e^{-\frac{\zeta'+2l}{ml}} \int_0^{\zeta'} e^{\frac{\zeta'+2l}{ml}} \left[\frac{v}{K} e^{-\frac{\zeta'}{ml}} - \frac{v}{K} \left(1 - e^{-\frac{\zeta'}{ml}} \right) \right] d\zeta' = \frac{2v}{K} e^{-\frac{\zeta'}{ml}} \zeta' - \frac{vml}{K} \left(1 - e^{-\frac{\zeta'}{ml}} \right)$$

übergeht. Infolgedessen wird bei Wiedereinführung von ζ

$$f(\zeta) = -\frac{mlv}{K} e^{-\frac{\zeta}{ml}} + \frac{mlv}{K} \left[1 + \frac{2}{ml} (\zeta - 2l) \right] e^{-\frac{(\zeta-2l)}{ml}}$$

oder

$$f(\zeta) = f_1(\zeta) + \frac{mlv}{K} \left\{ -1 + \left[1 + \frac{2}{ml} (\zeta - 2l) \right] e^{-\frac{(\zeta-2l)}{ml}} \right\} = f_2(\zeta). \quad (\text{A}_1)$$

Mit Ausschluß des Zeitintervalles 0 bis τ_1 wird $f'(\zeta)$ in dem Bereich $2l + \zeta_1 < \zeta < 4l$ gleich dem aus (c') berechenbaren Wert

$$f'(\zeta) = \frac{v}{K} e^{-\frac{\zeta-2l}{ml}} - \frac{v}{K} \left(1 - e^{-\frac{\zeta-2l}{ml}} \right) + \frac{v}{K} e^{-\frac{\zeta}{ml}} - \frac{v}{K} \left[1 + \frac{2}{ml} (\zeta - 2l) \right] e^{-\frac{\zeta-2l}{ml}} + \frac{v}{K}$$

oder

$$f'(\zeta) = f'_1(\zeta) + \frac{v}{K} \left[1 - \frac{2}{ml} (\zeta - 2l) \right] e^{-\frac{\zeta-2l}{ml}} = f'_2(\zeta). \quad (\text{B}_1)$$

Im Bereiche $4l < \zeta < 6l$ kann das Integral der rechten Seite von (d'), da $f'(\zeta - 2l)$ und $f(\zeta - 2l)$ dann im Bereiche $2l < \zeta < 4l$ liegen, und daher bereits bekannt sind, nunmehr berechnet werden. Dasselbe ist soweit es sich auf den Bereich $2l < \zeta < 4l$ allein erstreckt durch

$$J_2 = e^{-\frac{\zeta'+2l}{ml}} \int_{2l}^{\zeta'} e^{\frac{\zeta'+2l}{ml}} \left\{ \frac{v}{K} \left[1 - \frac{2}{ml} (\zeta' - 2l) \right] e^{-\frac{\zeta'-2l}{ml}} + \frac{v}{K} - \frac{v}{K} \left[1 + \frac{2}{ml} (\zeta' - 2l) \right] e^{-\frac{\zeta'-2l}{ml}} \right\} d\zeta' \\ = \frac{vml}{K} - \frac{2v}{Kml} e^{-\frac{\zeta-4l}{ml}} (\zeta - 4l)^2 - \frac{vml}{K} e^{-\frac{\zeta-4l}{ml}}$$

bestimmt, wenn wir wieder $\zeta - 2l = \zeta'$ setzen.

Hierzu kommt noch das über den Bereich $0 < \zeta < 2l$ sich erstreckende Integral, das wir bereits oben mit J_1 gefunden haben. Der ganze im Bereiche $4l < \zeta < 6l$ gültige Wert von $f(\zeta)$ wird daher

$$f(\zeta) = f_2(\zeta) + \frac{mlv}{K} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{2}{m^2 l^2} (\zeta - 4l)^2 \right] e^{-\frac{\zeta-4l}{ml}} \right\} = f_3(\zeta) \quad (\text{A}_2)$$

und $f'(\zeta)$ im Bereiche $4l + \zeta_1 < \zeta < 6l$ wird aus Gleichung (c') nach leichter Rechnung mit

$$f'(\zeta) = f'_2(\zeta) + \frac{v}{K} \left[1 - \frac{4}{ml} (\zeta - 4l) + \frac{2}{m^2 l^2} (\zeta - 4l)^2 \right] e^{-\frac{\zeta-4l}{ml}} = f'_3(\zeta) \quad (\text{B}_2)$$

gefunden. Auf diese Weise kann weiter verfahren werden. Es müßte jetzt die Funktion $f(\zeta)$ im Bereiche $6l < \zeta < 8l$ bestimmt werden usf. Die Gleichung (d') ist sonach als Rekursionsformel zur Berechnung von $f(\zeta)$ anzusehen.

Nachdem die Form der in Gleichung (99a) eintretenden Funktion f gefunden wurde, können u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ und die Verschiebungsgeschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}$ für jeden Wert von x und t bestimmt werden. Es wird

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -f'(Kt - x) - f'(Kt + x - 2l) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = K[f'(Kt - x) - f'(Kt + x - 2l)]. \quad (99b)$$

Die Zeit τ , zu welcher der Stoß zu Ende ist, kann aus der Bedingung gefunden werden, daß für dieselbe und für $x = 0$ die Verzerrungskomponente $\frac{\partial u}{\partial x}$ zu Null geworden ist, da

mit dem genannten Zeitpunkt die beiden einander stoßenden Körper sich voneinander zu trennen beginnen. Solange $0 < Kt < 2l$ wird, da $f'(Kt - 2l)$ in diesem Bereiche Null ist, $-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{v}{K} e^{-\frac{Kt}{ml}}$ (Gleichung B) d. h. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}$ ist in dem genannten Bereiche negativ, das Ende des Stoßes kann also keinesfalls in diesem Bereiche liegen. In dem Bereich $2l + \zeta_1 < Kt < 4l$ wird [Gleichung (B₁)]

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{v}{K} e^{-\frac{Kt}{ml}} + \frac{v}{K} \left[1 - \frac{2}{ml}(Kt - 2l)\right] e^{-\frac{Kt-2l}{ml}} + \frac{v}{K} e^{-\frac{Kt-2l}{ml}} + \frac{v}{K} \left[1 - \frac{2}{ml}(Kt - 4l)\right] e^{-\frac{(Kt-4l)}{ml}}.$$

Das letzte Glied in diesem Ausdruck hat keinen Sinn, da $Kt - 4l$ außerhalb des Bereiches fällt. Die übrigen Glieder ergeben zusammengefaßt

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{v}{K} e^{-\frac{Kt}{ml}} \left[1 + 2e^{\frac{2}{m}} \left(1 - \frac{Kt - 2l}{ml}\right)\right].$$

Der Ausdruck in der Klammer kann verschwinden, wenn $\left(\frac{Kt - 2l}{ml} - 1\right) 2e^{\frac{2}{m}} = 1$, d. h. wenn diese Gleichung besteht, dann fällt das Ende des Stoßes unter der Voraussetzung in den Bereich $2l + \zeta_1 < Kt < 4l$, daß die aus dieser Gleichung sich ergebende Zeit innerhalb dieses Bereiches liegt. Wir finden durch Lösung der letzten Gleichung nach Kt die Bedingung dafür, daß das Ende des Stoßes in dem genannten Bereiche liegt

$$Kt = 2l + ml + \frac{ml}{2} e^{-\frac{2}{m}} < 4l, \text{ d. h. } 2 + e^{-\frac{2}{m}} < \frac{4}{m}.$$

Man kann berechnen, daß für $m = 1,7283$ die Gleichung $2 + e^{-\frac{2}{m}} = \frac{4}{m}$ befriedigt wird; wenn demnach $m < 1,7283$, dann fällt der Stoß in das Intervall $2l + \zeta_1 < Kt < 4l$ und die Stoßdauer wird $\tau = \frac{l}{K} \left[2 + m + \frac{m e^{-\frac{2}{m}}}{2}\right]$. Für den Fall als $m > 1,7283$ ist, kann das Ende der Stoßzeit nur für eine Zeit $Kt > 4l$ erfolgen. In welchem Bereiche das tatsächlich der Fall ist, wenn m einen zweiten zu bestimmenden Wert nicht überschreitet, kann auf ähnliche Weise wie oben erschlossen werden. So zeigt sich, daß für $1,7283 < m < 4,1511$ die Stoßzeit in dem Bereiche $4l + \zeta_1 < Kt < 6l$ liegt usw.

Hat man u und $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$ als Funktionen von x und der Zeit t berechnet, so ist die elastische Bewegung des Stabes vollkommen festgelegt und man kann bei einem gegebenen

Wert der Länge l des Stabes, der Größe $K = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$, des Verhältnisses m der Masse des

stoßenden Körpers zum gestoßenen, ferner der Geschwindigkeit v mit der der stoßende Körper auf den Stab auffällt, Kurven konstruieren, welche zu einer

bestimmten Zeit $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$ als Funktionen von x oder diese Größen für ein bestimmtes x als Funktion der Zeit darstellen. Man kann auch nachweisen, daß

die größten Werte von $\frac{\partial u}{\partial x}$ am festen

Stabende auftreten und je nach dem Werte von m verschiedene Werte annehmen. Darauf soll aber hier nicht näher eingegangen werden¹. Die Abb. 85 zeigt

z. B. schematisch für $m = 1$ und das gestoßene Ende, d. h. für $x = 0$ eine Kurve, deren

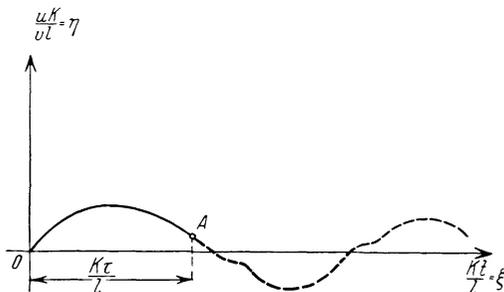


Abb. 85.

¹ Siehe hierzu z. B. A. E. H. Love: Lehrbuch der Elastizität, S. 498. Leipzig: B. G. Teubner 1907.

Punkte durch $\xi = \frac{Kt}{l}$ und $\eta = \frac{uK}{vt}$ bestimmt sind. Dem Punkte A entspricht das Ende der Stoßzeit, nach welcher das gestoßene Ende des Stabes periodisch auf- und abschwingt. (Gestrichelte Kurve.)

Zusammenfassend kann man sagen, daß beim Stoß einer mit lebendiger Kraft begabten Masse gegen einen einseitig eingespannten Stab, in dessen Längsrichtung vom gestoßenen Ende Kompressionswellen ausgehen, die sich mit der Geschwindigkeit $K = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$ gegen das feste Ende fortpflanzen und dort reflektiert werden (allgemeine Lösung (99a)), wodurch der Stab in elastische Schwingungen gerät, deren Ablauf in verschiedenen Zeitperioden durch verschiedene aus den Gleichungen (A), (A₁), (A₂) und (B), (B₁), (B₂) usf. sich ergebende Funktionen $f(\zeta)$ und $f'(\zeta)$ bestimmt sind, die außer von der Zeit auch noch von der Geschwindigkeit mit der der stoßende Körper auffällt, dem Verhältnisse der Masse des stoßenden Körpers zur Masse des gestoßenen Körpers, der Länge des Stabes und dem Werte von K (Schallgeschwindigkeit) abhängen.

Die elastischen Schwingungen werden durch Hysterese, den Luftwiderstand und durch die innere Reibung im Verlaufe der Zeit immer kleiner, d. h. sie werden gedämpft. Darauf wurde aber bei obiger Rechnung keine Rücksicht genommen. (Siehe auch die Näherungsmethoden im Punkte 2, Seite 407 ff. des zweiten Teiles, zur Lösung des Stoßproblems für die Fälle des Längs- und Querstoßes eines geraden Stabes.)

5. Berechnung des Spannungszustandes in rotierenden kreiszylindrischen Scheiben.

Wenn ein Kreiszyylinder um seine Achse mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit ω rotiert und von der Schwere abgesehen wird, so steht jedes Volumenelement, das wir uns nach Abb. 25 aus dem Zylinder herausgeschnitten denken, unter dem Einflusse der normal zur Rotationsachse von derselben weggerichteten Fliehkraft, die die angreifende Kraft ersetzt, und der von der Umgebung des Volumenelementes auf dasselbe übertragenen inneren, den Spannungen entsprechenden Kräfte. Es liegt sonach ein Fall der Kinetostatik vor (S. 200). Was die Spannungen anbelangt, so ist zunächst klar, daß auf die Flächenelemente 2, 3, 6, 7 und 1, 4, 5 P , die auf koaxialen Zylinderflächen liegen, Zugspannungen übertragen werden, die wir bei Einführung von Zylinderkoordinaten r, φ, z in üblicher Weise mit σ_r bezeichnen (S. 90). Dieselben können infolge der Symmetrie der Verhältnisse um die z -Achse nur Funktionen von r sein. Längs den radial gelegenen Elementen 1, 2, 5, 6 und P , 3, 4, 7 werden Zugspannungen σ_t wirksam werden, die aus dem für die Spannungen σ_r angegebenen Grunde gleichfalls nur Funktionen von r sind. Mit den Spannungen σ_r und σ_t sind in tangentieller Richtung notwendig Verlängerungen der dem Körperchen angehörigen Kreiselemente und in radialer Richtung Verkürzungen der Kanten parallel zur z -Achse zugeordnet. Da letztere ebenfalls Funktionen von r sein werden, so können unendlich dünne Scheiben in die wir uns den Zylinder vor der Deformation normal zur Zylinderachse geteilt denken können, nicht unabhängig voneinander ihre Gestalt ändern. Die Folge davon ist das Auftreten von Normalspannungen σ_z in den Flächenelementen 1, 2, 3, 4 und P , 5, 6, 7, die als Funktionen von r und z zu betrachten sind. Letzteres ist im Zusammenhang mit bereits gemachten Bemerkungen auch daraus zu schließen, daß die Spannungen σ_z an den ebenen Begrenzungsflächen des Zylinders, die kräftefrei sein sollen, infolge der zu erfüllenden Grenzbedingungen Null sein müssen. Die Gleichgewichtsbedingungen für ein unendlich kleines Volumenelement erfordern dann aber auch das Vorhandensein von Schubspannungen τ_{rz} und τ_{zr} in den zylindrischen und zu diesen normalen Flächenelementen. Diesen zufolge werden sich zur Mittelebene parallele Ebenen krümmen, die Mittelebene allein wird eben bleiben. Der beschriebene räumliche Spannungszustand ist in Abb. 86 dargestellt.

Ist die Höhe des Zylinders unendlich klein oder sehr klein, so erhalten wir eine kreiszylindrische Scheibe und es verschwinden die Spannungen σ_z und $\tau_{rz} = \tau_{zr}$ oder können, als annäherungsweise nicht in Betracht kommend, weggelassen werden. Der Spannungszustand ist dann ein ebener, oder kann angenähert als ein ebener angesehen werden. Bei einer solchen Annahme über den Spannungszustand besagt die einzige notwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingung, daß die Summe der in radialer Richtung verlaufenden Komponenten aller an einem Körperelement nach Abb. 86 angreifenden Kräfte parallel zu einer durch die z -Achse gehenden Symmetrieebene desselben verschwinden soll, d. h. die Bedingung

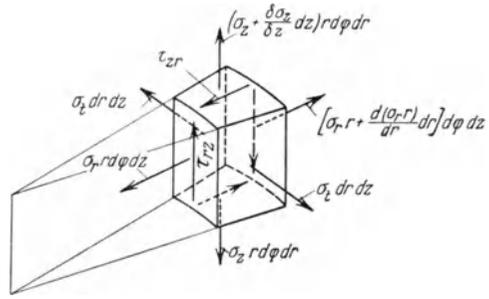


Abb. 86.

$$\left(\sigma_r r + \frac{d(\sigma_r r)}{dr} dr \right) d\varphi dz - \sigma_r r d\varphi dz - 2\sigma_t dr dz \frac{d\varphi}{2} + \mu \omega^2 r \cdot r d\varphi dr dz = 0 \quad (a)$$

erfüllt werden muß. Das letzte Glied von (a) bezieht sich auf die von der z -Achse weggerichtete Fliehkraft mit μ als Massendichtigkeit. Nach leicht erkennbarer Umwandlung erhalten wir aus (a)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{(\sigma_r - \sigma_t)}{r} + \mu r \omega^2 = 0. \quad (100)$$

Die Verzerrungskomponenten e_{rr} , e_{tt} und e_{zz} in radialer, tangentialer Richtung und parallel zur z -Achse ergeben sich für unendlich dünne Scheiben durch einfache geometrische Überlegungen bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes mit

$$\left. \begin{aligned} e_{rr} = \frac{du_r}{dr} &= \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{\sigma_t}{m} \right), & e_{tt} = \frac{u_r}{r} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} \right], \\ e_{zz} = \frac{dw_z}{dz} &= -\frac{1}{Em} (\sigma_t + \sigma_r). \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Die für unendlich dünne Scheiben streng gültigen Gleichungen (a), (100), (101) können wir näherungsweise auch für Körperelemente einer dünnen kreiszylindrischen Scheibe von der endlichen aber kleinen Dicke d übernehmen, wenn die Körperelemente durch r , $d\varphi$, dr und eine Höhe gleich der Dicke der Scheibe bestimmt und die Spannungs- und Verzerrungskomponenten als Mittelwerte aufgefaßt werden (in die Dritte der Beziehungen (101) müssen dann natürlich partielle Differentialzeichen eintreten).

Bildet man $\frac{du_r}{dr}$ aus der zweiten der Gleichungen (101) und setzt den erhaltenen Wert dem aus der ersten der Gleichungen gleich, so erhalten wir

$$\frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} \right) + \frac{1}{E} \left(\frac{d\sigma_t}{dr} - \frac{1}{m} \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} \right) r = \frac{1}{E} \left[\sigma_r - \frac{\sigma_t}{m} \right]$$

oder zusammengefaßt

$$(\sigma_t - \sigma_r)(1 + m) + r \frac{d}{dr} (m\sigma_t - \sigma_r) = 0. \quad (102)$$

Durch (100) und (102) sind zwei Gleichungen zur Bestimmung der mittleren Werte der Spannungen σ_t und σ_r gegeben. Aus (100) folgt

$$\sigma_t = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r + \mu \omega^2 r^2 \quad (b)$$

und daraus durch Differentiation nach r

$$\frac{d\sigma_t}{dr} = 2 \frac{d\sigma_r}{dr} + r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 2\mu r \omega^2 \quad (c)$$

Setzen wir σ_t und $\frac{d\sigma_t}{dr}$ aus (b) und (c) in Gleichung (102) ein, so bekommen wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zur Bestimmung von σ_r

$$r^2 \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{3m+1}{m} \mu r^2 \omega^2 = 0. \quad (d)$$

Führen wir in diese Gleichung $\frac{d\sigma_r}{dr} = p$ ein und dividieren durch r^2 so ergibt sich die nach p lineare Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{dp}{dr} + \frac{3}{r} p = -\frac{3m+1}{m} \mu^2 \omega^2$, die in der Form $d[p r^3] = -\frac{3m+1}{m} \mu^2 \omega^2 r^3 dr$ zu dem Integral

$$p = \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{1}{r^3} \left[C - \frac{3m+1}{4m} \mu^2 \omega^2 r^4 \right]$$

führt, mit Hilfe dessen schließlich

$$\sigma_r = -\frac{C}{2r^2} - \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 r^2 + D = -\frac{A}{r^2} + D - \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 r^2 \quad (103)$$

folgt mit A, C, D als Integrationskonstanten. Mit dem gefundenen Werte von σ_r kann die Spannung σ_t mit

$$\sigma_t = \frac{A}{r^2} + D - \frac{m+3}{8m} \mu^2 \omega^2 r^2 \quad (103)$$

berechnet werden. Die Integrationskonstanten A und D werden durch die gegebenen Bedingungen bestimmt, von denen die eine besagt, daß für $r = a$ mit a als Radius des Zylinders $\sigma_r = 0$ sein muß, da die Mantelfläche des Zylinders kräftefrei ist, woraus

$$0 = -\frac{A}{a^2} + D - \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 a^2 \quad (e)$$

folgt. Die zweite Bedingung bezieht sich darauf, daß für $r = 0$ die Spannungen σ_t und σ_r gleich sein müssen, da sonst nicht Gleichgewicht bestehen könnte.

Daraus folgt $A = 0$ und damit aus (e) $D = \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 a^2$. Die Gleichungen (103) gehen sonach in

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 (a^2 - r^2), \\ \sigma_t &= \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 \left(a^2 - \frac{m+3}{3m+1} r^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

über. Die Spannungen σ_r und σ_t erreichen ihre Höchstwerte für $r = 0$ d. h. in der Scheibenachse. Für alle Werte von r ist $\sigma_t > \sigma_r$ wenn $m \geq 2$ gesetzt wird.

Diese Rechnung wurde zuerst von M. Grübler (L) durchgeführt, der sie auch auf Scheiben mit einem zentralen kreiszylindrischen Loche erweiterte. Wenn letzteres den Radius a_1 besitzt, so lauten die beiden Grenzbedingungen zur Bestimmung von A und D in den auch jetzt gültigen Gleichungen (103)

$$0 = -\frac{A}{a_1^2} + D - \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 a_1^2 \quad \text{und} \quad 0 = -\frac{A}{a^2} + D - \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 a^2, \quad (f)$$

aus welchen die Werte von A und D mit

$$A = \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 a_1^2 a^2, \quad D = \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 (a^2 + a_1^2)$$

folgen. Die Ausdrücke für die Spannungen σ_r und σ_t nehmen dann die Formen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 \left[(a_2 + a_1^2) - r^2 - \frac{a_1^2 a^2}{r^2} \right], \\ \sigma_t &= \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 \left[(a_2 + a_1^2) - \frac{m+3}{3m+1} r^2 + \frac{a_1^2 a^2}{r^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

an. Die Gleichungen (105) gehen in die Gleichungen (104) über, wenn $a_1 = 0$ gesetzt wird. Das kreiszylindrische Loch ändert somit die Verteilung der Spannungen σ_r, σ_t vollständig. Die Spannung σ_t erreicht ihren Höchstwert für $r = a_1$, die Spannung σ_r wird extrem für $r = \sqrt{a_1 a}$, wie man leicht ableiten kann, und für $m \geq 2$ ist $\sigma_t > \sigma_r$.

Grübler fand bei seinen Versuchen mit rotierenden Sandsteinscheiben, daß bei Steigerung der Winkelgeschwindigkeit ω zuerst Sprünge in radialer Richtung auftreten. Das deutet auf einen Trennungsbruch infolge Überschreitung des für das Material noch erträglichen Wertes von σ_t hin. Durch Anbringung eines kreiszylindrischen Loches in einer Scheibe wird die Bruchgefahr größer als sie wäre, wenn die volle Scheibe mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit rotierte, da im ersteren Falle

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 \left[2a^2 + \frac{2(m-1)}{3m+1} a_1^2 \right], \quad (g)$$

im letzteren Falle aber

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{3m+1}{8m} \mu^2 \omega^2 a^2. \quad (h)$$

Selbst wenn das Loch einen sehr kleinen Durchmesser hat, so daß wir im Ausdruck (f) das zweite Glied vernachlässigen können, wird durch Anbringung des kreiszylindrischen Loches die größte tangentielle Spannung zweimal so groß wie für die volle Scheibe.

Sind die Spannungen σ_t und σ_r als Funktionen von r gefunden, so ist es leicht auch den Deformations- und Verschiebungszustand auf Grund der Gleichungen (101) auszurechnen.

Hierzu wäre nur noch zu erwähnen, daß w_z aus der dritten dieser Gleichungen sich als Funktion von r und z herausstellt. Daraus folgte eine Krümmung der zur Mittelebene parallelen Ebenen, was nach den eingangs gemachten Bemerkungen einen anderen Spannungszustand als den voraussetzt, für welchen die Rechnung durchgeführt wurde. Darin zeigt sich der Näherungscharakter derselben.

Bezüglich rotierender Scheiben mit veränderlicher Scheibenhöhe siehe das Werk von A. Stodola: Die Dampfturbinen, 1905.

Zweiter Teil.

Näherungstheorien zur Berechnung gerader Stäbe.

I. Statische Beanspruchung gerader Stäbe.

1. Allgemeine Bemerkungen über Annäherungstheorien und Annäherungsverfahren.

Die Lösung elastischer Gleichgewichtsprobleme geschieht in der Regel durch Annäherungstheorien, und zwar hauptsächlich aus den folgenden Gründen.

Der erste Grund ergibt sich aus der Forderung nach Einfachheit, die bei exakter Lösung, wenn eine solche überhaupt gefunden werden kann, nur in vereinzelten Fällen möglich ist. Handelt es sich doch bei einer solchen um die Lösung von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bei gegebenen Grenzbedingungen, wodurch ein sehr ansehnlicher mathematischer Apparat bedingt ist, dessen Handhabung an die mathematische Schulung des Ingenieurs Höchstanforderungen stellt. Der letztere braucht in der Praxis durch Versuchsergebnisse gestützte einfache Formeln, von deren genügend richtiger Anwendbarkeit auf besondere Fälle er überzeugt ist, und deren Gültigkeitsbereich er auch auf Grund seines Studiums der allgemeinen Theorie und der bezüglichen Erfahrungen kennt. Die Theorie bietet ihm eine Stütze bei auftretenden Zweifeln, und deswegen wird er sie nicht gering schätzen sondern im Gegenteil um deren volles Verständnis und deren Erweiterung bemüht sein. „Theorie ist etwas sehr Praktisches“, sagte einmal ein bekannter Forscher.

Der zweite Grund liegt darin, daß die Voraussetzungen der bis nun bekannten exakten Theorie vielfach in der Praxis von vornherein nicht erfüllt sind, wie ja zur Genüge aus den Auseinandersetzungen im ersten Teile hervorgeht. In solchen Fällen wird lieber gleich zu einer Näherungstheorie Zuflucht genommen, die mit besonderer Berücksichtigung der Forderung der Einfachheit und bei steter Bedachtnahme auf die Vermeidung von Widersprüchen mit allgemein gültigen Prinzipien (wie zum Beispiel Gleichheit der Schubspannungen in zwei aufeinander normalen Flächenelementen) den erfahrungsgemäßen Verhältnissen vorliegender Einzelfälle in ihren wesentlichen Belangen gerecht zu werden versucht. Die im ersten Teile behandelte genauere Theorie setzt unter anderem voraus, daß die Werkstoffe homogen und isotrop sind, dem Hooke'schen Gesetze innerhalb eines gewissen Bereiches der äußeren Beanspruchung folgen und in diesen Bereichen sich auf Zug und Druck gleich verhalten. Diese Voraussetzungen sind bei vielen wichtigen Stoffen von vornherein nicht erfüllt, wie bei Gußeisen, Holz, Zement, Mörtel, Beton u. a. Für diese Stoffe wäre auch eine exakte Lösung eines Gleichgewichtsproblems von vornherein nur eine Näherungslösung.

Die Näherungstheorien in der Elastostatik gehen gewöhnlich von Annahmen über die Deformationen und den Spannungszustand aus, die durch die Gleichgewichtsbedingungen für endliche Teile des ganzen Körpers und die Erfahrung

unter Weglassung nicht ins Gewicht fallender Faktoren gestützt sind (Vorgang der Abstraktion). In der Regel erachtet man das Hooke'sche Gesetz für genügend genau erfüllt, was innerhalb der Größen der Beanspruchung, die praktisch mit Rücksicht auf die Sicherheit der betreffenden Konstruktion zu erwarten sind, häufig als zutreffend angesehen werden kann. In Ausnahmefällen, insbesondere zur Klärung von Unstimmigkeiten mit der Erfahrung, legt man auch ein anderes Elastizitätsgesetz, wie z. B. das Potenzgesetz zugrunde.

In der technischen Biegungstheorie gerader Stäbe z. B. gilt als das Wesentliche der Deformationen des ganzen Stabes die verformte Schwerachse desselben, für die nur Verschiebungen normal zu ihrer ursprünglichen Lage als vorhanden angenommen werden, Verschiebungen parallel zu derselben werden als kaum ins Gewicht fallend vernachlässigt. Um die Gleichung der durchgebogenen Schwerachse bestimmen zu können, nimmt man weiter an, daß die vor der Gestaltsänderung des Stabes ebenen Querschnitte normal zur Stabachse auch nach der Durchbiegung eben bleiben. Genauere Messungen zeigen, daß derartige Annahmen tatsächlich gemacht werden können.

Die Grenzbedingungen werden oft zur Begründung einer Annahme über den Spannungszustand herangezogen, wofür bereits ein Beispiel im ersten Teile (Seite 50) gegeben worden ist. Da die Bedingungen an der Oberfläche selbst in scheinbar sehr leichten Fällen schon sehr verwickelt sind, werden sie in der Regel durch einfachere ersetzt unter Mitheranziehung des De Saint Venantschen Prinzipes (Seite 20 ff.). So sind z. B. die Grenzbedingungen an der Einspannungsstelle des in Abb. 7, S. 21 dargestellten einseitig im Mauerwerk gelagerten Kragträgers gewiß nicht einfach, in erster Linie deswegen, weil das Mauerwerk selbst elastisch nachgiebig ist. Die bezügliche Näherungstheorie vernachlässigt diese Nachgiebigkeit und setzt eine sogenannte feste Einspannung voraus, fallweise macht sie Annahmen über die Durchbiegung an der Einspannungsstelle, die durch die Erfahrungen gestützt werden müßten. Aber auch bei fester Einspannung sind die Grenzbedingungen noch verwickelt genug, sie müssen aussagen, daß sich kein Punkt an der Oberfläche des eingespannten Stabes verschieben kann, was wieder einer bestimmten Verteilung der Einspannungskräfte über die Oberfläche des eingespannten Teiles entspräche. Die Ermittlung dieser Verteilung wäre nicht möglich, wenn man nur die Gleichgewichtsbedingungen für den starren Körper heranzöge. In der Näherungstheorie ersetzt man die Reaktionskräfte durch $V = -R$, $M_B = R \cdot l$ und $M_D = R \eta$, wozu man auf Grund des De Saint Venantschen Prinzipes um so eher berechtigt ist, je dünner der Stab und je kürzer die Einspannungslänge im Vergleich zur Länge des ganzen Stabes ist. Bezüglich der Deformationen des Kragträgers nimmt die Näherungstheorie an, daß die durchgebogene Stabachse an der Einspannungsstelle eine horizontale Tangente besitzt, was natürlich den wahren Verhältnissen auch nicht vollkommen entsprechen wird.

Mit den Näherungstheorien sind nicht zu verwechseln die Näherungsverfahren, welche zur Lösung der exakten Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie angewendet werden.

2. Die verschiedenen Beanspruchungsarten von geraden Stäben.

Ein irgendwie gestützter gerader zylindrischer Stab (Abb. 87) sei einer beliebigen äußeren Beanspruchung durch ein an der Oberfläche wirkendes räumliches Kraftsystem ausgesetzt. In der Abbildung weist das schraffierte Rechteck in der üblichen Weise auf eine gleichmäßig über die Länge a des Stabes verteilte Oberflächkraft mit q Kräfteinheiten auf die laufende Längeneinheit hin. Die Schraffierung normal zur Stabachse deutet die Krafrichtung an.

Wir legen ein Linkskoordinatensystem xyz mit der x -Achse in die Schwerachse und dem Ursprung 0 in den Schwerpunkt des linken Auflagerquerschnittes; die y - und z -Achsen sollen mit den zentralen Trägheitshauptachsen des linken Auflagerquerschnittes zusammenfallen. Das Gleichgewicht des räumlichen Kraftsystemes erfordert die Erfüllung von sechs Gleichgewichtsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \sum P_x + \sum V_x = 0, \quad \sum M_P^x + \sum M_V^x = 0, \\ \sum P_y + \sum V_y = 0, \quad \sum M_P^y + \sum M_V^y = 0, \\ \sum P_z + \sum V_z = 0, \quad \sum M_P^z + \sum M_V^z = 0; \end{aligned} \right\} \text{(a)} \quad \left. \begin{aligned} \sum \mathfrak{R} + \sum \mathfrak{R} = 0, \\ \sum \mathfrak{M}_0^{\mathfrak{R}} + \sum \mathfrak{M}_0^{\mathfrak{R}} = 0. \end{aligned} \right\} \text{(b)}$$

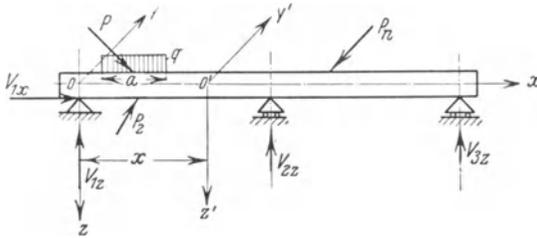


Abb. 87.

Die ersten drei Gleichungen (a) beziehen sich auf die Kraftsummen in den Richtungen x, y, z , der untere Zeiger einer wirkenden Kraft P oder einer Stützkraft V weist auf die Achsenrichtung hin. Die letzten drei Gleichungen (a) beziehen sich auf die Summen der axialen Momente der angreifenden

Kräfte und Stützkräfte, der obere Zeiger weist auf die betreffende Achse hin, mit Bezug auf welche das Moment genommen wird, der untere Zeiger deutet auf die Kraft, deren axiales Moment aufgestellt wird. In den kürzeren Vektorgleichungen (b), die zusammen dasselbe besagen wie die Gleichungen (a), weisen die oberen Zeiger der Momente \mathfrak{M} auf den Reduktionspunkt 0 hin.

Wir legen durch den Punkt $0'$ der Stabachse, der den Querschnitt in der Entfernung x vom linken Auflager festlegt, ein Koordinatensystem $x'y'z'$ parallel zum System xyz , wählen $0'$ als Reduktionspol für die Zusammensetzung der links vom Querschnitt am Stabe angreifenden Kräfte und bilden für ihn die Reduktionsresultante \mathfrak{R} und das Reduktionsmoment \mathfrak{M} . Durch Zerlegung von \mathfrak{R} und \mathfrak{M} in drei Komponenten N, Q_y, Q_z bzw. M_D, M_{By}, M_{Bz} parallel zu den Achsen x, y', z' (oder x, y, z) erhalten wir für den Querschnitt x in N die Normal- oder Längskraft parallel zur x -Achse, in Q_y und Q_z die Querkräfte parallel zur y - und z -Achse, aus welchen die resultierende Querkraft $Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}$ gefolgert wird, in M_D das Drillungs- (Drehungs-) oder Torsionsmoment, in M_{By} und M_{Bz} die Biegemomente mit Bezug auf die y - und z -Achse, welche zusammengesetzt das resultierende Biegemoment $M_B = \sqrt{M_{By}^2 + M_{Bz}^2}$ ergeben. N und Q_y, Q_z werden als positiv bezeichnet, wenn sie Richtungen entgegengesetzt den positiven Richtungen der Koordinatenachsen besitzen, desgleichen werden M_D, M_{By}, M_{Bz} positiv genommen, wenn sie entgegengesetzt den positiven Drehungssinnen wirken, der die Achsen x, y, z ineinander überführt. Es ist selbstverständlich, daß bei Gleichgewicht die Vektoren \mathfrak{R} und \mathfrak{M} für die links vom Querschnitt x gelegenen Kräfte entgegengesetzt gleich den Vektoren sein müssen, die sich ergeben, wenn wir die Kräfte rechts vom Querschnitt x mit Bezug auf den Punkt $0'$ als Reduktionspol zusammensetzen. Hiervon wird häufig Gebrauch gemacht, weil die Berechnung der Komponenten von $\mathfrak{R}, \mathfrak{M}$ oft für eine der genannten Kraftgruppen einfacher wird.

Je nach der Wirkungsweise der äußeren Kräfte können hauptsächlich folgende Fälle voneinander unterschieden werden.

a) Die angreifenden Kräfte P sollen nur auf die eine freie Endquerschnittsfläche wirken und eine Resultante haben, die in die Stabachse hineinfällt. Die Stützung des Stabes erfolge in der zweiten Endquerschnittsfläche (deren Elemente

sich normal zur Stabachse frei bewegen können) derart, daß auch die Reaktionskräfte durch eine in die Stabachse fallende Resultante dargestellt werden. In diesem Falle reduzieren sich die Bedingungen (a) auf die erste derselben, und es liegt eine Beanspruchung auf Zug oder Druck vor, je nachdem die Resultante der äußeren Kräfte in bezug auf den Stab nach außen oder innen wirkt. Trifft letzteres zu, so kann statt Druckbeanspruchung auch Knickungsbeanspruchung vorliegen, wenn die Querdimensionen des Stabes klein sind gegenüber seiner Länge. Von \mathfrak{R} und \mathfrak{M} verschwinden sämtliche Komponenten mit Ausnahme von N . Wäre die eine Endquerschnittsfläche unveränderlich festgelegt, so wäre die Zug- (Druck-) Beanspruchung in deren Nähe nicht streng vorhanden. Bei im Vergleich zu den Querdimensionen langen Stäben wird aber diese Störung des Spannungszustandes in der Nähe der gestützten Fläche vom verschwindenden Einfluß auf den Spannungszustand im übrigen Bereiche des Stabes sein.

b) Es seien bei Ausschluß des Falles unter a) nur Kräfte in einer durch die x -Achse gehenden Ebene wirksam, die als Kraftebene bezeichnet wird. In den Beispiele hierfür zeigenden Abb. 88 bis 92 ist die Kraftebene mit KE bezeichnet und deren Schnitt mit den Endquerschnittsflächen des als Kragträger gedachten Stabes hervorgehoben.

Je nach der besonderen Lage der Kraftebene mit Bezug auf das System xyz und der besonderen Annahme der Kräfte in dieser Ebene können folgende Unterfälle eintreten.

1. Allgemeinsten Fall. Die Kraftebene schneidet die yz -Ebene in einer beliebigen nicht mit einer der Hauptzentralachsen zusammenfallenden Geraden. Es liegt Beanspruchung auf ebene schiefe Biegung, Schub und Zug (Druck) vor, die häufig kürzer als Beanspruchung auf schiefen exzentrischen Zug (Druck) und Schub bezeichnet wird, und zwar auf Grund der allgemeinsten Annahme, daß die x Komponenten der an ihre Angriffspunkte gebunden gedachten äußeren Kräfte nicht mit der Stabachse zusammenfallen. Die zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen sind dann

$$\left. \begin{aligned} \sum P_x + \sum V_x &= 0, & \sum M_y^y + \sum M_z^y &= 0, \\ \sum P_y + \sum V_y &= 0, & \sum M_x^z + \sum M_z^z &= 0, \\ \sum P_z + \sum V_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a')$$

die Momentengleichung mit Bezug auf die x -Achse ist von vornherein erfüllt.

Würden die äußeren Kräfte zwar die Stabachse schneiden, aber nicht in einer Ebene liegen, dann wären die Gleichungen (a') ebenfalls die zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen. Es läge dann Beanspruchung auf räumliche schiefe Biegung, Schub und Zug (Druck) vor. Ihre Behandlung wird aber auf jene zweier Beanspruchungen auf ebene gerade Biegung, Schub, Zug (Druck), zurückgeführt (siehe weiter unten).

Wie noch zu entwickeln sein wird, hängt die schiefe Biegungsbeanspruchung mit dem Auftreten von Biegemomenten M_{By} und M_{Bz} , die Schubbeanspruchung mit dem Auftreten von Querkraften Q_y , Q_z , die Zug- (Druck-) Beanspruchung mit dem Auftreten von Normalkraften N in den verschiedenen Querschnitten des Stabes zusammen. Abb. 88 stellt bei Wirkung der stark ausgezogenen Kraft P die mit Schub verbundene schiefe exzentrische Zugbeanspruchung in einem Beispiele dar. Hätte die Kraft P die strichlierte Lage, so läge wohl auch Beanspruchung auf schiefe Biegung, Zug und Schub vor, die Bezeichnungsweise exzentrische schiefe Zugbeanspruchung hätte aber keine Berechtigung.

2. Die durch die Stabachse gelegt gedachte Kraftebene schneidet die yz -Ebene in einer Hauptzentralachse, fällt also entweder mit der xz - oder xy -Ebene zusammen. Nunmehr reduziert sich die Zahl der statischen Bedingungen (a')

auf drei, da dann entweder die auf z - oder y -Achse bezügliche Momentensumme und die Summe der P_y oder P_z Komponenten von vornherein verschwinden. Fall der Beanspruchung auf gerade Biegung, Schub und Zug (Druck), häufig als Beanspruchung auf geraden exzentrischen Zug (Druck) und Schub bezeichnet nach der allgemeinsten Annahme, daß die x Komponenten der an ihre Angriffspunkte gebunden gedachten Kräfte nicht mit der Schwerachse zusammenfallen (Abb. 89). Es existieren für beliebige Querschnitte entweder Biegemomente M_{By} oder M_{Bz} , ferner Längskräfte N und entweder Querkräfte Q_z oder Q_y .

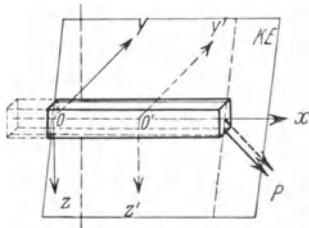


Abb. 88.

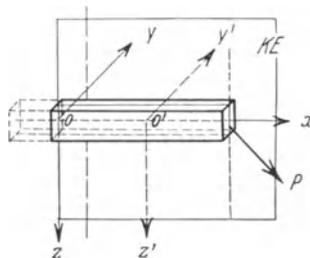


Abb. 89.

3. Die Kraftebene liege wie im Falle 1, die Kräfte seien aber normal zur Stabachse. Von den fünf Gleichgewichtsbedingungen (a') des Falles 1 entfällt die auf die Summe der x Komponenten der Kräfte bezügliche, welche von vornherein erfüllt ist, d. h. es stehen vier statische Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Stützkräfte zur Verfügung. Fall der Beanspruchung auf ebene schiefe Biegung und Schub (Abb. 90), für den nur Biegemomente M_{By} und M_{Bz} und Querkräfte Q_y und Q_z , aber keine Längskräfte vorhanden sind.

4. Die Kraftebene liege wie im Falle 2, die Kräfte seien aber normal zur Stabachse. Von den drei Gleichgewichtsbedingungen des Falles 2 entfällt die

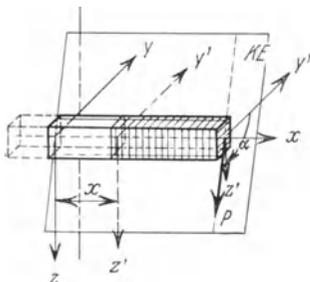


Abb. 90.

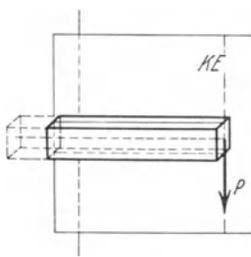


Abb. 91.

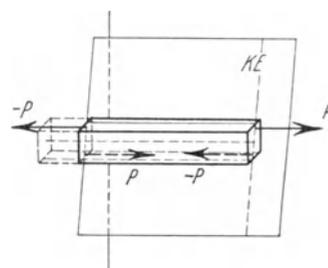


Abb. 92.

auf die Summe der x Komponenten der Kräfte bezügliche, so daß nur mehr zwei statische Bedingungen übrigbleiben. Fall der Beanspruchung auf gerade Biegung und Schub (Abb. 91), für den nur M_{By} oder M_{Bz} und Q_z oder Q_y existieren.

5. Die Kraftebene liege wie im Falle 1, außerdem sollen aber die Kräfte so wirken, daß die Bedingungen $\sum P_x + \sum V_x = 0$, $\sum P_y + \sum V_y = 0$, $\sum P_z + \sum V_z = 0$ von vornherein erfüllt sind, also nur die beiden statischen Gleichungen $\sum M_y + \sum M_z = 0$, $\sum M_x + \sum M_y = 0$ übrig bleiben. Fall der reinen schiefen Biegung in Abb. 92, in der der einfachste Fall der Wirkung eines Kräftepaares $P, -P$, dem natürlich ein entgegengesetzt gleiches Kräftepaar an der Einspannungsstelle entsprechen muß, angenommen wurde. Es sind nur Biegemomente M_{By} und M_{Bz} vorhanden.

6. Die Kraftebene liege wie im Falle 2, sonst seien die auf die Kraftkomponenten bezüglichen Bedingungen wie im Falle 5 erfüllt. Von den zwei Bedingungen des Falles 5 verschwindet eine der Momentengleichungen, z. B. die auf die y -Achse bezügliche. Fall der Beanspruchung auf reine gerade Biegung. Ein zugehöriges Beispiel ist durch leicht ersichtliche Abänderung der Abb. 92 zu erhalten. Es existieren nur Biegemomente M_{By} oder M_{Bz} . Es mag hier noch erwähnt werden, daß man von reiner Biegung in einem bestimmten Bereich des Stabes sprechen kann, wenn für diesen Bereich nur Biegemomente vorhanden sind. Ein Beispiel ist in Abb. 93 dargestellt, welches die Belastung von Eisenbahnachsen wiedergibt. Aus dem Schaubild für die Biegemomente ersieht man, daß das Biegemoment im Stabteil zwischen den Auflagern konstant gleich Pa ist und daher die Querkraft in diesem Bereiche verschwindet. Die überkragenden Teile der Achse sind auf gerade Biegung und Schub, der Teil zwischen den Auflagern auf reine gerade Biegung beansprucht.

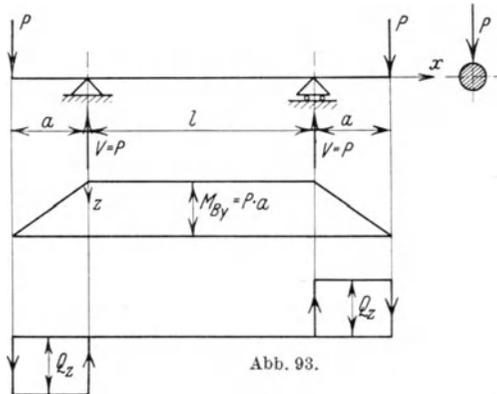
7. Zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte sollen normal zur Stabachse stehen und entweder

α) in zwei Ebenen wirken, die unendlich benachbart sind, oder

β) in zwei Ebenen wirken, die im Vergleich zu den Querschnittsdimensionen sehr nahe aneinander liegen.

Durch diese Annahmen sind die statischen Gleichgewichtsbedingungen bereits genau oder annähernd genau erfüllt. Im Falle α sagt man, der Stab sei auf Schub schlechthin beansprucht. Diese Beanspruchung stellt einen idealen Grenzfall vor. In Abb. 94 ist ein Prisma H aus irgend einem nahezu homogenen und isotropen Material auf der einen Seite fest eingespannt. Im Einspannungsquerschnitt wirken von oben herunter und von unten hinauf zwei Schneiden von der Stärke d derart, daß die linke Begrenzungsfläche der unteren Schneide mit der rechten Begrenzungsfläche der oberen Schneide in einer vertikalen Ebene (Schneidenebene) liegt. Die Schneiden stützen sich gegen die beiden Platten D , die die Auflagerplatten einer Druckpresse vorstellen. Dieser Anordnung entsprechend werden bei Gegeneinanderbewegung der Platten nächst dem Einspannungsquerschnitt 2 entgegengesetzt gleiche Kräfte längs je einer sehr schmalen Fläche gleichförmig übertragen, die der sehr klein vorausgesetzten Schneidenstärke d zugeordnet ist. Letzterer entsprechend ist das Biegemoment M_B im Querschnitt der beiden Schneiden durch $\frac{q d^2}{2}$ im Einspannungsquerschnitt durch $q d^2$ bestimmt, wenn

q der durch die Pressen auf die Schneiden übertragene Druck pro Längeneinheit ist (Abb. 94a). Die Querkraft ist in der Schneidenebene durch $q d$ ausdrückbar, im Einspannungsquerschnitt ist sie Null. Ist die Schneidenbreite sehr klein, so kann man die Wirkung des Biegemomentes gegenüber jener der Querkraft vernachlässigen und annäherungsweise für alle Querschnitte das Biegemoment Null setzen. In diesem Sinne kann man sagen, daß bei kleiner Schneidenbreite hier nur eine Transversalkraft vorhanden ist, die im gemeinsamen Schneidenquerschnitt einen Größtwert erlangt. Der Querkraft entspricht eine Schubspannungsverteilung im gemeinsamen Schneidenquerschnitt, die später näherungsweise zu berechnen sein wird. Es ist leicht zu erkennen, daß infolge der



Normaldrücke auf das Prisma in ihrer Nachbarschaft auch Druckspannungen auftreten müssen, die man aber gewöhnlich vernachlässigt.

Eine ähnliche Beanspruchung wie in Abb. 94 tritt bei Wirkung einer Blechschere auf ein Blech auf, solange die Blechschere noch nicht in das Blech eingedrungen ist, oder im Falle der Abb. 95, die eine Verbindung zweier Bleche durch einen oder mehrere Niete veranschaulichen soll. Die Beanspruchung des

Nietes, der hier das Prisma H der Abb. 94 ersetzt, ist nahezu eine solche auf Biegung und Schub mit kleinen Biegemomenten.

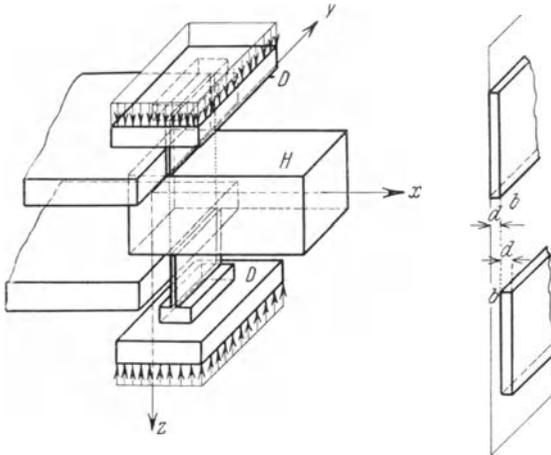


Abb. 94.

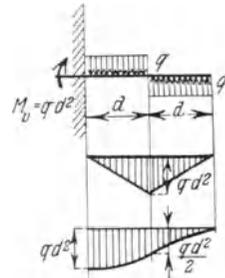


Abb. 94 a.

Für alle angeführten Beispiele liegt eine Beanspruchung auf „Abscheren“ vor, die so genannt wird, weil die äußeren Kräfte hauptsächlich den Stab im Querschnitt, in dem die Querkraft am größten ist, zum Bruch bringen möchten. Das Wesen der Beanspruchung auf Abscheren ist das Hinzutreten eines kleinen Biegemomentes zur Querkraft.

Würde das Biegemoment vollkommen verschwinden können, was bei unendlich dünnen Schneiden und Blechen, unendlich kurzen Nieten usw. möglich wäre, so läge der ideale Grenzfall nach α vor, der als Beanspruchung des Stabes auf Schub „schlechthin“ bezeichnet wurde, weil jetzt die Biegemomente mathematisch genau als verschwindend anzusehen sind und die unendlich kleinen

Prismen, die im Bereiche des unendlich kleinen Stabteiles liegen, in dem die Schneiden wirksam sind, hauptsächlich auf reinen Schub beansprucht sind, in zweiter Linie erst durch Spannungen infolge des Normaldruckes der Spannungen auf die Oberfläche des Stabes. Infolge des zuletzt genannten Umstandes liegt keine „reine“ Schubbeanspruchung dieser Prismen, wie sie durch Abb. 14 auf Seite 42 dargestellt ist, vor.



Abb. 95.

Ein solcher idealer Grenzfall, wie eben beschrieben, wäre offenbar auch recht nahe rechts oder links von den Auflagerquerschnitten in Abb. 93 vorhanden, wenn die Kraftübertragung der Stützkkräfte längs unendlich dünner Schneiden bewirkt werden könnte und die vorkragenden Stablängen α unendlich kurz wären, oder, wenn letzteres nicht zutreffen würde, die Belastung zwischen den Auflagern angreifen würde.

Eine tatsächlich reine Schubbeanspruchung ist, wie später noch erwiesen werden wird, die Beanspruchung auf Drillung (siehe unter c).

c) Es sollen die Kräfte in Ebenen normal zur Stabachse wirken, ohne die letztere zu schneiden. Es bleiben dann nur die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \sum P_y + \sum V_y &= 0, & \sum M_P^x + \sum M_V^x &= 0, \\ \sum P_z + \sum V_z &= 0, & \sum M_P^y + \sum M_V^y &= 0, \\ & & \sum M_P^z + \sum M_V^z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a'')$$

zu erfüllen übrig. Fall der Beanspruchung auf Biegung, Schub und Drillung. Für die verschiedenen Querschnitte des Stabes existieren nur Biegemomente M_{By} , M_{Bz} , Querkräfte Q_y , Q_z und ein Drillungsmoment M_D . Abb. 96 stellt ein Beispiel vor. Eine flußeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitt ist in A und B gelagert und besitzt zwei aufgekeilte Riemenscheiben R_1 und R_2 mit den Radien r_1 und r_2 . Über die Riemenscheiben führen Riementreibe. R_2 sei die treibende Scheibe, R_1 die angetriebene. Die Riemen der Triebe sind auf Zug beansprucht: Nach Durchschneiden der Riemen an den Stellen a, b und c, d müssen die den inneren Zugspannungen entsprechenden Kräfte als äußere Kräfte angebracht werden. Die Zugspannungen sind in der aus Abb. 96 ersichtlichen Zuordnung mit S_1, S'_1 und S_2, S'_2 bezeichnet. Durch sie werden zufolge Reibungswirkung Drehmomente M_1 und M_2 , deren Ebenen normal auf die Wellenachse stehen, übertragen und im entgegengesetzten Sinne auf die Welle einwirken. In den Lagern werden außerdem Reibmomente mit Ebenen

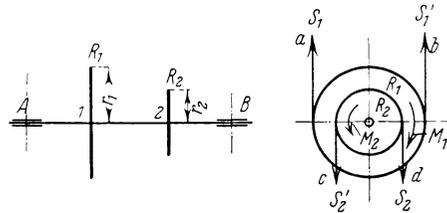


Abb. 96.

gleichfalls normal zur Stabachse wirksam. Sieht man von letzteren und von den jedenfalls in der Zeitspanne des Beginnes der Rotation der Welle bis zur gleichförmigen Rotation auftretenden Trägheitskräften ab, so bleibt als äußere Beanspruchung der flußeisernen Welle nur das Kraftsystem übrig, das aus den Zugkräften S_1, S'_1 und S_2, S'_2 , den nicht eingezeichneten Auflagerreaktionen normal zur Stabachse und den Momenten M_1 und M_2 besteht. Würden die Einzelkräfte in der Stabachse angreifen, so entspräche ihnen eine Beanspruchung auf gerade Biegung und Schub. Die infolge der Exzentrizität der Einzelkräfte vorhandenen Momente M_1 und M_2 entsprechen der Beanspruchung auf Drillung, im Bereiche des Stabes zwischen den Riemenscheiben R_1 und R_2 .

Als besonderer Fall kann der folgende gelten. Wirken nur Kräftepaare in Ebenen normal zur x -Achse, so besteht die einzige durch die Stützkkräfte zu erfüllende Bedingung in Erfüllung der auf die Momente bezüglich der x -Achse geltenden Gleichung $\sum M_P^x + \sum M_V^x = 0$. Es liegt dann der Fall der Beanspruchung auf reine Drillung vor, wie z. B. in Abb. 27, S. 91, zu der wir uns in einem praktischen Falle das linke Stabende wie bei einem Kragträger fest eingespannt vorzustellen haben.

Alle Arten der Beanspruchungen des geraden Stabes, die nicht unter a) bis c) enthalten sind, können bei Zugrundelegung der allgemeinen Bedingungen (a) konstruiert werden. Fügt man z. B. zu den Belastungen des Stabes nach Abb. 27 noch eine über die rechte Endfläche gleichförmig verteilte Zug- (Druck-) Kraft hinzu, der selbstredend eine entgegengesetzt gleiche Kraft in der Einspannungsstelle entsprechen muß, so erhält man eine Beanspruchung des Stabes auf Drillung und Zug (Druck). Die zu erfüllenden Bedingungen sind, wenn die hinzutretende Kraft mit P_{1x} bezeichnet wird und mehrere Drillungsmomente auf den Stab einwirken, $P_{1x} + V_{1x} = 0$, $\sum M_P^x + M_V^x = 0$ usw.

Die Beanspruchung auf Zug, Druck, Biegung, Drillung, Schub und auch Abscheren werden als einfache Beanspruchungen des geraden Stabes bezeichnet.

Wird der Stab zwei oder mehr einfachen Beanspruchungen gleichzeitig ausgesetzt, so heißt die Beanspruchung eine zusammengesetzte.

Die Beanspruchung auf Knickung fällt aus diesem Schema der stabilen Beanspruchungen als ein Sonderfall labilen Gleichgewichtes vollkommen hinaus.

3. Die Beanspruchung auf Zug und Druck. Normal- und Proportionalstäbe. Einfluß der Probenform auf die Gütegrößen. Völligkeitsgrad.

Mit Bezug auf die lineare homogene Beanspruchung eines geraden zylindrischen Stabes kann zunächst auf die diesbezüglichen allgemeinen Auseinandersetzungen im Abschnitt IV des ersten Teiles hingewiesen werden, wie sie in den Punkten 16 bis 19, 29, 30, 31, 32, 35 bis 40 durchgeführt wurden.

Im folgenden soll der Einfluß der bei Durchführung des Zug- (Druck-) Versuches verwendeten Probeformen auf den Verlauf des technischen σ - e -Schaubildes und die Definition und Bedeutung der aus dem Zug- (Druck-) Versuch abgeleiteten sogenannten Gütegrößen in kurzer nur zur Einführung dienenden Weise behandelt werden.

Wie schon auf Seite 138 bemerkt, werden zur Durchführung des Zugversuches mit Metallen Stäbe von kreisförmigem oder rechteckigem Querschnitte, das ist Rund- oder Flachstäbe verwendet, die, wenn sie in den Abmessungen nach Abb. 35 auf Seite 138 mit der Meßlänge von 20 cm und Unterteilung derselben in 20 Teile (Teilwert 1 cm) ausgeführt sind, als Normalstäbe bezeichnet werden. Besonders sei erwähnt, daß am Rundstabe die Kräfte längs der Kreisringflächen A , die Schultern des Stabes genannt werden, gleichförmig verteilt im eingetragenen Pfeilsinne von der Festigkeitsmaschine her übertragen werden. Die Kraftübertragung beim Flachstabe erfolgt an jedem Ende des Stabes längs zwei einander gegenüberliegenden den Längsflächen des Stabes angehörigen Rechtecken, von welchen die vorderen in Abb. 35 schraffiert sind, und wird mittels Beißkeilen bewerkstelligt.

Anstatt der Normalstäbe werden auch Stäbe mit Meßlängen und Teilwerten verwendet, deren Abmessungen im Verhältnis zu denen des Normalstabes proportional vergrößert oder verkleinert sind und daher als Proportionalstäbe bezeichnet werden.

Wenn man mit Normal- oder Proportionalstäben aus demselben wirklich oder durchschnittlich isotropen, homogenen Werkstoff bei der gleichen Temperatur je einen Zugversuch mit derselben Verformungsgeschwindigkeit durchführt und dafür sorgt, daß die Kraftübertragung an den Stabköpfen mit Bezug auf Angriffspunkte und Richtungen der übertragenen Köpfe ebenfalls ähnlich im geometrischen Sinne ist, erhält man übereinanderfallende σ - e -Schaubilder. Die Versuchsergebnisse, die man mit einem Rund- oder Flachstab, dessen Abmessungen in keinem konstanten Verhältnisse zu den Normalstäben stehen, erhält, führen zu einem σ - e -Schaubild, das von jenem, welches man mit einem Normalstab erhält, mehr oder weniger abweicht. Um zu den gleichen Ergebnissen zu gelangen, müssen also Normal- oder Proportionalstäbe zu den Versuchen herangezogen werden.

Beim Normalflachstab kann das Verhältnis der Querschnittsseiten $a : b$ zwischen 1 : 1 und 1 : 5 liegen, ohne daß die bei seiner Verwendung sich ergebenden Resultate eine wesentliche Abänderung erfahren.

Dieses Verhalten wenigstens durchschnittlich homogener und isotroper Stoffe beruht auf dem Ähnlichkeitsgesetz, das zuerst J. Barba (L) auf verformte

elastische Körper anwendete, und später F. Kick (L) in einer allgemeineren Form aussprach. Nach Barba ist die zur geometrisch ähnlichen Gestaltsänderung geometrisch ähnlicher Körper nötige Arbeit dem Volumen proportional. Anstatt dessen kann man bei Beachtung des Begriffes der Deformationsarbeit und des Satzes über die Arbeit auch sagen, daß geometrisch ähnliche Körper bei in entsprechenden Punkten gleichem Spannungszustand in denselben den gleichen Verzerrungszustand oder geometrisch ähnliche Gestaltsänderungen der Elementarkörper erleiden. Denken wir uns nämlich zwei ähnliche Körper aus dem gleichen Stoffe durch je drei Scharen zueinander und zu den Ebenen des Koordinatensystemes paralleler Ebenen in ähnliche Körperchen zerteilt, und lassen in beiden Fällen an ähnlich gelegenen Oberflächenelementen das gleiche im Gleichgewicht stehende Kraftsystem angreifen, so muß die Lösung der linearen Gleichgewichtsbedingungen (20), (21) bei Rücksicht auf die Grenzbedingungen (24) in ähnlich gelegenen Elementarkörpern zu den gleichen Spannungskomponenten führen, denen wenigstens durchschnittlich offenbar der gleiche Verzerrungszustand entspricht. Auf linear und homogen auf Zug beanspruchte Stäbe, die bei fortschreitendem Zugversuch auch lokale Dehnungen und Einschnürungen und damit verbunden einen allgemeineren Spannungszustand erleiden können, angewendet besagt das Ähnlichkeitsgesetz, daß Proportionalstäbe bei gleichen Spannungen proportionale Verlängerungen der Meßlängen (proportionale Einschnürungen) und im ganzen Bereiche desselben die gleichen Verzerrungen (lokale bezogene Dehnungen) erfahren.

Nach einem Vorschlage von Martens drückt man sämtliche Abmessungen eines Normal- bzw. Proportionalstabes durch $\sqrt[3]{F}$ aus, wobei F die Querschnittsfläche des Stabes bedeutet. Demzufolge ist die Meßlänge für einen Normal- oder Proportionalstab $l = 11,5 \sqrt[3]{F}$, der Durchmesser des Stabes $d = 1,13 \sqrt[3]{F}$, der Teilwert der Unterteilung der Meßlänge (für den Normalstab gleich 1 cm) $l_t = 0,565 \sqrt[3]{F}$ usw. Dabei ist für den Normalflachstab die Querschnittsfläche $F = ab$ ebenso groß gewählt wie für den Normalrundstab. Das Verhältnis $\frac{l}{\sqrt[3]{F}} = 11,5$ ist für einen beliebigen Stab als von besonderer Wichtigkeit für das für diesen Stab erhaltene σ - ϵ -Schaubild erkannt worden, wie weiter unten noch ausgeführt werden wird. Dementsprechend werden Meßwerten häufig Zeiger angehängt, welche dieses Verhältnis zum Ausdruck bringen, z. B. schreibt man für die Dehnung beim Bruche des auf Zug beanspruchten Normalstabes $\delta_{11,5}$ usw. In neuerer Zeit hängt man als Zeiger an Meßwerte (insbesondere an das Zeichen für die Bruchdehnung) den Zahlenwert des Verhältnisses $\frac{l}{d}$ an, das für den Normal- und Proportionalstab mit Kreisquerschnitt gleich 10 ist. Bei Flachstäben ist für d der Durchmesser des dem Querschnitte entsprechenden flächengleichen Kreises einzuführen.

Außer den durch die Abb. 35 dargestellten sog. langen Normalstäben und zugehörigen Proportionalstäben sind in Deutschland noch drei andere Typen von Zugstäben für Metalle gebräuchlich:

1. Ein kurzer Normalstab mit der Meßlänge von 100 mm, $d = 20$ mm und zugehörige Proportionalstäbe, für welche also $l = 5,65 \sqrt[3]{F}$ und $d = 1,13 \sqrt[3]{F}$ usw.
2. Langstäbe mit 200 mm Meßlänge und beliebigem Querschnittsdurchmesser.
3. Kurzstäbe mit 100 mm Meßlänge und beliebigem Querschnittsdurchmesser.

Die mit Stäben von den drei letztgenannten Typen erhaltbaren Versuchsergebnisse sind für einen gegebenen Werkstoff nicht die gleichen wie jene, die mit langen Normal- und Proportionalstäben zu erlangen sind¹.

¹ Siehe hierzu auch das Werkstoff-Handbuch, herausgegeben von der Deutschen Gesellschaft für Metallkunde im Verein deutscher Ingenieure.

Gütegrößen, auch Wert- oder Kennziffern genannt, sind für die Beurteilung der Güte oder des Wertes eines Stoffes in Betracht kommende, aus Versuchen gefolgerte Größen physikalischer oder chemischer Natur. Derartige Größen, soweit sie physikalisch-mechanischer Art sind, werden in der Regel aus Zug-, Druck-, Biegungs-, Verdrehungs-, Scher- und Härteversuchen bei Zugrundelegung von kontinuierlicher und stoßartiger Belastung und bei dauernder und wechselnder Aufbringungsart der Belastung erhoben.

Aus dem Zugversuch mit Metallen bei langsamer kontinuierlicher Belastung werden bereits erklärte Gütegrößen, wie Zugfestigkeit, Bruchdehnung und die nach Seite 164 zu berechnende Deformationsarbeit bis zur Erreichung der Höchstspannung im technischen σ - ϵ -Schaubild gefolgert, ferner die Querschnittsverminderung von einschnürenden Stoffen, wie z. B.: Kupfer, Flußeisen usw., an der stärksten Einschnürungsstelle beim Bruch.

Die Bruchdehnung wird in Prozenten der ursprünglichen Meßlänge angegeben und in üblicher Weise mit φ_z bezeichnet. Dementsprechend wird

$$\varphi_z = 100 \frac{l_e - l}{l} \quad (106)$$

mit l als ursprünglicher Meßlänge und l_e als Größe der Meßlänge unmittelbar nach dem Bruch. Tritt im Verlaufe der Zugbeanspruchung noch örtliche Dehnung und Querschnittsverminderung auf, d. h. dehnt sich der Stab im Bereiche der Meßlänge nicht gleichmäßig, so ist φ_z nur ein mittlerer Wert der Verlängerungen, die tatsächlich im Einschnürungsquerschnitt auftretende maximale Dehnung ist bedeutend größer (S. 140). Bei stark plastischen Flußeisensorten ist φ_z etwa 30 %, bei „harten“ Stählen etwa 14 %, bei sprödem Gußeisen 0,1 bis 0,25 %. Da φ_z erst nach dem Bruch gemessen werden kann, so ist φ_z um den Betrag der federnden Dehnung, die freilich sehr gering ist, zu klein.

Die Messung von l_e erfolgt bei stark dehnbaren Stoffen zur Erlangung des Mittelwertes in mehreren Längsebenen des Stabes durch eine mit Nonius versehene Schublehre, welche noch $\frac{1}{10}$ mm abzulesen gestattet, bei spröden Stoffen muß zu feineren Hilfsmitteln gegriffen werden (Meßuhr). Der Bruch eines zähen elastischen Stoffes erfolgt in der Einschnürungsstelle, die sich in der Mitte des Stabes oder außerhalb der Mitte befinden kann. Im letzteren Falle würde man kleinere Werte von φ_z erhalten, als im ersteren Falle, weil ein Teil der sehr ins Gewicht fallenden örtlichen Dehnung aus dem Bereiche der Meßlänge fallen kann. Man hat daher bei außerhalb der Mitte erfolgendem Bruch eine besondere Methode zur Messung von l_e eingeführt, die von Martens herrührt, und darauf hinausläuft, den Bruch künstlich in die Mitte zu verlegen. Dieselbe geht von der annähernd zutreffenden

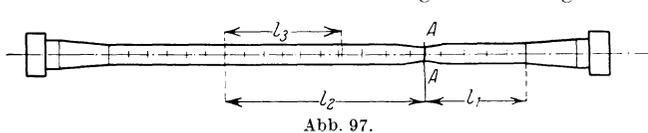


Abb. 97.

Annahme aus, daß der Verlauf der örtlichen Dehnung stets symmetrisch zur Bruchstelle AA (Abb. 97) ist. Man mißt, wenn es sich z. B. um eine ursprüngliche Meßlänge von 20 cm handelt, am kürzeren Ende von der Bruchstelle bis zum Ende der Meßlänge die Strecke l_1 (in der Abbildung 4 Teilwerte plus einem Bruchstück eines Teilwertes), hierauf werden am längeren Ende 10 Teilwerte gemessen, und jener Teilwert, innerhalb welchem der Bruchwert erfolgt, dabei als ein Teilwert gezählt, wodurch die Strecke l_2 erhalten wird. Vom Endteilstrich der Strecke l_2 werden dann so viel Teilwerte gegen die Bruchstelle hinzugemessen, als zu den vollen Teilwerten der Strecke l_1 zur Ergänzung auf 10 Teilwerte noch fehlt. (In der Abb. 97 6 Teilwerte.) Es wird dann $l_e = l_1 + l_2 + l_3$ gesetzt.

Die Querschnittsverminderung beim Bruch wird in Prozenten der ursprünglichen Querschnittsfläche F angegeben und in üblicher Weise mit ψ_z bezeichnet, d. h.

$$\psi_z = 100 \frac{F - F_e}{F} \quad (107)$$

mit F_e als Fläche an der Stelle der stärksten Einschnürung. Die Berechnung von F_e geschieht auf Grund von mehreren Messungen mit Schublehre und Nonius. Für „weiches“ Flußeisen ist ψ_z etwa 60 bis 70 %, bei Stahl bedeutend kleiner, für Gußeisen kommt die über die ganze Meßlänge ziemlich gleichmäßige Querschnittsverminderung kaum in Betracht.

Die Bestimmung der spezifischen Deformationsarbeit, auch Arbeitsvermögen A bis zur Höchstspannung entsprechend dem Punkte H des technischen σ - e -Schaubildes genannt (Abb. 55, Seite 150), erfolgt entweder durch Ausplanimetrieren oder, falls die σ - e -Kurve des betreffenden Werkstoffes auf Millimeterpapier aufgetragen worden ist, durch Abzählung der mm^2 , welche auf die Fläche OHC entfallen. Manchmal wird das Arbeitsvermögen A_1 auch bis zum Punkte L entsprechend der Zerreißspannung k_z gerechnet (s. S. 164ff.).

Das Verhältnis der Fläche, welche das Arbeitsvermögen A_1 bis zum Bruch darstellt, zur Fläche des umschriebenen Rechteckes $ODEF$ heißt der Völligkeitsgrad η des betreffenden Werkstoffes. Es ist sonach

$$\eta = \frac{K_z \delta_z}{A_1}, \quad (108) \quad \text{d. h.} \quad A_1 = \frac{K_z \delta_z}{\eta}. \quad (108a)$$

Der Völligkeitsgrad ist für Stahl etwa 0,6 bis 0,7, für Schweißeisen etwa 0,7 bis 0,8. Da η für die verschiedenen Eisen- bzw. Stahlsorten sich als ziemlich konstant erweist, kann man bei bekanntem η , K_z und δ_z das gesamte Arbeitsvermögen A_1 aus (108a), und zwar in kgcm^3 , wenn K_z in kg/cm^2 ausgedrückt wird, wenigstens angenähert bestimmen¹. Man braucht hierzu aus dem Zugversuche nur die Endwerte K_z und δ_z abzuleiten, ohne daß es notwendig wäre das σ - e -Schaubild selbst zu kennen.

Die Ausmaße der Versuchsprobe und ihre Form kommen in den Werten der Gütegrößen φ , ψ_z und K_z eines Werkstoffes insofern zum Ausdruck, als sich der Hauptsache nach ein Einfluß

- a) des Stabkopfes und dessen Einspannung,
- b) der Meßlänge und der ganzen Versuchslänge des Stabes,
- c) der Querschnittsgröße und Querschnittsform,
- d) von Kerbwirkungen,

geltend macht.

ad a) Die Stabköpfe, die in der Festigkeitsmaschine gepackt werden, sind selbstredend nicht linear beansprucht, sondern erleiden Spannungszustände, die von ihrer Form und der Art der Kraftübertragung auf sie abhängig sind. Die Endmarken der Meßlänge sollen derart mit Bezug auf die Stabköpfe gelegen sein, daß der Spannungszustand innerhalb der Meßlänge als linear angenommen werden kann. Man schaltet z. B. zu diesem Zwecke beim Rundstab konische Übergangsteile (Abb. 35) zwischen den Stabköpfen und den zylindrischen Teilen des Stabes ein. Je weiter die Stabköpfe von den genannten Endmarken entfernt liegen (lange Köpfe), um so weniger wird sich ein Einfluß der Stabköpfe auf die Gütegrößen bemerkbar machen.

Nehmen wir an, es läge ein sprödes oder ein plastisches Metall wie Gußeisen oder weiches Kupfer vor. Die Dehnung wird sich beim Gußeisen über die ganze Länge gleichmäßig erstrecken, wenn die Stabköpfe weit von den Endmarken der Meßlänge entfernt sind. Liegen die Stabköpfe nahe an den Endmarken, so wirken sie hindernd auf die Ausbildungen der Querschnittsverminderungen von Teilen des Stabes, die gegen die Endmarken der Meßlänge zu liegen, und infolgedessen wird, weil mit den verhinderten Querschnittsverminderungen auch die Ver-

¹ In der Technik wird das Arbeitsvermögen gewöhnlich in $\frac{\text{kgm}}{\text{cm}^3}$ ausgedrückt (s. S. 165).

längerung der Meßlänge in den genannten Teilen verkleinert wird, die gleichmäßige Dehnung gegen die Enden der Meßlänge zu gestört, und werden die Dehnungen dort kleiner sein als an Stellen, welche mehr gegen die Mitte des Stabes zu liegen. Dieser störende Einfluß der Stabenden wird sich um so stärker unter sonst gleichen Umständen geltend machen, je stärker der Stab dehnbar ist. Bei plastischen Metallen wird sich sonach der Einfluß der Stabköpfe in einem stärkeren Abfall der Dehnungen gegen die Meßmarken zu zeigen, als bei einem spröden Stoffe. Allgemein kann behauptet werden, daß die Stabköpfe in den in Betracht kommenden Fällen einen den Wert der Bruchdehnung herabmindernden Einfluß besitzen.

ad b) und c) Bauschinger (L) fand, daß bei langen Stäben von beliebiger Querschnittsgröße und Form aus gleichem Stoffe, für die der Einfluß der Stabköpfe zu vernachlässigen ist, sich gleiche Werte der Bruchdehnung φ_z ergeben, wenn dieselben auf Meßlängen gemessen werden, die den Quadratwurzeln aus den Querschnittsgrößen proportional sind, d. h. $\frac{l}{\sqrt{F}}$ einen konstanten Wert

besitzt. Diese Gesetzmäßigkeit kann durch folgende von Bauschinger herührende Festlegung gestützt werden. Die Verlängerung der Meßlänge beim Bruch eines plastischen Stoffes kann bei langen Stäben aus einer gleichmäßig über die ganze Meßlänge sich erstreckenden Verlängerung λ_g und einer örtlichen Verlängerung λ_l zusammengesetzt gedacht werden, wobei $\lambda_g = k_1 l$ und $\lambda_l = k_2 \sqrt{F}$ mit k_1 und k_2 als Stoffkonstanten. Die Erfahrung lehrt nämlich, daß bei langen Stäben und großen Meßlängen die örtliche Dehnung und damit auch die Gesamtdehnung mit dem Querschnitt in der angegebenen Weise wächst. Das hängt damit zusammen, daß bei größeren Querschnitten der Bereich der örtlichen Dehnung größer wird. Die Gesamtdehnung φ_z im Hundertsatz zur Meßlänge l genommen wird dann

$$\varphi_z = 100 \left(k_1 + \frac{k_2 \sqrt{F}}{l} \right). \quad (109)$$

Sollen für zwei verschiedene Probestäbe mit den Werten F_1, l_1 und F_2, l_2 die Dehnungen gleich sein, so muß $k_1 + \frac{k_2 \sqrt{F_1}}{l_1} = k_1 + \frac{k_2 \sqrt{F_2}}{l_2}$, d. h. $\frac{l}{\sqrt{F}}$ konstant sein. Bei kurzen Stäben mit kleiner Meßlänge kann die Beziehung (109) nicht mehr angewendet werden, und zwar wegen des Einflusses der Stabköpfe. Für sie hat sich die annähernd richtige Erfahrungsformel von Bach-Baumann (L)

$$\varphi_z = A + \frac{B}{\sqrt{l}} \quad (109a)$$

als anwendbar gezeigt, worin A und B als Stoffkonstante aufzufassen sind, die aus zwei Messungen der Bruchdehnung an einem zerrissenen Stab für zwei verschiedene Meßlängen l_1 und l_2 bestimmt werden können. Wenn für einen vorliegenden Stab $\frac{l}{\sqrt{F}}$ nicht den bei Normalstäben üblichen Wert 11,3 besitzt, kann

bei gegebenem Querschnitt zunächst jene Meßlänge bestimmt werden, für die dieser Verhältniswert erreicht wird, und hierauf für die errechnete Meßlänge mit der Formel (109a) der Wert von φ_z gefunden werden, der dem Stoff, aus welchem der Stab besteht, zukommen würde, wenn $\frac{l}{\sqrt{F}} = 11,3$ wäre. Aus einer Versuchsreihe mit flußeisernen Rundstäben mit $d = 26$ mm fand Bach bei

$l = 50$	70	100	150	200	260	mm
$\varphi_z = 62$	$53,7$	$46,3$	$39,3$	$35,2$	$31,9$	

Setzt man in der Formel (109a) für $A = 8,3$ und 380 , so erhält man durch Berechnung nur ganz geringfügige Unterschiede in den Werten von φ_z .

Ein nennenswerter Einfluß der Probenform und der Meßlängen auf die Querschnittsverminderung ψ_z , die Zugfestigkeit K_z und die Fließ- und Proportionalitätsgrenze kommt nach Bauschinger nicht in Frage, solange die Stabköpfe nicht abändernd wirken. Dagegen fand Bach (L), daß die obere und untere Fließgrenze von der Querschnittsform abhängig ist. Er untersuchte Rund-, Flach- und Stäbe von I-Querschnitt aus ausgeglühtem Flußeisen bei Werten $\frac{l}{\sqrt{F}} = 11,3$ und fand in der Reihenfolge der Nennung kleiner werdende obere und untere Fließgrenzen. Der Unterschied war bei den oberen Fließgrenzen größer als bei den unteren und betrug bei kreisförmigem und I-Querschnitt 416 kg/cm^2 , d. i. 21,7% des kleineren der beiden Werte der oberen Streckgrenzen. Auch die Zugfestigkeiten nahmen für die genannten Querschnittsformen in dem angegebenen Sinne ab, aber in bei weitem geringerem Grade als die Streckgrenzen.

ad d) Diesbezüglich seien folgende reichhaltige Ergebnisse aus der diesbezüglichen Literatur ausgewählt. D. Kirkaldy (L) machte Versuche mit Rundstäben aus Schweißeisen, welche, abgesehen von den Stabköpfen, die in der Abb. 98 angegebenen Formen besaßen. Der Stab II zeigt einen sog. Rundkerb, eine ringförmige Einfassung in Stabmitte. Scharfe Kerben sind in der Abb. 98a in Beispielen dargestellt. Durch einen Kerb wird der reine Zugspannungszustand in der Ebene des Kerbs in einen dreidimensionalen mit drei positiven Hauptspannungen übergeführt. In Richtung des Zuges zeigen sich nach Messungen von Preuß (L) die größten Zugspannungen in den Kerbgründen a, a , gegen die Längsachse des Stabes zu fallen die Zugspannungen symmetrisch ab. Bei gleicher mittlerer Spannung $\frac{P}{d^2 \cdot \tau}$ im mittleren Kerbquer-

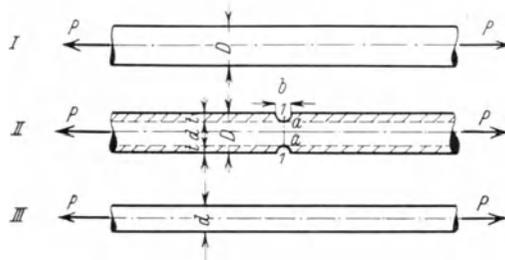


Abb. 98.

schnitte des Stabes wird der genannte Abfall der Zugspannungen um so augenfälliger, d. h. die Spannung im Kerbgrund verhältnismäßig um so höher, je größer die Kerbtiefe t , je kleiner der Abrundungsradius im Kerbgrund ist und je kleiner bei ähnlichen Kerben die Ausmaße sind.

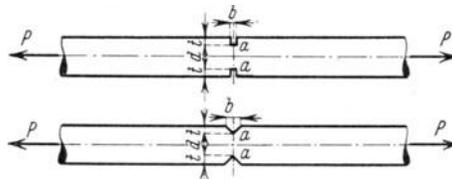


Abb. 98a.

Kirkaldy fand bei den Werten $D = 2,54 \text{ cm}$ und $d = 1,85 \text{ cm}$ in den dargestellten drei Fällen

	I	II	III	
die Zugfestigkeit K_z mit	4560 kg/cm^2	6420 kg/cm^2	4920 kg/cm^2	und
die Querschnittsverminderung ψ_z mit	51,0%	8,0%	49,2%	

entsprechend dem Gesetze, daß die Zugfestigkeit K_z um so geringer ist, je größer die Querschnittseinschnürung ψ_z war. Das Ergebnis bezüglich der Zugfestigkeiten für die Stäbe III und I steht nicht im Widerspruch mit den oben genannten Ergebnissen von Bauschinger, da es auf den Einfluß der Stabköpfe zurückzuführen ist, deren die Querschnittsverminderung hindernde Wirkung die Erhöhung der Zugfestigkeit bei Stab III bedingt. Die besondere Höhe der Zugfestigkeit für den Stab II wird in ähnlicher Weise gewöhnlich dadurch erklärt, daß man sagt, die am Stab II schraffierten Teile des Stabes hindern durch Übertragung von Zugspannungen auf den mittleren Teil desselben die Ausführung der Dehnungen in Richtung des Zuges, wodurch die technische Zugfestigkeit K_z erhöht wird. Diese Erklärung ist unbefriedigend, weil die technische Zugfestigkeit eine konstruierte physikalische Größe ist, die aus Gründen der Einfachheit eingeführt wurde, den wahren Verhältnissen aber nicht gerecht wird. Tatsächlich ergaben systematische Versuche von Ludwik und Scheu (L) mit gekerbten Rundstäben aus Flußeisen, daß zwar die mittlere und effektive Dehnung in der Zugrichtung (letztere kann natürlich auch nur eine mittlere sein, wenn sie auch in der Umgebung des Querschnittes I, I gemessen oder aus der Querschnittsverminderung unter der

Annahme der Konstanz des Volumens, das zwischen nahe liegenden Querschnitten des Stabes liegt, berechnet wurde) abnimmt, und zwar erstere mehr als letztere, daß aber auch die effektive mittlere Zugspannung (Reißwiderstand, Seite 164) beim Bruch, d. h. die Zugspannung bezogen auf den wahren Querschnitt im Augenblicke des Bruches dieselbe bleibt. Im engsten Sinne des Wortes ist diese Zugspannung freilich auch keine effektive, da sie sich nicht gleichförmig über den Querschnitt verteilt. Eine vollkommen einwandfreie Erklärung des Einflusses von Kerben auf das Ergebnis von Zugversuchen könnte nur unter Berücksichtigung des nach Preuß auftretenden dreidimensionalen Spannungszustandes dann gegeben werden, wenn die Frage nach der den Bruch bedingenden physikalischen Größe (Seite 179ff.) befriedigend beantwortet werden könnte. Wäre z. B. das Maß der Bruchgefahr in der größten auftretenden Dehnung zu suchen, wogegen die Versuche von Ludwik-Scheu zu sprechen scheinen, so müßten die wahren Dehnungen im Augenblicke des Bruches an der Stelle, wo der Bruch beginnt, für gekerbte und nicht gekerbte Stäbe gleich sein. Diesbezügliche Messungen konnten aber bisher nicht durchgeführt werden.

Auch bei der Druckbeanspruchung, wenigstens durchschnittlich isotroper und homogener Stoffe gilt das Ähnlichkeitsgesetz in einer Form, die der oben für die Zugbeanspruchung ausgesprochenen entspricht.

Als Normalprobenformen für den Druckversuch werden gerade Prismen, Zylinder, in der Regel aber Würfel verwendet, deren Ausmaße von dem Stoffe, der untersucht, und von dem Zwecke, der erreicht werden soll, von behördlichen Vorschriften und von dem Kraftbereich der zur Verfügung stehenden Festigkeitsmaschine abhängig sind. Handelt es sich z. B. nur um die Bestimmung der Quetschgrenze oder der Druckfestigkeit für wenigstens durchschnittlich homogene und isotrope Stoffe, so kann man sich mit kleineren Formen begnügen (für Metalle 2 bis 3 cm Würfelkantenlänge), wenn nicht von seiten der Behörden für die Kantenlänge der Würfel Vorschriften gemacht worden sind, wie z. B. für die Bestimmung der Druckfestigkeit von unter Zuhilfenahme von Normalsand hergestelltem Zementmörtel (Würfelkantenlänge von 7,07 cm entsprechend der Druckfläche von 50 cm²). Für nicht homogene Stoffe, wie z. B. Beton und Holz, sind Würfel von 20/20 cm bzw. 10/10 cm gebräuchlich oder staatlich vorge-schrieben. Für diese Stoffe müssen die Würfel stets von gleicher Größe und die Zahl der Versuche eine sehr große sein, um vergleichbare Ergebnisse und brauchbare Mittelwerte zu erhalten, da für sie das Ähnlichkeitsgesetz nicht gilt und ihr physikalischer Aufbau starken Schwankungen unterworfen ist. Außerdem kommt für Beton bestimmter Zusammensetzung die Stampfrichtung und die Erhärtungsdauer, für Holz bestimmter Art die Druckrichtung mit Bezug auf die Faserrichtung und den Verlauf der Jahresringe, ferner der Anteil des Kernholzes und Ringholzes usw. für die Ergebnisse des Druckversuches in Betracht.

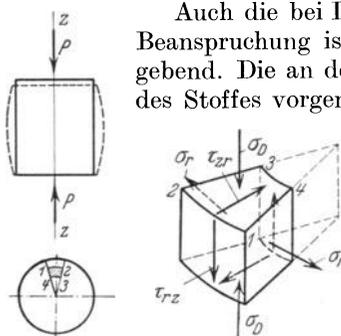


Abb. 99.

Auch die bei Druckbeanspruchung tatsächlich auftretende innere Beanspruchung ist für die Wahl der Ausmaße der Probeform maßgebend. Die an der Druckplatte der Maschine, in der die Erprobung des Stoffes vorgenommen wird, auftretende Reibung verursacht die Änderung des durch die Druckkraft allein bewirkten linearen Spannungszustandes in einen mehrdimensionalen. Für ein Raumelement eines Kreiszylinders (Abb. 99) aus Flußeisen, der sich bekanntlich infolge der Reibung tonnenförmig ausbaucht, ist der Spannungszustand für ein Prisma, dessen Projektion auf die Basis des Zylinders durch 1 2 3 4 gegeben ist, in der Nähe der Druckplatten der dargestellte, mit Tangentialspannungen normal zum Radius σ_r , Druckspannungen parallel zur Achse des Zylinders σ_D und Schubspannungen τ_{rz} . Je höher der Zylinder im Vergleich zu den Querausmaßen ist, um so eher kann eine Meß-

länge auf dem Zylinder abgegrenzt werden, innerhalb welcher der reine Druckspannungszustand sehr angenähert verwirklicht ist. Andererseits ist aber die Höhe bei gegebenen gedachten Querausmaßen wieder begrenzt, weil sonst Knickgefahr eintritt und beim Ausknicken Biegungsspannungen auftreten (siehe Abb. 43c, Seite 142). Wäre der reine Druckspannungszustand vollkommen zu verwirklichen (näherungsweise kann das durch Anwendung von Schmiermitteln geschehen, wobei aber bei Wahl derselben auf vielleicht eintretende Sprengwirkungen Bedacht zu nehmen ist), so erhielte man aus dem Druckversuch die wahre Druckfestigkeit, wahre Quetschgrenze usw. Bei den in gewöhnlicher Art mit Reibung durchgeführten Druckversuchen wird jedenfalls nur eine scheinbare Druckfestigkeit, scheinbare Quetschgrenze erhoben (siehe S. 165) usw.

Als Gütegrößen für den Druckversuch kommt die Druckfestigkeit K_D bei spröden Körpern, die Quetschgrenze bei plastischen zähen Metallen, ferner die Bruchquetschung δ_D bzw. die Quetschung δ_D^F beim Erreichen der Streckgrenze in Betracht.

Bezüglich der auf Seite 231 namhaft gemachten Einflüsse auf die bei einem Druckversuch gefolgerten Gütegrößen des Stoffes sind die unter a) und b) als Einfluß der Einspannung des Stabkopfes und der Meßlänge erwähnten teilweise oben bei Besprechung der Wahl der Probeform erörtert worden. Die Druckflächen treten jetzt in gewissem Sinne an Stelle der Stabköpfe im Zugversuch, die Reibung an den Druckflächen tritt an Stelle der Einspannung der Stabköpfe. In weiterer Verfolgung handelt es sich um eine genauere Festlegung der miteinander verquickten Einflüsse der Reibung, der Ausmaße der prismatisch oder zylindrisch gedachten Probe und der Form des Querschnittes auf die scheinbare Druckfestigkeit bzw. Quetschgrenze. Nur mit Bezug auf K_D liegen systematische Untersuchungen unter anderen von Bauschinger vor (L), der die Ergebnisse von Vicat (L) auch für seine eigenen Untersuchungen mit heranzog. Bauschinger fand, daß für gerade Prismen (Würfel und Kreiszyylinder eingeschlossen) aus sprödem Gesteinsmaterial bei ähnlichen Querschnittsformen und solange $\frac{1}{l} \geq \frac{1}{5}$ die scheinbare Druckfestigkeit aus

$$K_D = \alpha + \beta \frac{1}{l} \sqrt{F} \quad (110)$$

ableitbar ist, worin α, β Stoffkonstante, F die Querschnittsfläche der Probe und l die Probenlänge bedeuten. Für die genannten Proben mit unähnlichen Querschnitten fand Bauschinger unter der gleichen Bedingung für die Werte $\frac{1}{l} \sqrt{F}$, daß die Erfahrungsformel

$$K_D = \left(\alpha + \beta \frac{1}{l} \sqrt{F} \right) \sqrt{\frac{1}{u} \frac{F}{4}} \quad (110a)$$

mit u als Querschnittsumfang die tatsächlichen Verhältnisse für die untersuchten Stoffe gut trifft. Aus (110a) erhält man für ähnliche Querschnitte die Formel (110). Für Würfel mit beliebiger Kantenlänge a ergibt sich mit $u = 4a$, $F = a^2$, $l = a$ der Wert $K_D = \alpha + \beta$, wie es dem Ähnlichkeitsgesetz entspricht. Versuche, die mit Würfeln verschiedener Kantenlänge aus dem gleichen Stoffe gemacht wurden, ergaben tatsächlich die gleichen Druckfestigkeiten, die als Würfeldruckfestigkeiten bezeichnet werden. Sind in Tabellenwerken keine näheren Angaben über die Art der Probenform bei Erhebung der Druckfestigkeit gemacht, so ist

in der Regel die Würfeldruckfestigkeit gemeint. Um ein Bild über die bei verschiedenen Längen und gegebener Querschnittsform eines Prismas vorhandenen Werte der Druckfestigkeit zu bekommen, seien drei Versuchsergebnisse von Bauschinger mit Prismen von quadratischer Querschnittsform (Quadratseite a) aus sehr feinem graublauen Schweizer Sandstein mitgeteilt. Es ergaben sich für

$$\frac{a}{l} = 0,35 \quad 1,02 \quad 3,36,$$

die Druckfestigkeiten in kg/cm^2 .

$$K_D = 444 \quad 602 \quad 1540.$$

Berechnet man die Druckfestigkeiten mit Formel (110) bei Wahl von $\alpha = 262$, $\beta = 320$, so erhält man

$$K'_D = 374, \quad 588, \quad 1332.$$

Versuche von Martens (L) mit Gußeisen bestätigten die Formeln von Bauschinger nicht vollkommen. Es scheint, daß für diesen Stoff α und β noch weiter von der Querschnittsform, wenn auch in geringem Maße abhängig sind.

Das Wachsen der scheinbaren Druckfestigkeit bei Abnehmen der Länge der Probe unter sonst gleichen Verhältnissen hängt nicht nur mit der Vergrößerung des Reibungseinflusses, sondern auch damit zusammen, daß bei abnehmender Höhe die Spannung, bei der der labile Gleichgewichtszustand erreicht wird, an Größe zunimmt (siehe S. 194 u. S. 350ff.). Bei kurzen Proben fällt dieser kritische Wert der Spannung nicht in den Bereich bis zur Bruchgrenze.

4. Beanspruchung auf ebene schiefe Biegung und Schub.

a) Spannungszustand. Zur Berechnung des Spannungszustandes eines geraden Stabes (Balkens), der auf ebene schiefe Biegung und Schub (siehe z. B. Abb. 90, Seite 224) beansprucht ist, werden folgende Annahmen gemacht.

1. Der Stoff, aus welchem der beanspruchte Stab besteht, folgt dem Hooke'schen Gesetz und die Verschiebungen der einzelnen Punkte des Stabes mit Bezug auf ein Koordinatensystem xyz sind ebenso wie die Verzerrungen eines unendlich kleinen Prismas sehr klein.

2. Für ein sehr kleines Prisma, von welchem ein Flächenelement in eine Querschnittsfläche fällt, mit Kanten parallel zu den Achsen des Systemes xyz besteht der Spannungszustand $X_x, Y_x = X_y, Z_x = X_z$ nach Abb. 6b, Seite 19.

3. Die Flächenelemente einer Querschnittsfläche des Stabes sollen auch nach der Verformung desselben in einer Ebene liegen, ohne Rücksicht darauf, ob Schubspannungen vorhanden sind oder in Sonderfällen verschwinden. Diese Annahme wurde, allerdings nur bei reiner Biegebbeanspruchung, zuerst von J. Bernouilli (1670) gemacht und wird nach ihm auch benannt.

In der älteren von J. Bernouilli und L. Euler, Coulomb und Navier begründeten Biegebentheorie wurden nur die als Biegebungsspannungen bezeichneten Spannungen X_x normal zu den Querschnittsflächen eingeführt. Das kann nur richtig sein unter der Voraussetzung, daß reine ebene Biegung, z. B. nach Abb. 93, Seite 225 (in dem Teile, der zwischen den Auflagern liegt) vorliegt, der in den einzelnen Querschnitten zwar Biegebungsmomente, aber keine Querkräfte entsprechen. Sind letztere vorhanden, so müssen in den Querschnitten auch Schubspannungen Y_x, Z_x übertragen werden, da sonst ein Gleichgewicht eines Balkenteiles von endlicher Länge, z. B. des in Abb. 90 schraf-

fierten, der durch einen Querschnitt und die rechte Endfläche des Balkens begrenzt wird, nicht möglich wäre. (Siehe hierzu auch Seite 50, wo ein Fall behandelt wird, in dem es sich um gerade Biegung und Schub handelt.)

Eine befriedigende Theorie zur Berechnung der Schubspannungskomponenten gaben De Saint Venant und Clebsch, während eine näherungsweise Erfassung derselben für besondere in der Technik sehr oft vorkommende Querschnittsformen auf Rankine (L) und Grashof (L) zurückführt.

Denken wir uns zwei benachbarte Querschnittsebenen $ABCD$ und $EFGH$ des Stabes, die nicht gerade rechteckige Umrahmungen, wie in Abb. 100 angenommen, zu haben brauchen.

Bei der Verformung des Stabes, für welche der Querschnitt $ABCD$ festgehalten gedacht wird (in Wirklichkeit verdreht er sich um sehr wenig und gleichzeitig ändern sich die Koordinaten x, y, z , welche seine einzelnen Punkte ursprünglich festlegten, gleichfalls um sehr wenig, derart, daß sie zufolge Annahme 3 nach der Verformung des Stabes wieder in einer Ebene liegen), verdreht sich der eben bleibende Querschnitt $EFGH$ gegenüber dem ersteren. Die

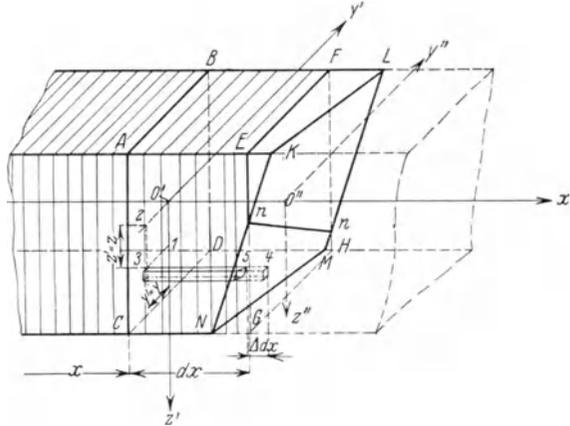


Abb. 100.

verdrehte Querschnittsebene schneidet den ursprünglichen Stabmantel in $NMKL$ und die ursprüngliche Querschnittsebene $EFGH$ in einer Geraden nn . Dem durch die Koordinaten x, y, z festgelegten Flächenelement 3 des Querschnittes $ABCD$ entspricht das zur Stabachse parallele Faserelement 3, 4 von der Länge dx , das bei der Verformung des Stabes um das Stück 4, 5 = Δdx verkürzt wird. Faserelemente, die der Schnittlinie nn entsprechen, erleiden weder eine Verkürzung noch eine Verlängerung, daher auch keine Spannung X_x , dagegen erfahren Faserelemente, welche oberhalb nn liegen, eine Verlängerung. Allgemein ist die Dehnung $e_{x,x}$ auf Grund der Annahme 1

$$\frac{\Delta dx}{dx} = e_{x,x} = \frac{X_x}{E}, \quad (a)$$

und zufolge der Annahme 3 kann dieselbe nur eine lineare Funktion von y, z sein, d. h.

$$e_{x,x} = a + by + cz = \frac{X_x}{E}. \quad (b)$$

Die Beziehung (b) sagt auch aus, daß die Spannung X_x eine lineare Funktion von y, z sein muß. Die hierdurch festgelegte Verteilung der Biegungsspannungen X_x über den Querschnitt wird kurz als Geradliniengesetz bezeichnet.

Zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für einen Balkenteil, z. B. für den in Abb. 100 nach links sich erstreckenden abgebrochen dargestellten schraffierten Teil, der durch Führung eines Schnittes $EFGH$ vom Stab abgeschnitten gedacht ist (in Abb. 90 z. B. der nicht schraffierte Balkenteil, der unter dem Einflusse eines Einspannungsmomentes und einer Auflagerkraft steht), können wir zufolge der Annahme sehr kleiner Verschiebungen jene Lage ins Auge fassen, welche der Stab vor der Verformung besitzt. Die am Stabteil

angreifenden Kräfte sind bei Vernachlässigung des Eigengewichtes des Stabes die gegebenen äußeren Oberflächen- und Stützkräfte, ferner die im Querschnitt $EF GH$ übertragenen, den Spannungen X_x, Y_x, Z_x entsprechenden Kräfte. Da die äußeren Kräfte normal zur Stabachse und sie schneidend sein sollen, fordert das Gleichgewicht in der x -Richtung

$$\int_F X_x df = E \int_F (a + b y + c z) df = 0, \quad (c)$$

worin die Integrale über die Querschnittsfläche F mit den Flächenelementen df zu nehmen sind. Es folgt, da die statischen Momente der Querschnittsfläche $\int_F y df$ und $\int_F z df$ mit Bezug auf die in ihr liegenden Schwerachsen z' und y' verschwinden, $aEF = 0$, d. h. $a = 0$. Dieses erste Ergebnis besagt mit Hinblick auf die Gleichung (b), daß die Schnittlinie nn durch O'' d. h. durch den Schwerpunkt des Querschnittes $EF GH$ gehen muß. Die Lage nn wurde in Abb. 100 mit Absicht von vornherein unrichtig eingetragen. Man nennt nn die Nulllinie des Querschnittes, da in ihr die Spannungen X_x verschwinden. Sie trennt das Gebiet der positiven und negativen Biegungsspannungen X_x von einander.

Das Gleichgewicht des abgetrennten Balkenteiles mit Bezug auf Verdrehung um die durch O'' parallel zur y -Achse gelegte Achse y'' verlangt

$$M_{By} = \int_F X_x z df = E \int_F (b y + c z) z df = c E \int_F z^2 df = c E J_y, \quad (d)$$

wobei die Integrale wieder über die Querschnittsfläche ausgedehnt sind und zu bedenken ist, daß bei dem gewählten Koordinatensystem xyz bzw. dem ihm parallelen System $xy''z''$ als Hauptzentralsystem (Seite 222) das Abweichungsmoment $\int_F y z df$ verschwindet, M_{By} das Biegemoment aller links vom Schnitt $EF GH$ am Stabe angreifenden Kräfte bezogen auf die y'' -Achse und J_y das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche mit Bezug auf dieselbe Achse bedeuten. Aus (d) folgt $c = \frac{M_{By}}{E J_y}$.

Das Gleichgewicht des abgetrennten Stabeteiles gegen Verdrehung um die durch O'' parallel zur z -Achse gelegte Achse z'' hat das Bestehen der Bedingung

$$M_{Bz} = - \int_F X_x y df = - b E \int_F y^2 df = - b E J_z \quad (d')$$

zur Voraussetzung mit J_z bzw. M_{Bz} als Trägheitsmoment der Querschnittsfläche bzw. Biegemoment aller links vom Schnitt $EF GH$ am Stabe angreifenden Kräfte mit Bezug auf die Achse z'' . Daraus ergibt sich $b = - \frac{M_{Bz}}{E J_z}$. Führt man die erhaltenen Werte b und c bei Nullsetzen von a in die Beziehung (b) ein, so erhält man

$$X_x = \frac{M_{By}}{J_y} z - \frac{M_{Bz}}{J_z} y. \quad (111)$$

Die Biegungsspannungen X_x sind nach Gleichung (111) eine Folge der Existenz der Biegemomente M_{By} und M_{Bz} und verschwinden mit denselben, ferner können sie aus zwei Biegungsspannungen

$$X'_x = \frac{M_{By}}{J_y} z, \quad X''_x = - \frac{M_{Bz}}{J_z} y \quad (111a)$$

zusammengesetzt gedacht werden, von welchen die erste einer geraden Biegung in der Ebene xz mit M_{By} als wirkendem Moment und $z = 0$ als Gleichung der

Nulllinie, die zweite einer geraden Biegung in der Ebene xy mit M_{Bz} als wirkendem Biegemoment und $y = 0$ als Gleichung der Nulllinie entspricht. Die komponentalen Spannungen X'_x und X''_x sind bei gegebenem Biegemoment und gegebener Querschnittsfläche proportional der Entfernung z bzw. y von der zugehörigen Nulllinie.

Die Gleichung der Nulllinie, in der die Biegunsspannungen X_x verschwinden müssen, wird zufolge (111)

$$\frac{M_{By}}{J_y} z = \frac{M_{Bz}}{J_z} y. \quad (112)$$

Die Gleichungen (111) und (112) können noch in einfacherer Weise geschrieben werden. Es sei α (Abb. 101) der mit Bezug auf das System $xy'z'$ im positiven Sinne gezählte Winkel, den die Schnittlinie der Kraftebene mit der Querschnittsfläche (Kraftlinie KL genannt) mit der y' -Achse einschließt (siehe auch Abb. 90, S. 224). Der Momentenvektor \mathfrak{M} , der normal zur Kraftebene steht und nach jener Seite der Ebene gerichtet ist, von der aus gesehen das Moment im Uhrzeigersinne dreht, stellt die Resultante der Vektoren \mathfrak{M}_{By} und \mathfrak{M}_{Bz} , d. i. der komponentalen Biegemomente vor, deren Größen in Gleichung (111) eingeführt wurden. Bei Beachtung des positiven Drehungssinnes der Biegemomente M_{By} und M_{Bz} können wir

$$M_{Bz} = M_B \cos \alpha, \quad M_{By} = -M_B \sin \alpha \quad (e)$$

setzen, wenn für M_B die folgende Zeichenregel gilt: Drehen wir das $xy'z'$ -System um die x -Achse im Sinne der Zunahme des Winkels α , bis die y' -Achse in die Kraftebene fällt, so ist M_B positiv, wenn sein Vektor entgegengesetzt der positiven Richtung der verdrehten z' -Achse gerichtet ist. In der Abb. 101, in der die positive x -Achse gegen den Beschauer gerichtet gedacht ist, ist M_B positiv. Daher kann die Gleichung der Nulllinie (112) auch die Form

$$z = -\cotg \alpha \frac{J_y}{J_z} y = y \tg \varphi \quad (f)$$

mit $\tg \varphi = -\cotg \alpha \frac{J_y}{J_z}$ annehmen, aus der hervortritt, daß die Nulllinien für sämtliche Querschnitte zueinander parallel sein müssen. Wenn $J_y = J_z$, wie das z. B. für quadratische oder Kreisquerschnitte zutrifft, so lautet die Gleichung der Nulllinie $z = -y \cotg \alpha$. Daraus ist zu schließen, daß in diesem Sonderfalle die Nulllinie normal, sonst aber schief mit der Richtungstangente $\tg \varphi$ zur Kraftebene oder Kraftlinie gerichtet ist.

Wir legen nunmehr ein neues Koordinatensystem xuv zugrunde, das aus dem System xyz durch Drehung um die x -Achse um den Winkel φ erhalten wird. Ein Flächenelement des Querschnittes hat mit Bezug auf dieses System die Koordinaten x, u, v , die mit dessen x, y, z -Koordinaten durch die Transformationsgleichungen

$$x = x, \quad y = y' = u \cos \varphi - v \sin \varphi, \quad z = z' = u \sin \varphi + v \cos \varphi$$

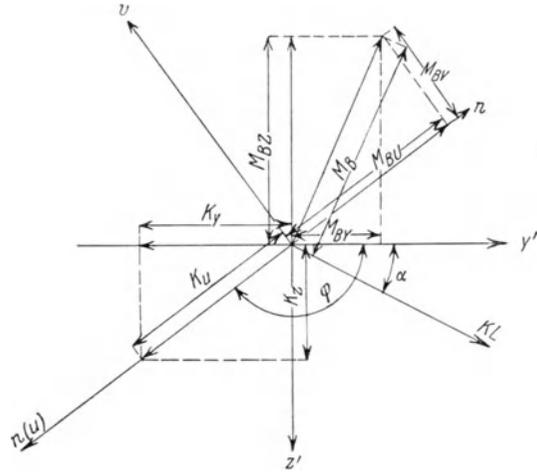


Abb. 101.

verknüpft sind. Das Trägheitsmoment J_u der Querschnittsfläche mit Bezug auf die u -Achse hängt mit den Trägheitsmomenten J_y und J_z durch die bekannte Gleichung

$$J_u = J_y \cos^2 \varphi + J_z \sin^2 \varphi \quad (g)$$

zusammen. Die Größe der Komponente des Biegemomentes \mathfrak{M}_B in der Richtung der u -Achse, die eine Wirkungsebene normal zur u -Achse besitzt, sei mit M_{Bu} bezeichnet. Sie ist durch

$$M_{Bu} = M_B \sin(\varphi - \alpha) = M_B (\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha) \quad (h)$$

bestimmt. Die Werte von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ sind durch

$$\sin \varphi = \frac{J_y \cos \alpha}{\sqrt{J_z^2 \sin^2 \alpha + J_y^2 \cos^2 \alpha}}, \quad \cos \varphi = - \frac{J_z \sin \alpha}{\sqrt{J_z^2 \sin^2 \alpha + J_y^2 \cos^2 \alpha}} \quad (i)$$

ausdrückbar. Ersetzen wir in der Gleichung (111) y, z durch die Koordinaten u, v aus den obigen Transformationsgleichungen, führen in die so umgewandelte Gleichung die Werte $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ aus (i) ein, so erhalten wir eine Gleichung, welche bei Vergleich der in ihr vorkommenden Größen mit den durch Ersatz von φ unter Zuhilfenahme von (i) abgeänderten Werten von J_u in (g) und M_{Bu} in (h) und Beachtung der Beziehungen (e) die einfache Form

$$X_x = \frac{M_{Bu}}{J_u} v \quad (113)$$

annimmt. M_{Bu} wird positiv gerechnet, wenn es mit Bezug auf die u -Achse in einem Sinne dreht, der entgegengesetzt dem positiven Drehungssinne ist der, von der v - in die x -Achse führt. Nach Gleichung (113) sind die Biegungsspannungen bei gegebenem Stabquerschnitt und Biegemoment M_{Bu} proportional der Entfernung v der betreffenden Flächenelemente von der Nullinie.

Die Gleichung (113) kann dazu dienen, um die in einem Querschnitt vorkommenden größten Zug- und Druckspannungen zu erhalten. Man braucht zu diesem Behufe nur parallel zur Nullinie zwei Tangenten an den Querschnitt zu ziehen, deren Beruhungspunkte den Flächenelementen entsprechen, denen die größte Zug- bzw. Druckspannung zukommt. Die Normalabstande der genannten Beruhungspunkte von der u -Achse sind mit Berücksichtigung ihres Zeichens in der Gleichung (113) für v einzusetzen, wenn man die denkbar größten Werte X_x in einem Querschnitt bekommen will. In Abb. 102 sind die beiden Tangenten parallel zur u -Achse mit t_a und t_b und deren Normalabstande von der u -Achse mit v_a und v_b bezeichnet. Den Flächenelementen in A und B entsprechen die größten Spannungen im Querschnitt, welche $(X_x)_{\max}$ und $(X_x)_{\min}$ heißen sollen, $(X_x)_{\max}$ ist eine Zug-, $(X_x)_{\min}$ eine Druckspannung. Offenbar ist

$$(X_x)_{\max} = \frac{M_{Bu}}{J_u} v_a, \quad (X_x)_{\min} = \frac{M_{Bu}}{J_u} v_b. \quad (113a)$$

$\frac{J_u}{|v_a|} = W_{ua}$ und $\frac{J_u}{|v_b|} = W_{ub}$ heißen die Widerstandsmomente des Querschnittes mit Bezug auf die u -Achse.

ähnliches gilt auch für die Ermittlung der größten Zug- und Druckspannungen der komponentalen Biegungsspannungen X'_x, X''_x für einen gegebenen Querschnitt. Setzt man $\frac{J_y}{|z_a|} = W_{ya}, \frac{J_y}{|z_b|} = W_{yb}$ und $\frac{J_z}{|y_a|} = W_{za}, \frac{J_z}{|y_b|} = W_{zb}$ mit z_a und z_b

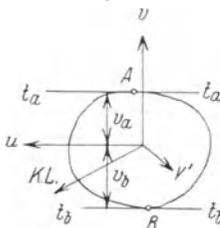


Abb. 102.

als Entfernungen der am weitesten von der y -Achse abstehenden Flächenelemente und mit y_a und y_b als Entfernungen der am weitesten von der z -Achse abstehenden Flächenelemente, so kann man jetzt

$$(X'_x)_{\max} = \pm \frac{M_{By}}{W_{yab}} = \frac{M_{By}}{J_y} z_{ab} \quad (111b)$$

und

$$(X''_x)_{\max} = \pm \frac{M_{Bz}}{W_{zab}} = - \frac{M_{Bz}}{J_z} y_{ab} \quad (111c)$$

schreiben. W_{ya}, W_{yb} bzw. W_{za}, W_{zb} heißen die Widerstandsmomente der Querschnittsfläche mit Bezug auf die y - bzw. z -Achse.

Die größten Werte von X_x, X'_x, X''_x im ganzen Bereiche des Stabes treten in jenem Querschnitt, in dem M_{Bu}, M_{By}, M_{Bz} Größtwerte erlangen, auf, und zwar in jenen Flächenelementen, welche am weitesten von der u, y, z -Achse abstehen. Jener Querschnitt heißt deswegen der gefährliche Querschnitt.

Es sei für einen rechteckigen Querschnitt mit den Seiten $h = 28$ cm, $b = 20$ cm der Winkel $\alpha = 45^\circ$ (Abb. 102a). Daher wird

$$\operatorname{tg} \varphi = - \operatorname{cotg} \alpha \frac{J_u}{J_z} = - \frac{h^2}{b^2} = - 1,96,$$

was nahezu einem Winkel $\varphi = 117^\circ$ entspricht. Ferner ist nach (g)

$$J_u = \frac{1}{12} b h^3 0,206 + \frac{1}{12} h b^3 0,794 = 22\,358,18 \text{ cm}^4.$$

Das Biegemoment M_{Bu} ergibt sich nach (h) mit $M_{Bu} = 0,95 M_B$. Die beiden dem Zahlenwerte nach einander gleich großen Abstände der für die größten Zug- (Druck-) Spannungen in Betracht kommenden Punkte A und B von der Nulllinie werden, wie man sich leicht überzeugt, $v_{ab} = \pm 15,26$ cm, so daß

$$(X_x)_{\max} = \pm 0,000649 M_B \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

wobei M_B in cmkg gegeben gedacht ist. In Abb. 102 a, in der die positive x -Achse gegen den Beschauer gerichtet ist, entsteht in A die größte positive Zugspannung, wenn M_{Bu} positiv ist. In derartig einfachen Fällen wie in dem vorliegenden kommt man übrigens kürzer zum Ziele, wenn man direkt von der Formel (111) ausgeht. Man erhält aus ihr, wenn man für $z = \pm \frac{h}{2}$ und

für $y = \pm \frac{b}{2}$ einsetzt, ferner die Gleichungen (c) benützt, unmittelbar die größten Werte der Biegespannungen mit

$$(X_x)_{\max} = \pm \left[\frac{M_B \sin \alpha}{\frac{1}{12} b h^3} \cdot \frac{h}{2} + \frac{M_B \cos \alpha}{\frac{1}{12} h b^3} \cdot \frac{b}{2} \right] = \pm \frac{6 M_B}{b^2 h^2} (b \sin \alpha + h \cos \alpha) = \pm \frac{6 M_B}{b^2 h^2} d, \quad (114)$$

worin d die Projektion der Strecke AB auf die Kraftlinie KL vorstellt. Durch Einsetzen der Werte für b, h und d ergibt sich wieder der bereits gefundene Wert für die größte Zug- bzw. Druckspannung.

Wir wenden uns jetzt zur Berechnung der Schubspannungen Y_x, Z_x . Dieselben müssen die Gleichgewichtsbedingungen (20), (21) auf den Seiten 48, 49 und die Oberflächenbedingungen (24) auf Seite 53 befriedigen. Für das unendlich kleine Prisma (3, 4) in Abb. 100 oder Abb. 103, in der ein unendlich kleines Stabstück von der Länge dx bei beliebigem Querschnitt dargestellt ist, lauten

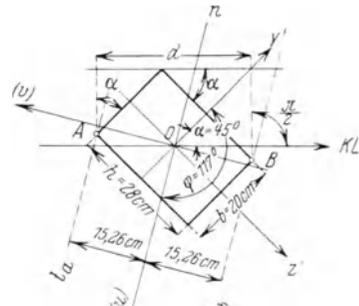


Abb. 102a.

die Spannungsgleichungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Z_x}{\partial x} = 0. \quad (k)$$

Da nach (111) $\frac{\partial X_x}{\partial x} = \frac{dM_{By}}{dx} \cdot \frac{z}{J_y} - \frac{dM_{Bz}}{dx} \cdot \frac{y}{J_z}$ ist, und weil $\frac{dM_{By}}{dx} = Q_z$ bzw. $\frac{dM_{Bz}}{dx} = -Q_y$ mit Q_z und Q_y als Querkraftskomponenten (das negative Zeichen

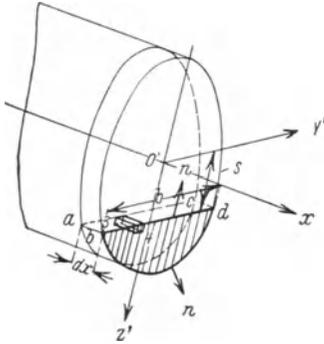


Abb. 103.

bei Q_y rührt davon her, daß auf Grund der Zeichenregel auf Seite 222 bei positivem Q_y das Biegemoment M_{Bz} abnimmt), geht die erste der Gleichungen (k) in

$$\frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = -Q_z \frac{z}{J_y} - Q_y \frac{y}{J_z} \quad (k')$$

über. Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Flächenelement $dy dz = df$ der Querschnittsfläche des unendlich kleinen Prismas 3, 4 und integrieren über die in Abb. 103 hervorgehobene Teilfläche f des Stabquerschnittes, welche durch eine zur y' -Achse im Abstand z' parallele Gerade von der Länge $b = \overline{db}$ und einen Teil der Berandung S des Stabquerschnittes begrenzt wird, so erhalten

wir, da $\int_f \frac{\partial X_y}{\partial y} dy dz = \int_B X_y \cos(ny) ds$ und $\int_f \frac{\partial X_z}{\partial z} dy dz = \int_B X_z \cos(nz) ds$,

wobei ds ein Element der Berandung B der Teilfläche des Stabquerschnittes, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ die Richtungskosinusse der normal zur Berandung und Stabachse nach außen gezogenen Geraden mit Bezug auf die y - und z -Achse bedeuten, und das Integral mit dem Argument ds über die genannte Berandung B zu nehmen ist,

$$\int_B [X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz)] ds = -\frac{Q_z}{J_y} \int_f z df - \frac{Q_y}{J_z} \int_f y df. \quad (l)$$

Auf Grund der für die Mantelfläche des Stabes zu erfüllenden Oberflächenbedingungen müssen die Gleichungen

$$p_x = X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \quad p_y = 0, \quad p_z = 0 \quad (m)$$

gelten. Ist die Stabmantelflache kraftfrei, so werden die zwei letzten Gleichungen befriedigt, und die erste derselben besagt, daß $X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz)$ für Flächenelemente der Stabquerschnittsflache, die an der Mantelfläche des Stabes liegen, verschwinden sollen. Da dieser Ausdruck aber offenbar den Wert der auf die Berandung normal stehenden Schubspannungskomponenten an der Stabmantelflache ist, so folgt, daß diese Komponente Null sein soll, d. h. die Schubspannungen am Rande nur tangentiell an die Randkurve sein können (S. 50).

In der Beziehung (l) verschwindet sonach das Integral auf der linken Seite, soweit es sich auf die Berandung des Querschnittes bezieht. Für die Begrenzungsstrecke b der Teilfläche ist $\cos(ny) = 0$ und $\cos(nz) = -1$. Die Gleichung (l) kann daher, wenn wir statt ds das Zeichen dy , ferner für $\int_f z df = S_{yb}$ und $\int_f y df = S_{zb}$ mit S_{yb} und S_{zb} als statischen Momenten des schraffierten Quer-

schnittsteiles mit Bezug auf die y - bzw. z -Achse setzen, auch kürzer in der Form

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} X_z dy = \frac{Q_z S_{yb}}{J_y} + \frac{Q_y S_{zb}}{J_z} \quad (115)$$

geschrieben werden. In dieser Beziehung bedeuten $X_z = Z_x$ die Schubspannungen parallel zur x -Achse, welche in Flächenelementen $dx dy$ der Fläche $abcd$ (Abb. 103) übertragen werden oder in diesen Flächenelementen zugeordneten Elementen $dy dz$, die der Strecke b in der Stabquerschnittsfläche anliegen. Dividieren wir bei Festhaltung der Annahme 3 auf Seite 236 die zuletzt erhaltene Gleichung durch b , so erhalten wir einen durchschnittlichen Wert \bar{X}_z der Schubspannung in der Entfernung $z' = z$ von der y' (y)-Achse, also

$$\bar{X}_z = \frac{Q_z S_{yb}}{b J_y} + \frac{Q_y S_{zb}}{b J_z}. \quad (116)$$

Eine (116) entsprechende Gleichung für den durchschnittlichen Wert \bar{X}_y der Schubspannung X_y auf einer $abcd$ entsprechenden, aber jetzt im Abstände y' von der z' -Achse liegenden zur Ebene xz parallelen Rechtecksfläche, deren zur z' -Achse parallele Seite die Länge a besitzt, ergibt sich in selbstverständlicher Weise mit

$$\bar{X}_y = \frac{Q_z S_{ya}}{a J_y} + \frac{Q_y S_{za}}{a J_z}, \quad (116a)$$

wobei jetzt S_{ya} und S_{za} die statischen Momente des Teiles der Querschnittsfläche mit Bezug auf die y' - bzw. z' -Achse bedeuten, die durch die Strecke a und eines Teiles der Berandung des Stabquerschnittes begrenzt sind.

Ist der Querschnitt symmetrisch mit Bezug auf die z' - bzw. y' -Achse, so tritt an Stelle der Gleichung (116)

$$\bar{X}_z = \frac{Q_z S_{yb}}{b J_y} \quad (116b)$$

und (116a) bleibt unverändert, bzw. an Stelle der Gleichung (116a)

$$\bar{X}_y = \frac{Q_y S_{za}}{a J_z} \quad (116c)$$

und (116) bleibt unverändert.

Ist die Querschnittsfläche sowohl symmetrisch mit Bezug auf die y' - als auch mit Bezug auf die z' -Achse, so gelten die Gleichungen (116b) und (116c).

Im allgemeinen entstehen die größten Schubspannungen \bar{X}_y bzw. \bar{X}_z in einem Querschnitt in der z' - bzw. y' -Achse. Die größten Werte der Schubspannungen im ganzen Bereiche des Stabes entstehen in einem Querschnitt, in dem Q_y und Q_z ihre größten Werte erlangen. Schließlich sei noch bemerkt, daß die letzten zwei der Gleichungen (k), dann, wenn die Mantelfläche des Stabes kräftefrei ist und die Querkraft sich nicht ändert, erfüllbar sind, was man ohne weiteres sieht, wenn man in ihnen die Schubspannungskomponenten auf Grund der Beziehungen (116) bis (116c) einführt.

Aus den Gleichungen (116) und (116a) schließen wir, daß die Schubspannungskomponenten für ein Flächenelement des Stabquerschnittes verschwinden, wenn die Querkräfte Null sind, daß sie ferner von der Querschnittsform abhängig und mit den Koordinaten y' bzw. z' veränderlich sind. Es folgt weiter, daß die Querschnitte sich krümmen müssen, denn nur dann, wenn alle zwischen aufeinander folgenden Querschnitten liegenden Raumelemente die gleichen Schie-

bungen, d. h. zufolge des Hookeschen Gesetzes die gleichen Schubspannungen erleiden, könnten die Querschnitte eben bleiben. Das ist ein Widerspruch zur Annahme 3 auf Seite 236, die, wie eine strengere Theorie zeigt, nur bei reiner Biegungsbeanspruchung gültig ist.

Der genannte Widerspruch zwischen den Annahmen und den berechneten Spannungen findet auch dadurch seinen Ausdruck, daß letztere zu auf Grund des Hookeschen Gesetzes berechenbaren Verzerrungskomponenten führen, die miteinander nicht verträglich sind (Seite 43 ff.), d. h. die den berechneten Spannungen entsprechend verformten Volumenelemente des Stabes lassen sich nicht zu einem kontinuierlichen Ganzen zusammenschließen.

Im Falle reiner Biegung könnte man den Stab entweder aus unendlich vielen voneinander unabhängigen zur Stabachse parallelen Fasern aufgebaut denken, oder könnte annehmen, daß die genannten Fasern miteinander fest verbunden sind, in beiden Fällen würde bei gegebenem äußeren Biegemoment der gleiche Biegungsspannungszustand eintreten, ohne daß Schubspannungen zwischen den Fasern entstehen.

Ferner muß darauf hingewiesen werden, daß selbst die vorstehenden Näherungsrechnungen voraussetzen, daß die Stabmantelfläche von Kräften frei ist und daß die an Endquerschnittsflächen des Stabes angreifend gedachten Kräfte oder Momente sich über dieselben so verteilen, wie es durch die Gleichungen (111) und (116), (116a) verlangt wird. Beide Bedingungen sind in praktischen Fällen nicht erfüllt. Die gefundenen Resultate gelten dann nur in jenen Bereichen des lang und dünn gedachten Stabes, die von Kraft- und Momentenangriffsstellen eine Entfernung haben, die im Vergleich zu den Querdimensionen des Stabes groß sind¹. Nichtdestoweniger werden die genannten Formeln auch für kontinuierlich über die Stablänge verteilte Belastungen (siehe Punkt 5) angewendet, wodurch man freilich nur zu einer Abschätzung der wirklichen Verhältnisse kommen kann. Für kurze dicke Stäbe sind die durchgeführten Annäherungsrechnungen im allgemeinen und ganz besonders jene für die Schubspannungen viel weniger richtig wie für lange dünne Stäbe. Andererseits kommen aber gerade für kurze dicke Stäbe in erster Linie die Schubspannungen, in zweiter Linie die Biegungsspannungen in Betracht, bei langen dünnen Stäben ist es gerade umgekehrt.

Denn denken wir uns z. B. einseitig eingespannte Stäbe von gegebenem Querschnitt und verschiedener Länge, welche an ihrem einen Ende durch eine normal zur Stabachse wirkende Kraft P auf ebene schiefe Biegung und Schub beansprucht sind (Abb. 90, S. 224), so ist für alle Querschnitte unabhängig von der Länge des Stabes die Querkraft $Q = P$, das größte Biegemoment im Einspannungsquerschnitt ist dagegen von der Länge der Stäbe abhängig, da es gleich Pl ist, wenn l die Länge der Stäbe bedeutet. Je kürzer bzw. länger der Stab gemacht wird, um so kleiner bzw. größer wird das Einspannungsmoment (und damit auch die übrigen Biegemomente), die Querkraft bleibt aber unverändert. Nachdem mit der letzteren die Schubspannungen, mit den Biegemomenten die Biegungsspannungen zusammenhängen, so ergibt sich die Richtigkeit der vorangestellten Behauptung.

Wenn es sich in der Praxis um Bestimmung der Ausmaße von langen dünnen Stäben handelt, die auf Biegung und Schub beansprucht sind, wie z. B. Traversen, nimmt man in der Regel nur Bedacht auf die Biegungsspannungen und vernachlässigt die Schubspannungen. Bei kurzen dicken Stäben, die in der angegebenen Weise beansprucht werden, z. B. bei Nieten, vernachlässigt man die Biegungsspannungen und zieht nur die Schubspannungen in Betracht. Berechnet man

¹ De Saint-Venantsches Prinzip, Seite 20ff.

aber dann die letzteren in der oben angegebenen Weise, so bekommt man freilich nicht mehr als einen Anhaltspunkt.

b) Deformationszustand. Die Verformung eines auf ebene schiefe Biegung und Schub beanspruchten Stabes wird als genügend genau beschrieben erachtet, wenn man die Verschiebung der Punkte der Stabachse bestimmt hat. Es wird sonach von einer Berechnung der Verschiebung aller übrigen Punkte von vornherein abgesehen. Dagegen ist nichts einzuwenden, solange es sich um lange dünne Stäbe handelt, für welche die Verformung der Stabachse tatsächlich ausschlaggebend für die Gestalt des Stabes ist. Anders ist es bei kurzen dicken Stäben, für welche die Verschiebungen aller Punkte wesentlichen Einfluß auf die Gestalt des verformten Stabes besitzen.

Zur Bestimmung der verformten Stabachse, die als elastische Linie des Stabes bezeichnet wird, sind zwei Grade der Annäherung üblich. In erster Annäherung wird auf die Biegungsspannungen allein Rücksicht genommen, die zweite Annäherung sucht auch den Einfluß der Schubspannungen auf den Verlauf der elastischen Linie zu berücksichtigen.

Zu den auf Seite 236 gemachten drei Annahmen treten die folgenden hinzu:

4. Die Querschnittsebenen stehen nach ihrer Verdrehung und Verschiebung normal zur elastischen Linie des Stabes.

5. Verschiebungen der Punkte der Stabachse werden nur insoweit berücksichtigt, als sie sich in Ebenen normal zur ursprünglichen Stabachse vollziehen.

Die Annahme 4. kann bei kleinen Verschiebungen dann als richtig angesehen werden, wenn es sich um reine Biegung eines Stabes handelt. In derartigen Fällen bleiben die Querschnitte tatsächlich eben, die zwischen zwei benachbarten Querschnittsebenen liegenden als Prismen gedachten Raumelemente erfahren, da Schubspannungen nicht vorhanden sein sollen, keine Winkeländerungen. Diese Prismen werden erhalten, indem wir uns den ganzen Stab durch drei Scharen unendlich nahe liegender Ebenen parallel zu den xu -, uv -, und vx -Ebenen geschnitten denken (Abb. 104). Die Ebene E geht nach der Verformung des Stabes in eine zylindrische Fläche über, die die aufeinanderfolgenden verdrehten Querschnitte in deren Nulllinien schneidet und die Kanten der Prismen, die vor der Verformung auf die Ebene E normal stehen, müssen nach der Verformung des Stabes auf jene Zylinderfläche normal stehen. Die verformte Stabachse ist der Schnitt der verformten Ebene E mit der xv -Ebene, die als Durchbiegungsebene bezeichnet wird, ist also eine ebene Kurve.

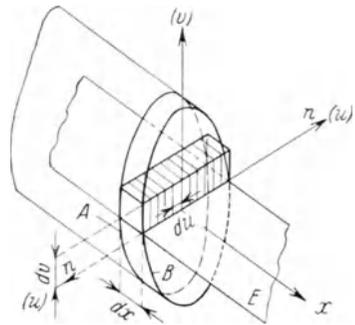


Abb. 104.

Erste Näherung zur Bestimmung der elastischen Linie. Gewöhnlich geht man zur näherungsweise Herleitung der Gleichung der elastischen Linie für ebene schiefe Biegung und Schub von den den komponentalen geraden Biegungsbeanspruchungen zugeordneten Biegungsspannungen X'_x und X''_x aus, denen die Biegemomente M_{By} bzw. M_{Bz} und komponentale elastische Linien entsprechen. Nachdem auf Grund des Hookeschen Gesetzes die Verzerrungs- und, wenn sie sehr klein sind, auch die Verschiebungskomponenten, welche Teilspannungszuständen entsprechen, übereinandergelagert werden können, ergibt die Zusammensetzung der komponentalen elastischen Linien die elastische Linie des auf schiefe Biegung und Schub beansprucht gedachten Stabes, oder was gleichbedeutend ist, die elastische Linie des Stabes projiziert auf die yx - und zx -Ebenen ergibt die komponentalen elastischen Linien.

Die Abb. 105 und 105a stellen für einen frei aufliegenden Balkenträger die ursprüngliche Stabachse und die unter dem Einfluß einer in der Mitte des Balkens aufgebracht, auf die Stabachse normalen Last Q durchgebogene Stabachse (elastische Linie) vor. Die Kraft Q wirke in der xz -Ebene des Balkens. Der Punkt A der ursprünglichen Stabachse wird, wenn Q vertikal gerichtet ist, zufolge Annahme 5. vertikal nach abwärts in die Lage A' um das Stück z verschoben. Die

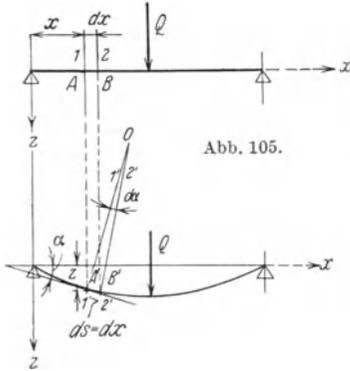


Abb. 105.

Abb. 105a.

Verschiebung z ist nicht zu verwechseln mit der oben eingeführten z -Koordinate eines Flächenelementes des Querschnittes, die wir im folgenden vorübergehend mit \bar{z} bezeichnen wollen. Der Querschnitt 1 durch A normal zur Stabachse geht zufolge Annahme 4. in den Querschnitt 1' normal zur elastischen Linie über. Das gleiche gilt von einem Querschnitt 2 durch den Punkt B , der den Abstand dx vom Querschnitt 1 haben soll, und bei der Verformung des Stabes in die Lage $2'$ entsprechend dem verschobenen Punkt B' kommt. Die beiden genannten Querschnitte schneiden sich in einer zur xz -Ebene normalen Geraden, die diese Ebene im Punkte O trifft, der der Krümmungsmittelpunkt der elastischen Linie für das Element $ds_y = A'B'$ ist. Wenn α der positiv im Sinne eines

positiven Biegemomentes M_{By} gezählte Winkel ist, den die Tangente im Punkte A' der elastischen Linie mit der x -Achse einschließt, so ist der Winkel $1', O, 2'$ mit $d\alpha$ als Kontingenzwinkel einzuführen, der sonach die relative Verdrehung der beiden unendlich benachbarten Querschnitte bei der Verformung des Stabes vorstellt. Nennen wir den Krümmungsradius im Punkte A' ρ_y und $\frac{1}{\rho_y} = K_y$ die Krümmung, so wird $\rho_y d\alpha = ds_y$. Der angehängte Zeiger y soll auf das Biegemoment M_{By} hindeuten. Wenn die Verschiebungen z unendlich klein wären, so würden sich ds_y und dx nur um eine Größe höherer Ordnung unterscheiden. Ist z sehr klein, so kann man näherungsweise $\rho_y d\alpha = dx$ und $\frac{d\alpha}{dx} = K_y = \frac{1}{\rho_y}$ setzen. K_y bzw. ρ_y haben das

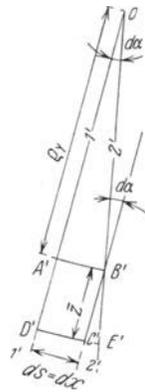


Abb. 106.

Zeichen von $\frac{d\alpha}{dx}$, wären sonach in dem angenommenen Falle negativ, da α mit x abnimmt. Für einen Punkt C' (Abb. 106) der Querschnittsfläche mit der Koordinate \bar{z} ist die Verlängerung (Verlängerung) $\Delta dx = C'E'$, welche das dem Punkte zugeordnete Faserelement $D'C' = A'B'$ bei der Verformung des Stabes erfahren hat, gleich $\Delta dx = -\bar{z} d\alpha = -\frac{M_{By} \bar{z}}{E J_y} dx$ zu setzen. Hierbei haben wir die erste der Gleichungen (111a) auf Seite 238 und das Hookesche Gesetz $X'_x = E \frac{\Delta dx}{dx}$ benützt. Demzufolge erhalten wir bei Einführung

der Krümmung K_y die Gleichung

$$K_y = -\frac{M_{By}}{E J_y}. \tag{n}$$

$E J_y$ heißt die Biegesteifigkeit in der Ebene xz ; je größer dieselbe ist, um so weniger biegt sich der Stab in der genannten Ebene unter sonst gleichen Umständen durch. Die Krümmung K_y können wir durch die bekannte Formel

$$K_y = - \frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \text{ und wenn wir bedenken, da\ss } \frac{dz}{dx} \text{ sehr klein ist, ann\ahernd}$$

durch $K_y = \frac{d^2 z}{dx^2}$ ersetzen. Damit geht die Gleichung (n) in

$$\frac{d\alpha}{dx} = K_y = \frac{d^2 z}{dx^2} = - \frac{M_{By}}{EJ_u} \tag{117}$$

als Differentialgleichung der elastischen Linie über. Das negative Zeichen würde in ein positives übergehen, wenn wir angenommen hätten, daß ein von links übertragenes Biegemoment positiv ist, wenn es entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers dreht.

Für eine Durchbiegung in der xy -Ebene bei Wirksamkeit von Biegemomenten M_{Bz} bekommen wir auf ähnliche Weise

$$\frac{d\beta}{dx} = -K_z = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_{Bz}}{EJ_z}, \tag{117a}$$

mit β als den im Sinne eines positiven Biegemomentes M_{Bz} positiv gezählten Winkel den eine Tangente der elastischen Linie mit der $+x$ -Achse einschließt und mit K_z als Krümmung in der xy -Ebene. EJ_z heißt Biegesteifigkeit für die Ebene xy . In den Gleichungen (117) und (117a) ist M_{Bz} bzw. M_{By} im allgemeinen als Funktion von x einzusetzen.

Führen wir in den Gleichungen (117) und (117a) für die Koordinaten y und z mit Hilfe der Transformationsgleichungen auf Seite 239 die Koordinaten v, u ein und benützen die Beziehung e auf derselben Seite mit M_B als aus den Biegemomenten M_{By} und M_{Bz} resultierendem Biegemoment, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} \sin \varphi + \frac{d^2 v}{dx^2} \cos \varphi &= \frac{M_B \sin \alpha}{EJ_y} = K_y, \\ \frac{d^2 u}{dx^2} \cos \varphi - \frac{d^2 v}{dx^2} \sin \varphi &= \frac{M_B \cos \alpha}{EJ_z} = -K_z. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\sin \varphi$, die zweite mit $\cos \varphi$ und subtrahieren die erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M_B}{E} \left[\frac{\sin \alpha \cos \varphi}{J_y} - \frac{\cos \alpha \sin \varphi}{J_z} \right] = K_y \cos \varphi + K_z \sin \varphi = K_u.$$

Durch Einführung von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ aus den Gleichungen (i) auf Seite 240 und bei Beachtung der dort benützten Beziehung (g) und (h) erhalten wir

$$K_u = \frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{M_{Bu}}{EJ_u}. \tag{118}$$

K_u ist die Krümmung der elastischen Linie des auf ebene schiefe Biegung und Schub beanspruchten Stabes. Denn faßt man K_y und K_z als Vektoren auf, die den Biegemomenten M_{By} und M_{Bz} zugeordnet sind, und trägt sie vom Ursprung O' (Abb. 101, Seite 239) des Systemes $x'y'z'$ in den Richtungen der Achsen y', z' oder ihnen entgegengesetzt je nach dem Zeichen auf (positive Werte von K_y, K_z sind entgegengesetzt den positiven Richtungen der y' - und z' -Achse gerichtet, entsprechend den als positiv aufgefaßten Momentenvektoren), bildet ferner die Komponente ihrer Resultierenden in der Richtung der u -Achse, so erhält man die Krümmung K_u . Nachdem, wie man sich leicht überzeugt, $K_y \sin \varphi - K_z \cos \varphi = \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$, so ist K_u als Vektor aufgefaßt die Resultante der komponentalen Krüm-

mungen K_y und K_z und fällt mit der Achse u zusammen. Daraus ist zu schließen, daß die resultierende Durchbiegung nicht in der Kräfteebene, sondern in der xv -Ebene erfolgt. Die Größe EJ_u bedeutet die Biegesteifigkeit in der xv -Ebene. (Siehe hierzu die Abb. 101, in der K_y und K_z entgegengesetzt den Richtungen von M_{By} und M_{Bz} eingetragen sind.) Aus den Gleichungen (117), (117a), (118) entnehmen wir, daß für jene Querschnitte, für welche M_{By} , M_{Bz} , M_{Bu} verschwinden, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2v}{dx^2}$ zu Null werden, d. h. die beiden Zweige der elastischen Linien bzw. die resultierende elastische Linie Wendepunkte besitzen.

Die Integration der Differentialgleichungen (117), (117a) und (118) der komponentalen und resultierenden elastischen Linien, wodurch man die analytischen Gleichungen der entsprechenden Kurven erhält, ist leicht zu bewerkstelligen, wenn M_{By} , M_{Bz} und M_{Bu} als Funktionen von x gegeben sind, und führt auf zwei Integrationskonstante, deren Werte aus den Auflagerbedingungen des Stabes zu bestimmen sind.

Zweite Näherung zur Bestimmung der elastischen Linie. In zweiter Annäherung sucht man, wie oben erwähnt, den Einfluß der Schubspannungen auf die elastische Linie zu berücksichtigen, der bei kurzen dicken Stäben ausschlaggebend sein wird. Auch jetzt betrachtet man den Einfluß der Schubspannungen gesondert auf die beiden in den Ebenen xz und xy entstehenden komponentalen elastischen Linien.

In Abb. 107 sind A und B zwei aufeinanderfolgende in der Entfernung dx liegende Querschnitte. Es soll der Einfluß der Schubspannungen $X_z = Z_x$ auf die Durchbiegung in der xz -Ebene untersucht werden. Denken wir uns den Querschnitt A festgehalten und die Querkraft für den Querschnitt A positiv, d. h. entgegengesetzt der positiven z -Achse gerichtet, so werden von dem schraffierten rechts liegenden Stabteil im Querschnitte B Schubspannungen Z_x übertragen, die nach abwärts gerichtet sind, d. h. die Richtung der positiven z -Achse haben. Der Schwerpunkt O' des Querschnittes B wird sich infolgedessen relativ zum Querschnitt A um ein Stück nach abwärts verschieben, dessen Größe von der Art der Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt B und der damit zusammenhängenden Krümmung des Querschnittes abhängig sein wird.

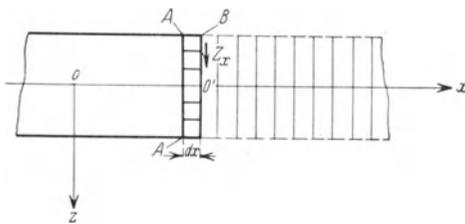


Abb. 107.

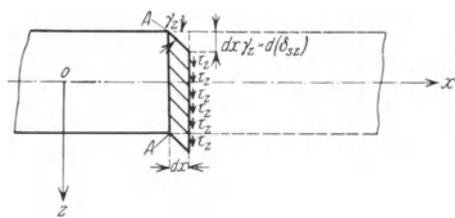


Abb. 107a.

Daher wird die Bestimmung jener Verschiebung eine sehr verwickelte. Viel leichter wäre diese Aufgabe zu lösen, wenn sich die Querkraft gleichförmig über den Querschnitt B verteilen würde, so daß alle Werte der Schubspannungen in demselben einander gleich wären, denn dann würden die Winkeländerungen der zwischen den Querschnitten liegenden, in der Abbildung angedeuteten elementaren Prismen alle gleich sein und wären auch ohne weiteres bestimmbar. Es müßte dann, wenn in Abb. 107a τ_z die im Querschnitte überall gleiche Schubspannung bedeutet, $\tau_z = \frac{Q_z}{F} = G\gamma_z$ sein mit F als Querschnittsfläche des Stabes und γ_z als Änderung des Kantenwinkels eines der unendlich kleinen Prismen. Die

relative Senkung $d(\delta_{sz})$ des Punktes θ' gegenüber dem festgehalten gedachten Querschnitt A wäre dann

$$d(\delta_{sz}) = \gamma_z dx = \frac{Q_z}{F G} dx. \quad (o)$$

Um die Senkung von θ' gegenüber einem beliebigen festen von θ' um eine endliche Strecke nach links gelegenen Punkt der Stabachse, der z. B. einem Auflager entspricht, zu erhalten, hätte man nur alle die unendlich vielen relativen Senkungen $d(\delta_{sz})$ der zwischen θ' und dem festen Punkt gelegenen Querschnitte von unendlich kleinem Abstand zu addieren. Die Deformationsarbeit, die in das zwischen zwei benachbarten Querschnitten liegende Stabelement hineingesteckt würde, wäre nach Seite 102ff.

$$\alpha_{sz} = dx \int_F \frac{\tau_z^2}{2G} dy dz = dx \int_F \frac{Q_z^2}{2GF^2} dy dz = \frac{Q_z^2}{2GF} dx. \quad (p)$$

Führten wir $d(\delta_{sz})$ aus der Gleichung (o) ein, so erhielten wir die Gleichung

$$\alpha_{sz} = \frac{1}{2} Q_z d(\delta_{sz}) = \frac{Q_z^2}{2GF} dx \quad (p')$$

d. i. den Satz über die Arbeit (Seite 106ff.).

Wenn wir die Annahme der gleichförmigen Verteilung der Querkraft fallen lassen, so ergibt sich als wirkliche, infolge Schubbeanspruchung in dem Stabelement aufgespeicherte Deformationsarbeit $A_{sz} = dx \int_F \frac{\bar{X}_z^2}{2G} dy dz$, worin die mittlere Schubspannung \bar{X}_z aus der Gleichung (116) auf Seite 243 einzuführen ist. A. Föppl (L) schlägt, um einen ungefähren Mittelwert der wahren relativen Durchbiegung $d\bar{\delta}_{sz}$ des Punktes θ' zu finden, in Analogie zu (p') vor

$$\frac{1}{2} Q_z d(\bar{\delta}_{sz}) = A_{sz} = dx \int_F \frac{\bar{X}_z^2}{2G} dy dz \quad (r)$$

zu setzen. Dividieren wir die Gleichung (r) durch (p'), so erhalten wir

$$\frac{d(\bar{\delta}_{sz})}{d(\delta_{sz})} = \frac{A_{sz}}{\alpha_{sz}} = \frac{dx \int_F \frac{\bar{X}_z^2}{2G} dy dz}{dx \frac{Q_z^2}{2GF}} = \frac{F \int \bar{X}_z^2 dy dz}{Q_z^2}.$$

Führt man einen Zahlenwert

$$c_z = \frac{F \int \bar{X}_z^2 dy dz}{Q_z^2} = \frac{A_{sz}}{\alpha_{sz}} \quad (s)$$

ein, der bei gegebenem Querschnitt und gegebener äußerer Belastung leicht zu berechnen ist, so wird

$$d(\bar{\delta}_{sz}) = d(\delta_{sz}) c_z = \frac{dx Q_z}{FG} c_z, \quad (119)$$

Zufolge der Gleichung (119) ist die ungefähre mittlere Durchbiegung zweier Achsenpunkte gegeneinander in der xz -Ebene infolge der Schubspannungen \bar{X}_z aus der leicht berechenbaren relativen Durchbiegung $d(\delta_{sz})$, die sich bei gleich-

förmiger Verteilung der Querkraft Q_z über den Querschnitt ergeben würde, durch Multiplikation mit dem Zahlenwerte c_z zu finden.

Eine (119) entsprechende Beziehung erhalten wir für die mittlere relative Durchbiegung zweier benachbarter Querschnitte infolge der Schubspannungen \bar{Y}_x in der Richtung der y -Achse [siehe (116a)] durch

$$d(\bar{\delta}_{sy}) = d(\delta_{sy}) c_y = dx \frac{Q_y}{FG} c_y, \quad (119a)$$

wobei

$$c_y = \frac{F \int \bar{X}_y^2 dy dz}{Q_y^2} = \frac{A_{sy}}{\alpha_{sy}}, \quad A_{sy} = dx \int \frac{\bar{X}_y^2}{2G} dy dz, \quad \alpha_{sy} = \frac{Q_y^2}{2GF} dx \quad (s')$$

zu setzen ist.

Ist der betreffende Querschnitt sowohl symmetrisch zur y - als auch zur z -Achse, dann nehmen die Schubspannungen, die aus Gleichung (116b) und (116c) ersichtliche Form an und die Zahlenwerte c_y und c_z haben dann für eine bestimmte Querschnittsform unabhängig von dessen Größe einen bestimmten Wert, so daß sie für jede Querschnittsform ein für allemal berechnet werden können. Die Unabhängigkeit von der Größe des Querschnittes wird eingesehen, wenn in den Formeln für c_y und c_z die durchschnittlichen Schubspannungen durch ihre Werte ersetzt werden. Es kürzt sich dann Q_y bzw. Q_z hinaus, und die übrig bleibenden Ausdrücke ändern sich nicht, wenn alle Ausmaße eines gegebenen Querschnittes n mal vergrößert oder verkleinert werden. Bei unsymmetrischen Querschnitten stellen sich die Werte von c_y, c_z als nicht nur von der Querschnittsform sondern auch von der Größe des Winkels α (Abb. 101, Seite 239) abhängig heraus.

Die gesamte Durchbiegung $d\delta_{Bsz}$ des Punktes θ' in der xz -Ebene gegenüber dem benachbarten festgehalten gedachten Querschnitt setzt sich aus den Durchbiegungen infolge der Biegungsspannungen X_x und jenen infolge der Schubspannungen \bar{Z}_x zusammen, so daß wir ansetzen können

$$d(\delta_{Bsz}) = d(\delta_{Bz}) + d(\bar{\delta}_{sz}) \quad (t)$$

mit $d(\delta_{Bz})$ als relativer Durchsenkung in der xz -Ebene des Punktes θ' gegenüber dem Nachbarquerschnitte infolge der Biegungsspannungen (oben mit dz bezeichnet). Die Verschiebung eines Punktes der ursprünglichen Stabachse gegenüber einem festen Punkt derselben ergibt sich durch Integration aus

$$\delta_{Bsz} = \delta_{Bz} + \bar{\delta}_{sz} \quad (120)$$

mit $\delta_{Bz} = z$ in bezug auf Formel (117). In ähnlicher Weise können auch die gesamten Durchbiegungen in der xy -Ebene in einem Punkte θ' der Stabachse, gegenüber dem Nachbarquerschnitte, bzw. einem beliebig festgehaltenen Punkt in leicht verständlicher Weise durch

$$d(\delta_{Bsy}) = d(\delta_{By}) + d(\bar{\delta}_{sy}) \quad (t')$$

bzw.

$$\delta_{Bsy} = \delta_{By} + \bar{\delta}_{sy} \quad (120a)$$

ausgedrückt werden. Die Summe der Projektionen von $d(\delta_{Bsz})$ und $d(\delta_{Bzy})$ oder von δ_{Bsz} und δ_{Bzy} auf die Achse v ergibt die gesamte Durchbiegung in der vx -Ebene des Punktes θ' gegenüber einem Nachbarquerschnitt oder einem festen Punkt der Stabachse infolge der Beanspruchung auf ebene schiefe Biegung und Schub. Setzen wir dementsprechend bei Bezeichnung der relativen Ver-

schiebung des Punktes O' gegenüber einem Nachbarpunkt der Stabachse infolge der Schubspannungen in der xv -Ebene, d. i. derjenigen Ebene, in welcher die Durchbiegungen erfolgen würden, wenn die Biegungsspannungen allein vorhanden wären, mit $d(\bar{\delta}_{sv})$

$$d(\bar{\delta}_{sv}) = d\bar{\delta}_{sy} \sin \varphi - d(\bar{\delta}_{sz}) \cos \varphi,$$

(Abb. 101, Seite 139), führen $d\bar{\delta}_{sy}$ und $d\bar{\delta}_{sz}$ aus den oben erhaltenen Gleichungen ein und bedenken, daß $Q_y = Q \cos \alpha$ und $Q_z = Q \sin \alpha$, so nimmt die letzte Gleichung die Form $d\bar{\delta}_{sv} = \frac{dx}{FG} Q [c_y \cos \alpha \sin \varphi - c_z \sin \alpha \cos \varphi]$ an, wofür wir kürzer

$$d\bar{\delta}_{sv} = \frac{dx}{FG} Q c_v \tag{119b}$$

mit $c_v = (c_y \cos \alpha \sin \varphi - c_z \sin \alpha \cos \varphi)$ schreiben. Die Beziehung (119b) ist ähnlich den Beziehungen (119) und (119a) aufgebaut. Schließlich können wir in leicht verständlicher Bezeichnungsweise für die gesamte Durchbiegung in der xv -Ebene eines Punktes O' gegenüber einem Nachbarquerschnitt, bzw. einem festen Punkt der Stabachse

$$d(\delta_{Bsv}) = d(\delta_{By}) \sin \varphi - d(\delta_{Bz}) \cos \varphi + d(\bar{\delta}_{sv}) \tag{121}$$

bzw.

$$\delta_{Bsv} = \delta_{By} \sin \varphi - \delta_{Bz} \cos \varphi + \bar{\delta}_{sv} \tag{121a}$$

setzen.

5. Beispiele für die Beanspruchung auf ebene gerade Biegung und Schub. Räumliche schiefe Biegung und Schub.

Die Beanspruchung auf ebene gerade Biegung und Schub ist ein Sonderfall der im Punkte 4. abgehandelten Beanspruchungsart, der eintritt, wenn die Kraftebene die Querschnitte in Hauptzentralachsen schneidet. In den dort erhaltenen allgemeinen Formeln sind die Biegemomente und Querkräfte M_{By}, Q_z oder M_{Bz}, Q_y Null zu setzen, je nachdem die Kraftebene mit der xz - oder xy -Ebene zusammenfällt.

Von den zwei möglichen geraden Biegebungsbeanspruchungen eines geraden Stabes von gegebenem Stoffe und gegebenen Dimensionen wird man praktisch, um ihn voll auszunützen, jene wählen, für welche die äußere Kraftebene die einzelnen Querschnitte in den Hauptzentralachsen mit dem kleinsten Trägheitsmoment schneidet, denn dann kommt in dem Ausdrucke für die Biegungsspannung, auf die es bei langen Stäben in erster Linie ankommt, das größte Trägheitsmoment der Querschnittsfläche im Nenner vor, und es nehmen daher die dem Zahlenwerte nach größten Biegungsspannungen im Querschnitt und die dem Zahlenwerte nach überhaupt größten Biegungsspannungen im ganzen Bereiche des Stabes für eine gegebene Belastung desselben, die möglichst kleinsten Werte an. Ferner ist dann die Biegesteifigkeit die denkbar größte, und infolgedessen nehmen auch die Durchbiegungen infolge der Biegungsspannungen bei gegebener Belastung des Stabes die möglichst kleinsten Werte an (s. h. S. 307).

a) Balken und Kragträger mit rechteckigen oder beliebigen Querschnitten mit Einzelkraft in der Mitte oder am freien Ende oder gleichförmig belastet. Es liege ein Stab von rechteckigem Querschnitte mit den Seiten b, h vor, der an dem einen Ende durch ein Kipp-, auf dem anderen durch ein Rollenkipplager in der Ebene der Achsen der kleinsten zentralen Trägheitsmomente der Querschnitte abgestützt ist (Balkenträger). Der Stab habe die Stützweite l und sei in seiner Mitte durch eine Kraft P belastet, die mit den beiden Stützkräften

von der Größe $\frac{P}{2}$ in einer Ebene liegt, welche die Querschnitte in der xz -Ebene schneidet. Ist letztere zur größeren der beiden Rechtecksseiten h parallel, so liegt der Fall gerader Beanspruchung auf Biegung und Schub vor, welcher oben als besonders günstig für die Ausnutzung des Stabes bezeichnet wurde (Abb. 108).

Für ein Flächenelement im Querschnitt in der Entfernung x vom linken Auflager mit der Koordinate z und beliebiger y -Koordinate werden die Biegungsspannungen nach Gleichung (111a) auf Seite 238 oder nach Gleichung (113) auf Seite 240, in der, da jetzt die Nulllinie mit der y -Achse zusammenfällt, $M_{Bu} = M_{By}$, $J_u = J_y$, $v = z$ einzuführen ist

$$X_x = \frac{M_{By}}{J_y} z = \frac{P}{2} \frac{x}{\frac{1}{12} b h^3} z = \frac{6 P x}{b h^3} z. \quad (a)$$

Die größten Zug- bzw. Druckspannungen im Querschnitte entstehen in Flächenelementen, für welche $z = \frac{h}{2}$ bzw. $z = -\frac{h}{2}$ und haben die Werte

$$(X_x)_{\max}^{\min} = \pm \frac{3 P x}{b h^2}. \quad (b)$$

Diese größten Werte können auch allgemeiner in der Form

$$(X_x)_{\max}^{\min} = \pm \frac{M_{By}}{J_y} = \pm \frac{M_{By}}{W_y} \frac{h}{2}$$

geschrieben werden, wobei

$$W_{ya} = W_{yb} = W_y = \frac{b h^2}{6}$$

daseinige Widerstandsmoment des Balkenquerschnittes ist (Seite 241). Je größer das Widerstandsmoment W_y ist, desto kleiner werden die größten Biegungsspannungen

in jedem Querschnitte für eine gegebene Belastung sein, um so mehr kann die Größe der Belastung gesteigert werden, ohne befürchten zu müssen, daß die überhaupt größten Biegungsspannungen im gefährlichen Querschnitte (Seite 241), dessen Lage aus dem Biegemomentenschaubilde gefolgert werden kann, zu groß werden, also die Gefahr einer Überanstrengung auftritt. Nennen wir die gefährlichen Biegungsspannungen $(X_x)_{\max}^{\max}$, $(X_x)_{\min}^{\min}$,

$$(X_x)_{\max}^{\max} = \pm \frac{(M_{By})_{\max}}{W_y} = \pm \frac{\frac{P}{2} \frac{l}{2}}{\frac{1}{6} b h^2} = \pm \frac{3 P l}{2 b h^2}. \quad (c)$$

Wäre der Stab aus Holz, so würde man $\frac{h}{b} = 1,4$ wählen. Das hat seinen Grund darin, daß bei diesem Verhältnis aus einem kreisrunden Holzstamm von gegebenem Radius r ein Balken mit möglichst großem Widerstandsmoment herausgeschnitten werden kann (Abb. 109). Drückt man in dem Widerstandsmoment $W_y = \frac{b h^2}{6}$ durch r und b aus ($4r^2 = h^2 + b^2$) und sucht

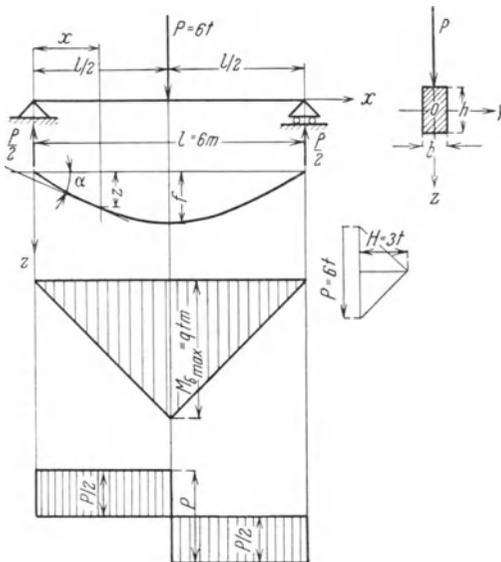


Abb. 108.

den Wert b , für welchen W_y ein Extremwert wird, so erhält man $b = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ und $h = 2r \sqrt{\frac{2}{3}}$, woraus $\frac{h}{b} = \sqrt{2} \doteq 1,4$ folgt.

Die mittleren Schubspannungen \bar{Y}_y und \bar{Z}_x werden, da $Q_y = 0$ nach den Gleichungen (116) und (116a)

$$\bar{X}_z = \frac{Q_z S_{z,b}}{b J_y}, \quad \bar{X}_y = \frac{Q_z S_{y,a}}{a J_y}.$$

$S_{z,b}$ wird für den schraffierten Querschnittsteil (Abb. 110) in der Entfernung x vom linken Auflager $S_{z,b} = b \left(\frac{h}{2} - z \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z \right) = \frac{b}{8} (h^2 - 4z^2)$. Der Wert b

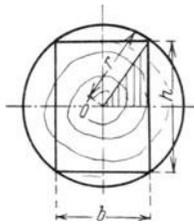


Abb. 109.

in der allgemeinen Formel für die Schubspannung \bar{X}_z ist in unserem Falle gleich der Breite des Rechteckes. Es wird somit für alle Querschnitte links von der Mitte, die theoretisch genommen zwischen einem Querschnitt unendlich nahe rechts vom linken Auflager und einem Querschnitt unendlich nahe links von der Mitte liegen

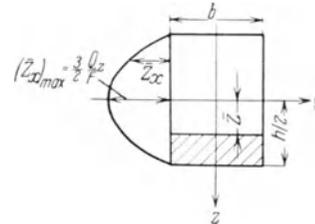


Abb. 110.

$$\bar{X}_z = \frac{Q_z (h^2 - 4z^2)}{8 \cdot \frac{1}{12} b h^3} = Q_z \frac{3}{2} \cdot \frac{h^2 - 4z^2}{b h^3} = \frac{3P}{4} \cdot \frac{h^2 - 4z^2}{b h^3}, \quad (d)$$

nachdem für die genannten Querschnitte $Q_z = \frac{P}{2}$ ist. Der größte Wert von \bar{X}_z in den angegebenen Querschnitten wird für $z = 0$ erreicht und ist

$$(\bar{X}_z)_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_z}{b h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_z}{F}, \quad (d')$$

mit F als Querschnittsfläche des Stabes.

Über einen Querschnitt verteilen sich die Schubspannungen der Gleichung (d) zufolge nach einer Parabel, deren Scheitel dem $(\bar{X}_z)_{\max}$ entspricht; für $z = \frac{h}{2}$ verschwinden die Schubspannungen wie es sein muß, da die Mantelfläche keinen in sie hineinfallenden parallel zur Stabachse wirkenden Kräften unterworfen ist.

Die Existenz von Schubspannungen \bar{X}_z in Ebenen parallel zur xy -Ebene kann man dadurch augenfällig machen, daß man den Balken parallel zu dieser Ebene in Bretter zersägt und dann die Kraft P aufbringt. Der zersägte Balken zeigt sich dann an seinen Endquerschnittsflächen treppenförmig abgestuft, weil in den Sägeflächen,

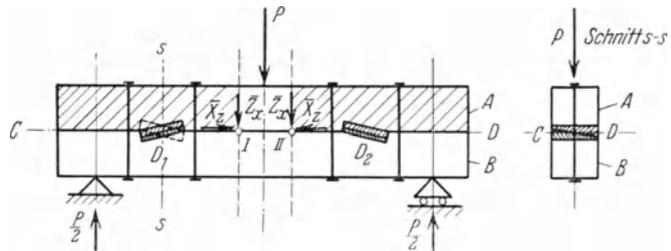


Abb. 111.

von der Reibung abgesehen, keine Schubspannungen wie am vollen Balken übertragen werden können. Es ist demnach zu verstehen, daß, wenn die in Abb. 111 dargestellten Balken A und B durch Dübel miteinander verbunden werden sollen, um die Verschiebung der Balken gegeneinander in ihrer gemeinsamen

Fläche zu verhindern, links von der Mitte die aus zwei Keilen zu einem Prisma zusammengefügt Dübel (siehe Dübel D_1), in der Richtung von links unten nach rechts oben eingesetzt werden müssen, in der strichliert dargestellten Lage wären sie wirkungslos. Rechts von der Mitte sind die Schubspannungen \bar{X}_z negativ und dem Zahlenwerte nach gleich jenen, welche links von der Mitte an entsprechenden symmetrisch zur Mitte gelegenen Stellen vorhanden sind. Dementsprechend muß der Dübel D_2 von links oben nach rechts unten laufen. Siehe hierzu auch die eingezeichneten Schubspannungen \bar{Z}_x und \bar{X}_z für die Punkte I und II links und rechts von der Mitte, die den schraffierten Teilen angehörig gedacht sind, für den Fall als A und B Teile eines Vollbalkens wären.

Wir kehren nunmehr zu dem Stabe nach Abb. 108 zurück. Da infolge der Symmetrie des Querschnittes mit Bezug auf die y -Achse $S_{y\alpha}$ verschwindet, ($a = b$) ist der durchschnittliche Wert $\bar{X}_y = 0$ (Seite 243).

Die gefundenen Näherungslösungen gelten in Bereichen des Stabes, die von den Angriffsstellen der äußeren Kräfte um Strecken entfernt sind, die der Größenordnung der Querausmaße des Stabes entsprechen (Prinzip von De Saint Venant).

In der Differentialgleichung (117) auf Seite 247 der elastischen Linie ist, wenn es sich um Querschnitte links von der Mitte handelt, für M_{By} , das stets als Funktion von x darzustellen ist, der Wert $\frac{P}{2}x$ einzuführen. Wir erhalten demnach für den Zweig der elastischen Linie vom linken Auflager bis zur Mitte

$$E J_y \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{P}{2}x. \quad (e)$$

Integrieren wir zweimal, so erhalten wir $E J_y \frac{dz}{dx} = -\frac{P}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$ und $E J_y z = -\frac{P}{2} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$ mit C_1 und C_2 als Integrationskonstanten. Zur Bestimmung derselben verwenden wir die Bedingung, daß für $x = 0, z = 0$ und für $x = \frac{l}{2}, \frac{dz}{dx} = 0$ sein muß, da die elastische Linie infolge der offenbaren Symmetrie zur Mitte dort eine zur x -Achse parallele Tangente haben muß. Durch Einsetzen von $x = \frac{l}{2}$ bzw. $x = 0$ in das erste und zweite Integral der Differentialgleichung und gleichzeitigem Nullsetzen von $\frac{dz}{dx}$ bzw. von z erhalten wir $C_1 = \frac{P l^2}{16}$ und $C_2 = 0$, so daß der Zweig der elastischen Linie links von der Mitte die Gleichung

$$z = \frac{P x}{48 E J_y} (3 l^2 - 4 x^2) \quad (f)$$

besitzt. Die Gleichung des Kurvenzweiges rechts von der Mitte hat dieselbe Form, wenn wir das Koordinatensystem mit dem Ursprung im Schwerpunkt des Querschnittes am rechten Auflager, der positiven x -Achse nach links und der positiven z -Achse nach abwärts gerichtet annehmen.

Die größte Durchbiegung f infolge der Biegungsspannungen entsteht in der Mitte und wird aus der letzten Gleichung, wenn wir in ihr $x = \frac{l}{2}$ setzen, mit

$$f = \frac{P l^3}{48 E J_y} \quad (g)$$

erhalten.

Den Verdrehungswinkel α eines Querschnittes gegen die ursprüngliche Lage desselben (Abb. 108) erhalten wir aus dem ersten Integral der Differential-

gleichung (e) nach Einsetzen von C_1 , da bei sehr kleinen Verdrehungswinkeln näherungsweise $\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha$ gesetzt werden kann. Für Querschnitte links von der Mitte erhalten wir sonach

$$\alpha = \frac{dz}{dx} = \frac{P}{4 E J_y} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right). \quad (\text{h})$$

Der größte Verdrehungswinkel ergibt sich am linken Auflager ($x = 0$) mit

$$\alpha_{\max} = \frac{P l^2}{16 E J_y}. \quad (\text{i})$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird, wie es sein muß, $\alpha = 0$. Rechts von der Mitte erhalten wir für beliebige Querschnitte dem Zahlenwerte nach gleiche Werte der Verdrehungswinkel wie in den symmetrisch zu ihnen links von der Mitte gelegenen Querschnitten, dem Zeichen nach sind aber die Werte α rechts von der Mitte negativ.

Mißt man α_{\max} , so kann aus der für diesen Wert angeschriebenen Gleichung (i) der Elastizitätsmodulus E berechnet werden. Dabei ist aber zu bedenken, daß an den Auflagern die Genauigkeit dieser Rechnung zu wünschen übrig läßt, nicht nur aus den bereits angegebenen Gründen sondern auch deswegen, weil der Einfluß der Reibung an den Auflagern unter Umständen von einiger Bedeutung werden kann.

Sollen die Durchbiegungen infolge der Schubspannungen berücksichtigt werden, so muß, um $d\bar{\delta}_{sz}$ nach Gleichung (119) auf Seite 249 bestimmen zu können, zunächst c_z nach Gleichung (s) für rechteckige Querschnitte berechnet werden. Danach ist mit Rücksicht auf Gleichung (d) auf Seite 253

$$\begin{aligned} c_z &= \frac{b h}{Q_z^2} \int_F \frac{9 Q_z^2}{4 b^2 h^6} (h^4 - 8 h^2 z^2 + 16 z^4) dy dz \\ &= \frac{9}{4 h^5} \left[h^4 z - 8 h^2 \frac{z^3}{3} + 16 \frac{z^5}{5} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{6}{5}, \end{aligned} \quad (\text{j})$$

und demzufolge $d\bar{\delta}_{sz} = dx \frac{Q_z}{F G} \cdot \frac{6}{5}$ und für einen Querschnitt in der Entfernung x vom linken Auflager

$$\bar{\delta}_{sz} = \int_0^x \frac{Q_z}{F G} \cdot \frac{6}{5} dx = \frac{3 P x}{5 b h G}. \quad (\text{k})$$

Ferner wird die Durchbiegung im Querschnitt x infolge Bieigungs- und Schubspannungen zufolge Gleichung (120) auf Seite 250 und Gleichung (f) auf Seite 254

$$\delta_{Bsz} = \frac{P x}{48 E J_y} (3 l^2 - 4 x^2) + \frac{3 P x}{5 b h G}. \quad (\text{l})$$

Die größte gesamte Durchbiegung in der Mitte für $x = \frac{l}{2}$ wird

$$(\delta_{Bsz})_{\max} = \frac{P l^3}{48 E J_y} + \frac{3 P l}{10 b h G}. \quad (\text{m})$$

Setzen wir in dieser Gleichung $G = \frac{m}{2(m+1)} E$ (Gleichung (43) auf Seite 80), $m = 4$ und $J_y = \frac{1}{12} b h^3$, so ergibt sich

$$(\delta_{Bsz})_{\max} = \frac{P l}{4 E b h} \left(\frac{l^2}{h^2} + 3 \right). \quad (\text{m}')$$

Das Verhältnis der Durchbiegung $(\bar{\delta}_{sz})_{\max}$ in der Mitte des Stabes infolge der Schubspannungen zu der dort vorhandenen größten Durchbiegung f infolge der Biegungsspannungen wird $\frac{(\bar{\delta}_{sz})_{\max}}{f} = \frac{3h^2}{l^2}$. Wenn z. B. $l = 10h$ ist, wird dieses Verhältnis 0,03, d. h. $(\bar{\delta}_{sz})_{\max}$ ist nurmehr 3% von f , wenn dagegen $l = h$, so wird $(\delta_{Bs})_{\max}$ dreimal so groß als f . Dieses Ergebnis entspricht den oben gemachten Bemerkungen, daß für im Verhältnis zu den Quersdimensionen lange Stäbe der Anteil der Durchbiegung infolge der Schubspannungen an der gesamten Durchbiegung außerordentlich gering ist, dagegen bei sehr kurzen Stäben den Einfluß der Biegungsspannungen auf die Durchbiegung überwiegt.

Die Gleichung (m') könnte dazu verwendet werden, aus der gemessenen Durchbiegung $(\delta_{Bsz})_{\max}$ auf die Größe von E oder, wenn man E durch G ausdrückt, auf die Größe von G für den Stoff zu schließen, aus welchem der Stab besteht. Berücksichtigt man bei langen Balken die Schubspannungen nicht, so kommt bei Verwendung der auf diese Annahme zugeschnittenen Gleichung (m') der Elastizitätsmodulus E etwas zu klein heraus.

Des Interesses halber fügen wir hier gleich die Fälle an, daß

1. der Balkenträger nach Abb. 108 mit beliebigem Querschnitt in der xz -Ebene gleichmäßig über seine ganze Länge durch qt/m belastet sei, wie das z. B. für das Eigengewicht angenommen wird (Seite 7).

2. ein Kragträger von beliebigem Querschnitt und der Länge l in der xz -Ebene durch eine an seinem freien Ende wirkende Einzelkraft P oder über seine ganze Länge gleichmäßig mit qt/m belastet sei.

ad 1. Es ist dann das Biegemoment für einen Querschnitt x

$$M_{By} = \frac{q}{2} x^2 - \frac{q}{2} l x = \frac{q}{2} x(l - x)$$

und die Biegungsspannung

$$X_x = \frac{q}{2} \cdot \frac{x(l-x)}{J_y} z. \quad (n)$$

Der gefährliche Querschnitt befindet sich wieder in der Mitte für den

$$(M_{By})_{\max} = \frac{q l^2}{8}$$

und bei beliebigem Querschnitt wird die extreme Zug- und Druckspannung in leicht verständlicher Schreibweise

$$(X_x)_{\max}^{\min} = \frac{q l^2}{8 J_y} z_{a,b} = \pm \frac{q l^2}{8 W_{a,b}}. \quad (n')$$

Die Differentialgleichung der zur Mitte symmetrisch elastischen Linie

$$E J_y \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{q}{2} x(l - x)$$

gibt integriert $E J_y \frac{dz}{dx} = -\frac{q}{2} \left(\frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$ und

$$E J_y z = -\frac{q}{2} \left(\frac{l x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1 x + C_2. \quad (o)$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich aus den Bedingungen $x = 0, z = 0$ und $x = \frac{l}{2}, \frac{dz}{dx} = 0$ mit $C_2 = 0$ und $C_1 = \frac{q l^3}{24}$, so daß

$$E J_y z = -\frac{q x^3}{24} (2l - x) + \frac{q l^3}{24} x \quad (o')$$

als analytische Gleichung der elastischen Linie zustande kommt. Der größte Wert f der Durchbiegung in der Mitte wird nunmehr, wie man leicht findet

$$f = \frac{5 q l^4}{384 E J_y}. \quad (p)$$

ad 2. Einen Kragträger von der Länge l mit einer vertikal nach abwärts wirkenden Einzelkraft P am freien Ende in der xz -Ebene können wir als die Hälfte eines Balkenträgers nach Abb. 108 auffassen, der die Länge $2l$ besitzt und in seiner Mitte durch die Kraft $2P$ belastet ist, die entgegengesetzt zur gegebenen Belastung gerichtet ist (Abb. 112).

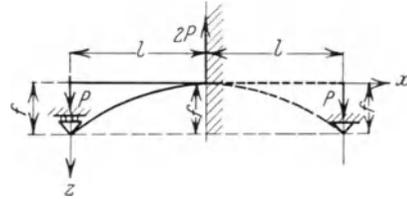


Abb. 112.

Insbesondere ist z. B. die größte Durchbiegung f des Kragträgers gleich der größten Durchbiegung des Balkenträgers in dessen Mitte. Wir haben sonach in der für den Balkenträger bereits gefundenen Formel (g) (Seite 254) statt der Länge l die Länge $2l$ und statt der Kraft P die Kraft $2P$ einzuführen und erhalten bereits die größte Durchbiegung für den Kragträger mit

$$f = \frac{2P \cdot 8 l^3}{48 E J_y} = \frac{P l^3}{3 E J_y}. \quad (q)$$

Ist der Kragträger gleichförmig mit q t/m belastet, so ist die Differentialgleichung der elastischen Linie mit Bezug auf ein Koordinatensystem xyz , dessen Ursprung in den Schwerpunkt des freien Querschnittes gelegt ist, wie in Abb. 113, $E J_y \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{q x^2}{2}$, deren Integration $E J_y \frac{dz}{dx} = \frac{q x^3}{6} + C_1$ und

$$E J_y z = \frac{q x^4}{24} + C_1 x + C_2$$

ergibt. Die Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich aus den Auflagerbedingungen $x = l, z = 0$ und $x = l, \frac{dz}{dx} = 0$ mit $C_1 = -\frac{q l^3}{6}$ und $C_2 = \frac{q l^4}{8}$. Die größte Durchbiegung f für $x = 0$ wird sonach $f = \frac{q l^4}{8 E J_y}$.

b) Statisch bestimmt gelagerte Stäbe mit beliebigem symmetrischem Querschnitt und beliebiger gerader Belastung. Es liege ein statisch bestimmt gelagerter Stab mit beliebigem symmetrischen Querschnitt vor, der durch Einzelkräfte oder eine irgendwie über die Länge des Stabes verteilte Belastung angegriffen ist. Die Belastungsebene schneide die Querschnitte in deren Symmetrieachse.

Als Beispiel wählen wir einen Kragträger mit den in Abb. 113a dargestellten, zur z -Achse symmetrischen Querschnitt und der aus Abb. 113 ersichtlichen Belastung. Die Gleichung für die Biegungsspannungen in einem beliebigen Querschnitt $X_x = \frac{M_{By}}{J_y} z$ nimmt nun aus den in der Abbildung ersichtlichen Bereichen *I, II, III, IV, V* eine verschiedene Form an, insofern als das Biegemoment M_{By} in diesen Bereichen durch verschiedene Funktionen von x bestimmt ist. Das Biegemoment für einen beliebigen Querschnitt in dem Bereiche *I* wird $M_{By}^I = -P_1 x$. Für die weiteren Abschnitte *II ... V* ergeben sich die Biegemomente der Reihe nach mit

$$\left. \begin{aligned}
 M_B^{II} &= - [P_1 x + P_2 (x - x_2)] - \frac{q (x - x_2)^2}{2} \\
 M_B^{III} &= - [P_1 x + P_2 (x - x_2)] - \frac{q (x - x_2)^2}{2} - P_3 (x - x_3) \\
 M_B^{IV} &= - [P_1 x + P_2 (x - x_2) + P_3 (x - x_3)] - q a \left(x - x_2 - \frac{a}{2} \right) \\
 M_B^V &= - [P_1 x + P_2 (x - x_2) + P_3 (x - x_3) + P_4 (x - x_4)] - q a \left(x - x_2 - \frac{a}{2} \right).
 \end{aligned} \right\} (r)$$

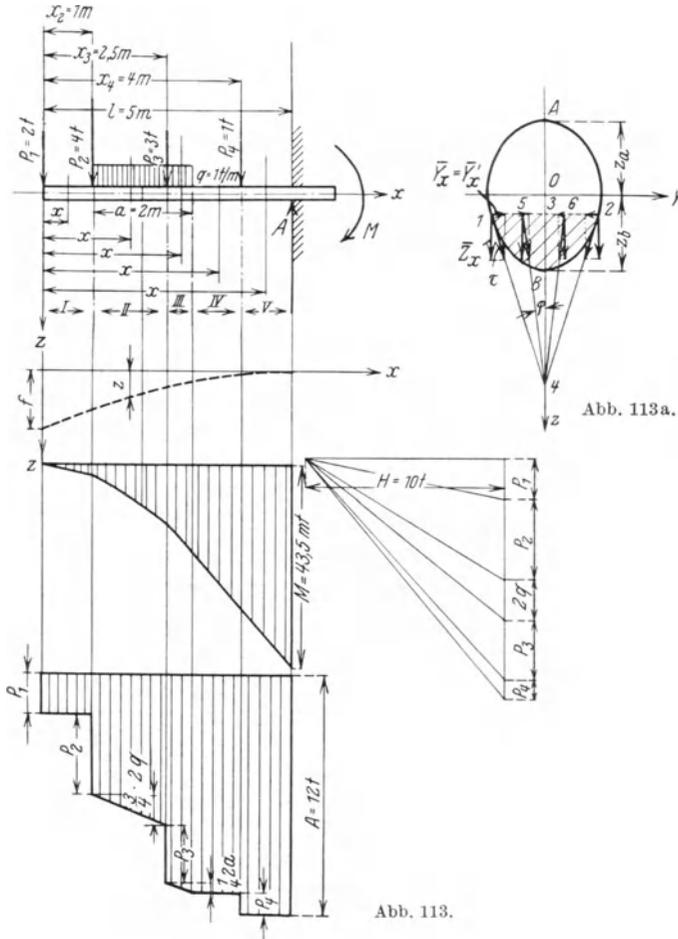


Abb. 113a.

Abb. 113.

Für M_B^{IV} und M_B^V können wir auch, um aus weiter unten hervortretenden Gründen eine engere Beziehung zum Biegemoment M_B^{III} herzustellen, schreiben

$$\left. \begin{aligned}
 M_B^{IV} &= - [P_1 x + P_2 (x - x_2) + P_3 (x - x_3)] - q \frac{(x - x_2)^2}{2} \\
 &\quad + q [(x - x_2) - 2a] \frac{(x - x_2)}{2} + \frac{q a^2}{2}, \\
 M_B^V &= - [P_1 x + P_2 (x - x_2) + P_3 (x - x_3)] - q \frac{(x - x_2)^2}{2} \\
 &\quad + q [(x - x_2) - 2a] \frac{x - x_2}{2} + \frac{q a^2}{2} - P_4 (x - x_4).
 \end{aligned} \right\} (r')$$

Siehe hierzu das Momentenschaubild in Abb. 113, das unter der Annahme $P_1 = 2 \text{ t}$, $P_2 = 4 \text{ t}$, $P_3 = 3 \text{ t}$, $P_4 = 1 \text{ t}$, $q = 1 \text{ t/m}$, $l = 5 \text{ m}$, $x_2 = 1 \text{ m}$, $a = 2 \text{ m}$, $x_3 = 2,5 \text{ m}$, $x_4 = 4 \text{ m}$ dargestellt ist, und zwar unter Zuhilfenahme des in Abb. 113 gezeichneten Krafteckes. Bezüglich der Schaubilder von Bieugungsmomenten sei hier die allgemeine Bemerkung eingeschaltet, daß in denselben in üblicher Weise positive Bieugungsmomente bei horizontal liegend gedachtem Stab vertikal nach abwärts (hohle Seite der elastischen Linie nach aufwärts), negative Bieugungsmomente vertikal nach aufwärts (hohle Seite der elastischen Linie nach abwärts) eingetragen werden. Die elastische Linie ist für unseren Fall in Abb. 113 in schematischer Weise gezeichnet.

Das größte Bieugungsmoment entsteht für unseren Kragträger im Einspannungsquerschnitt, der also der gefährliche Querschnitt ist, und wird aus dem Ausdrucke für das Bieugungsmoment M_B^V erhalten, wenn man in demselben $x = l$ setzt. Dort wird auch die im ganzen Bereiche des Stabes zahlenmäßig größte Bieugungsspannung entstehen, und zwar als Druckspannung im Punkte B des Querschnittes, der durch die Koordinate z_b bestimmt ist, wenn $z_b > z_a$.

Dieselbe hat den Wert $(X_x)_{\min} = \frac{(M_B^V)_{x=l}}{W_{yb}}$ mit $W_{yb} = \frac{J_y}{|z_b|}$.

Die Schubspannungen \bar{Z}_x und \bar{Y}_x längs einer zur y - bzw. z -Achse Parallelen werden nach den Gleichungen (116) und (116a) auf Seite 243

$$\bar{Z}_x = \frac{Q_z S_{yb}}{b J_y} \quad \text{und} \quad \bar{Y}_x = \frac{Q_z S_{ya}}{a J_y},$$

worin die statischen Momente S_{yb} und S_{ya} für den gegebenen Querschnitt entweder zu berechnen oder graphisch auszuwerten sind. Die Querkräfte Q_z sind für den angenommenen Belastungsfall durchwegs negativ, das heißt mit der positiven z -Achse gleichgerichtet und für die verschiedenen Bereiche des Stabes verschieden. Siehe hierzu das Querkraftschaubild (Abb. 113). Rechnerisch ergeben sich die Querkräfte für die verschiedenen Bereiche der Reihe nach mit

$$Q_z^I = -P_1, \quad Q_z^{II} = -P_1 - P_2 - q(x - x_2), \quad Q_z^{III} = -P_1 - P_2 - P_3 - q(x - x_2), \\ Q_z^{IV} = -P_1 - P_2 - P_3 - qa, \quad Q_z^V = -P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - qa.$$

Da das statische Moment S_{ya} dann, wenn $a = AB$ wird, infolge des zur z -Achse symmetrischen Querschnittes verschwinden muß, ist die durchschnittliche Schubspannung \bar{Y}_x für alle Flächenelemente längs der z -Achse gleich Null, also auch für das Flächenelement im Punkte 3, der auf der Strecke $12 = b$ liegt. Die totalen Schubspannungen τ in den Punkten 1 und 2 müssen tangential zur Berandung des Querschnittes gerichtet sein und schneiden sich infolge der Symmetrie desselben im Punkte 4, nach welchen auch die resultierende Schubspannung im Punkte 3, d. i. \bar{Z}_x allein (da $\bar{Y}_x = 0$ sein soll), hinzielt. Da längs 12 die durchschnittliche Schubspannung \bar{Y}_x Null sein muß, weil keine Querkraft parallel zur y -Achse vorhanden ist, die Schubspannung Z_x aber für jeden Punkt dieser Strecke den gleichen durchschnittlichen Wert hat, so können die totalen Schubspannungen in zwei symmetrisch zur z -Achse auf der Strecke $1, 2$ liegenden Punkten, z. B. 5, 6, nur einen gemeinsamen Schnittpunkt mit der z -Achse haben. Dieser Sachverhalt veranlaßte Grashof, für symmetrische Querschnitte näherungsweise anzunehmen, daß sämtliche totale Schubspannungen längs der Strecke 12 sich im Punkte 4 schneiden, wodurch ein annähernd zutreffendes Verteilungsgesetz für die Schubspannungen \bar{Y}_x , die nunmehr zu Unterscheidungs-zwecken mit \bar{Y}'_x bezeichnet werden sollen, längs der genannten Strecke gewonnen wird, wenn die Schubspannung \bar{Z}_x auf die oben angegebene Weise berechnet

wurde. Ist φ der Winkel, den die Verbindungsstrecke eines beliebigen Punktes $\bar{5}$ auf der Strecke 12 mit dem gemeinsamen Schnittpunkt 4 mit der z -Achse einschließt, so kann dann $\bar{Y}'_x = \tau \sin \varphi$ und $\bar{Z}_x = \tau \cos \varphi = \frac{Q_z S_{yb}}{b J_y}$ d. h.

$$\tau = \frac{Q_z S_{yb}}{b J_y \cos \varphi}, \quad \bar{Y}'_x = \frac{Q_z S_{yb}}{b J_y} \operatorname{tg} \varphi \tag{122}$$

gesetzt werden. Der Winkel φ ist im allgemeinen mit z und y veränderlich.

Die dem Zahlenwerte nach größten Werte der Schubspannungen \bar{Y}'_x für Flächenelemente längs einer Parallelen zur y -Achse treten an der Berandung des Querschnittes, die kleinsten, nämlich Null, in der z -Achse auf. Die Lagen der Flächenelemente mit den dem Zahlenwerte nach größten Werten der Schubspannungen \bar{Y}'_x bzw. \bar{Z}_x im Querschnitte hängen im allgemeinen von der Querschnittsform ab, werden aber in der Regel an den der y -Achse entsprechenden Stellen der Berandung des Querschnittes oder in der Umgebung dieser Stellen zu suchen sein, bzw. treten längs der y -Achse auf. Die dem Zahlenwerte nach größten Spannungen \bar{Y}'_x und \bar{Z}_x im Bereiche des Stabes befinden sich in Querschnitten, denen die größten Querkräfte zukommen, in unserem Falle demnach im Bereiche V .

Für den bereits behandelten Fall des rechteckigen Querschnittes, für den wir für jede Strecke a parallel zur z -Achse die durchschnittliche Schubspannung \bar{Y}'_x mit Null erhalten, ergibt sich aus der Formel (122) gleichfalls $\bar{Y}'_x = 0$, da φ gleich Null ist.

Der Winkel φ ist überhaupt für alle Teile der Berandung eines zur z -Achse symmetrisch gedachten Querschnittes, die aus Geraden parallel zu dieser Achse gebildet werden, gleich Null, was auf Grund der Näherungsbeziehung (122), von unstetigen Stellen abgesehen, das Nullwerden der Schubspannung \bar{Y}'_x zur Folge hätte. Derartige Querschnitte sind insbesondere jene oft verwendeten, welche aus Rechtecken mit Seiten normal und parallel zur z -Achse zusammengesetzt sind, wie \perp und \top -Träger (Abb. 114). Für jene Teile der Berandung dieser Querschnitte, die normal zur z -Achse stehen ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), verliert die zweite der Formeln (122) ihre Bedeutung. Für nicht an der Berandung liegende Flächenelemente unmittelbar oberhalb und unterhalb der Linie aa ,

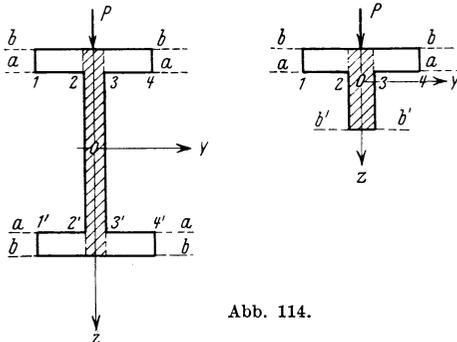


Abb. 114.

verlangt die Formel (122) das Nullwerden von \bar{Y}'_x . Längs der Strecken 12 und 34 , bzw. $1'2'$ und $3'4'$ müssen zufolge der Grenzbedingungen die wahren Schubspannungen Z_x verschwinden. Längs der Strecken 23 , $2'3'$ sollen die mittleren Werte der Schubspannungen \bar{Z}_x einen von Null verschiedenen Wert annehmen, letzteres soll auch oberhalb und unterhalb der Linien aa zutreffen längs Parallelen zur y -Achse mit Ausnahme jener, welche mit den Strecken b, b bzw. b', b' zusammen-

fallen, wo die wahren Werte der Schubspannungen Z_x zufolge der Grenzbedingungen wieder Null werden müssen. Aus dem Gesagten kann man schließen, daß die ausschlaggebenden wahren, von Null verschiedenen Werte der Schubspannungen Z_x sich um so mehr gegen die schraffierten Teile zusammendrängen

erhalten. Für den ersten, zweiten usw. Bereich gilt diese Gleichung rechts vom Gleichheitszeichen bis zum Trennungsstrich I bzw. II usw. Die Konstanten C_9 und C_{10} sind für alle Bereiche gemeinsam und werden aus den oben angegebenen Auflagerbedingungen bestimmt, wozu die Gleichung der elastischen Linie und deren erster, nicht weiter aufgeschriebener Differentialquotient bis zum Trennungsstrich V zu benutzen ist, weil das Auflager im Bereiche V liegt.

Die größte Durchbiegung erhalten wir aus der analytischen Gleichung der elastischen Linie, wenn wir in ihr $x = 0$ setzen.

Ganz ähnlich wäre für einen auf zwei Stützen aufgelagerten Stab vorzugehen. Auch für ihn treten zwei für alle Stabbereiche gemeinsame Konstante auf, die aus den Auflagerbedingungen zu berechnen sind. Die eine Konstante wird aus der Auflagerbedingung im ersten Bereich, die andere aus der Auflagerbedingung im letzten Bereiche bestimmt.

c) Beanspruchung auf räumliche schiefe Biegung und Schub. Wenn die äußeren die Stabachse schneidenden und auf ihr normal stehenden Kräfte mehreren beliebigen schiefen Kraftebenen mit zugeordneten beliebigen Winkeln α entsprechen, so entsteht räumliche schiefe Beanspruchung auf Biegung und Schub. Man geht dann im allgemeinen so vor, daß man die Kräfte in je zwei Komponenten zerlegt, deren Ebenen die beiden Querschnitte in den beiden Hauptzentralachsen schneiden, wodurch die Beanspruchung auf zwei übereinander gelagerten ebenen geraden Beanspruchungen auf Biegung und Schub zurückgeführt wird. Die elastische Linie ist nunmehr eine räumliche Kurve.

6. Verwendung der Gleichung der elastischen Linie bei Bestimmung von statisch unbestimmbaren Stützkräften.

Ist ein im Verhältnisse zu den Querdimensionen langer gerader Stab auf ebene, schiefe oder gerade Biegung und Schub beansprucht und statisch unbestimmt aufgelagert, so kann die Differentialgleichung der elastischen Linie in den Formen (117), (117 a) oder (118) dazu dienen, um die statisch nicht bestimmbar GröÙen auszuwerten. Bei kürzeren Stäben muß hierzu die Gleichung der elastischen Linie durch ein auf die Schubspannungen bezügliches Glied ergänzt werden. Wenn die Einflußnahme der Schubspannungen zu vernachlässigen ist, so stellt sich der Lösungsvorgang zur Bestimmung der statisch nicht bestimmbar GröÙen folgendermaßen dar.

Nach Aufstellung der statischen Gleichungen, der Feststellung des Grades s , der statischen Unbestimmtheit und der Wahl der voneinander unabhängigen statisch unbestimmbaren GröÙen (Seite 123), setzt man die Differentialgleichung der elastischen Linie an und drückt in ihr sämtliche in sie eintretenden, nach Wahl der statisch unbestimmbaren GröÙen übrigbleibenden Auflagerreaktionen durch die statisch unbestimmten GröÙen aus. Durch zweimalige Integration der Differentialgleichung erhält man die analytische Gleichung der Durchbiegungskurve mit zwei unbekannt Integrationskonstanten und s statisch unbestimmten GröÙen, zu deren Bestimmung die nötige Zahl von Bedingungen gegeben sein muß. Die zwei Integrationskonstanten sind aus den Auflagerbedingungen des zugeordneten statisch bestimmten Hauptträgers abzuleiten, der aus dem statisch nicht bestimmten, gegebenen Träger durch Nullsetzen der statisch nicht bestimmbar GröÙen erhalten wird. Die s statisch nicht bestimmbar GröÙen entsprechen den besonderen Auflagerbedingungen, denen der gegebene Stab infolge seiner statischen Unbestimmtheit ausgesetzt ist, und die zu den Auflagerbedingungen des zugeordneten statisch bestimmbar Hauptträgers hin-

zutreten. Diese besonderen Auflagerbedingungen sind die eigentlichen Elastizitätsbedingungen (Seite 119), denen zufolge sich der Stab in eigenartiger Weise durchbiegen muß, die von jener verschieden ist, die der zugeordnete statisch bestimmbare Hauptträger erfährt.

In manchen Fällen ist der Sinn, in welchem die Auflagerreaktionen wirken, von vornherein nicht bestimmbar. Man führt dann den mutmaßlich richtigen Sinn ein, sollte er unrichtig gewählt worden sein, so kommt die betreffende Auflagerreaktion bei Durchführung der Berechnung negativ heraus.

Wir werden in den folgenden Beispielen stets unterscheiden: 1. den Fall der Belastung des zugeordneten statisch bestimmbaren Hauptträgers von 2. den s Belastungsfällen des zugeordneten Hauptträgers durch je eine statisch unbestimmbare Größe (Kraft oder Moment) des statisch unbestimmten Stabes. Legen wir die Belastungsfälle 1. und 2. übereinander, so erhalten wir den gegebenen Belastungsfall des statisch unbestimmten Trägers. Natürlich können wir auch die den Belastungsfällen 1. und 2. entsprechenden Schaubilder der Biegemomente und Querkräfte und bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes die denselben entsprechenden elastischen Linien übereinanderlegen, um die Schaubilder für die Biegemomente und Querkräfte bzw. die elastische Linie des statisch unbestimmten Stabes zu erhalten.

Beispiele:

1. Der Stab sei auf der einen Seite fest eingespannt, auf der anderen Seite frei aufgelagert (Abb. 115). Es herrsche gerade Belastung in der xz -Ebene durch eine Einzelkraft P im Abstände a von der Einspannungsstelle, der Querschnitt des Stabes sei beliebig. Es entstehen zwei Auflagerkräfte A und B und ein Einspannungsmoment M als Stützreaktionen. Die statischen Gleichungen lauten

$$P = A + B, \quad Al - Pb - M = 0. \quad (a)$$

Der Grad der statischen Unbestimmtheit ist sonach gleich 1. Wir wählen die Auflagerkraft $B = X$ als statisch nicht bestimmbare Größe. Setzen wir $B = 0$, so erhalten wir einen Kragträger, der sonach der zugeordnete statisch bestimmbare Hauptträger ist. (Hätten wir M als statisch unbestimmbare Größe gewählt, so wäre der zugeordnete statisch bestimmte Hauptträger ein frei aufliegender Balken-
träger.) Den obigen allgemeinen Weisungen entsprechend unterscheiden wir den Belastungsfall nach Abb. 115a und jenen nach Abb. 115b. Dieselben geben übereinander gelagert den Fall nach Abb. 115. Die Differentialgleichung der elastischen Linie für den statisch unbestimmten Stab nach Abb. 115 lautet bei Zugrundelegung des gezeichneten Koordinatensystemes xyz und bei Ein-

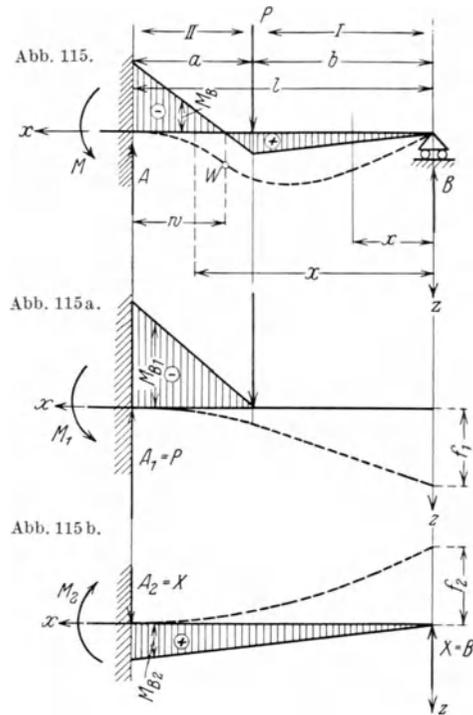


Abb. 115, 115a und b.

führung der beiden Bereiche *I* und *II* $EJ_y \frac{d^2 z}{dx^2} = -Xx|_I + P(x-b)|_{II}$. Durch zweimalige Integration erhalten wir der Reihe nach

$$EJ_y \frac{dz}{dx} = -X \frac{x^2}{2} \Big|_I + \frac{P(x-b)^2}{2} \Big|_{II} + C_1,$$

$$EJ_y z = -X \frac{x^3}{6} \Big|_I + \frac{P(x-b)^3}{6} \Big|_{II} + C_1 x + C_2.$$

Die Bedingungen für den zugeordneten Hauptträger sind: 1. Für $x = l$ ist $z = 0$, 2. für $x = l$ ist $\frac{dz}{dx} = 0$, woraus die beiden Bedingungsgleichungen

$$0 = -\frac{Xl^2}{2} + \frac{P(l-b)^2}{2} + C_1, \quad 0 = -\frac{Xl^3}{6} + \frac{P(l-b)^3}{6} + C_1 l + C_2 \quad (b)$$

folgen. Als Elastizitätsbedingung tritt ferner hinzu 3. für $x = 0$ ist $z = 0$, woraus sich die weitere Bedingungsgleichung $0 = C_1 \cdot 0 + C_2$, d. h. $C_2 = 0$ ergibt. Mit dieser Bestimmung kann aus den Gleichungen (b) die Integrationskonstante C_1 und der Wert der statisch unbestimmten Größe X gefolgert werden. Es wird

$$C_1 = \frac{P(l-b)^2}{4l} b \quad \text{und} \quad X = \frac{Pa^2}{2l^3} (3l-a). \quad (c)$$

Nachdem X gefunden worden ist, können wir aus den statischen Gleichungen (a) A und M mit

$$A = \frac{Pb}{2l^3} [3l^2 - b^2] \quad (d)$$

und

$$M = \frac{Pab}{2l^2} [2l - a] \quad (e)$$

berechnen. Die beiden Schaubilder für die Biegemomente M_{B_1} , M_{B_2} , die den Belastungsfällen des Hauptträgers nach den Abb. 115a und 115b entsprechen, übereinandergelagt, geben das Biegemomentenschaubild für den Belastungsfall des gegebenen Trägers nach Abb. 115. Es ist also z. B. für die Biegemomente M_1 , M_2 an den Einspannungsstellen des zugeordneten Hauptträgers $M = M_1 - M_2 = Pa - Xl$. [Siehe die Gleichungen (a).] Die elastische Linie des gegebenen Trägers besitzt im Punkte W einen Wendepunkt, der dem Nullpunkt des Momentenschaubildes zugeordnet ist. Die Entfernung w des Wendepunktes W vom linken Auflager ergibt sich aus der Bedingung $Aw - M = 0$, woraus

$$w = \frac{al(2l-a)}{3l^2 - b^2} \quad (f)$$

folgt.

Die beiden größten nach den Belastungen in den Fällen der Abb. 115a und 115b sich ergebenden Durchbiegungen f_1 und f_2 der Stabachse müssen entgegengesetzt gleich sein, da sie übereinandergelagert die Durchbiegung Null im Punkte B ergeben müssen. Man könnte das von vornherein dazu verwenden, um die Größe $B = X$ zu bestimmen: es ist, wie man aus den für die genannten Belastungsfälle leicht berechenbaren elastischen Linien (im Punkte 7 werden wir einen einfachen Weg kennen lernen, um, ohne erst die Gleichungen der elastischen Linien aufstellen zu müssen, die Durchbiegungen f_1 und f_2 zu bestimmen) leicht erhält, $f_1 = \frac{Pa^2(3l-a)}{6EJ_y}$ und $f_2 = -\frac{Xl^3}{3EJ_y}$. Durch Gleichsetzung der Zahlenwerte von f_1 und f_2 ergibt sich der bereits gefundene Wert von $B = X$.

Die größte Durchbiegung für den gegebenen statisch unbestimmten Träger ergibt sich offenbar im Abschnitte *I*, für den der zugehörige Zweig der elastischen Linie die Gleichung $EJ_y z = -\frac{x^3}{6} \cdot \frac{Pa^2}{2l^3} (3l-a) + \frac{P(l-b)^2}{4l} bx$ besitzt. Bildet

man $\frac{dz}{dx}$ und setzt diesen Differentialquotienten gleich Null, so erhält man die zum Extremwert von z gehörige Koordinate x_g aus $x_g^2 = \frac{bl^2}{3l-a}$. Durch Einführung von x_g in die zugehörige Gleichung des Zweiges der elastischen Linie im Bereiche I wird dann auf eine nicht weiter auszuführende Weise der Wert der größten Durchbiegung gefunden.

2. Ein Träger auf drei unverschieblichen gleich weit voneinander entfernten Stützen $1, 2, 3$ (Abb. 116), der mittels einem Kipplager und zwei Rollenkipplagern aufliegt, sei in der xz -Ebene über seine ganze Länge $2l$ gleichförmig mit $q t/m$ belastet. Von den drei Stützkräften A, B und C ist wegen der symmetrischen Verhältnisse $A = C$. Die einzige noch zur Verfügung stehende statische Gleichung lautet

$$2lq = 2A + B \quad (g)$$

(die auf die Momentensumme bezügliche statische Gleichung ist, weil $A = C$ angenommen wurde, eine Folge der aufgeschriebenen). Der Träger ist sonach einfach statisch unbestimmt. Bei n Stützen wäre der Grad der statischen Unbestimmtheit $n - 2$. Wählen wir $B = X$ als statisch unbestimmbare Größe, so ist der zugeordnete Hauptträger ein Balkenträger, den wir einmal durch $q t/m$ gleichförmig nach Abb. 116a und hierauf durch eine nach aufwärts wirkende Kraft $B = X$ belastet denken (Abb. 116b). Die in diesen beiden Belastungsfällen in Mitte des Balkenträgers entstehenden Durchbiegungen müssen entgegengesetzt gleich sein, damit bei Übereinanderlagerung der ihnen entsprechenden elastischen Linien die elastische Linie des gegebenen statisch unbestimmten Trägers mit einer Durchbiegung gleich Null im Stützpunkt 2 herauskommt. Nun ist nach den Formeln (g) und (p) auf den Seiten 254 und 257

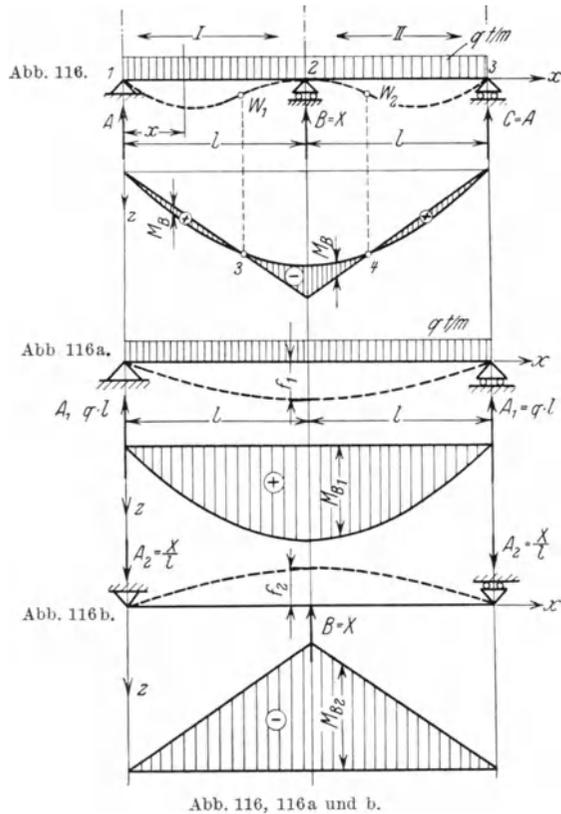
$$f_1 = \frac{5q16l^4}{384EJ_y} \quad \text{und} \quad f_2 = -\frac{X8l^3}{48EJ_y}.$$

Aus $f_1 = -f_2$ folgt dann

$$X = \frac{5ql}{4}. \quad (h)$$

Denselben Wert würden wir natürlich auch finden, wenn wir von der Differentialgleichung der elastischen Linie für den gegebenen Träger mit den Bereichen I und II

$$EJ_y \frac{d^2z}{dx^2} = -\left(Ax - \frac{qx^2}{2}\right)_I - X(x-l)_{II} \quad (i)$$



ausgegangen wären. In dieser Gleichung wäre zuerst A unter Zuhilfenahme der statischen Gleichung (g) durch q und X auszudrücken und hierauf zu integrieren. Die beiden Integrationskonstanten und X finden wir aus den Auflagerbedingungen des zugeordneten Hauptträgers und aus der infolge der statischen Unbestimmtheit hinzukommenden Elastizitätsbedingung, derzufolge für $x = l, z = 0$ sein muß.

Durch Übereinanderlagerung der den Belastungen nach den Abb. 116a und 116b zugeordneten Biegungsschaubilder mit den Biegemomenten M_{B_1} und M_{B_2} erhalten wir das Biegemomentenschaubild mit den Biegemomenten M_B für den gegebenen statisch unbestimmten Träger. Den Nullpunkten 3, 4 der Biegemomente M_B entsprechen die beiden Wendepunkte W_1 und W_2 der elastischen Linie. Ihre Berechnung erfolgt aus den Ansätzen für die Biegemomente M_B in den Bereichen I und II.

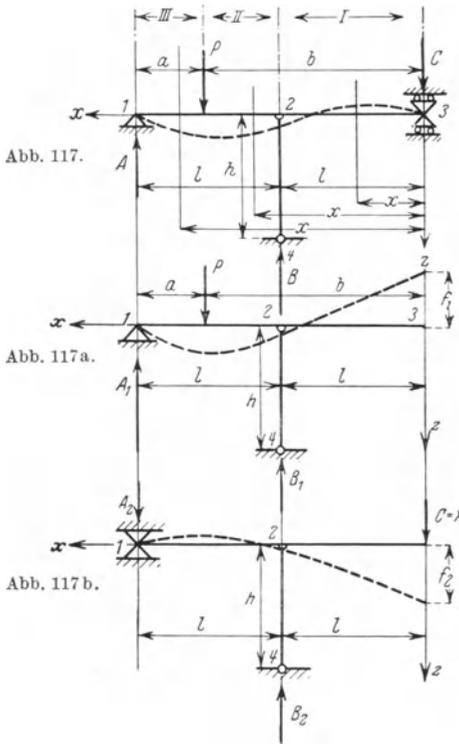


Abb. 117, 117a und b.

3. Stab auf drei Stützen 1, 2, 3 (Abb. 117), von welchen die mittlere 2 dadurch nachgiebig ist, daß sie durch einen elastischen festen Stab 24 gebildet wird, der sich einerseits im Punkte 2 reibungslos gelenkig an den Stab 13 anschließt (ohne daß der Stab 13 selbst durch ein Gelenk unterbrochen wäre), andererseits mittels eines zweiten Gelenkes 4 an einem starr angenommenen Körper abgestützt ist. An die unverschieblichen Stützen 1 und 3 ist der Stab durch ein Kipp- bzw. doppelseitiges Rollenkipplager angeschlossen, das nach beiden Richtungen normal zur Stabachse zu widerstehen vermag. Als Belastung wirke in der xz -Ebene eine Einzelkraft P im Abstände a vom linken Auflager. Da in 2 und 4 reibungslose Gelenke sind, in denen keine Biegemomente übertragen werden können (Seite 120), empfängt der Stab 24 im Gelenk 4 eine Auflagerkraft B , die in die Stabachse fällt.

Die statischen Gleichungen lauten

$$A + B - C = P, \quad 2Al - P(2l - a) + Bl = 0. \quad (k)$$

Hierzu wäre nur zu bemerken, daß die Stützkraft C entgegengesetzt zu A gerichtet sein wird, denn wäre die Stütze in 3 nicht da, so würde sich das Ende 3 infolge der Deformation des Stabes nach aufwärts bewegen. Die Kraft C verhindert bei in vertikaler Richtung unverschieblichem Auflager 3 diese Aufwärtsbewegung. Aus den statischen Gleichungen schließen wir wieder, daß der Stab einfach statisch unbestimmt gelagert ist. Wählen wir nicht die Auflagerkraft B , was einfacher wäre, sondern zu Übungszwecken die Kraft $C = X$ als statisch unbestimmte Größe, so ergibt sich als zugeordneter Hauptträger ein solcher, der einerseits fest, andererseits nachgiebig gelenkig gelagert ist. Wir denken uns denselben wieder das eine Mal durch die gegebene Einzelkraft P (Abb. 117a), das andere Mal durch $C = X$ (Abb. 117b) belastet. Die zugehörigen elastischen

Linien zeigen bei 3 Durchbiegungen f_1 und f_2 , die entgegengesetzt gleich sein müssen. Um diese Durchbiegungen zu bestimmen, können wir von den Differentialgleichungen der elastischen Linien für die Belastungsfälle nach den Abb. 117a und 117b ausgehen. Sehen wir von der Bestimmung von f_1, f_2 ab, so wird die Benutzung der Differentialgleichung der elastischen Linie des gegebenen statisch unbestimmt gelagerten Stabes notwendig. Wir schlagen den zweiten Weg ein und erhalten dann $EJ_y \frac{d^2 z}{dx^2} = Xx|_I - B(x-l)|_{II} + P(x-b)|_{III}$ oder wenn wir B aus den statischen Gleichungen einsetzen

$$EJ_y \frac{d^2 z}{dx^2} = Xx|_I - \frac{Pa + 2lX}{l} (x-l)|_{II} + P(x-b)|_{III}.$$

Durch Integration erhalten wir

$$EJ_y \frac{dz}{dx} = X \frac{x^2}{2}|_I - \frac{Pa + 2lX}{l} \cdot \frac{(x-l)^2}{2}|_{II} + P \frac{(x-b)^2}{2}|_{III} + C_1$$

und $EJ_y z = X \frac{x^3}{6}|_I - \frac{Pa + 2lX}{l} \cdot \frac{(x-l)^3}{6}|_{II} + \frac{P(x-b)^3}{6}|_{III} + C_1 x + C_2$. Die

Auflagerbedingungen für den zugeordneten statisch bestimmten Hauptträger sind 1. für $x = 2l$ ist $z = 0$ und 2. für $x = l$ ist $z = \frac{Bh}{FE} = \frac{Pa + 2lX}{lFE} h$, wenn bedacht wird, daß sich die Stütze 2 um die Verkürzung des durch die Kraft B auf Druck beanspruchten Stabes 2 4 von der Länge h senkt, und diese Verkürzung nach dem Hookeschen Gesetze $\sigma = \frac{B}{F} = E \frac{\Delta h}{hF}$ mit F als Querschnittsfläche des Stabes zu berechnen ist. Die dritte Bedingung besteht darin, daß z für $x = 0$ verschwinden muß, woraus $C_2 = 0$ folgt. Aus den Bedingungen 1 und 2 ergeben sich die Gleichungen

$$0 = X \frac{8l^3}{6} - \frac{Pa + 2lX}{l} \cdot \frac{l^3}{6} + \frac{Pa^3}{6} + C_1 2l,$$

$$h \frac{Pa + 2lX}{lF} J_y = X \frac{l^3}{6} + C_1 l,$$

woraus

$$X = \frac{Pa}{4} \frac{l^2 - a^2 - \frac{12h}{lF} J_y}{l^3 + \frac{6h}{F} J_y} \quad (1)$$

folgt.

Es wird dem Leser empfohlen, die Schaubilder für die Biegemomente zu den Belastungsfällen nach den Abb. 117a und 117b zu zeichnen und durch deren Übereinanderlagerung das Schaubild für die Biegemomente des gegebenen statisch unbestimmten Trägers und hierdurch die Lage des Wendepunktes der elastischen Linie zu gewinnen.

4. Als viertes Beispiel wählen wir den auf zwei Seiten fest eingespannten Stab nach Abb. 118, der in seiner xz -Ebene durch eine Einzelkraft P in der Entfernung a vom linken Auflager belastet ist. Derselbe ist zweifach statisch unbestimmt (Seite 124). Als statisch unbestimmte Größen wählen wir die Einspannungsmomente M_1 und M_2 , der zugeordnete Hauptträger ist demnach ein einfacher Balkenträger, der mittels Kipp- und Rollenkipplager auf festen Stützen ruht. Infolge der festen Einspannung müßte der zugeordnete Hauptträger eigentlich auf beiden Seiten in horizontaler Richtung unverschieblich sein, also feste

Kipplager besitzen. Von diesem Umstande sieht man aber wegen seines geringen Einflusses in den Näherungsrechnungen der Technik ab. Würde man ihn bei sehr langen Stäben in Rechnung ziehen wollen, so wäre der auf beiden Seiten fest eingespannte Stab nicht zweifach sondern infolge der bei der Durchbiegung auftretenden Zugkräfte in Richtung der Stabachse dreifach statisch unbestimmt. Der statisch bestimmte Hauptträger ist jetzt durch die gegebene Kraft P (Abb. 118a), das Moment $M_1 = X_1$ (Abb. 118b) und das Moment $M_2 = X_2$ (Abb. 118c) belastet zu denken. Diese drei Belastungsfälle übereinandergelegt ergeben den Belastungsfall des gegebenen fest eingespannten Stabes. Die statischen Gleichungen für den gegebenen Stab lauten

$$P = A + B \quad \text{und} \quad Al - X_1 - Pb + X_2 = 0, \tag{m}$$

woraus

$$A = \frac{X_1 - X_2}{l} + \frac{Pb}{l} = A_1 + A_2 + A_3 \quad \text{und} \quad B = \frac{X_2 - X_1}{l} + \frac{Pa}{l} = B_1 + B_2 + B_3$$

folgen.

Wir bestimmen zunächst die statisch unbestimmten Größen X_1, X_2 aus den beiden Bedingungen, daß die Verdrehungswinkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ bzw. ψ_1, ψ_2, ψ_3 , welche an den beiden Auflagern für die Belastungsfälle nach den Abb. 118 a, b, c des statisch bestimmten Hauptträgers entstehen, übereinander gelagert je den Verdrehungswinkel Null ergeben müssen, da der gegebene statisch unbestimmte Stab sich so verformen muß, daß die Tangenten an die elastische Linie desselben an den Einspannungsstellen parallel zur x -Achse bleiben müssen. Dem entsprechend bestehen die Bedingungen $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$ und $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0$. Die Winkel φ_1, \dots und ψ_1, \dots sind, wie wir im Punkte 7 sehen werden, sehr leicht zu bestimmen, ohne daß wir erst, wie freilich jetzt noch notwendig, die Gleichungen der elastischen Linien für die drei Belastungsfälle nach den Abb. 118 a, b, c aufzustellen brauchen. Diese Differentialgleichungen für die elastischen Linien lauten:

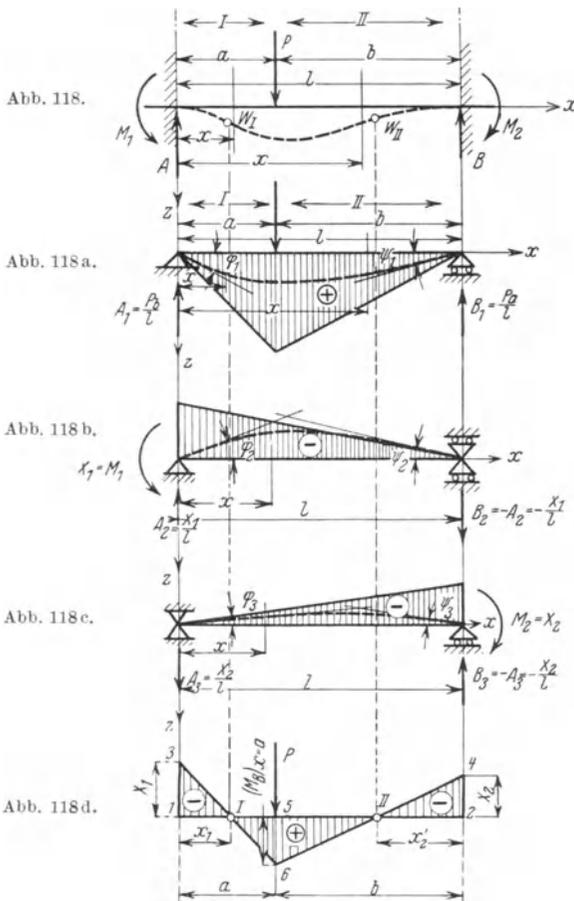


Abb. 118, 118 a, b, c und d.

$$-EJ_y \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{Pb}{l} x|_I - P(x-a)|_{II}, \quad -EJ_y \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{X_1 x}{l} - X_1, \quad -EJ_y \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{X_2 x}{l}.$$

Durch Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} -EJ_y \frac{dz}{dx} &= \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_I - P \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_{II} + C_1, & -EJ_y \frac{dz}{dx} &= \frac{X_1}{l} \cdot \frac{x^2}{2} - X_1 x + C_3, \\ & -EJ_y \frac{dz}{dx} &= -\frac{X_2}{l} \frac{x^2}{2} + C_5, \\ -EJ_y z &= \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x^3}{6} \Big|_I - P \frac{(x-a)^3}{6} \Big|_{II} + C_1 x + C_2, \\ -EJ_y z &= \frac{X_1}{l} \cdot \frac{x^3}{6} - X_1 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4, & -EJ_y z &= -\frac{X_2}{l} \cdot \frac{x^3}{6} + C_5 x + C_6. \end{aligned}$$

Die Konstanten C_1 bis C_6 ergeben sich aus den für jeden der drei Belastungsfälle anwendbaren Bedingungen, daß für $x=0$, $z=0$ und für $x=l$, $z=0$ sein muß. Ihnen zur Folge wird $C_2=C_4=C_6=0$ und bestehen die Bestimmungsgleichungen

$$0 = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{P(l-a)^3}{6} + C_1 l, \quad 0 = \frac{X_1}{l} \cdot \frac{l^3}{6} - X_1 \frac{l^2}{2} + C_3 l, \quad 0 = -\frac{X_2}{l} \cdot \frac{l^3}{6} + C_5 l,$$

aus welchen

$$C_1 = -\frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2), \quad C_3 = \frac{X_1 l}{3}, \quad C_5 = \frac{X_2 l}{6}$$

folgt. Somit gehen die zur Bestimmung der Verdrehungswinkel dienenden ersten Integrale der Differentialgleichung der elastischen Linien in

$$\begin{aligned} -EJ_y \frac{dz}{dx} &= \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_I - \frac{P(x-a)^2}{2} \Big|_{II} - \frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2), \\ -EJ_y \frac{dz}{dx} &= \frac{X_1 x^2}{2l} - X_1 x + X_1 \frac{l}{3}, & -EJ_y \frac{dz}{dx} &= -X_2 \frac{x^2}{2l} + X_2 \frac{l}{6} \end{aligned}$$

über. Aus diesen Gleichungen folgt für $x=0$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{Pba}{6lEJ_y}(2l-a), & \varphi_2 &= -\frac{X_1 l}{3EJ_y}, & \varphi_3 &= -\frac{X_2 l}{6EJ_y} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{und für } x=l \\ \psi_1 = -\frac{Pba(l+a)}{6lEJ_y}, \quad \psi_2 = \frac{X_1 l}{6EJ_y}, \quad \psi_3 = \frac{X_2 l}{3EJ_y}. \end{array} \right\} \quad (n)$$

Mit diesen Winkelwerten ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für X_1 und X_2

$$\frac{Pba(2l-a)}{6EJ_y l} - \frac{X_1 l}{3EJ_y} - \frac{X_2 l}{6EJ_y} = 0, \quad -\frac{Pba(l+a)}{6EJ_y l} + \frac{X_1 l}{6EJ_y} + \frac{X_2 l}{3EJ_y} = 0, \quad (o)$$

aus denen

$$X_1 = \frac{Pab^2}{l^2} \quad (p) \quad \text{und} \quad X_2 = \frac{Pa^2 b}{l^2} \quad (p')$$

folgt, d. h. $X_1 = X_2 = b:a$. Setzen wir X_1 und X_2 in die statischen Gleichungen (m) ein, so erhalten wir die Auflagerreaktionen mit

$$A = \frac{Pb^2(2a+l)}{l^3}, \quad B = \frac{Pa^2(2b+l)}{l^3}. \quad (q)$$

Wir können zur Bestimmung von X_1 und X_2 auch von der Gleichung der elastischen Linie des fest eingespannten Stabes, nämlich

$$-EJ_y \frac{d^2 z}{dx^2} = \left[\frac{X_1 - X_2}{l} + \frac{Pb}{l} \right] x - X_1 \Big|_I - P(x-a) \Big|_{II} \quad (r)$$

ausgehen, dieselbe integrieren und die beiden Integrationskonstanten sowie X_1 und X_2 aus den vier Bedingungen

$$\begin{aligned} x = 0, \quad z = 0, \quad x = l, \quad z = 0, \\ x = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0, \quad x = l, \quad \frac{dz}{dx} = 0 \end{aligned}$$

bestimmen.

Das Biegemoment $(M_B)_{x=a}$ unter der Last P wird bei Benützung der gefundenen Werte von X_1 und X_2

$$(M_B)_{x=a} = \left[\frac{X_1 - X_2}{l} + \frac{Pb}{l} \right] a - X_1 = \frac{2a^2 b^2 P}{l^3} = X_1 \frac{2a}{l}. \quad (s)$$

Es folgt $(M_B)_{x=a} < X_1$, der gefährliche Querschnitt liegt somit am linken Auflager.

Unter Zuhilfenahme der gefundenen Werte von X_1 , X_2 und $(M_B)_{x=a}$ ist es möglich, das Momentenschaubild für den gegebenen statisch unbestimmten Stab direkt zu zeichnen (Abb. 118d). Dasselbe kann auch durch Übereinanderlagerung der Momentenschaubilder für die drei Belastungsfälle nach den Abb. 118a, b, c gewonnen werden. Die elastische Linie zeigt zwei Wendepunkte W_I und W_{II} , deren Lagen den beiden Nullstellen der Biegemomente in I und II entsprechen und durch x_1 und x'_2 festgelegt werden. Die Werte x_1 und x'_2 ergeben sich aus den beiden ähnlichen Dreiecken $\bar{1}, 3, I$ und $I, 5, 6$ bzw. $5, 6, II$ und $2, 4, II$. Aus ihnen folgt

$$X_1 : x_1 = (M_B)_{x=a} : (a - x_1) \quad \text{bzw.} \quad X_2 : x'_2 = (M_B)_{x=a} : (b - x'_2)$$

und somit

$$x_1 = \frac{al}{2a+l} \quad \text{bzw.} \quad x'_2 = \frac{bl}{2b+l}. \quad (t)$$

Die größte Durchbiegung liegt im Abschnitte II und ergibt sich für einen Abstand x_g vom linken Auflager, der aus der Extremwertsbedingung für die Durchbiegung z des gegebenen Stabes, d. i.

$$0 = \left(\frac{X_1 - X_2}{l} + \frac{Pb}{l} \right) \frac{x^2}{2} - X_1 x - \frac{P(x-a)^2}{2}$$

bestimmt werden kann. Rechts steht das erste Integral der obigen Differentialgleichung (r) der elastischen Linie, die Integrationskonstante ist Null, weil für $x = 0$, $\frac{dz}{dx} = 0$ sein muß. Nach Einsetzen der Werte von X_1 und X_2 und leichter Rechnung kann aus der letzten Gleichung $x_g = \frac{l^2}{2b+l}$ gefolgert werden. Damit kann die größte Durchbiegung aus dem zweiten Integrale der Differentialgleichung der elastischen Linie (r) (auch die zweite Integrationskonstante ist Null, da für $x = 0$ $z = 0$ sein muß) mit

$$f = \frac{P}{EJ_v} \cdot \frac{2a^2 b^3}{3(2b+l)^2} \quad (u)$$

gefunden werden.

Greift im besonderen die Kraft P in der Mitte des Trägers an, so haben wir in den erhaltenen Formeln $a = b = \frac{l}{2}$ zu setzen, wodurch wir

$$\begin{aligned} X_1 = X_2 = \frac{Pl}{8}, \quad (p_1) \quad A = B = \frac{P}{2}, \quad (q_1) \quad x_1 = x'_2 = \frac{l}{4}, \quad (t_1) \\ x_g = \frac{l}{2}, \quad f = \frac{Pl^3}{192EJ_v} \end{aligned} \quad (u_1)$$

erhalten. Vergleichen wir den zuletzt gefundenen Wert für die Durchbiegung in der Mitte des fest eingespannten Stabes mit jenen für den in gleicher Weise

belasteten frei aufliegenden Träger [Gleichung (g) auf Seite 254], so finden wir, daß infolge der festen Einspannung ersterer nur den vierten Teil des letzteren beträgt.

7. Graphisches und rechnerisches Verfahren von Mohr zur Bestimmung von Durchbiegungen und Verdrehungswinkeln bei gerader Biegung.

Von Mohr (L) rührt der Gedanke her, die elastische Linie eines vornehmlich auf gerade Biegung beanspruchten Stabes als Seilkurve einer zugehörigen Belastungsfläche anzusehen, wodurch die Möglichkeit gegeben erscheint, die Verdrehungswinkel, welche die Querschnitte erfahren, und die elastische Linie auf zeichnerischem Wege oder die Bestimmung von einzelnen Querschnittsverdrehungen und einzelnen Durchbiegungswerten von Punkten der Stabachse durch Rechnung rasch zu finden.

Auf einem Balkenträger liege in der xz -Ebene die Belastungsfläche $I, 2, B$ (Abb. 119), deren Umrandung B , bezogen auf das eingezeichnete Koordinatensystem, die Gleichung $q = f(x)$ besitzt, worin q die normal zur Stabachse gedachte

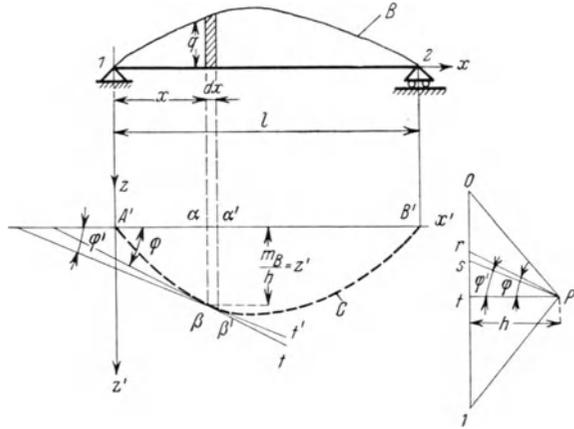


Abb. 119.

Belastung pro Längeneinheit im Querschnitt in der Entfernung x vom linken Auflager bedeutet. Das zu dieser Belastungsfläche gehörige Momentenschaubild ist durch die zur x -Achse parallel gedachte Schlußlinie $A' B'$ und die Seilkurve C mit der Gleichung $z' = \varphi(x')$ begrenzt, derart, daß im Querschnitte x das Biegemoment m_B der links von demselben liegenden Belastung dividiert durch die zum Momentenschaubild gehörige Poldistanz $h = P t$ des Kräftecks $O P I$,

in dem $O I = \int_0^l q dx$ ist, als Abschnitt α, β zwischen der Seilkurve C und der

Schlußlinie $A' B'$ erscheint. Ziehen wir in den den Abszissen x und $x + dx$ entsprechenden Punkten der Seilkurve Tangenten t und t' , welche mit der x -Achse den Winkel φ und φ' einschließen, ferner vom Pole P Parallele Pr und Ps zu diesen Tangenten, so stellt die Strecke rs den Belastungswert $q dx$ vor, der einem unendlich schmalen Streifen der Belastungsfläche entspricht. Aus der Abb. 119 folgt $\text{tg } \varphi = \frac{r, t}{h}$ und $\text{tg } \varphi' = \frac{s, t'}{h}$ (φ und φ' sind die Richtungswinkel der Tangenten t und t') und somit $\text{tg } \varphi' - \text{tg } \varphi = \frac{s, t' - r, t}{h} = - \frac{q dx}{h}$. Nun ist aber mit Bezug auf die Seilkurve $\text{tg } \varphi = \frac{dz'}{dx'}$ und daher $\text{tg } \varphi' - \text{tg } \varphi = d\left(\frac{dz'}{dx'}\right)$; somit können wir die zuletzt erhaltene Beziehung auch in der Form

$$\frac{d\left(\frac{dz'}{dx'}\right)}{dx'} = \frac{d^2 z'}{dx'^2} = - \frac{q}{h} \tag{a}$$

schreiben, die als Differentialgleichung der Seilkurve bezeichnet wird. Ver-

gleichem wir die letztere, die natürlich für eine beliebige Stützung des Stabes gültig bleibt, mit der Differentialgleichung der elastischen Linie $\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{M_{By}}{EJ_y}$, so bemerken wir, daß diese als Seilkurve auffaßbar ist, die zur Momentenfläche M_{By} als Belastungsfläche für die Poldistanz EJ_y gehört. So wie z' ein auf die Poldistanz h reduziertes Bieugungsmoment bedeutet und zwar für die Belastungsfläche $1, 2, B$ in Abb. 119, das bezogen ist auf das Koordinatensystem $x'z'$, in dessen x' -Achse die Nullstellen der Bieugungsmomente liegen, so kann die Durchbiegung z als Bieugungsmoment reduziert auf die Poldistanz EJ_y für die Momentenfläche als Belastungsfläche aufgefaßt werden, das auf das Koordinatensystem xy bezogen ist, in dessen x -Achse die Nullstellen der Bieugungsmomente der genannten Belastungsfläche, d. h. der Stellen liegen, in denen die Durchbiegung z verschwindet.

Das Gesagte wird aus dem Folgenden noch deutlicher werden. Aus der Differentialgleichung der elastischen Linie

$$-EJ_y \frac{d^2z}{dx^2} = M_{By} \quad (\alpha)$$

folgt durch zweimalige Integration

$$-EJ_y \frac{dz}{dx} = \int M_{By} dx + C_1 \quad (\beta)$$

und

$$-EJ_y z = \int dx \int M_{By} dx + C_1 x + C_2. \quad (\gamma)$$

Nun ist, wenn wir in dem letzten Ausdruck das Doppelintegral partiell integrieren,

$$\int dx \int M_{By} dx = x \int M_{By} dx - \int x M_{By} dx. \quad (\delta)$$

In Abb. 120 hat jeder Punkt der krummen Linie S von der x -Achse einen Abstand gleich dem Bieugungsmoment einer auf einen Stab a, b mit der x -Achse als Stabachse aufgebracht gedachten geraden Belastung für den Querschnitt, der dem Punkte zugeordnet ist. Wir fassen nunmehr die Fläche a, b, S als neue (zweite) Belastungsfläche für den geraden Stab auf. Der dargestellte schmale Flächenstreifen von der Breite $d\xi$, der seiner Lage nach durch die Abszisse ξ festgelegt ist, hat dann im Querschnitt x ein Bieugungsmoment $-M_{By} d\xi (x - \xi)$. (Ist M_{By} positiv, so entspricht ihm eine „Kraft“ $M_{By} d\xi$

nach abwärts, also ein im negativen Sinne drehendes Moment.) Der ganzen links vom Querschnitte x liegenden schraffierten Belastungsfläche kommt im Querschnitte x das Bieugungsmoment

$$\bar{M}_{By} = -\int_{\xi_1}^x M_{By} d\xi (x - \xi) = -x \int_{\xi_1}^x M_{By} d\xi + \int_{\xi_1}^x M_{By} \xi d\xi$$

zu, da x als konstant zu betrachten ist. Mit Rückblick auf dieses Ergebnis und unter Bezugnahme auf die Gleichung (δ) kann die Beziehung (γ) auch in der Form

$$-EJ_y z = -\bar{M}_{By} + C_1 x + C_2 \quad (\epsilon)$$

geschrieben werden. \bar{M}_{By} hat die Dimension tm^3 , wenn M_{By} in tm aus-

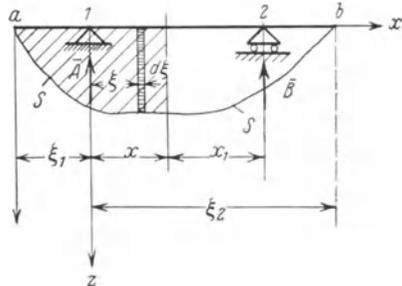


Abb. 120.

gedrückt wird. Der Wert der Konstanten C_1 und C_2 hängt von den Auflagerbedingungen ab.

A. Stab auf zwei Stützen (Kipp- und Rollenkipplager) mit vorkragenden Enden und einfacher Balkenträger ohne vorkragende Enden (Abb. 120). Die Auflagerbedingungen besagen, daß für $x = 0, z = 0$ und für $x = l, z = 0$ sein muß, entsprechend den Gleichungen

$$0 = -(\bar{M}_{By})_{x=0} + C_2 \quad \text{und} \quad 0 = -(\bar{M}_B)_{x=l} + C_1 l + C_2,$$

woraus $C_2 = (\bar{M}_{By})_{x=0}$ und $C_1 = \frac{(\bar{M}_{By})_{x=l} - (\bar{M}_{By})_{x=0}}{l}$ folgt. Mit diesen Werten geht die allgemeine Gleichung (ε) in

$$\left. \begin{aligned} -EJ_y z &= -\bar{M}_{By} + \frac{(\bar{M}_{By})_{x=l} - (\bar{M}_{By})_{x=0}}{l} x + (\bar{M}_{By})_{x=0} = -\bar{M}_{By} \\ \text{oder} \\ EJ_y z &= \bar{M}_{By} - (\bar{M}_{By})_{x=0} \frac{x_1}{l} - (\bar{M}_{By})_{x=l} \frac{x}{l} = \bar{M}_{By}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

\bar{M}_{By} besitzt die Dimension von \bar{M}_{By} , d. i. eines Biegemomentes der Momentenfläche als Belastungsfläche des Stabes. Aus (b) folgt die bereits gemachte Bemerkung, daß die Durchbiegung z als ein auf die Poldistanz EJ_y reduziertes Biegemoment angesehen werden kann. Nachdem

$$(\bar{M}_{By})_{x=l} = -\int_{\xi_1}^l M_{By} d\xi (l - \xi) = -\bar{A}' l, \quad (\bar{M}_{By})_{x=0} = \int_{\xi_1}^0 M_{By} \xi d\xi = \bar{B}' l$$

mit \bar{A}' bzw. \bar{B}' als Auflagerreaktionen im Stützpunkte 1 bzw. 2 infolge der Belastung des Stabes durch die Momentenfläche vom linken Endquerschnitt bis zum Stützpunkte 2 bzw. 1, so können wir der Beziehung (b) auch die Form

$$EJ_y z = \bar{M}_{By} - \bar{B}' x_1 + \bar{A}' x = \bar{M}_{By} \quad (b')$$

geben.

Ist der Stab ein gewöhnlicher Balkenträger ohne vorkragende Enden, so wird $\bar{B}' = 0$ und $\bar{A}' = \bar{A}$ mit \bar{A} als Auflagerreaktion am linken Stützpunkt, so daß die Gleichung (b') in

$$EJ_y z = \bar{A} x + \bar{M}_{By} = \bar{M}_{By} \quad (b'')$$

übergeht. Darnach ist $EJ_y z$ so zu berechnen, wie man ein Biegemoment für einen beliebigen Querschnitt eines Balkenträgers berechnet, der in beliebiger Weise belastet ist.

Wenn in Abb. 120 die Abstände der Kurve S von der x -Achse nicht die Biegemomente, sondern diese dividiert durch EJ_y darstellen, so kann man in den Gleichungen (b), (b') und (b'') links EJ_y weglassen, die rechts stehenden Momente beziehen sich dann auf die Belastungsfläche $\frac{M_{By}}{EJ_y}$.

Differenzieren wir die Gleichung (b') bzw. (b'') nach x , so erhalten wir

$$EJ_y \frac{dz}{dx} = \bar{Q}_y + \bar{B}' + \bar{A}' = \frac{d\bar{M}_{By}}{dx} = \bar{Q}_y \quad (c)$$

bzw.

$$EJ_y \frac{dz}{dx} = \bar{Q}_y + \bar{A} = \frac{d\bar{M}_{By}}{dx} = \bar{Q}_y. \quad (c')$$

In diesen Gleichungen haben wir $\bar{Q}_y = \frac{d\bar{M}_{By}}{dx}$ und $\bar{Q}_y = \frac{d\bar{M}_{By}}{dx}$ gesetzt, weil

diese Differentialquotienten dann, wenn \overline{M}_{By} und $\overline{\overline{M}}_{By}$ Biegemomente von wirklichen Kräften wären, bekanntlich die den betreffenden Querschnitten zugeordneten Querkräfte vorstellen würden. \overline{Q}_y und $\overline{\overline{Q}}_y$ können als „Querkräfte“ für die Momentenfläche des Stabes als Belastungsfläche bezeichnet werden. Sie haben so wie EJ_y die Dimension tm^2 . Nach (c) und (c') ist der Verdrehungswinkel $\alpha = \frac{dz}{dx}$ eines Querschnittes des Stabes als Querkraft $\overline{\overline{Q}}_y$ der Momentenfläche als Belastungsfläche dividiert durch EJ_y aufzufassen. Die Division durch EJ_y kann auch entfallen, wenn man \overline{Q}_y als Querkraft einer Momentenfläche auffaßt, deren Abschnitte parallel zur z -Achse $\frac{M_{By}}{EJ_y}$ sind.

Das Produkt αEJ_y (oder bei $\frac{M_{By}}{EJ_y}$ als Belastungsfläche α allein) ist für einen bestimmten Querschnitt eines Balkenträger nach Gleichung (c') so zu berechnen, wie man eine Querkraft für eine gegebene Belastung des Trägers bestimmt.

B. Kragträger. In Abb. 121 sei S die Momentenkurve für eine auf gerade Biegung beanspruchende Belastung des Kragträgers. Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 der allgemeinen Gleichung (ε) ergeben sich aus den Bedingungen $x = 0$, $z = 0$ und $x = 0$, $\frac{dz}{dx} = 0$, woraus $C_2 = (\overline{M}_{By})_{x=0} = 0$ und $C_1 = 0$, also

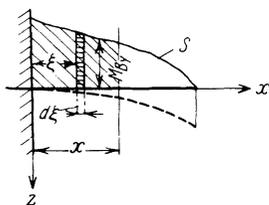


Abb. 121.

$$EJ_y z = \overline{M}_{By}, \text{ d. h.}$$

$$z = \frac{\overline{M}_{By}}{EJ_y} \quad (d)$$

gefolgert werden kann. Der Ausdruck $z EJ_y$ oder die Durchbiegung z allein (letztere für den Fall als das Biegemomentenschaubild die Werte $\frac{M_{By}}{EJ_y}$ graphisch darstellt) für einen Querschnitt x ist sonach das Biegemoment für diesen Querschnitt der links vom

Querschnitt liegenden Momentenfläche als Belastungsfläche.

Aus (d) erhalten wir durch Differentiation

$$EJ_y \frac{dz}{dx} = EJ_y \alpha = \frac{d\overline{M}_{By}}{dx} = \overline{Q}_y, \quad \text{d. h.} \quad \alpha = \frac{dz}{dx} = \frac{\overline{Q}_y}{EJ_y}, \quad (e)$$

was wir auch als Sonderfall aus der allgemeineren Gleichung (c) finden können¹. Daraus geht hervor, daß $EJ_y \alpha$ oder der Verdrehungswinkel selbst für einen Querschnitt x als Querkraft der links vom Träger liegenden Momentenfläche M_{By} oder $\frac{M_{By}}{EJ_y}$ als Belastungsfläche aufgefaßt werden kann.

Auf dem Vorstehenden beruhen die im Titel dieses Punktes angeführten, von Mohr herrührenden graphischen und rechnerischen Verfahren.

1. Zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung der elastischen Linie. Dasselbe soll im folgenden an einem einfachen Beispiele näher erläutert werden. Ein an seinen beiden Enden über die Auflager 1 und 2 vorkragender Balkenträger (Abb. 122) aus Holz ($E = 100000 \text{ kg/cm}^2$) mit einem Trägheitsmoment $J_y = 149000 \text{ cm}^4$ und den eingezeichneten Längsausmaßen sei symmetrisch zur Mitte durch je zwei Kräfte $P_1 = P_4 = 3 \text{ t}$ und $P_2 = P_3 = 4 \text{ t}$ belastet. Der Längenmaßstab, in dem die Abbildung gezeichnet ist, ist 1 : 100. Wir zeichnen zunächst unter Annahme eines Kraftmaßstabes $1 \text{ t} = 5 \text{ mm}$ und einer Pol-distanz $H_1 = 6 \text{ t}$ das Krafteck 0,4 und mit diesem das zugehörige Momenten-

¹ Hierzu müssen wir in Abb. 120 die Stützpunkte 1 und 2 unendlich nahe annehmen und die Belastungsfläche über $a1$ verschwinden lassen.

schaubild $III \dots VI$. Zur Abnahme der Biegemomente M_{By} , die durchwegs negativ sind, im Momentenschaubild bedienen wir uns eines Momentenmaßstabes, in welchem $1 \text{ cm} = 6 \text{ mt}$. Nunmehr nehmen wir dieses Momentenschaubild $I \dots VI$ als Belastungsfläche für den gegebenen Träger, die in Abb. 119 durch $IB2$ vorgestellt wurde. Die Ordinaten der Belastungsfläche $IB2$ hatten die Dimension Tonnen pro Meter (t/m), die Ordinaten der nunmehrigen Belastungsfläche haben die Dimension eines Biegemomentes, d. i. Tonnen mal Meter (tm). Zur Belastungsfläche $I \dots VI$ bilden wir mit EJ_y als Poldistanz die zugehörige Seilkurve, welche nach Obigem bereits die elastische Linie des in gegebener Weise belasteten Stabes ist. Das geschieht in der bekannten Weise dadurch, daß wir uns die Belastungsfläche in eine größere oder kleinere Zahl von Teilflächen je nach dem gewollten Genauigkeitsgrad zerlegt denken, zu jeder Belastungsteilfläche die zugehörige „Kraft“ berechnen, die bei Berücksichtigung der Dimensionen gleich der Größe der Fläche ist und in deren Schwerpunkt angreift, und hierauf für das „Kraftsystem das zugehörige zweite Momentenschaubild entwerfen, das der Seilkurve, also der elastischen Linie umschrieben ist. Während für die Konstruktion der Seilkurve nach Abb. 119 die Dimensionen der einem Flächenstreifen entsprechenden Kraft durch Tonnen, d. i. t, ausdrückbar ist, wird jetzt die Dimension einer einer Teilfläche des Momentenschaubildes $I \dots VI$ entsprechenden „Kraft“ $\text{tm} \cdot \text{m}$, d. i. tm^2 sein. Als Teilflächen wählen wir die Dreiecke I, a, VI und IV, a', V , die Trapeze a, b, II, VI und a', b', III, V und das Rechteck II, III, b, b' . Zur Berechnung ihrer Flächen müssen wir die Dimensionen parallel zur x -Achse im Längenmaßstab (m) die Dimensionen parallel zur z -Achse im Momentenmaßstab (mt) abnehmen. Wir erhalten hierdurch die „Kräfte“ $\bar{P}_1 = \bar{P}_5 = 6 \text{ tm}^2$, $\bar{P}_2 = \bar{P}_4 = 4 \text{ tm}^2$, $\bar{P}_3 = 4 \text{ tm}^2$. Dieselben werden entgegengesetzt der positiven Richtung der z -Achse gezeichnet, da die Biegemomente M_{By} durchwegs negativ sind. Die Poldistanz H_2 des „Kraft“-eckes 0,5, das zum zweiten Momentenschaubild gehört, soll nach Obigem EJ_y sein. Wir erhalten dann die Durchbiegungen der Stabachse im Längenmaßstab, d. h. wenn derselbe durch das Verhältnis $1 : n$ festgelegt ist, n mal kleiner, als der Wirklichkeit entspricht. Da die Durchbiegungen an sich schon sehr klein sind, so würde ein maßstäblicher Vergleich der Durchbiegungen der verschiedenen

Punkte der Stabachse kaum möglich sein. Nehmen wir $H_2 = \frac{EJ_y}{n}$, so erhalten wir die Durchbiegungen in natürlicher Größe. Da auch das noch nicht vollkommen befriedigen wird, entwirft man das zweite Momentenschaubild gewöhnlich mit einer m -fachen Verzerrung, d. h. derart, daß die Durchbiegungen m mal größer erscheinen, als der Wirklichkeit entspricht. Hierzu müssen wir die Poldistanz $H_2 = \frac{EJ_y}{nm}$ wählen. Die Dimension von H_2 ist natürlich ebenso wie jene der „Kräfte“ mit denen das zweite Momentenschaubild entworfen wird, tm^2 .

Wählen wir $m = 2$ und wie oben $n = 100$, so wird $H_2 = \frac{10^5 \cdot 0,0149}{200} = 7,45 \text{ tm}^2$.

Dem zweiten Momentenschaubild legen wir als Maßstab der „Kräfte“ $1 \text{ tm}^2 = 2 \text{ mm}$ zugrunde. Mit Hilfe des Kräfteckes 0,5 kann das Seilpolygon $O'II' \dots VI'$ gefunden werden, dessen Seiten die Seilkurve in den Punkten $O', B_1, B_2, B_3, B_4, VI'$ berühren, so daß dieselbe genügend genau gezeichnet werden kann. Sie setzt sich aus Teilen einer quadratischen Parabel und je zwei symmetrisch zur Mitte gelegenen kubischen Parabelteilen zusammen. Die Nullstellen der Seilkurve befinden sich in den Auflagertransversalen in B_1 und B_4 , da die den Auflagern entsprechenden Punkte der Stabachse als unverschieblich angesehen werden können. Damit ist das Schaubild $aO'B_1B_2B_3B_4V'VI'ba$ gewonnen, aus dem die

doppelten Durchbiegungen direkt abgegriffen werden können. Am linken Stabende kann z. B. z mit 2,6 cm gemessen werden, d. h. die Durchbiegung ist dort 1,3 cm.

Mitunter werden die „Kräfte“ $\bar{P}_1 \dots \bar{P}_5$ auch dadurch errechnet, daß man beide Ausmaße parallel zur x - und z -Achse der zugehörigen Teilflächen im Längenmaßstab abnimmt, was bequemer ist. Man erhält die „Kräfte“ aber hierdurch H_1 mal kleiner, als der Wirklichkeit entspricht. Um diesen Fehler wieder auszugleichen, muß dann die Poldistanz für die Darstellung der elastischen Linie H_1 mal kleiner als oben angegeben, d. h. mit $H_2 = \frac{EJ_y}{H_1 m n}$ gewählt werden.

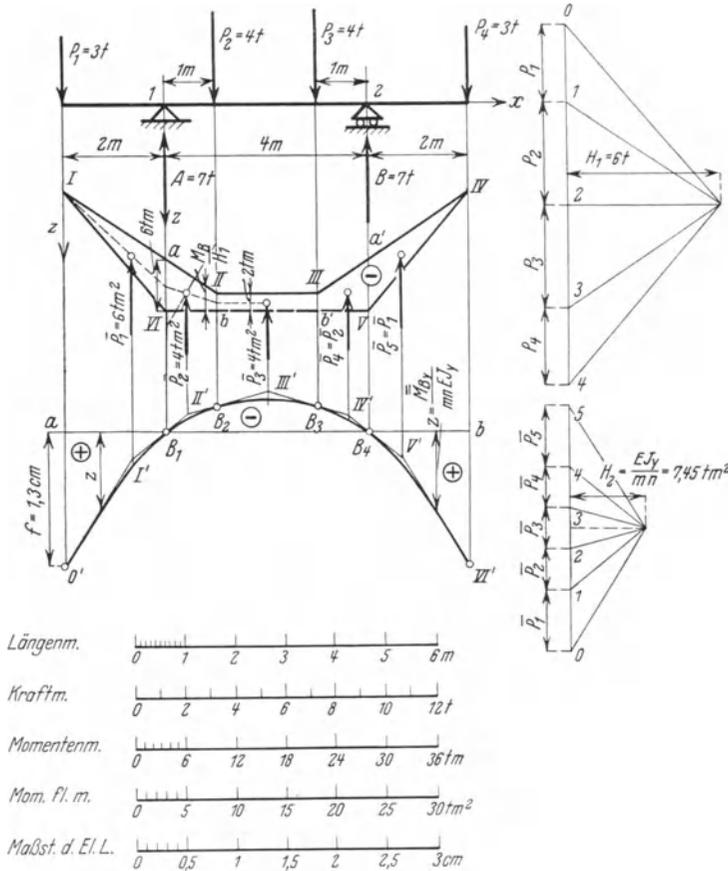


Abb. 122.

2. Zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung der Verdrehungswinkel. Um für den Träger nach Abb. 122 die Produkte $EJ_y \alpha$ graphisch zu bestimmen, zeichnen wir zunächst das Schaubild für die „Querkräfte“ \bar{Q}_y [Gleichung (c) auf Seite 273], der Momentenfläche als Belastungsfläche, indem wir von einer zur ursprünglichen Stabachse parallelen Geraden gg (Abb. 122) normal zu derselben entsprechend den rechten Begrenzungsquerschnitten der Teilflächen der Momentenfläche die „Kräfte“ $\bar{P}_1 \dots \bar{P}_5$ im Maßstabe $1 \text{ tm}^2 = 2 \text{ mm}$ auftragen. Wir erhalten hierdurch die Punkte O, I, II, III, IV, V . Die zwischen diesen Punkten liegenden Querkraftskurven sind mit Ausnahme der Geraden II, III

Teile von quadratischen Parabeln. Nunmehr haben wir die Bedingung zu verwenden, daß für $x = \frac{l}{2}$, $\frac{dz}{dx} = 0$ ist. Dementsprechend erhalten wir die Bezugslinie ab und das endgültige Querkraftsschaubild $aOcVbca$, dessen Abschnitte auf Geraden parallel zur z -Achse die Ausdrücke $EJ_y \frac{dz}{dx}$ ergeben. Wollte man die Verdrehungswinkel α direkt erhalten, so hätte man entweder das Querkraftsschaubild für Querkräfte $\frac{\bar{Q}_y}{EJ_y}$ entwerfen müssen, oder man nimmt die Verdrehungswinkel α aus Abb. 123 mit einem eigens konstruierten Maßstabe ab.

3. Rechnerisches Verfahren zur Bestimmung einiger Durchbiegungswerte und Verdrehungswinkel.

a) Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die Durchbiegung und die Verdrehungswinkel für den in Abb. 122 dargestellten Stab am linken Stabende und in der Mitte des Stabes zu bestimmen. Zur Berechnung der Durchbiegungen dient Gleichung (b') auf Seite 273, in der

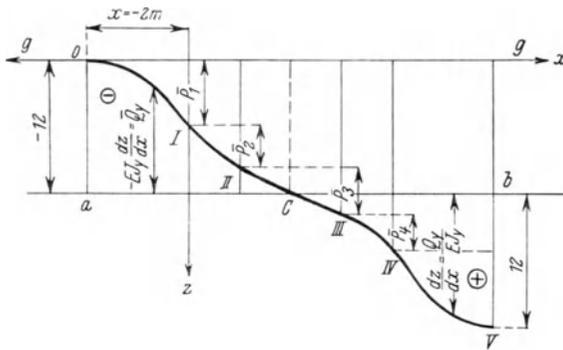


Abb. 123.

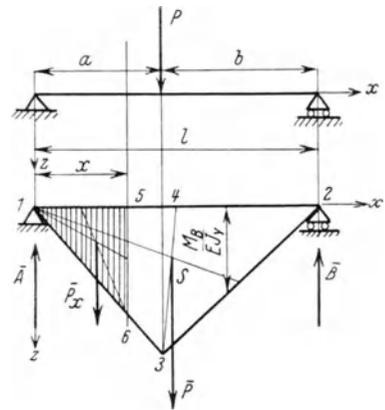


Abb. 124.

für das linke Stabende $\bar{M}_{By} = 0$, $x_1 = 6 \text{ m}$, $x = -2 \text{ m}$ für die Mitte $\bar{M}_{By} = 23 \frac{1}{3} \text{ tm}^3$, $x_1 = x = 2 \text{ m}$ zu setzen ist. Ferner wird $A' = -13 \text{ tm}^2$ und $B' = 1 \text{ tm}^2$. Somit erhalten wir für den linken Endquerschnitt $EJ_y z = -1 \cdot 6 + 13,2 = 20 \text{ tm}^3$ und $z = \frac{2000}{1490} = 1,3 \text{ cm}$, ferner für die Mitte $EJ_y z = -4 \cdot \frac{7}{4} - 13,2 + 23 \frac{1}{3}$, also $z = -0,3 \text{ cm}$. Zur Bestimmung der Verdrehungswinkel gehen wir von Gleichung (c) auf Seite 273 aus, in der wir für das linke Stabende $Q_y = 0$, für die Mitte $Q_y = 12 \text{ tm}^2$ einzusetzen haben. Es kann dann $EJ_y \frac{dz}{dx} = 1 - 13 = -12 \text{ tm}^2$, also $\frac{dz}{dx} = -\frac{12}{1490} = -0,008$ entsprechend einem negativen Verdrehungswinkel von $27'29''$ für den linken Endquerschnitt und $EJ_y \frac{dz}{dx} = 12 + 1 - 13 = 0$ für den Querschnitt in der Mitte in selbstverständlicher Weise gefolgert werden. (Siehe hierzu auch die graphische Bestimmung dieser Größen in den Abb. 122 und 123.)

b) Balkenträger mit einer Einzelkraft P nach Abb. 124 in der xz -Ebene belastet. Es soll die Durchbiegung und der Verdrehungswinkel in der Entfernung x vom linken Auflager berechnet werden, wenn $x < a$ ist. Wir skizzieren uns das Biegemomentenschaubild für $\frac{M_{By}}{EJ_y}$, in welchem die Höhe $\bar{34} = \frac{Pba}{lEJ_y}$ ist. Die Durchbiegung [Gleichung (b'') auf Seite 273] ist dem Biegemoment der Momentenfläche $\frac{M_{By}}{EJ_y}$ als Belastungsfläche des Stabes gleich. Die Auflagerkraft \bar{A} ist entgegengesetzt gleich der Komponente im linken Auflagerquerschnitt

der der Belastungsfläche entsprechenden „Kraft“ \bar{P} , die im Schwerpunkt S der Belastungsfläche angreift, und demnach

$$\bar{A} = \frac{\bar{P}}{l} \left[\frac{l}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2} - a \right) \right] = \frac{\bar{P}}{3l} (2l - a) = \frac{Pba}{6lEJ_y} (2l - a).$$

Das Biegemoment der links von x liegenden Belastungsfläche ist $\bar{P}_x \frac{x}{3}$ mit \bar{P}_x als „Kraft“, die der Fläche des schraffierten Dreiecks, in dem $\bar{56} = \frac{Pbx}{lEJ_y}$ ist, gleichkommt. Demnach wird $\bar{P}_x \frac{x}{3} = \frac{Pbx^3}{6lEJ_y}$. Schließlich wird die Durchbiegung $z = \frac{Pba}{6lEJ_y} (2l - a) - \frac{Pbx^3}{6lEJ_y}$. Setzen wir in dieser Formel $a = b = x = \frac{l}{2}$, so erhalten wir die Durchbiegung in der Mitte eines Stabes, der in seiner Mitte durch eine Kraft P belastet ist. Der Wert derselben wird

$$z = \frac{P}{6lEJ_y} \left[\frac{l^3}{8} \cdot \frac{3l}{2} - \frac{l^4}{16} \right] = \frac{Pl^3}{48EJ_y}.$$

Dieses Ergebnis wurde bereits auf Seite 254 auf einem anderen Wege erlangt.

Der Verdrehungswinkel α im Querschnitt x ist [Gleichung (c'), Seite 273] die Querkraft im Querschnitt x für $\frac{M_{By}}{EJ_y}$ als Belastungsfläche. Er wird

$$\frac{dz}{dx} = \alpha = \frac{Pba}{6lEJ_y} (2l - a) - \frac{Pbx^2}{2lEJ_y}.$$

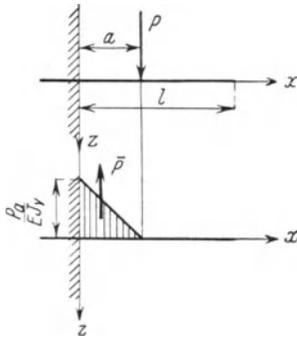


Abb. 125.

Für $a = b = \frac{l}{2}$, $x = 0$ erhalten wir $\alpha = \frac{Pl^2}{16EJ_y}$ [Gleichung (i), Seite 255].

Es wird empfohlen, die Berechnung der auf Seite 268 eingeführten Verdrehungswinkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und ψ_1, ψ_2, ψ_3 entsprechend den Belastungen nach den Abb. 118a, b, c unter Zuhilfenahme des Verfahrens von Mohr vorzunehmen.

c) Der Kragträger (Abb. 125) sei in der xz -Ebene durch eine Einzelkraft P im Abstände a von der Einspannungsstelle belastet. Es soll die Durchbiegung und der Verdrehungswinkel am rechten Stabende bestimmt werden. Wir skizzieren uns das Momentenschaubild $\frac{M_{By}}{EJ_y}$, das aus einem Dreieck mit der Höhe $\frac{Pa}{EJ_y}$ und der Basis a gebildet ist. Die Durchbiegung am rechten Stabende ist nach Gleichung (d) auf Seite 274 gleich dem Biegemoment der Momentenfläche $\frac{M_{By}}{EJ_y}$ als Belastungsfläche. Somit wird, wenn \bar{P} , d. i. die der Belastungsfläche entsprechende „Kraft“, gleich $\frac{Pa^2}{2EJ_y}$ gesetzt wird,

$$z = \bar{P} \left(l - a + \frac{2}{3} a \right) = \frac{Pa^2}{2EJ_y} \left(l - \frac{a}{3} \right).$$

Für $l = a$ erhalten wir als Durchbiegung den bereits auf Seite 257, Gleichung (q), gefundenen Wert.

Der Verdrehungswinkel α ist nach Gleichung (c) auf Seite 274 die „Querkraft“ der Momentenfläche $\frac{M_{By}}{EJ_y}$, also gleich $\alpha = \bar{P} = \frac{Pa^2}{2EJ_y}$. Derselbe ist für alle Querschnitte rechts der Kraft P der gleiche, da die elastische Linie in diesem Bereiche eine Gerade sein muß.

8. Stäbe mit veränderlichem Trägheitsmoment und Stäbe gleichen Biegezug- oder Zugwiderstandes.

a) Träger mit veränderlichem Trägheitsmoment und solche mit gleichem Biegezugwiderstand. Nach Gleichung (111 b) auf Seite 241 sind die größten Biegezugspannungen in einem Querschnitte x des Stabes bei gerader Beanspruchung auf Biegung in der xz -Ebene bei leichtverständlicher einfacherer Schreibung durch

$$(X_x)_{\max}^{\min} = \pm \frac{M_{By}}{W_{ab}} \tag{a}$$

bestimmt, worin $W_{ab} = \left| \frac{J_y}{z_{a,b}} \right|$ und $W_a < W_b$ sein soll. Da das Biegemoment M_{By} im allgemeinen eine Funktion von x ist, so stellt $(X_x)_{\max}^{\min}$ bei gegebenem Querschnitt des Stabes eine Funktion von x vor. Wenn die Aufgabe gestellt wird, daß die dem Zahlenwerte nach größere der Spannungen $(X_x)_{\max}^{\min}$ für alle Querschnitte des Stabes denselben Wert haben soll, so müßte, vorausgesetzt, daß die Gleichung (a) auch dann noch gelten würde, das kleinere von den beiden Widerstandsmomenten W_a mit x veränderlich sein. Wir hätten dann keinen geraden Stab im strengen Sinne des Wortes mehr vor uns. Es ist tatsächlich üblich, die Gleichung (a) auch für Stäbe mit veränderlichem Querschnitte als für praktische Verhältnisse genügend genau zu erachten, natürlich mit kleinerer Annäherung an die Wirklichkeit als für Stäbe mit konstantem Querschnitt.

Stäbe aus vorgegebenem Materiale, für welche bei gegebener Belastung die dem Zahlenwerte nach größte Biegezugspannung für jeden Querschnitt dieselbe ist, heißen solche mit gleichem Biegezugwiderstand. Gewöhnlich nimmt man als größten Zahlenwert einer solchen Biegezugspannung eine zulässige Spannung, die mit Rücksicht auf die Sicherheit gegen die Zerstörung des Stabes angepaßt an die einer Beanspruchung auf Biegung eigentümlichen relativen Festigkeitsverhältnisse gewählt wird. Diese zulässige als positiv angenommene Spannung wollen wir mit $(\sigma_B)_{zul}$ (lies: zulässige Beanspruchung auf Biegung) bezeichnen.

Die Widerstandsmomente der verschiedenen Querschnitte eines Stabes vom gleichen Biegezugwiderstand müssen bei getroffener Wahl von $(\sigma_B)_{zul}$, deren Größe von dem Stoffe abhängig sein wird, auf Grund des Gesagten der Bedingung

$$(\sigma_B)_{zul} = \frac{M_{By}}{W_a} \tag{124}$$

genügen, woraus

$$W_a = \frac{M_{By}}{(\sigma_B)_{zul}} \tag{124a}$$

folgt. Durch die Gleichung (124 a) ist das kleinere der beiden Widerstandsmomente W_a als Funktion von x bestimmt, wenn das Biegemoment M_{By} als solche gegeben ist.

Würde man W_a im ganzen Bereiche des Stabes konstant lassen mit der Bedingung, daß die im ganzen Bereiche des Stabes dem Zahlenwerte nach größte Biegezugspannung gleich $(\sigma_B)_{zul}$ wird, so wäre für alle Querschnitte

$$W_a = \frac{(M_{By})_{\max}}{(\sigma_B)_{zul}} \tag{124b}$$

zu setzen, worin $(M_{By})_{\max}$ der Zahlenwert des größten Biegemomentes im gefährlichen Querschnitt des Stabes ist.

Es ist leicht einzusehen, daß zu einem Stabe vorgegebener Länge, bestimmter Querschnittsform und Belastung mehr Material gebraucht wird, wenn die Widerstandsmomente nach Gleichung (124b) im ganzen Stabebereich konstant sind, als dann, wenn sie nach Gleichung (124a) veränderlich sind. Im letzteren Falle wird eben dort, wo das Biegemoment ein kleineres ist, auch ein kleinerer Querschnitt gewählt. Die folgenden Beispiele werden das Gesagte noch deutlicher machen.

a) Ein Kragträger aus Flußeisen von T-förmigem Querschnitt und der Länge l sei durch eine Einzelkraft P in der xz -Ebene belastet (Abb. 126). Der Zahlenwert des Biegemomentes für einen Querschnitt in der Entfernung x vom rechten Stabende ist dann

$|M_{By}| = Px$. Soll der Kragträger ein solcher von gleichem Biegezugwiderstand sein, so muß nach Gleichung (124a)

$$W_a = \frac{Px}{(\sigma_B)_{zul}}, \quad (b)$$

d. h. W_a proportional x sein. W_a bedeutet das Widerstandsmoment, das dem größten Fasernabstand des schraffierten Teiles des Querschnittes zugeordnet ist. Tragen wir uns

die nach Gleichung (a) erforderlichen Widerstandsmomente für jeden Querschnitt normal zur Stabachse auf, so erhalten wir die gerade Linie $1, 2$. Das größte Widerstandsmoment ist im Einspannungsquerschnitt nötig, und zwar $(W_a)_{\max} = \frac{Pl}{(\sigma_B)_{zul}}$. Am rechten Ende des Stabes müßte nach Gleichung (a) das Widerstandsmoment und damit die Querschnittsfläche gleich Null sein. Das ist praktisch natürlich nicht durchzuführen, würde aber überdies theoretisch anfechtbar sein, da bei Ansatz der Gleichung (124a) die Schubspannungen nicht berücksichtigt wurden. Man kommt diesbezüglich zu einer brauchbaren Annahme, wenn man die rechte Endquerschnittsfläche so wählt, daß in ihr die größte in der y -Achse auftretende Schubspannung \bar{Z}_x einen für den Stoff, aus welchem der Stab besteht, zulässigen Wert erreicht oder nicht überschreitet. Aus der Reihe der gebräuchlichen normierten T-Profile, für welche die Trägheitsmomente mit Bezug auf die Hauptzentralachsen, häufig auch die für die Berechnung der größten Schubspannungen $(\bar{Z}_x)_{\max}$ nötigen statischen Momente ein für allemal berechnet sind, ist unter Zuhilfenahme von Tabellenwerken (z. B. Hütte, ein Handbuch für Ingenieure) leicht herauszubekommen, welches Profil der genannten Annahme genügt. Das gefundene gedachte Profil für den rechten Endquerschnitt unseres Stabes habe ein Widerstandsmoment $(W_a)_{\min}$.

Würden wir die Widerstandsmomente von $(W_a)_{\min}$ zu $(W_a)_{\max}$ geradlinig anwachsen lassen, so erhielten wir die gerade Linie $1, 2'$ in Abb. 126. Praktisch könnte man dem Gesagten nahekommen, indem man ein T-förmiges Grundprofil vom Widerstandsmoment $(W_a)_{\min}$ wählt und auf dem Kopf dieser Profile Lamellen a, b, c, d, e von der Breite des Kopfes des Grundprofiles auflegt, derart, daß sich für jede zugelegte Platte das Widerstandsmoment stufenförmig erhöht.

Wenn das Profil nach Gleichung (124b) gewählt würde, so wäre für alle Querschnitte $W_a = (W_a)_{\max}$. Man brauchte dann dem schraffierten Teil in

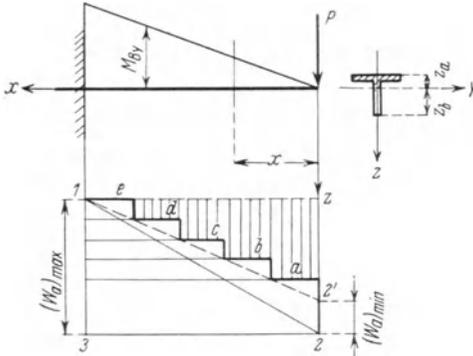


Abb 126.

Abb. 126 entsprechend mehr Material als in dem Falle, wo man das Wider­stands­moment stufenförmig erhöht.

b) Bei einfachen Querschnittsformen wie Rechtecken, Quadraten, Kreisen usw. kann man bei leicht formbaren Stoffen so vorgehen, daß man die Quer­schnitte für alle Werte von x einander ähnlich macht, oder wie z. B. bei recht­eckigen Querschnitten sie nur in einer Dimension veränderlich gestaltet.

Der Balkenträger nach Abb. 108, Seite 252 sei in seiner Mitte durch die Kraft P in der xz -Ebene belastet. Die Querschnitte seien Rechtecke. Der Träger soll überall gleichen Biege­widerstand besitzen, und zu diesem Behufe sollen sich die Querschnitte nur in der Höhe h parallel zur Kraftebene, nicht aber ihrer Breite b nach ändern. Das Biegemoment M_{By} für einen Querschnitt x links von der Mitte (rechts von der Mitte gestalten sich die Verhältnisse symmetrisch) wird $M_{By} = \frac{P}{2} x$, das Widerstands­moment $W_a = \frac{1}{6} b h^2$, und demnach lautet die

Grundgleichung (124a) $\frac{1}{6} b h^2 = \frac{P x}{2 (\sigma_B)_{zul}}$,

woraus

$$h^2 = \frac{3 P x}{b (\sigma_B)_{zul}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{3 P x}{4 b (\sigma_B)_{zul}} \quad (c)$$

folgt. $\frac{h}{2}$ ändert sich somit nach der Gleichung einer quadratischen Parabel, und der Träger nimmt dann die aus Abb. 127 ersichtliche Gestalt an, die an den Stellen A und B un­stetige Übergänge zeigt. Der größte Wert H der Höhe der Quer­schnitte ergibt sich aus (c) für

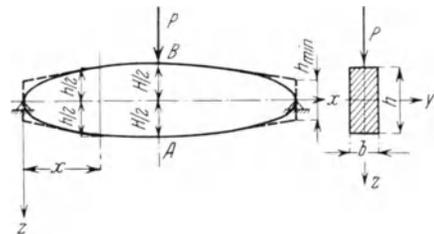


Abb. 127.

$$x = \frac{l}{2} \quad \text{mit} \quad H = \sqrt{\frac{3 P l}{2 b (\sigma_B)_{zul}}} \quad (c')$$

Theoretische Nullwerte für die Querschnittshöhe ergeben sich für $x = 0$ und $x = l$. Die Endquerschnitte kann man wieder, wie oben ausgeführt, entsprechend den größten Werten von \bar{Z}_x in der y -Achse und einem zulässigen Wert der Schubspannung wählen. Für einen rechteckigen Querschnitt ist nach Gleichung (d') Seite 253 $(\bar{Z}_x)_{\max} = \frac{3}{2} \frac{(Q_z)_{\max}}{F} = \frac{3}{2} \frac{P}{2 b h_{\min}}$ mit h_{\min} als kleinstem Wert der Querschnittshöhe. Setzt man diesen Wert gleich $(\tau)_{zul}$, d. i. gleich dem zulässigen Wert der Schubspannung, so erhält man aus der letzten Gleichung den kleinsten Wert von h an den Auflagern mit $h_{\min} = \frac{3}{4} \frac{P}{b (\tau_{zul})}$. Den Übergang von den Endquerschnitten mit den durch (c) geforderten kann man nach der aus Abb. 127 ersichtlichen Weise vornehmen.

Sollen für den in Abb. 108 dargestellten Belastungsfall die rechteckigen Querschnitte für die verschiedenen Werte x einander ähnlich bleiben, d. h. $\frac{b}{h} = c$ mit c als gegebener Konstanten sein, so lautet die Gleichung (124a) in leicht ersichtlicher Weise $\frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} c h^3 = \frac{P x}{2 (\sigma_B)_{zul}}$, woraus

$$h^3 = \frac{3 P x}{c (\sigma_B)_{zul}} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} \frac{P x}{c (\sigma_B)_{zul}} \quad (d)$$

folgt. h ändert sich nunmehr nach der Gleichung einer kubischen Parabel und erreicht seinen größten Wert H für $x = \frac{l}{2}$ mit $H = \sqrt[3]{\frac{3 P l}{2 c (\sigma_B)_{zul}}}$. Für die

Endquerschnitte gelten die gleichen Überlegungen wie in den zuvor angeführten Beispielen.

Auch die Differentialgleichung der elastischen Linie übernimmt man in der bekannten Form für Stäbe vom gleichen Biegungswiderstand bzw. allgemeiner für Stäbe mit nicht zu stark veränderlichen Querschnitten.

Wir wollen für den Belastungsfall nach Abb. 108 unter Voraussetzung rechteckiger Querschnitte mit konstanter Breite b und veränderlicher Höhe h die bezügliche Rechnung durchführen. Die Differentialgleichung der elastischen Linie, in der J_y jetzt mit x veränderlich ist, lautet dann

$$-E \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{P x}{2 J_y} = \frac{P x}{2 \cdot \frac{1}{12} b \frac{H^3 x^3}{\left(\frac{l}{2}\right)^3}} = \frac{6 P \left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{b H^3} x^{-\frac{1}{2}},$$

da nach den Gleichungen (c), (c') $\frac{h^3}{H^3} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$. Durch zweimalige Integration der

Differentialgleichung erhalten wir

$$-E \frac{dz}{dx} = \frac{6 P \left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{b H^3} 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + C_1 \quad \text{und} \quad -E z = \frac{12 P \left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{b H^3} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C_1 x + C_2.$$

Den Bedingungen $x = 0$, $z = 0$ und $x = \frac{l}{2}$, $\frac{dz}{dx} = 0$ entsprechen die Werte der Konstanten $C_2 = 0$ und $C_1 = -\frac{3 P l^2}{b H^3}$. Somit lautet die Gleichung der elasti-

schen Linie $z = \frac{3 P l^2}{E b H^3} x - \frac{8 P \left(\frac{l}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{E b H^3} x^{\frac{3}{2}}$. Der maximale Wert f der Durchbiegung für $x = \frac{l}{2}$ wird $f = \frac{P l^3}{2 E b H^3}$. Wäre H über die ganze Länge des Stabes konstant, so erhielten wir nach Gleichung (g) auf Seite 254 für die extreme Durchbiegung in der Mitte $f_1 = \frac{P l^3}{48 E J_y} = \frac{P l^3}{4 E b H^3}$, d. h. der Balkenträger mit gleichem Biegungswiderstand erleidet bei der durch Abb. 108 gegebenen Belastung eine doppelt so große extreme Durchbiegung als in dem Falle, wo die Höhe des Trägers

konstant ist und diese aus der Gleichung $(\sigma_B)_{zul} = \frac{P \frac{l}{4} \frac{H}{2}}{2 \cdot \frac{1}{12} b H^3} = \frac{3 P l}{2 b H^2}$ be-

stimmt wird. Bei dem Träger mit gleichem Biegungswiderstand wird also vergleichsweise an Material gespart, dagegen ist die Biegesteifigkeit kleiner.

b) Stäbe mit gleichem Zugwiderstand. Ein langer gerader, in Richtung seiner Achse durch sein Eigengewicht auf Zug beanspruchter Stab vom spezifischen Gewicht γ , der Länge l und der Querschnittsfläche F erleidet, von der Umgebung seiner in der einen Endquerschnittsstelle gedachten Festlegungsstelle abgesehen, einen linearen Spannungszustand σ_1 in der Richtung seiner Achse. Tritt zum Eigengewicht noch eine den Stab auf Zug beanspruchende Kraft P hinzu (Abb. 28, Seite 96), so überlagert sich der dieser Kraft entsprechende lineare

homogene Spannungszustand σ_2 dem Spannungszustand σ_1 , so daß wir für die Spannung in einem beliebigen Querschnitt

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{P}{F} + \gamma(l - x) \quad (e)$$

ansetzen können. Die Spannung σ ist im Festlegungsquerschnitt oder besser gesagt in der Nähe des Festlegungsquerschnittes ($x = 0$) am größten, nämlich $\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l$ und am unteren Endquerschnitte ($x = l$) am kleinsten, nämlich $\sigma_{\min} = \frac{P}{F}$. Je länger der Stab unter sonst gleichen Verhältnissen ist, um so mehr wird sich σ_{\max} von σ_{\min} unterscheiden. Führen wir für die Zugbeanspruchung einen aus der Erfahrung folgenden, für jeden Stoff besonderen zulässigen Wert $(\sigma_z)_{zul}$ (lies: zulässige Beanspruchung auf Zug) ein, so muß die Querschnittsfläche des Stabes so gewählt werden, daß die Gleichung

$$(\sigma_z)_{zul} = \frac{P}{F} + \gamma l \quad (125)$$

befriedigt wird, aus der

$$F = \frac{P}{(\sigma_z)_{zul} - \gamma l} \quad (125a)$$

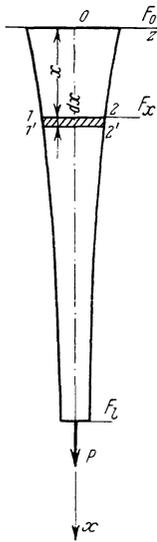
folgt. Für durch x bestimmte Querschnitte unterhalb des Aufhängequerschnittes ist bei dieser Wahl für F die Spannung σ kleiner als $(\sigma_z)_{zul}$, da dann $\sigma = (\sigma_z)_{zul} - \gamma x$, wie man durch Einsetzen des Wertes F aus (125a) in (e) leicht erhält.

Wir können uns nun die Aufgabe stellen, dem Stab für jeden Wert von x einen Querschnitt zu geben, derart, daß für ihn die Spannung den gleichen festen Wert $(\sigma_z)_{zul}$ beibehält, was offenbar die Veränderlichkeit der Querschnittsfläche F mit x zur Voraussetzung hat. Ein Stab mit derartiger veränderlicher Querschnittsfläche, gerader Schwerachse und stets gleicher Querschnittsform heißt ein Stab mit gleichem Zugwiderstand. Derselbe ist kein gerader Stab im engeren Sinne des Wortes mehr, und infolgedessen trifft für ihn die Gleichung (d) nicht mehr zu. Für Stäbe mit veränderlichem Querschnitt müssen, damit die Gleichgewichts- und Grenzbedingungen für ein im Innern des Stabes gelegenes unendlich kleines Prisma bzw. für ein an der Oberfläche des Stabes gelegenes unendlich kleines Tetraeder erfüllbar sind, zu den Zugspannungen parallel zur Stabachse Schubspannungen parallel und normal, ferner Normalspannungen normal zur Stabachse hinzutreten, d. h. der Spannungszustand ist dann kein linearer mehr. Es ist überhaupt genauer genommen undenkbar, für den angenommenen Belastungsfall das zu verlangen, was von einem Stab von gleichem Zugwiderstand gefordert wird, nämlich Gleichheit der Zugspannungen für jeden Querschnitt. Das wird am besten eingesehen, wenn man den Gleichgewichtszustand eines unendlich kleinen rechtwinkligen Prismas betrachtet, von dem ein Flächenelement in die untere Querschnittsfläche fällt. Ein derartiges Prisma kann nach Gleichung (21) auf Seite 49 keine Schubspannungen X_z erleiden, da in der Endquerschnittsfläche nur die gleichförmig verteilte Normalkraft P wirkt, also keine Kräfte tangentiell zum Endquerschnitt vorhanden sind. Damit aber Gleichgewicht in der x -Richtung möglich ist, muß infolge des Einflusses des Eigengewichtes des Prismas die Zugspannung von x abhängig sein. Man kann aber wenigstens für Querschnitte, deren Lagenwerte x im Verhältnisse zu den am oberen Ende des Stabes vorhandenen Querausmaßen groß sind, mit einiger Berechtigung von einer durchschnittlichen, über die Querschnittsfläche gleichförmig verteilten Zugspannung σ sprechen und für diese verlangen, daß sie sich mit der Lage des Querschnittes nicht ändere.

Der Querschnitt 1, 2 (Abb. 128) mit der Fläche F_x in der Entfernung x vom oberen Stabende und dessen benachbarter Querschnitt 1', 2' grenzen eine unendlich kleine Schichte des Stabes von der Dicke dx ab. Die durchschnittlichen Zugspannungen in den Querschnitten 1, 2 und 1', 2', die gleich $(\sigma_z)_{zul}$ sein sollen, können aus den Gleichungen $P + G_x = F_x (\sigma_z)_{zul}$ und

$$P + G_x - \gamma F_x dx = \left(F_x + \frac{dF_x}{dx} dx \right) (\sigma_z)_{zul}$$

abgeleitet werden, in welchen G_x das Gewicht des unterhalb 1, 2 liegenden Stabteiles, $\gamma F_x dx$ das Gewicht der unendlich dünnen Schichte und $F_x + \frac{dF_x}{dx} dx$ die Querschnittsfläche 1', 2' bedeuten. Durch Subtraktion der angeschriebenen Gleichungen ergibt sich $-\gamma F_x dx = \frac{dF_x}{dx} dx (\sigma_z)_{zul}$ oder $\frac{-\gamma dx}{(\sigma_z)_{zul}} = \frac{dF_x}{F_x}$. Die Inte-



gration dieser Differentialgleichung ergibt $\frac{-\gamma x}{(\sigma_z)_{zul}} = \lg F_x + C$.

Die Integrationskonstante C kann aus der Grenzbedingung für die untere Grenzquerschnittsfläche F_l bestimmt werden, der zufolge $\frac{-\gamma l}{(\sigma_z)_{zul}} = \lg F_l + C$ mit $F_l = \frac{P}{(\sigma_z)_{zul}}$ sein muß. Es folgt sonach

$$\frac{\gamma(l-x)}{(\sigma_z)_{zul}} = \lg \frac{F_x}{F_l} \quad \text{oder} \quad F_x = \frac{P}{(\sigma_z)_{zul}} \cdot e^{\frac{\gamma(l-x)}{(\sigma_z)_{zul}}} = F_l e^{\frac{\gamma(l-x)}{(\sigma_z)_{zul}}} \quad (126)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x = 0$, so erhalten wir die Fläche F_0 der oberen Endquerschnittsfläche mit

$$F_0 = \frac{P}{(\sigma_z)_{zul}} e^{\frac{\gamma l}{(\sigma_z)_{zul}}} = F_l e^{\frac{\gamma l}{(\sigma_z)_{zul}}}, \quad (126a)$$

daher können wir an Stelle von (126) auch

$$F_x = F_0 e^{-\frac{\gamma x}{(\sigma_z)_{zul}}} \quad (126b)$$

schreiben. Die Querschnittsfläche nimmt daher in der Richtung der Schwerkraft mit einer e -Potenz ab. Nimmt x in arithmetischer Reihe zu, so nimmt die Querschnittsfläche in geometrischer Reihe

ab. Aus $\frac{P}{(\sigma_z)_{zul}}$ kann zunächst der Wert F_l und dann mittels der Gleichungen (126a) und (126b) F_0 und F_x als Funktion von x bestimmt werden. Das Eigengewicht G des Stabes mit veränderlichem Querschnitt ist bei Benützung von

$$\begin{aligned} G &= \gamma \int_0^l F_x dx = \gamma \int_0^l F_l e^{\frac{\gamma(l-x)}{(\sigma_z)_{zul}}} dx = -\gamma F_l \frac{(\sigma_z)_{zul}}{\gamma} e^{\frac{\gamma(l-x)}{(\sigma_z)_{zul}}} \Big|_0^l \\ &= -P + P e^{\frac{\gamma l}{(\sigma_z)_{zul}}} = P \left(e^{\frac{\gamma l}{(\sigma_z)_{zul}}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (126c)$$

Auch die Grenzbedingung für die Querschnittsfläche F_0 , d. i. $F_0 = \frac{P+G}{(\sigma_z)_{zul}}$ ist erfüllbar, denn setzen wir G aus (126c) in diese Bedingung ein, so erhalten wir die Gleichung (126a), die eine Folge der Gleichung (126) ist.

Verschwindet die Kraft P , d. h. steht der Stab nur unter dem Einflusse seines Eigengewichtes, so kann F_l nicht gleich $\frac{P}{(\sigma_z)_{zul}}$ sein, sondern müßte gleich Null gesetzt werden. Damit würde aber der Wert der Integrationskonstanten C unendlich groß und die vorher-

gehende Rechnung wird unbrauchbar. Es kann eben nicht angenommen werden, daß die durchschnittliche Zugspannung einerseits überall gleich $(\sigma_z)_{zul}$, andererseits aber wieder in einem Querschnitt gleich Null sein soll.

Ein Stab von überall gleichem Querschnitt, der nur unter dem Einfluß seines parallel zur Stabachse wirkenden Eigengewichtes steht, könnte, wenn die Bedingung gestellt wird, daß die größte mittlere Zugspannung in der Nähe des oberen Endquerschnittes die zulässige Spannung $(\sigma_z)_{zul}$ höchstens erreichen soll, nur von begrenzter Länge sein, die sich aus der Gleichung $\frac{\gamma F_0 l}{F_0} = (\sigma_z)_{zul}$ mit $l_g = \frac{(\sigma_z)_{zul}}{\gamma}$ ergibt. Diese Grenzlänge wäre für Flußeisen gleich 1146,49 m mit $(\sigma_z)_{zul} = 900 \text{ kg/cm}^2$ und $\gamma = 0,00785 \text{ kg/cm}^3$. Würde man an einem Stab von dieser Länge, wie sie an Schachtgestängen in Bergwerksbetrieben vorkommen kann, noch ein Gewicht P anhängen, so würde die Zulässigkeitsgrenze $(\sigma_z)_{zul}$ bereits überschritten werden.

Wenn aber der Stab mit der Grenzlänge l_g und einem oberen gewählten Querschnitt F_0 eine Verjüngung seiner Querschnittsflächen in Richtung der Schwerkraft nach Gleichung (126 b)

$$\text{erfährt, so wäre sein Eigengewicht } \gamma \int_0^{l_g} F_x dx = -F_0 (\sigma_z)_{zul} e^{-\frac{\gamma x}{(\sigma_z)_{zul}}},$$

oder, da $\gamma l_g = (\sigma_z)_{zul}$ sein soll, $= F_0 (\sigma_z)_{zul} (1 - e^{-1})$, und infolgedessen könnte bei Wirkung einer Kraft P diese eine Größe besitzen, die sich aus

$$\frac{P + G}{F_0} = (\sigma_z)_{zul} = \frac{P}{F_0} + (\sigma_z)_{zul} (1 - e^{-1}) \quad \text{mit} \quad P = \frac{F_0 (\sigma_z)_{zul}}{e}$$

ergibt. Man sieht also ein, wie wichtig es ist, bei sehr langen Stäben die Wirkung des Eigengewichtes im Vergleich zur Wirkung der Kraft P dadurch herabzusetzen, daß man die Querschnitte gegen das untere Stabende zu abnehmen läßt.

Unter praktischen Verhältnissen werden die Querschnittsenden nicht stetig, sondern stufenweise, wie es in Abb. 128 a durch die strichlierten Linien angedeutet ist, geändert. Nach Gleichung (126 a) wird dann

$$F_1 = \frac{P}{(\sigma_z)_{zul}} e^{\frac{\gamma l_3}{(\sigma_z)_{zul}}} \quad \text{und} \quad F_x = \frac{P}{(\sigma_z)_{zul}} e^{\frac{\gamma (l_2 + l_3)}{(\sigma_z)_{zul}}} = F_1 e^{\frac{\gamma l_2}{(\sigma_z)_{zul}}}$$

usw., worin die e -Potenzen in unendlichen Reihen zu entwickeln wären, von denen nur einige Glieder je nach dem gewollten Genauigkeitsgrad beizubehalten sind.

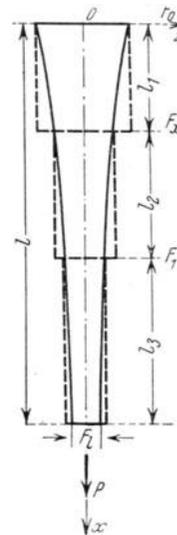


Abb. 128 a.

9. Haupt- und Schubspannungslinien.

Wenn ein fester elastischer Körper durch ein äußeres im Gleichgewicht befindliches Kraftsystem gegebener Art und Größe beansprucht wird, entsteht im allgemeinen in jedem Punkt ein räumlicher Spannungszustand mit drei Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, die aufeinander normal stehen. Ziehen wir im Innern des Körpers eine Kurve derart, daß ihre Tangenten stets mit Hauptspannungsrichtungen zusammenfallen, so wird diese Kurve eine Hauptspannungslinie genannt. Den in jedem Punkte des Körpers vorhandenen drei Hauptspannungsrichtungen entsprechend, können wir uns den ganzen Körper durch drei Scharen aufeinander normal stehender Hauptspannungslinien durchsetzt denken.

Wir wollen die Gleichungen dieser Hauptspannungslinien für den Fall der ebenen geraden Beanspruchung auf Biegung und Schub eines geraden irgendwie gestützten Stabes mit beliebigem zur z -Achse symmetrischen Querschnitt unter der Voraussetzung zur Ableitung bringen, daß die Kraftebene mit der xz -Ebene zusammenfällt. Der Spannungszustand ist dann in jedem Punkte

ein ebener mit einer Ebene, die durch die Biegungsspannungen X_x und die totale aus den mittleren Schubspannungen \bar{Y}_x und \bar{Z}_x resultierende Schubspannung $\bar{\tau}$ gelegt werden kann. Die in dieser Ebene liegenden Hauptspannungen sind ihrer Größe nach [Gleichung (36), Seite 69] durch

$$\sigma_{1,2} = \frac{X_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{X_x^2 + 4(Y_x^2 + Z_x^2)} \tag{a}$$

gegeben, worin $X_x = \frac{M_{By}}{EJ_y} z$ mit X_x als Funktion von x, z und $\bar{Z}_x = \frac{Q_z S_{yb}}{bJ_y}$ und $\bar{Y}_x = \frac{Q_z S_{ya}}{aJ_y}$ mit \bar{Z}_x als Funktion von z, x und \bar{Y}_x als Funktion von y, x einzusetzen sind. Ferner werden in jedem Punkte des Stabes die Richtungen der Hauptspannungen in deren Ebenen durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\sqrt{Y_x^2 + Z_x^2}}{X_x} \tag{b}$$

[Gleichung (35), Seite 69] festgelegt.

Zur weiteren Entwicklung ist es notwendig, den Begriff der Schubspannungslinien einzuführen und die Gleichung derselben aufzustellen. In einem Querschnitte des Stabes gezogene Kurven mit der Eigenschaft, daß die Tangenten in jedem ihrer Punkte in die Richtungen der betreffenden totalen Schubspannungen hineinfallen, heißen Schubspannungslinien. Die Umrandung des Querschnittes ist jedenfalls eine Schubspannungslinie, da die totalen Schubspannungen dort tangentiell zum Querschnitt gerichtet sein müssen. In symmetrisch zur z -Achse gelegenen Punkten müssen die Richtungen der totalen Schubspannungen durch einen und denselben Punkt dieser Achse gehen, woraus zu folgern ist, daß die Schubspannungslinien zur z -Achse symmetrische Kurven sind. Sie zeigen

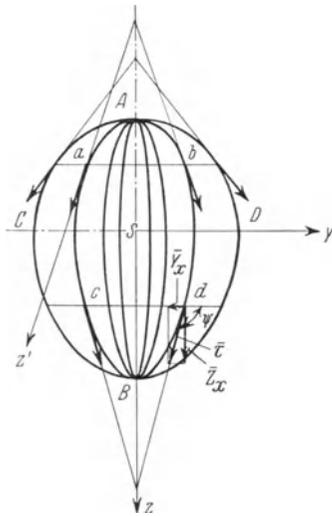


Abb. 129.

den aus der schematischen Abb. 129 ersichtlichen Verlauf. Die in die z -Achse fallende Gerade AB gehört zur Schar der Schubspannungslinien, da für die z -Achse die Spannungen \bar{Y}_x verschwinden.

Die Differentialgleichung der Schubspannungslinien für jeden Querschnitt ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dz}{dy} = \frac{\bar{Z}_x}{\bar{Y}_x} = \frac{S_{yb} a}{S_{ya} b}, \tag{c}$$

worin φ die aus der Abb. 129 ersichtliche Bedeutung besitzt. Die weitere Ausrechnung hängt von dem Querschnitte ab.

Die Schubspannungslinien sind die Schnittlinien von Zylinderflächen mit Erzeugenden parallel zur x -Achse mit den Querschnittsflächen. Auf diesen Zylinderflächen liegen die Hauptspannungslinien, denn der durch $\frac{dz}{dy}$ in (c) bestimmte Winkel ist zugleich jener, der die Hauptspannungsebene des betreffenden Punktes festlegt. Legen wir uns eine Tangentialebene an eine Zylinderfläche, z. B. entsprechend der durch den Punkt a bestimmten Erzeugenden, und in dieser Ebene ein Koordinatensystem mit dem Ursprung im Punkte a , der z' -Achse in der Richtung der totalen Schubspannung und der x' -Achse parallel zur Stabachse, so ist für eine Hauptspannungslinie, die durch den Punkt a

geht, $\frac{\partial z'}{\partial x} = \operatorname{tg} \varphi$, worin φ der in Gleichung (b) eingeführte Richtungswinkel der Hauptspannungen ist. Zuzufolge der Gleichung (b) wird

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{2 \frac{\partial z'}{\partial x}}{1 - \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^2} = \frac{2 \sqrt{\bar{Y}_x^2 + \bar{Z}_x^2}}{X_x}$$

und weil, wie leicht einzusehen, bei Rücksichtnahme auf die Gleichung (c)

$$\frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\frac{dz}{dy}},$$

so wird

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\frac{dz}{dy}}}{1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} = \frac{2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dz}{dy} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]} = \frac{2 \sqrt{\bar{Y}_x^2 + \bar{Z}_x^2}}{X_x}. \quad (\text{d})$$

In dieser Gleichung ist $\frac{dz}{dy}$ durch \bar{Y}_x und \bar{Z}_x unter Zuhilfenahme der Gleichung (c) auszudrücken und weiter \bar{Y}_x bzw. \bar{Z}_x und X_x als Funktionen von x, y bzw. z, x einzusetzen, Hierauf kann z. B. $\frac{\partial z}{\partial x}$ aus dieser Gleichung als Funktion von x, y, z und, wenn z als Funktion von y durch Integration der Gleichung (c) sich ergeben hat, als Funktion von x, y bestimmt werden. Infolge ihres quadratischen Charakters ergeben sich zwei Werte von $\frac{\partial z}{\partial x}$ entsprechend zwei Scharen von auf den oben genannten Zylinderflächen liegenden Hauptspannungslinien. Durch jeden Punkt des Stabes gehen zwei Kurven, von welchen die eine der einen Schar, die andere der zweiten Schar der Hauptspannungslinien angehört. Durch Integration der für $\frac{\partial z}{\partial x}$ gefundenen Gleichung kann schließlich z als Funktion von x, y und bei Benutzung der integrierten Gleichung (c) z als Funktion von x gefunden werden. Es sind dann zwei Projektionen der Hauptspannungslinien, nämlich die auf die yz - und xz -Ebene, und somit die Hauptspannungslinien, selbst ihrem Verlaufe nach bestimmt.

Die Hauptspannungsrichtungen für Punkte der den Punkten A und B entsprechenden Erzeugenden des Umrandungszylinders sind für die eine Hauptspannung, die mit der Biegungsspannung identisch ist, in die Richtung der Erzeugenden hineinfallend, für die andere Hauptspannung, die Null ist, normal auf die Erzeugenden. Demgemäß muß die eine Schar der Hauptspannungslinien auf der Erzeugenden A normal an die Erzeugende B tangentiell, die andere Schar an die Erzeugende A tangentiell auf die Erzeugende B normal verlaufen. Den Schnittpunkten der Nulllinie jedes Querschnittes mit den Schubspannungslinien entsprechen nur Schubspannungen (Beanspruchung auf reinen Schub), infolgedessen gehen durch jeden dieser Schnittpunkte zwei aufeinander normalstehende Hauptspannungslinien, die, auf den zugehörigen Zylinderflächen liegend, unter 45° bzw. 135° zur x -Richtung geneigt sind (Seite 72).

Ist der Querschnitt im besonderen ein Rechteck von der Breite b und der Höhe h , und wird der als Balkenträger gedachte Stab in der Mitte durch eine Einzelkraft P belastet, so ist $\operatorname{tg} \varphi = \infty$, da $\bar{Y}_x = 0$, d. h. die Zylinderflächen gehen in Ebenen parallel zur zx -Ebene über. Die Gleichung (d) wird, da jetzt $\sin \varphi = 1$, d. h. $\frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dx}$, mit Benützung der Gleichungen (a) und (d) auf den Seiten 252 und 253

$$1 - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{Z_x}{X_x} = \frac{\frac{3P}{4} \frac{h^2 - 4z^2}{b h^3}}{\frac{6Px}{b h^3}} = \frac{h^2 - 4z^2}{8xz} \quad (d')$$

Die Hauptspannungslinien sind nunmehr zwei Scharen ebener Kurven, die in jeder Ebene parallel zur xz -Ebene in der gleichen Weise verlaufen, also für den ganzen Stab bekannt sind, wenn sie für eine dieser Ebenen gefunden wurden. Die Schubspannungslinien sind zur z -Achse parallele Gerade.

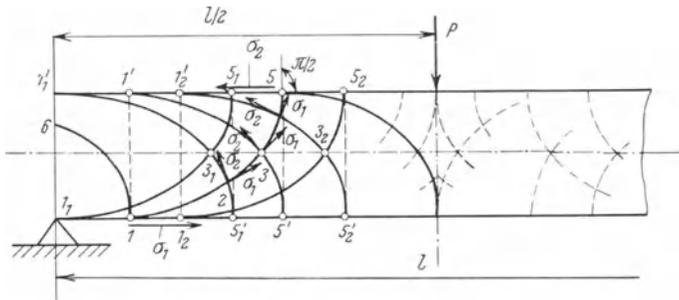


Abb. 130.

Entwickeln wir $\frac{dz}{dx}$ aus Gleichung (d') so erhalten wir

$$(\operatorname{tg} \varphi)_{1,2} = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{1,2} = -\frac{4xz}{h^2 - 4z^2} \pm \sqrt{\frac{16x^2z^2}{(h^2 - 4z^2)^2} + 1} \quad (d'')$$

Das zweifache Zeichen der Wurzel entspricht wie oben den beiden Scharen der Hauptspannungslinien. Setzen wir $z = 0$ oder $z = \pm \frac{h}{2}$, so nehmen die zugehörigen Winkel φ die Werte 45° und 135° oder 0° und 90° an, wie es nach den obigen allgemeinen Auseinandersetzungen sein muß.

In Abb. 130 ist ein Längsschnitt des Stabes parallel zur xz -Ebene samt den Hauptspannungslinien und den Hauptspannungen σ_1, σ_2 für einzelne Punkte schematisch dargestellt. Man kann die ersteren graphisch erhalten, indem für mehrere Punkte von zur z -Achse parallelen Geraden, die in bestimmten Abständen aufeinanderfolgen, die aus der Gleichung (d') folgenden Tangentenrichtungen der Hauptspannungslinien gezeichnet und dann die Kurven dem Augenmaße nach eingefügt werden. Die Hauptspannungslinie $1, 3, 5$ ist in 1 tangentiell, in 3 unter 45° geneigt, in 5 normal zur x -Richtung und stellt eine Zuglinie vor, weil auf ihr sämtliche an sie tangentielle Hauptspannungen σ_1 Zugspannungen sind, die von 1 bis 5 ihrer Größe nach abnehmen, in 5 selbst Null werden. Die zu σ_1 gehörigen zweiten Hauptspannungen σ_2 , die dem Zahlenwerte nach von 5 gegen 1 abnehmen, sind tangentiell an die Hauptspannungslinien $1', 3', 5'$, ferner $1', 3', 5'$ und $1', 3', 5'$, die sämtlich auf die Spannungslinie $1, 5$ normal stehen und Drucklinien sind, weil die Hauptspannungen σ_2 Druckspannungen vorstellen. In 5 bzw. 1

sind die σ_2 entsprechenden Drucklinien tangentiell bzw. normal an bzw. auf die Umrandung. Auf einer Hauptspannungslinie, die Drucklinie ist, z. B. auf $I'_2 5'_2$, die in I'_2 tangentiell in 3_2 unter 135° geneigt in $5'_2$ normal zur x -Richtung ist, nehmen die Druckspannungen σ_2 von I'_2 gegen $5'_2$ ab, in letzterem Punkte sind sie Null. In Punkten der Nulllinie $3_1, 3, 3_2$ usw. sind die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 dem Zahlenwerte nach einander gleich. Die Hauptspannungslinien rechts von der Mitte des Balkens sind, da die Querkraft in der Mitte das Zeichen ändert, das Spiegelbild der Hauptspannungsrichtungen links von der Mitte.

Der Längsschnitt des Gelenkkopfes eines menschlichen Oberschenkelknochens zeigt deutlich zwei Scharen aufeinander normal stehender Linien dichter Knochensubstanz, die nach Culmann¹ dem Verlauf der Hauptspannungslinien folgen, welche bei einer Beanspruchung des Gelenkkopfes durch die Last des menschlichen Körpers, die nach Art eines Kragträgers erfolgt, entstehen. Die Natur legt hier in sparsamer Weise dichte Substanz in die Richtung extremer Werte der Normalspannungen, die für Trennungsbrüche (Seite 180ff.) in Betracht kommen. Derartige gitterförmige Anwendungen finden sich auch sonst häufig in Natur und Technik.

10. Der Biegeversuch. Biegefestigkeit.

Zur Feststellung der bei Beanspruchung auf gerade Biegung (und Schub) herrschenden Deformations- und Spannungsverhältnisse werden Biegeversuche durchgeführt. Gewöhnlich nimmt man hierzu lange Stäbe von quadratischem Querschnitt, die auf zwei halbzyklindrischen Walzen aus gehärtetem poliertem Stahl abgestützt sind, um den Einfluß der Reibung an den Auflagern möglichst auszuschalten, und in der Mitte durch eine Kraft P belastet werden. Als Quadratseite wird z. B. für Metalle 30 mm, für Holz 100 mm bei einer Stützweite von 1000 mm bzw. 1500 mm gewählt.

In neuerer Zeit wurde vielfach vorgeschlagen, für Gußeisen einen kreisförmigen Querschnitt vom Radius $r = 30$ mm bei einer Auflagerweite von 600 mm zu wählen.

Die Versuche ergeben, daß auch hier für homogene isotrope Stoffe das Ähnlichkeitsgesetz (Seite 228ff.) gültig ist, derart, daß Stäbe ähnlicher Abmessungen bei ähnlichen Auflagern zu vergleichbaren Ergebnissen führen. Stäbe mit proportionalen Abmessungen zeigen bei den gleichen Spannungen ähnliche Verschiebungsgrößen und die gleichen Verzerrungskomponenten. Für Stoffe, die dem Hooke'schen Gesetze folgen, läßt sich das Gesagte auch durch Rechnung leicht weiter verfolgen. Einem Stab von der Länge l und gegebenem Querschnitt entspricht bei gerader Belastung in der xz -Ebene in der Mitte durch eine Kraft P eine größte Durchbiegung in der Mitte nach Formel (g) auf Seite 254 von $f = \frac{Pl^3}{48EJ_y}$ und z. B. die im ganzen Bereiche des Stabes größte positive Biegezugspannung

$$(\sigma_B)_{\max} = \frac{Pl}{4J_y} z_a, \quad (\text{a})$$

wenn z_a die Entfernung der am weitesten von der Nulllinie entfernten Faserschichten auf der Zugseite des Stabes vorstellt. Ein Stab von n fach vergrößerten oder verkleinerten Ausmaßen, derart, daß $l' = nl$, $J'_y = n^4 J_y$, $z'_a = n z_a$ erleidet die gleiche Spannung $(\sigma_B)_{\max}$ in der äußersten Faser auf der Zugseite für eine Kraft P' , die aus der Gleichung $(\sigma_B)_{\max} = \frac{P'n l}{4n^4 J_y} n z_a = \frac{P'l}{n^2 4 J_y} z_a$ folgt. Bei Vergleich mit der Gleichung (a) ergibt sich $P' = P n^2$. Das besagt, daß sich die Kräfte, die in ähnlich gelegenen Punkten die gleichen Spannungen hervorrufen sollen wie die Querschnittsflächen verhalten müssen. Die Durchbiegung f'

¹ Siehe hierzu W. Ritter: Anwendungen der graphischen Statik, Erster Teil, Zürich 1888, S. 128.

wird bei Wirkung von P' , $f' = \frac{P' l'^3}{48 E J_y'} = \frac{n^2 P n^3 l^3}{48 E n^4 J_y} = \frac{P l^3}{48 E J_y} n$, d. h. $f' = f = n : 1$. Die Durchbiegungen sind demnach bei den gleichen Spannungen in beiden Fällen ähnlich. Die Biegungspfeile, das sind die Verhältnisse der größten Durchbiegungen zu den Stützweiten, die der Dimension nach den Verzerrungskomponenten der kleinsten Teilchen entsprechen, $\frac{f'}{l'} = \frac{nf}{nl}$ und $\frac{f}{l}$ sind in beiden Fällen dieselben.

Auch dann, wenn das Hookesche Gesetz nicht mehr gilt, müssen die Spannungen jedenfalls mit der Kraft P anwachsen, derart, daß sich Erstere als Produkte der Kraft P in einen Faktor ergeben, dessen Dimension natürlich $\frac{1}{\text{cm}^2}$ sein muß, wenn ein Zentimeter (cm) als Längeneinheit gewählt wird. Die gleichen Spannungen werden bei ähnlichen Stäben in ähnlichen Punkten demnach auch oberhalb der Proportionalitätsgrenze dann hervorgerufen, wenn sich die Kräfte wie die Querschnittsflächen verhalten. Trifft letzteres zu, so muß unabhängig vom Elastizitätsgesetz auch der gleiche Verzerrungszustand auftreten.

Entsprechend dem σ - e -Schaubild aus dem Zug- und Druckversuch leitet man aus dem Biegeversuch eine Kurve, das Biegungsschaubild, ab, dessen Punkte durch die Koordinaten $(\sigma_B)_{\max}$ und $\frac{f}{l}$ bestimmt werden. $(\sigma_B)_{\max}$ bedeutet dabei wie oben die größte positive Biegungsspannung im gefährlichen Querschnitt. Von einer größten negativen Biegungsspannung im gefährlichen Querschnitt kann man eigentlich nicht reden, da der Spannungszustand auf der Druckseite an der Angriffsstelle der Last, wo theoretisch die größte Biegungsspannung auftreten sollte, infolge der besonderen Grenzbedingungen, die dort herrschen, stark von einem linearen abweicht. Die Biegungspfeile sind durch Längenmessungen leicht zu erhalten, dagegen ist eine experimentelle Bestimmung der größten positiven Biegungsspannungen nur annäherungsweise möglich. Man berechnet sie in der Regel als theoretische Biegungsspannungen so, als ob das Hookesche Gesetz bis zum evtl. Bruch gültig wäre, oder man trägt ein Biegungsschaubild auf, in dem an Stelle von $(\sigma_B)_{\max}$ bzw. $\frac{f}{l}$ die Kraft P bzw.

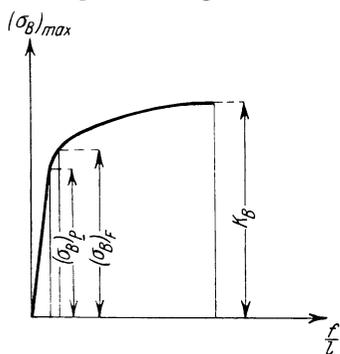


Abb. 131.

Abb. 131 zeigt ein schematisches Biegungsschaubild für ein homogenes zähes und fließendes Material, das bei einer bestimmten Belastung im Kraftquerschnitt bricht und bis zu einer Grenze dem Hookeschen Gesetze folgt (Stahl). Bis zur Spannung $(\sigma_B)_P$ (Proportionalitätsgrenze auf Biegung) ist das Schaubild durch eine Gerade dargestellt, hierauf wachsen die Biegungspfeile verhältnismäßig rascher bei gleichmäßiger Zunahme der äußeren Kraft, d. h. es wird die theoretische (ideelle) Fließgrenze $(\sigma_B)_F$ bei Biegebbeanspruchung durchschritten, die auch Biegegrenze schlechthin genannt wird, schließlich bricht der Stab bei der ideellen Spannung K_B , die theoretische Biegefestigkeit oder Biegefestigkeit schlechweg heißt. Ist a die Seite des quadratischen Querschnittes des Versuchsstabes, l dessen Länge, so ist die theoretische Biege-

festigkeit K_B die größte positive Biegungsspannung im gefährlichen Querschnitt. Von einer größten negativen Biegungsspannung im gefährlichen Querschnitt kann man eigentlich nicht reden, da der Spannungszustand auf der Druckseite an der Angriffsstelle der Last, wo theoretisch die größte Biegungsspannung auftreten sollte, infolge der besonderen Grenzbedingungen, die dort herrschen, stark von einem linearen abweicht. Die Biegungspfeile sind durch Längenmessungen leicht zu erhalten, dagegen ist eine experimentelle Bestimmung der größten positiven Biegungsspannungen nur annäherungsweise möglich. Man berechnet sie in der Regel als theoretische Biegungsspannungen so, als ob das Hookesche Gesetz bis zum evtl. Bruch gültig wäre, oder man trägt ein Biegungsschaubild auf, in dem an Stelle von $(\sigma_B)_{\max}$ bzw. $\frac{f}{l}$ die Kraft P bzw. f tritt. In dem ersteren Falle bekommt man für Proportionalstäbe aus den gleichen Stoffe einander deckende Biegungsschaubilder, im letzteren Falle decken sich die Schaubilder für Proportionalstäbe dann ebenfalls, wenn man die Kräfte bzw. Durchbiegungen f bei n mal vergrößerten Dimensionen in einem n^2 bzw. n mal kleinerem Maßstabe aufträgt.

festigkeit demnach

$$K_b = \frac{3P_{\max}l}{2a^3}, \quad (127)$$

worin P_{\max} die Kraft ist, bei der der Bruch erfolgt.

Soll der Unterschied in dem Verhalten zweier Stoffe, von denen der eine das Hookesche Gesetz in einem bestimmten Kraftbereiche befolgt, der andere aber nicht, in den zugeordneten Biegunsschaubildern zum Ausdruck kommen, so muß je ein $(\sigma_B)_{\max}, \frac{f}{l}$ oder P, f -Schaubild entworfen werden. Das Schaubild des dem Hookeschen Gesetze nicht folgenden Stoffes zeigt dann in keinem seiner Teile einen geradlinigen Verlauf.

Nicht jeder Stoff hat die Eigenschaft, bei Steigerung der Belastung seinen Zusammenhang schließlich aufzugeben. Letzteres kann man im allgemeinen nur von spröden Stoffen behaupten. (Siehe Abb. 77, Seite 187, die einen beim Versuch gebrochenen gußeisernen Stab zeigt.) Viele plastische Stoffe, wie „weiches“ Flußeisen, brechen in der Regel nicht, ja sie lassen sich häufig sogar zusammenfallen (Abb. 132). In derartigen Fällen setzt man an Stelle der theoretischen Biegezugfestigkeit eine andere charakteristische Grenze, wie z. B. die theoretische Fließgrenze $\sigma_{(B)F}$.

Die theoretische Fließgrenze kann man dadurch festlegen, daß man jene größte positive Biegezugspannung für den gefährlichen Querschnitt nach dem Hookeschen Gesetze berechnet, für welche nach Abbringen der Belastung ein Biegezugspfeil zurückbleibt, dessen Größe Sache der Vereinbarung ist, jedenfalls aber dem theoretischen Spannungsbereiche zugeordnet sein muß, indem sich das starke Anwachsen der Biegezugspfeile bei geringer Änderung der theoretischen Biegezugsspannungen bemerkbar macht. So wie nämlich beim Zug- und Druckversuch federnde und bleibende Dehnungen (Quetschungen) zu beobachten sind, zeigen sich beim Biegeversuch bei Belastung Biegezugspfeile, die bei Abbringen derselben nur teilweise wieder zurückgehen, derart, daß von federnden und bleibenden Biegezugspfeilen gesprochen werden kann. Letztere sind im allgemeinen um so größer, je größer die aufgebrachte Belastung war.

Man kann natürlich auch von einer theoretischen Elastizitätsgrenze bei Biegebeanspruchung sprechen, die als jene nach dem Hookeschen Gesetze errechnete größte positive Biegezugspannung zu definieren wäre, für welche nach Abbringen der Belastung der Biegezugspfeil bis auf einen geduldeten, sehr kleinen Deformationsrest zurückgeht.

Das $(\sigma_B)_{\max}, \frac{f}{l}$ -Schaubild ist nicht nur deswegen ein theoretisches, weil die Spannungen so aufgetragen werden, als ob das Hookesche Gesetz bis zum Bruche gültig wäre, sondern auch, weil für dasselbe der allerdings geringe Einfluß der Schubspannungen, der, wenn man auch nur vom Standpunkt der üblichen Näherungstheorie urteilt, in den dem Mittelquerschnitt unendlich benachbarten Querschnitten existiert, und die durch die Auflagerung der Kraft in der Mitte bewirkte, bei größeren Querschnitten freilich wenig ins Gewicht fallende Abänderung des Spannungszustandes, zwar in den gemessenen Werten $\frac{f}{l}$ zum Ausdruck kommt, nicht aber in den Spannungen, die als reine Biegezugsspannungen aufgetragen werden. Der Einfluß der Schubspannungen auf die Biegezugspfeile $\frac{f}{l}$ ist zwar bei langen Stäben aus

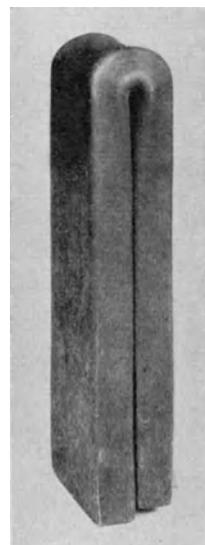


Abb. 132.

spröden Stoffen im allgemeinen gering, er wächst aber insbesondere bei plastischen Stoffen unter sonst gleichen Verhältnissen mit der Größe der Kraft P , ist demnach im Gebiete der bleibenden Deformationen größer als in jenen der vorzüglich federnden, d. i. bis zur theoretischen Elastizitätsgrenze.

Von den angegebenen theoretischen Grenzen sind die wahren, d. h. die wahre Elastizitätsgrenze bei reiner Biegung, die wahre Biegegrenze und die wahre Biegezugfestigkeit zu unterscheiden.

Die wahre Elastizitätsgrenze bei Beanspruchung auf Biegung könnte nur an Stellen der äußersten Fasern von Querschnitten erhoben werden, die von den Auflagern und der Lastaufbringungsstelle entfernt liegen, da in der Nähe derselben der reine Biegungsspannungszustand getrübt ist. Es empfiehlt sich dann den Stab nicht in der Mitte, sondern symmetrisch zu derselben durch zwei gleich große, innerhalb der Stützkräfte angreifende Kräfte zu belasten, und diese Meßstellen in der Mitte des Stabes anzunehmen, um sich von vornherein von den Schubspannungen unabhängig zu machen. Nehmen wir an, wir hätten zwei derartige Stellen, eine an der Zug-, die andere ihr gegenüberliegend an der Druckseite gewählt. Wir reißen vor der Belastung an der gewählten Stelle zwei feine aneinanderliegende zur yz -Ebene parallele Striche ein und bringen dann stufenweise eine sehr langsam zunehmende Belastung auf, gehen nach jeder Stufe zur Belastung Null oder einer ihr naheliegenden Belastung zurück und erheben dann mit einem Meßmikroskop die zurückbleibenden verlängerten bzw. verkürzten Entfernungen der Risse. Es wird sich zeigen, daß für eine bestimmte Belastung der zurückbleibende Rest auf der Zug- oder Druckseite oder auf beiden Seiten zugleich einen bestimmten geduldeten Wert erreicht. Die dieser Last entsprechende Biegungsspannung, die entsprechend dem Elastizitätsgesetze, dem der entsprechende Stoff folgt, zu bestimmen wäre (siehe unten, wo der Vorgang für das Potenzgesetz auseinandergesetzt wird), ist die wahre Elastizitätsgrenze auf Biegung, die sonach je nach dem Stoffe, der gerade vorliegt, eine Zug- oder Druckspannung sein kann. Es liegt kein Grund für die Annahme vor, daß bei genauer Messung die wahre Elastizitätsgrenze auf Biegung von der wahren Elastizitätsgrenze auf Zug oder Druck verschieden sein müßte.

Die Erreichung des Zustandes des Fließens macht sich beim Biegeversuch (Belastung in der Mitte) durch das Auftreten von Fließfiguren bemerkbar, die bei Laststeigerung über die wahre Elastizitätsgrenze hinaus, zuerst an den Auflagern und um die Kraftangriffsstelle herum auftreten, wo ein den dortigen Grenzbedingungen entsprechender eigenartiger Spannungszustand herrscht, hierauf von diesen Ausgangspunkten sich weiter symmetrisch zur Mitte sich ausbilden, und zwar vorzugsweise vom gefährlichen Querschnitt aus nach rechts und nach links hin und in der Nachbarschaft der äußersten Fasern.

Die Erhebung der wahren Fließgrenze bei Beanspruchung auf Biegung an Stelle der äußersten Fasern in Querschnitten, die von den Auflagern und der Belastungsstelle entfernt liegen, unter Benützung der oben für die Erhebung der wahren Elastizitätsgrenze angegebenen Belastungs- und Meßmethode kann dann erfolgen, wenn eine Handhabe zur Bestimmung der Spannungen im Fließbereich bei gegebener Belastung vorliegt (siehe weiter unten). Die wahre Fließgrenze ist im allgemeinen eine Zug- oder eine Druckspannung.

Wird ein Stoff auf Biegung bis über die wahre Fließgrenze oder allgemeiner bis in einen Bereich der Größe des Spannungszustandes belastet, daß die bleibenden Verformungen nach Abbringen der Belastungen stark ins Gewicht fallen, so sind im entlasteten Stab Eigenspannungen (Seite 25) vorhanden. Das kann durch die verschiedenen Verlängerungen und Verkürzungen der in verschiedener Entfernung von der Nulllinie liegenden Fasern erklärt werden. Da die bleibenden Verlängerungen (Verkürzungen) mit der absoluten Größe der Biegungsspannungen wachsen, so werden Faserelemente von der Länge dx (Abb. 133) in

der Nähe der Nullinie, welche bis zur Elastizitätsgrenze beansprucht wurden, nach Abbringen der Belastung ihre ursprüngliche Länge beinahe vollkommen wieder annehmen wollen, werden aber daran durch die weiter von der Nullinie gelegenen Faserelemente gehindert, die stärkere bleibende Deformationen zeigen. Die der Nullinie naheliegenden Elemente werden demnach durch Abbringen der Belastung auf der Zugseite auf Zug, auf der Druckseite auf Druck, die weiter von der Nullinie gelegenen Faserelemente werden auf der Zugseite auf Druck, auf der Druckseite auf Zug beansprucht. In der Abb. 133 ist der Stab in der nach Abbringen der Belastung bleibenden Deformation schematisch dargestellt. Die Querschnitte ab und $a'b'$ sind bleibend verdreht. Die eingezeichnete Kurve stellt das Schaubild der zurückbleibenden Biegungsspannungen vor, die im Sinne einer Rückverdrehung des bleibend verdrehten Querschnittes $a'b'$ in eine zu ab parallele Lage wirken. Die Eigenspannungen suchen also den Stab im Sinne der Pfeile wieder gerade zu strecken.

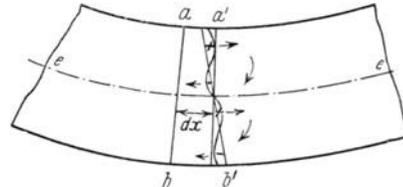


Abb. 133.

Bei Belastung eines Stabes in der Mitte, wie sie beim Biegeversuch üblich ist, könnte, vorausgesetzt, daß der Stab aus einem Stoffe besteht, der überhaupt zum Bruche gebracht werden kann, eigentlich genau genommen nur von einer wahren relativen Festigkeit für jenen Spannungszustand gesprochen werden, der an der Stelle herrscht, wo der Bruch beginnt.

Bei den hier hauptsächlich in Betracht kommenden spröden Materialien scheint es im besonderen so zu sein, daß jene physikalische Größe, welche bei Eintritt des Bruches einen bestimmten Wert erlangt, mit der dann vorhandenen größten positiven Hauptspannung an der Stelle, wo der Bruch beginnt, entsprechend dem Auftreten eines Trennungsbruches (Seite 180ff.) zusammenfällt. Die größte positive Hauptspannung dürfte nicht viel von der im Augenblicke des Bruches vorhandenen wahren Biegungsspannung verschieden sein.

Die wahre Biegefestigkeit, die eine Zug- oder Druckspannung sein kann, und sich von der wahren Zug- bzw. Druckfestigkeit nicht wesentlich unterscheiden dürfte, könnte genau nur bei einer Belastung des Stabes, für die die Schubspannung in einem genügend langen Stabbereiche verschwindet (Belastung durch die symmetrisch zur Mitte und innerhalb der Stützweite wirkenden elastischen Kräfte), dann erhoben werden, wenn eine Handhabe für die Auswertung der Spannung in den äußeren Fasern gegeben ist (siehe unten).

Vom wissenschaftlichen Standpunkte aus gesehen, kann die Definition der theoretischen Biegefestigkeit als eine nach dem Hookeschen Gesetze für einen Stab bestimmter Form bei bestimmter Belastungsart berechnete Zugspannung nur als ein Notanker bezeichnet werden. Praktisch hat diese Definition den Vorteil der Einfachheit für sich. Bei ihrer üblichen Annahme ist zu erwarten, daß für eine beliebige Querschnittsform eines wie beim Biegeversuch gelagerten, in der Mitte belasteten Stabes gegebener Länge, die beim Bruch desselben auf Grund einer Verallgemeinerung der Gleichung (127), das ist

$$K'_b = \frac{P_{\max} l}{4J_y} z_a \tag{127 a}$$

(mit z_a als größte Faserentfernung von der Nullinie auf der Zugseite) berechnete extreme Grenzspannung K'_b von der Querschnittsform abhängig sein wird. Das wird auch durch Versuche, insbesondere mit spröden Körpern, bestätigt. K'_b kann als theoretische Biegefestigkeit im weiteren Sinne bezeichnet werden.

Der Frage nach der Veränderlichkeit von K'_b mit der Querschnittsform schließen sich die beiden folgenden an:

1. Welchen Einfluß haben die Auflagerungsverhältnisse auf die Größe von K'_b .
2. Wie hängt K'_b bei gegebener beliebiger Querschnittsform mit der wahren

Zugfestigkeit des Stabmaterials zusammen, die nach dem Gesagten jedenfalls für bei Biegungsbeanspruchung brechende Stäbe sich wenig von der wahren Biegungsfestigkeit unterscheiden dürfte.

Ähnliche Fragen ergaben sich auch für die Zug- und Druckfestigkeit, die aus zugehörigen Versuchen als theoretische oder technische Festigkeiten abgeleitet wurden.

Bezüglich Frage I ergibt die Erfahrung, daß bei langen Stäben der Einfluß der Auflagerungsverhältnisse gering ist. Der Zusammenhang von K'_b mit der Zugfestigkeit K_z bei gegebener Querschnittsform wurde von Bach (siehe Literatur auf Seite 441 unter Bach-Baumann) für Gußeisen ohne Gußhaut auf dem empirischen Wege abgeleitet. Er fand für dieses dem Hookeschen Gesetze nicht folgende Material, dessen wahre Zugfestigkeit nahezu mit der theoretischen (oder technischen) zusammenfällt, daß für zur Kraftebene symmetrische Querschnitte der Zusammenhang

$$K'_b = \mu_0 \sqrt{\frac{z_a}{z_0}} K_z \quad (128)$$

desteht, worin z_a die Entfernung der äußersten Fasern auf der Zugseite und z_0 der Abstand des Schwerpunktes des auf der Zugseite gelegenen Teiles der Quer-

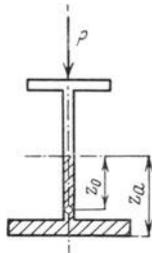


Abb. 134.

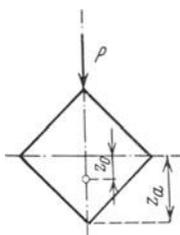


Abb. 134 a.

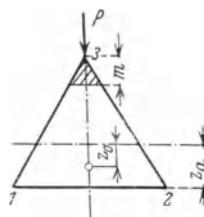


Abb. 134 b.

schnittsfläche von der Nulllinie (Abb. 134) bedeuten. μ_0 stellt eine Erfahrungszahl vor, die für Querschnitte mit zwei äußersten Faserschichten (Abb. 134) $\frac{6}{5}$ und für Querschnitte mit zwei äußersten Fasern (Abb. 134a) $\frac{4}{3}$ ist¹.

Der Bruch von durch eine Einzelkraft in der Mitte belasteten gußeisernen Stäben geht in der Regel von der Zugseite aus, da Gußeisen ein Stoff ist, dessen Zugfestigkeit bei weitem kleiner als dessen Druckfestigkeit ist.

Ein Beispiel soll die Verwendung der Formel (128) zeigen. Einer Versuchsreihe lag ein Gußeisen ohne Gußhaut mit einer Zugfestigkeit von $K_z = 1369 \text{ kg/cm}^2$ zugrunde. Ein Stab von quadratischer Querschnittsform mit der Seitenkantenlänge 3,5 cm nach Abb. 134 a belastet, ergab auf Grund des erhobenen Wertes P_{\max} : nach Gleichung (127 a) eine theoretische Biegungsfestigkeit von 3218 kg/cm^2 . Nach Formel (128) aus der Zugfestigkeit K_z berechnet ($\mu_0 = \frac{4}{3}$, $\frac{z_a}{z_0} = 3$), ergibt sich $K'_b = 3162 \text{ kg/cm}^2$.

Allgemein sagt die Formel (128) aus, daß die theoretische Biegungsfestigkeit K'_b von Gußeisen gegebener Art ohne Gußhaut sich um so höher im Vergleich zur Zugfestigkeit ergibt, je größer das Verhältnis $\frac{z_a}{z_0}$ und μ_0 sind. Danach wäre die Erfahrungstatsache begreiflich, daß für das volle Dreieck in Abb. 134 b K'_b kleiner ist als dann, wenn man das schraffierte Dreieck mit der Höhe m wegnimmt, und

¹ Siehe hierzu auch des Verf. Schrift über: Die Biegungsfestigkeit von Gußeisen, in der Z. V. d. I. der tschechoslow. Republik 1925.

zwar sowohl für den gezeichneten Fall des Kraftangriffes als auch dann, wenn die Kraft auf die Seitenfläche 1 2 in entgegengesetzter Richtung wirkt.

Für das eigenartige Verhalten des Gußeisens haben Bach (siehe oben) und nach ihm Ludwik (L) eine Erklärung angegeben, die die in Wahrheit vorhandenen Spannungs- und Deformationsverhältnisse berücksichtigen will. Wenn ein Stab mit zur Kraftebene symmetrischem Querschnitt aus einem Stoffe besteht, der wie z. B. Gußeisen dem Potenzgesetz $e = a\sigma^m$ (Seite 147) mit a und m als Konstanten, die für Zug- und Druckbeanspruchung verschieden sind, gehorcht, auf ebene gerade Biegung und Schub beansprucht wird, so ist bei Festhalten der Annahme über das Ebenbleiben der Querschnitte die Lage der Nulllinie aus der Bedingung für das Gleichgewicht in der x -Richtung des Stabes allein (Seite 238) nicht bestimmbar, sondern es muß hierfür auch noch die zweite Gleichgewichtsbedingung, die die notwendige Gleichheit der Momente der Biegungsspannungen bezogen auf die Nulllinie, und der Biegemomente (Seite 238), ausspricht, herangezogen werden. Aus diesen beiden Bedingungen ergibt sich als Folgerung die Abhängigkeit der Lage der Nulllinie von der Querschnittsform

und der Größe des Biegemomentes, so daß sich dieselbe auch von Querschnitt zu Querschnitt ändert. Allgemein kann man über die Lage der Nulllinie nur aussagen, daß sie bei Gültigkeit des Potenzgesetzes nach der Seite der zur Kraftebene normalen Schwerachse rückt, welcher bei dem Zahlenwerte nach gleichen Dehnungen (Quetschungen) die größeren Spannungen entsprechen, bei Gußeisen also nach der Druckseite. Für einen Querschnitt in der Entfernung x vom linken Auflager ergibt sich sonach unter den geschilderten Verhältnissen

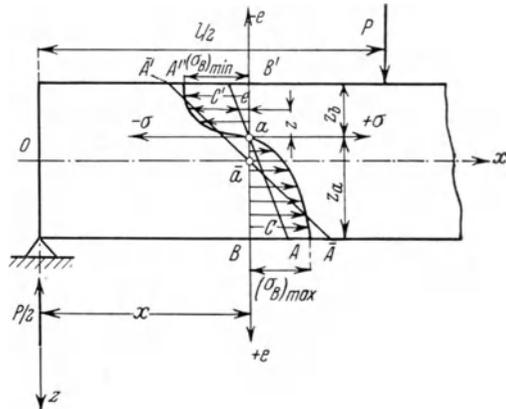


Abb. 135.

beim Biegeversuch das in Abb. 135 dargestellte Bild der Spannungen und Dehnungen. a ist die Projektion der Nulllinie im Querschnitt x auf die Kraftebene, z_b und z_a sind die Entfernungen der äußersten Fasern in der Kraftebene von der Nulllinie, die den Biegungsspannungen $(\sigma_B)_{\min} = A'B'$ und $(\sigma_B)_{\max} = AB$ des Querschnittes entsprechen. AaA' ist das Schaubild der Biegungsspannungen, aA' ist die Linie der Druckspannungen, aA jene der Zugspannungen, und zwar nicht nur für den quadratischen Querschnitt, mit zwei äußersten Faserschichten, sondern überhaupt bei jedem zur z -Achse symmetrischen Querschnitt. Im letzteren Falle muß dann aber noch hinzugefügt werden, um auch Fälle nach Abb. 134 a mit einzubeziehen, daß die Spannungskurve AaA' in der Symmetrieebene gedacht ist. CaC' stellt das Schaubild der Dehnungen (Quetschungen) gemäß der Voraussetzung, daß die Querschnitte eben bleiben sollen, vor. Die den Druck- und Zugspannungen für die einzelnen Flächenelemente des Querschnittes entsprechenden Kräfte müssen zusammengesetzt entgegengesetzt gleiche Resultierende, also ein Kräftepaar ergeben, das gleich dem Biegemoment im Querschnitt x ist. $A'aA$ kann direkt als ein Teil des σ - e -Schaubildes von Gußeisen aufgefaßt werden, mit $+\sigma$ und $+e$ als positiven Achsen, wenn die den verschiedenen Koordinaten z zugehörigen Dehnungen (Quetschungen) längs der $+e$ ($-e$)-Achse in einem solchen Maßstabe aufgetragen gedacht werden, daß sie durch die Koordinaten selbst dargestellt sind. Daraus, daß die Resultanten der den einzelnen

Flächenelementen entsprechenden Zug- und Druckkräfte zusammen eine Kräftepaar bilden müssen, folgt die Gleichheit der Flächen $A'B'a$ und ABa . Das dem Biegemoment gleichkommende Kräftepaar ist demnach auch durch das Produkt einer solchen Fläche in den Abstand der Schwerpunkte der beiden Flächen bestimmbar. Liegen die σ - e -Schaubilder in einem beliebigen Maßstabe für Zug und Druck gegeben vor, und ist z. B. die größte Biegungsspannung auf Zug gegeben, so kann man aus den σ - e -Schaubildern die größte Biegungsspannung auf Druck aus der Bedingung der Gleichheit der oben genannten Fläche unter Zuhilfenahme eines Planimeters bestimmen, ohne erst das analytische Gesetz des Zusammenhanges zwischen den Spannungen und Dehnungen (Quetschungen) zu kennen. (Verfahren von Ritter.)

Würde das Hookesche Gesetz gelten, so wäre das Schaubild der Biegungsspannungen durch $\bar{A}'\bar{a}\bar{A}$ mit \bar{a} als Projektion der Nulllinie darzustellen. Die dann im Querschnitte auftretenden größten Spannungen wären durch die Strecken $\bar{A}'B'$ und $\bar{A}B$ bestimmt, die größer sind als in Wahrheit, d. h. bei Gültigkeit des Potenzgesetzes. Man erhält sonach, wenn bei Gußeisen zur Berechnung der größten Spannungen das Hookesche Gesetz zugrunde gelegt wird, zu große Werte derselben.

Das im vorstehenden für eine beliebige Kraft P und einen beliebigen Querschnitt über das Verhältnis der Spannungsschaubilder unter Voraussetzung des Potenzgesetzes und des Hookeschen Gesetzes Gesagte können wir nunmehr auch für die Bruchlast P_{\max} und den mittleren gefährlichen Querschnitt behaupten, allerdings mit nicht so großer Annäherung an die wirklichen Verhältnisse, insofern beim Bruch der Einfluß der Schubspannungen größer geworden ist, und sich auch die Nähe der Kraftangriffsstelle in dem Gesetz der Verteilung der Biegungsspannungen über den Querschnitt bemerkbar machen wird. Im Augenblicke des Bruches müßte BA im Bruchquerschnitt bei Vernachlässigung der genannten Wirkungen der wahren Biegungsfestigkeit und diese der wahren Zugfestigkeit des Gußeisens gleichkommen; ferner müßte aA im Bruchquerschnitt der wahren Zugkurve und $A'a$ einen Teil der wahren Druckkurve gemäß den wahren σ - e -Schaubildern auf Zug und Druck entsprechen, wenn die Dehnungen und Quetschungen in einem derartigen Maßstabe aufgetragen werden, daß die nun im gefährlichen Querschnitte gedachte Strecke aB gleich der wahren Dehnung bei Beanspruchung auf Zug im Augenblicke des Bruches gleichkommt. Die wahre Biegungsfestigkeit müßte sich kleiner als die auf Grund der Annahme der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes bis zum Bruch nach Gleichung (127a) berechnete größte positive Spannung im Bruchquerschnitt, d. h. kleiner als die theoretische Biegungsfestigkeit K'_b herausstellen.

Die diesbezüglichen Versuchsergebnisse von Bach, Ludwik u. a. bestätigen das Gesagte. So fand Bach für einen in der Mitte belasteten gußeisernen Stab mit der Stützweite $l = 1$ m von nahezu quadratischem Querschnitt (Breite $b = 8,01$ cm, Höhe $h = 8,005$ cm), der die Zugfestigkeit $K_z = 1315$ kg/cm² und eine theoretische Biegungsfestigkeit von $K_b = 2157$ kg/cm² besaß, unter der Annahme, daß die wahre Biegungsfestigkeit gleich der Zugfestigkeit sei und bei Verwendung des oben auseinandergesetzten Ritterschen Verfahrens zur Bestimmung der im Bruchquerschnitte vorhandenen in der Abb. 135 mit $A'aB'$ und AaB bezeichneten einander gleichen Flächen (die wahren σ - e -Schaubilder des verwendeten Gußeisens waren natürlich bekannt), daß das aus diesen Flächen berechnete Biegemoment nur um 3,5% von jenem Biegemoment abweicht, das den Bruch wirklich herbeiführte.

Auch für Stoffe mit Streckgrenze, die bei Beanspruchung auf Biegung nicht zerstört werden, könnten die vorstehenden Überlegungen, wenn auch mit weniger Annäherung an

die Wirklichkeit, zur Anwendung kommen und die Verschiebung der Nulllinie aus dem Schwerpunkt des Querschnittes nach der Druckseite und damit die Abhängigkeit der Erreichung der theoretischen Fließgrenze auf Biegung (oder falls der Stoff bei Beanspruchung auf Biegung und Schub zerstört wird, der theoretischen Biegezugfestigkeit im weiteren Sinne) in den auf Zug am meisten beanspruchten Fasern im gefährlichen Querschnitt von der Querschnittsform, die auch jetzt in einzelnen Fällen aus Versuchen gefolgert werden konnte, zu erklären. Die geringere Annäherung an die Wirklichkeit ist jetzt, wie oben schon angedeutet, darin begründet, daß die Erreichung der wahren Fließgrenze auf Biegung und darüber hinaus der wahren Biegezugfestigkeit jetzt von den Schubspannungen viel mehr abhängig ist als bei spröden Körpern, für die es keinen Streckbereich gibt, da die Schubspannungen parallel zur Stabachse, die zwischen den Fasern entstehen, die Erreichung der Fließgrenze in einer äußersten Faser beeinflussen. Daraus folgt, daß wir die wahren (effektiven) Schaubilder auf Zug und Druck der betreffenden Stoffe jetzt nicht mehr ohne weiteres als Grundlage für die Verteilung der Biegezugspannungen über den Querschnitt annehmen können. Wenn wir es doch tun, kommen wir nur zu einer Abschätzung der wahren Verhältnisse. Jedenfalls kann aber angenommen werden, daß bei Beanspruchungen bis zur Streckgrenze und darüber hinaus die mehr gegen die Nulllinie liegenden Fasern größere Spannungen erleiden als sie unter der Annahme der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes bis zur Streckgrenze und darüber hinaus erleiden würden. Daraus kann der weitere Schluß gezogen werden, daß die wahre Fließgrenze auf Biegung und die wahre Biegezugfestigkeit kleiner als die bezüglichen theoretischen Werte sind, die unter der Annahme der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes berechnet werden.

Die sinngemäße Übertragung der vorstehenden Überlegungen auf die Biegezugbeanspruchung normal zur Faserrichtung und Schub parallel und normal zu den Fasern von fehlerfreiem Holz ist möglich und auch von Bach tatsächlich mit dem Erfolg durchgeführt worden, der bei so verwickelten Verhältnissen, wie sie bei Holz bestehen (Anisotropie und Inhomogenität), zu erwarten ist.

Die Durchführung des Biegeversuches erfolgt in einer hierzu geeigneten Festigkeitsmaschine, die neben der mechanischen (hydraulischen) Kräfteerzeugungseinrichtung und der Kraftmeßvorrichtung als Kraftübertragungsteil einen horizontalen Biegetisch besitzt, auf dem die bereits oben erwähnten halbzylindrischen Walzen *W* (Abb. 136) aus gehärtetem Stahl, die als Auflager verwendet werden, in entsprechender schwalbenschwanzförmiger Nut verstellbar sind, um verschiedene Stützweiten einstellen zu können. Die Durchbiegung in der Mitte wird am einfachsten aber auch ungenauesten mittels Schublehre und Nonius gemessen. Man schlägt zu diesem Zwecke in Mitte der Höhe der beiden Auflagerquer-

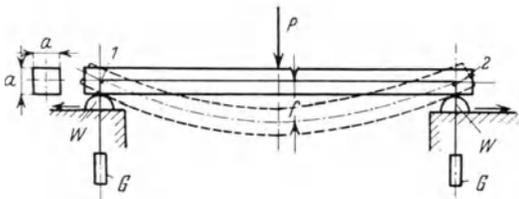


Abb. 136.

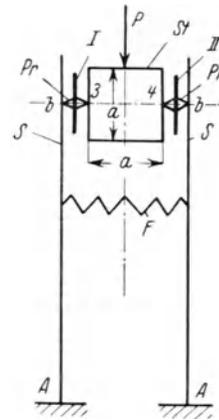


Abb. 136 a.

schnitte, und zwar auf beiden Langseiten des Stabes, je zwei dünne Stifte *I* und *2* ein, über die ein durch Gewichte *G* gestreckter feiner Draht gelegt wird. Zur feineren Messung von Durchbiegungen kann man sich der auf Seite 162 beschriebenen Meßuhr bedienen, deren bewegliche mit dem Zeigerwerke verbundene Fühlstifte direkt durch am Versuchsstab in Höhenmitte vorgesehene Plättchen betätigt werden. Die genaue Messung bleibender und federnder Durchbiegungen kann mittels dem auf Seite 81ff. beschriebenen Martenschen Spiegelapparate erfolgen. Die Stahlprismen *P_r*, *P_r* (Abb. 136 a) des Spiegel-

apparates werden mit den einen Kanten $3, 4$ in Höhenmitte an den Stab A gelegt, während die zweiten Kanten b, b in an den einen Enden A festen Schienen S, S gelagert sind, die durch die Feder F miteinander verbunden sind. Die Beobachtung der an den Spiegelflächen I und II reflektierten Skalenbilder erfolgt wieder mit je einem Fernrohr. Zur Beobachtung von Verdrehungswinkeln werden kleine Spiegel an in Höhenmitte eingeschlagenen Stiften angekittet derart, daß ihre Ebenen in die Querschnittsflächen fallen, deren Verdrehung bestimmt werden soll. In einer je nach der verlangten Meßgenauigkeit verschiedenen Entfernung von den Spiegelflächen wird parallel zur Spiegelfläche und zur Querschnittshöhe eine Skala aufgestellt, deren Teilung ganz wie bei Messung der Verlängerung der Meßlänge eines auf Zug beanspruchten Stabes (Seite 82ff.) durch ein mit Fadenkreuz versehenes Fernrohr beobachtet wird. Die Ermittlung des Verdrehungswinkels geschieht in der Regel an zwei im Querschnitt einander gegenüberliegenden Spiegeln, um Mittelwerte des Verdrehungswinkels erhalten zu können, kann aber auch an mehreren Spiegeln, die der Umrandung des Querschnittes folgen, vorgenommen werden, um fallweise einen Schluß auf die Krümmung der Querschnittsebenen ziehen zu können.

11. Beanspruchung auf ebene, schiefe oder gerade Biegung, Schub und Druck (Zug).

Als Beispiel für die Beanspruchung auf schiefe Biegung, Schub und Druck legen wir das durch Abb. 88, Seite 224 dargestellte mit der Abänderung zugrunde, daß die Kraft P in das Innere des Stabes wirkt. Das Linkskoordinatensystem (Abb. 137) xyz legen wir mit dem Ursprung 0 in den Schwerpunkt der rechten

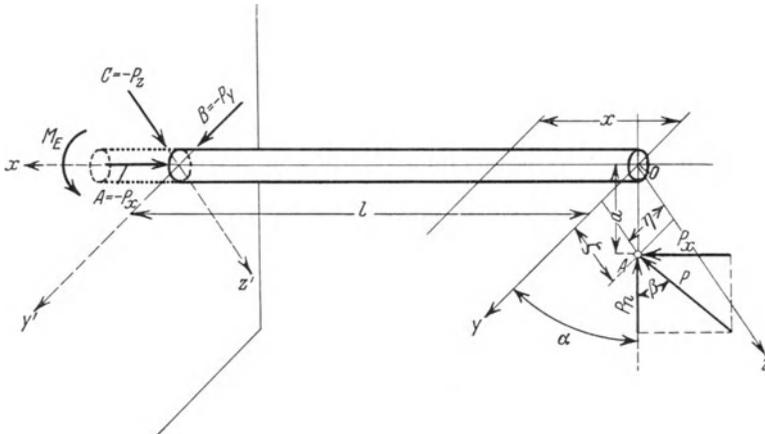


Abb. 137.

Endquerschnittsfläche, mit der nach links gerichteten x -Achse in die Stabachse, die zx - und yx -Ebenen schneiden wie stets die Querschnitte in Hauptzentralachsen. Der Neigungswinkel der Kraftebene zur xy -Ebene sei α . Die Entfernung des Durchstoßpunktes A der Kraft P mit der Ebene der rechten Endquerschnittsfläche des Stabes vom Schwerpunkt derselben sei a . Liegt A wie in der Abb. nicht auf dem Stabe, so geschieht die Übertragung der Wirkung der Kraft auf denselben durch einen steifen Arm $0A$. Der Winkel, den die Kraft P mit der Geraden $0A$ einschließt, heiße β .

Wir zerlegen uns die Kraft P in drei Komponenten P_x, P_y, P_z parallel zu

den Achsen y, x, z des Koordinatensystemes und erhalten

$$P_x = P \sin \beta, \quad P_y = P \cos \beta \cos \alpha = P_n \cos \alpha, \quad P_z = P \cos \beta \sin \alpha = P_n \sin \alpha$$

mit P_n als Komponente der Kraft P in der yz -Ebene. Das Biegemoment $P_x a$ zerlegen wir in zwei Biegemomente M'_{By} und M'_{Bz} , die in den Ebenen xz und xy wirken und die Größe $M'_{By} = -P_x a \sin \alpha = -P_x \zeta$ bzw. $M'_{Bz} = P_x a \cos \alpha = P_x \eta$ besitzen, wenn η und ζ die y, z -Koordinaten des Angriffspunktes A der Kraft P bedeuten. In einem Querschnitt in der Entfernung x vom rechten Stabende existieren: a) eine negative Normalkraft $N = -P_x$, b) die Querkraftskomponenten $Q_y = P_y$ und $Q_z = P_z$, deren Zeichen von den Winkeln α und β abhängt (in der Abb. 137 sind beide Querkraftkomponenten positiv), c) zwei Biegemomente M_{By} und M_{Bz} , die auf die Momente M'_{By} und M'_{Bz} und die Momente $M''_{By} = P_n x \sin \alpha = P x \cos \beta \sin \alpha$ und $M''_{Bz} = -P_n x \cos \alpha = -P x \cos \beta \cos \alpha$ derart rückführbar sind, daß

$$\left. \begin{aligned} M_{By} &= -P_x \zeta + P_n x \sin \alpha = -P \zeta \sin \beta + P x \cos \beta \sin \alpha = M'_{By} + M''_{By}, \\ M_{Bz} &= +P_x \eta - P_n x \cos \alpha = +P \eta \sin \beta - P x \cos \beta \cos \alpha = M'_{Bz} + M''_{Bz}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

Die im Einspannungsquerschnitt übertragenen Reaktionskomponenten sind: a) die Stabkraft $A = -P_x$, b) die zur Stabachse normalen Kräfte $B = -P_y$ und $C = -P_z$ und c) die Einspannungsmomente

$$M_{Ey} = P_x \zeta - P_n l \sin \alpha = P \zeta \sin \beta - P l \cos \beta \sin \alpha$$

und

$$M_{Ez} = -P_x \eta + P_n l \cos \alpha = -P \eta \sin \beta + P l \cos \alpha \cos \beta,$$

aus welchen das resultierende Moment $M_E = P_x a - P_n l = P a \sin \beta - P l \cos \beta$ entsteht.

Infolge der Normalkräfte wird der Stab auf Druck entsprechend einer Spannung

$$X_x^d = -\frac{P_x}{F} \quad (\text{b})$$

mit F als Querschnittsfläche des Stabes beansprucht. Die Biegemomente rufen Biegungsspannungen X_x^b hervor, die nach Formel (111) auf Seite 238 zu berechnen sind. Darnach wird im Querschnitt x

$$\left. \begin{aligned} X_x^b &= \frac{-P_x \zeta + P_n x \sin \alpha}{J_y} \bar{z} + \frac{-P_x \eta + P_n x \cos \alpha}{J_z} \bar{y} \\ &= -P_x \left(\frac{\zeta}{J_y} \bar{z} + \frac{\eta}{J_z} \bar{y} \right) + P_n x \left(\frac{\sin \alpha}{J_y} \bar{z} + \frac{\cos \alpha}{J_z} \bar{y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{c})$$

Die gesamte Normalspannung gewinnen wir durch Superposition der Druck- und Biegungsspannung mit

$$X_x = X_x^d + X_x^b = -\frac{P_x}{F} \left(1 + \frac{\zeta}{r_y^2} \bar{z} + \frac{\eta}{r_z^2} \bar{y} \right) + \frac{P_n x}{F} \left(\frac{\bar{z} \sin \alpha}{r_y^2} + \frac{\bar{y} \cos \alpha}{r_z^2} \right), \quad (129)$$

worin $r_y^2 = \frac{J_y}{F}$ und $r_z^2 = \frac{J_z}{F}$, also r_y, r_z die Trägheitsradien der Querschnittsfläche, welche den Trägheitsmomenten J_y und J_z zugeordnet sind, bedeuten. Die Querkraften Q_y und Q_z gehören zu den durchschnittlichen Schubspannungen \bar{Y}_x und \bar{Z}_x die nach den allgemeinen Formeln (116) und (116a) auf Seite 243, in Sonderfällen nach den Gleichungen (116b) und (116c) zu berechnen sind.

Denken wir uns den Stab im Querschnitt x durchgeschnitten und betrachten den rechts vom Querschnitt erhaltenen Stabteil, so bemerken wir, daß derselbe unter dem Einflusse der Kräfte P_x und P_n und der Resultanten der im Quer-

schnitte x übertragenen, den Spannungen X_x und \bar{Y}_x, \bar{Z}_x zugeordneten Kräften steht. Offenbar muß, damit Gleichgewicht herrscht,

$$\int_P X_x df = P_x, \quad \int_P \bar{Y}_x df = Q_y \quad \text{und} \quad \int_P \bar{Z}_x df = Q_z$$

sein, ferner die Kraft P_x und die Spannungsresultante $\int_P X_x df$ zusammen ein Kräftepaar bilden, dessen Vektor entgegengesetzt gleich dem Vektor des Kräftepaars ist, das aus der den Kräften $\bar{Y}_x df$ und $\bar{Z}_x df$ zugeordneten Spannungsresultanten einerseits und der Resultierenden aus P_y und P_z , deren Größe der Querkraft Q gleichkommt, andererseits gebildet ist.

Die Nulllinien der Querschnitte, in welchen die Normalspannungen X_x verschwinden, haben für den Querschnitt in der Entfernung x vom rechten Stabende die allgemeine Gleichung

$$0 = \sin \beta \left(1 + \frac{\xi \bar{z}}{r_y^2} + \frac{\eta \bar{y}}{r_z^2} \right) - x \cos \beta \left(\frac{\bar{z} \sin \alpha}{r_y^2} + \frac{\bar{y} \cos \alpha}{r_z^2} \right) \quad (130)$$

und stellen Gerade vor, die nicht durch die Schwerpunkte der Querschnitte gehen, außerdem aber die Eigentümlichkeit besitzen, ihre Lage im Querschnitt mit x in dem Sinne zu ändern, daß sie zwar zueinander parallel bleiben, aber verschiedene Abstände von den zugehörigen Schwerpunkten der Querschnitte besitzen. Würden nur die Biegemomente in Betracht gezogen werden, so gingen die Nulllinien in zueinander parallele Gerade über, die die zugehörigen Schwerpunkte enthielten und die Gleichung hätten:

$$0 = \sin \beta \left(\frac{\xi \bar{z}}{r_y^2} + \frac{\eta \bar{y}}{r_z^2} \right) - x \cos \beta \left(\frac{\sin \alpha}{r_y^2} \bar{z} + \frac{\cos \alpha}{r_z^2} \bar{y} \right). \quad (130a)$$

Durch Hinzutreten der Druckspannungen zu den Biegungsspannungen tritt, wie man aus dem Vergleich der Gleichungen (130) und (130a) sieht, eine Parallelverschiebung der den Biegungsspannungen entsprechenden Nulllinien ein.

Die Verformung der Stabachse kann in erster Annäherung durch Übereinanderlagerung der den Biegemomenten M_{By} und M_{Bz} und der Druckkraft P_x zugehörigen Verformungen erhalten werden. Wir können hier an das auf Seite 246 Gesagte anknüpfen. An Stelle des dort zur Durchbiegung in der xz -Ebene gehörenden Wertes Δdx tritt jetzt

$$-\bar{z} d\alpha - \frac{P_x}{FE} dx = \Delta dx = \left(\frac{M_{By}}{EJ_y} \bar{z} - \frac{P_x}{FE} \right) dx. \quad (d)$$

In dieser Gleichung beziehen sich die zweiten Glieder rechts und links vom Gleichheitszeichen auf die Längenänderung (Verkürzung) des Faserelementes dx infolge der Druckbeanspruchung (Abb. 138). Wäre nur Biegungsbeanspruchung allein vorhanden, so würde der in der Entfernung dx vom Querschnitt I gelegene

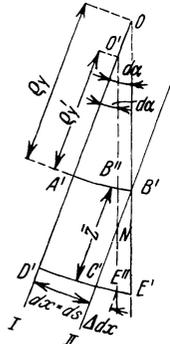


Abb. 138.

Querschnitt II in die Lage $OB'E'$ bei festgehalten gedachtem Querschnitt I kommen, O wäre der Krümmungsmittelpunkt, $OA = \rho_y$ der Krümmungsradius für das Bogendifferential $A'B'$ der elastischen Linie. Infolge der hinzutretenden Druckbeanspruchung kommt der Querschnitt II in die zu $OB'E'$ parallele Lage $O'B''E''$, wobei die Verkürzung der neutralen Faser $B'B'' = -\frac{P_x}{EF} dx$ wäre, der Krümmungsmittelpunkt rückt nach O' und der Krümmungsradius wird $\rho_y' = O'A'$. Die zur Biegungsbeanspruchung gehörige, durch B' normal zur Papierebene gehende Nulllinie geht durch die hinzutretende Druckbeanspruchung

in die durch N normal zur Papierebene gehende Gerade über. Aus dem $\triangle A'O'B''$ folgt $Q'_y d\alpha = dx \left(1 - \frac{P_x}{EF}\right)$. Setzen wir $\frac{1}{Q'_y} = K'_y = \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{1}{1 - \frac{P_x}{EF}}$, so er-

halten wir, da $\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{M_{By}}{EJ_y}$ als Krümmungswert

$$K'_y = \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{M_{By}}{EJ_y \left(1 - \frac{P_x}{EF}\right)}. \quad (131)$$

Die Krümmung der elastischen Linie infolge des biegenden Momentes M_{By} und der Druckbeanspruchung (Krümmung der Projektion der elastischen Linie des Stabes auf die xz -Ebene) ist deshalb etwas kleiner als in dem Falle, wo nur Biegungsbeanspruchung allein vorhanden wäre. In ähnlicher Weise finden wir für die Projektion der elastischen Linie auf die xy -Ebene

$$-K'_z = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_{Bz}}{EJ_z \left(1 - \frac{P_x}{EF}\right)}. \quad (131a)$$

Da der Elastizitätsmodulus E gegenüber $\frac{P_x}{F}$ sehr groß ist, so wird kein bedeutender Fehler gemacht, wenn in den Gleichungen (131) und (131a) die mit P_x behafteten Glieder weggelassen werden.

Nach Einsetzen der Biegemomente M_{By} und M_{Bz} aus (a) auf Seite 299 in die Differentialgleichungen (131) und (131a) können dieselben integriert und die vier auftretenden Integrationskonstanten aus den vier Bedingungen, nach welchen für $x = l$ sowohl z und y als auch $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dy}{dx}$ verschwinden müssen, bestimmt werden.

Kehren wir in Abb. 137 den Richtungssinn der Kraft P um, so erhalten wir eine Beanspruchung auf ebene schiefe Biegung, Schub und Zug. In den aufgeschriebenen Formeln ist dann statt P überall $-P$ einzusetzen.

Setzen wir in den vorstehenden Formeln $\alpha = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$, was $\zeta = 0$ bzw. $\eta = 0$ zur Folge hat, so erhalten wir die gerade Beanspruchung auf Biegung, Schub und Druck (Zug), oder wie sie auch genannt wird, die gerade exzentrische Beanspruchung auf Druck (Zug) und Schub in der xy - oder xz -Ebene (Abb. 89, Seite 224). Es ist dann entweder M_{By} oder M_{Bz} Null und infolgedessen erfolgt die Durchbiegung in der xy - oder xz -Ebene. Die Nulllinien der Querschnitte sind Parallele zur z - oder zur y -Achse, ihrer Lage im Querschnitte nach aber von der Koordinate x abhängig.

12. Ebene schiefe Biegung und Druck (Zug) oder schiefer (gerader) exzentrischer Druck (Zug).

Wenn in Abb. 137 die Kraft P normal auf die rechte Endquerschnittsfläche steht ($\beta = 90^\circ$), so verschwindet P_n und damit P_y, P_z , ferner Q_y und Q_z und damit die Schubspannungen, und die Biegemomente nach Gleichung (a) auf Seite 299 werden $M_{By} = -P\zeta$ bzw. $M_{Bz} = P\eta$. Es liegt dann eine Beanspruchung auf ebene schiefe Biegung und Druck oder, wie man kürzer sagt, auf schiefen exzentrischen Druck vor.

Die nunmehr allein vorhandenen Normalspannungen X_x , welche sich wie im Punkte 11 aus den Biegungsspannungen X_x^b und den Druckspannungen X_x^d

zusammensetzen, werden zufolge Gleichung (129) nunmehr

$$X_x = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{\zeta \bar{z}}{r_u^2} + \frac{\eta \bar{y}}{r_z^2} \right). \tag{129 a}$$

Die Gleichung der Nulllinie geht in

$$-1 = \frac{\zeta \bar{z}}{r_u^2} + \frac{\eta \bar{y}}{r_z^2} \tag{130 b}$$

über, aus der hervorgeht, daß die Nulllinien der verschiedenen Querschnitte zueinander parallele Gerade sind, die mit Bezug auf die Querschnitte die gleiche Orientierung zeigen.

Setzen wir in dieser Gleichung $z = 0$, so erhalten wir den Abschnitt auf der y -Achse $b = -\frac{r_z^2}{\eta}$, der durch eine bekannte geometrische Konstruktion (Abb. 139, in der y, z das

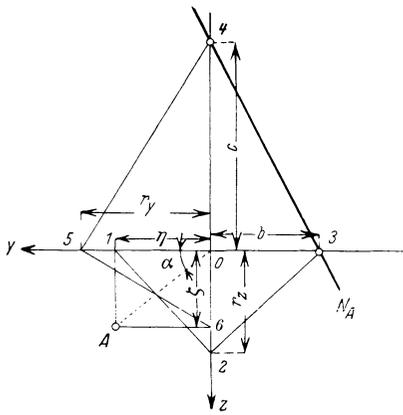


Abb. 139.

Hauptachsenkreuz für den Schwerpunkt 0 eines Querschnittes und A den Angriffspunkt der Kraft P vorstellt) als dritte geometrische Proportionale gefunden werden kann: η und b sind Hypotenusenabschnitte in dem rechtwinkligen Dreiecke 1, 2, 3 mit der Höhe r_z . In ähnlicher Weise findet man den Abschnitt $c = -\frac{r_y^2}{\zeta}$ der Nulllinie auf der z -Achse mit Hilfe des rechtwinkligen Dreieckes 4, 5, 6 das die Höhe r_y besitzt. Verbindet man die gewonnenen Punkte 3 und 4, so erhält man die zu A gehörige Nulllinie. Aus dem Vorstehenden folgt auch, daß, von noch zu besprechenden Grenzfällen abgesehen, Angriffspunkte A einer Kraft und zugehörige Nulllinie auf entgegengesetzten Seiten des Schwerpunktes 0 liegen müssen.

Die Gleichung (129a) können wir auch, nachdem wir in sie wieder die Biegemomente M_{By} , M_{Bz} und die Trägheitsmomente J_y , J_z eingeführt haben, auf Grund von Überlegungen, die sich vollkommen mit den auf Seite 239ff. gepflogenen decken [die Richtungstangente $\text{tg } \varphi$ der Nulllinie ist wieder $\text{tg } \varphi = -\frac{\eta}{\zeta} \cdot \frac{J_y}{J_z} = -\text{cotg } \alpha \frac{J_y}{J_z}$, wie aus Gleichung (130b) folgt], in

$$X_x = -\frac{P}{F} + \frac{M_{Bu}}{J_u} v \tag{129 b}$$

überführen, worin wie in Gleichung (113) auf Seite 240 M_{Bu} das Biegemoment in einem Querschnitt x bezogen auf die u -Achse eines Koordinatensystemes xuv vorstellt, das aus dem Koordinatensystem xyz durch positive Drehung um den Winkel φ hervorgeht, J_u das Trägheitsmoment mit Bezug auf die u -Achse ist, und v ein Flächenelement des Querschnittes längs einer Parallelen zur u -Achse bestimmt. Mit Hilfe der Gleichung (129b) können wir für einen bestimmten Querschnitt die größten Zug- und Druckspannungen bestimmen, indem man für v die Entfernungen der äußersten Fasern des Querschnittes einsetzt. Die dem Zahlenwerte nach größte Spannung im Querschnitte liegt jedenfalls auf der Druckseite, wo sich die Druckspannungen $-\frac{P}{F}$ und die negativen Biegespannungen addieren. Die Spannungen sind auch die größten im Bereiche des Stabes, da das Biegemoment M_{Bu} bei unseren Annahmen von x unabhängig ist.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie des Stabes kann in der Form

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{M_{Bu}}{EJ_u} \left(1 - \frac{P}{FE} \right) \tag{131 b}$$

geschrieben werden, die sich auf das xuv -System bezieht. Man gelangt zu ihr bei Bedachtnahme auf die Gleichungen (131) und (131 a) auf Grund von Schlüssen, die sich vollkommen mit jenen decken, die zur Gleichung (118) auf Seite 247 führten. Die elastische Linie des auf schiefen exzentrischen Druck beanspruchten Stabes ist eine ebene Kurve, deren Ebene auf die Nulllinie normal steht.

Wir wollen nun zeigen, daß die Lage der Nulllinie in einer bemerkenswerten Abhängigkeit von der Länge a des Hebelarmes der Kraft und dem Winkel α steht, den die Kraftebene mit der yx -Ebene einschließt. Auf Grund dieser gesetzmäßigen Abhängigkeit ist es leicht, aus der Lage des Kraftangriffspunktes auf die Lage der zugehörigen Nulllinie einen Schluß zu ziehen. Es sei C (Abb. 140) die Culmannsche Trägheitsellipse für den Schwerpunkt O des Querschnittes, deren Gleichung bekanntlich

$$\frac{y^2}{r_z^2} + \frac{z^2}{r_y^2} = 1 \tag{a}$$

ist. Die Tangente im Punkte A dieser Ellipse, der mit Bezug auf das Zentralachsenkreuz yz die Koordinaten η_A, ζ_A besitzt, hat die Gleichung

$$\frac{y \eta_A}{r_z^2} + \frac{z \zeta_A}{r_y^2} = 1. \tag{b}$$

Sind η_A und ζ_A gleichzeitig die Koordinaten des Angriffspunktes einer im

Punkt A normal zur Papierebene stehenden Kraft P (in Abb. 137 mit P_x bezeichnet), die in der rechten Endquerschnittsfläche des Stabes wirkt, so ist die zugehörige Nulllinie zufolge (130 b) im Hinblick auf (b) die Tangente an die Zentralellipse im Punkte A' mit den Koordinaten $-\eta_A$ und $-\zeta_A$. Diese Nulllinie ist in Abb. 140 mit N_A bezeichnet. Rückt der Angriffspunkt A der Kraft auf den verlängerten Durchmesser AA' nach A_1 oder A_2 mit den Koordinaten $p_1 \zeta_A$ und $p_1 \eta_A$ bzw. $p_2 \zeta_A$ und $p_2 \eta_A$, worin p_1 und p_2 positive Zahlenwerte sind, so ändern sich die Richtungstangenten der zugehörigen Nulllinien, wie aus Gleichung (130 b) ersichtlich ist, nicht, bleiben also gleich der Richtungstangente der Nulllinie $N_{A'}$, dagegen erscheinen auf der y -Achse verschiedene Abschnitte b_1 und b_2 der zugehörigen Nulllinien N_{A_1} und N_{A_2} , die aus (130 b) mit $b_{1,2} = \frac{-r_y^2}{p_{1,2} \zeta_A}$ bestimmt sind.

Für die Nulllinie N_A ist der Abschnitt auf der y -Achse $b = \frac{-r_y^2}{\zeta_A}$. Wir stellen sonach fest: Die Nulllinien, welche zu Punkten einer Geraden durch den Schwerpunkt O eines Querschnittes als Kraftangriffspunkten gehören, sind zueinander parallel, und deren Abschnitte auf der y -Achse bzw. auf jeder durch O gehenden Geraden sind verkehrt proportional den Entfernungen der Angriffspunkte vom Schwerpunkt, derart, daß die Nulllinie gegen den Schwerpunkt rückt, wenn

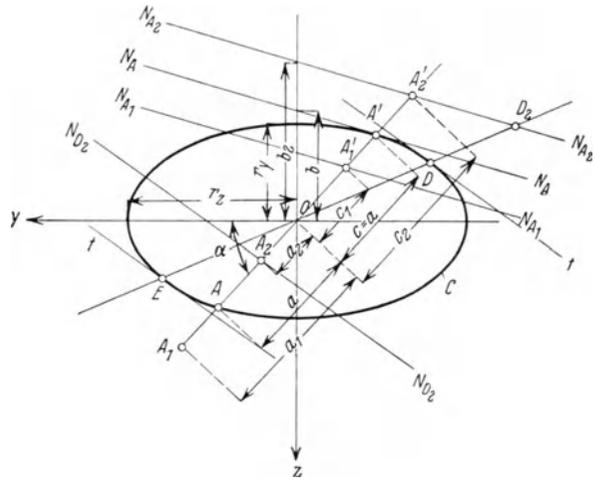


Abb. 140.

der Angriffspunkt von demselben wegrückt und umgekehrt. Gelangt der Angriffspunkt in den Schwerpunkt ($p = 0$), so rückt die Nulllinie in die Unendlichkeit, liegt der Angriffspunkt im Unendlichen, so geht die Nulllinie durch den Schwerpunkt. Die zuletzt genannten Folgerungen können folgendermaßen gedeutet werden. Wenn der Angriffspunkt in den Schwerpunkt gelangt, so liegt eine Beanspruchung auf reinen Druck vor, zwei benachbarte Querschnitte bleiben bei der Verformung zueinander parallel und schneiden sich demnach in der Unendlichkeit. Einem unendlich ferne gelegenen Angriffspunkt ist die Beanspruchung durch ein Kräftepaar zugeordnet, dem als Resultante eine unendlich kleine in der Unendlichkeit liegende Kraft entspricht. Ein Kräftepaar beansprucht aber den Stab auf reine schiefe Biegung, für welche die Nulllinie durch den Schwerpunkt gehen muß.

Nennen wir die Entfernungen der Angriffspunkte A, A_1, A_2 usw. vom Schwerpunkt der Reihe nach $OA = a, OA_1 = a_1, OA_2 = a_2 \dots$ usw., die Entfernungen der Schnittpunkte der zugehörigen Nulllinien mit der Geraden durch den Schwerpunkt, auf welcher die Angriffspunkte liegen, $OA' = c, OA'_1 = c_1, OA'_2 = c_2 \dots$ usw., so können wir die obige Gesetzmäßigkeit auch durch die Beziehungen

$$a^2 = a_1 c_1 = a_2 c_2 \quad (c)$$

ausdrücken. Aus diesen Gleichungen kann $c_1, c_2 \dots$ usw. als dritte geometrische Proportionale gefunden werden, wenn $a_1, a_2 \dots$ usw. gegeben sind, da $2a$ als beliebiger Durchmesser der Zentralellipse als bekannt angesehen werden kann.

Wir nehmen nunmehr auf der Nulllinie N_{A_2} einen Punkt D_2 als Angriffspunkt einer Kraft mit den Koordinaten $p \zeta_D$ und $p \eta_D$ (p ist wie oben eine positive konstante Zahl), η_D und ζ_D sind die Koordinaten des Schnittpunktes D der Geraden OD_2 mit der Zentralellipse. Die Gleichung der zu D_2 gehörigen Nulllinie ist nach (130b)

$$-1 = \frac{p \zeta_D z}{r_y^2} + \frac{p \eta_D y}{r_z^2}. \quad (d)$$

Da D_2 auf der Nulllinie N_{A_2} liegt, befriedigen seine Koordinaten die Gleichung derselben, d. h. es muß

$$-1 = \frac{p_2 \zeta_A}{r_y^2} p \zeta_D + \frac{p_2 \eta_A}{r_z^2} p \eta_D \quad (e)$$

sein, woraus gefolgert werden kann, daß der Angriffspunkt A_2 auf der Nulllinie (d) liegt, weil, wenn man in deren Gleichung für $z = p_2 \zeta_A$ und $y = p_2 \eta_A$ setzt, die Gleichung (e) zum Vorschein kommt. Die zu D_2 gehörige Nulllinie N_{D_2} wird daher gefunden, indem wir zu der durch den Punkt D an die Zentralellipse gelegten Tangente t eine Parallele durch den Punkt A_2 ziehen.

Es gilt somit der Satz: Werden die Punkte einer Geraden als Angriffspunkte von Kräften angesehen, so gehen die zugehörigen Nulllinien dieser Angriffspunkte alle durch einen Punkt, der zu der gegebenen Geraden, wenn sie als Nulllinie betrachtet wird, als Angriffspunkt gehört. Von diesem Satz gilt auch die in selbstverständlicher Weise zu formulierende Umkehrung.

Bei der geraden exzentrischen Druck- (Zug-) Beanspruchung wirkt die zum rechten Endquerschnitt des Stabes normal stehende Kraft P in der Ebene xy oder xz , d. h. es ist entweder die Koordinate ζ oder η in den vorstehenden Formeln gleich Null zu setzen. Die Nulllinien sind entweder parallel zur z - oder y -Achse und das xuv -System deckt sich mit dem System xyz . Die für die totalen Spannungen

sich dann ergebenden Gleichungen

$$X_x = -\frac{P}{F} + \frac{M_{By}}{J_y} \bar{z} \quad \text{bzw.} \quad X_x = -\frac{P}{F} - \frac{M_{Bz}}{J_z} \bar{y} \quad (129c)$$

werden häufig als Naviersche Gleichungen bezeichnet, da sie ursprünglich von diesem Forscher aufgestellt wurden.

13. Fortsetzung: Bestimmung der größten Spannungen mit Hilfe des Kernes. Beispiele.

Wenn wir einen Stab, der aus einem gegen Zugbeanspruchung wenig widerstandsfähigen Materiale besteht, wie das z. B. bei Steinen zutrifft, deren Druckfestigkeit das 8- bis 20- oder in Ausnahmefällen noch mehrfache der Zugfestigkeit ist, auf exzentrischen schiefen oder geraden Druck beanspruchen, ist es wünschenswert, den Angriffspunkt der Kraft so zu wählen, daß die zugehörige Nulllinie den Querschnitt nicht schneidet, höchstens berührt ohne zu schneiden, denn dann haben die Biegungsspannungen einerlei negatives Vorzeichen. Der geometrische Ort aller Angriffspunkte, denen Nulllinien entsprechen, die die Querschnittsberandung berühren ohne sie zu schneiden, bildet eine innerhalb des Querschnittes gelegene im allgemeinen krumme geschlossene Linie, innerhalb welcher der Teil des Querschnittes liegt, der als sein Kern bezeichnet wird¹. Wir können somit sagen: Greift eine einen Stab auf schiefen oder geraden exzentrischen Druck oder Zug beanspruchende Kraft innerhalb oder höchstens in der Berandung des Kernes an, so werden durch sie Biegungsspannungen einerlei Vorzeichens hervorgerufen, d. h. bei exzentrischer Druckbeanspruchung nur Druck-, bei exzentrischer Zugbeanspruchung nur Zugspannungen. In Abb. 141 ist die Umrandungskurve C des Querschnittes dargestellt, dessen Schwerpunkt in O liegt. Die zentrale Trägheitsellipse sei E . Wir legen im Punkte I der Querschnittsumrandung eine Tangente t_1 an dieselbe und fassen sie als Nulllinie eines zu suchenden Kraftangriffspunktes auf. Zu diesem Behufe zeichnen wir zu t_1 eine parallele Tangente an die Trägheitsellipse mit dem Berührungspunkt I' , finden den Schnittpunkt I'' der verlängerten Strecke OI mit der Tangente t_1 und können nunmehr den Abstand des zur Nulllinie t_1 gehörigen Angriffspunktes I , der auf der nach unten über O hinaus verlängerten Geraden $I'O$ liegen muß, vom Schwerpunkt O nach Gleichung (c) auf Seite 304 aus der Beziehung $(OI)^2 = \overline{OI''} \cdot \overline{OI}$ berechnen oder graphisch bestimmen. Der Angriffspunkt I gehört der Umrandung des Kernes an. Der Tangente t_2 an die Querschnittsberandung mit den Berührungspunkten 2 und $\bar{2}$ entspricht als Berührungspunkt der zu t_2 parallelen Tangente an die Träg-

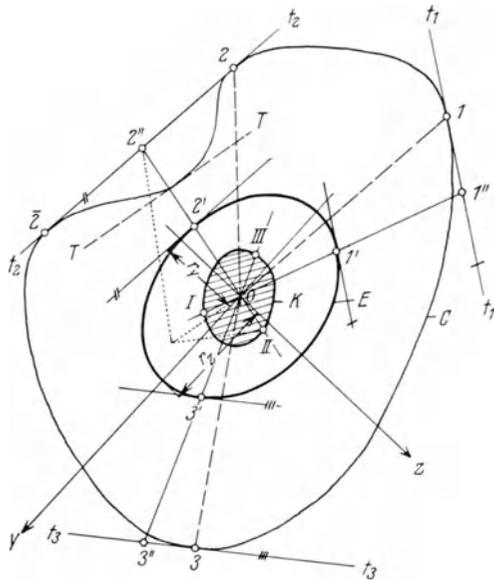


Abb. 141.

heit innerhalb oder höchstens in der Berandung des Kernes an, so werden durch sie Biegungsspannungen einerlei Vorzeichens hervorgerufen, d. h. bei exzentrischer Druckbeanspruchung nur Druck-, bei exzentrischer Zugbeanspruchung nur Zugspannungen. In Abb. 141 ist die Umrandungskurve C des Querschnittes dargestellt, dessen Schwerpunkt in O liegt. Die zentrale Trägheitsellipse sei E . Wir legen im Punkte I der Querschnittsumrandung eine Tangente t_1 an dieselbe und fassen sie als Nulllinie eines zu suchenden Kraftangriffspunktes auf. Zu diesem Behufe zeichnen wir zu t_1 eine parallele Tangente an die Trägheitsellipse mit dem Berührungspunkt I' , finden den Schnittpunkt I'' der verlängerten Strecke OI mit der Tangente t_1 und können nunmehr den Abstand des zur Nulllinie t_1 gehörigen Angriffspunktes I , der auf der nach unten über O hinaus verlängerten Geraden $I'O$ liegen muß, vom Schwerpunkt O nach Gleichung (c) auf Seite 304 aus der Beziehung $(OI)^2 = \overline{OI''} \cdot \overline{OI}$ berechnen oder graphisch bestimmen. Der Angriffspunkt I gehört der Umrandung des Kernes an. Der Tangente t_2 an die Querschnittsberandung mit den Berührungspunkten 2 und $\bar{2}$ entspricht als Berührungspunkt der zu t_2 parallelen Tangente an die Träg-

¹ Siehe hierzu O. Mohr: Gesammelte Abhandlungen aus dem Gebiete der techn. Mechanik, 2. Aufl. Berlin: W. Ernst 1914.

heitsellipse der Punkt 2', und wir erhalten den Kernumrandungspunkt II usw. Zwischen den Punkten 2 und 2' der Umrandung liegen Punkte, die als Berührungspunkte von Tangenten als Nulllinie nicht gewählt werden dürfen, da diese den Querschnitt nicht nur berühren, sondern auch schneiden (z. B. die Tangente T). Vom Punkte 2 gehen wir im Pfeilsinne weiter und können weitere Tangenten, z. B. t₃ und zugehörige Punkte der Umrahmung des Kernes, z. B. III finden. Durch Verbindung der gefundenen Punkte I, II, III, . . . finden wir die Kurve K, die den schraffierten Kern umrahmt.

Der Kern des Querschnittes kann dazu benützt werden, um die größten Normalspannungen in einem Querschnitt in allgemeinen Formeln zum Ausdruck zu bringen. Es sei C (Abb. 142) die Umrandung des Querschnittes, E die zentrale

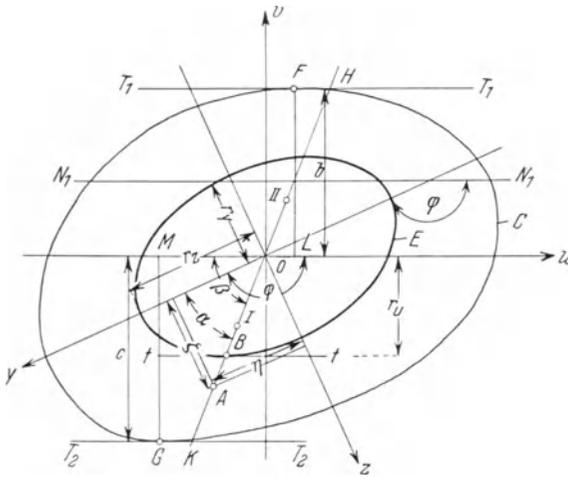


Abb. 142.

Trägheitsellipse für den Schwerpunkt O, y und z die Trägheitshauptachsen des Querschnittes für den Schwerpunkt. (Die positive x-Achse geht also hinter die Papierebene.) Zum Angriffspunkte A der zur positiven x-Achse parallelen Kraft P die auf exzentrischen Druck beansprucht, mit den Koordinaten η, ζ gehört die Nulllinie N₁, die parallel zur Tangente t im Berührungspunkte B (Schnitt von OA mit der Ellipse E) der Trägheitsellipse ist und mit der y-Achse den Winkel φ einschließt. Die u-Achse des

Systemes xuv (Seite 302) ist parallel zur Nulllinie N₁ und geht durch den Schwerpunkt O. Mit Bezug auf dieses System können die Normalspannungen bei exzentrischem Druck nach Gleichung (129b) auf Seite 302 ausgedrückt werden.

Die Biegungsspannungen $X_x^b = -\frac{M_{Bu}}{J_u} v$ und mit ihnen auch die Normalspannungen X_x werden in den Punkten G und F, d. i. den Berührungspunkten der zur u-Achse parallel gezogenen Tangenten T₁ und T₂ an den Querschnittsumfang dem Zahlenwerte nach am größten. Dem Zeichen nach entspricht dem Punkte G die größte Druckspannung, dem Punkte F die größte Zugspannung (M_{Bu} ist hier positiv). Bezeichnen wir die Zahlenwerte der v Koordinaten der Punkte F, G und A der Reihe nach mit b, c und d, den zur u-Achse gehörigen Trägheitsradius mit r_u, so wird

$$\sigma_1 = (X_x)_{\max} = -\frac{P}{F} + \frac{Pd}{F r_u^2} b, \quad \sigma_2 = (X_x)_{\min} = -\frac{P}{F} - \frac{Pd}{F r_u^2} c. \quad (a)$$

Da r_u nach der als bekannt vorausgesetzten Regel durch den Abstand der Achse u und der zu ihr parallelen Tangente t an die Trägheitsellipse gegeben ist, können die vorstehenden Gleichungen mit r_u = OB sin β, d = OA sin β, b = OH sin β, c = OK sin β und β = 180 - φ + α, also sin β = sin (φ - α) auch in der Form

$$\sigma_1 = -\frac{P}{F} \left(1 - \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OH}}{\overline{OB}^2} \right), \quad \sigma_2 = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OK}}{\overline{OB}^2} \right) \quad (b)$$

geschrieben werden. Zur Tangente T_1 als Nulllinie gehört der Punkt I der Kernumrandung als Kraftangriffspunkt, dessen Lage aus $\overline{OB^2} = \overline{OI} \cdot \overline{OH} = K_1 \cdot \overline{OH}$ folgt. Zur Tangente T_2 als Nulllinie gehört der Punkt II der Kernumrandung als Kraftangriffspunkt, dessen Lage aus $\overline{OB^2} = \overline{OII} \cdot \overline{OK} = K_2 \cdot \overline{OK}$ bestimmbar ist. Die eingeführten Größen $K_1 = \overline{OI}$ und $K_2 = \overline{OII}$ heißen Kernweiten. Führen wir die Größen $\overline{OB^2}$ sinngemäß in die Gleichungen (b) für die größten Normalspannungen ein, so erhalten wir unter Zuhilfenahme der Abb. 142

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{P}{F} \left(1 - \frac{\overline{OA}}{\overline{OI}} \right) = \frac{P \overline{AI}}{F K_1} = \frac{M_1}{F K_1}, \\ \sigma_2 &= -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{\overline{OA}}{\overline{OII}} \right) = -\frac{P \overline{AII}}{F K_2} = -\frac{M_2}{F K_2}. \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

M_1 und M_2 heißen die Kernmomente der Kraft P mit Bezug auf die Kernpunkte I bzw. II . Die Größen $F K_1$ und $F K_2$ haben die Dimension eines Widerstandsmomentes (Seite 240) und sollen mit den Zeichen W_1 und W_2 als Widerstandsmomente in einem allgemeinen Sinne eingeführt werden. Damit nehmen die Formeln (132) die gemeinsame Form

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{M_{1,2}}{W_{1,2}} \quad (132a)$$

an. Es ist ersichtlich, daß die Kernmomente M_1 und M_2 zu größten Spannungen in Punkten F und G gehören, die mit Bezug auf die Kernpunkte I und II auf verschiedenen Seiten der u -Achse liegen.

Die Ausdrücke (132) und (132a) gelten bei entsprechender Spezialisierung auch im Falle einfacher schiefer Biegungsbeanspruchung, da die Gleichung (129b) auf Seite 302 für die Spannung X_x bestehen bleibt, wenn die Druckbeanspruchung parallel zur Stabachse wegfällt. Sie gehen dann in

$$\sigma_1 = \frac{M_B u}{F r_u^2} b = \frac{M_B \sin \beta}{F \overline{OB^2} \sin^2 \beta} \overline{OH} \sin \beta = \frac{M_B \overline{OH}}{F \overline{OB^2}} = \frac{M_B}{F K_1} = \frac{M_B}{W_1} \quad (132b)$$

und ähnlich in

$$\sigma_2 = -\frac{M_B}{W_2} \quad (132c)$$

oder zusammengefaßt in

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{M_B}{W_{1,2}} \quad (132d)$$

über, worin M_B das Biegemoment in der Kräftebene mit Bezug auf einen beliebigen Querschnitt bedeutet.

Liegt Beanspruchung auf gerade Biegung in der xz -Ebene vor, so erhalten wir als größte Biegungsspannungen durch Spezialisierung der Formel (132d) in leicht ersichtlicher Weise

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{M_B \eta}{W_{a,b}} \quad (132e)$$

mit W_a und W_b als den auf Seite 241 eingeführten Widerstandsmomenten des Querschnittes.

Aus dem Vorstehenden kann gefolgert werden, daß bei veränderlich gedachtem Winkel α und gegebenen Größen der Kräfte die zahlenmäßig größten, also ungünstigsten Werte von σ_1 und σ_2 herauskommen, wenn die Kernweiten K_1 oder aber K_2 am kleinsten sind.

Wir wenden uns nunmehr zu einzelnen Beispielen.

a) Es ist der Kern eines Rechteckes $1\ 2\ 3\ 4$ mit den Seiten b und h (Abb. 143) oder Quadrates mit der Seite a , die als Querschnitte eines Stabes gedacht sind, zu bestimmen, und für den Fall, als der Stab ein Balkenträger ist, der in der Mitte in irgendeiner die Schwerachse enthaltene Ebene durch eine Kraft zur Stabachse normale P belastet wird, sind jene Kräfteebenen anzuführen, für die die größten Spannungen entstehen.

Zur Zeichnung der zentralen Trägheitsellipse bedürfen wir der Trägheitsradien r_y und r_z , die sich aus $J_y = \frac{1}{12} b h^3 = b h r_y^2$ und $J_z = \frac{1}{12} h b^3 = b h r_z^2$ mit $r_y = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0,288 h$ und

$r_z = \frac{b}{\sqrt{12}} = 0,288 b$ ergeben. Der Tangente $1\ 2$, als Nulllinie betrachtet, entspricht ein Kraftangriffspunkt I , der auf der positiven z -Achse liegt. Seine Entfernung IO bestimmt sich

zufolge Gleichung (c) auf Seite 304 aus $OI \cdot \frac{h}{2} = r_y^2 = \frac{h^2}{12}$ mit $OI = \frac{h}{6}$. Ähnlich findet man den Angriffspunkt II auf der positiven y -Achse, der zu $1\ 4$ als Nulllinie gehört, aus

$OII \cdot \frac{b}{2} = r_z^2 = \frac{b^2}{12}$ mit $OII = \frac{b}{6}$. Die zu den Tangenten $4\ 3$ bzw. $3\ 2$ als Nulllinien gehörigen

Angriffspunkte III und IV liegen symmetrisch zu I bzw. II auf der negativen z - bzw. negativen y -Achse. Allen zugelassenen, d. h. den Querschnitt nicht schneidenden Nulllinien,

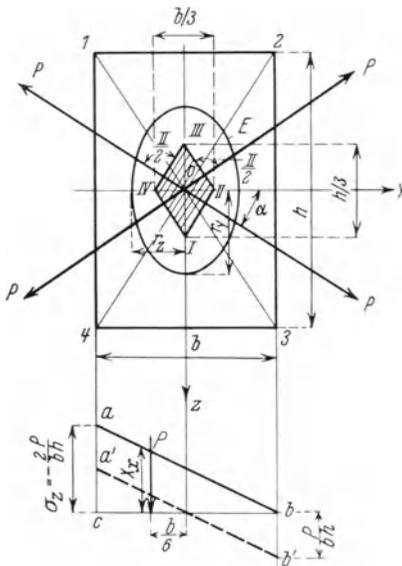


Abb. 143.

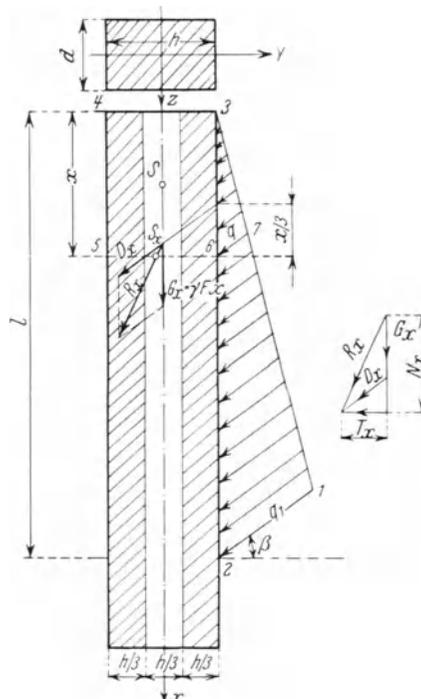


Abb. 144.

die durch den Punkt I gehen, entsprechen Kraftangriffspunkte, die auf der Strecke $I\ II$ liegen, die sonach einen Teil der Kernbegrenzung vorstellen (Punkt $I\ 2$). In ähnlicher Weise findet man, daß $II\ III$, $III\ IV$ und $IV\ I$ Teile der Kernumrandung sein müssen. Demgemäß wird der Kern durch den Rhombus $II\ III\ III\ IV\ IV\ I\ I\ II$ dargestellt, dessen Diagonalen die Längen $\frac{h}{3}$ bzw. $\frac{b}{3}$ haben. Für ein Quadrat mit der Seite a geht der Rhombus in ein Quadrat

über, dessen Diagonalen die Längen $\frac{a}{3}$ haben.

Die vier ungünstigsten Laststellungen für die Kraft P ergeben sich dann, wenn die Kräfte normal auf die Rhombuseiten stehen, denn dann sind die Kernweiten die möglichst kleinsten. Die zugehörigen Winkel α folgen aus $\text{tg } \alpha = \pm \frac{b}{h}$. Für quadratischen Querschnitt fallen die ungünstigsten Laststellungen mit Parallelen zu den Seiten des Kernes zusammen.

Die günstigsten Laststellungen mit den größten Kernweiten sind jene, für die die Kraft P mit der z -Achse zusammenfällt, woraus folgt, daß wir einen Stab von rechteckigem Querschnitt parallel zu seiner längeren Seite h belasten sollen, um ihn voll auszunützen (s. S. 251).

b) Es ist das Schaubild der Verteilung der Spannungen über den Querschnitt für einen rechteckigen Querschnitt darzustellen für den Fall, daß der Stab durch eine Kraft P auf exzentrischen Druck beansprucht wird, und die Kraft durch den Kernpunkt IV geht. In der allgemeinen Gleichung für die Normalspannung $X_x = -\frac{P}{F} + \frac{M_{Bz}}{J_z} y$ ist dann $M_{Bz} = \frac{Pb}{6}$ und $J_z = \frac{1}{12} hb^3$, $F = bh$ zu setzen, wodurch dieselbe die Form $X_x = -\frac{P}{bh} + \frac{2P}{hb^2} y$ annimmt.

Die Normalspannung X_x verschwindet für $y = \frac{b}{2}$, da ja z Nulllinie ist, und erreicht ihren größten Wert für $y = -\frac{b}{2}$ mit $\sigma_2 = -\frac{2P}{bh}$. Die Verteilung der Spannungen ist durch das Schaubild abc (Abb. 143) bestimmt. Würde nur das Moment $M_{Bz} = \frac{Pb}{6}$ wirken, so fiel die Nulllinie in die z -Achse, und das Verteilungsbild für die Spannungen wäre $a'b'bc$, in dem $bb' = \frac{P}{bh}$ und $a'c = \frac{P}{bh}$ wäre.

c) Auf ähnliche Weise kann nachgewiesen werden, daß der Kern einer Ellipse mit den Halbachsen a und b durch eine konzentrische Ellipse mit den Halbachsen $\frac{a}{4}$ und $\frac{b}{4}$ gegeben ist.

d) Ein einseitig eingespannter Stab (Abb. 144) vom rechteckigen Querschnitte mit der Fläche $F = dh$ aus einem Stoffe mit dem spezifischen Gewichte γ sei durch eine über die ganze Stablänge sich erstreckende schiefe Dreieckslast 123 , die in der xz -Ebene unter dem Winkel β zur Stabachse wirkt und durch sein in der positiven x -Richtung wirkendes Eigengewicht parallel zur Stabachse belastet. Es sind die Spannungen, die Lagen der Nulllinien für die verschiedenen Querschnitte des Stabes zu bestimmen, und die Bedingungen anzugeben, unter welchen der Stab nur Spannungen einerlei Vorzeichens erleidet.

Das Eigengewicht ruft im Querschnitte x eine Druckspannung $-\gamma x$ hervor, außerdem sind aber Normalspannungen infolge der durch die Dreieckslast bewirkten geraden Beanspruchung auf Biegung, Druck und Schub vorhanden, die, da in der Entfernung x die Belastung pro Längeneinheit $q = \frac{x q_1}{l}$ ($q_1 = 12$) und die Exzentrizität der der Dreiecks-

kraft entsprechenden Druckkraft $\eta = \frac{h}{2}$ ist, durch

$$-\frac{q x \cos \beta \sin \beta}{2 F} + \frac{q x \cos \beta}{J_z} \cdot \frac{x}{3} \cos \beta - \frac{q x}{2} \cos \beta \frac{h}{2} \sin \beta - \frac{q x}{J_z} \cos \beta \frac{h}{2} \sin \beta y$$

bestimmt sind, worin das erste Glied sich auf die über den Querschnitt gleichförmig verteilten Normalspannungen, die beiden letzten Glieder sich auf Biegungsspannungen beziehen. Die gesamten Normalspannungen im Querschnitte x sind demnach aus der Gleichung

$$X_x = -\gamma x - \frac{x^2 q_1}{2 F l} \cos \beta \sin \beta + \frac{q_1 x^3 y}{6 J_z l} \cos^2 \beta - \frac{q_1 x^2 h y}{4 J_z l} \cos \beta \sin \beta \tag{a}$$

berechenbar. Die im Bereiche des Stabes größten Spannungen ergeben sich im Einspannungsquerschnitte und werden aus (a) erhalten, indem man $x = l$ und $y = \pm \frac{h}{2}$ setzt. Die Gleichung der Nulllinie erhält man durch Nullsetzen des zuletzt erhaltenen Ausdruckes nach leichter Umwandlung mit

$$y = \frac{6 J_z (2 F l \gamma + x q_1 \cos \beta \sin \beta)}{F q_1 x \cos \beta (2 x \cos \beta - 3 h \sin \beta)} \tag{b}$$

Die Nulllinien sind also zur z -Achse parallele Gerade, deren Lagen mit der Koordinate x veränderlich sind. In dem durch $x = \frac{3h}{2} \operatorname{tg} \beta$ bestimmten Querschnitt verschwindet in der Gleichung der Nulllinie der Nenner, d. h. y rückt in die Unendlichkeit. Für diesen Querschnitt herrscht neben Schub nur Druck und keine Biegungsbeanspruchung.

Der im Querschnitt x abgetrennt gedachte Stabteil 3456 steht unter dem Einflusse der Kraft D_x , herrührend von der Dreiecksbelastung 367 , deren Resultante durch den Schwerpunkt des Belastungsdreieckes geht, seines Gewichtes $G_x = \gamma F x$ und der im Querschnitte übertragenen Normal- und Schubspannungen. Die aus D_x und G_x sich ergebende Resultante R_x besitzt eine normal auf den Querschnitt stehende Komponente N_x , die entgegengesetzt leicht sein muß der Spannungresultanten, die den Druck- und Biegungsspannungen im Querschnitt x zugeordnet ist. Die tangentielle Komponente T_x von R_x ist entgegengesetzt gleich der Resultanten aus den den Schubspannungen Y_x entsprechenden Kräften. Liegt der Schnittpunkt S_x der Kraft R_x innerhalb des Kernes des Querschnittes, so werden im Querschnitte nur Normalspannungen einerlei Zeichens, in unserem Falle nur Druckspannungen, übertragen. Für rechteckigen Querschnitt müßte sonach der Angriffspunkt im inneren Drittel der Höhe liegen. Überlegungen, wie sie hier für einen herausgegriffenen Querschnitt herangezogen wurden, können natürlich für jeden Querschnitt des Stabes gemacht werden. Für einerlei Vorzeichen der Spannungen ist es demnach notwendig, daß die Schnittpunkte S_x der Resultanten R_x für alle Querschnitte innerhalb des nicht schraffierten Teiles der Längsschnittfläche des Stabes liegen.

Derartige Betrachtungen wie die vorstehenden greifen Platz, wenn es sich um Stützmauern handelt, für welche die Dreiecksbelastung durch den sogenannten aktiven Erddruck vorgestellt wird.

14. Schiefer (gerader) exzentrischer Druck (Zug) bei Berücksichtigung der Durchbiegungen der Stabachse.

In den Punkten 12 und 13 wurde angenommen, daß bei schiefer oder gerader exzentrischer Druck- (Zug-) Beanspruchung die komponentalen Biegemomente durch $M_{By} = -P\zeta$ und $M_{Bz} = P\eta$ bestimmt, d. h. für die verschiedenen Querschnitte konstant seien. Diese Annahme darf gemacht werden, wenn die Verschiebungen der einzelnen Punkte des Stabes, also auch der Stabachse sehr klein sind. Es kommen aber auch sehr häufig Fälle exzentrischer schiefer oder gerader Druckbeanspruchung vor, für welche die gemachte Angabe einer Korrektur bedarf, da die verhältnismäßig großen Durchbiegungen auf die Werte der Biegemomente einen nicht mehr zu vernachlässigenden Einfluß nehmen.

Bei großen Durchbiegungen ist es jedenfalls auch nicht ganz genau, wenn wir sagen, daß in den angezogenen Fällen nur Beanspruchung auf Druck (Zug) und Biegung vorliegt, da sich dann mit Bezug auf die verdrehten Querschnitte auch Querkräfte geltend machen werden. Darauf wollen wir aber nicht näher eingehen.

Wenn, wie in Abb. 145 angenommen, der links fest eingespannte, rechts stützungslose Stab durch eine Kraft P , die am Hebelarm ζ in der xz -Ebene wirkt, gerade exzentrisch gedrückt wird, werden die Durchbiegungen z in der

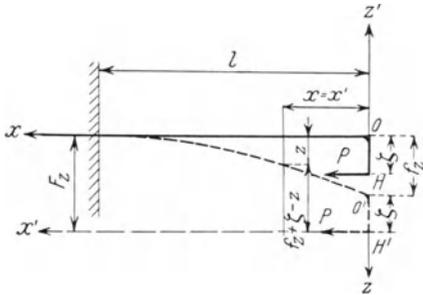


Abb. 145.

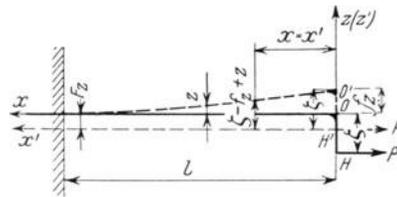


Abb. 145a.

Kraftebene, die der Stab erfährt, bei unveränderlich gedachtem Querschnitt um so größer, je länger der Stab ist. Da das Biegemoment M_{By} für einen Querschnitt seinem Zahlenwerte nach bei Vernachlässigung der Durchbiegung des steif gedachten Hebelarmes OH , aber bei Berücksichtigung der Durchbiegungen z in der durchgebogenen Lage des Stabes eigentlich durch $|M_{By}| = P(\zeta + f_z - z)$

bestimmt ist, wenn f_z die größte Durchbiegung am rechten Stabende vorstellt, während bei Vernachlässigung der Durchbiegungen $|M_{By}| = P\zeta$, so wurde in den Punkten 11 und 12 das Biegemoment um $P(f_z - z)$ zu klein gewählt. Daraus folgt, daß dort die Größe der Biegungsspannungen für lange Stäbe zu klein gefunden wurde. Bei exzentrischer Zugbeanspruchung (Abb. 145a) ist es gerade umgekehrt, d. h. bei Berücksichtigung der Durchbiegungen ist das Biegemoment um $P(f_z - z)$ kleiner als dann, wenn die Durchbiegungen für die Berechnung der Biegemomente vernachlässigt werden. Das hat zur Folge, daß bei exzentrischer Zugbeanspruchung die entwickelten Formeln um so mehr zu große Werte der Biegungsspannungen liefern, je länger der Stab unter sonst gleichen Umständen ist. Eine Berechnung der Biegemomente bei Berücksichtigung der Durchbiegungen ist nur möglich, wenn wir letztere selbst, d. h. die elastische Linie des Stabes kennen. Die Gleichung derselben wird gewöhnlich so hergeleitet, daß man dabei von der bekannten Differentialgleichung der elastischen Linie ausgeht, die wir in den vorhergehenden Punkten benützt haben, die aber nur dann gültig ist, wenn die Durchbiegungen sehr klein sind, so daß wir statt eines Elementes ds der elastischen Linie die Koordinatenänderung dx und z. B. für die Krümmung $K_y = \frac{d^2z}{dx^2}$ setzen konnten (Seite 245 ff.). Unsere jetzige Voraussetzung ist aber gerade das Vorhandensein größerer Durchbiegungen. Wenn wir also die gewöhnliche Differentialgleichung der elastischen Linie in unserem Falle jetzt benützen, so müssen wir uns dabei dessen bewußt sein, daß die erhaltenen Resultate um so weniger der Wirklichkeit entsprechen werden, je länger der Stab unter sonst gleichen Verhältnissen ist. Wir werden sehen, daß die Ergebnisse zu gewissen Unstimmigkeiten führen, die für die Beanspruchung auf Knickung von Bedeutung sind.

Wenn wir die Durchbiegungen auf das mit xz bezeichnete System mit dem Ursprung O beziehen (Abb. 145), so lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie $\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{M_{By}}{EJ_y} = -\frac{P(\zeta + f_z - z)}{EJ_y}$, worin das Biegemoment M_{By} negativ ist. Setzen wir $\zeta + f_z - z = z'$, $x = x'$, so lautet die transformierte Differentialgleichung

$$\frac{d^2z'}{dx'^2} = -\frac{Pz'}{EJ_y}, \tag{a}$$

aus der man entnimmt, daß sie sich auf das Koordinatensystem $x'z'$ mit dem Ursprung in H' bezieht. Die Integration dieser linearen Differentialgleichung liefert das bekannte Integral

$$z' = A \sin(\lambda x') + B \cos(\lambda x') \tag{b}$$

mit A und B als Integrationskonstanten und $\lambda^2 = \frac{P}{EJ_y}$. Die Konstanten werden aus den Bedingungen, daß für $x' = 0$, $z' = \zeta$ und für $x = l$, $\frac{dz'}{dx'} = 0$ sein muß, d. i. aus den Gleichungen $\zeta = A \sin 0 + B \cos 0$ und $0 = A \cos(\lambda l) - B \sin(\lambda l)$ mit $B = \zeta$ und $A = \zeta \operatorname{tg}(\lambda l)$ bestimmt. Die Gleichung der elastischen Linie lautet daher

$$z' = \zeta \operatorname{tg}(\lambda l) \sin(\lambda x') + \zeta \cos(\lambda x') = \frac{\zeta \cos[\lambda(l - x')]}{\cos(\lambda l)}. \tag{133}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich für $x' = l$ der Wert der Ausbiegung

$$F_z = \frac{\zeta}{\cos(\lambda l)} = (z')_{\max}$$

am Auflager. Die größte Durchbiegung f_z am rechten Stabende wird daher

$$f_z = F_z - \zeta = \zeta \left(\frac{1}{\cos(\lambda l)} - 1 \right). \quad (133a)$$

Allgemein ergibt sich die Durchbiegung z mit

$$z = f_z + \zeta - z' = \frac{\zeta}{\cos(\lambda l)} - \zeta \frac{\cos[\lambda(l-x')]}{\cos(\lambda l)} = \frac{\zeta}{\cos(\lambda l)} [1 - \cos[\lambda(l-x')]]. \quad (133b)$$

Infolgedessen wird das Biegemoment M_{By} für einen Querschnitt

$$M_{By} = -Pz' = -P\zeta \frac{\cos[\lambda(l-x')]}{\cos(\lambda l)}. \quad (134)$$

und das größte Biegemoment für $x = l$ ist

$$(M_{By})_{\max} = -\frac{P\zeta}{\cos(\lambda l)}. \quad (134a)$$

Die Normalspannungen für einen Querschnitt x werden nunmehr

$$X_x = -\frac{P}{F} + \frac{M_{By}}{J_y} \bar{z} = -\frac{P}{F} - \frac{P\zeta \cos[\lambda(l-x')]}{J_y \cos(\lambda l)} \bar{z}, \quad (135)$$

worin \bar{z} die Koordinate eines Querschnittspunktes bezogen auf das Koordinatensystem xyz bedeutet. Die Nulllinie ist eine zur y -Achse parallele Gerade, die mit Bezug auf ihre Lage im Querschnitt von der Lage des letzteren abhängig ist. Die dem Zahlenwerte nach größten Spannungen im Bereiche des Stabes entstehen an Stellen der größten Entfernungen von der Nulllinie im Einspannungsquerschnitt auf der konkaven Seite (Druckseite) des Stabes, für welchen bei den angenommenen Koordinatensystem \bar{z} positiv ist und sich die Druckspannungen den negativen Biegunesspannungen überlagern. Sie sind auf Grund der Gleichung (135)

$$(\sigma_1)_{\min} = -\frac{P}{F} - \frac{P\zeta}{J_y \cos(\lambda l)} \bar{z}_a = -\frac{P}{F} - \frac{P\zeta}{W_{ya} \cos(\lambda l)} \quad (135a)$$

mit \bar{z}_a als Entfernung der äußersten Fasern auf der Druckseite bestimmt. Die größten Zugspannungen im Bereiche des Stabes im Einspannungsquerschnitte, die auf der konvexen Seite des Stabes (Zugseite) entstehen, nehmen den Wert

$$(\sigma_2)_{\max} = -\frac{P}{F} + \frac{P\zeta}{J_y \cos(\lambda l)} |\bar{z}_b| = -\frac{P}{F} + \frac{P\zeta}{W_{yb} \cos(\lambda l)} \quad (135b)$$

mit $|\bar{z}_b|$ als Zahlenwert der Entfernung der äußersten Fasern auf der Zugseite. Neben den Werten $(\sigma_2)_{\max}$ und $(\sigma_1)_{\min}$ gibt es größte Druck- und Zugspannungen für die verschiedenen Querschnitte, die in leicht verständlicher Schreibweise die Größe

$$\sigma_{1,2} = -\frac{P}{F} \mp \frac{P\zeta \cos[\lambda(l-x')]}{W_{ab} \cos(\lambda l)} \quad (135c)$$

haben. Würden die Durchbiegungen nicht berücksichtigt, so wären die größten Druck- und Zugspannungen für alle Querschnitte dieselben, nämlich

$$\sigma_{1,2} = -\frac{P}{F} \mp \frac{P\zeta}{W_{ab}}.$$

Für gerade exzentrische Druckbeanspruchung in der yx -Ebene, entsprechend einem Biegemoment M_{Bz} , erhält man in ähnlicher Weise

$$y' = \eta \frac{\cos[\mu(l-x')]}{\cos(\mu l)} \quad (133')$$

als Gleichung der elastischen Linie, bezogen auf das $x'y'z'$ -System, mit $\mu^2 = \frac{P}{EJ_z}$,
woraus die größte Durchbiegung

$$f_y = \eta \left(\frac{1}{\cos(\mu l)} - 1 \right) \quad (133a')$$

und die Gleichung der elastischen Linie, bezogen auf das xyz -System

$$y = \frac{\eta}{\cos(\mu l)} [1 - \cos[\mu(l - x')]] \quad (133b')$$

folgt, ferner als Biegemoment und Spannung

$$M_{Bz} = \frac{P\eta \cos[\mu(l - x')]}{\cos(\mu l)}, \quad (134') \quad \text{bzw.} \quad X_x = -\frac{P}{F} - P\eta \frac{\cos[\mu(l - x')]}{J_z \cos(\mu l)} \bar{y}. \quad (135')$$

Aus der Gleichung (135') für die Spannung folgt, daß die Nulllinien jetzt parallel zur z -Achse und im übrigen wieder von der Lage des Querschnittes abhängig sind.

Bei schiefer exzentrischer Belastung eines Kragträgers durch eine Druckkraft P werden die den komponentalen geraden exzentrischen Belastungen zugehörigen Verformungen und Spannungen übereinander gelegt. Da aus dem Vorstehenden folgt, daß das Verhältnis der komponentalen Durchbiegungen

$$\frac{y}{z} = \frac{\eta \cos(\lambda l)}{\zeta \cos(\mu l)} \cdot \frac{1 - \cos[\mu(l - x')]}{1 - \cos[\lambda(l - x')]}$$

nicht konstant, sondern eine von x abhängige Größe ist, so muß die elastische Linie im allgemeinen eine räumliche Kurve sein. Die Normalspannungen nehmen offenbar jetzt die Werte

$$X_x = -\frac{P}{F} \left[1 + \frac{\zeta \bar{z} \cos[\lambda(l - x')]}{r_y^2 \cos(\lambda l)} + \frac{\eta \bar{y} \cos[\mu(l - x')]}{r_z^2 \cos(\mu l)} \right] \quad (136)$$

an. Die Gleichung der Nulllinien, die man durch Nullsetzen des eckigen Klammerausdruckes erhält, zeigt, daß sie in den Querschnitten gelegene Gerade allgemeiner Neigung zur y - bzw. z -Achse sind, und, was ihre Lagen in den Querschnitten anbelangt, mit x , d. h. mit der Querschnittslage selbst veränderlich sind. Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, daß die Richtungstangenten der Nulllinien nicht mehr konstant sind, wie das für schiefe exzentrische Druckbeanspruchung ohne Berücksichtigung der Durchbiegungen zutreffend war. Die im Bereiche des Stabes größten Zug- und Druckbeanspruchungen treten im Einspannungsquerschnitt in den Flächenelementen auf, die Tangenten an die Umrandung des Querschnittes parallel zur dort vorhandenen Nulllinie entsprechen. Es wird, wenn \bar{z}_a, \bar{y}_a und \bar{z}_b, \bar{y}_b die Koordinaten dieser Flächenelemente bedeuten

$$\sigma_{1 \max} \quad \sigma_{2 \min} = -\frac{P}{F} \left[1 + \frac{\bar{z}_{b,a} \zeta}{r_y^2 \cos(\lambda l)} + \frac{\bar{y}_{b,a} \eta}{r_z^2 \cos(\mu l)} \right]. \quad (136a)$$

Viel weniger wichtig wie bei der exzentrischen Druckbeanspruchung, bei der die Durchbiegungen die Biegemomente vergrößern, ist die Rücksichtnahme auf die Durchbiegungen bei exzentrischer Druckbeanspruchung, bei der die Biegemomente infolge der Durchbiegungen an einem kleineren Hebelarme wirken als an jenem, der bei Vernachlässigung der Durchbiegungen vorhanden wäre. Wirkt der Zug exzentrisch in der xz -Ebene, so lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie bezogen auf das Koordinatensystem $xy z$ mit dem Ursprung im Schwerpunkte 0 (Abb. 145a) bei Bedachtnahme auf die Durchbiegungen $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{P(\zeta - f_z + z)}{EJ_x}$. Setzen wir in dieser Gleichung $\zeta - f_z + z = z'$ und $x = x'$,

was der Wahl des Koordinatensystemes $x'z'$ mit dem Ursprung in H' gleichkommt, so erhalten wir die neue Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z'}{d x'^2} = \frac{P z'}{E J_y} \quad (c)$$

die die Lösung

$$z' = A \cosh (\lambda x') - B \sinh (\lambda x') \quad (d)$$

besitzt mit $\lambda^2 = \frac{P}{E J_y}$. Die Integrationskonstanten A und B ergeben sich aus den Bedingungen $x' = l$, $\frac{d z'}{d x} = 0$ und $x' = 0$, $z' = \zeta$ entsprechend den Gleichungen

$$\zeta = A \cosh 0 + B \sinh 0, \quad 0 = A \sinh (\lambda l) - B \cosh (\lambda l)$$

mit $A = \zeta$ und $B = -\zeta \operatorname{tgh} (\lambda l)$. Somit lautet die Gleichung der elastischen Linie

$$z' = \zeta \cosh (\lambda x') - \zeta \operatorname{tgh} (\lambda l) \sinh (\lambda x')$$

oder

$$z' = \frac{\zeta \cosh [\lambda (l - x')]}{\cosh (\lambda l)} \quad (137)$$

Für das Auflager wird $(z')_{\min} = \frac{\zeta}{\cosh (\lambda l)} = F_z$ und daher wird die größte Durchbiegung

$$f_z = \zeta \left[1 - \frac{1}{\cosh (\lambda l)} \right] \quad (137 a)$$

Ferner ergeben sich die Werte der Durchbiegungen z mit

$$z = f_z + z' - \zeta = -\frac{\zeta}{\cosh (\lambda l)} + \frac{\zeta \cosh [\lambda (l - x')]}{\cosh (\lambda l)} = \frac{\zeta [\operatorname{cosh} [\lambda (l - x')] - 1]}{\cosh (\lambda l)} \quad (137 b)$$

Das Biegemoment für den Querschnitt x ist durch

$$M_{By} = -\frac{P \zeta \cosh [\lambda (l - x')]}{\cosh (\lambda l)} \quad (138)$$

und die Normalspannungen durch

$$\sigma_x = +\frac{P}{F} - \frac{P \zeta \cosh [\lambda (l - x')]}{J_y \cosh (\lambda l)} z \quad (139)$$

bestimmt.

Die Formeln (137) bis (139) sind gegenüber den oben für exzentrische Druckbeanspruchungen erhaltenen sinngemäß durch Ersatz der Kreisfunktionen durch Hyperbelfunktionen abgeändert.

Die im Bereiche des Stabes größten Spannungen entstehen jetzt an dem Ende des Stabes, an welchem die Kraft P angreift. Weitere Auseinandersetzungen über die Lagen der Nulllinien, schiefe exzentrische Zugbeanspruchung usw. erübrigen sich, da sie sich mit den oben diesbezüglich für die exzentrische Druckbeanspruchung gegebenen völlig decken.

15. Beanspruchung auf Abscheren. Beispiele. Der Abscherversuch. Scherfestigkeit.

Nach Seite 225ff. ist die Beanspruchung auf Abscheren charakterisierbar durch das hauptsächlich Auftreten von Querkräften, denen sehr kleine Biegemomente an die Seite gestellt sind. Bei einem auf Biegung und Schub beanspruchten Stab kann durch Kürzen des Stabes unter Beibehaltung der gleichen ähnlich gelegenen Belastung bewirkt werden, daß die Beanspruchung auf Schub immer mehr gegenüber der Beanspruchung auf Biegung in den Vordergrund tritt und schließlich bei sehr kleinen Längen des Stabes die Beanspruchung auf Abscheren zustande kommt. Bei unendlich kleiner Stablänge wäre sogar das Biegemoment unendlich klein, und die bei sehr kleinen Stablängen noch vorhandene Beanspruchung auf Abscheren wäre in die Beanspruchung auf Schub schlecht-

hin übergegangen, die aber noch immer nicht eine solche auf reinen Schub sein kann.

Der für die Scherbeanspruchung charakteristischen äußeren Beanspruchung sind sehr kleine Biegungsspannungen X_x , die unter Umständen mit Recht vernachlässigt werden, und ansehnliche durchschnittliche Schubspannungen \bar{Z}_x und \bar{Y}_x , die nach den auf Seite 243 angesetzten Formeln (116 bis 116c) zu berechnen sind, an die Seite gestellt. Dabei darf aber nicht außer acht gelassen werden, daß in der Umgebung der Kraftangriffsstellen sowohl an der Mantelfläche des Stabes als auch in nahe gelegenen Stellen im Stabinnern der Spannungszustand erheblich getrübt sein wird, und daher jene Formeln für kurze Stäbe die wirklichen Verhältnisse weniger genau beschreiben werden als für lange Stäbe in den von Kraftangriffsstellen entfernt gedachten Stabteilen. Im Hinblick auf diese Unsicherheit nimmt man oft an, daß sich die Querkraft über den Querschnitt gleichförmig verteilt und demgemäß die Schubspannungen einander gleich und entgegengesetzt zur Querkraft gerichtet sind. Diese Schubspannungen sind dann, wie z. B. im Falle der Abb. 110, Seite 253 allerdings kleiner als die bei Berechnung nach den Formeln (116) bis (116c) sich ergebende größte mittlere entgegengesetzt zur Querkraft gerichtete Schubspannung in der Nulllinie der begleitenden Biegungsspannungen.

Beispiele:

1. An einem Stab von kreisförmigem Querschnitt (Abb. 146) mit dem Radius r greife an zwei nahezu diametral gegenüberliegenden Punkten der Mantelfläche eine Blechschere an, welche dort die normal zur Stabachse stehenden, nahezu je in der Schneideebene liegenden Kräfte P überträgt. Als Querkraft für die vorliegende Beanspruchung auf Abscheren ist die Kraft P anzusehen. Infolge des kreisförmigen Querschnittes kommt für die Schubspannungen Z_x bzw. \bar{Y}_x die Formel (116b) bzw. (116c) in Betracht. Das dem Winkel α (Abb. 146a) entsprechende statische Moment des Kreisabschnittes ist, wie man durch leichte Integration herausbekommt,

$$S_{yb} = \frac{2r^3 \sin^3 \alpha}{3} = \frac{b^3}{12} \text{ mit } \bar{z} = b.$$

Aus den angegebenen Formeln können somit, da $J_y = \frac{r^4 \pi}{4}$ und $Q_z = P, Q_y = 0$, für die Schubspannungskomponenten die Ausdrücke

$$\bar{Z}_x = \frac{P b^2}{3 r^4 \pi} \tag{a}$$

und $\bar{Y}_x = 0$ gefolgert werden. Die nach Grashof [Gleichung (122) auf Seite 260] zu berechnende Schubspannung \bar{Y}'_x ergibt sich für den Punkt A mit den Koordinaten y, z mit $\bar{Y}'_x = \frac{P b^2}{3 r^4 \pi} \operatorname{tg} \varphi$, wofür, weil $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{BC}$ und

$$BCz = \frac{b^2}{4} \text{ auch}$$

$$\bar{Y}'_x = \frac{4 P y z}{3 r^4 \pi} \tag{b}$$

als Funktion der Koordinaten y, z gesetzt werden kann.

Die größte Schubspannung $(Z_x)_{\max}$ in der y -Achse ($b = 2r$) wird

$$(\bar{Z}_x)_{\max} = \frac{4 P}{3 r^2 \pi} = \frac{4}{3} \cdot \frac{P}{F} \tag{c}$$

mit F als Querschnittsfläche des Stabes. Die Spannungen \bar{Y}'_x verschwinden in der y -Achse.

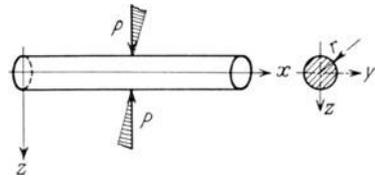


Abb. 146.

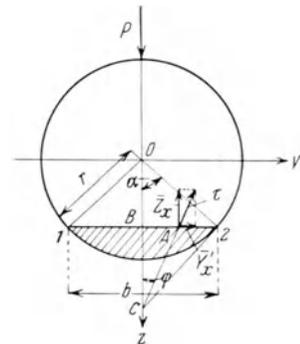


Abb. 146a.

Würde man angenommen haben, daß sich die Querkraft P über den Querschnitt gleichförmig verteilt, so wäre die Schubspannung $Z_x = \frac{P}{F}$ und $Y_x = 0$. Es gilt daher

$$(Z_x)_{\max} = \frac{4}{3} Z_x.$$

Stellen wir uns die Aufgabe, den Radius r so zu bestimmen, daß die Schubspannungen Z_x bzw. \bar{Z}_x im Querschnitte höchstens gleich $(\tau_s)_{zul}$ werden (lies zulässige Beanspruchung auf Abscheren), d. i. einen für den betreffenden Stoff charakteristischen Wert erlangen, so erhalten wir in dem einen Falle $(\tau_s)_{zul} = \frac{4}{3} \frac{P}{r_1^2 \pi}$, in dem anderen $(\tau_s)_{zul} = \frac{P}{r_2^2 \pi}$, d. h. die zugehörigen Radien sind $r_1 = \sqrt{\frac{4P}{3\pi(\tau_s)_{zul}}}$ bzw. $r_2 = \sqrt{\frac{P}{\pi(\tau_s)_{zul}}}$, und verhalten sich demgemäß wie $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15$. Der Stab müßte also nach der einen Berechnungsweise etwas stärker als nach der anderen gehalten werden.

2. Zwei Balken A und B (Abb. 147) aus Holz von

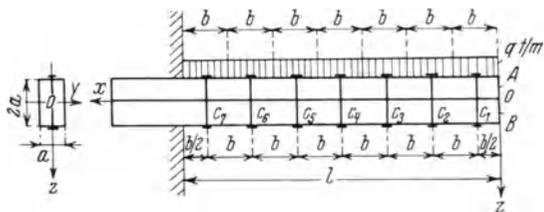


Abb. 147.

quadratischem Querschnitt mit der Seitenkantenlänge a werden übereinander gelegt und durch gleich weit voneinander entfernte Schraubenbolzen $C_1 \dots C_7$ aus Flußeisen zu einem Kragträger mit rechteckigem Querschnitt verbunden, der gleichförmig über seine freie Länge l verteilt durch q t/m auf ebene gerade Biegung und Schub in der xz -Ebene beansprucht wird. Es fragt sich um die Beanspruchung, der die Schraubenbolzen unterliegen.

Werden die quadratischen Balken ohne Bolzen übereinandergelegt, an ihrem linken Ende fest eingespannt und in der angegebenen Weise belastet, so bleiben ihre rechten Endflächen nicht in der gleichen Ebene, sondern stufen sich gegeneinander ab. Letzteres wird durch die Schraubenbolzen verhindert, die daher hauptsächlich jene Kräfte aufzunehmen haben, die entgegengesetzt gleich jenen Kräften sind, die a) eine gegenseitige Verschiebung der Balken

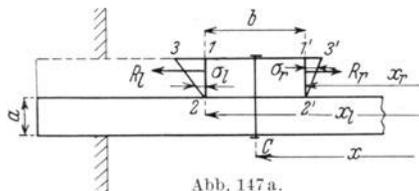


Abb. 147 a.

in ihrer Berührungsebene verhindern, ferner b) eine gemeinsame Verdrehung der Querschnittsflächen der quadratischen Balken bewirken. Diese Kräfte beanspruchen die Bolzen hauptsächlich auf gerade Biegung und Schub. Die Bolzen können als gerade Stäbe gedacht werden, die im quadratischen Balken B über ihre halbe Länge nachgiebig eingespannt sind. In erster Annäherung kann man anstatt der nachgiebigen Einspannung eine feste setzen,

wie auch für die folgende Übersichtsrechnung vorausgesetzt wird. Denken wir uns ein Stück des oberen quadratischen Balkens von der Länge b mit einem Bolzen in dessen Längsmittte herausgeschnitten (Abb. 147 a), so müssen an den Schnittflächen die dort vor Heraus-schneiden inneren Kräfte als äußere Kräfte angebracht werden, um den Gleichgewichtszustand nicht zu stören. Bei Vernachlässigung der Schubspannungen werden sonach in der Entfernung z vom unteren Ende des herausgeschnittenen Stückes in der linken Schnittfläche Kräfte $\sigma_l df = \frac{M_{Bl}}{J_y} z df$, in der rechten Schnittfläche Kräfte $\sigma_r df = \frac{M_{Br}}{J_y} z df$ übertragen, wenn M_{Bl} bzw. M_{Br} die den Schnittflächen entsprechenden Biegemomente und df die Fläche eines unendlich schmalen Flächenstreifens parallel zur y -Achse vorstellen. Offenbar ist $M_{Bl} = -\frac{q x_l^2}{2}$ und $M_{Br} = -\frac{q x_r^2}{2}$ mit x_l und x_r als den die Schnittflächen festlegenden Koordinaten. Die Kräfte $\sigma_l df$ und $\sigma_r df$ verteilen sich über die beiden Schnittquerschnitte entsprechend den Schaubildern 1, 2, 3 bzw. 1', 2', 3' und haben die durch den Schwerpunkt dieser Schaubilder gehenden, zur Stabachse parallelen Resultanten

$$R_l = \int_F \sigma_l df = \frac{M_{Bl}}{J_y} \int z df = -\frac{M_{Bl}}{J_y} S \quad \text{und} \quad R_r = \int_F \sigma_r df = \frac{M_{Br}}{J_y} \int z df = -\frac{M_{Br}}{J_y} S$$

mit S als positiv eingeführtem statischen Moment der Schnittfläche mit Bezug auf die Nulllinie der durch den Schraubenbolzen verbundenen Balkenteile. Der Schraubenbolzen hat sonach die Kraft

$$R = R_l - R_r = \frac{M_{Br} - M_{Bl}}{J_y} S = \frac{q}{2J_y} S (x_l^2 - x_r^2) = \frac{q}{J_y} S b x = -\frac{Q_z S}{J_y} b,$$

mit $x = \frac{x_l + x_r}{2}$ als Koordinate der Querschnittsfläche, in der der Bolzen angebracht ist, und Q_z als Querkraft im Bolzenquerschnitt der verbundenen quadratischen Balken, aufzunehmen. Dieselbe ist nach links gerichtet und hat den Abstand $\frac{2a}{3}$ von der Nulllinie. Sie beansprucht den Bolzen auf gerade Biegung und Schub. Für die Beanspruchung auf Biegung kommt als maximales biegendes Moment $R \frac{2a}{3} = \frac{q a}{3 J_y} S (x_l^2 - x_r^2) = -\frac{2 a b}{3 J_y} Q_z S$, für jene auf Schub die maximale Querkraft R im Einspannungsquerschnitt des Bolzens in Betracht. Ist die Bolzenlänge klein gegenüber dessen Querdimensionen, so kann der Bolzen als annähernd auf Abscheren beansprucht angesehen werden. Die Berechnung der für einen zulässigen Wert der Schubbeanspruchung notwendigen Bolzenstärke erfolgt dann für die maximale Querkraft nach den im vorherigen Beispiel gegebenen Anleitungen. Dieselbe wäre dann offenbar proportional der Quadratwurzel aus der Größe der Querkraft R .

Es braucht wohl bei Rückblick auf den ersten Teil des Buches nicht weiter ausgeführt zu werden, daß die vorstehende Berechnung nur ungefähr den wirklichen Verhältnissen gerecht wird, die infolge der verschiedenen Stoffe, aus welchen Schraubenbolzen und Balken bestehen und der sehr verwickelten Grenzbedingung an der Oberfläche des Schraubenbolzens und der diese umgebenden Holzteile eine exakte Lösung nicht gestatten. Eine solche würde übrigens im vorliegenden Falle ziemlich wertlos sein, wenn für sie das Hookesche Gesetz als gültig vorausgesetzt wird, da das Holz ein inhomogenes und anisotropes Material ist.

Ganz ähnlich wie es für durch Schraubenbolzen verbundene Balkenteile auseinandergesetzt wurde, kann die Rechnung auch für Blechträger durchgeführt werden, die aus einem Steg und daran genieteten Winkeleisen bestehen, um die Stärke der Nieten zu berechnen, die notwendig ist, damit die in je zwei den Nieten benachbarten Querschnitten den Biegungsspannungen der Winkeleisen entsprechenden Kraftdifferenzen durch die durch sie auf Abscheren beanspruchten Nieten aufgenommen werden können.

Scherversuche. Die Scherversuche bezwecken Anhaltspunkte für die Widerstandsfähigkeit eines Stoffes bis zum Bruch bei Beanspruchung auf Abscheren zu gewinnen. Da letztere zwar hauptsächlich eine solche auf Schub ist, zu der aber unter den besonderen Bedingungen, unter welchen der Versuch durchgeführt wird, im allgemeinen zwar kleine, doch je nach dem Stoffe, der gerade vorliegt, verschieden wirksame Biegungsbeanspruchungen nebst an den Kraftübertragungsstellen den dortigen Bedingungen entsprechenden Beanspruchungen verwickelterer Art hinzutreten, ist es bei Beurteilung des Ergebnisses eines Scherversuches außerordentlich wichtig, auf die Versuchsbedingungen und deren verschiedene mögliche Auswirkungen Rücksicht zu nehmen.

Die Scherversuche werden, wenn es sich um Metalle handelt, in der Regel mit kurzen Rundstäben St (Abb. 148) vorgenommen, über welche sich z. B. nach dem Vorschlag von Martens¹ gut passende Ringe R_1, R_2, R_3 aus gehärtetem Stahl legen, deren Dicken d gleich dem Durchmesser des Versuchsstabes sind. Die zwei äußeren Ringe R_1 und R_3 sind entsprechend abgestützt, auf den mittleren R_2 wird durch einen möglichst ohne Reibung geführten Schieber S eine zur Stabachse normale Kraft P übertragen, die bei genügender Größe den Stab St längs der Querschnittsflächen 1, 2 und 3, 4 abschert. Die Lage der Ringe gegeneinander und mit Bezug auf den Stab St wird durch in der Abbildung nicht dargestellte, die Enden des Stabes umschließende und leicht gegen die Ringe R_1 und R_3 wirkende Hohlschrauben derart gesichert, daß die Reibung zwischen den Ringen minimal ist. Bei dieser Anordnung ist die Beanspruchung auf Schub

¹ Martens: l. c.

hauptsächlich in den zwei Querschnitten 1, 2 und 3, 4 erfolgend, man sagt daher, die Beanspruchung auf Abscheren erfolge zweischnittig.

Man kann sich ungefähr ein Bild über das Spiel der Kräfte machen, wenn man annimmt, daß sich die Kraft P und die an den Ringen R_1 und R_3 entstehenden Reaktionen gleichförmig über die in Betracht kommenden Teillängen des Stabes verteilen (Abb. 148a), derart, daß die laufende Belastung am mittleren Teil des Stabes $q = \frac{P}{d}$ kg/cm und an den beiden Seiten $q_1 = \frac{P}{2d}$ kg/cm ist. Das größte Biegemoment (Abb. 148b zeigt das Biegemomentschaubild) ergibt sich dann in der Mitte des Stabes mit $\frac{3Pd}{8}$, und die größten Querkräfte (in Abb. 148c ist das Schaubild der Querkräfte dargestellt) in den Abscherquerschnitten sind $\frac{P}{2}$. Unter der Annahme, daß $P = 3000$ kg und $d = 2$ cm, würde man ein größtes Biegemoment von 2250 kgcm und eine größte Querkraft von 1500 kg erhalten. Diese überschlägige Rechnung ist gegenüber den

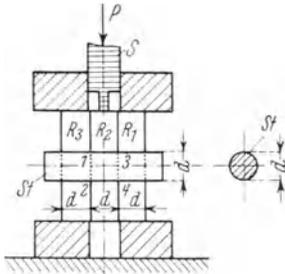


Abb. 148.

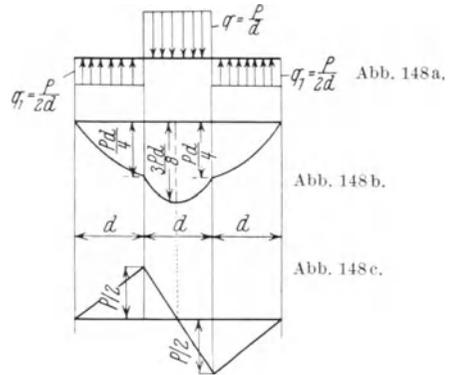


Abb. 148, 148a, b und c.

wirklichen Verhältnissen zu ungünstig, insofern die Reibung vernachlässigt wurde, und die Belastung pro Längeneinheit gegen die Abscherquerschnitte hin wachsen wird. Beide Einflüsse machen sich in einer Verkleinerung der Biegemomente in den Abscherquerschnitten und in Stabmitte geltend.

Als theoretische Scherfestigkeit kann

$$\frac{P_{\max}}{2F} = K_s \tag{140}$$

mit P_{\max} als maximaler Kraft, bei der das Abscheren in den Querschnitten 1, 2 und 3, 4 erfolgt, und F als Querschnittsfläche des Versuchsstabes eingeführt werden. Würde man annehmen, daß das Hookesche Gesetz bis zum Abscheren gilt, so könnte die theoretische Scherfestigkeit mit

$$\frac{P_{\max}}{2F} \cdot \frac{4}{3} = K'_s \tag{140 a}$$

angesetzt werden, d. h. als größte im Bereiche des Querschnittes auftretende mittlere Schubspannung, die das Material aushält [Formel (c) auf Seite 315]. In den Abb. 149a und 149b sind Stäbe aus Fluß- und Gußeisen dargestellt, die durch Beanspruchung auf Abscheren zum Bruch gebracht worden sind. Für den gußeisernen Stab von 2,49 cm Durchmesser ergab sich $P_{\max} = 21000$ kg, entsprechend $K_s = \frac{3}{4} K'_s = 2140$ kg/cm². Die entsprechenden Daten für den flußeisernen Stab mit gleichem Durchmesser waren

$$P_{\max} = 25700 \text{ kg}, \quad K_s = \frac{3}{4} K'_s = 2619 \text{ kg/cm}^2.$$

Beide Definitionen der theoretischen Scherfestigkeiten, von welchen nur die Einführung von K_s als Wertziffer für die Beurteilung der Widerstandsfestigkeit des Stoffes gegen Beanspruchung auf Abscheren üblich geworden ist, gehen von der Annahme aus, daß der Bruch, d. h. in diesem Falle das Abscheren, deswegen erfolgt, weil die Schubspannungen einen für einen gegebenen Stoff charakteristischen und nicht zu überschreitenden Wert K_s bzw. K'_s erlangt hat. Diese Annahme ist aber gewiß unrichtig, und zwar deshalb, weil der Spannungszustand in den Querschnitten, in welchen das Abscheren erfolgt, nicht nur durch die Schubspannungen, sondern auch durch, wenn auch kleine Biegungsspannungen, außerdem aber noch durch

die Art des Kraftangriffes an der Oberfläche des Stabes, durch welche die Beanspruchung auf Biegung und Schub noch weiterhin getrieben wird, bestimmt ist. Beobachtungen bei mit spröden Stoffen, besonders mit Gußeisen durchgeführten Versuchen deuten darauf hin, daß für diese Stoffe der Bruch wahrscheinlich hauptsächlich infolge der Biegungsbeanspruchung zuerst an der Zugseite im Bereiche des mittleren Ringes beginnt und sich dann wesentlich normal zur Längsrichtung des Stabes fortsetzt. (Siehe hierzu die Biegungsbruchlinie am mittleren Teilstück der Abb. 149b.) Es sei hier gleich ein Versuchsergebnis erwähnt, das Bach mit gußeisernen Stäben von 2 cm Durchmesser erhielt. Die Dicke der beiden äußeren Ringe war 2,2 cm, jene des mittleren Ringes 3 cm. Der Stab brach bei $P = 3000$ kg Belastung im mittleren Teile und wurde erst bei $P_{\max} = 10200$ kg abgeschert.

Könnte man von der genannten verwickelten Beanspruchung abschen und annehmen, daß nur Beanspruchung auf Schub vorliegt, so würde doch dem Werte K_s noch mehr Zutrauen entgegengebracht werden können als dem Werte K'_s , da für den letzteren noch überdies die Annahme der Gültigkeit eines Gesetzes gemacht wird, das beim Bruche gewiß nicht mehr zutrifft.

Von der theoretischen Scherfestigkeit, die einer kombinierten Beanspruchung hauptsächlich auf Schub

und, weniger ins Gewicht fallend, auf Biegung zugeordnet gedacht ist, ist die wahre Schubfestigkeit zu unterscheiden. Dieselbe kann der allgemeinen Definition der relativen Festigkeit (Seite 23) untergeordnet werden, und ist dann der durch die Größe der Hauptspannungen bestimmte Spannungszustand, der in einem auf reinen Schub beanspruchten Volumenelement (Abb. 22, Seite 72) eines Körpers (oder, falls ein homogener reiner Schubspannungszustand im ganzen Bereiche eines endlichen Würfels oder anders gestalteten Körpers durch Aufbringung äußerer Kräfte zustande kommt, in diesem Würfel) in dem Augenblicke herrscht, wo der Bruch in diesem Volumenelement (in dem Körper) beginnt. Die so definierte wahre Schubfestigkeit wird in der Technik häufig als wahre Drehungsfestigkeit bezeichnet, weil sie für die Widerstandsfähigkeit eines auf Drillung (Verdrehung) beanspruchten zylindrischen Stabes (siehe Abb. 151 auf Seite 325, ferner den Punkt 20), in dessen ganzem Bereiche ein reiner Schubspannungszustand vorhanden ist, in Betracht kommt. Häufig wird aber im Anschlusse an die Mohrsche Theorie der Anstrengung (Seite 155ff.) als wahre Schubfestigkeit auch der Widerstand gegen die Trennung längs eines Flächenelementes in einem

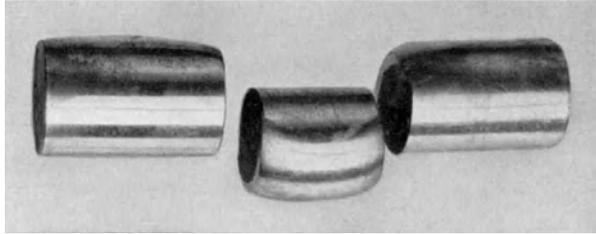


Abb. 149a. Bruch von Flußeisen nach Scherbeanspruchung.

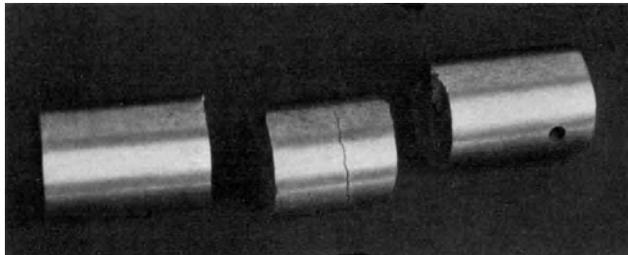


Abb. 149b. Bruch von Gußeisen nach Scherbeanspruchung.

Punkte eines beanspruchten Körpers angesehen, in dem nur Schubspannungen übertragen werden, und ist dann als Schubspannung zu definieren, die in dem genannten Flächenelemente in dem Augenblicke herrscht, in dem der Verschiebungsbruch (Seite 180) einsetzt. Dabei ist besonders zu betonen, daß der Spannungszustand in dem betreffenden Punkt zwar ein reiner Schubspannungszustand sein kann, durchaus aber nicht sein muß, da in Flächenelementen in der Umgebung eines Punktes reine Schubspannungen auch dann übertragen werden können, wenn z. B. ein ebener Spannungszustand mit ungleich bezeichneten, der Größe nach verschiedenen Hauptspannungen vorliegt (Seite 68). Die Art des Spannungszustandes innerhalb der möglichen Spannungszustände hängt von dem besonderen Stoffe ab. Ist die wahre Druckfestigkeit desselben von der wahren Zugfestigkeit (Trennungswiderstand bei Beanspruchung auf Zug) nicht verschieden und kann man demgemäß die der Mohrschen Darstellung (Seite 157 in Abb. 58) entsprechenden Grenzkurven beim Bruch zwischen diesen Spannungszuständen als Gerade parallel zur N_n -Achse auffassen, so könnte, falls die Mohrsche Theorie der Anstrengung richtig wäre, der Spannungszustand für diese zweite Definition der wahren Schubfestigkeit nur ein reiner Schubspannungszustand sein. Allgemein entspricht nach Mohr der wahren Schubfestigkeit der Hauptkreis, welcher die für den Bruch geltende Grenzkurve in dem Punkte berührt, in dem sie die T_n -Achse schneidet, der wahren Drehungsfestigkeit (die mit der obigen ersten Definition der wahren Schubfestigkeit bzw. jener der wahren Drehungsfestigkeit in der Technik zusammenfällt) der Hauptkreis, der seinen Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystemes N_n, T_n besitzt und die Grenzkurve berührt. Wenn beim Abscherversuch in den Abscherflächen wirklich nur reine Schubspannungen herrschen würden, so könnte aus denselben die wahre Drehungsfestigkeit oder, falls diese bei Verlauf der Grenzkurve parallel zur T_n -Achse der wahren Schubfestigkeit gleich wäre, die wahre Schubfestigkeit nach dieser zweiten Mohrschen Definition oder die wahre Schubfestigkeit nach der oben an erster Stelle gegebenen Definition gefolgert werden, wenn die Verteilungen der Schubspannungen über den Querschnitt im Augenblicke des Bruches, also auch die größte Schubspannung, die für den Bruch in Frage kommt, bekannt wäre.

Das Ähnlichkeitsgesetz bewährt sich auch hier. Man erhält bei geometrisch ähnlicher Versuchsanordnung in ähnlich gelegenen Punkten für gleiche Werte der Spannungen die gleichen Verzerrungen. Nennen wir für zwei im Verhältnisse $1:n$ geometrisch ähnliche Anordnungen die zur Bewirkung von gleichen Spannungen τ in ähnlich gelegenen Punkten mit den Flächenelementen df und df' nötigen Kräfte P bzw. P' , so muß mit Rücksicht auf das Gleichgewicht $2 \int_P \tau df = P$ und $2 \int_{P'} \tau df' = P'$ oder, weil $df' = n^2 df$, das Verhältnis der

Kräfte $\frac{P'}{P} = n^2$ sein. Daraus kann geschlossen werden, daß die gleichen Werte der theoretischen Scherfestigkeiten K_s in beiden Fällen bei Kräften P_{\max} bzw. P'_{\max} zustande kommen, die sich wie die Abscherflächen F und F' verhalten. Diese Folgerung aus dem Ähnlichkeitsgesetz wird durch die Erfahrung bestätigt.

Da die Verteilung der Schubspannungen und auch der Biegungsspannungen beim Bruch in den Abscherquerschnitten von der Querschnittsform abhängig sein muß, zeigt sich auch eine Abhängigkeit der theoretischen Scherfestigkeit von der Querschnittsform, und zwar für Gußeisen in ausgeprägterem Maße wie für Flußeisen.

Gewöhnlich pflegt man die theoretische Scherfestigkeit K_s in Teilen der Zugfestigkeit K_z anzugeben. Dementsprechend setzt man $K_s = \mu K_z$ und erhält bei Flußeisen für μ Werte, die um 0,8 herum liegen. Die genaueren Werte von μ hängen von dem durch den technologischen Herstellungsprozeß (z. B. Walzen) bedingten Gefüge ab. Bei Blechen ist z. B. μ parallel zur Walzrichtung am kleinsten, normal zur Walzrichtung am größten. Für Gußeisen schwankt μ für verschiedene Querschnittsformen etwa zwischen 1 und 1,2.

Für Steine und Holz wählt man im Scherversuch gewöhnlich Prismen, die wie die Metalle zweischnittig beansprucht werden. Für Holz ergeben sich wesentliche Differenzen in den theoretischen Scherfestigkeiten parallel zur Holzfaser und normal auf dieselbe. Auch für Steine, insbesondere sedimentärer Natur, ist die theoretische Scherfestigkeit oft in Abhängigkeit von der Richtung der Erprobung.

16. Deformationsarbeit bei Beanspruchungen mit Kräften in Ebenen durch die Stabachse.

Bei Beanspruchung eines geraden Stabes mit der Länge l und der Querschnittsfläche F durch gleichförmig über die Endquerschnittsflächen verteilte Kräfte P auf Zug oder Druck ist die spezifische Deformationsarbeit in einem Punkte des Stabes, solange das Hookesche Gesetz gültig ist, durch $a_{z,D} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{P^2}{2EF^2}$ (Seite 100) bestimmt, wenn mit σ die Zug- oder Druckspannung bezeichnet wird. Die ganze in den Stab hineingesteckte Deformationsarbeit ist durch

$$A_{z,D} = \frac{\sigma^2}{2E} Fl = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{P \lambda}{2} \quad (141)$$

bestimmt mit $\lambda = \frac{\sigma l}{E} = \frac{Pl}{EF}$ als Verlängerung, die der Spannung σ zugeordnet ist.

Bei der Beanspruchung eines geraden Stabes auf ebene schiefe Biegung und Schub ist die infolge der Biegungsbeanspruchung in einem durch zwei unendlich benachbarte Querschnitte begrenzten Stabteil steckende Deformationsarbeit

$$dA_B = \int_F \frac{X_x^2}{2E} dx dy dz = dx \int_F \frac{X_x^2}{2E} dy dz, \quad (a)$$

worin das Integral über die Querschnittsfläche F zu nehmen ist. Setzen wir für die Biegungsspannung X_x den durch Gleichung (111) auf Seite 238 gegebenen Wert ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} dA_B &= dx \int_F \left(\frac{M_{By}}{J_y} z - \frac{M_{Bz}}{J_z} y \right)^2 \frac{1}{2E} dy dz \\ &= dx \int_F \frac{1}{2E} \cdot \frac{M_{By}^2 z^2}{J_y^2} dy dz + dx \int_F \frac{1}{2E} \cdot \frac{M_{Bz}^2 y^2}{J_z^2} dy dz - dx \int_F \frac{1}{E} M_{By} M_{Bz} y z dy dz. \end{aligned}$$

Die Ausführung der Integrationen ergibt, da $\int_F z^2 dy dz = J_y$, $\int_F y^2 dy dz = J_z$ und $J_{yz} = \int_F yz dy dz = 0$ (da sich die Koordinaten y und z auf die Trägheitshauptachsen für den Schwerpunkt beziehen, verschwindet das Deviationsmoment J_{yz}) und die Biegemomente nur Funktionen von x sind,

$$dA_B = \left(\frac{M_{By}^2}{2E J_y} + \frac{M_{Bz}^2}{2E J_z} \right) dx. \quad (a')$$

Die gesamte im Stabe von der Länge l steckende Deformationsarbeit ist demnach

$$A_B = \int_l \frac{M_{By}^2}{2E J_y} dx + \int_l \frac{M_{Bz}^2}{2E J_z} dx. \quad (142)$$

Die Integrale sind über die ganze Länge des Stabes zu nehmen. Bei Ausführungen der Integrationen in einem besonderen Falle ist zu bedenken, daß im allgemeinen die Biegemomente für verschiedene Teilbereiche der Stablänge durch verschiedene Funktionen von x dargestellt sind, und daher die in der Beziehung (142) vorkommenden Integrale sich als Summen von Teilintegralen über Teilbereiche des Stabes darstellen werden. Bei Stäben mit veränderlichem Querschnitt (Seite 279) sind die Trägheitsmomente J_y und J_z als Funktionen von x zu betrachten, bei Stäben mit konstantem Querschnitt können sie ebenso stets der Elastizitätsmodulus E vor die Integrale gesetzt werden.

Da nach den Gleichungen (117) bzw. (117a) auf Seite 247 die Änderungen der Verdrehungswinkel α und β pro Längeneinheit des Stabes in der zx - bzw. yx -Ebene durch $\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{M_{By}}{EJ_y}$ und $\frac{d\beta}{dx} = \frac{M_{Bz}}{EJ_z}$ bestimmt sind, kann man der Gleichung (142) auch die Form

$$A_B = - \int \frac{M_{By}}{2} d\alpha + \int \frac{M_{Bz}}{2} d\beta \quad (142a)$$

geben. Drücken wir in Gleichung (142) die komponentalen Biegemomente durch das resultierende Biegemoment und den Winkel α [Gleichungen (e) auf Seite 239] aus, so erhalten wir

$$A_B = \sin^2 \alpha \int \frac{M_B^2}{2EJ_y} dx + \cos^2 \alpha \int \frac{M_B^2}{2EJ_z} dz.$$

Diese Gleichung kann bei Berücksichtigung der Beziehungen (g), (h) und (i) auf Seite 240 in die Form

$$A_B = \int \frac{M_{Bu}^2}{2EJ_u} dx \quad (142b)$$

übergeführt werden, die wir natürlich auch viel einfacher durch Benützung der Gleichung (113) auf Seite 240 und Gleichung (141) bei Aufstellung der Arbeit hätten erhalten können. Die Gleichung nimmt bei Rücksicht auf Gleichung (118) auf Seite 247 die Form $\int \frac{M_{Bu}}{2} d\gamma$ an mit $\frac{d\gamma}{dx} = \frac{M_{Bu}}{EJ_u} = K_u$.

Infolge der Beanspruchung auf Schub steckt in einem Stabteil von der Länge dx die Deformationsarbeit $dA_{sy} = \frac{Q_y^2 c_y}{2GF} dx$ und $dA_{sz} = \frac{Q_z^2 c_z}{2GF} dx$ [Gleichungen (p'), (r), (s), (s') auf Seite 249ff., in denen statt A_{sy} und A_{sz} die Zeichen dA_{sy} und dA_{sz} eingeführt werden], worin c_y und c_z vom Querschnitt und der Lage der Kraftebene abhängige Werte besitzen. Die im ganzen Stabe infolge der Schubspannungen aufgespeicherte Deformationsarbeit wird demnach

$$A_s = \int \frac{Q_y^2 c_y}{2GF} dx + \int \frac{Q_z^2 c_z}{2GF} dx. \quad (143)$$

In dieser Beziehung sind die Integrale wieder über die ganze Stablänge zu nehmen, und, weil Q_y und Q_z im allgemeinen in verschiedenen Bereichen der Stablänge verschiedene Funktionen von x bedeuten, als Summen von Teilintegralen darzustellen. Bei Stäben mit veränderlichem Querschnitt sind die Querschnittsflächen Funktionen von x .

Setzt man in Gleichung (143) $Q_y = Q \cos \alpha$, $Q_z = Q \sin \alpha$ mit Q als gesamte Querkraft, ferner $c_y \cos^2 \alpha + c_z \sin^2 \alpha = c_K$, so geht diese Gleichung in die einfachere

$$A_s = \int_l \frac{Q^2}{2GF} c_K dx \tag{143a}$$

über.

Die bei Beanspruchung auf ebene schiefe Biegung und Schub im ganzen Stabe aufgespeicherte Deformationsarbeit ergibt sich unter Zuhilfenahme der Gleichungen (142) und (143) oder (142 b) und (143a) mit

$$\left. \begin{aligned} A_{B_s} = A_B + A_s &= \int_l \frac{M_{B_y}^2}{2EJ_y} dx + \int_l \frac{M_{B_z}^2}{2EJ_z} dx + \int_l \frac{Q_y^2}{2GF} c_y dx + \int_l \frac{Q_z^2}{2GF} c_z dx \\ &= \int_l \frac{M_{B_u}^2}{2EJ_u} dx + \int_l \frac{Q^2}{2GF} c_K dx. \end{aligned} \right\} \tag{144}$$

Die Formel (144) kann auch zur Berechnung der Deformationsarbeit bei Beanspruchung auf räumliche schiefe Biegung und Schub Verwendung finden. Für Beanspruchung auf ebene gerade Biegung und Schub in der xz - bzw. xy -Ebene verschwinden in den Formeln (142) bis (144) M_{B_z} , Q_y bzw. M_{B_y} , Q_z .

Bei schiefer exzentrischer Beanspruchung auf Zug oder Druck, für welche nur Normalspannungen nach Gleichung (129a) auf Seite 302 existieren, wird die Deformationsarbeit

$$A_{B,Z(D)} = \int_V \frac{1}{2E} \left(\frac{P}{F} + \frac{P \zeta \bar{z}}{J_y} + \frac{P \eta \bar{y}}{J_z} \right)^2 dx dy dz,$$

worin das Integral über das ganze Volumen V des Stabes zu nehmen ist. Durch Ausführung der Integrationen erhalten wir

$$A_{B,Z(D)} = \frac{P^2 l}{2EF} + \frac{P^2 l \zeta^2}{2EJ_y} + \frac{P^2 l \eta^2}{2EJ_z}, \tag{145}$$

da die Integrale der doppelten Produkte des Quadrates unter dem Integralzeichen auf statische Momente bzw. das Deviationsmoment J_{yz} der Querschnittsfläche mit Bezug auf Trägheitshauptachsen für den Schwerpunkt derselben führen, die verschwinden müssen. Zur Gleichung (145) hätten wir natürlich auch durch Verwendung der Formeln (141) und (142) kommen können.

Sollen bei schiefer exzentrischer Zug- (Druck-) Beanspruchung die Durchbiegungen in Rechnung gezogen werden, so stellt sich die Deformationsarbeit offenbar in der Form

$$A_{B,Z(D)} = \int_l \frac{M_{B_y}^2}{2EJ_y} dx + \int_l \frac{M_{B_z}^2}{2EJ_z} dx + \frac{P^2 l}{2EF} \tag{145a}$$

dar, worin für die Biegemomente M_{B_y} und M_{B_z} bei exzentrischer Druckbeanspruchung die Werte aus den Gleichungen (134) bzw. (134'), (Seite 312ff.) oder bei exzentrischer Zugbeanspruchung die Werte aus Gleichung (138), Seite 314 und der zu ihr analogen für das Biegemoment M_{B_z} eingesetzt werden müssen.

Für gerade exzentrische Druck- (Zug-) Beanspruchung verschwindet in den Gleichungen (145) bzw. (145a) einer der beiden auf die Biegearbeiten bezüglichen Ausdrücke.

Im allgemeinsten Falle der Beanspruchung auf ebene oder räumliche schiefe Biegung, Schub und Druck (Zug) setzt sich die Deformationsarbeit aus 3 Gliedern

dern nach Gleichung (145a) und 2 Gliedern nach Gleichung (143) zusammen, wobei z. B. für den durch Abb. 137, Seite 298 dargestellten Fall der ebenen schiefen Biegung die Biegemomente M_{By} und M_{Bz} aus den Gleichungen (a) auf Seite 299 statt P der Wert $P \sin \beta$, schließlich statt Q_y und Q_z die Werte $P \cos \beta \cos \alpha$ bzw. $P \cos \beta \sin \alpha$ einzusetzen sind.

Als prinzipielles Beispiel (weitere Beispiele folgen in dem Abschnitte, der die Anwendung des Castiglianoschen Prinzipes auf die Berechnung verschiedener Rahmen zeigt, Seite 386 ff.) wählen wir die Bestimmung der Deformationsarbeit für den durch Abb. 150 dargestellten Belastungsfall eines Balkens aus Holz mit rechteckigem Querschnitt ($b = 24$ cm, $h = 34$ cm), für den angenommen wird, daß die Kräfte normal zur Stabachse in der xz -Ebene wirken. Es liegt so-nach gerade Beanspruchung auf Biegung und Schub vor. Die Auflagerreaktionen

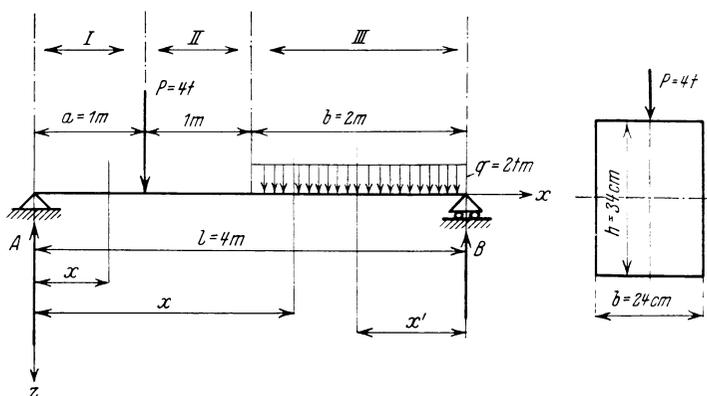


Abb. 150.

ergeben sich aus den statischen Gleichungen mit $A = B = 4$ t. Zur Bestimmung der Deformationsarbeit stellen wir die Biegemomente und Querkräfte für die drei in der Abbildung angezeichneten Teilbereiche I, II, III auf. Es sind die Biegemomente

$$M_{By}^I = Ax = 4x \text{ mt}, \quad M_{By}^{II} = Ax - P(x - a) = 4 \text{ mt},$$

$$M_{By}^{III} = -Bx' + \frac{qx'^2}{2} = x'(x' - 4) \text{ mt}$$

und die Querkräfte

$$Q_z^I = A = 4 \text{ t}, \quad Q_z^{II} = 0, \quad Q_z^{III} = -B + qx' = 2(x' - 2) \text{ t},$$

wobei die Biegemomente im Abschnitte III, weil einfacher, von rechts aus berechnet werden. Dementsprechend ist die Deformationsarbeit infolge der Biegebeanspruchung

$$A_B = \int_0^a \frac{(Ax)^2}{2EJ_y} dx + \int_a^{\frac{l}{2}} \frac{[Ax - P(x - a)]^2}{2EJ_y} dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{qx'^2}{2} - Bx'\right)^2}{2EJ_y} dx'.$$

Setzt man in dieser Gleichung als mittleren Elastizitätsmodul für Holz parallel zur Faser $E = 10^6$ t/m², als Trägheitsmoment $J_y = \frac{1}{12} bh^3 = 0,000785$ m⁴, ferner die gegebenen Werte A , P und q ein, so erhält man $A_B = 24,5$ mkg. Die Defor-

mationsarbeit infolge der Schubspannungen wird

$$A_s = \int_0^a \frac{A^2}{2GF} c_z dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(q x' - B)^2}{2GF} c_z dx'.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $c_z = 1,2$ (Seite 255), G für Holz im Mittel $4,10^5$ t/m², als Querschnittsfläche $F = bh = 0,0816$ m², so wird $A_s = 0,49$ mkg. Man sieht, wie klein die Deformationsarbeit infolge der Schubspannungen gegenüber jener infolge der Biegungsspannungen ist, erstere macht nur 2% der letzteren aus. Die Schubspannungen spielen eben bei im Verhältnis zu den Querdimensionen langen Stäben eine geringe Rolle.

Der Charakter der vorstehenden Rechnung ist ein überschlägiger, da Holz ein nicht homogener anisotroper Stoff ist, für den z. B. G , E parallel und normal zu den Holzfasern wesentlich verschieden sind.

17. Beanspruchung auf Drillung und mit ihr zusammengesetzte Beanspruchungsarten. Deformationsarbeit bei Drillung.

Nach Seite 227 liegt eine Beanspruchung auf Drillung oder Torsion eines geraden Stabes dann vor, wenn Kräftepaare mit Ebenen normal zur Stabachse wirken. Je nach der Querschnittsform des Stabes gestaltet sich die Untersuchung des Spannungs- und Verformungszustandes des Stabes verschieden.

a) Stäbe mit kreis- oder kreisringförmigem Querschnitt. Ein Stab mit kreisförmigem Querschnitt (Radius r), von welchem das linke Ende eingespannt ist, und in dessen rechter Endquerschnittsfläche ein positiv angenommenes Drillungsmoment M_D (siehe das in Abb. 151 eingetragene Koordinatensystem xyz , dessen Ursprung mit dem Schwerpunkt O der rechten Endquerschnittsfläche, und dessen Achse mit der Stabachse zusammenfallend angenommen wurde, und die Zeichenregel auf Seite 222) übertragen wird, kann nur im Gleichgewicht stehen, wenn am linken Stabende ein Drehungsmoment in einer Ebene normal zur Stabachse wirkt, das entgegengesetzt gleich ist dem Drillungsmoment M_D . Tragen wir uns für einen durch Drillungsmomente in

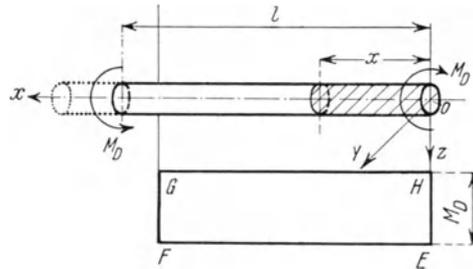


Abb. 151.

Anspruch genommenen Stab in der xz -Ebene für jeden Querschnitt normal zur x -Achse und von derselben oder einer zu ihr Parallelen die algebraische Summe aller rechts (oder links) von dem Querschnitt gelegenen Drillungsmomente als Strecken in einem gewählten Maßstabe auf, positiv nach aufwärts, negativ nach abwärts, so erhalten wir das Drillungsmomentenschaubild. Für unseren Fall ist dasselbe durch das Rechteck $GFEH$ bestimmt. Denken wir uns den Stab im beliebigen Querschnitt x durchschnitten und betrachten wir den Gleichgewichtszustand des rechten abgeschnittenen Stabteiles. Derselbe steht unter dem Einflusse des Drillungsmomentes M_D und eines im Schnittquerschnitt wirkenden Kraftsystemes, das den vom linken auf den rechten Stabteil übertragenen inneren Kräften gleichwertig ist, und dessen Resultante, damit ein Gleichgewicht überhaupt möglich ist, ein zu M_D entgegengesetzt gleiches in der Schnittfläche wirkendes Moment sein muß. Infolge der axial symmetrischen

Verhältnisse des Stabes ist kein Grund zur Annahme von im Schnittquerschnitt übertragenen Normalspannungen und sind die totalen Schubspannungen T (Abb. 151 a) für dem Winkel $d\varphi$ zugeordnete Flächenelemente df , wie z. B. $1\ 2\ 3\ 4$ eines beliebigen unendlich schmalen Kreisringes vom inneren Radius ρ und dem äußeren Radius $\rho + d\rho$ normal zum Radius ρ und mit Bezug auf die Stabachse im entgegengesetzten Sinne drehend wie das Drillungsmoment anzunehmen. Die Grenzbedingungen an der Manteloberfläche des Stabes, die verlangen, daß am Rande der Querschnitte Schubspannungen tangentiell mit Bezug auf den Querschnittsumfang wirken müssen, da die Manteloberfläche kräftefrei ist, werden bei den gemachten Annahmen erfüllt. Die Gleichgewichtsbedingung für den abgeschnittenen Stabteil kann danach in der Form

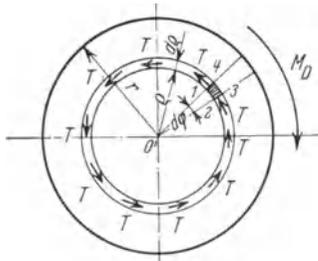


Abb. 151 a.

$$\int_F T \rho \, df = M_D \tag{a}$$

angesetzt werden, in der das Integral über die ganze Querschnittsfläche zu nehmen ist. Sie besagt, daß die algebraische Summe der Kraftmomente mit Bezug auf die Achse des Stabteiles im Gleichgewichtsfall verschwinden muß. Die Bestimmung der Schubspannungen T kann sich naturgemäß nur auf die Deformationen des Stabes bei Berücksichtigung des Elastizitätsgesetzes stützen, dem der Stoff, aus welchem der Stab besteht, genügt. Für isotropes homogenes Material, das dem Hookeschen Gesetze gehorcht, wird angenommen, daß die Querschnitte bei der Verformung in ihrer eigenen Ebene normal zur Stabachse verdreht werden und daher eben bleiben. Diese neue Annahme, welche sich mit der Symmetrie der Verhältnisse begründen läßt, wird durch Beobachtungen,

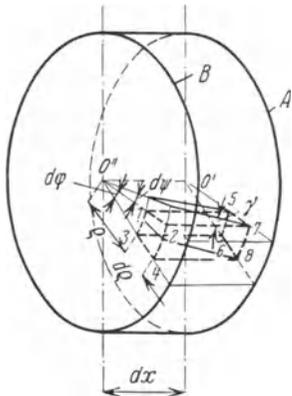


Abb. 151 b.

welche sich allerdings nur auf die Manteloberfläche des Stabes erstrecken können, gestützt. Diese zeigen, daß Punkte von Kreisen, die an der Oberfläche, den Querschnittsumrandungen folgend, vor der Deformation eingerissen werden, auf diesen Kreisen normal zur Stabachse verdreht werden und letztere keinerlei Verschiebungen außer jenen in sich selbst erfahren. Wir betrachten nunmehr das zwischen zwei um die Länge dx voneinander abtastenden Querschnitten A und B (Abb. 151 b) liegende elementare prismatische Stäbchen $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8$, dessen in den Querschnitten liegende Flächenelemente $1\ 2\ 3\ 4$ (siehe auch Abb. 151 a) und $5\ 6\ 7\ 8$ zwischen je zwei benachbarten, um den Winkel $d\varphi$ voneinander abtastenden Radien der Querschnitte und je zwei den Radien ρ und $\rho + d\rho$ entsprechenden konzentrischen Kreiselementen liegen, und dessen zu diesen Flächenelementen normale Kanten zur Stabachse parallel sind. Der Querschnitt B verdreht sich gegenüber dem festgehaltenen gedachten Querschnitt A derart, daß sämtliche Radien desselben nach der Deformation mit ihren ursprünglichen Lagen den gleichen sehr kleinen im Bogenmaß gezählten Winkel $d\varphi$ einschließen. Eine Krümmung der Radien für dem Hookeschen Gesetz folgende Stoffe hätte zur Voraussetzung, daß in den durch die Stabachse gehenden Flächenelementen $1\ 2\ 5\ 7$ und $3\ 4\ 6\ 8$ Schubspannungen parallel zum Radius und in Flächenelementen $2\ 4\ 7\ 8$ und $3\ 1\ 5\ 6$ Schubspannungen normal zum Radius auftreten. In Wirklichkeit ist das Spannungsschaubild das durch

Abb. 151 c dargestellte, das eine Krümmung der Radien ausschließt. Das Stäbchen kommt dann in die Lage $1' 2' 3' 4' 5 6 7 8$. Die rechten Winkel, welche die Längskanten des Stäbchens mit den in die Querschnittsebenen hineinfallenden Kanten ursprünglich bildeten, werden hierdurch um die Winkel γ abgeändert. Letztere hängen mit den totalen Schubspannungen nach dem vorausgesetzten Hookeschen Gesetze

$$T = \gamma G \quad (b)$$

zusammen, worin G bekanntlich den Gleitmodul bedeutet. Da, wie aus der Abb. 151 b folgt, $\gamma dx = \varrho d\psi$, kann dieses Gesetz auch in der Form

$$T = G \varrho \frac{d\psi}{dx} \quad (c)$$

geschrieben werden. $\frac{d\psi}{dx}$ ist der Verdrehungswinkel pro Längeneinheit, häufig auch kurz als Verdrehung oder Drall bezeichnet. Wir wollen ihn im folgenden so wie auf Seite 94 mit τ bezeichnen und können ihn als die Verdrehung definieren, die zwei zueinander ursprünglich parallele Radien in zwei

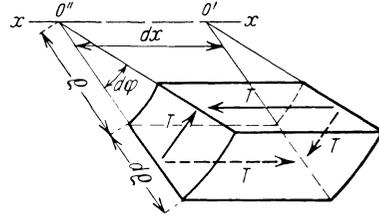


Abb. 151 c.

der Entfernung l voneinander liegenden Querschnitten gegeneinander erfahren. Infolge der Verdrehung der Querschnitte gegeneinander gehen die ursprünglich zueinander parallelen Fasern in nahezu als Gerade anzusehende Schraubenlinien über, die unter dem Winkel γ zur Stabachse verlaufen, d. h. den sehr kleinen Steigungswinkel $\frac{\pi}{2} - \gamma$ besitzen. Die Schubspannung T in einem Querschnitt ist zufolge (c) der Größe des Radius ϱ proportional, da der Drall τ als konstante Größe anzusehen ist, und erreicht den größten Wert an der Mantelfläche des Stabes mit $T_{\max} = Gr\tau$. Da $\frac{T}{T_{\max}} = \frac{\varrho}{r}$, kann die Gleichgewichtsbedingung (a) in der Form

$$M_D = \int_F T_{\max} \frac{\varrho^2}{r} df = \frac{T_{\max}}{r} \int_F \varrho^2 df = \frac{T_{\max} J_P}{r} \quad (a')$$

geschrieben werden, worin $J_P = \frac{r^4 \pi}{2}$ das polare Trägheitsmoment der Kreisquerschnittsfläche mit Bezug auf ihren Mittelpunkt ist. Aus der Beziehung (a') ergibt sich

$$T_{\max} = \frac{M_D}{J_P} r \quad (146a) \quad \text{und} \quad T = \frac{M_D}{J_P} \varrho. \quad (146)$$

Die Gleichung (146), in welche J_P einzusetzen ist, ist die Grundgleichung für die Verteilung der Schubspannungen T über den Querschnitt bei Beanspruchung eines Stabes von kreisförmigem Querschnitt auf Drillung.

Setzen wir den Wert der Drillungsspannung T aus (146) in die Gleichung (c) ein und berechnen den Drall τ , so erhalten wir

$$\tau = \frac{M_D}{G J_P} = \frac{2 M_D}{\pi G r^4}. \quad (147)$$

Der Wert $G J_P$ heißt aus leichtbegreiflichen Gründen die Drillungssteifigkeit für kreisförmigen Querschnitt. Je größer dieselbe bei einem gegebenen Werkstoff und Moment ist, um so kleiner wird der Drall. In Anlehnung an eine noch später

zu besprechende Formel von De Saint Venant können wir die Gleichung (147) auch in der Form

$$\tau = 4 \pi^2 \frac{J_P M_D}{G F^4} \quad (147')$$

schreiben. Hiervon kann man sich durch Einsetzen der Werte J_P und $F = r^2 \pi$ überzeugen. Für eine auf dem Stabe eingerissene Meßlänge l , z. B. von 20 cm, deren Enden genügend weit von der Einspannungsstelle und der rechten Endquerschnittsfläche entfernt sind — nur in einem solchen Bereiche werden die entwickelten Formen gelten (De Saint Venantsches Prinzip) —, ist der Verdrehungswinkel ψ von in einem radialen Längsschnitt des Stabes gelegenen Radien gegeneinander

$$\psi = l \tau = \frac{2 M_D l}{\pi G r^4}. \quad (147a)$$

Wird der Winkel ψ gemessen (Seite 345ff.), so kann bei bekannten Werten des Drillungsmomentes M_D und des Radius r aus (147a) der Gleitmodul G berechnet werden, oder es kann aus dieser Gleichung bei bekanntem Werte von G auf die Größe des Drillungsmomentes ein Schluß gezogen werden, wodurch die Leistungsprüfung einer Maschine ermöglicht wird [Föttinger (L)].

Die vorstehenden Beziehungen haben wir bereits auf Seite 94ff. als für den Sonderfall eines kreisförmigen Querschnittes geltend aus dem bezüglichen allgemeinen für einen beliebigen Querschnitt geltenden Beziehungen erhalten. Sie sind für Stäbe mit kreisförmigem Querschnitt, die dem Hookeschen Gesetze gehorchen, an Stellen, die den Endquerschnittsflächen nicht zu nahe liegen, genau zutreffend.

Wenn auf den Stabteil, dessen Gleichgewicht untersucht wird, nicht nur am rechten Ende desselben, sondern auch in einzelnen anderen Querschnitten oder über seine ganze Länge gleichförmig oder ungleichförmig verteilt, Verdrehungsmomente übertragen werden (im Drillungsmomenten-Schaubild für den Stabteil oder für den ganzen Stab tritt dann an Stelle des Rechteckes $EF GH$ in Abb. 151 ein Polygonzug oder eine Kurve), können die vorstehenden Überlegungen, allerdings mit weniger Anlehnung an die Wirklichkeit (Einfluß der Momentenangriffsstellen), gleichfalls durchgeführt werden. Das Drillungsmoment M_D ist dann in den vorstehenden Gleichungen als Funktion von x einzusetzen.

Die Deformationsarbeit für die Beanspruchung auf Verdrehung von Stäben mit Kreisquerschnitt ist aus $A_D = \int_V \frac{T^2}{2G} dx dy dz$ nach Einsetzen des Wertes T aus (146) durch Integration über das ganze Volumen V des Stabes bestimmbar. Wir erhalten dann zunächst

$$A_D = \int_V \frac{M_D^2}{2G J_P^2} \varrho^2 dx dy dz = \int_0^l \frac{M_D^2}{2G J_P} dx = \int_0^l \frac{M_D}{2} \tau dx, \quad (148)$$

wobei die Definition des polaren Trägheitsmomentes $\int_V \varrho^2 dy dz = J_P$ und zur Bildung des den Drall τ enthaltenden Integrales die Gleichung (147) benützt wurde. Der Ausdruck (148), zu dessen weiterer Auswertung das Drillungsmoment für einen Querschnitt M_D und der Drall τ als gegeben gedachte Funktionen von x einzusetzen sind, ist völlig analog jenem für die Deformationsarbeit bei Beanspruchung auf Biegung [Gleichungen (142) und (142a) auf Seite 321ff.] gebildet. Seine Gültigkeit beschränkt sich aber auf Stäbe mit kreisförmigem Querschnitt. Wenden wir die Gleichung (148) auf den durch Abb. 151 dargestellten Fall an, so erhalten

wir, da M_D und τ dann konstant sind, durch Integration über die Stablänge l $A_D = \frac{M_D^2 l}{2GJ_P} = \frac{M_D l \tau}{2} = \frac{M_D \psi}{2}$ oder nach Einsetzen von J_P oder τ bzw. ψ

$$A_D = \frac{M_D^2 l}{\pi G r^4}. \tag{148a}$$

Die angegebene Verdrehungstheorie für kreisförmige Querschnitte wurde bereits von Navier entwickelt, der sie allerdings auch als zutreffend für beliebigen Querschnitt ansah.

Für Stäbe mit kreisringförmigem Querschnitt, die auf Drillung beansprucht werden, ist in den vorstehenden Formeln $J_P = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4)$ einzusetzen mit R als äußerem und r als innerem Radius des Kreisringes.

Nur die De Saint Venantsche Formel (147') ist nunmehr nicht gültig.

b) Stäbe mit allgemeiner axialer Symmetrie. Für Stäbe mit axialer Symmetrie unter Ausschluß solcher, die unter A behandelt wurden (wir denken hierbei in erster Linie an solche mit rechteckigem oder elliptischem Querschnitt), gestaltet sich die Näherungsrechnung zur Bestimmung der Deformations- und Spannungs-

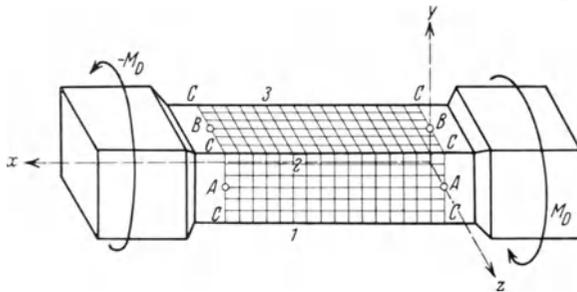


Abb. 152.

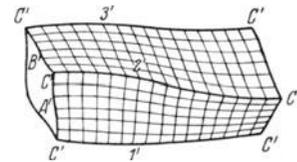


Abb. 152 a.

verhältnisse etwas weniger einfach, da die Querschnitte bei der Verformung derartiger Stäbe nicht mehr eben bleiben. Das kann an der Mantelfläche eines Stabes von z. B. rechteckigem Querschnitt beobachtet werden, wenn auf ihr vor der Verformung durch Einreißen von einerseits zur Stabachse, andererseits zu den Querschnittsumrandungen parallelen Linien ein aus kleinen Quadraten bestehendes Liniensystem hergestellt wird (Abb. 152). Nach der Verformung, die an einem einseitigen fest eingespannten Stab durch ein Drillungsmoment nach Abb. 151 hervorgerufen gedacht wird, liegen die je einer Querschnittsumrandung folgenden Linien nicht mehr in je einer Ebene, sondern in je einer krummen Fläche, deren beobachtbare Schnitte mit der Mantelfläche des Stabes krumme Linien sind (z. B. 1', 2', 3' in Abb. 152a, die 1, 2, 3 in Abb. 152 entsprechen). Man kann ferner beobachten, daß die rechten Winkel der ursprünglichen Quadrate, die den Kanten C des Stabes anliegen, sich bei der Verformung des Stabes nicht ändern, daß aber die Winkel jener Quadrate, die den Seitenmitten A und B der Querschnitte entsprechen, stärkste Änderungen im Vergleich zu den Änderungen der rechten Winkel der übrigen ein und derselben Seitenfläche des Stabes angehörigen Quadrate zeigen. Die stärksten Änderungen der Winkel überhaupt treten in den Seitenmitten A der Längsflächen auf, die der Schwerachse des Stabes zunächst liegen. Im übrigen nehmen die Winkeländerungen der je einem Querschnitt zugeordneten Quadrate symmetrisch zu den Mitten A bzw. B gegen die Kanten C des Stabes zu ab. Kongruente Liniennetze auf gegenüberliegenden Flächen des Stabes ändern sich bei Deformation des Stabes auf die gleiche Weise. Wenn man bedenkt, daß, da die Mantelfläche des Stabes

kräftefrei gedacht ist, in Flächenelementen eines Querschnittes, die der Umrandung desselben folgen, entweder nur Schubspannungskomponenten Y_x parallel zur Längsseite h des rechteckigen Querschnittes oder nur Schubspannungen Z_x parallel zur Breitseite b übertragen werden können (siehe das in den Abb. 152 und 152b dargestellte Koordinatensystem xyz), so kann in dem beobachteten Nullwerden der Winkeländerungen längs der Kanten C nur die Bestätigung einer aus den Grundlagen der Elastizitätslehre zu ziehenden Folgerung erblickt werden. Dagegen muß aus den übrigen angegebenen Beobachtungen der Schluß gezogen werden, daß die Schubspannungskomponenten Y_x bzw. Z_x in den den Längsmitteln A bzw. B zugeordneten Flächenelementen der Querschnittsflächen Größtwerte erlangen, im Vergleich zu den übrigen Schubspannungen Y_x bzw. Z_x , die in den den Querschnittsumrandungen anliegenden Flächenelementen übertragen werden, und daß die allergrößten Werte der Schubspannungen, die in den Umrandungselementen einer Querschnittsfläche übertragen werden, die Schubspannungen Y_x sind, die den Mitteln A der längeren Rechtecksseiten h anliegen.

Wir denken uns nunmehr einen Stab mit beliebigem Querschnitt im Abstände x vom Ende, an welchem das angreifende Drillungsmoment M_D wirkt, durchgeschnitten und in der Schnittquerschnittsfläche die übertragenen Schubspannungen angebracht, deren Resultante ein Moment mit Bezug auf die Stabachse besitzen muß, das entgegengesetzt gleich dem Drillungsmoment ist. Einem Flächenelement im Punkte P der Schnittquerschnittsfläche (siehe beispielsweise Abb. 152b) kommen die beiden Schubspannungskomponenten Y_x und Z_x zu, denen eine totale Schub-

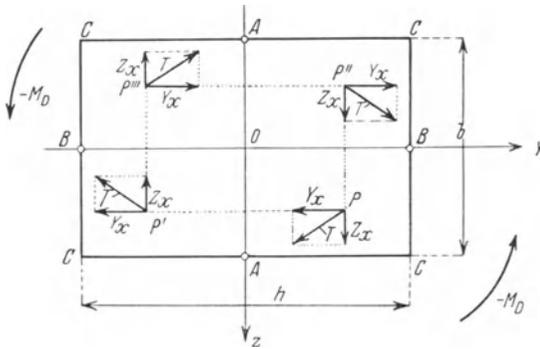


Abb. 152b.

spannung T entspricht, die mit Bezug auf die Stabachse entgegengesetzt dreht, wie das Drillungsmoment. Die Zeichen von Y_x und Z_x hängen von der Lage des Punktes P , dem Zeichen von M_D bzw. $-M_D$ und vom System x, y, z ab. Die Gleichgewichtsbedingungen (20), Seite 48, für ein beliebiges Volumenelement des Stabteiles verlangen, wenn von vornherein

$$X_x = Y_y = Z_z = Y_z = 0$$

angenommen wird und Massenkkräfte nicht berücksichtigt werden, die Erfüllung der folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Z_x}{\partial x} = 0. \quad (d)$$

Aus ihnen ergibt sich, daß Y_x und Z_x nur Funktionen von y, z sein können, d. h. in jeder Querschnittsfläche auf die gleiche Weise verteilt sind. Die Grenzbedingungen (24), Seite 53 an der Mantelfläche des Stabes reduzieren sich, wenn die Mantelfläche von Kräften frei ist, also $p_x = p_y = p_z$ und weil $\cos(nx) = 0$, auf die eine Gleichung

$$X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) = 0. \quad (e)$$

Wenn die Spannungskomponenten Y_x und Z_x so bestimmt werden, daß sie die Gleichungen (d) und (e) identisch befriedigen, so folgt noch nicht, daß sie möglich sind, d. h. zu wider-

spruchslosen Verformungen des Stabes führen. Dazu gehört, daß sie die Kompatibilitätsbedingungen auf Seite 44, in denen statt der Verzerrungskomponenten die aus dem Hooke'schen Gesetze folgenden Spannungskomponenten einzuführen wären, und die Festlegungsbedingungen erfüllen, die z. B. sagen, daß ein Flächenelement der einen Endquerschnittsfläche des Stabes im Raume festlegend ist (Seite 88 ff.).

Es zeigt sich, daß die Bestimmung der einzig möglichen Werte von Y_x und Z_x auf die Bestimmung einer Funktion φ von y und z zurückgeführt werden kann, die deswegen auch als Spannungsfunktion bezeichnet wird, wenn man

$$Y_x = X_y = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{und} \quad Z_x = X_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (f)$$

setzt.

Es werden dann die Gleichungen (d) identisch erfüllt, und es kann nachgewiesen werden, daß die Beziehung (e), die die Form

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(ny) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(nz) \quad (e')$$

annimmt, die Kompatibilitäts- und die Festlegungsbedingungen, von welchen erstere ebenfalls nur von der Funktion φ abhängig sind, bei einer für jede Querschnittsform verschiedenen eindeutigen Wahl der Spannungsfunktion dann erfüllbar sind, wenn sich die Schubspannungen über die Endquerschnittsfläche, in der das Drillungsmoment wirkt, entsprechend den Werten der Schubspannungskomponenten Y_x und Z_x verteilen und ihre Resultante gleich dem Drillungsmoment M_D wird¹. Der angedeutete Weg, der für jede beliebige Querschnittsform gangbar ist, ist einfacher als jener von De Saint Venant und Clebsch herrührende, der im ersten Teile dieses Buches Seite 90 ff. gezeigt wurde.

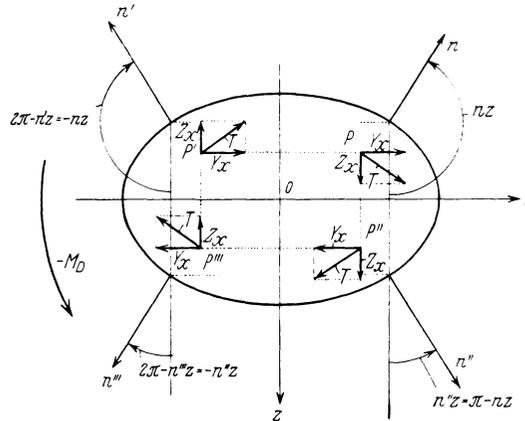


Abb. 153.

Für achsensymmetrische Stäbe kann von vornherein festgelegt werden, daß $\cos(nz)$ eine ungerade Funktion von z und eine gerade Funktion von y , $\cos(ny) = \sin(nz)$ dagegen eine gerade Funktion von z und eine ungerade Funktion von y sein muß. (Siehe hierzu z. B. die einer Ellipse entsprechenden Richtungskosinusse der zu den Achsen y und z symmetrisch gelegenen Berandungsnormalen n, n', n'', n''' in Abb. 153.) Ferner ist kein Grund vorhanden, um anzunehmen, daß die bezüglich der y - und z -Achse symmetrisch gelegenen Punkten P, P', P'', P''' (Abb. 153 oder Abb. 152 b) eines Querschnittes entsprechenden totalen Schubspannungen T und deren Komponenten Y_x und Z_x ihrer absoluten Größe nach verschieden sind. Ihre Richtungen sind, wenn die absoluten Werte von Y_x und Z_x für einen der symmetrisch gelegenen Punkte gegeben sind, aus dem oben angegebenen Grundsatz, demzufolge sie entgegengesetzt mit Bezug auf die Stabachse drehen sollen, als das Drillungsmoment M_D bestimmt. Daraus kann weiters geschlossen werden, daß Y_x eine ungerade Funktion von z und eine gerade Funktion von y , dagegen Z_x eine gerade Funktion von z und eine ungerade Funktion von y ist, daß ferner die Spannungsfunktion φ zufolge der Gleichungen (f), (e') für achsensymmetrische Querschnitte eine gerade Funktion sowohl von y als auch z sein muß.

¹ Wer sich dafür weiter interessiert, lese die Abhandlung von L. Prandtl in der Phys. Z. 1903.

Nunmehr setzt die Näherung ein, derzufolge wir die Spannungsfunktion in der Form $\varphi(y, z) = \alpha y^2 z^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als Konstanten annehmen. Es ist dann entsprechend dem Ansatz (f)

$$Z_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2(\alpha z^2 + \beta)y \quad \text{und} \quad Y_x = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2(\alpha y^2 + \gamma)z. \quad (\text{h})$$

Die in diese Bestimmungsgleichungen für die Schubspannungen eintretenden Konstanten α, β, γ müssen aus den Grenzbedingungen (e) oder (e') und der Bedingung, daß die Resultante der in einem Querschnitte übertragenen Schubspannungen ein Moment entgegengesetzt gleich dem Drillungsmoment sein muß, bestimmbar sein.

Es zeigt sich dann allerdings, daß die auf diesem Naherungswege berechneten Spannungskomponenten die Kompatibilitätsbedingungen nicht genau erfüllen, was aber im Hinblick auf manche praktische Probleme, für welche die Näherung vollkommen genügt, hingenommen werden kann.

1. Rechteckiger Querschnitt. Die Grenzbedingungen (e) verlangen für $z = \pm \frac{b}{2}$ (Abb. 152b), d. h. für $\cos(nz) = 1$ und $\cos(ny) = 0$ das Verschwinden der Schubspannungskomponenten Z_x und für $y = \pm \frac{h}{2}$, d. h. für $\cos(nz) = 0$ und $\cos(ny) = 1$ das Verschwinden der Schubspannungskomponenten Y_x ; es müssen also die Bedingungen $0 = 2\left(\alpha \frac{b^2}{4} + \beta\right)y$ und $0 = 2\left(\alpha \frac{h^2}{4} + \gamma\right)z$ erfüllt werden, aus welchen $\beta = -\frac{b^2}{4}\alpha$ und $\gamma = -\frac{h^2}{4}\alpha$ folgt. Die Konstante α ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung $\int_F (yZ_x - zY_x) dy dz = M_D$. Setzen wir in dem über eine Querschnittsfläche zu nehmenden Integrale

$$Z_x = \alpha \frac{(b^2 - 4z^2)}{2} y \quad \text{und} \quad Y_x = -\alpha \frac{h^2 - 4y^2}{2} z,$$

so erhalten wir

$$\frac{\alpha}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (b^2 - 4z^2) y^2 dy dz + \frac{z}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (h^2 - 4y^2) z^2 dy dz = M_D,$$

woraus nach Integration innerhalb der angesetzten Grenzen $\frac{b^3 h^3}{18} \alpha = M_D$ und daher $\alpha = \frac{18 M_D}{b^3 h^3}$ folgt. Mit dem gefundenen Wert von α ergeben sich schließlich die Schubspannungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} Z_x &= \frac{9 M_D}{b^3 h^3} (b^2 - 4z^2) y = \frac{3 M_D}{4 J_z} \left(1 - \frac{4z^2}{b^2}\right) y \\ \text{und} \\ Y_x &= -\frac{9 M_D}{b^3 h^3} (h^2 - 4y^2) z = -\frac{3 M_D}{4 J_y} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) z. \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

Aus den Grundgleichungen (149) folgt, wie es sein soll, daß die Schubspannungskomponenten Y_x und Z_x für die den Kanten C (Abb. 152) anliegenden Flächenelemente der Querschnittsfläche, d. h. für $y \pm \frac{h}{2}$ und $z = \pm \frac{b}{2}$ verschwinden.

Ferner ergibt sich für Flächenelemente eines Querschnittes, die längs der y - bzw. z -Achse liegen, d. h. für $z = 0$ bzw. $y = 0$

$$Y_x = 0, \quad Z_x = \frac{9 M_D}{b h^3} y \quad \text{bzw.} \quad Z_x = 0, \quad Y_x = -\frac{9 M_D}{h b^3} z. \quad (i)$$

Die totalen Schubspannungen T längs der y - bzw. z -Achse verlaufen sonach parallel zur z - bzw. y -Achse und wachsen geradlinig mit den Koordinaten y bzw. z an. Für die Punkte B ($y = \pm \frac{h}{2}, z = 0$) wird

$$Y_x = 0, \quad Z_x = \pm \frac{9 M_D}{2 b h^2} \quad (k)$$

und für die Punkte A

$$z = \pm \frac{b}{2}, \quad y = 0 \quad \text{wird} \quad Z_x = 0, \quad Y_x = \mp \frac{9 M_D}{2 h b^2}. \quad (l)$$

Die Schaubilder $O B I$ und $O B I'$, sowie $O A 2$ und $O A 2'$ in Abb. 152c geben einen Überblick über die Verteilung der Schubspannungen längs der y - bzw. z -Achse. Wie sich herausstellt, sind die Spannungen $\bar{A} 2 = \bar{A} 2'$, die überhaupt größten Schubspannungen im Querschnitt. Das stimmt zu der auf Seite 329 angegebenen Beobachtung an einem auf der Mantelfläche des Stabes eingerissenen Liniennetz. Wir schreiben also in Zukunft

$$T_{\max} = \mp \frac{9 M_D}{2 h b^2}. \quad (149a)$$

Um die Verteilung der Schubspannungen über die Flächenelemente, die an der Berandung des Querschnittes liegen, zu erhalten, haben wir in den Grundformeln (149) $y = \pm \frac{h}{2}$ bzw. $z = \pm \frac{b}{2}$ zu setzen, wodurch sich für die Berandungen CBC die Schubspannungen

$$Y_x = 0, \quad Z_x = \pm \frac{9 M_D}{2 b^3 h^2} (b^2 - 4z^2), \quad (m)$$

bzw. für die Berandungen CAC die Schubspannungen

$$Z_x = 0, \quad Y_x = \mp \frac{9 M_D}{2 b^2 h^3} (h^2 - 4y^2) \quad (n)$$

ergeben. Das heißt, an den Berandungen sind die Schubspannungen parallel zu denselben, wie es sein soll, und verteilen sich nach je einer Parabel $C B' C$ bzw.

$C A' C$ mit den größten Werten $\overline{B B'} = \overline{B I} = \overline{B I'}$ bzw. $\overline{A A'} = \overline{A 2} = \overline{A 2'}$. Für eine Diagonale $C O C$ ist $\frac{z}{y} = \frac{b}{h}$, also nach (149) $\frac{Z_x}{Y_x} = -\frac{b}{h}$, d. h. die totale Schubspannung τ_d für Flächenelemente längs einer Diagonale ist parallel zur zweiten Diagonale, und zwar wird

$$Z_x = \frac{9 M_D}{b^4 h^2} (b^2 - 4z^2) z, \quad Y_x = -\frac{9 M_D}{h b^5} (b^2 - 4z^2) z,$$

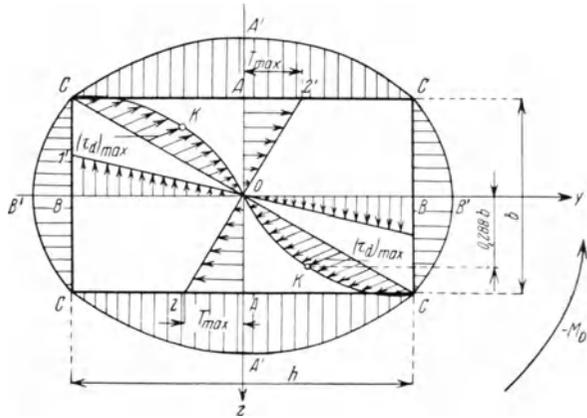


Abb. 152c.

also $\tau_d = \sqrt{Z_x^2 + Y_x^2} = \pm \frac{9M_D}{h^2 b^5} (b^2 - 4z^2) z d$ mit $d^2 = h^2 + b^2$. Somit verteilen sich die totalen Schubspannungen τ_d nach zwei kubischen Parabeln COC , deren Extremwerte $(\tau_d)_{\max}$ sich für $z = \pm \frac{b}{2\sqrt{3}} = \pm 0,288 b$ mit $(\tau_d)_{\max} = \pm \frac{M_D d \sqrt{3}}{h^2 b^2}$ ergeben. Wie sich erweisen läßt, sind die Werte $(\tau_d)_{\max}$ Extremwerte der totalen Schubspannungen im Bereiche des Querschnittes, nicht aber größte Werte in diesem Bereiche wie jene unter (149a).

Die verhältnismäßige Verteilung der Schubspannungen an der Umrandung des Querschnittes entspricht den oben angegebenen tatsächlichen Beobachtungen. Insofern ist also gegen die oben gemachte Annahme für die Spannungsfunktion nichts einzuwenden.

Eine genauere Rechnung, die für den Fall, als der auf Seite 90 ff. angegebene Weg beschritten wird, auf die Berechnung der Torsionsfunktion Π hinausläuft, zeigt allerdings, daß jene Verteilung zahlenmäßig nicht vollkommen stimmt. Es ergibt sich z. B. für den so wichtigen Wert der größten Spannung T_{\max} statt des Koeffizienten $\frac{9}{2}$ eine Funktion von $\frac{h}{b}$,

die z. B. für $\frac{h}{b} = 1$ bzw. $\frac{h}{b} = 10$ 4,8 bzw. 3,2 wird. Für quadratische Querschnitte kommt die Näherungsrechnung also der exakten im Hinblick auf den Wert von (149a) sehr nahe. Die Näherungsrechnung führt, wie sich leicht nachweisen läßt, zu Werten der Spannungskomponenten, die die Kompatibilitätsbedingungen nicht streng erfüllen, d. h. zu einer nur näherungsweise möglichen streng genommen unmöglichen Deformation des Stabes. Das zeigt sich auch darin, daß der Drall, der nach Gleichung (51) auf Seite 93 vom Drillungsmoment,

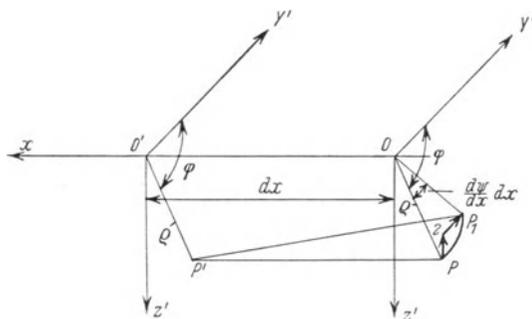


Abb. 154.

dem Gleitmodul, den Querschnittsdimensionen und von der ebenfalls von letzteren abhängigen Torsionsfunktion Π abhängt, also für eine Belastung nach Abb. 152 eine konstante Zahl sein müßte, dann, wenn die Näherungsrechnung zugrunde gelegt wird, von den Koordinaten y und z und dazu noch in widersprechender Weise abhängig ist. Der Nachweis hierzu ist leicht zu erbringen. In Abb. 154 sei $OO' = dx$ ein unendlich kleines Stück der Stabachse, $OP = O'P' = \varrho$ seien zwei vor der Deformation zueinander parallele, dem Winkel φ zugeordnete Radien, die zu den

Querschnittspunkten P bzw. P' mit den Koordinaten y, z gehören. Bei der Verformung des Stabes verschiebt sich P gegenüber dem fest gehalten gedachten Querschnitt durch O' um $PP_1 = \varrho \frac{d\psi}{dx} dx$, worin $\frac{d\psi}{dx} dx$ dem Winkel POP_1 entspricht, mit den Verschiebungskomponenten parallel zur y - bzw. z -Achse $\bar{z}P_1 = \frac{\partial v}{\partial x} dx$ und $P\bar{z} = \frac{\partial w}{\partial x} dx$. Nun ist aus der Abbildung zu folgern

$$\frac{\partial w}{\partial x} dx \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{\partial w}{\partial x} dx \frac{\varrho}{y} = -\frac{d\psi}{dx} dx \cdot \varrho \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} dx \frac{1}{\sin \varphi} = \frac{\partial v}{\partial x} dx \frac{\varrho}{z} = \frac{d\psi}{dx} dx \varrho,$$

oder bei Einführung des Dralls

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -y\tau \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = z\tau. \quad (o)$$

Die Größen $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial x}$ können auf Grund der durch die Näherungsrechnung erschlossenen Spannungsverteilung [Gleichungen (149)] bei Annahme des Hookeschen Gesetzes und der Gleichungen (7) auf Seite 30, welche die Verzerrungskomponenten durch die Verschiebungs-

komponenten ausdrücken, bestimmt werden. Es sind die Schiebungen

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{X_y}{G} = -\frac{9M_D}{G b^3 h^3} (h^2 - 4y^2)z, \quad e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{Z_x}{G} = \frac{9M_D}{G b^3 h^3} (b^2 - 4z^2)y.$$

Differenzieren wir die erste dieser Gleichungen nach z , die zweite nach y und subtrahieren die so erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{9M_D}{G b^3 h^3} [d^2 - 4(y^2 + z^2)]$

mit $d^2 = b^2 + h^2$. Da aber, weil $Y_z = 0$ sein soll, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{9M_D}{2G b^3 h^3} [d^2 - 4(y^2 + z^2)]. \quad \text{In ähnlicher Weise erhalten wir } \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = -\frac{9M_D}{2G b^3 h^3}$$

$[d^2 - 4(y^2 + z^2)]$. Obwohl zufolge $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ($Z_z = Y_y = 0$), w nur Funktion von x , y und v nur Funktion von x , z sein kann, würde doch aus den zuletzt aufgeschriebenen Gleichungen durch Integration nach y bzw. z

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{9M_D y}{2G b^3 h^3} \left[d^2 - 4 \left(\frac{y^2}{3} + z^2 \right) \right] + f_1(x), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{9M_D z}{2G b^3 h^3} \left[d^2 - 4 \left(y^2 + \frac{z^2}{3} \right) \right] + f_2(x)$$

mit f_1 und f_2 als willkürliche Funktionen von x folgen. Ebenso widerspricht dieser Schluß, auch wenn letztere Null gesetzt werden, den kinematischen Gleichungen (0), woraus sich die vorangestellte Behauptung ergibt.

Die Deformationsarbeit im Falle der Drillung eines Stabes von rechteckigem Querschnitt ist mit Rücksicht auf (149) näherungsweise durch

$$A_D = \int_V \frac{Y_x^2 + Z_x^2}{2G} dx dy dz = \frac{81 M_D^2 l}{2 b^6 h^6 G} \int [(b^2 - 4z^2)^2 y^2 + (h^2 - 4y^2)^2 z^2] dx dy dz$$

ausdrückbar, woraus wir durch Integration nach x , y und z leicht

$$A_D = \frac{81 M_D^2}{2G h^6 b^6} \cdot \frac{2}{45} b^3 h^3 (b^2 + h^2) = \frac{9 M_D^2 l (b^2 + h^2)}{5G b^3 h^3} \quad (150)$$

erhalten. A. Föppl (L) erhält einen mittleren Wert des Dralls, indem er nach dem Satze über die Arbeit (Seite 106) $\frac{M_D \bar{\tau} l}{2} = A_D = \frac{9 M_D^2 l (b^2 + h^2)}{5G b^3 h^3}$ setzt. Daraus ergibt sich als mittlerer Wert des Dralls

$$\bar{\tau} = 3,6 \frac{M_D (b^2 + h^2)}{G h^3 b^3}. \quad (151)$$

Umgekehrt folgt aus dieser Gleichung das zu einem bestimmten mittleren Drall nötige Drillungsmoment mit

$$M_D = \frac{\bar{\tau} G h^3 b^3}{3,6 (b^2 + h^2)}. \quad (151a)$$

Nachdem das polare Trägheitsmoment eines rechteckigen Querschnittes für den Schwerpunkt durch $J_P = \frac{1}{12} b h^3 + \frac{1}{12} h b^3 = \frac{1}{12} b h (h^2 + b^2)$ gegeben ist und $b h = F$ mit F als Querschnittsfläche, kann der mittlere Drall auch in der Form

$$\bar{\tau} = 43,2 \frac{J_P M_D}{G F^4} \quad (151')$$

geschrieben werden, die sich an eine von De Saint-Venant (L) für eine Reihe von Stäben mit verschiedenen Querschnittsformen aufgestellte allgemeine Formel für den Drall anschließt (siehe weiter unten).

Eine zu (151) ganz ähnliche Formel für $\bar{\tau}$ fand schon Cauchy auf ganz anderem Wege. In der Cauchyschen Formel erscheint statt des Zahlenwertes 3,6 der Wert 3.

Der genaue Zusammenhang zwischen dem Drall τ und dem Drillungsmoment M_D für rechteckige Querschnitte wurde von De Saint Venant (L) mit

$$M_D = G \tau h b^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{16} \left(\frac{4}{\pi} \right)^5 \frac{b}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tanh} \frac{2n-1}{2b} \pi h}{(2n-1)^5} \right] = \mu \frac{\tau G h^3 b^3}{3.6 (b^2 + h^2)} \quad (151 b)$$

gefunden. Aus dieser Beziehung lassen sich die zur Richtigstellung der Formel (151 a) nötigen Umrechnungswerte μ bestimmen. Man findet z. B. für $\frac{h}{b} = 1$ $\mu = 1,012152$ und für $\frac{h}{b} = 20$ $\mu = 1,175092$, für $\frac{h}{b} = \infty$ wird $\mu = 1,2$. Die Formel (151 a) ist um so richtiger, je weniger h von b verschieden ist. In der Formel (151') treten an Stelle des Zahlenwertes 43,2 für $\frac{h}{b} = 1$ bzw. $\frac{h}{b} = 20$ die Zahlenwerte 42,68 bzw. 36,84.

2. Elliptischer Querschnitt. Die Gleichung der Ellipse bezogen auf das Tragheitshauptachsenkreuz durch den Schwerpunkt des Querschnittes sei $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $a > b$.

Infolgedessen hat die Tangente an dieselbe in einem beliebigen Punkte mit den Koordinaten η, ζ die Gleichung $\frac{y\eta}{a^2} + \frac{z\zeta}{b^2} = 1$ und die Richtungstangente $-\frac{\eta}{\zeta} \cdot \frac{b^2}{a^2}$. Die Richtungstangente der im Punkte η, ζ gezogenen Normalen der Ellipse (Abb. 153) ist $\operatorname{tg} (n y) = \frac{\zeta a^2}{\eta b^2}$. Die Grenzbedingung (e) auf Seite 330 nimmt somit die Form $0 = Y_x + Z_x \frac{\zeta a^2}{\eta b^2}$ an. Führen wir Y_x und Z_x aus den Beziehungen (h) auf Seite 332 in diese Grenzbedingung ein, so erhalten wir

$$0 = (\alpha \eta^2 + \gamma) \zeta - (\alpha \zeta^2 + \beta) \eta \frac{\zeta a^2}{\eta b^2}.$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung ζ durch η unter Zuhilfenahme der Gleichung der Ellipse, die durch diese Koordinaten identisch befriedigt werden muß, so ergibt sich $2 \alpha b^2 \eta^2 + \gamma b^2 - \alpha a^2 b^2 - \beta a^2 = 0$. Da diese Beziehung für jeden Punkt auf der Ellipse gelten muß, folgt $\alpha = 0$ und $\gamma = \beta \frac{a^2}{b^2}$. Die Schubspannungskomponenten können sonach zunächst in der Form $Y_x = 2 \beta \frac{a^2}{b^2} z$, $Z_x = -2 \beta y$ geschrieben werden. Führen wir diese Werte in die Gleichgewichtsbedingung (a) auf Seite 326 ein, so nimmt dieselbe die Form

$$\int_F (y Z_x - z Y_x) dy dz = - \int_F 2 \beta y^2 dy dz - \int_F 2 \beta \frac{a^2}{b^2} z^2 dy dz = M_D$$

an, woraus, da $\int_F y^2 dy dz = J_z = \frac{b a^3 \pi}{4}$ und $\int_F z^2 dy dz = J_y = \frac{a b^3 \pi}{4}$ die Gleichung $-2 \beta \left[\frac{b a^3 \pi}{4} + \frac{a^3 b \pi}{4} \right] = M_D$ und daraus $\beta = -\frac{M_D}{a^3 b \pi}$ folgt. Daher ergeben sich die Schubspannungskomponenten für den elliptischen Querschnitt mit

$$Y_x = -\frac{2 M_D}{a b^3 \pi} z, \quad Z_x = \frac{2 M_D}{a^3 b \pi} y, \quad (152)$$

Nachdem die Richtungstangente der totalen Schubspannung

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{Z_x}{Y_x} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{z} \quad (p)$$

(Abb. 153 a), so hat die totale Schubspannung T die Richtung des Durchmessers, der zu dem Durchmesser, auf welchem der Punkt P mit den Koordinaten y, z liegt, konjugiert ist. Die totalen Schubspannungen, die Flächenelementen längs eines Durchmessers entsprechen, sind daher zueinander parallel. Die Größe der totalen Schubspannung wird

$$T = \frac{Y_x}{\cos \lambda} = \frac{Z_x}{\sin \lambda} = -\frac{2 M_D}{a b^3 \pi} \frac{1}{\cos \lambda} = \frac{2 M_D}{a^3 b \pi} y \frac{1}{\sin \lambda} = \frac{2 M_D}{a^3 b^3 \pi} \sqrt{a^4 z^2 + b^4 y^2}. \quad (r)$$

Nach den Gleichungen (152) und (r) sind die Schubspannungskomponenten und die totalen Schubspannungen, die Flächenelementen längs eines beliebigen Durchmessers B, O, A entsprechen, proportional der Entfernung vom Schwerpunkte. $O, 2, B$ und O, A, I sind demnach die Schaubilder für die nach einem Geradenliniengesetz erfolgende Verteilung der totalen Schubspannungen T längs des Durchmessers AB .

Der zahlenmäßig größte Wert der totalen Schubspannung liegt jedenfalls auf der Berandungselipse des Querschnittes, für die, wenn wir ihre Koordinaten jetzt mit η, ζ bezeichnen, nach (r), weil $\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} = 1$ sein muß,

$$T = \frac{2 M_D}{a^3 b^3 \pi} \sqrt{b^2 [a^4 - \eta^2 (a^2 - b^2)]}.$$

Aus diesem Ausdruck ersehen wir, daß $\eta = 0$ der Wert von η ist, für den die dem Zahlenwerte nach größten totalen Schubspannungen, d. i.

$$|T_{\max}| = \frac{2 M_D}{a b^2 \pi} \quad (153)$$

herauskommen. Dieselben kommen somit den der Schwerachse des Stabes zunächst gelegenen Punkten C und D der Berandungselipse zu.

Den Punkten E und F der Ellipse ($\eta = \pm a, \zeta = 0$) entsprechen die zahlenmäßig kleinsten Umfangswerte der totalen Schubspannungen, nämlich

$$|T_{\min}| = \frac{2 M_D}{a^2 b \pi}. \quad (153 a)$$

Die Deformationsarbeit A_D für den elliptischen Querschnitt wird bei Rücksichtnahme auf die Gleichungen (152)

$$A_D = \int_V \frac{Y_x^2 + Z_x^2}{2 G} dx dy dz = \frac{l}{2 G} \left[\frac{4 M_D^2}{a^2 b^6 \pi^2} J_y + \frac{4 M_D^2}{a^6 b^2 \pi^2} J_z \right],$$

wenn $\int_F z^2 dy dz = J_y = \frac{a b^3 \pi}{4}$ und $\int_F y^2 dx dz = J_z = \frac{b a^3 \pi}{4}$ die Trägheitsmomente der elliptischen Querschnittsfläche mit Bezug auf die y - bzw. z -Achse bedeuten. Setzen wir deren Werte in den Ausdruck für A_D ein, so erhalten wir schließlich

$$A_D = \frac{M_D^2 l (a^2 + b^2)}{2 a^3 b^3 \pi G}. \quad (154)$$

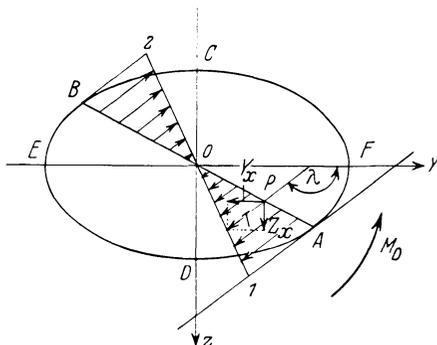


Abb. 153 a.

Den Drall τ können wir wieder aus dem Satze über die Arbeit $\frac{1}{2} M_D \tau l = A_D$ mit

$$\tau = \frac{M_D (a^2 + b^2)}{a^3 b^3 \pi G} \quad (155)$$

oder in Analogie zur Formel (151'), da das polare Trägheitsmoment

$$J_P = J_y + J_z = \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2)$$

und die Fläche des Querschnittes $F = a b \pi$ ist, mit

$$\tau = 4 \pi^2 \frac{J_P M_D}{F^4 G} \quad (155')$$

bestimmen.

Den gleichen Wert von τ können wir auch erhalten, indem wir, wie auf Seite 334, von den Beziehungen $\frac{\partial w}{\partial x} = -y\tau$ bzw. $\frac{\partial v}{\partial x} = z\tau$ ausgehen und auf die dort angegebene Weise $\frac{\partial w}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial v}{\partial x}$ aus den gefundenen Werten der Schubspannungskomponenten und der Bedingung, daß $Y_z = 0$ sein muß, berechnen.

Die Querschnitte können infolge der am Rande vorhandenen ungleichen totalen Schubspannungen nicht eben bleiben, was an der Mantelfläche des Stabes an einem Liniensystem sichtbar gemacht werden kann, daß auf ähnliche Weise, wie das für den rechteckigen Querschnitt geschildert wurde, vor der Verformung eingerissen wird.

Die vorstehenden Ergebnisse stimmen mit der exakten ursprünglich von De Saint Venant gegebenen Theorie der Verdrehung von Stäben mit elliptischem Querschnitt vollkommen überein. Die bereits erhaltenen Formeln für den Kreisquerschnitt können wir aus jenen für den elliptischen Querschnitt erhalten, indem wir in ihnen $a = b = r$ setzen.

c) Allgemeinere Bemerkungen über den Verdrehungswinkel pro Längeneinheit oder Drall.

Für einen beliebigen Querschnitt kann man den Verdrehungswinkel nach Formel (51) auf Seite 93 erhalten, wenn wir die Torsionsfunktion Π für den betreffenden Querschnitt kennen. Darnach können wir allgemein

$$\tau = \frac{M_D}{G J} \quad (156)$$

setzen, worin die Größe J die Dimension eines Trägheitsmomentes hat, die für den Fall eines kreisförmigen Querschnittes in das polare Trägheitsmoment der Kreisquerschnittsfläche übergeht. GJ definiert die Verdrehungssteifigkeit für einen beliebigen Querschnitt. J wird von A. Föppl als Drillungswiderstand bezeichnet. Für den Fall eines rechteckigen bzw. elliptischen Querschnittes wird annäherungsweise $J = \frac{5 \hbar^3 b^3}{18 (b^2 + \hbar^2)}$ bzw. genau

$$J = \frac{a^3 b^3 \pi}{a^2 + b^2} \text{ [Gleichungen (151) und (155)].}$$

De Saint Venant hat, wie oben bereits erwähnt, für eine Reihe von Querschnittsformen auf Grund von theoretischen Erwägungen eine zusammenfassende Formel für den Drall aufgestellt, der von diesem Forscher die Form

$$\tau = \varphi \frac{M_D J_P}{G F^4} \quad (157)$$

gegeben wurde, worin φ ein für die verschiedenen Querschnitte verschiedener Zahlenwert, M_D das Drillungsmoment, J_P das polare Trägheitsmoment des Querschnittes mit Bezug auf den Schwerpunkt, F die Querschnittsfläche und G den Gleitmodul des Stoffes, aus dem

der Stab besteht, bedeuten. Die in Gleichung (156) eingeführte Größe J hat darnach den Wert $J = \frac{F^4}{\varphi J_P}$. Rein rechnermäßig ergeben sich auf Grund der teilweise unter a) und b) und auf Seite 90ff. behandelten exakten Theorie die Zahlen φ mit den folgenden Werten. Für kreisförmigen und elliptischen Querschnitt wird $\varphi = 4 \pi^2 = 39,5$, für rechteckigen Querschnitt mit

$$\frac{h}{b} = \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 20$$

wird

$$\varphi = 42,68, \quad 42,0, \quad 40,2, \quad 38,5, \quad 36,84,$$

für Querschnitte in Form eines gleichseitigen Dreieckes wird $\varphi = 45$, für ein regelmäßiges Sechseck ergibt sich $\varphi = 41$. De Saint Venant schlägt vor, für diese und ähnliche Querschnitte für φ den gemeinsamen Mittelwert 40 zu setzen. Experimentelle Ergebnisse von Brettschneider (L) mit rechteckigen Stäben ergaben nur Abweichungen von 2 bis 6% von den berechneten Werten φ , und solche von Bach mit $\overline{\Gamma}$ -Querschnitten ließen den Schluß zu, daß φ zwischen 40 und 42 schwankt.

A. Föppl (L) hat zur Bestimmung der Größe J und somit auch des Dralls τ bei gegebenem Drillungsmoment für die praktisch wichtigen Walzprofile, wie $\overline{\Gamma}$ -, $\overline{\Gamma}$ -, $\overline{\Gamma}$ -, $\overline{\Gamma}$ -, $\overline{\Gamma}$ -Querschnitte, die aus schmalen Rechtecken zusammen gesetzt werden können, auf Grund theoretischer und praktischer Untersuchungen die Gleichung

$$J = \eta \frac{1}{3} \sum h b^3 \tag{158}$$

aufgestellt, worin h die Langseite, b die Schmalseite von Teilrechtecken bedeuten, aus denen sich die Querschnitte aufbauen lassen, und die Summe \sum über sämtliche Teilrechtecke zu nehmen ist, ferner η ein Berichtigungskoeffizient ist, dessen wahre Größe sich aus Verdrehungsversuchen ergibt und für die verschiedenen Querschnitte verschieden ist. Den Verdrehungsversuchen wird die richtige Formel (156) zugrunde gelegt, τ und M_D werden gemessen; ist der Gleitmodul G bekannt, so kann dann der wahre Wert von J berechnet werden. Föppl fand für $\overline{\Gamma}$ -Querschnitt η nahezu gleich 1, für $\overline{\Gamma}$ -, $\overline{\Gamma}$ -Querschnitte im Mittel $\eta = 1,15$, für $\overline{\Gamma}$ -Querschnitte im Mittel $\eta = 1,30$.

Als Ausgang für die Aufstellung der Formel (158) wird der Wert der Größe von J für ein schmales Rechteck ermittelt. Auf denselben kann man kommen, wenn man die exakte Formel (151b) auf Seite 336 durch Division von Zähler und Nenner durch h^2 in $M_D = \mu \frac{\tau G}{3,6} \cdot \frac{h b^3}{\left(\frac{b^2}{h^2} + 1\right)}$ überführt, und in dieser Formel für gegenüber den Werten b sehr

große Werte h , wie das für sehr schmale Rechtecke zutrifft, $\frac{b^2}{h^2}$ im Nenner vernachlässigt

und μ , wie für $\frac{h}{b} = \infty$, nahezu gleich 1,2 setzt (s. oben). Hierdurch gelangt man zum

Ausdrucke $M_D = \frac{\tau h b^3 G}{3}$, woraus $\tau = \frac{M_D}{\frac{1}{3} h b^3 G}$, d. h. annäherungsweise $J = \frac{1}{3} h b^3$ folgt.

Zum Schlusse dieses Punktes seien noch die häufig vorkommenden zusammengesetzten Beanspruchungen von geraden Stäben auf Drillung mit einer oder mehreren anderen einfachen Beanspruchungsarten berührt, wie das z. B. bei der Belastung nach Abb. 96, Seite 227 zutrifft, wo zwischen den Riemenscheiben R_1 und R_2 eine Beanspruchung auf Biegung, Drillung und Schub vorliegt. In derartigen Fällen berechnet man die den einfachen Beanspruchungen entsprechenden Spannungszustände für sich und legt sie dann übereinander. Solange die Verschiebungen klein sind, kann man in analoger Weise auch mit den den einfachen Beanspruchungen zukommenden Deformationen verfahren, um die der zusammengesetzten Beanspruchung zukommende Deformation zu erhalten.

18. Fortsetzung. Das Seifenhautgleichnis von Prandtl.

L. Prandtl hat eine sehr wichtig gewordene formale Analogie gefunden, die zwischen den Grundgleichungen, denen a) eine sehr dünne ursprünglich ebene aus Seifenlösung bestehende Flüssigkeitshaut genügen muß, die, eine in einem sonst allseits verschlossenen

Gefäße g (Abb. 155) befindliche Öffnung F von gegebener Berandungsform (kreisförmig, rechteckig usw.) überdeckend, durch einen mit Bezug auf das Gefäß inneren Luftüberdruck $p_1 - p_0$ (p_1 Druck im Gefäß, p_0 äußerer Luftdruck) nach außen gewölbt wird, und b) jenen Gleichungen, denen die im vorigen Punkte eingeführte Spannungsfunktion φ [Gleichungen (e) und (f), S. 330 ff.] bei Drillungsbeanspruchung eines Stabes mit einer Querschnittsfläche, deren Ausmaß und deren Berandung mit dem Ausmaß und der Berandung der erwähnten Gefäßöffnung zusammenfällt, genügen muß. Auf Grund dieser formalen Analogie ist es möglich, die Spannungsverhältnisse für auf Drillung beanspruchte Stäbe messend zu verfolgen.

Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{1}{G}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{1}{G}, \quad Y_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad (a)$$

die das Hookesche Gesetz für die Spannungen Y_x und Z_x und die Notwendigkeit des Nullwerdens von Y_z zum Ausdruck bringen, kann zunächst

$$-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \quad (b)$$

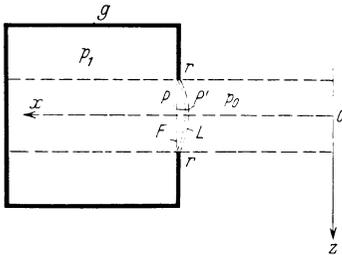


Abb. 155.

gefolgt werden [Differentiation der ersten der Gleichungen (a) nach z , der zweiten nach y und Subtraktion; die hierdurch erhaltene Gleichung wird mit der dritten der Gleichungen (a) zusammengefaßt]. Da

zufolge der Ausführungen auf S. 334 $\frac{\partial w}{\partial x} = -y\tau$, d. h.

$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\tau$, so kann die Bedingung (b) auch in der Form

$$2G\tau = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (b')$$

geschrieben werden. Die Grenzbedingung (e') auf Seite 331, welcher die Funktion φ am Rande des Querschnittes zu genügen hat, kann, da $\cos ny = \frac{dz}{ds}$ und $\cos(nz) = -\frac{dy}{ds}$ mit ds als Element der Berandung der Querschnittsfläche des Stabes, in

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \quad (c)$$

übergeführt werden. Die Bedingung (c) besagt, daß die Spannungsfunktion φ am Querschnittsumfange sich nicht ändern kann, d. h. dort an allen Stellen den gleichen Wert besitzen muß. Setzen wir den Drall τ als gegeben voraus, so ist φ aus den Gleichungen (b') und (c) bis auf eine additive Konstante bestimmbar [siehe Seite 93ff., wo die Bestimmbarkeit der Torsionsfunktion bis auf eine additive Konstante aus zwei den Gleichungen (b') und (c) völlig entsprechenden Bedingungen nachgewiesen wurde]. Der Wert des Dralles τ selbst ist aus der Gleichgewichtsbedingung gegen Verdrehen um die Stabachse, wie sie oben für verschiedene Querschnitte aufgestellt wurde, ermittelbar, wenn vorher die Schubspannungskomponenten Y_x, Z_x mit Hilfe der Spannungsfunktion φ als Funktion des Dralles τ dargestellt worden sind.

Die Öffnung F im Gefäße g (Abb. 155) soll dem Querschnitte des auf Drillung beanspruchten Stabes entsprechen, der punktiert angedeutet ist, derart, daß die Berandung der Öffnung mit jener des Querschnittes zusammenfällt. Die Punkte P' der sehr dünnen Seifenlamelle L weichen unter dem Einfluß des Überdruckes $p_1 - p_0$ parallel zur x -Achse von der Öffnungsebene um Größen $PP' = u$ ab, die als Funktionen von y und z anzusehen sind. Wenn wir kurz von Abweichungen u unter dem Einflusse von $p_1 - p_0$ gesprochen haben, so ist das natürlich nicht so gemeint, als ob die Drucke p_1 und p_0 die alleinigen zur Wirksamkeit gelangenden Kräfte wären. Abgesehen von der Schwere werden an den Berührungsf lächen der Seifenlamelle einerseits mit der umgebenden Luft, andererseits mit dem Gefäße, Kapillarkräfte wirksam, die nach den grundlegenden durch die Erfahrung bestätigten Annahmen von Gauß je ein Potential besitzen, das gleich der Größe der zugeordneten Berührungsf lächen multipliziert in eine von der Natur der einander berührenden Körper abhängige Konstante ist. Die Kapillarkräfte wirken normal auf die Berührungsf läche in das Innere der Lamelle hinein. Da der kapillare Druck an der konvexen Oberfläche größer als jener an der konkaven Oberfläche ist, so wirken sie im Sinne einer Verkleinerung der Oberfläche der Lamelle. (Wird in eine Seifenblase unter Zuhilfenahme eines Strohhalmes nicht mehr Luft eingepreßt, sondern der Druckaustausch zwischen dem Inneren der Seifenblase und der äußeren Luft freigegeben, so verkleinert sich dieselbe von selbst, d. h. infolge der

Wirkung der Kapillarkräfte.) Den kapillaren Kräften stellt sich der Überdruck $p_1 - p_0$ entgegen. Je größer innerhalb naturgemäßer Grenzen $p_1 - p_0$ wird, um so stärker wölbt sich die Lamelle, um so stärker wird die Gegenwirkung der Kapillarkräfte. Mit dem Auftreten der letzteren denkt man sich Hand das Bestehen von Zugspannungen in der Lamelle, derart, daß für ein einer beliebigen Schnittrichtung normal zur Lamellenfläche entsprechendes Flächenelement der Lamelle pro Längeneinheit stets eine Zugkraft α vorhanden ist, deren Richtung somit tangentiell an die Lamelle ist. Man könnte auch sagen, es entsteht in der Lamelle ein homogener ebener Spannungszustand mit zwei gleichen positiven Hauptspannungen, deren Ebenen stets tangentiell an die Lamellenflächen sind. Zur näheren Erläuterung diene das Folgende: Wir denken uns auf den beiden Begrenzungsflächen der Lamelle je ein kleines Flächenelement $P'P'_1P'_2P'_3$ (Abb. 155a) abgegrenzt, die die Basisflächen eines Prismas vorstellen, dessen Höhe der sehr kleinen Dicke b der Lamelle gleichkommt. Die als gemeinsam anzuschende Projektion dieser Flächenelemente auf die yz -Ebene ist durch $P_1P_2P_3$ dargestellt. Dem Punkt P kommen die Koordinaten y, z zu. Denken wir uns das unendlich kleine Prisma aus der Lamelle herausgeschnitten, so haben wir, um das Gleichgewicht nicht zu stören, die in den Schnittflächen übertragenen Kräfte als äußere Kräfte anzubringen. Auf die P_1P_2 entsprechende unendlich kleine normal zur Lamelle gedachte Schnittfläche kommt die Kraft $bP'_1P'_2\sigma$, oder, wenn $b\sigma$ als Kraft pro Längeneinheit mit α eingeführt und $P'_1P'_2 = ds_y$ gesetzt wird, αds_y . Die Kraft αds_y ist tangentiell zur Lamellenfläche gerichtet und hat in der x -Richtung die Komponente

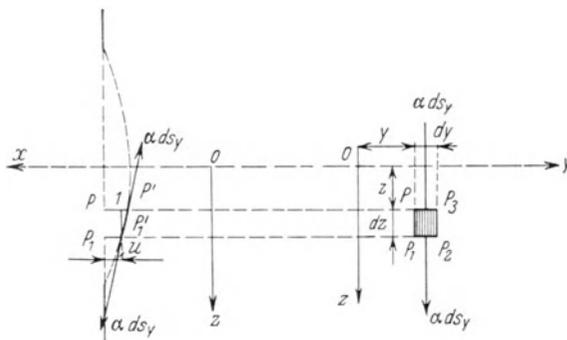


Abb. 155a.

— $\alpha ds_y \frac{\partial u}{\partial z}$, da $1 P' = - \frac{\partial u}{\partial z} dz$, also bei sehr kleinen u -Werten $-\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} = -\frac{\partial u}{\partial z}$ der Kosinus des stumpfen Winkels ist, den die Kraft αds_y mit der positiven x -Achse bildet. Der P_1P_2 zugeordneten Schnittfläche ist gleichfalls die Kraft αds_y zugeordnet, die x -Komponente derselben ist aber jetzt $\alpha ds_y \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha ds_y \frac{\partial u}{\partial z} \right] dz = \alpha ds_y \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz + \frac{\partial u}{\partial z} \right]$. Infolge der den Schnittflächen $P'_1P'_2$ und $P'_2P'_3$ zugeordneten Kräfte wirkt somit als Resultante in der positiven x -Richtung die Kraft $\alpha ds_y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz$. In ähnlicher Weise findet man, daß für die Schnittflächen $P'_1P'_2$ und $P'_2P'_3 = ds_z$ eine in der positiven x -Richtung wirkende Komponente von der Größe $\alpha ds_z \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$ vorhanden sein muß. Außer den berechneten Kräften wirken auf das Lamellenelement in der positiven x -Richtung noch die Kraft $p_0 ds_y ds_z$, in der negativen x -Richtung die Kraft $p_1 ds_y ds_z$, so daß als Gleichgewicht für das Lamellenelement die Bedingung $\alpha ds_y \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz + \alpha ds_z \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy - p ds_y ds_z = 0$ erfüllt sein muß mit $p = p_1 - p_0$. Sind, wie bereits zur Verwendung gebracht, die Verschiebungen u sehr klein, so können wir $ds_y = dy$ und $ds_z = dz$ setzen und erhalten als Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{p}{\alpha}. \tag{d}$$

Die als Oberflächenspannung bezeichnete Kraft pro Längeneinheit α kann experimentell, z. B. aus Versuchen mit Kapillarröhrchen erhoben, der Überdruck p durch Messung bestimmt werden.

Die Gleichung (d) können wir als Differentialgleichung der Fläche ansehen, in welche die ursprüngliche ebene Lamelle bei Wirkung des Überdruckes p übergeht. Die Integration dieser Differentialgleichung muß u als Funktion von y, z liefern, wobei als Grenzbedingung zu gelten hat, daß an der Berandung der Lamelle u verschwinden muß.

Bei Vergleich der Bedingungen, denen u genügen muß, mit jenen, welchen die Spannungsfunktion φ unterworfen ist, finden wir, daß u von rein mathematischem Gesichtspunkte aus als Spannungsfunktion auffaßbar ist, wenn an Stelle von $\frac{p}{\alpha}$ der Wert $2 G\tau$ gesetzt wird,

und die additive Konstante zur restlosen Bestimmung der Spannungsfunktion so gewählt wird, daß dieselbe an der Berandung konstant gleich Null wird. Bedenken wir aber, daß u und φ bestimmte physikalische Größen mit der Dimension [cm] bzw. zufolge Gleichung (f) auf Seite 331 $\left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}} \right]$ sein sollen, so müssen wir

$$\varphi = k u \tag{e}$$

und daher

$$\frac{p}{\alpha} k = 2 G \tau \tag{f}$$

mit k als einem Faktor mit der Dimension kg/cm^2 , d. h. einer Spannung setzen. Erst bei Zugrundelegung der Gleichungen (e) und (f) ist ein klagloser Zusammenhang zwischen φ und u bei Zugrundelegung eines beliebigen Maßsystemes geschaffen.

Mißt man die Höhen u der ausgewölbten Lamelle, die von Prandtl als Spannungshügel bezeichnet wird, in einem derartigen Maßstabe aus, daß die Gleichung (e) bzw. (f) erfüllt ist, so erhält man die Werte der Spannungsfunktion für die betreffenden Meßpunkte (Satz a). Fassen wir alle Punkte in einem Querschnitte eines auf Drillung beanspruchten Stabes zusammen, für welche die Spannungsfunktion φ einen konstanten Wert besitzt, so erhalten wir eine Kurve, deren Gleichung $\varphi(yz) = c$ mit c als konstanter Größe ist. Aus dieser

Gleichung erhalten wir durch Differentiation $\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0$, d. h. $\frac{dz}{dy} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}$. Da

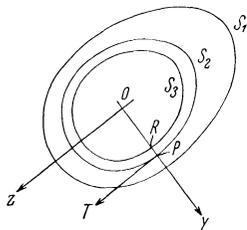


Abb. 155 b.

aber zufolge der Definition der Spannungsfunktion

$$- \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = \frac{Z_x}{Y_x} \tag{g}$$

und der Quotient $\frac{Z_x}{Y_x}$ die Richtung der totalen Schubspannung T

für einen Punkt der Kurve vorstellt, so sind die Kurven konstanten Wertes von φ die Schubspannungslinien (Seite 286ff.)

für die Drillungsbeanspruchung. Die Schichtenlinien mit gleichen Werten u auf der Seifenlamelle ergeben sonach auf den Querschnitt projiziert die Schubspannungslinien (Satz b). In Abb. 155 b ist der Spannungshügel in Draufsicht mit einigen Schichtenlinien verzeichnet, die sich nach dem vorstehend Gesagten mit ihren Projektionen auf die yz -Ebene, d. i. den Schubspannungslinien decken. Die Schichtenlinien S_2 und S_3 seien unendlich benachbart. Dem Punkte P der S_2 entsprechenden Schubspannungslinie sei die totale Schubspannung T , die tangentiell an erstere verläuft, zugeordnet. Das Koordinatensystem yz , dessen durch den Schwerpunkt gehende Achsen im Querschnitt offenbar eine beliebige Lage unbeschadet aller bisher über die Drillung gemachten Auseinandersetzungen besitzen kann, sei mit der y -Achse normal zur Schubspannung T , mit der z -Achse demgemäß parallel zu T gelegt. Die Strecke auf dem Spannungshügel, die sich als Strecke PR auf der Querschnittsfläche projiziert, schließt mit der letzteren einen Winkel ein, dessen Tangente durch $-\frac{\partial u}{\partial y}$ dargestellt wird und das Gefälle (die Fallinie) vorstellt, das der Spannungshügel an der betreffenden Stelle besitzt. Da nach Obigem $-\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -k \frac{\partial u}{\partial y}$, andererseits aber $-\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Z_x$ und für unsere Annahme des Koordinatensystemes $Z_x = T$, da $Y_x = 0$ ist, so gibt das Gefälle an irgendeiner Stelle des Spannungshügels ein Maß für die Größe der dort herrschenden Schubspannung T (Satz 3). Je steiler der Spannungshügel an einer Stelle ist, um so größer ist die dort vorhandene Schubspannung T .

Besonders wichtig ist, daß wir aus einem Seifenblasenversuch auch auf die Größe des Drillungswiderstandes $J = \frac{M_D}{G \tau}$ (Seite 338) und von ihm bei bekanntem Drillungsmoment auf den Drall τ ein Schluß gezogen werden kann. Das Drillungsmoment M_D muß auf Grund der Bedingung des Gleichgewichtes eines Stabteiles, an dessen einem Ende das Drillungsmoment M_D übertragen wird, die wiederholt verwendete Gleichung

$$M_D = \int_P (y Z_x - z Y_x) dy dz ,$$

das Integral über die Querschnittsfläche genommen, erfüllen. Drücken wir die Schubspannungskomponenten Z_x und Y_x durch die Spannungsfunktion φ aus, so nimmt die letzte Gleichung die Form

$$M_D = - \int_F \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dy dz$$

an, aus der wir durch partielle Integration nach y bzw. z den Ausdruck

$$- M_D = \int_B ds \cos(ny) y \varphi - \int_F \varphi dy dz + \int_B ds \cos(nz) z \varphi - \int_F \varphi dy dz$$

gewinnen, indem das erste und dritte Integral über die Berandung des Querschnittes, das zweite und vierte Integral über die Querschnittsfläche zu nehmen sind. Die über die Berandung genommenen Integrale verschwinden, da die Spannungsfunktion auf derselben Null werden soll. Wir erhalten somit bei Benützung der Gleichungen (e) und (f)

$$M_D = 2 \int_F \varphi dy dz = 2k \int_F u dy dz = \frac{4G\tau x}{p} \int_F u dy dz.$$

Beachten wir den oben angesetzten Ausdruck für den Drillungswiderstand, aus dem $M_D = G\tau J$ folgt, so erhalten wir schließlich

$$J = \frac{4x}{p} \int_F u dy dz. \quad (\text{h})$$

Da das Integral in dieser Gleichung den Rauminhalt des Spannungshügels bedeutet, besagt sie, daß der Drillungswiderstand dem Rauminhalt des Spannungshügels proportional ist (Satz 4).

19. Fortsetzung: Das hydrodynamische Gleichnis.

In dem Werke: On natural philosophie von Lord Kelvin und Tait, Teil II, S. 242ff. wurde zum ersten Male eine zweite formale Analogie zwischen den Gleichungen, die zur Bestimmung einer sogenannten ebenen Potentialströmung einer reibungslosen unzusammendrückbaren Flüssigkeit dienen und den Grundgleichungen zur Bestimmung des Spannungszustandes eines auf Drillung beanspruchten Stabes gefunden. Nach Lord Kelvin und Tait haben J. Boussinesq und A. G. Greenhill Analogien zwischen der Theorie gewisser Flüssigkeitsbewegungen und jener der Drillung von geraden Stäben festgestellt. Alle diesbezüglichen Untersuchungen verfolgen den Zweck, die Lösung eines hydrodynamischen oder, besser gesagt, eines hydrokinematischen Problemes zur Lösung des Problemes der Drillung eines geraden Stabes bei entsprechend geänderter Deutung der in die hydrokinematischen Gleichungen eintretenden Größen unmittelbar anzuwenden. Im folgenden soll eine im wesentlichen auf A. Greenhill zurückgehende Analogie etwas näher betrachtet werden.

Wir denken uns ein zylindrisches Gefäß, dessen Begrenzungsflächen mit der Mantelfläche und den Endquerschnittsflächen des auf Drillung beanspruchten Stabes zusammenfallen. In demselben bewege sich eine schwere und reibungslos sowie unzusammendrückbar gedachte Flüssigkeit, die das zylindrische Gefäß vollkommen erfüllt, derart, daß sämtliche Flüssigkeitsteilchen in sich zurücklaufende Bahnen mit Ebenen parallel zu den Basisflächen des Zylinders beschreiben. Es existieren sonach nur Geschwindigkeitskomponenten v_y und v_z parallel zu den Achsen y, z des Koordinatensystemes. Zur weiteren Festlegung der Flüssigkeitsbewegung wird angenommen, daß v_y und v_z nur Funktionen von y, z , nicht aber von x sind, und daß ihre Größen nicht von der Zeit abhängen (x -Achse mit Gefäßachse zusammenfallend). Die Flüssigkeitsbewegung ist hierdurch als eine ebene stationäre charakterisiert. Während der Bewegung eines ins Auge gefaßten Flüssigkeitsteilchens in der ihm zugeordneten Bahnkurve kann dasselbe noch eine Rotation um eine durch seinen Schwerpunkt gehende Achse besitzen. Würde ein Flüssigkeitsteilchen als starr angesehen werden können, so käme ihm im allgemeinen eine Geschwindigkeit v infolge seiner fortschreitenden Bewegung und eine solche infolge der rotierenden Bewegung um eine um seinen Schwerpunkt gehende Achse zu. Nimmt man die aus der Vektoralgebra bekannte Operation rot des Vektors v , so erhält man die doppelte Winkelgeschwindigkeit, mit der das Teilchen rotiert, d. h. es ist $\text{rot } v = 2w$, oder in komponentalen Gleichungen mit Bezug auf ein dreiachsiges Koordinatensystem

$$w_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad w_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad w_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

mit w_x, w_y, w_z als Winkelgeschwindigkeitskomponenten und v_x, v_y, v_z als Komponenten der Geschwindigkeit v . Die Richtigkeit der vorstehenden Bemerkungen kann hier als zu weit führend nicht näher begründet und in jedem einführenden Lehrbuch der Mechanik starrer und flüssiger Körper nachgelesen werden¹. Für unsere oben betrachtete ebene Flüssig-

keitsbewegung verschwinden v_x , ferner $\frac{\partial v_z}{\partial x}$ und $\frac{\partial v_y}{\partial x}$, also muß $w_y = 0$ und $w_z = 0$ sein, d. h. es könnte nur eine Rotation der Flüssigkeitsteilchen parallel zur x -Achse stattfinden. Das wollen wir auch mit der weiteren Beschränkung annehmen, daß wir w_x als konstant, d. h. unabhängig von y und z ansehen. Da w_x, w_y, w_z die Wirbelkomponenten der Flüssigkeitsbewegung genannt werden, können wir nach dem Gesagten die Aussage über die Flüssigkeitsbewegung dahin noch kürzer umschreiben, daß wir sagen, sie soll eine ebene stationäre Bewegung parallel zur yz -Ebene mit konstanter Wirbelbewegung parallel zur x -Achse sein.

Damit eine solche Bewegung möglich ist, müssen außer den die Massenkräfte enthaltenden hydrodynamischen Grundgleichungen (die, wie man sich leicht überzeugen kann, von selbst befriedigt werden) die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllbar sein.

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad v_z \cos(nz) + v_y \cos(ny) = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2w_x = 2C. \quad (a)$$

Die erste dieser drei Bedingungen ist die Kontinuitätsgleichung für unzusammendrückbare reibungslose stationäre Flüssigkeitsbewegungen parallel zur yz -Ebene, die zweite ist die Grenzbedingung für die Mantelfläche des Gefäßes, die besagt, daß die Geschwindigkeit dort keine Komponente in der Richtung der nach außen gezogenen Normalen n der Mantelfläche besitzen kann (die Summe der Projektionen der Geschwindigkeitskomponenten auf die Richtung der Normalen n muß verschwinden), die dritte der angeschriebenen Bedingungen mit C als Konstanten enthält die Bedingung der Unveränderlichkeit der Wirbelkomponente w_x .

Aus der ersten der Gleichungen (a) folgt $\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_z}{\partial z}$, woraus geschlossen werden kann, daß $d\psi = v_y dz - v_z dy$ ein vollständiges Differential einer Funktion ψ von y, z sein muß. Es kann sonach $v_y = \frac{\partial \psi}{\partial z}$ und $v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ gesetzt werden. ψ heißt die Stromfunktion, die die Eigentümlichkeit besitzt, daß sie längs eines Stromfadens ihren Wert nicht ändert; denn stellen wir uns umgekehrt die Aufgabe, eine Kurve zu finden, längs welcher die Funktion ψ

konstant ist, d. h. $\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0$ ist, so erhalten wir als Bedingung $\frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\frac{\partial \psi}{\partial z}} = \frac{v_z}{v_y}$,

die besagt, daß die Resultante von v_y und v_z in die Kurve hineinfällt, letztere also eine Stromlinie sein muß. Im besonderen ist auch die Stromfunktion ψ in der Stromlinie, die in die Mantelfläche des Gefäßes fällt, konstant. Führt man die Stromfunktion in die zwei letzten der Gleichungen (a) ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cos(nz) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos(ny) = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -2C. \quad (a')$$

Setzt man in den Bedingungen (a) statt der Geschwindigkeitskomponenten v_y, v_z die Schubspannungskomponenten Y_x, Z_x , statt C den Wert $G\tau$, ferner in (a') statt der Strömungsfunktion ψ die Spannungsfunktion φ , so erhalten wir Gleichungen, die der Bestimmung der Drillungsspannungen zugrunde gelegt waren. So wie zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten v_y, v_z die Kenntnis der Stromfunktion, die bis auf eine additive Konstante aus (a') bestimmbar ist, notwendig ist, ist zur Bestimmung der Schubspannungskomponenten die Kenntnis der Spannungsfunktion nötig, die völlig analogen Gleichungen genügen muß wie die Stromfunktion. Zur weiteren Ausführung der Analogie setzen wir

$$C = kG\tau \quad (\alpha), \quad k\varphi = \psi \quad (\beta)$$

$$v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -k\frac{\partial \varphi}{\partial y} = kZ_x, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial z} = k\frac{\partial \varphi}{\partial z} = kY_x, \quad (\gamma)$$

worin k ein Faktor ist, der die Dimension cm^3/kgsec besitzt. Auf Grund der für einen Stabteil notwendigen Gleichgewichtsbedingung haben wir auf Seite 343 $M_D = 2 \int_F \varphi dy dz$ erhalten,

¹ Siehe z. B. A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, IV, 3. Aufl., S. 363ff., Leipzig: B. G. Teubner 1909.

wofür wir auch $M_D = \frac{2}{k} \int_0^l \psi dy dz$ setzen können. Haben wir das hydrodynamische Problem

bei Wahl eines bestimmten Wertes C gelöst und wählen k derartig, daß die zuletzt aufgeschriebene Bedingungsgleichung erfüllt wird, so können die Schubspannungskomponenten Y_x, Z_x des zugehörigen Falles der Drillungsbeanspruchung aus den Gleichungen (γ) der zugehörige Drall τ aus der Gleichung (α) bestimmt werden. Die Stromlinien des hydrodynamischen Falles decken sich mit den Schubspannungslinien für die Drillungsbeanspruchung.

Die exakte Lösung der wie oben gestellten hydrodynamischen Aufgabe führt fallweise natürlich zu genau denselben Schwierigkeiten wie die direkte Lösung des Drillungsproblems. Der Vorteil, der aus der angegebenen Analogie gezogen werden kann, ist der, daß die Anschaulichkeit des parallelen hydrodynamischen Problems eine große ist, mit deren Hilfe es manchmal gelingt, zu Näherungslösungen zu gelangen, die dann auf das Drillungsproblem übertragen werden können¹.

20. Fortsetzung: Der Verdrehungsversuch. Drehungsfestigkeit.

Die Verdrehungsversuche zur Feststellung des Verhaltens eines Werkstoffes gegenüber einer Beanspruchung auf reine Verdrehung werden in der Regel mit Stäben von kreisförmigem Querschnitt vorgenommen, die im wesentlichen die Ausmaße eines Normalstabes von der Form besitzen, wie wir sie für die Durchführung des Zugversuches kennengelernt haben. Nur die Stabköpfe werden nicht mit kreisförmigem, sondern in der Regel mit polygonalem Querschnitt hergestellt, um sie für die Übertragung von Drehungsmomenten geeignet zu

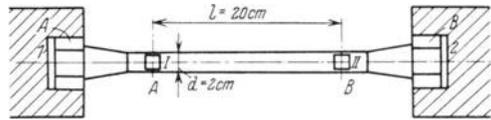


Abb. 156.

machen. Die Durchführung des Versuches geschieht mit eigenen Festigkeitsmaschinen, den Torsionsmaschinen, in welchen der eine Stabkopf A (Schema nach Abb. 156) ortsfest, der andere Stabkopf B aber um die Längsachse $I, 2$ des Stabes verdrehbar eingespannt wird. Die Erzeugung des auf das verdrehbare Stabende B zu übertragenden Drillungsmomentes geschieht entweder auf mechanischem oder hydraulischem Wege. Seine Messung erfolgt durch eine geeignete Einrichtung, z. B. mittels Manometer und Meßdose oder mittels Neigungswaage usw.² Die Verformung des Stabes wird aus dem Verdrehungswinkel zweier ursprünglich paralleler Radien gegeneinander beurteilt, deren Entfernung gleich der Meßlänge l des Stabes ist, die im normalen Versuch 20 cm beträgt. Die Messung des Verdrehungswinkels erfolgt, solange es sich um sehr kleine Verdrehungswinkel handelt, unter Zuhilfenahme von Spiegelablesungen. Zu diesem Behufe werden sehr kleine Spiegelchen I und II , deren spiegelnde Flächen vertikal stehen sollen, an den Enden A und B der Meßlänge des Stabes mit Kolophoniumwachskitt befestigt oder besser in einem mit Spitzen gegen den Stab abgestützten Ring gelagert. In je einer horizontalen Entfernung $D = aA$ (Abb. 156a)

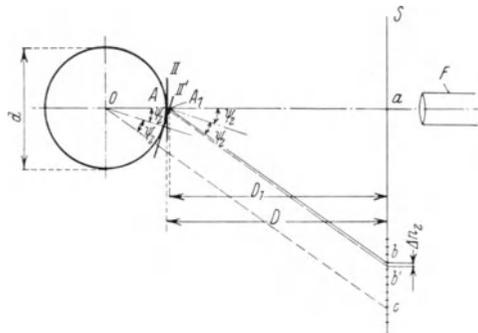


Abb. 156a.

¹ Siehe hierzu auch A. und L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. 2, München u. Berlin: R. Oldenburg 1920.

² Siehe hierzu die Fußnote auf S. 139.

von den Spiegeln sind zwei mit genauen Teilungen versehene Latten vertikal aufgestellt. Die Spiegelbilder der Teilstriche werden durch je ein mit Fadenkreuz versehenes Fernrohr F beobachtet. Bei unverdrehtem Querschnitt B schneidet der horizontale Faden des Fadenkreuzes des Fernrohrs aus der Skala S den Punkt a heraus. Verdreht sich der Querschnitt B um den Winkel ψ_2 und infolgedessen der Spiegel II um den gleichen Winkel, so erscheint im Fernrohr der Punkt b der Skala in den horizontalen Faden des Fadenkreuzes fallend.

Wenn die Strecke \overline{ab} n_2 Teilwerten des Maßstabes entspricht, so wird $\operatorname{tg} 2\psi_2 = \frac{n_2}{D_1}$, wenn $D_1 = \overline{aA_1}$ ist. Hierfür schreibt man, da nur $D = \overline{aA}$ ein für allemal gemessen wird, etwas fehlerhaft

$$\operatorname{tg} 2\psi_2 = \frac{n_2}{D}. \quad (\text{a})$$

Wäre der Spiegel II nicht exzentrisch mit Bezug auf die Stabachse angebracht, so wäre

$$\operatorname{tg} 2\psi_2 = \frac{ac}{0a} = \frac{ab'}{D} = \frac{n_2 + \Delta n_2}{D}. \quad (\text{a}')$$

Der Fehler, der bei Verwendung der Gleichung (a) gemacht wird, ist sonach $f = \frac{\Delta n_2}{D}$. Nennen wir die Exzentrizität des Spiegels e (in unserem Fall ist $e = \frac{d}{2}$), so wird, da

$$\Delta n_2 = \overline{AA_1} \operatorname{tg} 2\psi_2 \quad \text{und} \quad \overline{AA_1} = \frac{e}{\cos \psi_2} - e = e \frac{1 - \cos \psi_2}{\cos \psi_2}$$

der Wert $\Delta n_2 = e \frac{1 - \cos \psi_2}{\cos \psi_2} \operatorname{tg} 2\psi_2$, also der Fehler $f = \frac{e}{D} \cdot \frac{1 - \cos \psi_2}{\cos \psi_2} \operatorname{tg} 2\psi_2$.

Derselbe ist sonach um so kleiner, je kleiner e und ψ_2 sind, und je größer D ist. Ist D wie gewöhnlich sehr groß gegenüber e (z. B. $D = 1500$ cm, $e = 1,5$ cm, d. h. $\frac{e}{D} = 0,001$) und ψ_2 sehr klein, so kommt der Fehler nicht in Betracht.

Wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Verdrehung des Spiegels setzen wir in (a) statt der Tangente den Winkel ein und erhalten

$$\psi_2 = \frac{n_2}{2D}. \quad (\text{b})$$

In ähnlicher Weise ergibt sich für den Spiegel I im Querschnitt A

$$\psi_1 = \frac{n_1}{2D}, \quad (\text{b}')$$

und es wird die Verdrehung des Querschnittes B gegenüber dem Querschnitt A

$$\psi = \psi_2 - \psi_1 = \tau l. \quad (\text{c})$$

Größere Verdrehungswinkel werden mittels Zeigerapparaten gemessen: Man befestigt z. B. im Querschnitt A mittels Spitzenschrauben einen Ring, der einen über die Meßlänge bis zum Querschnitt B reichenden Zeiger trägt. In der Ebene des Querschnittes B ist ein zweiter Ring befestigt, der eine Winkelskala trägt, auf der der genannte Zeiger spielt.

Bringt man ein Drehmoment bestimmter Größe auf und entlastet hierauf, so bemerkt man, daß der dem aufgebrauchten Drehmoment entsprechende Verdrehungswinkel um so weniger vollkommen wieder zurückgeht, um so größer das aufgebrauchte Moment war. Man unterscheidet demzufolge bleibende und federnde Verdrehungen. Bei Bestimmung der Verdrehung der beiden Endquerschnittsflächen gegeneinander belastet und entlastet man solange, bis

sich konstante Werte für die Winkel ψ zeigen (Vorgang der Akkomodation, Seite 168).

Die Elastizitätsgrenze für die Beanspruchung auf Verdrehung als maximale am Umfange des Stabes auftretende Schubspannung (Seite 155) wird festgelegt durch einen ihr zugeordneten geduldeten Wert der bleibenden Verdrehung pro Längeneinheit (des bleibenden Dralls), der einem geduldeten Wert der hier dem Zahlenwerte nach einander gleichen Hauptdehnungen entspricht. (Fall der reinen Schubbeanspruchung.)

Man könnte daran denken, ein dem σ - ϵ -Schaubild für die Druck- bzw. Zugbeanspruchung entsprechendes Schaubild für die Verdrehungsbeanspruchung zu konstruieren, in dem als Abszissen die Dralle und als Ordinaten die zugehörigen im Bereiche des Querschnittes maximalen und totalen Schubspannungen T_{\max} aufgetragen werden müssen. Dabei ist aber mißlich, daß man, vorausgesetzt, daß das Hookesche Gesetz in einem bestimmten Bereiche der Schubspannungen überhaupt gültig ist (Fluß Eisen), die maximalen Schubspannungen nur bis zur Grenze dieses Bereiches berechnen kann, die auch hier als Proportionalitätsgrenze bei Beanspruchung auf Verdrehung (oder reinem Schub) zu bezeichnen ist. Oberhalb der Proportionalitätsgrenze ist eine Berechnung der Schubspannungen bei gegebenem Drillungsmoment, von Ausnahmefällen abgesehen, auf Grund der uns heute zur Verfügung stehenden Mittel um so weniger genau durchführbar, je mehr der Stoff vom Hookeschen Gesetze abweicht. Stoffe, die bei Beanspruchung auf Zug, Druck, Biegung die Erscheinung des Fließens zeigen, kommen auch in einem bestimmten Bereiche der Größe des Drillungsmomentes bei Beanspruchung auf Verdrehung in einen Zustand, der sich äußerlich durch das Auftreten von Fließfiguren über den ganzen Bereich des Stabes geltend macht und sich dadurch besonders auszeichnet, daß bei starkem Anwachsen des Verdrehungswinkels $\psi = l\tau$ ein geringes Anwachsen des Drillungsmomentes, ja häufig sogar ein Zurückgehen desselben entspricht (siehe weiter unten). Die an einen nach Übereinkommen festgesetzten Wert des bleibenden Dralls im Fließ- (Streck-)bereich gebundene wahre Fließ- (Streck-)grenze auf Verdrehung, auch wahre Drehgrenze genannt, als am Umfange des Stabes auftretende totale Schubspannung, ist nicht genau ermittelbar, ebensowenig die wahre Drehungsfestigkeit, als welche man die Schubspannung bezeichnet, die am Umfange des Stabes im Augenblicke herrscht, in dem der Bruch beginnt. Wollte man ein $T_{\max} - \tau$ -Schaubild entwerfen, so bliebe nichts übrig, als an Stelle der wahren Drehgrenze und wahren Drehungsfestigkeit ideale Grenzen treten zu lassen, die so berechnet werden, als ob das Hookesche Gesetz oberhalb der Proportionalitätsgrenze bis zum Bruche gültig wäre. Eingebürgert hat sich in der Praxis die Definition der idealen Drehungsfestigkeit. Nach Gleichung (146) auf Seite 327 ist für kreisförmigen Querschnitt $T_{\max} = \frac{2 M_D}{\pi r^3}$ mit r als Radius des Probestabes. Die ideale Drehungsfestigkeit ist dann

$$K_D = T_{\max, \max} = \frac{2 (M_D)_{\max}}{\pi r^3} \quad (159)$$

mit $(M_D)_{\max}$ als Moment, bei dem der Bruch einsetzt.

Wenn ein Stoff in einem Teilbereiche seiner Inanspruchnahme auf reinen Schub (wie z. B. bei zähen Metallen bei Inanspruchnahme über die Proportionalitätsgrenze) oder überhaupt nicht (wie Gußeisen) dem Hookeschen Gesetze folgt, sondern zwischen den totalen Schubspannungen T und den Schiebungen γ ein nicht linearer Zusammenhang

$$T = f(\gamma) \quad (d)$$

besteht, so tritt bei Beanspruchung eines Stabes mit kreisförmigem Querschnitt an Stelle der Gleichung (c) auf Seite 327 die allgemeine Beziehung

$$T = f(\varrho \tau) \quad (e)$$

und die Gleichgewichtsbedingung (a) auf Seite 326 geht in

$$M_D = \int_F f(\varrho \tau) \varrho df \quad (f)$$

über. Aus der Bedingung (f) kann, wenn $f(\gamma)$ bekannt ist und τ auch jetzt als nahezu konstant angesehen wird, der Drall τ als Funktion von M_D und damit nach Gleichung (e) T als Funktion von ϱ gefunden werden.

Mist man die zu verschiedenen Werten M_D gehörigen Dralle τ (bzw. $\psi = \tau l$), so ist es möglich, eine Kurve $M_D - \psi$ zu konstruieren, deren rechtwinkelige Koordinaten M_D und $\psi = \tau l$ sind. Diese Kurve, welche an manchen Verdrehungsmaschinen selbsttätig aufgezeichnet wird, ist für das Verhalten eines Stoffes gegenüber Verdrehungsbeanspruchungen charakteristisch. Für Stoffe, welche die Erscheinung des Fließens zeigen und in einem bestimmten Bereiche dem Hookeschen Gesetze folgen, hat sie die aus Abb. 157 ersichtliche typische Gestalt.

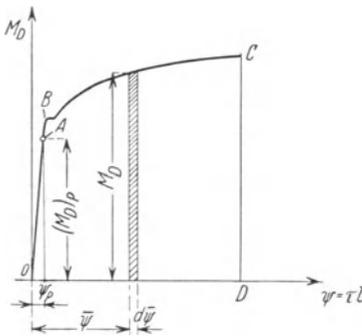


Abb. 157.

Etwa bis zum Punkte A, der der Proportionalitätsgrenze entspricht, ist M proportional zu τ entsprechend der Gleichung (147 a) auf Seite 328. Der Punkt B entspricht der Fließ- oder Drehgrenze, von dem als Ausgangspunkt in einem bestimmten verhältnismäßig kleinem Bereiche das Drillungsmoment M_D nicht nur nicht zu-, sondern sogar abnimmt, bei verhältnismäßig starkem Anwachsen des Verdrehungswinkels, der Punkt C ist der Drehungsfestigkeit zugeordnet.

Die Arbeit $M_D d\bar{\psi}$ bei Beanspruchung auf Verdrehung bei Anwachsen des Momentes vom Werte M_D bis zum Werte $M_D + dM_D$ und des Verdrehungswinkels von Werte $\bar{\psi}$ zum Werte $\psi + d\bar{\psi}$ ist durch den in der Abbildung schraffierten Flächenstreifen graphisch dargestellt. Die gesamte Verdrehungsarbeit bis zum

Bruch, d. i. $A_D = \int_0^{\psi} M_D d\bar{\psi}$ kann sonach durch Ausmessung der Fläche $OBCD$ gefunden werden. Bis zur Proportionalitätsgrenze ist die Arbeit durch die Fläche des Dreieckes OAF , d. i. $\frac{(M_D)_P \psi_P}{2}$ gegeben. [Gleichungen (147 a) und (148 a),

Seite 328ff. Dividieren wir die Verdrehungsarbeit A_D durch das Volumen des Stabes, das zwischen den Endmarken der Meßlänge liegt, so erhalten wir das spezifische Arbeitsvermögen bei Beanspruchung auf Verdrehen. Dasselbe ist für plastische und zähe Materialien bedeutend größer als jenes bei Beanspruchung auf Zug. Für gewisse Flueisensorten ist z. B. das Verhältnis des genannten Arbeitsvermögen etwa 4:1, wenn das Arbeitsvermögen bei Beanspruchung auf Zug aus dem üblichen σ - e -Schaubild (aus dem also nicht die wahren Zugspannungen und wahren Dehnungen entnommen werden können) bis zur Höchstspannung K_z abgeleitet wird.

Für Gußeisen ist der Verlauf der σ - e -Kurve bei Zugbeanspruchung ähnlich jenem der M_D - ψ -Kurve, letztere hat sonach bis zum Bruch einen einheitlichen Charakter.

Kennt man die Zuordnung des Drillungsmomentes M_D zum Drall τ — es sei $M_D = F(\tau)$ — und sieht man τ im Querschnitt als konstant an, so kann die Beziehung (f) in der Form $F(\tau) = \int_F f(\varrho\tau) \varrho df$ geschrieben werden. Wenn wir (Abb. 151b, c) $df = \varrho d\varphi d\varrho$, $\tau\varrho = \gamma$, $\tau d\varrho = d\gamma$ setzen, geht diese Gleichung bei Integration über φ von Null bis 2π in

$$F\left(\frac{\gamma_1}{r}\right) = 2\pi \int_0^{\gamma_1} f(\gamma) \frac{\gamma^2}{r^3} d\gamma \quad \text{oder} \quad \frac{\gamma_1^3}{r^3} F\left(\frac{\gamma_1}{r}\right) = 2\pi \int_0^{\gamma_1} f(\gamma) \gamma^2 d\gamma$$

über, wobei γ_1 die Schiebung an der Berandung des Querschnittes vom Radius r vorstellt. Es folgt $\frac{d}{d\gamma} \left[\frac{\gamma^3}{r^3} F\left(\frac{\gamma}{r}\right) \right] = 2\pi f(\gamma) \gamma^2$, woraus sich

$$f(\gamma) = \frac{1}{2\pi \gamma^2} \cdot \frac{d}{d\gamma} \left[\frac{\gamma^3}{r^3} F\left(\frac{\gamma}{r}\right) \right] \tag{g}$$

ergibt. Unter den gemachten Voraussetzungen kann somit aus einem Verdrehungsversuch mit einem Stabe von kreisförmigem Querschnitt bei experimenteller Erhebung von $M_D = F(\tau)$ das für den betreffenden Stoff gültige Spannungs-Schiebungsgesetz $T = f(\gamma)$ erschlossen werden. Wenn das Hookesche Gesetz gültig ist, so wird laut Gleichung (147a) $M_D = \frac{\pi r^4 G \tau}{2} = F(\tau)$ und in selbstverständlicher Folgerung

$$f(\gamma) = \frac{1}{2\pi \gamma^2} \cdot \frac{d}{d\gamma} \left[\frac{\pi G \gamma^4}{2} \right] = G \gamma.$$

Setzen wir T als Funktion von ϱ an, so ergibt sich

$$\frac{dT}{d\varrho} = \frac{dT}{d\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{d\varrho} = \bar{G} \tau, \tag{h}$$

worin \bar{G} als der im allgemeinen mit γ veränderliche Gleitmodul bezeichnet werden kann. (Siehe Seite 147 die Definition des Elastizitätsmaßes E als Differentialquotient $\frac{d\sigma}{de}$ im Falle der Ungültigkeit des Hookeschen Gesetzes.) Tragen wir uns in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (Abb. 158) die zu verschiedenen Werten T gehörigen Schiebungen γ in einem derartigen Maßstabe auf, daß der zur Spannung T gehörige Wert γ durch den T zugeordneten Wert ϱ gemessen wird, und stellen uns vor, daß die maximale Schubspannung T_{\max} an der Berandung gleich der wahren Drehungsfestigkeit \bar{K}_D ist, so mißt die trigonometrische Tangente in einem Punkte P der sich ergebenden Kurve OB , die etwa die Verhältnisse für Gußeisen wiedergibt, den Gleitmodul, und die Kurve selbst kann als Darstellung des Zusammenhanges zwischen Schubspannungen und Schiebungen gelten. Wäre der Gleitmodul bis zum Bruche konstant, so ergäbe sich als Spannungs-Schiebungskurve die Gerade OB' mit AB' als ideale Drehungsfestigkeit K_D . Wird der Berechnung der idealen Drehungsfestigkeit der Gleitmodul zugrunde gelegt, der bei unendlich kleinen Werten der Schubspannung vorhanden ist, dann ist OB' tangentiell an OB . Aus der Darstellung sieht man, daß die ideale Drehungsfestigkeit für Gußeisen gegenüber der wahren Drehungsfestigkeit zu groß ist.

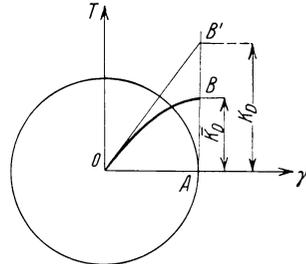


Abb. 158.

Diese Überlegungen können natürlich nicht mit so großen Anlehnungen an die Wirklichkeit wie bei spröden Stoffen auch auf plastische und zähe Materialien übertragen werden, für die das Gesetz $T = f(\lambda)$ bis zum Bruche bei weitem nicht so gleichartig wie bei spröden Materialien ist, und auch die Unabhängigkeit des Dralles τ vom Radius ϱ , die bisher vorausgesetzt wurde, weniger zutreffend sein

wird. Jedenfalls ist aber ein Anhaltspunkt gewonnen und kann gesagt werden, daß bei Beanspruchung von plastischen und zähen Stoffen bis zum Bruch die gegen die Stabachse zu gelegenen Fasern größere Spannungen erleiden, als sie erleiden würden, wenn das Hookesche Gesetz bis zum Bruch gültig wäre. Auch für diese Stoffe wird also die wahre Drehungsfestigkeit kleiner als die ideale sein.

Die wahre Drehungsfestigkeit müßte sich als unabhängig von der Querschnittsform herausstellen. Dagegen ist zu erwarten, daß die ideale Drehungsfestigkeit ein diesbezügliches Abhängigkeitsverhältnis zeigt. In dieser Hinsicht wurden umfassendere Untersuchungen von Bach (L) mit gußeisernen Stäben von verschiedener Querschnittsform durchgeführt. Sie ergaben, daß das Verhältnis der idealen Drehungsfestigkeit K_D zur in üblicher Weise definierten Zugfestigkeit K_z je nach der Querschnittsform verhältnismäßig bedeutend veränderlich ist. Setzen wir mit Bach $K_D = \mu_1 K_z$, so ist für kreisförmigen, kreisringförmigen, elliptischen, hohlelliptischen, rechteckigen Querschnitt μ_1 der Reihe 1, 0,8, 1 bis 1,25, 0,8 bis 1, 1,4 bis 1,6.

Der Einfluß des Spannungszustandes in den Stabköpfen auf die Resultate des Verdrehungsversuches wird sich um so mehr geltend machen, je näher die Endmarken der Meßlänge den Stabköpfen liegen, und je mehr sich unter sonst gleichen Umständen die Querschnitte wölben, was, wie wir bereits wissen, für kreisförmige und kreisringförmige Querschnitte nicht in Betracht kommt. Bei rechteckigen und elliptischen Querschnitten kann die Wölbung derselben in der Nähe der Stabköpfe durch letztere verhindert werden, wodurch in den Stab an den genügend nahe an den Stabköpfen liegend gedachten Stabteilen je nach der Stabkopfform mehr oder weniger bedeutende Zug- oder Druckspannungen entstehen können, die zu den Verdrehungsspannungen hinzutreten. Hierdurch wächst die Gefahr des Bruches in der Nähe der Einspannköpfe.

Das Ähnlichkeitsgesetz für Drehversuche mit verschiedenen Versuchsstäben proportionaler Abmessungen wird durch die Erfahrung bestätigt. Für ähnliche Stäbe decken sich die M_D - ψ -Schaubilder und die idealen Drehungsfestigkeiten sind die gleichen. Verhalten sich die Dimensionen zweier Stäbe wie $1:n$, so müssen sich die Drillungsmomente, die zu gleichen Spannungen und demselben auf die Stablänge l bezogenen Verdrehungswinkel ψ führen sollen, wie $1:n^3$, d. h. wie die Stabvolumina verhalten.

Die Bruchflächen treten bei spröden Körpern von kreisförmigem Querschnitt unter 45° zur Stabachse (Abb. 75, Seite 181 zeigt den Bruch für Gußeisen) auf und entsprechen einem Trennungsbruch normal zur Richtung der positiven Hauptspannung. Bei Stäben von rechteckigem Querschnitt treten die ersten Sprünge auf den der Stabachse am nächsten liegenden Querschnittsflächen gleichfalls etwa unter 45° zur Stabachse (Abb. 75a für Gußeisen) als Trennungsbrüche auf. Zäh Körper wie z. B. Flußeisen werden in Flächen normal zur Stabachse abgedreht, der Bruch ist also ein Schiebungsbruch. Nicht homogene zähe Körper, die eine faserige Struktur parallel zur Stabachse besitzen, wie z. B. Schweiß-eisen, zeigen die ersten Risse parallel zur Stabachse entsprechend den Schubspannungen, die in den durch die Stabachse gelegten Ebenen parallel zur Stabachse auftreten müssen.

21. Knickung bei verschiedenen Grenzbedingungen. Eulersche Knicklast und Knickspannung. Reduzierte Länge und Schlankheitsgrad.

Die Beanspruchung eines schlanken geraden Stabes auf Knickung wurde bereits auf Seite 193ff. als ein labiler Gleichgewichtsfall gekennzeichnet. Um zur Größe der kritischen Belastung für den Fall, als der Stab auf der einen Seite eingespannt und auf der anderen Seite frei ist (Abb. 80, Seite 194), zu kommen,

bedienen wir uns zunächst einer Methode, welche als solche der Störung bekannt ist, d. h. wir nehmen vorerst an, die Kraft P habe mit Bezug auf die Stabachse eine kleine Exzentrizität, die übrigens in praktischen Fällen in der Regel vorhanden sein wird, wenn man sich auch noch so bemüht, sie zu vermeiden.

Wir nehmen also an, es sei ein im Vergleich zu seinen Quersdimensionen langer Stab auf geraden exzentrischen Druck beansprucht, und zwar liege die Beanspruchungsebene xz normal zur Achse y des minimalen zentralen Trägheitsmomentes. Infolge der vorausgesetzten Schlankheit des Stabes sind für die Berechnung der Biegemomente die Durchbiegungen nicht mehr zu vernachlässigen und es gelten somit die Gleichungen (133a, b) und (134) auf Seite 312 für die maximale Durchbiegung, die Durchbiegung und das Biegemoment an beliebiger Stelle des Stabes. Setzen wir $\cos(\lambda l) = 0$, d. h.

$$\lambda l = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3\pi}{2} \cdots (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \tag{a}$$

so werden die Durchbiegungswerte und jedes Biegemoment unendlich groß.

Nachdem $\lambda = \sqrt{\frac{P}{EJ_y}}$, d. h. $\lambda^2 = \frac{P}{EJ_y}$, so besagen die Festsetzungen (a), daß

$$\frac{Pl^2}{EJ_y} = (2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{4}, \quad n = 1 \cdots \infty, \quad \text{oder} \quad P = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EJ_y}{l^2} (2n - 1)^2. \tag{160}$$

Der kleinste der Werte P für $n = 1$, nämlich

$$P = P_E = \frac{\pi^2 EJ_y}{4l^2} \tag{161}$$

heißt die Eulersche Knicklast für den einseitig eingespannten Stab, weil Euler (1774) zuerst die Richtlinien für ihre Berechnung gegeben hat und sie, wie wir noch entwickeln werden, jene kritische Belastung ist, die dem Verzweigungspunkt des Gleichgewichtes zugeordnet ist. Das Unendlichwerden der Durchbiegungen für die Werte der Kraft P nach Gleichung (160) bzw. für die Eulersche Knicklast läßt den Schluß zu, daß die im Stabe auftretenden größten Spannungen für einen Wert von P , der weit unter P_E liegt, die Proportionalitätsgrenze des Stabstoffes erreicht haben müssen.

Wenn wir in Gleichung (133a) für die maximale Durchbiegung $\cos(\lambda l)$ in einer Reihe entwickeln und von derselben wegen der Kleinheit von λ nur zwei Glieder beibehalten, so können wir sie in der Form $f_z = \zeta \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{8} \lambda^2 l^2} - 1 \right)$ oder auch mit Rücksicht auf die Bedeutung von λ und den Wert der Knicklast P_E in der Form

$$f_z = \zeta \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{P_E} \cdot \frac{\pi^2}{8}} - 1 \right) = \zeta \frac{\frac{P}{P_E}}{1 - \frac{P}{P_E}} \tag{b}$$

schreiben. Setzen wir $n = \frac{P}{P_E}$ mit n als positivem Zahlenwert, der kleiner als 1 ist, so wird

$$f_z = \zeta \frac{n}{1 - n} \tag{b'}$$

und im besonderen für $n = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ 1 der Reihe nach $f_z = \zeta, 2\zeta, 3\zeta, 4\zeta, 5\zeta \dots \infty$. Tragen wir uns in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Abszissen die Werte f_z , als Ordinaten die zugehörigen Werte P bei gegebenen gedachten Werten von P und P_E auf, so erhalten wir je nach den Werten von ζ

verschiedene Kurven. In Abb. 159 sind die Kurven C_1, C_2, C_3 für $\zeta = 10 \text{ mm}, 5 \text{ mm}, 1 \text{ mm}$ aufgetragen. Dieselben verlaufen anfänglich um so steiler, je kleiner der Hebelarm ζ ist, und haben eine Gerade t parallel zur f_z -Achse im Abstand $P = P_E$ von derselben zur Asymptote. Wird $\zeta = 0$, d. h. ist der Stab zentrisch belastet, so ergibt die Gleichung (133a) für alle Werte von P den Wert Null mit Ausnahme jener, welche durch die Gleichung (160) bzw. (161) bestimmt sind. Für diese besonderen Werte folgt aus der genannten Gleichung ein unbestimmter Wert von f_z , dessen Bestimmung auf Grund der bisherigen Auseinandersetzungen nicht möglich ist. Wie sich weiter unten herausstellen wird, ist derselbe gleich Null,

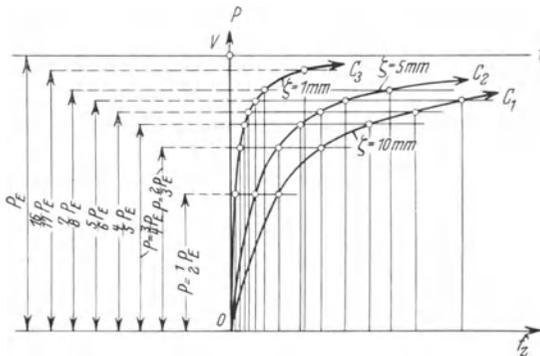


Abb. 159.

nimmt aber von Null verschiedene Werte an, trotz zentrischer Aufbringung der Last — und das ist das Entscheidende —, wenn der Wert $P = P_E$, wenn auch nur wenig überschritten wird. Hiernach ist die ζ -Kurve in Abb. 159, wenn wir nur Werte von P im Bereiche 0 bis P_E in Betracht ziehen, die Gerade OV , die im Punkte V endet. Die übrigen ζ -Kurven C_1, C_2, C_3 endigen ebenso wie OV im Endlichen, d. h. sind nur für Bereiche der Kraft P zutreffend,

für welche das Hookesche Gesetz, auf dessen Geltung ja die Ausgangsgleichungen für die exzentrische Druckbeanspruchung beruhen, erfüllt wird. Die dem Zahlenwerte nach größte Spannung für den Fall der exzentrischen Druckbeanspruchung tritt bei Symmetrie des Querschnittes mit Bezug auf die Nulllinie, die zu der zur Druckbeanspruchung hinzutretenden Biegungsbeanspruchung gehört, in der äußersten Faserschicht auf der Druckseite im Einspannungsquerschnitte auf und hat zufolge Gleichung (135a) auf Seite 312 den Wert

$$|\sigma_z| = \left| \frac{P}{F} + \frac{P \zeta z_a}{J_y \cos(\lambda l)} \right|. \tag{c}$$

Der Gültigkeitsbereich der oben genannten Kurven ist nach oben durch einen Wert P bestimmt, der sich aus der Gleichung

$$|\sigma_z| = \sigma_p \tag{d}$$

berechnen läßt, wenn σ_p die Proportionalitätsgrenze auf Druck des Stoffes ist, aus dem der Stab besteht. (In besonderen Fällen könnte auch die extreme Zugspannung im Stabbereiche für die Bestimmung der oberen Grenze von P in Frage kommen, nämlich dann, wenn die Proportionalitätsgrenze auf Zug viel niedriger liegt als jene auf Druck.) Führt man in Gleichung (d) den Wert für $|\sigma_z|$ aus (c) ein, drückt $\cos(\lambda l)$ wie oben durch die zwei ersten Glieder einer unendlichen Reihe aus, so erhält man eine quadratische Gleichung für P , von deren beiden Lösungen der kleinere Wert zu nehmen ist. Dieser Wert liegt naturgemäß um so niedriger, je größer ζ unter sonst gleichen Umständen ist. Für $\zeta = 0$ erreicht er den der Proportionalitätsgrenze entsprechenden Wert $\sigma_p F$. Die Knicklast P_E selbst darf höchstens gleich $\sigma_p F$ werden, weil sonst alle bisherigen Auseinandersetzungen nicht gelten würden. Wir merken an, daß letzteres bei gegebenen Werten von E und J_y nur eintreten kann, wenn l genügend groß ist.

Wir beschreiten jetzt einen anderen Weg, um zur kritischen Laststellung zu gelangen, d. h. wir nehmen an, daß es bei zentrischer Aufbringung der Last auf den Stab möglich ist, daß derselbe bei einer gewissen Größe der Last eine ausgebogene Lage annimmt. Wir denken uns also den Stab in der in Abb. 80 strichliert gezeichneten Lage und setzen die Differentialgleichung der elastischen Linie, bezogen auf das dort angenommene Koordinatensystem, in der Form

$$\frac{d^2z}{dx^2} = - \frac{Pz}{EJ_y} \tag{e}$$

an, der die Lösung $z = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$ zukommt. Die Bestimmung der Integrationskonstanten A und B erfolgt auf Grund der Grenzbedingungen, die besagen, daß für $x = 0$, $z = 0$ und für $x = l$, $\frac{dz}{dx} = 0$ sein muß. Aus der ersten Grenzbedingung ergibt sich $B = 0$, die zweite verlangt die Erfüllung der Gleichung $0 = A \lambda \cos(\lambda l)$, aus der entweder $A = 0$ und damit $z = 0$ folgt, d. h. der Stab bleibt gerade, oder $\cos(\lambda l) = 0$ sein muß, wodurch wir wieder auf die bereits oben erhaltenen Beziehungen (a), (160) und (161) geführt werden. Der Wert der Integrationskonstanten A bleibe dabei unbestimmt. Die Gleichung der durchgebogenen Stabachse

$$z = A \sin \left[(2n - 1) \frac{\pi x}{2l} \right] \tag{f}$$

entspreche, vorausgesetzt, daß die Amplitude A bekannt wäre, unendlich vielen durchgebogenen Lagen, je nach der Wahl von n , d. h. der zugehörigen Kraft P . Der oben als Eulerschen Knicklast eingeführten Kraft $P = P_E$ käme im besonderen die Gleichung der ausgeknickten Stabachse $z = A \sin \frac{\pi x}{2l}$ zu. Den Werten $n = 1, 2, \dots, \infty$ entsprechen stets andere Formen der geknickten Stabachse. Für $n = 1$ ergibt sich eine reine Sinuslinie (Abb. 80) mit einer Nullstelle $z = 0$ für $x = l$, für $n = 2$ ergeben sich zwei Nullstellen für $x_1 = \frac{2l}{3}$ und $x_2 = l$, wovon die erstere gleichzeitig Wendepunkt ist (Abb. 160), einem beliebigen n sind n Nullstellen

$$x_1 = \frac{2l}{2n-1} \cdot \dots \cdot x_{n-1} = \frac{2(n-1)l}{2n-1}, \quad x_n = l$$

zugeordnet, von welchen $x_1 \dots x_{n-1}$ gleichzeitig $n - 1$ Wendepunkten entsprechen.

Nunmehr wollen wir den Fall der Knickung auf Grund des allgemeinen Energiekriteriums auf Seite 195, Gleichung (89) behandeln. Zu diesem Behufe haben wir die potentiellen Energien (Seite 194) in der unverbogenen Lage des Stabes und in einer zu derselben unendlich benachbarten möglichen verbogenen Lage miteinander zu vergleichen. Sind diese beiden Energien gleich, so hat die Last den kritischen Wert erlangt. In der unverbogenen Lage hat der Stab die potentielle Energie $V_1 = \frac{P \Delta l}{2} - P \Delta l$, wenn Δl die Verkürzung

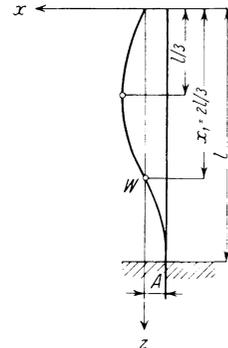


Abb. 160.

des Stabes bedeutet. Wir führen jetzt aus der deformierten geraden Lage eine virtuelle Verschiebung des Stabes aus, derart, daß die Punkte der Stabachse nach der Verschiebung längs einer Sinuslinie liegen. Die virtuelle Verbiegung erfolge in einer Ebene normal zur Achse des minimalen Trägheitsmomentes $J_y = J_{\min}$ des Querschnittes. Die Kraft soll bei der virtuellen Verschiebung keine Veränderung erfahren. Die Gleichung der Sinuslinie, bezogen auf das Koordinatensystem xz (Abb. 80), ist $z = a \sin \frac{\pi x}{2l}$ mit a als größter Abweichung des Stabendes in der verbogenen Lage von der ursprünglichen geraden Stabachse. Die Größe a ist unendlich klein von

der ersten Ordnung. Die Deformationsarbeit, die in dem verbogenen Stab steckt, ist

$$\int_0^l \frac{(Pa)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2l}}{2EJ_y} dx - \frac{P \Delta l}{2} = \frac{P^2 a^2}{2EJ_y} \cdot \frac{l}{2} + P \frac{\Delta l}{2}.$$

Der Arbeit der äußeren Kräfte entspricht die potentielle Energie $-P \Delta l$ plus dem Anteil, der aus der Bedingung quillt, daß die Achsenlänge des Stabes in der verbogenen Lage gleich jener in der geraden Lage sein muß, da ja die auf Druck beanspruchende Kraft sich nicht ändern soll. Da ein Element ds der Stabachse in der verbogenen Lage durch

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + \frac{a^2 \pi^2}{4l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{2l}} = dx \left(1 + \frac{a^2 \pi^2}{8l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{2l}\right)$$

bei Vernachlässigung von Gliedern von höherer als der zweiten Kleinheitsordnung gegeben ist, so wäre die Stablänge in der verbogenen Lage

$$l_1 = \int_0^l dx \left(1 + \frac{a^2 \pi^2}{8l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{2l}\right) = l + \frac{a^2 \pi^2}{8l^2} \cdot \frac{l}{2},$$

d. h. um $\Delta l_1 = \frac{a^2 \pi^2}{8l^2} \cdot \frac{l}{2}$ länger als sie in der geraden Lage war. Das Stabende im verbogenen Zustande muß sich demnach bei unveränderter Kraft P um $\Delta l + \Delta l_1$ gegenüber dem Stabende in der unbeanspruchten geraden Lage gesenkt haben. Der Senkung Δl_1 entspricht eine potentielle Energie von $-P \Delta l_1 = -P \frac{a^2 \pi^2}{8l^2} \cdot \frac{l}{2}$. Zusammengefaßt ist also die potentielle

Energie in der unverbogenen Lage $V_1 = -P \frac{\Delta l}{2}$, in der verbogenen Lage

$$V_2 = -\frac{P \Delta l}{2} + \frac{P^2 a^2}{2EJ_y} \cdot \frac{l}{2} - \frac{P a^2 \pi^2}{8l^2} \cdot \frac{l}{2}.$$

Die Änderung der potentiellen Energie ist demnach

$$V_2 - V_1 = \delta^2 V = \frac{P^2 a^2}{2EJ_y} \cdot \frac{l}{2} - \frac{P a^2 \pi^2}{8l^2} \cdot \frac{l}{2}. \quad (g)$$

Die kritische Belastung ist erreicht, wenn $\delta^2 V = 0$, d. h. $P = \frac{\pi^2 EJ_y}{4l^2} = P_E$ geworden ist, was wir bereits oben erhalten haben. Es kann gezeigt werden, daß wir bei einer beliebigen möglichen anderen Annahme über die Gleichung der verbogenen Stabachse stets zu den gleichen Werten der kritischen Belastung kommen.

Bisher konnten wir keine Angaben über den eigentlichen Verlauf der ausgebogenen Lage des Stabes machen, da in der oberen Gleichung (f) die Konstante A nicht bestimmbar war. Diese Unbestimmtheit wird behoben, wenn wir die Differentialgleichung der elastischen Linie, von der wir zur Herleitung der Gleichungen (133a, b), (134) ausgegangen sind, genauer schreiben. Für deren Geltung wurde nämlich die näherungsweise Annahme gemacht, daß die auftretenden Durchbiegungen so klein sind, daß wir an Stelle des Bogenelementes der elastischen Linie ds die Koordinatenänderung dx und demzufolge statt

$q_y = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 z}{dx^2}}$ den Ausdruck $q_y = \frac{1}{\frac{d^2 z}{dx^2}}$ setzen dürfen (Seite 246ff.). Diese An-

näherung fällt weg, wenn wir in der Differentialgleichung (117), Seite 247, der elastischen Linie $\frac{1}{q_y} = K_y = -\frac{M_{By}}{EJ_y}$ für q_y den wahren Wert einsetzen. Hier-

durch erhalten wir, wenn wir die so umgewandelte Differentialgleichung auf die elastische Linie in Abb. 80 anwenden, die Gleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \right]^3 = - \frac{Pz}{EJ_y} = - \lambda^2 z.$$

Diese Differentialgleichung führt¹ auf elliptische Integrale. Bei näherungsweise Auswertung, d. h. bei Berücksichtigung noch von Gliedern zweiter Ordnung, wenn der größte Verdrehungswinkel am nicht eingespannten Stabende als von erster Ordnung bezeichnet wird, findet man als größten Wert der Ausbiegung

$$fz = \sqrt{8 \left[\frac{4 \lambda^2 l^2}{\pi^2} - 1 \right]}. \tag{162}$$

Dieser Wert ist nur reell, wenn $\frac{4 \lambda^2 l^2}{\pi^2} > 1$, d. h. $\lambda^2 = \frac{P}{EJ_y} > \frac{\pi^2}{4 l^2}$ oder

$$P > P_E = \frac{\pi^2 EJ_y}{4 l^2}.$$

Dieses Ergebnis besagt, daß ein Ausbiegen des geraden Stabes erst eintreten kann, wenn P den Wert P_E zu überschreiten beginnt. Das steht im Widerspruch zu dem oben gefundenen Resultate, aus dem zu schließen wäre, daß allerdings nicht auswertbare Ausbiegungen bei $P = P_E$ bzw. allgemeiner bei den Werten von P nach Gleichung (160) vorhanden sein können und nur bei diesen Werten. Der Widerspruch findet seine Erklärung in der Näherung der Rechnung, wenn von Gleichung (e) auf Seite (353) ausgegangen wird.

Wird der Wert für P durchschritten, der sich aus Gleichung (160) für $n = 2$ ergibt, so wäre die in obiger Abb. 160 dargestellte Gleichgewichtsform denkbar, die von der der genannten Kraft zugeordneten zweiten Verzweigungsstelle abzweigt. Diese zweite mit einem Wendepunkte versehene Gleichgewichtslage ist aber nach v. Mises (L) labil, ebenso wie alle anderen höheren Werte von n nach Gleichung (160) zugeordneten Gleichgewichtslagen. Deswegen kommen die Knicklasten höherer Ordnung, wie wir die nach Gleichung (160) für Werte $n > 1$ berechneten Kräfte nennen wollen, praktisch nicht in Frage. Überdies könnte ihnen, soweit auf Grund des im Rahmen der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes bisher Gesagten erschlossen werden kann, nur eine reale Existenz bei außerordentlich langen Stäben zukommen, für welche auch Knicklasten höherer Ordnung noch unter dem der Proportionalitätsgrenze entsprechenden Wert bleiben könnten und nur für den Fall, als das Ausknicken bei der kleinsten Knicklast P_E künstlich verhindert würde.

Nehmen wir allgemeiner als bisher von vornherein schiefe exzentrische Druckbeanspruchung an, so werden die gefundenen Resultate nicht abgeändert. Denn die größte Durchbiegung beim schiefen exzentrischen Druck setzt sich aus den beiden größten Durchbiegungen der komponentalen geraden exzentrischen Druckbeanspruchungen zusammen und wird zwar unendlich groß für Werte von P , die die Bedingungen $\cos(\lambda l) = 0$ und $\cos(\mu l) = 0$ [Gleichungen (133a) und (133'a) auf den Seiten 312 und 313] erfüllen, doch kann von allen sich ergebenden Werten P nur der kleinste, d. h. jener, der dem minimalen Trägheitsmoment entspricht, als erste Knicklast in Frage kommen. Wir werden des-

¹ Siehe hierzu Riemann-Weber: Partielle Differential- und Integralgleichungen der Physik, neu herausgegeben von Dr. R. v. Mises, Teil I, S. 375. Braunschweig: F. Vieweg, 1925.

wegen in Zukunft für die Eulersche Knicklast bei einseitig eingespanntem Stab stets

$$P_E = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{4 l^2} \tag{161'}$$

schreiben, worin J_{\min} das kleinste Trägheitsmoment des Querschnittes bedeutet, und festhalten, daß ein Ausknicken stets nur in der Ebene normal zur Achse von J_{\min} zu erwarten ist.

Wir wollen nunmehr dem Stab andere Grenzbedingungen auferlegen, indem wir ihn zwischen Spitzen lagern. Zu diesem Behufe versehen wir die Enden des Stabes mit nach außen in massive Kegel auslaufenden Schuhen. Die wenig abgerundeten Enden stützen sich gegen passende eine Biegung des Stabes nicht verhindernde Schalen möglichst reibungslos (Abb. 161). Durch die möglichst reibungslose Lagerung soll die Übertragung von Biegemomenten an den Auflagerstellen tunlichst vermieden werden.

Wir nehmen von vornherein an, daß für eine bestimmte zentrisch wirkende Kraft P eine ausgebogene Lage des Stabes in der Ebene normal zur Achse des minimalen Trägheitsmomentes möglich sei und fragen nach der Größe der zugehörigen Kraft. Die Differentialgleichung der elastischen Linie $\frac{d^2 z}{dx^2} = -\lambda^2 z$ mit $\lambda^2 = \frac{P}{E J_{\min}}$ besitzt die Lösung $z = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$ mit den Integrationskonstanten A und B , die den Grenzbedingungen $x = 0, z = 0$ und $x = l, z = 0$ genügen müssen. Es folgt $B = 0$ und $0 = A \sin(\lambda l)$. Aus der letzten Bedingung ergibt sich entweder $A = 0$ (unausgebogene Lage) oder $\sin(\lambda l) = 0$

(ausgebogene Lage). Wir schließen, daß für die ausgebogene Lage $\lambda l = n\pi, \dots n = 1, 2, \dots$ sein muß, woraus $\lambda^2 l^2 = n^2 \pi^2$ oder

$$P = \frac{n^2 \pi^2 E J_{\min}}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{160a}$$

folgt. Die kleinste Eulersche Knicklast ($n = 1$) wird somit jetzt

$$P = P_E = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{l^2}. \tag{161a}$$

Die Gleichung der ausgebogenen Stabachse wäre jetzt $z = A \sin \frac{n \pi x}{l}$, worin wieder A aus den oben bereits angegebenen Gründen unbestimmbar ist. Der Eulerschen

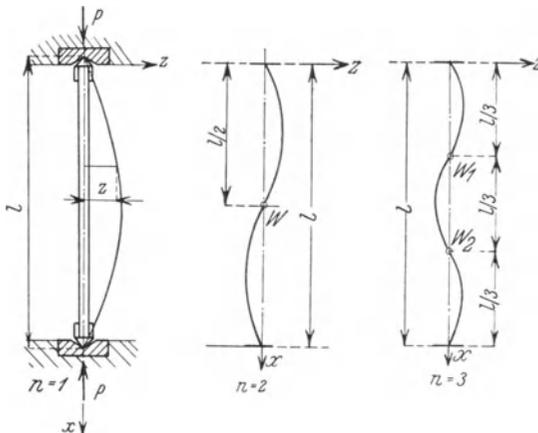


Abb. 161.

Abb. 161 a.

Abb. 161 b.

Knicklast entspräche sonach als ausgebogene Stabachse eine Sinuslinie ohne Wendepunkt, den Knicklasten höherer Ordnung sind Kurven mit $n - 1$ Wendepunkten zugeordnet. In Abb. 161a und 161b sind die ausgebogenen Stabachsen für $n = 2$ und $n = 3$ dargestellt. Die übrigen noch notwendigen Auseinandersetzungen wie die Anwendung der Methode der Störung, des Stabilitätskriteriums, die Berechnung der Stabform oberhalb der kritischen Last usw. schließen sich so eng an jene für den einseitig eingespannten Stab an, daß sie nicht neuerdings angegeben zu werden brauchen.

Aus dem Vergleich der Formel (161a) mit der Formel (161) auf Seite 351 ersieht man, daß ein zwischen Spitzen gelagerter Stab von gegebenen Ausmaßen und bestimmtem Stoffe einer viermal größeren Belastung bedarf, als er im Falle

der einseitig festen Einspannung nötig hat, um an die Grenze des labilen Gleichgewichtes gebracht zu werden. Die Lagerung in Spitzen ist also im Hinblick auf die Knickgefahr bedeutend sicherer als die einseitig feste Einspannung.

Nummehr denken wir uns den Stab auf der einen Seite fest eingespannt, das andere Ende sei in der Richtung der ursprünglich geraden Stabachse etwa dadurch geführt, daß ein an diesem Ende parallel zur Achse des minimalen Trägheitsmomentes angebrachter zylindrischer Zapfen in einer zur Stabachse parallelen Nut möglichst reibungslos laufen kann (Abb. 162). Die bei zentrischer Aufbringung der erst zu bestimmenden Last P in der Abbildung angedeutete ausgebogene Lage könnte nur zustande kommen, wenn von seiten der Führung eine Kraft Q in dem eingetragenen Sinne übertragen wird. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet dann $\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{Pz - Qx}{E J_{\min}}$ und stellt eine nicht homogene lineare Differentialgleichung vor, deren Lösung sich aus dem vollständigen Integral der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einem partikulären Integral der nicht homogenen Differentialgleichung zusammensetzt. Als letzteres kann offenbar $z = \frac{Qx}{P}$ genommen werden. Daher lautet die vollständige

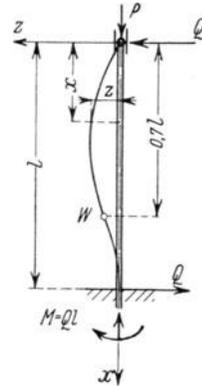


Abb. 162.

Lösung $z = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + \frac{Qx}{P}$. Die Grenzbedingungen verlangen, daß für $x = 0, z = 0$ und für $x = l$ sowohl $z = 0$ als auch $\frac{dz}{dx} = 0$ sein sollen. Aus der erstgenannten Bedingung folgt zunächst $B = 0$, die beiden übrigen Bedingungen ergeben die Bestimmungsgleichungen $0 = A \sin(\lambda l) + \frac{Ql}{P}$ und $0 = A \lambda \cos(\lambda l) + \frac{Q}{P}$, aus denen sich durch Elimination von Q $A [\sin(\lambda l) - \lambda l \cos(\lambda l)] = 0$ ergibt. Bei Ausschaltung der Folgerung $A = 0$, was auch $Q = 0$ nach sich zieht (unverbogene Lage), schließen wir, daß die Kraft P der Bedingung $\sin(\lambda l) - \lambda l \cos(\lambda l) = 0$ oder $\lambda l = \text{tg}(\lambda l)$ genügen muß. Derselben entsprechen ∞ viele Lösungen λ , die im Bogenmaß durch $\lambda l = 4 \cdot 4934 + \alpha \pi$, im Gradmaß durch $\lambda l = 257^\circ 2' 13'' + \alpha \cdot 180^\circ$ mit $\alpha = 0, 1 - k_1, 2 - k_2, \dots$ ausdrückbar sind. Wir erhalten somit als Größtwerte der Kräfte, für die eine Ausbiegung möglich erscheint

$$P = \frac{(4 \cdot 4934 + \alpha \pi)^2 E J_{\min}}{l^2}, \quad \alpha = 0, 1 - k_1, 2 - k_2, \dots, \quad (160b)$$

und als kleinste Eulersche Knicklast für $\alpha = 0$

$$P_E = \frac{4 \cdot 4934^2 E J_{\min}}{l^2} = 20 \cdot 19064 \frac{E J_{\min}}{l^2} = \frac{2 \pi^2 E J_{\min}}{l^2}. \quad (161b)$$

Die zugehörigen Gleichungen der ausgebogenen Stabachsen ergeben sich mit dem aus den Grenzbedingungsgleichungen errechneten Werte $Q = -\frac{A P \lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2 l^2}}$ in der Form $z = A \left[\sin(\lambda x) - \frac{\lambda x}{\sqrt{1 + \lambda^2 l^2}} \right]$, worin λ mit den oben gefundenen Werten einzusetzen ist und der Faktor A wieder unbestimmt bleibt (siehe oben). Wie man sich aus der Wendepunktsbedingung $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$ leicht überzeugt, liegt der Wendepunkt W der P_E zugeordneten elastischen Linie bei $x = 0,7 l = \frac{l}{\sqrt{2}}$.

¹ Die Werte k_1, k_2, \dots bilden eine gegen Null konvergierende Reihe kleiner positiver Zahlen.

Bei Vergleich der Formeln (161a) und (161b) bemerkt man, daß ein Stab mit Grenzbedingungen nach Abb. 162 eine zweimal größere Knicklast besitzt als dann, wenn derselbe Stab zwischen Spitzen gelagert wäre, im ersteren Fall die Knickgefahr also nur die Hälfte der Knickgefahr im letzteren Falle beträgt. Die Länge L des zwischen Spitzen gelagerten Stabes, der mit dem Stab nach Abb. 162 von der Länge l aus gleichem Stoffe und demselben Querschnitt die gleiche Knicklast besitzt, ist gleich $0,7 l = \frac{l}{\sqrt{2}}$, das ist gleich der Entfernung des Wendepunktes des ausgebogenen Stabes von der Länge l von dem geführten Ende desselben. Zwischen diesen Punkten kann für die Berechnung der Eulerschen Knicklast des einerseits eingespannten, andererseits geführten Stabes, letzterer als zwischen Spitzen gelagert angesehen werden.

Schließlich wollen wir annehmen, daß der Stab auf beiden Seiten fest eingespannt und auf Knickung beansprucht ist (Abb. 163). Die Differentialgleichung der elastischen Linie für die dargestellte, in der Ebene normal auf die Achse des minimalen Trägheitsmomentes ausgebogene Stabachse lautet bei Berücksichtigung des Einspannungsmomentes M , $\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{(Pz - M)}{E J_{min}}$, die als nicht homogene lineare Differentialgleichung die Lösung $z = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) + \frac{M}{P}$

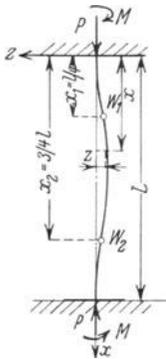


Abb. 162.

besitzt. Die vier Grenzbedingungen besagen, daß sowohl für $x = 0$ als auch $x = l$ sowohl $z = 0$ als auch $\frac{dz}{dx} = 0$ zutreffen muß. Demzufolge erhalten wir die Bedingungen

$$0 = B + \frac{M}{P}, \quad 0 = \lambda A$$

und

$$0 = A \sin \lambda l + B \cos \lambda l + \frac{M}{P},$$

$$0 = A \lambda \cos \lambda l - B \lambda \sin \lambda l.$$

Aus der zweiten Bedingungsgleichung folgt $A = 0$, aus der ersten und dritten

$$B(\cos \lambda l - 1) = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda l = 2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

mit welchen Werten auch die vierte Bedingung befriedigt wird. Die Kräfte, welche einer ausgebogenen Lage des Stabes zugeordnet sein können, werden daher

$$P = 4n^2 \pi^2 \frac{E J_{min}}{l^2}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{160c}$$

Als kleinste Knicklast ($n = 1$) ergibt sich

$$P_E = \frac{4 \pi^2 E J_{min}}{l^2}. \tag{161c}$$

Die Gleichung der ausgebogenen Stabachse wird $z = B \left(\cos \frac{2n\pi}{l} x - 1 \right)$, worin B unbestimmt bleibt. Für $n = 1$ ergeben sich aus der Bedingung $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$ die Lagen zweier Wendepunkte W_1 und W_2 für $x_1 = \frac{l}{4}$ und $x_2 = \frac{3l}{4}$. Für ein beliebiges n ergeben sich $2n$ Wendepunkte für

$$x_1 = \frac{l}{4n}, \quad x_2 = \frac{3l}{4n}, \quad x_3 = \frac{5l}{4n} \dots x_{2n} = \frac{(4n-1)l}{4n}.$$

In Abb. 163a ist die elastische Linie für $n = 2$ dargestellt.

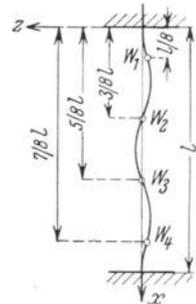


Abb. 163a.

Bei doppelter fester Einspannung ist die Knicklast für einen gegebenen Stab und damit die Knicksicherheit unter sonst gleichen Umständen viermal so groß als bei Lagerung desselben Stabes zwischen Spitzen. Ein zwischen Spitzen gelagerter Stab von der Länge L hat mit einem doppelt eingespannten Stab von der Länge l aus dem gleichen Stoffe und bei gleichem Querschnitt die gleiche Knicklast, wenn $L = \frac{l}{2}$, d. i. gleich der Entfernung der Wendepunkte W_1 und W_2 des fest eingespannten Stabes ist, zwischen welchen demnach der letztere für die Berechnung der Knicklast als zwischen Spitzen gelagert angesehen werden kann.

In allen vier angegebenen Fällen wächst die Knicklast mit der Biegesteifigkeit EJ_{\min} und nimmt mit dem Quadrate der Länge l des Stabes ab. Wir können die Formeln (161) bis (161c) unter einen Hut bringen, wenn wir die sogenannte Eulersche Knickspannung $\sigma_E = \frac{P}{F}$ einführen und die Länge eines Stabes mit gegebenen Grenzbedingungen auf die Längen eines zwischen Spitzen gelagerten Stabes reduzieren, d. h. die sogenannte reduzierte oder freie Länge eines Stabes, schließlich aber auch noch den sogenannten Schlankheitsgrad eines Stabes einführen. Die reduzierte oder freie Länge L eines gegebenen Stabes von der Länge l ist gleich der Länge eines zwischen Spitzen gelagerten Stabes vom gleichen Stoffe und gleichem Querschnitt, der mit dem gegebenen Stab die gleiche Knicklast besitzt. Für den einerseits fest eingespannten, andererseits freien Stab von der Länge l ergibt sich die freie Länge L durch Vergleich der Formeln (161) und (161a). Es muß $\frac{\pi^2 EJ_{\min}}{4l^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{L^2}$, d. h. $L = 2l$ sein. Ähnlich findet man für den einerseits fest eingespannten, andererseits geführten Stab $\frac{l^2}{2} = L^2$, d. h. $L = 0,7l$ wie bereits gefunden, für den beiderseits fest eingespannten Stab $\frac{l^2}{4} = L^2$, d. h. $L = \frac{l}{2}$, wie ebenfalls bereits oben berührt. Unter dem Schlankheitsgrad α eines Stabes wird der Quotient aus der freien Länge L und des minimalen Trägheitsradius i_{\min} verstanden. Danach wird $\alpha = \frac{L}{i_{\min}}$. Der Schlankheitsgrad wächst mit der freien Länge und nimmt mit dem minimalen Trägheitsradius ab.

Mit diesen Begriffsbestimmungen nehmen die Formeln (161), (161a, b, c) die gemeinsame Form

$$P_E = F \sigma_E = \frac{\pi^2 E F i_{\min}^2}{L^2} = \frac{\pi^2 E F}{\alpha^2} \quad \text{oder} \quad \sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\alpha^2} \quad (163)$$

an.

22. Fortsetzung: Grenzen der Gültigkeit der Eulerschen Formeln. Versuche von Bauschinger und Bach. Knickung bei kleinem Schlankheitsgrad. Versuche von Tetmayer. Die Knickformel von Engesser. Versuche von Kármán.

Im vorhergehenden Punkt wurde wiederholt darauf hingewiesen, daß die Eulerschen Formeln nur bei zentrischer Aufbringung der Last und dann nur so lange gelten können, als die Knicklast kleiner oder höchstens gleich einer Last ist, die den Stab an die Proportionalitätsgrenze auf Druck des Stabstoffes bringt. Danach muß die Knickspannung der Bedingung

$$\sigma_E \leq \sigma_P \quad (164)$$

genügen, mit σ_P als Proportionalitätsgrenze. Für die im vorigen Punkte behandelten vier Knickfälle können wir diese Bedingung auch in der Form $\frac{\pi^2 E}{\alpha^2} \leq \sigma_P$ schreiben. Es folgt, daß der Schlankheitsgrad des Stabes der Bedingung

$$\alpha \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} \quad (164a)$$

genügen muß, wenn die Eulerschen Formeln Gültigkeit haben sollen. Wird der Schlankheitsgrad kleiner als der dem Gleichheitszeichen in (164a) entsprechende Wert, was bei kürzeren gedrungenen Stäben der Fall sein wird, so kann zwar noch Knickgefahr vorliegen, dieselbe ist jedoch nicht mehr aus den Eulerschen Formeln beurteilbar. Setzen wir für Schweißeisen, Flußeisen, Flußstahl und Federstahl für E in t/cm^2 der Reihe nach 2000, 2150, 2200, 2200 und für σ_P in t/cm^2 bzw. 1,5, 2,0, 2,5, 6,0, so erhalten wir, wenn wir für den Schlankheitsgrad, der der Proportionalitätsgrenze entspricht, das Zeichen α_g setzen und als Grenzschlankheit bezeichnen, für die Grenzschlankheiten der angegebenen Stoffe die beziehungsweise Werte $\alpha_g = 115, 103, 93, 60$. Wird z. B. ein doppelseitig eingespannter quadratischer Stab (Seitenlänge a) aus Flußstahl auf Knickung beansprucht, so ist die Grenzschlankheit 93. Wird die der Grenzschlankheit entsprechende freie Länge L als freie Grenzlänge L_g , die entsprechend zugeordnete Länge l_g als Grenzlänge schlechtweg eingeführt, so ergibt sich für unseren quadratischen Stab als freie Grenzlänge $L_g = 93 \frac{a}{2 \sqrt{3}} = 27a$, und da $2 L_g = l_g$, als Grenzlänge schlechthin $l_g = 54a$. Stäbe, deren Länge l größer als $54a$ sind, fallen unter die Eulersche Theorie.

Tragen wir uns in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Abszissen den Schlankheitsgrad, als Ordinaten die Knickspannungen auf, so erhalten wir auf Grund der Formel (163) eine Kurve (kubische Hyperbel), welche die beiden Achsen zu Asymptoten hat (Abb. 164). Von dieser Kurve ist nur der von A nach rechts liegende Teil brauchbar, wenn A der Proportionalitätsgrenze σ_P zugeordnet ist. Für Schlankheitsgrade, die kleiner als die Grenzschlankheit α_g sind,

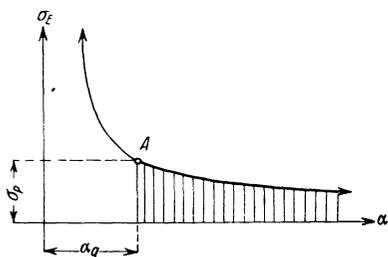


Abb. 164.

gehört die Beanspruchung auf Knickung anderen noch aufzustellenden Gesetzen.

Nr.	Profil	$\frac{l}{i_{min}}$	Knicklast aus dem Versuch in t	Berechnete Eulersche Knicklast in t	F cm ²	l cm
1	I	135	70,5	69,0	63,8	395,1
2	„	106	30,25	33,0	18,22	140
3	„	59	61	94,5	20,17	78,0
4	„	219	4,0	4,3	10,58	240,5
5	U	175	17,75	13,7	21,54	230,1
6	„	240	9,75	7,5	20,97	315,1
7	„	65,5	61,0	204	44,4	177,15
8	L	192	5,1	4,9	9,04	271,0
9	„	316	1,75	1,8	9,03	453,4

Bauschinger (L) hat systematische Knickversuche mit flußeisernen Stäben ($E = 2000 t/cm^2$) gemacht, welche die gebräuchlichen I-, □-, T-, Γ-Profile zeigten und entweder zwischen Spitzen oder stumpf gelagert waren. Für letztere stehen die Endquerschnittsflächen des Stabes wenigstens zu Anfang des Versuches unmittelbar mit den die Druckkräfte übertragenden Preßplatten der Festigkeitsmaschine in Berührung. Einige der Resultate, die sich bei Spitzenlagerung ergaben, sind in obiger Tabelle wiedergegeben, in der die Länge l

der Entfernung der beiden Endquerschnittsflächen (nicht der Spitzen) gleichkommt.

Infolge der unvermeidlichen Exzentrizitäten der Kraft und des Einflusses der ursprünglichen Stabkrümmung (Seite 195) zeigten sich Durchbiegungen bei Belastungen, die weit unter der Knicklast lagen. Letztere selbst bestimmte Bauschinger daraus, daß bei Konstantbleiben der Last die Zeiger der zur Messung der größten Durchbiegungen dienenden Einrichtung (hierzu könnte z. B. eine Meßuhr verwendet werden, Seite 162) in rasche Bewegung kamen. Aus der Tabelle ersieht man, daß bei den Versuchen 3 und 7 keine Übereinstimmung zwischen der aus dem Versuch abgeleiteten Knicklast und der nach der Formel (161 a) berechneten Eulerschen Knicklast besteht. Das rührt daher, daß der Schlankheitsgrad dieser Stäbe weit unter der Grenzschlankheit α_g , die bei Spitzenlagerung gleich $\frac{l_g}{i_{\min}}$ ist (siehe oben), liegt. Bei den Versuchen

1, 4, 8, 9 stimmt das Versuchsergebnis praktisch völlig mit der Theorie überein. Größere Differenzen zeigen sich nur bei den Versuchen 2, 5, 6. Bei Versuch 2 liegt der Schlankheitsgrad sehr nahe der Grenzschlankheit und bei den Versuchen 5 und 6 könnte der Grund der Abweichung vielleicht in der zu großen Stablänge liegen, die bei Berechnung des Eulerschen Wertes eingesetzt wurde. Die an den Enden anzubringenden Schuhe samt den an ihnen sitzenden Spitzen wirken nämlich im Sinne einer Versteifung, d. h. einer Verkürzung der freien Länge des Stabes. Diese Versteifung wirkt sich im Versuch mit einer Vergrößerung der Knicklast aus. Besonders bemerkenswert ist die Schlußfolgerung, die Bauschinger aus seinen Versuchen zog, indem er sagte, daß „vielleicht“ die Elastizitätsgrenze (worunter er die Proportionalitätsgrenze meinte) maßgebend sei für die Anwendbarkeit der Eulerschen Formeln. Schließlich sei noch erwähnt, daß Bauschinger bei stumpfer Auflagerung $L = 0,5 l$ setzte, was, wie man heute weiß, als für die Größe der Knicklast zu günstig, nicht der Wirklichkeit entsprechen kann. Vielmehr ist für die genannte Auflagerung eher $L = 0,7 l$ in die allgemeine Formel für die Knickspannung σ_E einzusetzen.

Für Stoffe, die dem Hookeschen Gesetze überhaupt nicht folgen, wie z. B. für Steine und spröde Metalle, kann die Eulersche Theorie überhaupt nicht gelten.

Höchstens könnte man davon reden, daß die Grenzschlankheit einer Spannung entspricht, bis zu welcher sich der Stoff annähernd nach dem Hookeschen Gesetze verhält. Bach (L) hat diesbezügliche Versuche mit 45 Tage alten quadratischen Betonsäulen von $a = 32$ cm Seitenlänge und verschiedenen Höhen h gemacht. Wenn man auf Grund der Versuchsergebnisse in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Abszissen das Verhältnis $\frac{h}{a}$, als Ordinaten die Kraft pro

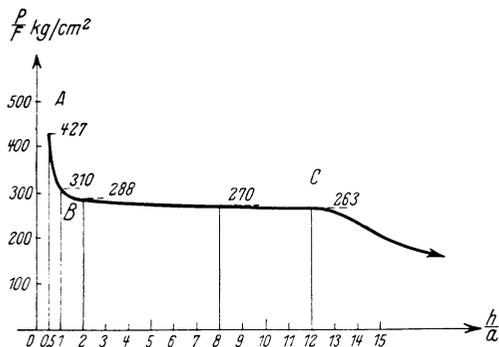


Abb. 165. Knickkurve für Beton (nach C. Bach).

Flächeneinheit aufträgt, welche den Bruch der Betonkörper herbeiführt, so erhält man die Kurve ABC in Abb. (165). Den Bereich vom Punkte B (Würfeldruckfestigkeit, d. i. 310 kg/cm^2) bis zum Punkte C nennt Bach den der Säulenfestigkeit. Für $\frac{h}{a} \geq 12$ ist das eigentliche Gebiet der Knickfestigkeit oder des

labilen Gleichgewichtes erreicht, in dem die Kurve, welche die Abszissenachse zur Asymptote besitzt, bemerkenswert abfällt¹.

Als besonders wichtig zur Aufklärung der Verhältnisse für den Fall, als die Knickspannung die Proportionalitätsgrenze überschreitet, und damit im Zusammenhange für die Bestimmung der Querschnittsdimensionen eines Stabes bei gegebener auf Knickung beanspruchender Kraft und gegebener Länge des Stabes haben sich die Versuche von L. v. Tetmayer (L) erwiesen. Die Versuche erstrecken sich auf Bauholz (Rottanne, Weißtanne, Föhre, Lärche, Eiche), Schweißeisen, Gußeisen und Flußeisen. Die Stäbe waren teils zwischen Spitzen, teils stumpf aufgelagert. Als Versuchslänge wurde die Länge der Stäbe zwischen den Spitzen, als reduzierte Länge für die Flächenlagerung die halbe Stablänge (bei Gußeisen etwas größer, nämlich $L = 0,526 l$) angenommen, was den wahren Verhältnissen, wie bereits oben angedeutet, nur annäherungsweise entsprechen kann. Die Prüfung erfolgte bei horizontaler Lage der Stäbe, das Eigengewicht und die durch es bewirkten Durchbiegungen wurden durch Aufhängung der Stäbe in vertikaler Richtung aufgehoben. Im folgenden sind die Versuchsergebnisse zusammengestellt:

a) **Bauholz.** Der Schlankheitsgrad der rechteckigen oder quadratischen Querschnitt besitzenden Balken wechselte zwischen $\alpha = 1,7$ und $\alpha = 190$. Die Ergebnisse zeigten eine starke Streuung, wie bei so inhomogenem Material wie Holz und in Anbetracht der verschiedenen den Versuchen unterworfenen Holzsorten zu erwarten war. Durchschnittlich ergab sich, daß für

$$a) \quad \alpha > 100 \text{ die Eulersche Formel } \sigma_E = \frac{987}{\alpha^2} t/cm^2 \quad (165)$$

entsprechend dem mittleren Elastizitätsmodulus $E = 100 t/cm^2$ als zutreffend angesehen werden kann. Rechnet man für $\alpha = 100$ auf Grund der Formel (164a) die Proportionalitätsgrenze σ_P auf Druck aus, so findet man $\sigma_P = 98,7 \text{ kg/cm}^2 \doteq 100 \text{ kg/cm}^2$. Dieser Wert ist etwa der kleinste Wert der durch Versuche erhobenen Proportionalitätsgrenzen auf Druck parallel zur Holzfaser für die oben angegebenen Holzsorten im lufttrockenen Zustande des Holzes.

b) Für $\alpha < 100$ ist nach den Versuchsergebnissen die Eulersche Formel nicht mehr anwendbar und folgt dann die Knickspannung, die wir zu Unterscheidungszwecken jetzt mit σ_K bezeichnen wollen, dem rein empirischen Tetmayerschen Geradliniengesetz

$$\sigma_K = 0,293 - 0,00194 \alpha t/cm^2. \quad (165a)$$

Für $\alpha = 100$ wird σ_E aus Formel (165) gleich σ_K aus Formel (165a).

Solange die Eulersche Formel gültig ist, war der Einfluß von Astknoten gering, die Durchbiegungen hatten vorwiegend elastischen Charakter, Gefügestörungen kamen bis zur Erreichung der Knicklast kaum vor. Für $\lambda < 100$ hatten die Durchbiegungen vorwiegend unelastischen Charakter, der Einfluß der Astknoten auf das Ergebnis war bedeutend, und es zeigten sich während des Versuches Gefügestörungen ineinanderpressender Holzfasern usw.

b) **Schweißeisen.** Die Versuche wurden mit Balken mit den gebräuchlichen Profilen vorgenommen. Solange a) $\alpha \geq 112$ war, konnte die Eulersche Formel

$$\sigma_E = \frac{19740}{\alpha^2} t/cm^2 \quad (166)$$

¹ Siehe hierzu auch E. Elwitz: Die Knickfestigkeit von Baugliedern aus Gußeisen, Eisenbeton in Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1921, H. 236.

entsprechend dem Elastizitätsmodul $E = 2000 \text{ t/cm}^2$ bestätigt werden. Dem Wert $\alpha = 112$ ist nach (164a) eine Proportionalitätsgrenze auf Druck von 1570 kg/cm^2 zugeordnet, die gegenüber den wahren Verhältnissen zu niedrig wäre. Für b) $\alpha \leq 112$ wurde aus den Versuchen das Geradliniengesetz

$$\sigma_K = 3,03 - 0,0129 \alpha \text{ t/cm}^2 \quad (166a)$$

abgeleitet.

c) Flußeisen. Die Versuche wurden mit den gewöhnlichen Profilträgern aus verschiedenen Flußeisensorten vorgenommen. Es ergab sich die Notwendigkeit, Flußeisen mit dem Elastizitätsmodulus $E = 2150 \text{ t/cm}^2$ und einer Zugfestigkeit von weniger als etwa $4,5 \text{ t/cm}^2$ zu sondern von dem stahlartigen Flußeisen mit $E = 2250 \text{ t/cm}^2$ und einer Zugfestigkeit, welche etwa $4,5 \text{ t/cm}^2$ übersteigt.

1. Flußeisen mit $E = 2150 \text{ t/cm}^2$ und $K_z < 4,5 \text{ t/cm}^2$. Solange a) $\alpha \geq 105$ wurde die Eulersche Formel

$$\sigma_E = \frac{21220}{\alpha^2} \text{ t/cm}^2 \quad (167)$$

bestätigt. Der Grenzschlankheitsgrad 105 entspricht einer Proportionalitätsgrenze $\sigma_P = 1925 \text{ kg/cm}^2$. Dieser Wert ist abermals zu klein, da für die verwendeten Flußeisensorten σ_P im Mittel etwa 2500 kg/cm^2 war. Für b) $\alpha \leq 105$ fand Tetmayer wieder das Geradliniengesetz

$$\sigma_K = 3,1 - 0,0114 \alpha \text{ t/cm}^2 \quad (167a)$$

bestätigt.

2. Stahlartiges Flußeisen mit $E = 2240 \text{ t/cm}^2$ und $K_z > 4,5 \text{ t/cm}^2$. Für a) $\alpha \geq 105$ ist die Eulersche Formel

$$\sigma_E = \frac{22200}{\alpha^2} \text{ t/cm}^2 \quad (167')$$

gültig. Der Grenzlänge entspricht die zu kleine Proportionalitätsgrenze von $\sigma_P = 2013 \text{ kg/cm}^2$. Für b) $\alpha \leq 105$ ist das Geradliniengesetz in der Form

$$\sigma_K = 3,21 - 0,0116 \alpha \text{ t/cm}^2 \quad (167' a)$$

verwendbar.

d) Gußeisen. Für diesen Stoff, der dem Hooke'schen Gesetze nicht folgt, ist nur eine annäherungsweise Bestätigung der Eulerschen Formel im oben angegebenen Sinne zu erwarten. Der Versuche wurden mit Rohren und Vierkantstäben aus mehreren Gußeisensorten unternommen. Für a) $\alpha > 80$ konnte die Eulersche Formel

$$\sigma_E = \frac{9870}{\alpha^2} \text{ t/cm}^2 \quad (168)$$

mit $E = 1000 \text{ t/cm}^2$ ziemlich gut bestätigt werden. Dem $\alpha = 80$ entspricht eine Knickspannung von $\sigma_E = 1544 \text{ kg/cm}^2$, bis zu der demnach das σ - e -Schaubild für Druck als geradlinig aufgefaßt wurde. Für b) $\alpha < 80$ konnte das Geradliniengesetz nicht mehr als richtig angenommen werden. An seine Stelle muß nach Tetmayer das parabolische Gesetz

$$\sigma_K = 7,76 - 0,12 \alpha + 0,00053 \alpha^2 \text{ t/cm}^2 \quad (168a)$$

treten.

Tragen wir uns parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems als Abszissen die Werte α , als Ordinaten die zugehörigen Knickspannungen σ_E bzw. σ_K in t/cm^2 auf, so erhalten wir für alle untersuchten Stoffe für die Grenzschlankheit eine Unstetigkeit der Richtungstangenten der betreffen-

den Kurve. In Abb. 166 ist z. B. die $\sigma_{K,E} - \alpha$ -Kurve für Flußeisen mit $E = 2150 \text{ t/cm}^2$ aufgetragen, für welche die Unstetigkeit in A entsprechend den oben angegebenen Daten erscheint.

Diese Unstetigkeit, ferner die, von Gußeisen abgesehen, durchwegs zu kleinen Grenzsparnungen (in Abb. 166 sollte sich eigentlich die Eulersche Kurve bis zum Punkte A' fortsetzen, dem die mittlere Proportionalitätsgrenze $\sigma_P = 2,5 \text{ t/cm}^2$ entspricht), und die mangelhafte Angepaßtheit der $\sigma_K - \alpha$ -Kurven für kleine Werte von α an die Druckfestigkeit (die Werte dieser Festigkeit kommen, wenn wie folgerichtig die $\sigma_K - \alpha$ -Kurven im Gebiete der eigentlichen Druckfestigkeit geltend angenommen werden, zu klein heraus) müssen als der Erfahrung widersprechend vermerkt werden. Durch die Tetmayerschen Formeln wird die Widerstandsfähigkeit der untersuchten Stoffe, für Werte der Schlankheit, die kleiner

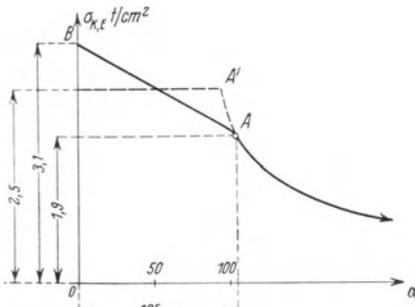


Abb. 166. Knickkurve für Flußeisen (nach Tetmayer).

als die angegebenen Grenzsparlichkeiten sind, gegenüber der Wirklichkeit unterschätzt, was, wenn dieselbe für den genannten Bereich auf die Bestimmung der notwendigen Ausmaße der Quersparitionen eines Stabes bei gegebener Länge angewendet werden (S. 437ff.), eine unnötige Vergrößerung derselben notwendig macht, die einem Überschuß an Sicherheit entspricht. Praktisch fällt das aber kaum ins Gewicht, so daß die Tetmayerschen Formeln mit gutem Recht als empirische Grundlagen des Verhaltens der betreffenden Stoffe gegenüber Beanspruchung auf Knickung angesehen werden.

Engesser (L) hat für Knickspannungen jenseits der Proportionalitätsgrenze eine Knickformel auf Grund theoretischer Erwägungen aufgestellt, welche durch Versuche von T. v. Kármán (L) für Martinsstahl gut bestätigt wurden.

Zur Herleitung der Engesserschen Formeln — wir gehen hier den von Kármán betretenen Weg — wird vorausgesetzt, daß der Stab dann, wenn die Knickspannung σ_K erreicht wurde, eine kleine Durchbiegung besitzt, deren zugehörige Biegunssparnungen sich der Knickspannung überlagern. Ferner wird angenommen, daß 1. die Biegunssparnungen oberhalb der Proportionalitätsgrenze mit den ihnen entsprechenden Dehnungen (Quetschungen) in einem Zusammenhang stehen, der aus dem σ - e -Schaubild für Zug- bzw. Druckbeanspruchung des Stabes entnommen werden kann; 2. die Quersparnisse auch oberhalb der Proportionalitätsgrenze bei kleinen Biegunssparnungen eben bleiben. Für die folgende Betrachtung legen wir den konkreten Fall der Beanspruchung eines einseitig eingespannten Stabes auf Knickung nach Abb. 80, Seite 194 zugrunde. Dieselbe bleibt für alle Grenzbedingungen gültig. Tragen wir für einen beliebigen

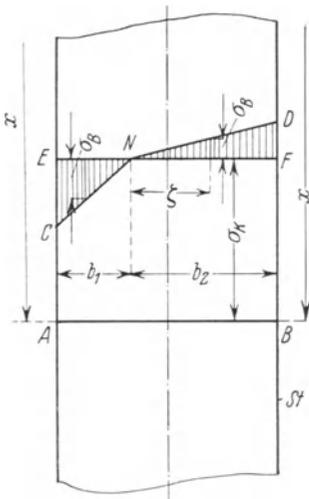


Abb. 167.

Querschnitt AB (Abb. 167), der in der Entfernung x vom oberen Stabende liegt, von den Punkten des Querschnittes normal zu denselben die Spannungen auf, so erhalten wir das Schaubild $ABDNC$, in welchem $ABEF$ den über den ganzen Querschnitt gleichförmig verteilten Knickspannungen, $CENFD$ den Biegunssparnungen σ_B entspricht. N sei die Projektion der nicht mit einer Schwerachse des Querschnittes zusammenfallenden Nulllinie auf die Papierebene, DF ist die größte Biegunssparnung, EC die größte Biegunssparnung. Infolge der Biegunssparnungen werden die Knickspannungen herabgesetzt, was einer Entlastung der betreffenden Fasern des Stabes von

der Knickspannung auf kleinere Spannungswerte gleichkommt. Bei dieser Entlastung gehen die Zahlenwerte der infolge der Knickspannungen vorhanden gewesenen Quetschungen um den Betrag der Zahlenwerte der federnden Quetschungen zurück. Die Biegungs-Druckspannungen erhöhen die Zahlenwerte der Knickspannungen entsprechenden Quetschungen um einen entsprechenden Betrag. Aus dem σ - e -Schaubild des Stoffes, aus dem der Stab besteht, ist der Zusammenhang zwischen den Druckspannungen σ und den Quetschungen e oberhalb der Proportionalitätsgrenze ersichtlich, der analytisch durch

$$\sigma = f(e) \tag{a}$$

zum Ausdrucke kommt. Infolge der zusätzlichen Biegungsspannungen können wir für die totalen Spannungen

$$\sigma + \Delta\sigma = f(e + \Delta e) = f(e) + \frac{df(e)}{de} \Delta e = \sigma_K + \frac{d\sigma}{de} \Delta e \tag{b}$$

bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung als Δe schreiben. Auf der Seite der zusätzlichen Biegungs-Druckspannungen ist $\frac{d\sigma}{de}$ mit dem der Knickspannung zukommenden Elastizitätsmodulus, den wir mit E_2 bezeichnen wollen, zusammenfallend, und Δe ist positiv, wenn σ_K und σ positiv gezählt werden, auf der Seite der zusätzlichen Biegungs-Zugspannungen ist Δe negativ, und $\frac{d\sigma}{de}$ bedeutet den Elastizitätsmodulus (Seite 151), der den federnden Quetschungen bei teilweisem Belastungsrückgang zukommt. Derselbe ist nach einer frühzeitig gefundenen Gesetzmäßigkeit, die von v. Gerstner zuerst ausgesprochen wurde (L), und nach ihm als Gerstnersches Gesetz bezeichnet wird, gleich dem Elastizitätsmodulus E_1 auf Druck unterhalb der Proportionalitätsgrenze. Nachdem nach Seite 246 $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\rho_y}$ und für eine Faser in der Entfernung ζ von der Nullinie $\Delta dx = -\zeta dx$ mit dx als Verdrehungswinkel zweier unendlich benachbarter um dx voneinander entfernter Querschnitte und ρ_y als Krümmungsradius einer Faser in der Ebene zx , so wird $\frac{\Delta dx}{dx} = \Delta e = -\frac{\zeta}{\rho_y}$. Das Gleichgewicht erfordert die Erfüllung der Bedingungen $\int_F \sigma_B df = 0$ und $\int_F \sigma_B \zeta df = M_{By}$, worin die Integrale über die Querschnittsfläche zu nehmen sind (siehe Punkt 4). Nun ist nach obigem auf der Druckseite $\sigma_B = \frac{d\sigma}{de} \Delta e = -E_2 \frac{\zeta}{\rho_y}$, auf der Zugseite $\sigma_B = -E_1 \frac{\zeta}{\rho_y}$, und daher gehen die Gleichgewichtsbedingungen in

$$\int_{F_2} \frac{E_2 \zeta}{\rho_y} df + \int_{F_1} \frac{E_1 \zeta}{\rho_y} df = 0 \quad \text{und} \quad \int_{F_2} \frac{E_2 \zeta^2 df}{\rho_y} + \int_{F_1} \frac{E_1 \zeta^2 df}{\rho_y} = -M_{By} \tag{c}$$

über, worin die Integrale über die den Biegungs-Druckspannungen bzw. den Biegungs-Zugspannungen entsprechenden Teilflächen der Querschnittsflächen zu nehmen sind. Da ρ_y und $E_{1,2}$ bei kleinen Durchbiegungen über den Querschnitt als konstant zu betrachten sind, so gehen die Gleichungen (c) in

$$E_2 S_2 + E_1 S_1 = 0 \tag{d} \quad \text{und} \quad E_2 J_2 + E_1 J_1 = -M_{By} \rho_y \tag{e}$$

über. Darin stellen S_1 und S_2 die statischen Momente, J_2 und J_1 die Trägheitsmomente der Teilflächen des Querschnittes, bezogen auf die Nullinie als Achse, vor. Die Bedingung (d) bestimmt die Lage der Nullinie im Querschnitt, aus (e) folgt die Krümmung

$$K_y = \frac{1}{\rho_y} = -\frac{M_{By}}{E_2 J_2 + E_1 J_1} = \frac{d^2 z}{dx^2}$$

und damit, wenn bei zentrisch aufgebracht gedachter Last $M_{By} = +Pz$ gesetzt wird, als Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{Pz}{E_2 J_2 + E_1 J_1} \tag{f}$$

Dieselbe wird mit der Gleichung (e) auf Seite 353 identisch, wenn wir an Stelle von EJ_y den Ausdruck $E_2 J_2 + E_1 J_1$ treten lassen. Aus der zitierten Gleichung folgte als Bedingung für die kleinste Knicklast $\cos(\lambda l) = 0$, $\lambda l = \frac{\pi}{2}$ usw., worin $\lambda = \sqrt{\frac{P}{EJ_y}}$ bedeutete. Nunmehr

haben wir statt λ den Wert $\sqrt{\frac{P}{E_2 J_2 + E_1 J_1}}$ zu setzen, d. h. die kleinste Knicklast folgt mit

$$P = P_K = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E_2 J_2 + E_1 J_1}{l^2}. \quad (169)$$

Allgemein werden wir für beliebige Grenzbedingungen

$$\sigma_K = \pi^2 \cdot \frac{E_2 J_2 + E_1 J_1}{F L^2} = \frac{\pi^2 T J_{\min}}{F L^2} = \frac{\pi^2 T}{\alpha^2} \quad (170)$$

schreiben können, worin

$$T = \frac{E_2 J_2 + E_1 J_1}{J_{\min}} \quad (171)$$

als Knickmodul bezeichnet wird und J_{\min} sich auf die Achse des Querschnittes bezieht, der das kleinste Trägheitsmoment der Querschnittsfläche zukommt, während J_1 und J_2 sich auf eine zu dieser Achse parallele Achse beziehen, deren Lage aus (d) bestimmt wird. Die Formel (170) ist vollkommen ähnlich jener gebaut, welche unterhalb der Proportionalitätsgrenze gültig ist, nur tritt jetzt an Stelle des Elastizitätsmodulus E der Knickmodul T , der in den Elastizitätsmodulus E übergeht, wenn $E_1 = E_2 = E$ gesetzt wird. Der Knickmodul ist selbst von der Knickspannung σ_K abhängig, da in ihm die Größe E_2 enthalten ist, die mit σ_K veränderlich ist. Damit hängt auch zusammen, daß z. B. für einen Stab mit eingespannten Enden die Knicklast im unelastischen Gebiete nicht so wie im elastischen viermal so groß ist als dann, wenn der Stab zwischen Spitzen gelagert ist. Nach v. Kármán ergibt sich für ein durchgerechnetes Beispiel, bei dem $\frac{l}{t_{\min}} = 100$ war, das Verhältnis der Knickspannungen bei eingespannten Enden zu jener bei Spitzenlagerung nicht 4, sondern 1.51. Ferner ist nach Formel (170) die Knickspannung im unelastischen Gebiet unter sonst gleichen Umständen, d. h. bei gleichem Material, nicht nur von der Schlankheit α , sondern, wenn auch, wie leicht nachzuweisen ist, im geringen Grade von der Querschnittsform selbst abhängig.

v. Kármán machte Versuche mit Stäben von rechteckigem Querschnitt aus Martinsstahl, dem ein Elastizitätsmodulus E auf Druck von 2170 t/cm², eine Zugfestigkeit von 6800 kg/cm², eine Bruchdehnung $\varphi_z = 16,7\%$ und eine Querschnittsverminderung beim Bruch $\psi_z = 36\%$ zukam. Die Stäbe, deren Längen zwischen 81 mm und 837 mm schwankten, wurden an ihren Enden stumpf in mit ihnen nicht verbundenen Schuhen gelagert, in denen die Stäbe während des Versuches durch Keile mit Bezug auf die Kraftangriffslinie fein eingestellt werden konnten, um die Exzentrizität derselben möglichst auf Null zu bringen. Diese Einrichtung ist besonders wichtig, da die zentrale Übertragung der Kraft eine Voraussetzung für die Möglichkeit des Nachweises der Richtigkeit der Eulerschen Formeln bzw. der Formel (170) ist. Die Schuhe waren außen nicht mit Spitzen, sondern mit zur Achse des minimalen Trägheitsmomentes parallel laufenden Schneiden versehen, was eine gegenüber der Spitzenlagerung bessere Druckverteilung und geringere Abplattung der Schneiden bei größeren Kräften und daher bessere Einhaltung der Grenzbedingungen zur Folge hat. Als freie Länge wurde nicht die Länge des Stabes zwischen den Schneiden, sondern eine die Steifigkeit der Stabenden berücksichtigende, etwas kleinere Länge angenommen, die näherungsweise berechnet wurde.

Für den rechteckigen Querschnitt lautet die Gleichung (d), wenn b_1 und b_2 die Abschnitte bestimmen, in welchen die Breite b des Rechteckes durch die Nulllinie geteilt wird und h die Höhe des Rechteckes vorstellt $E_2 b_2^3 \frac{h}{2} = E_1 b_1^3 \frac{h}{2}$ oder $E_2 b_2^3 = E_1 b_1^3$, die

mit $b_1 + b_2 = b$ zusammengefaßt die Abschnitte b_1 und b_2 mit $b_1 = \frac{\sqrt[3]{E_2}}{\sqrt[3]{E_1} + \sqrt[3]{E_2}} b$ und

$b_2 = \frac{\sqrt[3]{E_1}}{\sqrt[3]{E_1} + \sqrt[3]{E_2}} b$ festlegt. Damit berechnet sich der Knickmodul mit

$$T = \frac{E_2 \frac{1}{12} b_2^3 h + E_1 \frac{1}{12} b_1^3 h}{\frac{1}{12} b^3 h} = \frac{E_1 E_2}{\sqrt[3]{E_1} + \sqrt[3]{E_2}}.$$

Die Werte $E_1 = E$ und E_2 werden aus Druckversuchen ermittelt, E_1 ist konstant und E_2 kann aus dem σ - ϵ -Schaubild auf Druck als Funktion der Spannung dargestellt werden. Damit kann auch T und unter Voraussetzung des Zutreffens von (170) aus dieser Gleichung α als Funktion der Spannung erschlossen werden. Engesser hat den Knickmodul T

durch Vergleich der Formel (170) mit den empirischen Formeln von Tetmayer (siehe oben) unmittelbar als Funktion von α oder von σ_K dargestellt. Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Werte α als Abszissen und die Spannung σ_K als Ordinaten auf, so erhält man ein Schaubild, das durch den Versuch geprüft werden kann. Es nimmt nach v. Kármán für Martinsstahl die in Abb. 168 dargestellte Gestalt an. Für $\alpha \leq 90$, d. h. wenn $\sigma_E = \sigma_K$ unter der Elastizitätsgrenze liegt, die mit der Proportionalitätsgrenze zusammenfallend angenommen werden kann, gilt die Eulersche Formel, oberhalb der Grenze, d. h. für $\alpha > 90$ ergibt sich eine Kurve, die sich stetig an die Eulersche Kurve anschließt, für kleine Werte von α geht die Knickspannung in die Druckfestigkeit des Stabes über. Die in Abb. 168 dargestellte berechnete theoretische Kurve konnte durch die Kármánschen Versuche sehr gut bestätigt werden. Die aus denselben abgeleiteten Knickspannungen lagen sämtlich zwischen dieser idealen Grenzkurve für die Exzentrizität Null der Kraft und einer zweiten, für die Exzentrizität 0,0056 geltenden Kurve, die theoretisch ähnlich wie die Grenzkurve hergeleitet wird, und sehr nahe der idealen Grenzkurve liegt. Es gibt nämlich dann, wenn eine Exzentrizität der Kraft von vornherein vorhanden ist, im unelastischen Gebiete, ähnlich so wie im elastischen, für jede Exzentrizität ζ eine Kurve (Abb. 159), deren Punkte durch die Kräfte P oder die ihr entsprechenden Druckspannungen und die ihr zugehörigen größten Ausbiegungen f_z bestimmt sind. Die Kurven gleicher Exzentrizität im unelastischen Gebiete zeigen die Eigentümlichkeit, daß für einen aus ihnen zu entnehmenden Wert f_z die Kraft P (Druckspannung) einen Höchstwert zeigt, der für den gegebenen Schlankheitsgrad charakteristisch ist. Auf diese Weise können in der Abb. 168 auch Kurven, die die Zuordnung der Höchstlasten zum Schlankheitsgrad bei vorgegebener Exzentrizität zeigen, eingetragen werden. Näheres hierüber kann in der angegebenen Abhandlung von Kármán nachgelesen werden.

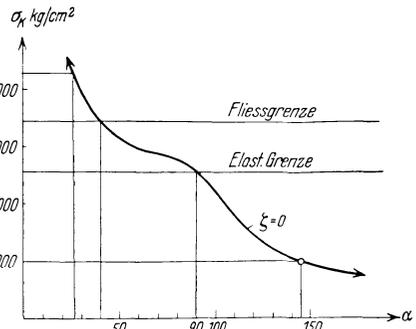


Abb. 168. Knickkurve für Martinsstahl (nach v. Kármán).

23. Fortsetzung. Einfluß einer ursprünglichen Stabkrümmung, praktische Knicklast. Biegung und Druck bei langen Stäben.

Wenn bei Beanspruchung von langen Stäben auf exzentrischen Druck die Exzentrizität der Kraft sehr klein wird, so nähert sich dieselbe jener auf Knickung ohne mit derselben identisch zu werden, d. h. ohne daß ein eigentlicher labiler Gleichgewichtszustand erreicht werden könnte. Dasjenige was man als Beanspruchung auf Knickung in der Regel anspricht, wird, infolge der unvermeidlichen Exzentrizität, also in Wirklichkeit eine Beanspruchung auf exzentrischen Druck sein, die zur Folge hat, daß dann, wenn die äußere Kraft gleich der Knicklast wird, bereits mehr oder weniger ansehnliche Ausbiegungen erreicht sein werden. Die gewöhnliche im Bereiche der elastischen Deformationen angewendete Näherungstheorie liefert sogar für die Knicklast unendlich große Ausbiegungen (Seite 351).

Einen ähnlichen Einfluß wie eine ursprünglich nicht gewollte Exzentrizität der Kraft, hat auch eine vor Aufbringung der Belastung bereits vorhandene sehr kleine Stabkrümmung. A, B in Abb. 169 sei der ursprüngliche etwas gekrümmte Stab, dessen Stabachse mit Bezug auf das eingezeichnete Koordinatensystem nach einer Sinuslinie gebogen sein soll, die die Gleichung

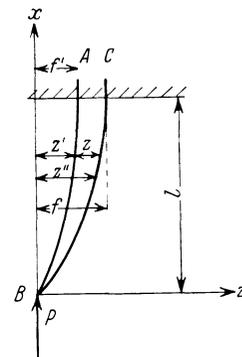


Abb. 169.

$$z' = f' \sin \frac{\pi x}{2l} \tag{a)}$$

besitze mit f' als sehr klein gedachtem Biegungspfeil. B, C sei die unter dem Einfluß einer zentrisch aufgebrachtten Last P entstehende deformierte Stabachse, die wir, um besser vergleichen zu können, mit ihrem Endpunkt B mit dem Endpunkt B der undeformierten Stabachse zusammenfallend darstellen. Für sehr kleine ursprüngliche Krümmungen des Stabes können wir die Differentialgleichung der elastischen Linie in der aus der Biegungstheorie gerader Stäbe bekannten Form

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{P(z' - z)}{E J_y} = -\lambda^2 \left[f' \sin \frac{\pi x}{2l} + z \right] \quad (b)$$

mit $z = z'' - z'$ ansetzen. Diese nicht homogene lineare Differentialgleichung besitzt die Lösung $z = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) - \frac{f'}{1 - \left(\frac{\pi}{2l\lambda}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{2l}$, deren Integrationskonstante A und B den Grenzbedingungen $x = 0, z = 0$ und $x = l, \frac{dz}{dx} = 0$ genügen müssen. Damit erhalten wir $B = 0$ und

$$0 = A \lambda \cos(\lambda l) - \frac{f'}{1 - \left(\frac{\pi}{2l\lambda}\right)^2} \quad \text{d. h.} \quad A = \frac{f'}{\left[1 - \left(\frac{\pi}{2l\lambda}\right)^2\right] \lambda \cos(\lambda l)}$$

Die Gleichung der elastischen Linie hat daher die Form

$$z = \frac{f'}{1 - \left(\frac{\pi}{2l\lambda}\right)^2} \left[\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda \cos(\lambda l)} - \sin \frac{\pi x}{2l} \right], \quad (c)$$

und die größte Durchbiegung f wird

$$f = \frac{f'}{1 - \left(\frac{\pi}{2l\lambda}\right)^2} \left[\frac{1}{\lambda} \operatorname{tg}(\lambda l) - 1 \right]. \quad (d)$$

Wird $\lambda l = \frac{\pi}{2}$ d. h. $P = P_E = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E J_y}{l^2}$ so werden z und f unendlich groß. Wir schließen, daß bei ursprünglicher Stabkrümmung bereits vor Erreichen der Knicklast Deformationen vorhanden und die Proportionalitätsgrenze des Stabes erreicht sein müssen (siehe dagegen S. 353).

In Anbetracht der unvermeidlichen Exzentrizität der Kraft und der ursprünglichen Stabkrümmung sind Vorschläge gemacht worden an Stelle der Eulerschen „Knicklast“, die als theoretische bezeichnet wird, eine wirkliche oder praktische „Knicklast“ einzuführen, als welche diejenige Höchstlast definiert wird, die den Stab an die Proportionalitätsgrenze bringt. Diese Neueinführung ist deswegen nicht empfehlenswert, weil erstens die unvermeidliche Exzentrizität der Kraft und die ursprüngliche Stabkrümmung von vornherein nicht bekannt sind — man könnte sie höchstens abschätzen — weil zweitens die Berechnung der praktischen „Knicklast“, auf die wir gleich zu sprechen kommen werden ziemlich verwickelt ist, und weil drittens durch die Bezeichnungsweise die unrichtige Vorstellung geweckt werden könnte als sei die praktische „Knicklast“ wirklich einem labilen Gleichgewichtsfall entsprechend.

Die Berechnung der praktischen „Knicklast“ kann, wenn nur die abgeschätzte Exzentrizität der Kraft berücksichtigt werden soll, nach den Weisungen auf Seite 352 erfolgen. Die dortige Gleichung (c) könnte auch Verwendung finden, wenn es sich um Berechnung der praktischen Knicklast bei alleiniger Berück-

sichtigung der Stabkrümmungen handelte, nur wäre für $|\sigma_z|$ in Gleichung (c) an zitiert Stelle der Wert

$$|\sigma_z| = \left[\frac{P}{F} + \frac{P f}{J_y} z_a \right] \quad (e)$$

zu setzen, worin f die Bedeutung nach obiger Gleichung (d) besitzt, in der $\operatorname{tg}(\lambda l)$ in eine Reihe mit Beibehaltung von nur wenigen Gliedern entwickelt werden müßte. Soll die ursprüngliche Exzentrizität und Stabkrümmung bei Berechnung der praktischen „Knicklast“ berücksichtigt werden, so müßte in obiger Differentialgleichung (b) das Biegemoment infolge der Exzentrizität Berücksichtigung finden und dann in ähnlicher Weise vorgegangen werden, wie es bereits für alleinige Exzentrizität oder Stabkrümmung angedeutet wurde.

Der Erörterung des Einflusses der Beanspruchung auf die Knicklast schließt sich ohne Zwang jene der Beanspruchung eines geraden langen Stabes auf Biegung und Druck (Knickung) an, bei der die Durchbiegung des Stabes nicht mehr vernachlässigt werden kann, wenn es sich um die Berechnung der Biegemomente handelt. Der in Abb. 170 dargestellte einseitig eingespannte lange Stab sei durch die Kraft P auf Druck (Knickung) durch die Kraft Q auf Biegung beansprucht. Bei Berücksichtigung der Durchbiegungen bei Berechnung der Biegemomente lautet die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = - \frac{Pz + Qx}{E J_y}, \quad (f)$$

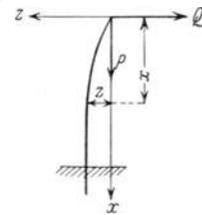


Abb. 170.

deren Lösung $z = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) - \frac{Qx}{P}$ ist. Auf Grund der Grenzbedingungen $x = 0, z = 0$ und $x = l, \frac{dz}{dx} = 0$ erhalten wir $B = 0$ und $0 = A \lambda \cos(\lambda l) - \frac{Q}{P}$ oder $A = \frac{Q}{P \lambda \cos(\lambda l)}$, somit als Gleichung der durchgebogenen Stabachse

$$z = \frac{Q}{P} \cdot \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda \cos(\lambda l)} - \frac{Qx}{P}, \quad (g)$$

und als größte Durchbiegung

$$f = \frac{Q}{P} \left(\frac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} - l \right). \quad (h)$$

Wird $\lambda l = \frac{\pi}{2}$ d. h. $P = P_E = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E J_y}{l^2}$ so werden die Durchbiegungen wieder wie oben bei ursprünglicher Stabkrümmung unendlich groß. Man spricht bei im Vergleich zu den Quersdimensionen sehr langen Stäben, dann wenn eine Beanspruchung wie die vorstehende vorliegt, auch häufig von einer Beanspruchung auf Biegung und Knickung. Damit soll zum Ausdrucke gebracht werden, daß bei einer verhältnismäßig kleinen Druckspannung, die weit unter der Druckfestigkeit und Biegezugfestigkeit liegen kann, bereits Deformationen eintreten können, die die Zerstörung des Materiales zur Folge haben können. Bei Bestimmung der nötigen Querausmaße des Stabes bei gegebener Länge desselben wird man also festsetzen müssen, daß die beanspruchende Druckkraft die Kraft bei der nach vorstehender Rechnung die Durchbiegungen unendlich groß werden, das ist die theoretische Knicklast mit Sicherheit nicht erreicht. Doch wird es im jetzigen Falle mehr empfehlenswert sein, festzustellen, wie groß die Kraft P sein müßte um die Proportionalitätsgrenze des Stabmateriales zu erreichen und diese Kraft als jene anzusehen, welche bei Beanspruchung auf Biegung und Knickung mit Sicherheit nicht erreicht werden darf. Die Berechnung dieser Kraft müßte ganz nach dem obigen Schema für Berechnung der praktischen

„Knicklast“ erfolgen. In der Beziehung (c) auf Seite 352 hätte man bei Beanspruchung von langen Stäben nach Abb. 170 $|\sigma_z| = \left| \frac{P}{F} + \frac{Ql + Pf}{J_y} z_a \right|$ zu setzen, worin f den oben für die größte Durchbiegung berechneten Wert bedeutet. In letzterem wäre $\text{tg}(\lambda l)$ wieder durch einige Glieder einer unendlichen Reihe darzustellen.

24. Labilitätserscheinungen bei Drillung und Druck und bei Drillung allein.

Wenn lange gerade Stäbe auf Drillung durch Momente M_D , deren Ebene normal zur Stabachse steht, und auf Druck durch Kräfte P beansprucht werden (Abb. 171), so gibt es ganz ähnlich wie bei Beanspruchung auf Knickung einen kritischen Wert des Drehungsmomentes, für den das Gleichgewicht labil wird, und die ursprünglich gerade Stabachse bei der geringsten Störung nach der Seite zu ausweicht. Dieses Ausweichen ist augenfällig bei Fäden zu beobachten die gedrillt werden, ohne daß eine axiale Kraft hinzukommt. Als letztere käme in diesem besonderen Falle naturgemäß nur eine Zugkraft in Frage, die erfahrungsgemäß das Ausweichen nach der Seite herabsetzen oder ganz verhindern kann.

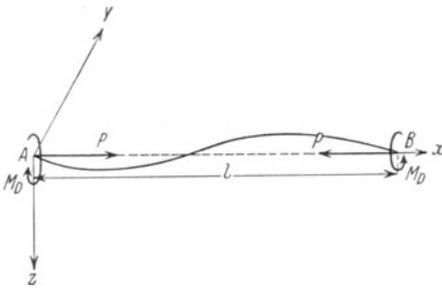


Abb. 171.

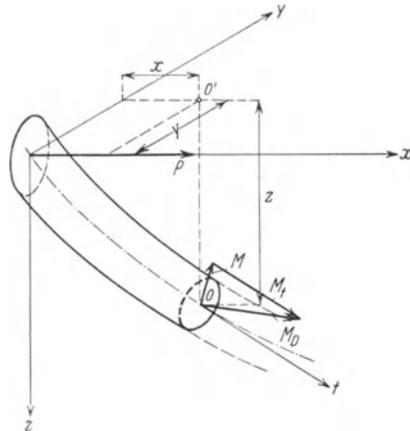


Abb. 171a.

Die allgemeine Theorie des labilen Gleichgewichtes für Beanspruchung auf Drillung von Stäben mit kreisförmigen Querschnitt bei hinzukommender Zug- oder Druckkraft wurde zuerst von Greenhill entwickelt.

Wir nehmen für den Stab von kreisförmigem Querschnitt wie im Falle der Knickung an, daß ein Ausweichen der Stabachse in eine zur geraden Achse benachbarte Lage bereits stattgefunden hat (Methode der Störung), und berechnen den kleinsten Wert M_E des Drillungsmomentes bei gegebener axialer Druckkraft P , für den die Ausbiegung möglich ist. Die Grenzbedingungen des Stabes AB sollen darin bestehen, daß für $x = 0$ und $x = l$ sowohl z als auch y gleich Null sein sollen, d. h. die Enden der gestörten Stabachse, die eine räumliche Kurve bilden möge, sollen wie bei einem zwischen Spitzen gelagerten Stab auf der x -Achse bleiben, die ihrerseits mit der ungestörten Stabachse zusammenfällt. Wir denken uns nunmehr den Stab in der gestörten Lage in der Entfernung x vom linken Auflager normal zur durchgebogenen Stabachse durchschnitten (Abb. 171a). Für das Gleichgewicht des rechten Stabteiles ist es notwendig, die im Schnittquerschnitt übertragenen, den Spannungen auf unendlich kleinen Flächenelementen entsprechenden Kräfte durch eine im Schwerpunkt wirkende Einzelkraft (Reduktionskonstante) und ein Moment (Reduktionsmoment) zu

ersetzen, dessen Vektor im allgemeinen schief gegen die Querschnittsebene stehen wird. Die genannte Einzelkraft muß gleich der Kraft P sein, die zum Querschnitt schief steht und das Moment muß gleich der geometrischen Summe aus dem Drillungsmoment und dem Bieugungsmoment der am Ende des Stabes wirkenden Kraft P mit Bezug auf den Schnittquerschnitt oder, genauer gesagt, mit Bezug auf den Schwerpunkt des Schnittquerschnittes sein. Das von M_D herrührende Moment zerlegen wir in ein Moment M_t , dessen Vektor normal zum Querschnitt also tangentiell an die Stabachsenkurve ist und ein Moment M , dessen Vektor parallel zur y - z -Ebene liegt. Das Moment M_t bewirkt die Torsion des Stabes, das Moment M und das von P herrührende Bieugungsmoment ist der Biegung des Stabes zugeordnet. Durch weitere Zerlegung des Momentes M in die beiden komponentalen Momente M_y und M_z gewinnen wir die Bieugungsmomente mit Bezug auf zwei durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehende, zur y - und z -Achse parallele Achsen. Die Tangente t im Schwerpunkt des Schnittquerschnittes an die durchgebogene Stabachse schließt mit den Koordinatenachsen x, y, z Winkel ein, deren Richtungskosinusse der Reihe nach $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ und $\frac{dz}{ds}$ sind, wenn ds ein Element der Stabachse und x, y, z die Koordinaten des Schwerpunktes des Schnittquerschnittes bedeuten. Das Moment M_t ist durch $M_t = \frac{M_D}{\frac{dx}{ds}} = M_D$ ausdrückbar. Die Momente M_y und M_z können dann offenbar

durch $M_y = M_D \frac{dy}{ds}$ und $M_z = M_D \frac{dz}{ds}$ dargestellt werden. Die von der Kraft P herrührenden Bieugungsmomente mit Bezug auf die durch den Schwerpunkt des Schnittquerschnittes parallel zur y - bzw. z -Achse gezogene Achsen sind durch Pz und $-Py$ darstellbar, so daß im ganzen die Bieugungsmomente mit Bezug auf die genannten Achsen die Größen

$$M_{By} = M_D \frac{dy}{ds} + Pz \quad (a) \quad \text{und} \quad M_{Bz} = M_D \frac{dz}{ds} - Py \quad (b)$$

besitzen. Die Beanspruchung des Stabes in der ausgebogenen Lage ist keine einfache, da eine solche auf räumliche schiefe Biegung, Druck, Schub und Torsion vorliegt. Die gegebenen Auseinandersetzungen sind nur dann als sehr annähernd richtig zu betrachten, wenn es sich um lange dünne Stäbe mit kleinen Ausbiegungen handelt. Zur Berechnung der durch die Bieugungsmomente hervorgerufenen Durchbiegungen können wir die Differentialgleichungen der Projektionen der elastischen Linie auf die xz - bzw. xy -Ebene nach den Gleichungen (117) und (117a) auf Seite 247 heranziehen. Ihnen zufolge wird

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{M_{By}}{EJ} = -\frac{M_D \frac{dy}{dx} + Pz}{EJ} \quad (c) \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{Bz}}{EJ} = \frac{M_D \frac{dz}{dx} - Py}{EJ}, \quad (d)$$

wenn J das Trägheitsmoment eines Kreisquerschnittes mit Bezug auf eine Schwerachse vorstellt und wir näherungsweise statt ds das Element dx einführen. Diese beiden Differentialgleichungen können auf zwei völlig gleichlautende lineare homogene Differentialgleichungen vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten dadurch zurückgeführt werden, daß wir z. B. aus der zweiten $\frac{dz}{dx} = \left[\frac{d^2y}{dx^2} EJ + Py \right] \frac{1}{M_D}$ berechnen und in die nach x differenzierte erste Gleichung $\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{M_D}{EJ} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EJ} \frac{dz}{dx} = 0$ einsetzen, wodurch wir die

Differentialgleichung

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \left[\frac{2P}{EJ} + \left(\frac{M_D}{EJ} \right)^2 \right] \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{P}{EJ} \right)^2 y = 0 \quad (e)$$

gewinnen. Auf ähnliche Weise können wir eine gleiche Differentialgleichung in der y durch z ersetzt ist, ableiten. Die Lösung der auf diese Weise gewonnenen zwei linearen Differentialgleichungen vierter Ordnung führt in bekannter Weise auf Kreisfunktionen mit je vier Konstanten, von welchen je zwei auf Grund der Notwendigkeit der Erfüllung der Ausgangsgleichungen (c) und (d) eliminiert werden können. Das schließliche Resultat ist

$$\left. \begin{aligned} y &= A \sin(ax + \alpha) + B \sin(bx + \beta) \\ z &= A \cos(ax + \alpha) + B \cos(bx + \beta), \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

worin $a = \frac{-M_D + \sqrt{M_D^2 - 4PEJ}}{2EJ}$ und $b = \frac{-M_D - \sqrt{M_D^2 - 4PEJ}}{2EJ}$, ferner A, B, α, β Integrationskonstante sind. Den oben angegebenen Grenzbedingungen zufolge müssen die Gleichungen

$$0 = A \sin \alpha + B \sin \beta, \quad 0 = A \cos \alpha + B \cos \beta$$

und

$$0 = A \sin(al + \alpha) + B \sin(bl + \beta), \quad 0 = A \cos(al + \alpha) + B \cos(bl + \beta)$$

erfüllt werden, die zur Bestimmung der Integrationskonstanten dienen. Setzen wir $B \sin \beta$ und $B \cos \beta$ aus den beiden ersten Bedingungen in die beiden letzten ein, so erhalten wir

$$A [\sin(al + \alpha) - \sin(bl + \alpha)] = 0, \quad A [\cos(al + \alpha) - \cos(bl + \alpha)] = 0.$$

Soll A nicht Null sein, so muß zur Befriedigung dieser Gleichungen

$$\sin(al + \alpha) = \sin(bl + \alpha) \quad \text{und} \quad \cos(al + \alpha) = \cos(bl + \alpha),$$

d. h.

$$al = bl + 2n\pi \quad n = 1, 2, \dots \quad (g)$$

sein. Führen wir, um den kleinsten kritischen Wert M_E des Drillungsmomentes zu erhalten, für den noch eine Ausbiegung möglich ist, in (g) $n = 1$ ein, so erhalten wir aus derselben nach Einsetzen der angegebenen Werte von a und b

$$\frac{M_E^2 + 4EJP}{(EJ)^2} = \frac{4\pi^2}{l^2} \quad \text{oder} \quad M_E = 2EJ \sqrt{\frac{\pi^2}{l^2} - \frac{P}{EJ}}. \quad (172)$$

Zu demselben Wert von M_E wären wir auch gekommen, wenn wir aus den Grenzbedingungen A eliminiert hätten, also von Gleichungen, die nur B enthalten, ausgegangen wären. Bei weiterer Verfolgung der Grenzbedingungen erhält man $A = B$ und $\alpha = \beta + n\pi$, $n = 1, 2, \dots$, so daß die Gleichung der ausgebogenen Stabachse unbestimmt bleibt, da z. B. A und β nicht gefunden werden können. Drückt man in den beiden Gleichungen (f) B und α durch A und β , ferner auf Grund der Gleichung (g) a durch b aus, so erhält man aus ihnen

$$\left. \begin{aligned} y &= A \left\{ \sin(bx + \beta) - \sin \left[\left(b + \frac{2n\pi}{l} \right) x + \beta \right] \right\}, \\ z &= A \left\{ \cos(bx + \beta) - \cos \left[\left(b + \frac{2n\pi}{l} \right) x + \beta \right] \right\}. \end{aligned} \right\}$$

Quadrieren und Addieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir nach leichter Umwandlung $y^2 + z^2 = 4A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l}$. Wir schließen, daß die gesuchte räumliche Linie eine Schraubenlinie auf einen Kreiszyylinder mit dem unbestimmt

bleibenden Radius A vorstellt, dessen Achse in der Entfernung A zur ursprünglich geraden Stabachse verläuft, und für den letztere eine Erzeugende ist. Eine weitere Bestimmung der Lage der Zylinderachse wäre erst dann möglich, wenn A auf Grund eines genaueren Ansatzes der Differentialgleichungen der elastischen Linien berechnet werden würde.

Setzen wir von vornherein $M_D = 0$ so folgt aus (172) die Eulersche Knicklast für P , setzen wir $P = 0$, so ergibt sich der Sonderfall

$$M_E = 2 E J \frac{\pi}{l}, \quad (172a)$$

für den M_E den kleinsten kritischen Wert des Drillungsmomentes bei reiner Drillung vorstellt. Wird in (172) die Kraft P negativ, d. h. tritt zur Beanspruchung auf Drillung eine Beanspruchung auf Zug hinzu, so wird der kritische Wert des Drillungsmomentes größer als dann, wenn der Stab auf Torsion und Druck bei gleichem Zahlenwerte von P erfolgt. Durch Ziehen eines Stabes bei gleichzeitiger Drillung kann demnach die Erreichung des labilen Gleichgewichtszustandes, hinausgeschoben werden. Labile Gleichgewichtszustände können, wie die Erfahrung lehrt, auch bei Beanspruchung auf Zug allein entstehen, wie dann, wenn Flußeisen bei dieser Beanspruchung in den Fließbereich kommt.

Eine allgemeine Theorie des labilen Gleichgewichtes gedrillter Stäbe für beliebigen Stabquerschnitt hat R. Grammel in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik Band 3, 1923 gegeben.

25. Kippen eines Stabes mit rechteckigem Querschnitt.

Die Erscheinung des Kippens eines einseitig eingespannten, im Verhältnisse zu den Querdimensionen langen Stabes, dessen Querschnitt ein schmales Rechteck ist, wurde auf Seite 195 geschildert. Wir wollen dieselbe jetzt rechnerisch verfolgen, und zwar auf Grund des von L. Prandtl (L) zuerst betretenen Weges¹.

Wir denken uns den Stab in der ausgekippten Lage (Abb. 81, Seite 195), die der ursprünglich geraden Lage benachbart sein soll und legen durch den Schwerpunkt des rechten Endquerschnittes ein rechtwinkeliges Koordinatensystem $x y z$, dessen x -Achse parallel zur unverbogenen Stabachse und dessen z -Achse entgegengesetzt der Richtung der Kraft P läuft. Im Abstände $0 l = x$ vom rechten Stabende denken wir uns den Stab durchschnitten, und zwar normal auf die verbogene Stabachse und für das Gleichgewicht des linken Stabteiles im Schwerpunkt O' des Schnittquerschnittes, der mit Bezug auf das Koordinatensystem $x y z$ die Koordinaten x, y und z besitzt, eine Einzelkraft gleich P und einen gegen die Querschnittsfläche schief stehenden Momentenvektor angebracht. Letzteren zerlegen wir wieder in einen Vektor \mathfrak{M}_t , der mit der Tangente t an die verbogene Stabachse zusammenfällt und in zwei Vektoren $\mathfrak{M}_{By'}$ und $\mathfrak{M}_{Bz'}$ welche in die y' - und z' -Achsen des Koordinatensystemes $y' z'$ fallen. Die Achsen y', z' sind mit den zentralen Trägheitshauptachsen des rechteckigen Querschnittes übereinstimmend. Das Moment M_t bewirkt die Drillung des Stabes und ist durch $M_t = - P y + P x \frac{dy}{ds}$ bestimmt, wobei $y = l z$ und $\frac{dy}{ds}$, mit ds als Linienelement der verbogenen Stabachse, den Winkel bedeutet, den die Tangente an der verbogenen Stabachse mit der y -Richtung einschließt. Die Momente $M_{By'}$, und $M_{Bz'}$, die der Biegung des Stabes zugeordnet sind, können wir genau genug mit $M_{By'} = P x \cos \psi$ und $M_{Bz'} = - P x \sin \psi$ festlegen, worin ψ den Winkel vorstellt, den die z' -Achse im Schnittquerschnitt mit der durch O' parallel zur

¹ Siehe hierzu auch A. u. L. Föppl: Drang und Zwang, II. München u. Berlin: R. Oldenbourg 1920.

z -Achse gelegten Achse einschließt. Dieser Winkel der als Funktion von x zu betrachten ist, wird dem Verdrehungswinkel des Querschnittes infolge der Drillungsbeanspruchung gleichgesetzt werden können. Stellen wir uns nunmehr ein Stabelement in der verbogenen Lage vor, das nur zwei aufeinander folgende Linienelemente der Stabachse enthält, so können wir auf dasselbe die Differentialgleichung der elastischen Linie in der bekannten Form, Gleichung (117) und (117a) auf Seite 247 zur Verwendung bringen, und zwar bezogen auf ein Koordinatensystem, das aus den Achsen y', z' und der Tangente t gebildet ist und seinen Ursprung im Schwerpunkt O' des einen Endquerschnittes des Stabelementes besitzt. Die Differentialgleichung für Durchbiegungen in der $z't$ - bzw. $y't$ -Ebene lauten daher

$$\frac{d^2 z'}{ds^2} = -\frac{M_{B y'}}{E J_{y'}} = -\frac{P x \cos \psi}{E J_{y'}} \quad (\text{a}) \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y'}{ds^2} = \frac{M_{B z'}}{E J_{z'}} = -\frac{P x \sin \psi}{E J_{z'}}, \quad (\text{b})$$

wofür wir auch in Anbetracht dessen, daß ψ sehr klein ist und wir eine zur ursprünglichen undeformierten Lage benachbarten Lage des Stabes voraussetzten

$$\frac{d^2 z'}{dx^2} = -\frac{P x}{E J_{y'}} \quad (\text{c}) \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y'}{dx^2} = -\frac{P x \psi}{E J_{z'}} \quad (\text{d})$$

schreiben können. Die Koordinaten y', z' für einen beliebigen Punkt des Querschnittes O' hängen mit dessen y, z -Koordinaten auf Grund der bekannten Transformationsgleichungen

$$y = y' \cos \psi - z' \sin \psi \doteq y' - z' \psi$$

und

$$z = z' \sin \psi + y' \cos \psi \doteq z' \psi + y'$$

zusammen, aus denen durch zweimalige Differentiation die Gleichungen

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 y'}{dx^2} - \frac{d^2 z'}{dx^2} \psi - 2 \frac{dz'}{dx} \cdot \frac{d\psi}{dx} - z' \frac{d^2 \psi}{dx^2} \\ \frac{d^2 z}{dx^2} &= \frac{d^2 z'}{dx^2} + \frac{d^2 y'}{dx^2} \psi + 2 \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{d\psi}{dx} + y' \frac{d^2 \psi}{dx^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{e})$$

folgen. Wenden wir sie auf den Punkt O' , der unserem Stabelement als Querschnittsschwerpunkt angehört an, so müssen wir $y' = z' = 0$ und $\frac{dy'}{dx} = \frac{dz'}{dx} = 0$ setzen, wodurch wir auf die für das Linienelement der Stabachse geltenden Gleichungen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y'}{dx^2} - \frac{d^2 z'}{dx^2} \psi \quad (\text{e}) \quad \text{und} \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 z'}{dx^2} + \frac{d^2 y'}{dx^2} \psi \quad (\text{f})$$

kommen. Durch Einsetzung der Werte $\frac{d^2 z'}{dx^2}$ und $\frac{d^2 y'}{dx^2}$ aus den Gleichungen (c) und (d) in die zuletzt erhaltenen bekommen wir, wenn wir $J_{y'} = J_y$ und $J_{z'} = J_z$ setzen, die Differentialgleichungen der durchgebogenen Stabachse bezogen auf das Koordinatensystem xyz in der Form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P x \psi}{E} \cdot \frac{J_y - J_z}{J_y J_z} \quad (\text{g}) \quad \text{und} \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{P x}{E} \left[\frac{1}{J_y} + \frac{\psi^2}{J_z} \right]. \quad (\text{g}')$$

Das Drillungsmoment $M_t = -P y + P x \frac{dy}{ds} \doteq -P y + P x \frac{dy}{dx}$ hängt auf Grund der Gleichung (156) auf Seite 338 mit dem Drall τ auf Grund der Beziehung

$$\tau = \frac{d\psi}{dx} = \frac{M_t}{GJ} = \frac{-P y + P x \frac{dy}{dx}}{GJ} \quad (\text{h})$$

zusammen, worin J der Drillungswiderstand, G den Gleitmodul, GJ die Drillungssteifigkeit bedeuten [siehe hierzu auch die Gleichung (151) auf Seite 335 für den Drall eines rechteckigen Querschnittes]. Differenzieren wir die Gleichung (h) nach x und setzen dann $\frac{d^2 y}{dx^2}$ aus (g) ein, so erhalten wir

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = + \frac{P}{GJ} x \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{P^2}{GJ} \cdot \frac{J_y - J_z}{E J_z J_y} x^2 \psi,$$

wofür wir, wenn wir die Biegesteifigkeiten $EJ_y = B_1$ und $EJ_z = B_2$, ferner die Drillungssteifigkeit $GJ = C$ setzen

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{B_1 - B_2}{C B_1 B_2} P^2 x^2 \psi = 0 \tag{i}$$

schreiben können. Die Gleichung (i) ist die Grundgleichung für die Kippung gerader Stäbe mit rechteckigem Querschnitt. Wir können sie bei Einführung zweier neuer Variabler ξ, η durch die Substitution

$$\psi = \eta x^{\frac{1}{2}} \quad (\alpha) \quad \text{und} \quad \xi = \frac{1}{2} x^2 K \tag{\beta}$$

mit $K^2 = P^2 \frac{B_1 - B_2}{B_1 B_2 C}$ in die bekannte Besselsche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} + \left[1 - \frac{1}{16\xi^2} \right] \eta = 0 \tag{k}$$

überführen, die die Lösung

$$\eta = AJ_{\frac{1}{4}}(\xi) + BJ_{-\frac{1}{4}}(\xi) = \frac{y}{x} \tag{l}$$

besitzt, mit $J_{\frac{1}{4}}$ und $J_{-\frac{1}{4}}$ als sogenannte Besselsche Funktionen erster Art von der Ordnung $\frac{1}{4}$ bzw. $-\frac{1}{4}$ und A und B als Integrationskonstanten¹. Es ist

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{4}}(\xi) &= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha! (\frac{1}{4} + \alpha)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{(\frac{1}{4} + 2\alpha)} \\ &= \frac{\xi^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}!} \left[1 - \frac{\xi^2}{2(2 \cdot \frac{1}{4} + 2)} + \frac{\xi^4}{2 \cdot 4(2 \cdot \frac{1}{4} + 2)(2 \cdot \frac{1}{4} + 4)} - \dots \right], \\ J_{-\frac{1}{4}}(\xi) &= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha! (-\frac{1}{4} + \alpha)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{(-\frac{1}{4} + 2\alpha)} \\ &= \frac{\xi^{-\frac{1}{4}}}{2^{-\frac{1}{4}} (-\frac{1}{4})!} \left[1 - \frac{\xi^2}{2(2 \cdot -\frac{1}{4} + 2)} + \frac{\xi^4}{2 \cdot 4(2 \cdot -\frac{1}{4} + 2)(2 \cdot -\frac{1}{4} + 4)} - \dots \right] \end{aligned}$$

worin ξ aus (β) einzusetzen ist. Da zufolge Gleichung (h) der Drall τ für $x = 0$ und $y = 0$, d. h. für das rechte Stabende verschwinden muß, so gilt bei Benützung der Gleichungen (α) und (β)

$$\frac{d\psi}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{d\eta}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} x^{\frac{1}{2}} + \eta \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x=0} = \frac{d\eta}{d\xi} x^{\frac{3}{2}} K + \frac{\eta}{2} x^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x=0} = 0.$$

Setzt man in diese Bedingung $\frac{d\eta}{d\xi}$ und η bei Rücksicht auf (α), (β), (l) ein und setzt x Null, so verschwindet das B enthaltende Glied und die Kon-

¹ Siehe hierzu Riemann-Weber: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, neu herausgegeben von Dr. R. v. Mises, Teil I, S. 322ff. Braunschweig: F. Vieweg 1925.

stante A , multipliziert in einen Zahlenwert, erscheint allein, woraus $A = 0$ folgt. Die zweite Grenzbedingung verlangt, daß infolge der festen Einspannung ψ für $x = l$ verschwinden soll, d. h. es muß $0 = BJ_{-\frac{1}{4}}(\xi)|_{x=l}$ sein. Soll die gestörte Lage des Stabes möglich sein, so muß $J_{-\frac{1}{4}}(\xi)|_{x=l} = 0$ zutreffen, d. h. nach Einsetzen von $\xi = \frac{1}{2} x^2 K = \frac{1}{2} l^2 K$

$$0 = 1 - \frac{K^2 l^4}{3 \cdot 4} + \frac{K^4 l^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{K^6 l^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \dots K^2 = P^2 \frac{B_1 - B_2}{B_1 B_2 C}. \quad (173)$$

Diese Beziehung ist als Gleichung mit der Unbekannten P aufzufassen und hat unendlich viele Wurzeln. Die kleinste Wurzel derselben entspricht ganz der ersten Eulerschen Knicklast und wird als kleinste Kipplast eingeführt, bei der ein labiles Gleichgewicht denkbar ist. Sie hat nach Prandtl die Größe

$$P_K^* = \frac{4 \cdot 0126}{l^2} \sqrt{\frac{B_1 B_2 C}{B_1 - B_2}}. \quad (174)$$

Wenn B_1 , wie voraus gesetzt, sehr viel größer als B_2 ist, so können wir an Stelle des letzten Ausdruckes auch annähernd

$$P_K = \frac{4 \cdot 0126}{l^2} \sqrt{B_2 C} \quad (174a)$$

setzen. Die Kipplast ist demnach verkehrt proportional dem Quadrate der Länge des Stabes und proportional der Wurzel aus dem Produkte der kleineren der beiden Biegeungssteifigkeiten und der Drillungssteifigkeit. Dieses Resultat wurde von Prandtl auch experimentell bestätigt.

II. Anwendungen des Arbeitssatzes, des Prinzipes der virtuellen Arbeit und der mit diesem Prinzip zusammenhängenden Sätze von Castigliano und Maxwell, auf aus geraden Stäben aufgebaute Fach- und Stabwerksträger.

1. Berechnung statisch unbestimmter Größen.

Auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit bzw. auf den Sätzen von Castigliano und dem Maxwellschen, allgemeiner dem Satze von Betti, sind im wesentlichen zwei Methoden zur Bestimmung von statisch unbestimmten Größen, die sogenannte Kraftmethode und die Deformationsmethode aufgebaut. Erstere stützt sich auf die Form des Prinzipes der virtuellen Arbeit, die einen variierten Spannungszustand [Grundgleichungen (68'') und (68a), (68b) auf den Seiten 117 und 118, ferner die Gleichungen (72a) und (73), (74) auf den Seiten 127 und 128], letztere auf die Form jenes Prinzipes, die einen variierten Deformationszustand [Grundgleichungen (67), (67a) und (67b) auf Seite 113ff. und (76a) auf Seite 133] zugrunde legt. Wird das Maxwellsche Prinzip als Ausgangspunkt gewählt, so macht die Kraftmethode von jener besonderen Form Gebrauch, die als Prinzip der Gegenseitigkeit der Verschiebungen bezeichnet wurde. Die Deformationsmethode stützt sich auf die Sonderform des Prinzipes der Gegenseitigkeit der Kräfte (Seite 134ff.). Im Rahmen dieses Buches soll nur die Kraftmethode behandelt werden.

Kraftmethode. Bei Anwendung der Kraftmethode werden äußere und innere Kräfte (Momente) als statisch unbestimmte Größen eingeführt. Nehmen wir an, daß ein oder mehrere Stäbe eines irgendwie gestützten Stabwerkes, das unter dem Einflusse gegebener äußerer Kräfte steht (Seite 120ff.), sowohl bei der wirklichen als auch einer virtuellen Belastung nur auf gerade oder schiefe Biegung, Zug (Druck) und Schub wirklich oder gedacht beansprucht seien und Massenkräfte (Gewicht) ausgeschlossen sein sollen. Wir sollen zunächst das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Form nach Gleichung (68'') für das ganze Stabwerk aufstellen. Die virtuelle Deformationsarbeit für das ganze Stabwerk ist offenbar gleich der Summe der den einzelnen Stäben zukommenden virtuellen Deformationsarbeiten, die je nach der wirklichen und virtuellen Belastung des ganzen Stabwerkes entsprechend den wirklichen Verzerrungskomponenten und den virtuellen Spannungskomponenten noch sehr verschiedene Werte haben können.

Die in einem Stabe infolge einer Beanspruchung auf Biegung tatsächlich aufgespeicherte Arbeit kann in der Form $A_B = \frac{1}{2} \int_V X_x e_{xx} dx dy dz$ geschrieben werden bei Erstreckung des Integrales über das gesamte Volumen des Stabes (Punkt 24, Seite 99 ff.). Wenn wir in dieser Gleichung bei Voraussetzung gerader Biegungsbeanspruchung z. B. in der xz -Ebene (Seite 251) für X_x bzw. e_{xx} ihre Werte $\frac{M_{By}}{J_y} z$ bzw. $e_{xx} = \frac{M_{By}}{EJ_y} z$ einsetzen mit X_x als Biegungsspannung in der Entfernung z von der Nulllinie, so erhalten wir als Arbeit den Ausdruck

$$A_B = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{M_{By}}{J_y} z \right) \frac{M_{By}}{EJ_y} z dx dy dz.$$

Wenn ein virtueller Biegungsspannungszustand, der einer virtuellen Belastung des Stabwerkes entsprechen soll, mit dem wirklichen Verzerrungszustand kombiniert wird, so muß an Stelle des wirklichen Biegemomentes ein virtuelles eingeführt werden, das mit \bar{M}_{By} bezeichnet werde. Die virtuelle Biegearbeit wird dann, wenn bedacht wird, daß in einer virtuellen Arbeit der Faktor $\frac{1}{2}$ entfällt [Gleichung (68'')], durch

$$(\bar{A}_B) = \int_V \left(\frac{\bar{M}_{By}}{J_y} z \right) \frac{M_{By}}{EJ_y} z dx dy dz \quad (a)$$

gegeben sein, worin M_{By} das wirkliche Biegemoment ist und das Integral über das Stabvolumen zu nehmen ist. Integrieren wir über die Querschnittsfläche F , und bedenken, daß $\int_F z^2 dy dz = J_y$, so erhalten wir aus (a)

$$(\bar{A}_B) = \int_l \bar{M}_{By} \frac{M_{By}}{EJ_y} dx. \quad (a')$$

Das Integral ist jetzt über die Stablänge l zu nehmen.

Für den Fall schiefer Biegungsbeanspruchung ist die virtuelle Arbeit offenbar durch

$$(\bar{A}'_B) = \int_V \left(\frac{\bar{M}_{By}}{J_y} z - \frac{\bar{M}_{Bz}}{J_z} y \right) \left(\frac{M_{By}}{EJ_y} z - \frac{M_{Bz}}{EJ_z} y \right) dx dy dz$$

bestimmt, wenn M_{By}, M_{Bz} bzw. $\bar{M}_{By}, \bar{M}_{Bz}$ die komponentalen wirklichen

bzw. virtuellen Bieugungsmomente mit Bezug auf die Trägheitshauptachsen eines Querschnittes für den Schwerpunkt und J_y, J_z die zugehörigen Trägheitsmomente vorstellen [Gleichung (111) auf Seite 238]. Multipliziert man unter dem Integralzeichen aus und integriert über die Stablänge, so erhält man

$$(\bar{A}'_B) = \int_V \left[\frac{\bar{M}_{By}}{J_y} z \cdot \frac{M_{By}}{EJ_y} z + \frac{\bar{M}_{Bz}}{J_z} y \cdot \frac{M_{Bz}}{EJ_z} y \right] dx dy dz, \quad (\text{a}'')$$

als virtuelle Arbeit, wobei zu bedenken ist, daß das $\int_F yz dy dz$ als Deviationsmoment einer Querschnittsfläche F für die Trägheitshauptachsen des Schwerpunktes verschwinden muß. Durch Integration über die Querschnittsfläche erhalten wir aus (a'')

$$(\bar{A}'_B) = \int_l \bar{M}_{By} \frac{M_{By}}{EJ_y} dx + \int_l \bar{M}_{Bz} \frac{M_{Bz}}{EJ_z} dx. \quad (\text{a}''')$$

Wird die den Zug- (Druck-) Spannungen entsprechende Normalkraft des Stabes mit N bezeichnet, so ist die wirkliche Deformationsarbeit durch $A_{z,D} = \frac{1}{2} \int_V \frac{N}{F} \cdot \frac{N}{EF} dx dy dz$ bestimmt, worin $\frac{N}{F}$ mit F als Querschnittsfläche des Stabes die Zug- (Druck-) Spannung, dagegen $\frac{N}{EF}$ die der Zug- (Druck-) Spannung zugeordnete Dehnung (Quetschung) ist. Bei variiertem Spannungszustand ist an Stelle der wirklichen Spannung $\frac{N}{F}$ die virtuelle $\frac{\bar{N}}{F}$ einzuführen, die der virtuellen, der gedachten äußeren Belastung zugeordneten Normalkraft \bar{N} entspricht. Die virtuelle Arbeit infolge der Beanspruchung auf Zug (Druck) ist sonach

$$(\bar{A}_{z,D}) = \int_V \frac{\bar{N}}{F} \cdot \frac{N}{EF} dx dy dz, \quad (\text{b})$$

wobei die Integration wieder über das Stabvolumen auszudehnen ist. Integrieren wir über die Querschnittsfläche, so erhalten wir leicht

$$(\bar{A}_{z,D}) = \int_l \bar{N} \frac{N}{EF} dx. \quad (\text{b}')$$

Die Arbeit infolge des Auftretens von Schubspannungen \bar{Y}_x, \bar{Z}_x im Stabe ist durch Gleichung (143) auf Seite 322 bestimmt, in der $\frac{Q_y}{F}$ bzw. $\frac{Q_z}{F}$ die über den Querschnitt gleichförmig verteilt vorgestellten Schubspannungen parallel zur y - bzw. z -Achse, $\frac{c_y Q_y}{GF}$ bzw. $\frac{c_z Q_z}{GF}$ die den genannten Schubspannungen zukommenden Verzerrungskomponenten vorstellen. Die virtuelle Deformationsarbeit infolge virtueller Querkräfte \bar{Q}_y, \bar{Q}_z und der wirklichen Verzerrungen wird sonach, wie nunmehr leicht einzusehen ist, durch

$$(\bar{A}_S) = \int_l \bar{Q}_y \frac{c_y Q_y}{GF} dx + \int_l \bar{Q}_z \frac{c_z Q_z}{GF} dx \quad (\text{c})$$

ausdrückbar sein.

Einem auf schiefe Biegung, Zug (Druck) und Schub beanspruchten Stab des Stabwerkes kommt sonach als gesamte virtuelle Arbeit

$$\left. \begin{aligned}
 (\bar{A}) = (\bar{A}'_B) + (\bar{A}_{z,D}) + (\bar{A}_S) = & \int_l \bar{M}_{By} \frac{M_{By}}{EJ_y} dx + \int_l \bar{M}_{Bz} \frac{M_{Bz}}{EJ_z} dx \\
 & + \int_l \bar{N} \frac{N}{EF} dx + \int_l \bar{Q}_y \frac{c_y Q_y}{GF} dx + \int_l \bar{Q}_z \frac{c_z Q_z}{GF} dx
 \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

zu. Der Ausdruck (175) berücksichtigt die in der Regel in Stäben eines Stabwerksträgers auftretenden Beanspruchungen. Treten noch andere Beanspruchungen hinzu, wie z. B. Drillung, so muß der Ausdruck (175) durch entsprechende Glieder ergänzt werden. Liegt nur Beanspruchung auf gerade Biegung und Schub vor, so entfällt von den ersten beiden Gliedern eines und das dritte sowie eines von den beiden letzten Gliedern usw.

Unter der Voraussetzung, daß nur die im Ausdrucke (175) berücksichtigten Beanspruchungen im Stabwerksträger vorkommen, nimmt das Prinzip (68'') auf Seite 117 die Form

$$\begin{aligned}
 \sum \bar{Q} \cdot \delta_0 = & \sum_l \int \bar{M}_{By} \frac{M_{By}}{EJ_y} dx + \int_l \bar{M}_{Bz} \frac{M_{Bz}}{EJ_z} dx + \int_l \bar{N} \frac{N}{EF} dx \\
 & + \int_l \bar{Q}_y \frac{c_y Q_y}{GF} dx + \int_l \bar{Q}_z \frac{c_z Q_z}{GF} dx
 \end{aligned} \quad (176)$$

an, worin die Summe links sich über die virtuellen Arbeiten der äußeren Kräfte, die Summe rechts sich über die virtuellen Deformationsarbeiten der einzelnen Stäbe erstreckt. Normal-, Querkräfte und Biegemomente sind im allgemeinen Funktionen von x .

Die Anwendung der Gleichung (176) auf die Bestimmung der statisch unbestimmten Größen, die an einem aus geraden Stäben gebildeten Stabwerk auftreten, soll in allgemeiner Weise, aber stets, um die Anschaulichkeit zu erhöhen, unter Hinweis auf das folgende Beispiel erörtert werden.

Ein äußerlich statisch unbestimmter Halbrahmen (Abb. 172), der aus zwei im Knotenpunkt 2 miteinander steif verbundenen geraden Stäben besteht, ist in 1 reibungslos gelenkig und unverschieblich, in 3 fest eingespannt gelagert. Die aufgebrachte Belastung besteht in einer auf dem Stabe 1, 2 gleichförmig verteilten Last q t/m und einer in der Mitte des Stabes 2, 3 wirkenden Kraft P . Die Kraftebene der gleichförmig verteilten Belastung und der Kraft P soll die Querschnitte der beiden Stäbe in Hauptzentralachsen schneiden. Der Vorgang der Lösung ist im folgenden nach Punkten geordnet.

1. Nach Feststellung der Zahl und der vermutlichen Wirkungsweise der Auflagerreaktionen werden die zur Verfügung stehenden statischen Gleichungen aufgestellt, d. h. jene Gleichgewichtsbedingungen, welche auch gelten würden, wenn der Halbrahmen starr wäre.

In unserem Beispiele treten in dem Auflager 1 eine horizontale bzw. vertikale Reaktion H_A und A , in dem Auflager 3 eine horizontale bzw. vertikale Reaktion H_B und B und außerdem ein Einspannungsmoment M auf. Die Zahl der unbekanntnen Auflagerreaktionen ist sonach 5. Da es sich offenbar um ein ebenes Kraftsystem handelt, ist die Zahl der zur Verfügung stehenden statischen Gleichungen 3, und zwar

$$qh - H_A - H_B = 0, \quad P - A - B = 0, \quad M + Ab + H_A h - \frac{qh^2}{2} - \frac{Pb}{2} = 0. \quad (d)$$

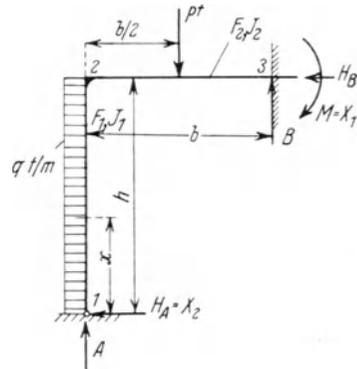


Abb. 172.

Die zwei ersten Gleichungen entsprechen den Bedingungen, daß die Summe sämtlicher horizontalen bzw. vertikalen Kräfte im Falle des Gleichgewichtes verschwinden muß, die dritte Gleichung spricht das notwendige Nullwerden der Momentensumme mit Bezug auf den Punkt 3 im Falle des Gleichgewichtes aus. In den aufgeschriebenen Gleichgewichtsbedingungen wurden die Stützkkräfte und das Stützmoment in dem in der Abb. 172 eingetragenen, vermutlich richtigen Wirkungssinne eingeführt, der für alle weiteren Rechnungen als der positive gilt. Für unser Beispiel ist es von vornherein nicht sicher, ob der Horizontalschub H_A nach links, wie angenommen wird, wirkt, denn die Kraft P würde, wenn in 1 kein festes Gelenk wäre, infolge der bei 2 steifen Verbindung zwischen dem Stabe 12 und dem Stabe 23 das Ende 1 des Stabes 12 nach links bewegen (was bei festem Gelenk 1 einer Kraft entsprechen würde, die nach rechts wirkt), während die Belastung hqt das Ende 1 des Stabes 12 nach rechts bewegen würde. Wenn P gegenüber hq nicht zu groß ist, wird die gemachte Angabe über die Richtung von H_A richtig sein. Eine unrichtige Annahme des Wirkungssinnes zeigt sich dadurch, daß bei der späteren Ausrechnung die betreffende Größe negativ herauskommt.

Man kann auch so vorgehen, daß man von vornherein ein Koordinatensystem festlegt, das z. B. für unser Beispiel mit dem Ursprung in den Knotenpunkt 2 und mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen in die Richtungen der Stabachsen 21 bzw. 23 fällt und dann alle Reaktionskräfte und Reaktionsmomente als mit Bezug auf dieses Koordinatensystem positive Größen einführt. Die weitere Rechnung ergibt dann, ob diese Annahme zutreffend war oder nicht.

2. Nach Aufstellung der statischen Gleichungen wird der Grad der statischen Unbestimmtheit festgestellt und die Wahl der statisch unbestimmten Größen getroffen. Diesbezüglich kann auf die prinzipiellen Bemerkungen auf den Seiten 4, 120 und 123 verwiesen werden.

In unserem Beispiel ist der Grad der statischen Unbestimmtheit gleich 2. Als statisch unbestimmte Größen wählen wir $M = X_1$ und $H_A = X_2$. Setzen wir $M = 0$, $H_A = 0$, so ergibt sich als zugeordneter, offenbar stabiler Hauptträger jener nach Abb. 172a, der rechts in 3 ein festes Gelenk, das nach auf- und abwärts reagieren kann, links in 1 ein Rollenkipplager besitzt (Seite 123ff.).

Unzulässig wäre die Wahl von H_A, H_B als statisch unbestimmte Größen, denn in diesem Falle wären die statisch unbestimmten Größen zufolge der ersten der statischen Gleichungen voneinander abhängig. Im zugeordnet statisch bestimmten Hauptträger ($H_A = H_B = 0$) müßten wir in 1 ein Rollenkipplager wählen, in 3 müßte der Stab 23 steif an ein Rollenkipplager angeschlossen werden (nicht wie im Falle der Abb. 172a gelenkig). Dieser Hauptträger wäre aber nicht stabil, da infolge der Wirkung der horizontalen Kräfte hq eine Verschiebung des ganzen Rahmens nach rechts eintreten müßte. Dagegen könnten wieder M und A als statisch unbestimmte Größen gewählt werden.

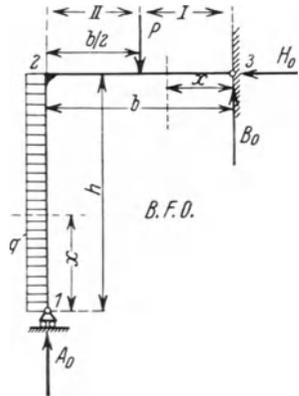


Abb. 172a.

3. Nach Wahl der statisch unbestimmten Größen werden die außer ihnen noch vorkommenden Reaktionen, die im allgemeinen mit V bezeichnet werden, als lineare Funktionen der angreifenden Kräfte und der statisch unbestimmten Reaktionen ausgedrückt.

Es ergeben sich dann für die verschiedenen Reaktionen V Gleichungen von der allgemeinen Form

$$V = v_0 + X_1 v_1 + X_2 v_2 + \dots + X_n v_n \tag{e}$$

[Gleichung (69), Seite 124], wenn $X_1 \dots X_n$ n statisch unbestimmte Größen vorstellen. Zur Bestimmung von $v_0 \dots v_n$ müssen $n + 1$ Belastungsfälle des statisch bestimmten Hauptträgers entsprechend der Wirkung des gegebenen Belastungssystemes und von n Belastungen $X_1 = 1, \dots, X_n = 1$ angenommen werden (Seite 124). Für dieselben werden die Reaktionen in jenen Richtungen als positiv eingeführt, welche den ursprünglich am statisch unbestimmten Stabwerk angenommenen Richtungssinn der Reaktionen entsprechen.

Da die Querkräfte Q , Normalkräfte N und Biegemomente M für einen beliebigen Querschnitt eines Stabes nur linear von den angreifenden und Reaktionskräften (Momenten) abhängig sein können, so gelten offenbar auch die Beziehungen

$$Q = q_0 + q_1 X_1 \dots q_n X_n, \quad N = n_0 + n_1 X_1 + \dots + n_n X_n, \quad (e')$$

$$M = m_0 + m_1 X_1 + \dots + m_n X_n,$$

in welchen q_0 bzw. n_0 bzw. m_0 die Querkraft bzw. die Normalkraft bzw. das Biegemoment für einen beliebigen Querschnitt eines Stabes am statisch bestimmten Hauptträger bedeuten, wenn an ihm nur die gegebenen Lasten angreifen, q_n bzw. n_n bzw. m_n die Querkraft bzw. die Normalkraft bzw. das Biegemoment für einen beliebigen Querschnitt eines Stabes am statisch bestimmten Hauptträger, wenn an ihm entsprechend dem $n + 1$ -ten Belastungsfall die Kraft (Moment) $X_n = 1$ angreift usw. Die aufgeschriebenen Beziehungen (e), (e') besagen natürlich nichts anderes, als daß man die $n + 1$ Teilbelastungen des Hauptträgers (durch das gegebene Lastsystem und durch $X_1 v_1 \dots X_n v_n$) entsprechenden Auflagerreaktionen, Querkräfte, Normalkräfte, Biegemomente übereinanderlagern muß, um die entsprechenden Größen für das gegebene statisch unbestimmte Stabwerk zu erhalten. Bezüglich des Zeichens der Normal- und Querkräfte sowie der Biegemomente wird an das auf Seite 222 Gesagte erinnert.

Für unser Beispiel ergibt sich aus den statischen Gleichungen (d)

$$H_B = qh - X_2, \quad A = \frac{P}{2} + \frac{qh^2}{2b} - \frac{X_1}{b} - \frac{h}{b} X_2, \quad B = \frac{P}{2} - \frac{qh^2}{2b} + \frac{X_1}{b} + \frac{h}{b} X_2 \quad (f)$$

Denken wir uns den statisch bestimmten Hauptträger durch die gegebenen Kräfte belastet (Belastungsfall 0, Abb. 172a), so erhalten wir

$$H_0 = qh, \quad A_0 = \frac{P}{2} + \frac{qh^2}{2b}, \quad B_0 = \frac{P}{2} - \frac{qh^2}{2b}.$$

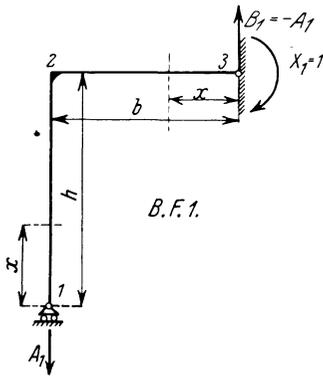


Abb. 172 b.

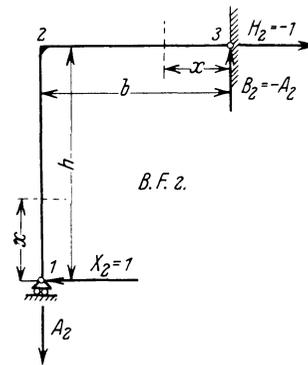


Abb. 172 c.

Wird der statisch bestimmte Hauptträger durch $X_1 = 1$ bzw. $X_2 = 1$ belastet, so erhalten wir die Belastungsfälle 1 bzw. 2 (Abb. 172b und 172c), für welche sich die folgenden Reaktionen ergeben:

$$H_1 = 0, \quad A_1 = -\frac{1}{b}, \quad B_1 = \frac{1}{b}, \quad \text{bzw.} \quad H_2 = -1, \quad A_2 = -\frac{h}{b}, \quad B_2 = +\frac{h}{b}.$$

Es folgt wie notwendig:

$$H_B = H_0 + H_2 X_2, \quad A = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2, \quad B = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2. \quad (g)$$

Die Querkraft für einen beliebigen Querschnitt des Stabes 1 2 ist durch

$$Q = X_2 - qx = q_0 + q_2 X_2 \quad (h)$$

gegeben, wenn $q_0 = -qx$ und $q_2 = 1$ gesetzt wird, was wieder in obigem Sinne leicht gedeutet werden kann. (Dem Belastungsfall 1 entspricht keine Querkraft am Stabe 12, infolgedessen ist $q_1 = 0$.) Ähnlich kann auch das Biegemoment für einen Stab als Funktion der gegebenen Lasten und der statisch unbestimmten Größen dargestellt werden usw.

4. Nunmehr wird die Gleichung der virtuellen Arbeit in der Form (176) auf Seite 379 (oder in einer noch allgemeineren Form, wenn außer den in ihr berücksichtigten Beanspruchungen noch andere, wie z. B. Drillung hinzutreten) auf den wirklichen Verschiebungszustand und auf je einen virtuellen Spannungszustand des Stabwerkes angewendet. Letzterer ist bei n statisch unbestimmten Größen $X_1 \dots X_n$ je einem von den n Belastungsfällen $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1$ des statisch bestimmten Hauptträgers zugeordnet. Der wirkliche Verschiebungszustand entspricht jenem, der durch das gegebene Lastsystem an dem gegebenen statisch unbestimmten System hervorgerufen wird. Dazu ist es notwendig, die den Angriffsstellen der statisch unbestimmten Größen zugeordneten Verschiebungen bzw. Verdrehungen zu kennen, denn auf der linken Seite der Gleichung (176) steht für den Fall, als man das Prinzip auf eine der n gedachten Belastungen des statisch bestimmten Hauptträgers anwendet, die virtuelle Arbeit der gleich 1 gesetzten statisch unbestimmten Größe oder dem Zahlenwerte nach die wirkliche Verschiebung bzw. wirkliche Verdrehung, welche die Angriffsquerschnitte der statisch unbestimmten Größen unter der gegebenen Belastung des statisch unbestimmten Stabwerkes in der Richtung der Kräfte bzw. in der Ebene der Momente $X_1 \dots X_n$ erfahren¹. Sind diese wirklichen Verschiebungs- (Verdrehungs-) Größen gleich Null, wie bei unverschiebbaren und unverdrehbaren Auflagern, so erhalten wir bei jedesmaliger Anwendung der virtuellen Arbeitsgleichung (176) links eine Null.

Für unser Beispiel ist letzteres zutreffend, denn dem virtuellen Moment $X_1 = 1$ entspricht am gegebenen Stabwerk infolge der angenommenen festen Einspannung kein wirklicher Verdrehungswinkel, also keine virtuelle Arbeit; ebenso trifft das auf die virtuelle Kraft $X_2 = 1$ zu, denn das linke Auflager 1 ist nach unserer Voraussetzung auch unverschieblich gelagert. Auch die virtuellen Arbeiten von A_1, B_1, A_2, B_2 verschwinden.

Im allgemeinen liefert die Gleichung (176) bei gerader Biegebungsbeanspruchung und Vernachlässigung der Schubkräfte \bar{Y}_x, \bar{Z}_x n Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} \mu_r = & \sum_i \int m_r \frac{(m_0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots + m_n X_n)}{EJ} dx \\ & + \sum_i \int n_r \frac{(n_0 + n_1 X_1 + \dots + n_n X_n)}{EF} dx, \end{aligned} \quad (177)$$

wenn die Summen \sum über sämtliche Stäbe des Stabwerkes ausgedehnt werden. m_r bzw. n_r bedeutet das virtuelle Biegemoment bzw. die virtuelle Normalkraft bei Belastung des statisch bestimmten Hauptträgers durch $X_r = 1$, und die Klammerausdrücke sind die wirklich auftretenden Biegemomente bzw. Querkräfte am gegebenen statisch unbestimmten Stabwerk; r kann die Werte 1 bis n annehmen. μ_r bedeutet, wie oben erwähnt, eine in der Richtung der Kraft X_r (oder in die Ebene des Momentes X_r) fallende wirkliche Verschiebungs- oder Verdrehungskomponente¹. Die n linearen Gleichungen von der Form (177) dienen zur Bestimmung der n statisch unbestimmten Größen $X_1 \dots X_n$. Man kann sie, auch dann, wenn noch die virtuelle Arbeit der Schubspannungen (eventuell der virtuellen Reaktionen) berücksichtigt wird, auf die Form

$$\mu_r = a_{r0} + a_{r1} X_1 + a_{r2} X_2 + \dots + a_{rn} X_n \quad (177a)$$

¹ Dabei ist vorausgesetzt, daß die virtuellen Arbeiten der den gedachten Belastungsfällen zugeordneten Reaktionen verschwinden (s. Seite 401).

bringen, worin a_{r_0} vom verwendeten Materiale, von den gegebenen angreifenden Kräften und den Dimensionen der einzelnen Stäbe, $a_{r_1} \dots a_{r_n}$ von den Dimensionen und dem Materiale der einzelnen Stäbe abhängen. Die Gleichungen von der Form (177a) sind den Gleichungen (e) und (e') auf Seite 380ff. analog und entsprechen den anlässlich der Herleitung des Maxwellschen Satzes gebrauchten Gleichungen (77) auf Seite 134.

Auf Grund des Maxwellschen Satzes muß $a_{r_n} = a_{n_r}$ [Gleichung (79), Seite 135] zutreffen, wodurch eine Kontrolle der richtigen Aufstellung der Gleichungen (177a) in einem konkreten Falle gegeben ist.

Die Größen $a_{r_0} \dots a_{r_n}$ sind als Verschiebungen resp. Verdrehungen zu werten, welche an den Stellen des Angriffes der betreffenden statisch unbestimmten Kraft X_r (resp. des betreffenden statisch unbestimmten Momentes) am statisch bestimmten Hauptträger entstehen, wenn an demselben das angreifende Kraftsystem allein oder die betreffenden gleich 1 gesetzten statisch unbestimmten Kräfte (Momente) wirken. u_r ist sonach eine Verschiebung bzw. eine Verdrehung, welche durch Superposition der den angreifenden Kräften und den einzeln statisch unbestimmten Kräften entsprechenden Verschiebungen (Verdrehungen) gewonnen wird, eine Aussage, die eine Folge der vorausgesetzten Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes ist.

In unserem Beispiel erhalten wir zwei Gleichungen von der Form

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \sum_l \int m_1 \frac{m_0 + m_1 X_1 + m_2 X_2}{E J_v} dx + \sum_i \int n_1 \frac{n_0 + n_1 X_1 + n_2 X_2}{E F} dx, \\ 0 &= \sum_l \int m_2 \frac{m_0 + m_1 X_1 + m_2 X_2}{E J_v} dx + \sum_i \int n_2 \frac{n_0 + n_1 X_1 + n_2 X_2}{E F} dx. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Zur Bestimmung der Werte m_0, m_1, m_2 und n_0, n_1, n_2 machen wir uns folgendes Schema:

Stab- bezeichnung	m_0	m_1	m_2	n_0	n_1	n_2
1 2	$\frac{q x^2}{2}$	0	+ x	$-\left(\frac{P}{2} + \frac{q h^2}{2b}\right)$	$\frac{1}{b}$	$+\frac{h}{b}$
2 3	$\left(\frac{P}{2} - \frac{q h^2}{2b}\right) x = m_0^I$ $\frac{P b}{2} - \left(\frac{q h^2}{2b} + \frac{P}{2}\right) x = m_0^{II}$	$\frac{x}{b} - 1$	$+\frac{h}{b} x$	- q h	0	+ 1

zu dessen Erklärung nachstehendes dienen möge. m_0 entspricht dem Belastungsfalle 0, demnach wird für den Stab 1 2 für einen beliebigen Querschnitt in der Entfernung x von I das Biegemoment $q \frac{x^2}{2}$. Für den Stab 2 3 ergeben sich für die Abschnitte I und II, wenn die Querschnitte durch die Entfernung x vom Auflager 3 festgelegt werden, die beziehungsweisen Biegemomente

$$m_0^I = B_0 x = \left(\frac{P}{2} - \frac{q h^2}{2b}\right) x$$

gültig für den Bereich von $x = 0$ bis $x = \frac{b}{2}$ und

$$m_0^{II} = B_0 x - P \left(x - \frac{b}{2}\right) = \frac{P b}{2} - \left(\frac{q h^2}{2b} + \frac{P}{2}\right) x$$

gültig für den Bereich von $x = \frac{b}{2}$ bis $x = b$.

Ferner wird n_0 für den Belastungsfall 0 für den Stab 1 2 $A_0 = -\left(\frac{P}{2} + \frac{qh^2}{2b}\right)$, für den Stab 2 3 ist $n_0 = -qh$. n_0 ist für beide Stäbe 1 2 und 2 3 je eine Druckkraft und wird als solche negativ bezeichnet. In ähnlicher Weise werden die anderen Biegungsmomente und Normalkräfte berechnet und in das obige Schema eingetragen. Wenn die Trägheitsmomente für den Stab 1 2 mit J_1 , für den Stab 2 3 mit J_2 bezeichnet werden, wenn ferner die Querschnittsflächen für die genannten Stäbe durch F_1 bzw. F_2 eingeführt werden, so erhalten wir bei Voraussetzung, daß sämtliche Stäbe aus dem gleichen Stoffe bestehen, durch Einsetzen der den Teilbelastungen entsprechenden Biegungsmomente und Normalkräfte aus obigem Schema in die Gleichungen (i)

$$\int_0^{\frac{b}{2}} \left(\frac{x}{b} - 1\right) \frac{\left[\left(\frac{P}{2} - \frac{qh^2}{2b}\right)x + \left(\frac{x}{b} - 1\right)X_1 + \frac{h}{b}xX_2\right]}{EJ_2} dx$$

$$+ \int_{\frac{b}{2}}^b \left(\frac{x}{b} - 1\right) \frac{\left[\left(\frac{P}{2} - \frac{qh^2}{2b}\right)x - P\left(x - \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{x}{b} - 1\right)X_1 + \frac{h}{b}xX_2\right]}{EJ_2} dx$$

$$+ \int_0^h \frac{1}{b} \cdot \frac{\left[-\frac{qh^2}{2b} - \frac{P}{2} + \frac{X_1}{b} + \frac{h}{b}X_2\right]}{EF_1} dx = 0,$$

$$\int_0^h x \frac{\left[\frac{qx^2}{2} + xX_2\right]}{EJ_1} dx + \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{h}{b} x \frac{\left[\left(\frac{P}{2} - \frac{qh^2}{2b}\right)x + \left(\frac{x}{b} - 1\right)X_1 + \frac{h}{b}xX_2\right]}{EJ_2} dx$$

$$+ \int_{\frac{b}{2}}^b \frac{h}{b} x \frac{\left[\left(\frac{P}{2} - \frac{qh^2}{2b}\right)x - P\left(x - \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{x}{b} - 1\right)X_1 + \frac{h}{b}xX_2\right]}{EJ_2} dx$$

$$+ \int_0^h \frac{h}{b} \frac{\left[-\frac{qh^2}{2b} - \frac{P}{2} + \frac{X_1}{b} + \frac{h}{b}X_2\right]}{EF_1} dx + \int_0^b \frac{-qh + X_2}{EF_2} dx = 0.$$
(i')

Durch Integration und Reduktion ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für X_1 und X_2 mit

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{1}{J_2} \left(\frac{Pb^2}{16} - \frac{qh^2b}{12}\right) - \frac{1}{2F_1b} \left(\frac{qh^3}{b} + Ph\right) + X_1 \left(\frac{b}{3J_2} + \frac{h}{b^2F_1}\right) \\ & + X_2 \left(-\frac{hb}{6J_2} + \frac{h^2}{b^2F_1}\right) = 0, \\ & + \frac{1}{J_2} \left(\frac{Phb^2}{16} - \frac{qh^3b}{6}\right) - \frac{h^4q}{8J_1} - \frac{h^2}{2bF_1} \left(P + \frac{qh^2}{b}\right) - \frac{qh}{F_2} \\ & + X_1 \left(-\frac{hb}{6J_2} + \frac{h^2}{b^2F_1}\right) + X_2 \left(\frac{h^3}{3J_1} + \frac{h^2b}{3J_2} + \frac{h^3}{b^2F_1} + \frac{b}{F_2}\right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Die erste dieser Gleichungen besagt, daß die Summe der durch die angreifenden Kräfte P und qh und durch die statisch unbestimmten Kräfte (Momente) an der statisch bestimmten

Hauptkonstruktion bewirkten Verdrehungen am Auflager 3 infolge der festen Einspannung verschwinden muß. Die zweite Gleichung drückt aus, daß auch die durch die Summe derselben Kräfte bewirkten Verschiebungen in der Richtung der Auflagerkraft X_2 am Auflager 1 Null sein muß, da dasselbe unverschieblich sein soll.

In den Bestimmungsgleichungen für X_1 und X_2 muß entsprechend dem Maxwell'schen Satz $a_{12} = a_{21}$ sein, was auch zutrifft. Der Kraft $X_2 = 1$ entspricht sonach eine Verdrehung am Auflager 3 in der Ebene des Momentes X_1 von der Größe $-\frac{hb}{6J_2} + \frac{h^2}{b^2F_1}$, die gerade so groß ist wie die Verschiebung, welche durch das Moment $X_1 = 1$ am Auflager 1 in der Richtung der Auflagerreaktionen X_2 der statisch bestimmten Hauptkonstruktion hervorgerufen wird.

Es ist klar, daß die den Teilbelastungsfällen (in unserem Beispiel sind deren drei vorhanden) entsprechenden Verdrehungen und Verschiebungen auch graphisch unter Zuhilfenahme des Verfahrens von Mohr bestimmt werden könnten. Auch das rechnende Verfahren von Mohr könnte hierzu mit Vorteil herangezogen werden¹.

Gewöhnlich können die den Normalkräften entsprechenden Glieder als in der Regel klein gegenüber jenen, die den Biegemomenten entsprechen, vernachlässigt werden.

Tun wir das für unser Beispiel, so entfallen in den Schlußgleichungen (k) die die Querschnittsflächen F_1 und F_2 enthaltenden Glieder. Lassen wir auch noch q verschwinden, d. h. nehmen wir nur eine Belastung P an, so wird

$$X_1 = \frac{3Pb}{8} \cdot \frac{\frac{b}{J_2} + \frac{2h}{J_1}}{\frac{4h}{J_1} + \frac{3b}{J_2}}, \quad X_2 = -\frac{3Pb}{8h} \cdot \frac{\frac{b}{J_2}}{\frac{4h}{J_1} + \frac{3b}{J_2}}. \quad (1)$$

X_2 hat sonach die entgegengesetzte Richtung zu jener, welche in Abb. 172 eingezeichnet ist, wie es, wenn P allein als angreifende Kraft wirkt, sein muß.

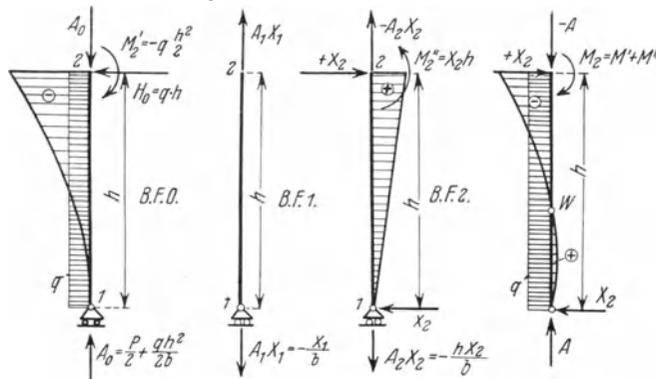


Abb. 172 d. Abb. 172 e. Abb. 172 f. Abb. 172 g.

Nach Berechnung der statisch unbestimmten Größen können die den einzelnen an den statisch bestimmten Hauptkonstruktionen angreifenden Teilbelastungen (gegebenes Belastungssystem, berechnete Größen $X_1 \dots X_n$) entsprechenden Biegemomenten- und Querkraftsdiagramme übereinander gelegt werden, wodurch das betreffende Diagramm für die gegebene statisch unbestimmte Konstruktion erhalten wird.

Für unser Beispiel ist in den Abb. 172 d bis 172 g und 172 d' bis 172 g' jeder Stab des Stabwerkes für sich mit den an ihm von außen her übertragenen Kräften dargestellt, um die Anschaulichkeit des Kräftespiels zu erhöhen (jeder Stab muß für sich im Gleichgewicht stehen). Ferner sind an jedem einzelnen Stabe die der gegebenen Belastung und den berechnet gedachten Teilbelastungen X_1, X_2 entsprechenden Momentenschaubilder (positive Momente bewirken eine Durchbiegung nach rechts bzw. unten) für sich eingezeichnet und

¹ Siehe hierzu auch des Verfassers Aufsatz in der Zeitschrift deutscher Ingenieure in der tschechoslowakischen Republik 1926: Über die Bestimmung elastischer Verschiebungsgrößen.

schließlich diese Momentenschaubilder übereinander gelegt. In der Abb. 172h ist das ganze Stabwerk mit seinen äußeren Kräften und Momenten und dem Momentenschaubild, ferner das deformierte Stabwerk in starker Verzerrung strichliert gezeichnet. Die den Nullpunkten der Momente entsprechenden Wendepunkte der elastischen Linie der Stäbe sind besonders vermerkt. Im Knotenpunkte 2 wird der ursprünglich rechte Winkel der beiden Stabachsen infolge der steifen Verbindung als unveränderlich angesehen. Die Normalkräfte sind als vernachlässigt gedacht. In Wirklichkeit sind die Stäbe 12 und 23 gedrückt, daher rückt der Punkt 2 gleichzeitig nach unten und nach rechts um je ein Stück, das der Verkürzung der beiden Stäbe entspricht.

An Stelle des Prinzipes der virtuellen Arbeit in der Form (68'') auf Seite 117 kann auch der Castiglianosche Lehrsatz verwendet werden, welcher besagt [siehe Gleichung (74) auf Seite 128¹], daß die Beziehung $\mu_r = \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial X_r}$ für jede statisch unbestimmte Größe bestehen soll, worin die Deformationsarbeit \bar{B}_i , welche

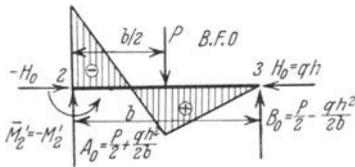


Abb. 172d'.

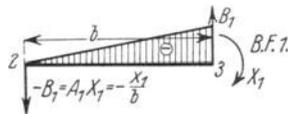


Abb. 172e'.

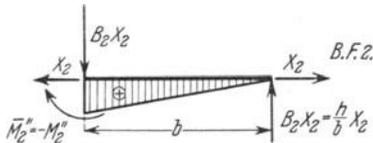


Abb. 172f'.

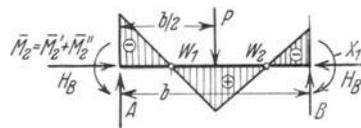


Abb. 172g'.

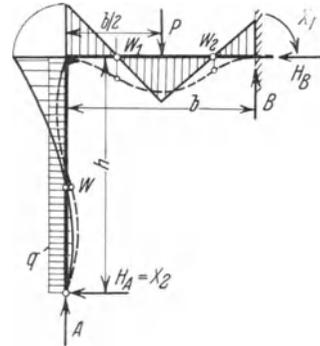


Abb. 172h.

infolge der Wirksamkeit der äußeren Kräfte in das Stabwerk hineingesteckt wird, als Funktion der gegebenen Lasten und der statisch unbestimmten Größen gegeben gedacht ist, und μ_r die Verschiebung bzw. Verdrehung in der Richtung bzw. in der Ebene der statisch unbestimmten Kraft bzw. des statisch unbestimmten Momentes X_r bedeutet.

Allgemein gilt für die Deformationsarbeit \bar{B}_i eines Stabwerkes, dessen Stäbe nur Beanspruchungen auf gerade Biegung, Schub, Zug (Druck) ausgesetzt sind,

$$B_i = \sum_l \int \frac{M_{B_y}^2}{2 E J_y} dx + \int \frac{N^2}{2 E F} + \int \frac{c_z Q_z^2}{2 G F} dx, \tag{178}$$

wenn die Integrale wieder über die einzelnen Stäbe des Stabwerkes genommen werden und die Summe \sum sich über das ganze Stabwerk erstreckt. Bei Beachtung der Beziehungen (e') auf Seite 381 geht dieser Ausdruck in

$$\begin{aligned} \bar{B}_i = & \sum_l \int \frac{(m_0 + m_1 X_1 + \dots + m_n X_n)^2}{2 E J} dx + \int \frac{(n_0 + n_1 X_1 + \dots + n_n X_n)^2}{2 E F} dx \\ & + \int \frac{c(q_0 + q_1 X_1 + \dots + q_n X_n)^2}{2 G F} dx \end{aligned} \tag{178a}$$

¹ In allgemeineren Fällen Gleichung (72a), S. 127.

über, worin auf Achsenrichtungen bezügliche Zeiger weggelassen wurden. Somit lautet der Castiglianosche Lehrsatz, angewendet auf die statisch unbestimmte Größe X_r

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial X_r} = \mu_r = \sum_i \int \frac{m_r (m_0 + m_1 X_1 + \dots + m_n X_n)}{E J} dx \\ + \int \frac{n_r (n_0 + n_1 X_1 + \dots + n_n X_n)}{E F} dx + \int \frac{e q_r (q_0 + q_1 X_1 + \dots + q_n X_n)}{G F} dx. \end{aligned} \right\} \quad (178b)$$

Diese Beziehung wird mit der auf Seite 382 gefundenen identisch, wenn die Schubspannungen vernachlässigt werden.

Der Lösungsvorgang bei Anwendung des Castiglianoschen Lehrsatzes ist völlig gleichlaufend dem oben bei Anwendung des Prinzipes der virtuellen Arbeit angegebenen. Wir wollen den Lösungsvorgang in zwei einfachen Fällen zeigen.

Als erstes Beispiel wählen wir ein sehr einfaches Stabwerk, den auf beiden Seiten fest eingespannten geraden Stab, hauptsächlich um zu zeigen, um wieviel rascher die Methode von Castigliano zum Ziele, d. h. zur Bestimmung der statisch unbestimmten Größen führt, als die Methode, für welche die Differentialgleichung der elastischen Linie zugrunde gelegt wird (Seite 262 ff.). Ist der fest eingespannte Stab (Abb. 31, Seite 112) in seiner Mitte durch eine Einzelkraft P auf gerade Biegung und Schub beansprucht, so ist derselbe einfach statisch unbestimmt, da dann die beiden Einspannungsmomente einander gleich sind. Die statisch unbestimmte Größe $M = X$, d. i. das Einspannungsmoment, ergibt

sich aus der Bedingung $\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial X} = 0$, da der X entsprechende Verdrehungswinkel bei fester Einspannung Null ist. Nun ist, wenn nur Biegungsspannungen berücksichtigt werden,

$$\bar{B}_i = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(X - \frac{P x}{2}\right)^2}{2 E J} dx, \text{ da } A = B = \frac{P}{2} \text{ ist und die Deformationsarbeiten für beide Stabhälften infolge der Symmetrie einander gleich sind. Es folgt}$$

$$0 = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(X - \frac{P x}{2}\right) dx = \left(X \frac{l}{2} - \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{4}\right),$$

woraus sich $X = \frac{Pl}{8}$ ergibt, was wir schon auf einem anderen Wege (Seite 267 ff.) gefunden haben. Würde die ganze Trägerlänge gleichförmig mit q t pro laufenden Meter belastet sein, so

ergäbe sich offenbar die Deformationsarbeit mit $\bar{B}_i = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left[X - \frac{q x}{2}(l - x)\right]^2}{2 E J} dx$ und daher

$$0 = \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial X} = \left[X \frac{l}{2} - \frac{q l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{4} + \frac{q}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{8} \right] \frac{2}{E J},$$

woraus der bekannte Wert $X = \frac{q l^2}{12}$ folgt.

Der in Abb. 173 dargestellte Doppelrahmen sei in den Auflagern 1, 2, 3 gelenkig und unverschieblich gestützt, in 5 stoßen drei Stäbe gelenkig zusammen, in 4 und 6 befinde sich eine steife Stabverbindung, so daß dort die ursprünglich rechten Winkel der Stabachsen auch bei der Gestaltsänderung des Rahmens erhalten bleiben sollen. Sämtliche Gelenke werden als reibungslos vorausgesetzt. Die äußere Belastung wirke gleichförmig verteilt in der Größe q t/m auf den Stab 14. In den Gelenken 1 und 3 entstehen vertikale und horizon-

tale Reaktionen A und C bzw. H_A und H_C , in 2 kann nur eine vertikale Reaktion B entstehen, da dieser Stab unbelastet ist und an seinem oberen gelenkigen Ende 5 kein Biegemoment aufnehmen kann (C wurde in Abb. 173 absichtlich in falscher Richtung eingetragen).

Die zur Verfügung stehenden statischen Gleichungen sind in erster Linie jene, welche das Gleichgewicht gegen Verschieben in horizontaler und vertikaler Richtung und gegen Verdrehen zum Ausdruck bringen, nämlich

$$B - C - A = 0, \quad qb - H_A - H_C = 0, \quad A \cdot 2a - Ba - \frac{qb^2}{2} = 0. \quad (m)$$

Hierzu tritt noch die statische Bedingung, die zum Ausdruck bringt, daß sich in 5 ein reibungsloses Gelenk befindet, was zur Folge hat, daß die Summe der Momente aller Kräfte, die rechts (oder links) vom Gelenk angreifen, mit Bezug auf 5 als Momentenpunkt verschwinden muß. Danach muß die Bedingung

$$-Ca - H_C b = 0 \quad (n)$$

erfüllt werden, aus der $C = -\frac{H_C b}{a}$ folgt. (Das negative Zeichen korrigiert die Richtung von C .)

Wir haben somit vier statische Gleichungen und fünf unbekannte Reaktionen $A, B, C,$

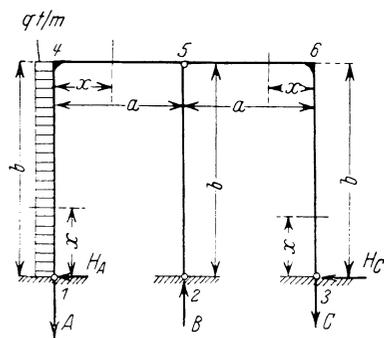


Abb. 173.

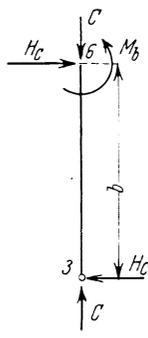


Abb. 173a.

$H_A, H_C,$ der Doppelrahmen ist also einfach statisch unbestimmt.

Wir wählen als statisch unbestimmte Größe $H_A = X$. Die zugeordnete statisch unbestimmte Hauptkonstruktion unter scheidet sich demnach von der in Abb. 173 dargestellten dadurch, daß an Stelle des festen Gelenkes in 1 eine Auflagerkonstruktion tritt, die keine horizontale Reaktion übertragen kann (Rollenkipplager).

Die außer X unbekannt Reaktionen ergeben sich aus den Gleichungen (m) und (n) als Funktionen von X bei geänderter Richtung von C (Abb. 173a) mit

$$H_C = qb - X, \quad C = (qb - X) \frac{b}{a}, \quad A = \left(X - \frac{qb}{2}\right) \frac{b}{a}, \quad B = \left(2X - \frac{3qb}{2}\right) \frac{b}{a}. \quad (o)$$

Zur Bestimmung der Deformationsarbeit wollen wir nur Normalkräfte und Biegemomente berücksichtigen. Es sei A_1 die Deformationsarbeit für den Stab 1 4, der auf Grund der Annahme der Reaktionsrichtungen auf Biegung und Zug beansprucht wird, A_2 die Deformationsarbeit für den Stab 4 5 bei Beanspruchung auf Biegung und Druck, A_3 die Deformationsarbeit für den Stab 5 6 bei Beanspruchung auf Biegung und Druck, A_4 die Deformationsarbeit für den Stab 2 5 bei Beanspruchung auf Druck (Knickung), A_5 die Deformationsarbeit für den Stab 3 6 bei Beanspruchung auf Biegung und Druck. Die angegebene Art der Beanspruchungen kann man bei einiger Übung direkt aus der Abbildung ablesen. Für den Anfänger empfiehlt es sich, die einzelnen Stäbe mit allen auf sie übertragenen Kräften herauszuzeichnen. Beispielsweise ist das Kräftespiel für den Stab 3 6 durch Abb. 173a dargestellt, wozu nur zu bemerken sein dürfte, daß das Spannungsmoment M_b in 6 gleich $H_C b$ sein muß, da sonst kein Gleichgewicht möglich wäre. Die in den einzelnen Stäben aufgespeicherten Deformationsarbeiten werden

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{A^2 b}{2EF_1} + \int_0^b \left(Xx - \frac{qx^2}{2}\right)^2 \frac{1}{2EJ_1} dx, & A_2 &= \frac{X^2 a}{2EF_2} + \int_0^a \left(Xb - \frac{qb^2}{2} - Ax\right)^2 \frac{1}{2EJ_2} dx, \\ A_3 &= \frac{H_C^2 a}{2EF_2} + \int_0^a \frac{(H_C b - Cx)^2}{2EJ_2} dx, & A_4 &= \frac{B^2 b}{2EF_3}, & A_5 &= \frac{C^2 b}{2EF_1} + \int_0^b \frac{(H_C x)^2}{2EJ_1} dx. \end{aligned} \right\} (p)$$

Für die Berechnung der Deformationsarbeiten A_1 und A_5 für die Stäbe 14 und 36 wurden die gleichen Querschnittsflächen F_1 und gleiche Trägheitsmomente J_1 mit Bezug auf die Nulllinien angenommen. Desgleichen liegt der Berechnung der Deformationsarbeiten A_2 und A_3 für die Stäbe 45 und 56 die Annahme gleicher Trägheitsmomente J_2 und Querschnittsflächen F_2 zugrunde. Die Biegemomente in A_2 sind von links aus, jene in A_3 von rechts aus gerechnet. Die Querschnittsfläche des Stabes 25 ist F_3 .

Die einzige Bestimmungsgleichung für X lautet, da der Punkt 1 des Stabes 14 in der Richtung von X unverschieblich vorausgesetzt ist, wenn $\bar{B}_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x} = 0.$$

Nun ist

$$\frac{\partial A_1}{\partial X} = \frac{b}{EF_1} A \frac{\partial A}{\partial X} + \frac{1}{EJ_1} \int_0^b \left(Xx - \frac{qx^2}{2} \right) x dx = \frac{b}{EF_1} \left(X - \frac{qb}{2} \right) \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{EJ_1} \left[X \frac{b^3}{3} - \frac{q}{2} \cdot \frac{b^4}{4} \right],$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial X} = \frac{aX}{EF_2} + \frac{1}{EJ_2} \int_0^a \left[Xb - \frac{qb^2}{2} - \left(X - \frac{qb}{2} \right) \frac{bx}{a} \right] (b - \frac{bx}{a}) dx = \frac{ab^2}{3EJ_2} \left(-\frac{qb}{2} + X \right) + \frac{aX}{EF_2},$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial X} = -\frac{a}{EF_2} (qb - X) - \frac{ab^2}{3EJ_2} (-qb - X), \quad \frac{\partial A_4}{\partial X} = \frac{2b^3}{a^2EF_3} \left(2X - \frac{3qb}{2} \right),$$

$$\frac{\partial A_5}{\partial X} = \frac{(X - qb)b^3}{a^2EF_1} - \frac{(X - qb)b^3}{3EJ_1}.$$

Hierzu wurden die Gleichungen (o) benützt, die sämtliche Reaktionen durch die gegebene Belastung und durch die statisch unbestimmte Größe ausdrücken. Es muß sonach sein:

$$X \left[\frac{2b^3}{3J_1} + \frac{2ab^2}{3J_2} + \frac{2b^3}{a^2F_1} + \frac{2a}{F_2} + \frac{4b^3}{a^2F_3} \right] = \frac{11qb^4}{24J_1} + \frac{ab^3q}{2J_2} + \frac{3qb^4}{2a^2F_1} + \frac{qab}{F_2} + \frac{3qb^4}{a^2F_3}.$$

Setzen wir zur weiteren Rechnung $J_1 = J_2$, $F_1 = F_2 = F_3$, so kann aus dieser Gleichung der Wert

$$X = \frac{\frac{qb^3}{2J_1} \left(\frac{11b}{12} + a \right) + \frac{qb}{F_1} \left(\frac{9b^3}{2a^2} + a \right)}{\frac{2b^2}{3J_1} (b + a) + \frac{1}{F_1} \left(2a + \frac{6b^3}{a^2} \right)} \quad (q)$$

gefolgert werden.

Mit dem gefundenen Wert von X können sämtliche Reaktionen berechnet werden. Gewöhnlich liegen in praktischen Fällen solche Verhältnisse vor, daß die auf Rechnung der Normalkräfte auftretenden Zusatzglieder, die in der zuletzt erhaltenen Formel in den F_1 enthaltenen Ausdrücken erscheinen, wegen ihrer verhältnismäßigen Kleinheit vernachlässigt werden können. In einem solchen Falle geht der gefundene Wert von X in

$$X = \frac{3}{4} qb \frac{\left(a + \frac{11b}{12} \right)}{a + b} \quad (q')$$

über.

Die vorstehend behandelten Stabwerke sind durchwegs äußerlich statisch unbestimmt. Wie aus den auf Seite 130ff. gemachten Bemerkungen hervorgeht, kann jedes äußerlich statisch unbestimmte System durch Einführung von Stützstäben in ein innerlich statisch unbestimmtes System übergeführt werden, was besonders vorteilhaft ist, wenn die Auflager verschieblich (verdrehbar) sind.

Das in Abb. 172 dargestellte Stabwerk könnte z. B. dadurch in ein innerlich statisch unbestimmtes (Abb. 172i) verwandelt werden, daß man im Punkte 3 zwei starre Stützstäbe 34 und 35 anschließt. Der Stab 35 wird parallel und gleich lang mit 12 gewählt und einerseits mit 23 steif verbunden, andererseits in 5 reibungslos gelenkig und unverschieblich gegen einen starr gedachten Körper abgestützt. Der Stab 34 fällt in die Fortsetzung des Stabes 23 und ist in 3 gelenkig an das Stabwerk angeschlossen und in 4 reibungsgelenkig und unverschieblich auf einem starr gedachten Körper gelagert. Die Reaktion in 4 fällt in die Achse des Stabes 34, da derselbe an seinen beiden Enden reibungslose Gelenke

trägt, die keine Biegemomente übertragen können. Da die Stäbe 34 und 35 starr gedacht sind und 4 und 5 unverschieblich sein sollen, kann sich der Punkt 3 nicht bewegen und infolge der steifen Verbindung von 35 mit 23 muß die Tangente an die elastische Linie des Stabes 23 in 3 horizontal bleiben, wie es dem gegebenen Stabwerk entspricht. Für das erhaltene neue Stabwerk kann z. B. das Biegemoment, das in 3 von 23 auf 35 übertragen wird, als die eine innerlich statisch unbestimmte Größe, die horizontale Druckkraft, welche in 3 vom Stabe 23 auf den Stab 34 übertragen wird, als die zweite innerlich statisch unbestimmte Größe eingeführt werden. Das Moment, das in 3 übertragen wird, ist $H_B \cdot h = X_1$, die in 3 übertragene Druckkraft ist $H'_C = X_2$.

Jedes innerlich statisch unbestimmte System kann auf Grund des Prinzipes der virtuellen Arbeit in der Form nach Gleichung (68b) auf Seite 118 behandelt werden. In dieser Beziehung ist B_i , die Deformationsarbeit, als Funktion der Spannungskomponenten betrachtet. Werden die Spannungskomponenten als Funktionen der äußeren Kräfte und gewisser innerer statisch unbestimmter Kräfte und Momente dargestellt, so sagt die Beziehung aus, daß letztere als die einzig

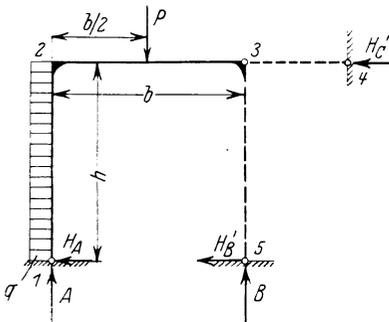


Abb. 172i.

Variablen die Deformationsarbeit zu einem Minimum machen. Der Ausdruck für dieses Minimum sind n Gleichungen, die besagen, daß der Differentialquotient der Deformationsarbeit nach jeder der n statisch unbestimmten Größen gleich Null sein müssen. Diese n Gleichungen sind die Bestimmungsgleichungen für die n statisch unbestimmten Größen.

Das Schema der Lösung schließt sich im übrigen völlig an das oben bei Anwendung des Castiglianoschen Lehrsatzes bei Anwendung auf statisch unbestimmte Systeme angegebene an. Erwähnenswert ist nur noch, daß die statischen Gleichungen für innerlich statisch unbestimmte

Systeme sich nicht nur wie bei äußerlich statisch unbestimmten Systemen auf das Gleichgewicht der äußeren Kräfte des ganzen Systemes, sondern auch auf die für Teile des Systemes (Stäbe) geltenden statischen Gleichgewichtsbedingungen beziehen. (Siehe hierzu auch das Beispiel auf Seite 121 ff.) In diese treten naturgemäß neben den äußeren Kräften auch die innerlich statisch unbestimmten Größen ein.

Wenn das Stabwerk in Abb. 172 durch die geschilderte Ergänzung zu einem innerlich statisch unbestimmten System nach Abb. 172i gemacht wird, verschwindet die Deformationsarbeit der starren Stützstäbe und wir erhalten offenbar Gleichungen zur Bestimmung der innerlich statisch unbestimmten Größen, welche mit jenen des äußerlich statisch unbestimmten Stabwerkes nach Abb. 172 völlig übereinstimmen müßten, wenn für letzteres das Einspannungsmoment und die Stützreaktion in 3 als statisch unbestimmte Größen gewählt würden. (Siehe hierzu auch das Beispiel des nachgiebig eingespannten Stabes auf Seite 131).

Für den durch Abb. 33 Seite 123 dargestellten Rahmen kann das zwischen den Stäben in den Knotenpunkten übertragene Einspannungsmoment M als innerlich statisch unbestimmte Größe eingeführt werden. Wenn die Stäbe des ganzen Rahmens aus dem gleichen Materiale hergestellt sind und die Stäbe 12 und 34 die gleichen Dimensionen mit dem Trägheitsmoment J_0 und der Querschnittsfläche F_0 besitzen, wenn ferner den Stäben 14 und 23 das gleiche Trägheitsmoment J_1 und die gleiche Querschnittsfläche F_1 zukommt, so stellt sich der Lösungsvorgang zur Bestimmung der statisch unbestimmten Größe wie folgt:

Die Deformationsarbeit der beiden durch P belasteten, auf Biegung und Schub beanspruchten Stäbe 12 und 34 ist bei Vernachlässigung der Schubspannungen durch

$$2 A_1 = 4 \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{P}{2} x - X\right)^2}{2 E J_0} dx \text{ gegeben, wobei davon Gebrauch gemacht wurde, daß die in je}$$

einem Stab steckende Deformationsarbeit infolge der symmetrischen Verhältnisse der doppelten in einem halben Stabe steckenden Arbeit gleichkommt. Die Deformationsarbeit, welche in den auf Biegung und Zug beanspruchten Stäben 1, 4 und 2, 3 aufgespeichert ist,

ist durch $2 A_2 = 2 \int_0^a \frac{X^2 dx}{2 E J_1} + \frac{2 P^2 a}{4 \cdot 2 E F_1}$ bestimmt. Es muß nunmehr

$$\frac{\partial A}{\partial X} = 2 \frac{\partial (A_1 + A_2)}{\partial X} = - \frac{4}{E J_0} \int_0^{\frac{b}{2}} \left(\frac{P}{2} x - X \right) dx + \frac{2}{E J_1} \int_0^a X dx = 0,$$

d. h. $\left(\frac{P}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{4} - X \frac{b}{2} \right) \frac{2}{J_0} = \frac{X a}{J_1}$ und $X = \frac{P b^2}{8 \left(\frac{a}{J_1} + \frac{b}{J_0} \right)}$ sein.

Als zweites Beispiel diene der in der Mitte unterfangene Träger nach Art der Abb. 32, Seite 122, in der wir uns im Punkte C keine steife Verbindung, sondern ein Halb gelenk vorstellen wollen, durch das der Stab CD , ohne daß der Stab AB in seinem Verlaufe hiervon betroffen wird, angelenkt ist. Als Werkstoff sei durchweg Flußeisen verwendet. Die Stäbe AD und BD seien gleich dimensioniert mit der Querschnittsfläche F_1 und der Länge l_1 , der Stab CD habe die Länge l_2 und die Querschnittsfläche F_2 , dem Stabe AB komme die Länge l , das Trägheitsmoment J mit Bezug auf die Nulllinie und die Querschnittsfläche F zu. Die, wie in Abb. 174 dargestellt, aufgebrauchte Belastung wirkt in einer Längssymmetrieebene des Stabwerkes. Dasselbe ist, wie auf Seite 121 ff. ausgeführt wurde, innerlich einfach statisch unbestimmt. Die in der Strebe CD auftretende Stabkraft, die offenbar eine Druckkraft ist, werde als statisch unbestimmte Größe eingeführt. Die statischen Gleichungen für das ganze äußerlich statisch bestimmte System für die angegebene Belastung lauten mit A, B als Auflagerreaktionen:

$$A + B = P + \frac{ql}{2}, \quad Al - P(l - a) - \frac{ql^2}{8} = 0,$$

woraus $A = \frac{ql}{8} + \frac{P(l - a)}{l}, \quad B = \frac{3ql}{8} + \frac{Pa}{l}$ folgt.

Wir wenden uns nunmehr zu den statischen Gleichungen für die einzelnen Stäbe des Systemes. Das Gleichgewicht des Knotenpunktes D verlangt die Erfüllung der Bedingung $2 S_1 \cos \alpha = -X$ (siehe das Kraftdreieck in Abb. 174a entsprechend dem Schnitt $s_4 s_4$ in Abb. 32, der die Stäbe AD, CD und BD trifft), worin S die Stabkräfte in den Stäben AD und BD , welche Zugkräfte sind, bedeuten. Das Gleichgewicht der Knotenpunkte A und B verlangt, daß im Stabe AB eine Druckkraft S_2 von der Größe $S_2 = -S_1 \cos \beta = \frac{X}{2 \cos \alpha} \sin \alpha = \frac{X}{2} \operatorname{tg} \alpha$ auftritt. (Schnitte $s_2 s_2, s_3 s_3$ um A und B .) Es sind sonach die Stäbe AD und BD durch Zugkräfte $S_1 = \frac{-X}{2 \cos \alpha}$, die Stäbe CD und AB durch Druckkräfte X bzw. $\frac{X}{2} \operatorname{tg} \alpha$ beansprucht; außerdem bewirkt die äußere Belastung noch eine Beanspruchung des Stabes AB auf Biegung und Schub.

Es bezeichne A_1 die Deformationsarbeit für Stab AD bzw. BD , A_2 die Deformationsarbeit für den Stab CD , A_3 die Deformationsarbeit für den Stab AB . Die gesamte Deformationsarbeit ist sonach gegeben durch $A = 2 A_1 + A_2 + A_3$. Die Deformationsarbeiten A_1 und A_2 lassen sich in bekannter Weise durch $A_1 = \frac{S_1^2 l_1}{2 E F_1} = \frac{X^2 l_1}{8 \cos^2 \alpha E F_1}$ und $A_2 = \frac{X^2 l_2}{2 E F_2}$ ausdrücken. Die Deformationsarbeit A_3 finden wir an Hand der Abb. 174,

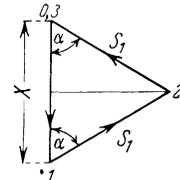


Abb. 174a.

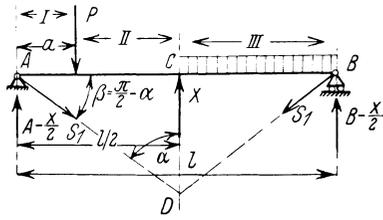


Abb. 174.

welche den isoliert gedachten Stab AB mit den für ihn äußeren Kräften zeigt. Die für das ganze System innerlich statisch unbestimmte Größe erscheint für den Stab AB als äußerlich statisch unbestimmte Größe. Die Deformationsarbeit A'_3 infolge der Beanspruchung des Stabes AB auf Druck hat den Wert $A'_3 = \frac{S_2^2 l}{2EF} = \frac{X^2 l}{8EF} \operatorname{tg}^2 \alpha$. Die Deformationsarbeit A''_3 infolge der Beanspruchung auf Biegung (Schubspannungen sollen wieder vernachlässigt werden), ist bei Einteilung der ganzen Länge des Stabes in die Abschnitte I, II und III durch

$$A''_3 = \frac{1}{2EJ} \left[\int_0^a \left(Ax - \frac{X}{2} x \right)^2 dx + \int_a^{\frac{l}{2}} \left[Ax - \frac{X}{2} x - P(x-a) \right]^2 dx - \int_{\frac{l}{2}}^l \left[Ax - P(x-a) - \frac{X}{2}(l-x) - \frac{q}{2} \left(x - \frac{l}{2} \right)^2 \right]^2 dx \right]$$

bestimmt. Die Deformationsarbeit A_3 ist die Summe der Deformationsarbeiten A'_3 und A''_3 . Setzt man in die Minimumsbedingung $0 = \frac{\partial A}{\partial X} = 2 \frac{\partial A_1}{\partial X} + \frac{\partial A_2}{\partial X} + \frac{\partial A_3}{\partial X}$ die Werte von A_1, A_2 und A_3 ein, so erhält man

$$0 = \frac{1}{2} \frac{X l_1}{\cos^2 \alpha E F_1} + \frac{X l_2}{E F_2} + \frac{1}{4} X \frac{l}{E F} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{E J} \left[\frac{X l^3}{48} - \frac{P a}{48} (3 l^2 - 4 a^2) - \frac{5 q l^4}{48} \right],$$

woraus

$$X = \frac{\left[\frac{P a}{48} (3 l^2 - 4 a^2) + \frac{5 q l^4}{48} \right] \frac{1}{J}}{\frac{l^3}{48 J} + \frac{l \operatorname{tg}^2 \alpha}{4 F} + \frac{l_1}{2 \cos^2 \alpha F_1} + \frac{l_2}{F_2}} \quad (r)$$

folgt. Es ist gut, nach dem Erhalten eines so verhältnismäßig komplizierten Ausdruckes die Dimension zu kontrollieren, wodurch man auf grobe Fehler aufmerksam gemacht wird; in unserem Falle steht im Zähler die Dimension kg/cm , im Nenner die Dimension l/cm , also hat X die Dimension kg , wie es sein muß.

Setzen wir $q = 0$ und $a = \frac{l}{2}$, was darauf hinausläuft, daß wir die angenommene Konstruktion nur durch eine in der Mitte angreifende Einzelkraft P belastet denken, so erhält die statisch unbestimmte Größe X den Wert

$$X = \frac{\frac{P l^3}{48 J}}{\frac{l^3}{48 J} + \frac{l \operatorname{tg}^2 \alpha}{4 F} + \frac{l_1}{2 \cos^2 \alpha F_1} + \frac{l_2}{F_2}} \quad (r')$$

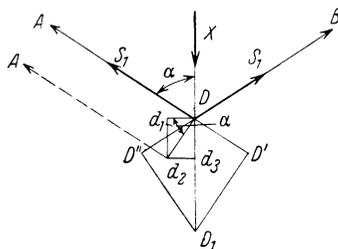


Abb. 174 b.

Diesen Wert können wir auf die folgende Weise der Anschauung näher bringen. Denken wir uns den Stab AB als einfachen Balkenträger durch die Kraft P in der Mitte belastet, so erhalten wir als positiv gedachte Durchbiegung nach abwärts in der Mitte $\delta_1 = \frac{P l^3}{48 E J}$; eine an dem Träger AB in der Mitte nach aufwärts wirkende

Kraft X ruft eine negative Durchbiegung nach aufwärts hervor von der Größe $\delta_2 = \frac{X l^3}{48 E J}$. Bei gleichzeitiger Wirkung von P und X bleibt eine Durchbiegung nach abwärts in der Größe $\delta_1 - \delta_2$. Der Punkt D (Abb. 174 b) senke sich um den Betrag δ , dann muß

$$\delta_1 - \delta_2 - \delta = \Delta l_2, \quad (\alpha)$$

wenn Δl_2 die Verkürzung des Stabes CD vorstellt, die nach dem Hookeschen Gesetze durch $\Delta l_2 = \frac{X l_2}{E F_2}$ gegeben ist. Die Senkung δ ergibt sich aus der folgenden Betrachtung. Die Stäbe AD und BD erfahren infolge der Zugbeanspruchung je eine

Verlängerung von $DD' = DD'' = \frac{S_1 l_1}{EF_1}$, infolgedessen erfährt der Punkt D eine Verschiebung. Die verschobene Lage des Punktes D könnten wir als Schnitt zweier Kreise vom Radius $AD' = BD''$ und den Mittelpunkten in A und B erhalten; da aber die Verschiebungen sehr klein sind, erscheinen die zwei in Betracht kommenden Schnittelelemente der Kreise als zwei in D' bzw. D'' normal auf AD' bzw. BD'' gezogene sehr kleine Strecken $D'D_1 = D''D_1$ und der verschobene Punkt D wird demzufolge durch D_1 dargestellt.

Aus der Abbildung folgt ohne Rücksicht auf das Zeichen $DD_1 = \frac{DD'}{\cos \alpha} = \frac{S_1 l_1}{EF_1 \cos \alpha} = \frac{X l_1}{2 EF_1 \cos^2 \alpha}$. Da der Stab AB noch eine Zusammendrückung von der Größe $\frac{S_2 l}{EF} = \frac{X l}{2 EF} \operatorname{tg} \alpha$ erfährt, erhält D , wenn dieser Punkt als dem Stab AD angehörig betrachtet wird, neben der Verschiebung DD' noch eine zweite Verschiebung $DD_1 = \frac{X l}{4 EF} \operatorname{tg} \alpha$. Der Punkt D würde, wenn die Verschiebung infolge der Druckbeanspruchung von AB allein vorhanden wäre, nach d_2 gelangen, wobei Dd_2 normal auf AD und gleich $Dd_1 \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{X l}{4 EF} \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\cos \alpha}$ wäre, das entspräche aber einer Senkung von D im Betrage von $Dd_3 = d_1 d_2 = Dd_1 \operatorname{tg} \alpha = \frac{X l}{4 EF} \operatorname{tg}^2 \alpha$.

Daraus ergibt sich die gesamte Senkung des Knotenpunktes D infolge der Verlängerung des Stabes AD bzw. BD und der Druckbeanspruchung des Stabes AB mit $\delta = \frac{X l}{4 EF} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{X l_1}{2 EF_1 \cos^2 \alpha}$. Die obige Beziehung (α) lautet sonach, wenn die gefundenen Werte eingesetzt werden,

$$\frac{Pl^3}{48 EJ} - \frac{Xl^3}{48 EJ} - \frac{Xl}{4 EF} \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{Xl_1}{2 EF_1 \cos^2 \alpha} = \frac{Xl_2}{EF_2},$$

woraus der bereits gefundene Wert von X folgt.

Durch diese Auseinandersetzung ist auch der graphische Weg zur Konstruktion von X , der für komplizierte äußere Belastungen empfehlenswert ist, festgelegt. Man belastet zuerst den isolierten Träger AB in Abb. 174 und bestimmt die Durchbiegung in der Mitte des Balkens unter Zuhilfenahme des graphischen Verfahrens von Mohr (Seite 271 ff.). Das gleiche Verfahren könnte auch angewendet werden, um die Durchbiegung durch eine in der Mitte des Stabes nach aufwärts wirkende Kraft I zu erhalten. Die durch die Kraft X nach aufwärts erzielte Durchbiegung ist X -mal so groß als jene, welche der Belastung I entspricht.

Anlässlich der Aufstellung der n linearen Gleichungen zur Bestimmung von n statisch unbestimmten Größen nach der Kraftmethode unter Zuhilfenahme des Prinzipes der virtuellen Arbeit wurde bereits des Prinzipes von Maxwell über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen gedacht, das sich in jenen Gleichungen in der Symmetrie der Determinante ihrer bei den statisch unbestimmten Größen stehenden Koeffizienten auswirkt.

Man kann sich umgekehrt des Maxwellschen Satzes, allgemeiner noch des Satzes von Betti (Seite 136 ff.) auch bedienen, um die Bestimmungsgleichungen für die statisch unbestimmten Größen zu gewinnen; das ganze Verfahren läuft dann wesentlich darauf hinaus, die vorgeschriebenen Werte einer oder mehrerer Deformationsgrößen, mit Benutzung der Grundlagen, welche der Satz von Maxwell oder Betti bietet, als von den gegebenen Kräften und den statisch unbestimmten Größen bewirkt erscheinen zu lassen. Daraus ist ersichtlich, daß der Lösungsvorgang eigentlich als eine Kraftmethode aufgefaßt werden muß.

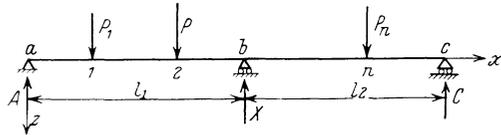


Abb. 175.

Es soll z. B. in dem in Abb. 175 dargestellten einfach statisch unbestimmten Träger die als statisch unbestimmte Größe X eingeführte am Auflager b wirkende Reaktionskraft bestimmt werden, wenn der Träger ac durch die Einzelkräfte $P_1 \dots P_n$ auf gerade Biegung beansprucht und vorausgesetzt wird, daß das Auflager b im vertikalen Sinne unverschieblich ist. Die vorgeschriebene Durchbiegungsgröße im Querschnitt durch b ist also gleich Null.

Denken wir uns den zugeordneten statisch bestimmten Hauptträger, der aus dem gegebenen Träger dadurch entsteht, daß wir uns das Auflager b wegdenken, durch eine in b nach abwärts wirkende Kraft 1 belastet, so entsteht in b eine Durchbiegung nach abwärts, die wir mit a_{bb} bezeichnen wollen, während in den Querschnitten $1, 2, \dots, n$, in welchen die Kräfte $P_1 \dots P_n$ wirken, sich Durchbiegungen $a_{1b}, a_{2b}, \dots, a_{nb}$ einstellen, die nach dem Maxwell'schen Prinzip der Reihe nach den Werten $a_{b1}, a_{b2}, \dots, a_{bn}$, d. h. jenen Durchbiegungen gleichkommen, welche im Querschnitte b des statisch bestimmten Hauptträgers entstünden, wenn er bzw. in den Querschnitten $1, 2, \dots, n$ mit nach abwärts wirkenden Kräften je gleich 1 belastet würde. Wenn im Querschnitte 1 des zugeordneten, statisch bestimmten Hauptträgers nicht die Kraft 1 , sondern P_1 für sich allein wirkt, so entsteht in b eine Durchsenkung $P_1 a_{b1} = P_1 a_{1b}$, die Kraft P_n erzeugt in b eine Durchsenkung $P_n a_{bn} = P_n a_{nb}$ usw. Wirken sämtliche Kräfte $P_1 \dots P_n$ gleichzeitig auf den statisch bestimmten Hauptträger ein, so entsteht im Auflager b nach dem Gesetze der Superposition

die Durchbiegung $\sum_{r=1}^{r=n} P_r a_{rb}$. Wirkt im Auflager b des statisch bestimmten Hauptträgers nicht die Kraft 1 nach abwärts, sondern die Kraft X nach aufwärts, so entsteht eine Durchbiegung $-X a_{bb}$ nach aufwärts. Wirken die Kräfte $P_1 \dots P_n$ und die Kraft X , so entsteht in b die vorgeschriebene Durchbiegung Null, d. h. es muß $\sum_{r=1}^{r=n} P_r a_{rb} - X a_{bb} = 0$ sein, woraus

$$X = \frac{\sum_{r=1}^{r=n} P_r a_{rb}}{a_{bb}} \tag{179}$$

folgt.

Die Beziehung (179) kann man auch als Ausdruck des Satzes von Betti auffassen, wenn die eine Kraftgruppe durch $P_1 \dots P_n$, die zweite Kraftgruppe durch X repräsentiert wird. Es ist dann nach Gleichung (81) auf Seite 136 $\sum_{r=1}^{r=n} P_r x_{rb} = X \sum x_{br}$, da aber $x_{rb} = X a_{rb}$ und infolge der Unverschieblichkeit des Stützpunktes $\sum x_{br} = X a_{bb}$ sein muß, folgt für X der bereits berechnete Wert.

Die Durchbiegungen $a_{1b} \dots a_{nb}$ und a_{bb} sind gegeben, wenn man für die Belastung 1 im Querschnitte b des statisch bestimmten Hauptträgers die elastische Linie kennt, welche z. B. mit Hilfe des graphischen Verfahrens von Mohr gefunden werden kann (Abb. 175 a)

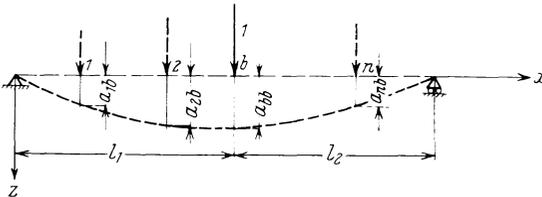


Abb. 175 a.

Man hat einfach die den Querschnitten $1, 2, \dots, n, b$ entsprechenden Ordinaten der elastischen Linie abzunehmen, die bereits den unter b entstehenden Durchbiegungen entsprechen, wenn der statisch bestimmte Hauptträger durch eine in dem betreffenden Querschnitt stehende Kraft 1 belastet ist. Die auf die genannte Art konstruierte elastische Linie gibt sonach einen Überblick über den Einfluß, den eine über den

Träger wandernde Last 1 auf die Durchbiegungen im Querschnitt b besitzt. Sie heißt daher auch Einflußlinie für die Durchbiegungen im Querschnitt b , und die Ordinaten der Durchbiegungen werden Einfluordinaten für die Durchbiegung im Querschnitt b genannt. Derart elastische Linien können natürlich für die Belastung 1 in jedem beliebigen Querschnitt gezeichnet werden.

Es braucht nicht weiter ausgeführt zu werden, daß für den Fall, als das Auflager b bei Einflußnahme der Kräfte $P_1 \dots P_n$ eine vorgeschriebene Verschiebung δ zuläßt, im Zähler der Beziehung (179) δ abgezogen werden muß.

Hätte der kontinuierliche Träger nicht zwei, sondern p Öffnungen, so würden die dann auftretenden $p - 1$ statisch unbestimmten Auflagerreaktionen in ähnlicher Weise bestimmbar sein. Nennen wir die Auflager, in welchen die statisch unbestimmten Größen angreifen, der Reihe nach a, b, c, \dots, l und die Querschnitte, in welchen die Kräfte $P_1 \dots P_n$ angreifen, wieder $1 \dots n$. Für die den Auflagern zugeordneten, statisch unbestimmten Größen führen wir die Zeichen $X_a \dots X_l$ ein. Wir zeichnen $p - 1$ elastische Linien des statisch bestimmten Hauptträgers für je eine nach abwärts wirkende Kraft 1 , welche in je einem von $p - 1$ Auflagern, die den statisch unbestimmten Größen zugeordnet sind, wirkt; aus den elastischen Linien entnehmen wir die Durchbiegungen, welche je eine Kraft 1 an der Wirkungsstelle der Kräfte $P_1 \dots P_n$ resp. die am Auflager selbst wirkende Kraft in dem betreffenden Auflager erzeugt.

Die Bedingung, daß das Auflager a unverschieblich ist, wird dann ausgedrückt durch die Bedingung $\sum_{r=1}^{r=n} P_r a_{ra} - X_a a_{aa} - X_b a_{ab} \dots - X_l a_{al} = 0$ oder kürzer durch

$$\sum_{r=1}^{r=n} P_r a_{ra} = \sum_{p=a}^{p=l} X_p a_{ap}. \tag{179a}$$

a_{aa} ist die Verschiebung nach aufwärts im Auflager a , wenn $X_a = 1$ am statisch bestimmten Hauptträger nach aufwärts wirkt, entnehmbar aus der elastischen Linie, die für $X_a = 1$ gezeichnet wurde, als Einflußkoordinate unter dem Auflager a , a_{al} ist die Verschiebung nach aufwärts im Auflager a , wenn $X_l = 1$ am zugeordneten statisch bestimmten Hauptträger nach aufwärts wirkt, entnehmbar als Einflußkoordinate unter a aus der für $X_l = 1$ gezeichneten elastischen Linie, usw. a_{ra} ist die bei Belastung des statisch bestimmten Hauptträgers durch eine Kraft 1 im Kraftangriffsquerschnitte r unter dem Auflager a entstehende Durchbiegung entnehmbar aus der für $X_a = 1$ gezeichneten elastischen Linie als Einflußkoordinate, die dem Querschnitte r entspricht usw. Offenbar gibt es so viele Gleichungen (240a), als statisch unbestimmte Auflagerreaktionen eingeführt wurden.

Das entwickelte Verfahren könnte z. B. auch auf den durch Abb. 172 dargestellten Halbrahmen verwendet werden, den wir uns nur durch die Kraft P allein belastet denken. Die vorgeschriebenen Deformationsbedingungen sind bei der auf Seite 380 getroffenen Wahl der statisch unbestimmten Größen dann durch $\delta_3 = 0$, $\varphi_1 = 0$ gegeben, wenn δ_3 den Verdrehungswinkel am Auflager 3 und φ_1 die Verschiebung am Auflager 1 in horizontaler Richtung vorstellen. Es wären dann, wenn das graphische Verfahren verwendet werden soll, die den Belastungsfällen 1 und 2 ($X_1 = 1$ bzw. $X_2 = 1$) des statisch bestimmten Hauptträgers entsprechenden Biegunislinien der isoliert gedachten Stäbe 1 2 und 2 3 zu konstruieren. Schneller kommt man in diesem einfachen Falle zum Ziel, wenn man das Mohrsche rechnende Verfahren als Hilfsmittel verwendet. Längenänderungen der Stäbe 1 2 und 2 3 werden dabei nicht in Betracht gezogen. (Läuft auf die Vernachlässigung der Normalkräfte hinaus).

Infolge der gegebenen Belastung P wird am Auflager 3 ein Verdrehungswinkel $\delta'_3 = Pp$ hervorgerufen, wenn p die der Angriffsstelle von P entsprechende Einflußkoordinate der für $X_1 = 1$ gezeichnet gedachten elastischen Linie von 2 3 bedeutet. Die Einflußkoordinate p unter der Last P ist, wie man durch das Mohrsche rechnerische Verfahren leicht findet (Balkenträger 2 3 durch Momentenfläche $\frac{M_B}{EJ_2}$ nach Art der Abb.172e' belastet), $p = + \frac{b^2}{16EJ_2}$.

somit wird $\delta'_3 = + \frac{Pb^2}{16EJ_2}$. Durch X_1 wird im Querschnitt 3 ein Verdrehungswinkel bewirkt, der sich nach Abb.172e' nach dem gleichen Verfahren als Querkraft in 3 mit $\frac{X_1}{EJ_2} \left(\frac{b}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{b} - \frac{b}{2} \right) = - \frac{X_1 b}{3EJ_2}$ berechnet. Schließlich sieht man leicht, daß der im Querschnitt 3 infolge des dem Belastungszustande 2 entsprechenden, in 2 übertragenen Momentes $\bar{M}'_3 = X_2 h$ entstehende wieder als Querkraft der auf EJ_2 reduzierten Momentenfläche nach Abb. 172f' zu berechnende Verdrehungswinkel $\delta''_3 = \frac{X_2}{EJ_2} \left(\frac{hb}{2} - \frac{hb}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{b} \right) = \frac{X_2 hb}{6EJ_2}$ ist. Es muß $\delta_3 = 0 = \delta'_3 + \delta''_3 + \delta'''_3$ sein. Setzt man in diese Bedingung die gefundenen Werte $\delta'_3, \delta''_3, \delta'''_3$ ein, so erhalten wir eine Gleichung, welche mit der ersten der Gleichungen (k) auf Seite 384 übereinstimmt, wenn man in derselben $q = 0$ setzt und die auf die Normalkräfte bezüglichen Glieder wegläßt. In ähnlicher Weise kann man die zweite der schematisierten Gleichungen (k) gewinnen, wenn wir die Verschiebungen, die im Auflager 1 durch die Kräfte P, X_1 und X_2 bewirkt werden, nach Mohr unter Zuhilfenahme des Maxwell'schen Prinzips berechnen, wobei zu bedenken ist, daß durch X_1 und X_2 im Querschnitte 2 des Stabes 2 3 erzeugte Verdrehungswinkel mit h multipliziert je einer Verschiebungskomponente des Punktes 1 entsprechen.

2. Bestimmung von Deformationsgrößen.

Zunächst soll gezeigt werden, wie der Clapeyronsche Satz über die Arbeit [Gleichung (62) auf Seite 108] zur Bestimmung von Deformationsgrößen herangezogen werden kann.

Auf einen frei aufliegenden Balkenträger (Abb. 108, Seite 252) wirkt in der Mitte eine Kraft P . Es ist unter Vernachlässigung des Eigengewichtes die Durchbiegung in der Mitte

unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß Beanspruchung auf gerade Biegung vorliegt. Die Gleichung (62) geht in

$$A_1 = B_i \quad (a)$$

über, worin A_1 die Arbeit der äußeren Kräfte, B_i die Deformationsarbeit vorstellt. Letztere ist für unsere Zwecke als Funktion der äußeren Kräfte darzustellen, hat also dieselbe Form wie \bar{B}_i in Gleichung (74) auf Seite 128. Nennen wir f die Durchbiegung in der Mitte, so muß dem entsprechend bei Vernachlässigung der Arbeit der Schubspannungen die Beziehung

$$\frac{P f}{2} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{By}^2}{2 E J_y} dx = \frac{1}{E J_y} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{P}{2} x \right)^2 dx = \frac{P l^3}{96 E J_y} \quad (b)$$

zutreffen, woraus der bekannte Wert $f = \frac{P l^3}{48 E J_y}$ folgt.

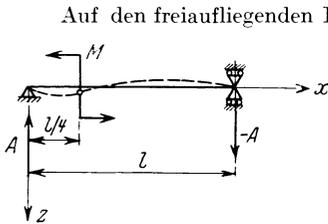


Abb. 176.

Auf den freiaufliegenden Balkenträger (Abb. 176), für welchen das rechts angenommene Rollenkipplager doppelseitig widerstehend gedacht ist, wirke ein Drehungsmoment M in der Entfernung $\frac{l}{4}$ vom linken Auflager. Es ist der Verdrehungswinkel an der Wirkungsstelle des Moments bei Vernachlässigung des Eigengewichtes unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß Beanspruchung auf gerade Biegung vorliegt. Die Auflagerreaktion am linken Auflager ist offenbar aus

$$A = \frac{M}{l} \text{ bestimmbar. Die Durchbiegung erfolgt entsprechend}$$

dem Momentenschaubild auf die skizzierte Art.

Nach dem Satz von Clapeyron wird, wenn der Verdrehungswinkel im Querschnitt $\frac{l}{4}$ durch φ bezeichnet wird,

$$E J_y \frac{M \varphi}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{4}} \left(\frac{M}{l} x \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{l}{4}}^l \left(\frac{M}{l} x - M \right)^2 dx. \quad (c)$$

Aus der vorstehenden Gleichung folgt

$$\varphi = \frac{7}{48} \cdot \frac{M l}{E J_y}. \quad (d)$$

Nachdem M im negativen Sinne wirkt, kommt φ negativ heraus. Würde das Auflager A um eine gegebene Größe u in vertikaler Richtung verschieblich sein (u ist negativ, wenn die Verschiebung entgegengesetzt der Richtung der positiven z -Achse erfolgt), so müßte auf der linken Seite der Ausgangsgleichung zur Berechnung des Winkels φ noch ein Glied $-\frac{M}{2l} u E J_y$ hinzugefügt werden.

In den beiden vorstehenden Fällen könnte auch mit Vorteil der Satz von Castigliano [Gleichung (74) auf Seite 128] zur Verwendung kommen.

Nach diesem Satze ist $f = \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial P}$, wobei $\bar{B}_i = \frac{1}{E J_y} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{P}{2} x \right)^2 dx$, woraus das bereits

gefundene Resultat sich ergibt. In ähnlicher Weise wird $\varphi = \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial M}$, worin \bar{B}_i den Wert der rechten Seite der Beziehung (c) besitzt.

Der Clapeyronsche Satz ist zur Bestimmung von Verschiebungen und Verdrehungen von Punkten der Achse bzw. Querschnitten eines Stabes nur dann mit Vorteil verwendbar, wenn, wie in den beiden vorhergehenden Beispielen, in dem Querschnitte, für den die Verschiebung (Verdrehung) bestimmt werden soll,

eine äußere Kraft (äußeres biegendes Moment) wirkt, und diese Kraft (Moment) die einzige ist, welche von den angreifenden äußeren Kräften eine Arbeit leistet. Für verschiebbliche Auflager müßte bei Anwendung des Clapeyronschen Satzes natürlich die Arbeit der Auflagerkräfte ermittelbar, d. h. es müßten die Werte der an den Auflagern auftretenden Verschiebungen und Verdrehungen von vornherein gegeben sein. Sind die in vorstehendem angegebenen Voraussetzungen nicht zutreffend, so verwendet man das Prinzip der virtuellen Arbeit nach Gleichung (68') auf Seite 117 oder bei festen Auflagern (besser gesagt bei solchen Auflagern, bei welchen die Auflagerreaktionen keine Arbeit leisten) den Satz von Castigliano nach Gleichung (74) auf Seite 128. Bei Arbeitsleistung der Auflagerreaktionen muß an Stelle des letztgenannten Satzes die allgemeinere Beziehung (72) auf Seite 127 zur Verwendung kommen.

Soll das virtuelle Arbeitsprinzip zur Verwendung gelangen, so legt man als wirklichen Verschiebungszustand den der Belastung entsprechenden zugrunde. Als gedachter Belastungszustand wird bei unverschiebblichen Auflagern ein solcher gewählt, daß die demselben zukommende virtuelle Arbeit dem Zahlenwerte nach gleich der Verschiebungsgröße wird. Das wird dadurch erreicht, daß man in der Richtung der Verschiebung (in der Ebene der Verdrehung) eine virtuelle Kraft (Moment) gleich 1 anbringt. Sind die Auflager verschieblich bei möglicher virtueller Arbeitsleistung der Auflagerkräfte, so wählt man die virtuelle Belastung wie für unverschiebbliche Auflager angegeben wurde, hat aber dann für die Arbeitsgleichung die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte zu berücksichtigen. Siehe den Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (72) auf Seite 127. In der der zweite Summand diese virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte vorstellt.

Es sei z. B. für einen frei aufliegenden Balkenträger, der durch eine Einzelkraft P auf gerade Biegung beansprucht wird, die Verschiebung und der Verdrehungswinkel in der Entfernung a vom linken Auflager zu bestimmen. Hierzu legen wir die in den Abb. 177a und 177b dargestellten gedachten Belastungszustände zugrunde, die darin bestehen, daß man sich über dem Punkte der Stabachse resp. im Querschnitte, dessen Durchbiegung oder Verdrehung bestimmt werden soll, eine äußere Kraft resp. ein äußeres Moment von der Größe 1 anbringt, die im Sinne der zu erwartenden Durchbiegung bzw. Verdrehung wirken¹. Wenden wir das virtuelle Arbeitsprinzip auf den wirklichen Verschiebungszustand und je einen der gedachten Belastungszustände an, so erhalten wir, wenn die wirklich auftretende Verschiebung (Verdrehung) mit f_a und φ_a bezeichnet werden und P in der Mitte angreift,

$$\begin{aligned}
 1 \cdot f_a &= \int_0^a \frac{l-a}{l} x \frac{P}{2} \cdot \frac{x}{EJ_y} dx + \int_a^{\frac{l}{2}} \left[\frac{l-a}{l} x - 1 \cdot (x-a) \right] \frac{P}{2} \cdot \frac{x}{EJ_y} dx \\
 &+ \int_{\frac{l}{2}}^l \left[\frac{l-a}{l} x - 1 \cdot (x-a) \right] \left[\frac{P}{2} x - P \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] \frac{1}{EJ_y} dx, \\
 1 \cdot \varphi_a &= \int_0^a -\frac{1}{l} x \frac{P}{2} \cdot \frac{x}{EJ_y} dx + \int_a^{\frac{l}{2}} \left(-\frac{x}{l} + 1 \right) \frac{P}{2} \cdot \frac{x}{EJ_y} dx \\
 &+ \int_{\frac{l}{2}}^l \left(-\frac{1}{l} x + 1 \right) \left[\frac{P}{2} x - P \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] \frac{1}{EJ_y} dx.
 \end{aligned} \tag{e}$$

Durch Ausführung der Integrale erhält man unmittelbar die Werte von f_a bzw. φ_a

¹ In den Abbildungen sind der gedachte und wirkliche Belastungszustand übereinander gezeichnet.

Bei Verwendung des ersten Castiglianoschen Satzes zur Bestimmung der Verschiebungsgroe denkt man sich in dem betreffenden Bestimmungsquerschnitt eine fiktive Kraft oder ein fiktives Moment aufgebracht, bestimmt die Deformationsarbeit für die gegebene Belastung und das fiktive Moment und wendet hierauf den Castiglianoschen Satz an. In dem Resultat muß dann die fiktive Kraft (Moment) gleich Null gesetzt werden, um die wirkliche Verschiebungsgroe zu bekommen.

Für das Beispiel eines durch eine Einzelkraft auf gerade Biegung beanspruchten Balkenträgers ist in den Abb. 177a und 177b an Stelle der Kraft bzw. des Momentes von der Größe 1 eine fiktive Last Q_f bzw. ein fiktives Moment M_f zu denken, und zwar im Sinne

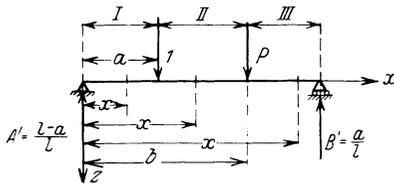


Abb. 177 a.

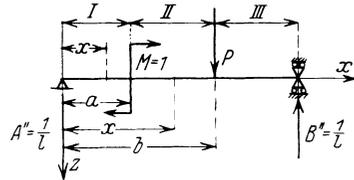


Abb. 177 b.

der zu erwartenden Verschiebung bzw. Verdrehung aufgebracht. Wir erhalten, wenn P in der Mitte angreift, nach Bestimmung der Auflagerkräfte A_1, B_1 bzw. A_2, B_2 auf Grund des Gesagten

$$i_a = \left[\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial Q_f} \right]_{Q_f=0} \quad \text{resp.} \quad \varphi_a = \left(\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial M_f} \right)_{M_f=0}$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{B}_i = & \int_0^a \left(\frac{l-a}{l} Q_f + \frac{P}{2} \right)^2 \frac{x^2}{2EJ_y} dx + \int_a^{\frac{l}{2}} \left[\left(\frac{l-a}{l} Q_f + \frac{P}{2} \right) x - Q_f(x-a) \right]^2 \frac{1}{2EJ_y} dx \\ & + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(Q_f \frac{a}{l} + \frac{P}{2} \right)^2 x'^2 \frac{dx'}{2EJ_y} \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \bar{B}_i = & \int_0^a \left(-\frac{M_f}{l} + \frac{P}{2} \right)^2 \frac{x^2}{2EJ_y} dx + \int_a^{\frac{l}{2}} \left[\left(-\frac{M_f}{l} + \frac{P}{2} \right) x + M_f \right]^2 \frac{1}{2EJ_y} dx \\ & + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(-\frac{M_f}{l} + \frac{P}{2} \right)^2 x'^2 \frac{dx'}{2EJ_y} \end{aligned}$$

ist. Nach Differentiation von \bar{B}_i nach Q_a bzw. M_a sind die Integrale auszuwerten und in den enthaltenen Ausdrücken Q_f bzw. M_f Null zu setzen.

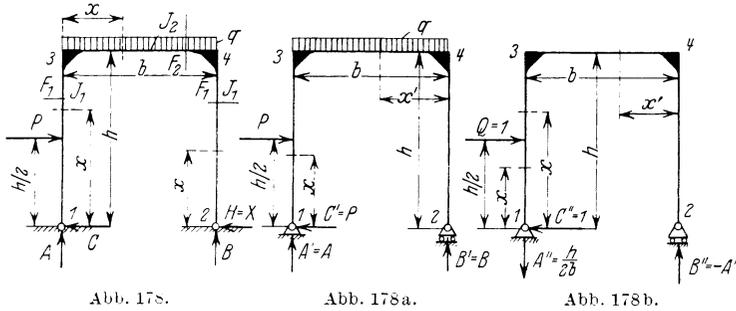
Die im vorstehenden an einfachen, statisch bestimmt gelagerten Stäben dargelegten prinzipiellen Methoden sind ohne weiteres auf Stabverbande übertragbar, ob dieselben statisch bestimmt oder unbestimmt sind.

Für den in Abb. 178 dargestellten, einfach statisch unbestimmten Rahmen mit den Querschnittsflächen und Trägheitsmomenten F_1, J_1 bzw. F_2, J_2 für die Ständer 1, 3 und 2, 4 bzw. den Riegel 3 4, den zwei unverschieblich gedachten Gelenken in 1 und 2 und zwei steifen Knotenpunkten 3 und 4 soll die Durchbiegung f unter der Kraft P bestimmt werden. Dieselbe kann, wenn man will, durch Superposition der Durchbiegung f_1 , die am zugeordneten statisch bestimmten Hauptträger bei Belastung durch die gegebenen Kräfte entsteht (Abb. 178a),

und der Durchbiegung $f_2 X$ berechnet werden, die durch Belastung des statisch bestimmten Hauptträgers durch die statisch unbestimmte Größe $H = X$ mit H als Horizontalkraft im Gelenk 2 bewirkt wird. Es ist also

$$f = f_1 + f_2 X, \tag{e}$$

worin die Verschiebung f_2 dem Wert $X = 1$ als Belastung am statisch bestimmten Hauptträger entspricht [Gleichung (177a) auf Seite 382 und Abb. 178c]. Der der Wahl der statisch unbestimmten Größe entsprechend zugeordnete statisch bestimmte Hauptträger entsteht



aus dem gegebenen Rahmen, indem man das rechte Gelenk durch ein Rollenkipplager ersetzt. Die statischen Gleichungen sind durch

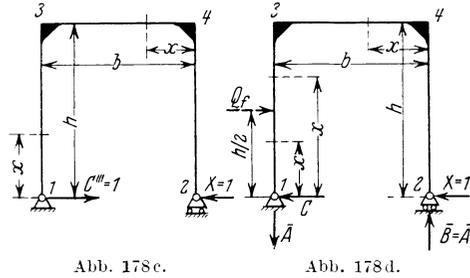
$$P = X - C, \quad qb - A - B = 0, \quad \frac{Ph}{2} + Ab - \frac{qb^2}{2} = 0$$

gegeben, woraus

$$A = \frac{qb}{2} - \frac{Ph}{2b}, \quad B = \frac{qb}{2} + \frac{Ph}{2b}, \quad C = P - X$$

folgt. Die Bestimmung von f_1 kann entweder mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit oder mit dem ersten Lehrsatz von Castigliano erfolgen. Wir wollen zu Übungszwecken beide Methoden zur Verwendung bringen.

Bei Zugrundelegung des Prinzipes der virtuellen Arbeit wird als gedachte Belastung $Q = 1$ (Abb. 178b) eingeführt. Wir erhalten, wenn wir nur die virtuelle Biegearbeit berücksichtigen, für den wirklichen Verschiebungszustand entsprechend der Belastung nach Abb. 178a die Arbeitsgleichung



$$1 \cdot f_1 = \int_0^{\frac{h}{2}} 1 \cdot x \cdot \frac{Px}{EJ_1} dx + \int_{\frac{h}{2}}^h \left[1 \cdot x - 1 \left(x - \frac{h}{2} \right) \right] \left[Px - P \left(x - \frac{h}{2} \right) \right] \frac{1}{EJ_1} dx + \int_0^b \frac{h}{2b} x' \left[\left(\frac{qb}{2} + \frac{Ph}{2b} \right) x' - \frac{qx'^2}{2} \right] \frac{1}{EJ_2} dx,$$

woraus durch Integration

$$f_1 = \frac{Ph^3}{4EJ_1} + \frac{hb}{48EJ_2} (qb^2 + 4Ph) \tag{f}$$

folgt.

Um für die Belastung $X = 1$ die Durchbiegung f_2 unter P zu finden, denken wir uns als die gedachte Belastung an der Stelle der Kraft P die Kraft $Q = 1$ (Abb. 178b) und erhalten aus dem Arbeitsprinzip bei Zugrundelegung eines Verschiebungszustandes ent-

sprechend der Belastung nach Abb. 178c die Arbeitsgleichung

$$1 \cdot f_2 = - \int_0^{\frac{h}{2}} 1 \cdot x \cdot \frac{1 \cdot x}{EJ_1} dx - \int_{\frac{h}{2}}^h \left[1 \cdot x - 1 \cdot \left(x - \frac{h}{2} \right) \right] \frac{1 \cdot x}{EJ_1} dx - \int_0^b 1 \cdot \frac{h}{2b} x' \cdot \frac{1 \cdot h}{EJ_2} dx',$$

woraus sich durch Ausführung der Integrationen

$$f_2 = - \left(\frac{11h^3}{48EJ_1} - \frac{h^2b}{4EJ_2} \right) \quad (g)$$

ergibt. Schließlich wird

$$f = f_1 + f_2 X = \frac{Ph^3}{6EJ_1} + \frac{hb}{48EJ_2} (qb^2 + 4Ph) - \frac{Xh^2}{48E} \left(\frac{11h}{J_1} + \frac{12b}{J_2} \right).$$

X kann am besten wieder mit dem Arbeitsprinzip oder mit dem Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit bestimmt werden, was hier nicht weiter auszuführen ist. Bei Verwendung des ersten Castiglianoschen Satzes ist der Vorgang zur Bestimmung von f der folgende: Man legt den Belastungszustand nach Abb. 178a zugrunde und bildet den Differentialquotienten der diesem Belastungszustand entsprechenden Deformationsarbeit A_1 nach der Kraft P , der bereits die Durchbiegung f_1 unter der Kraft P ergibt. Berücksichtigt man für die Aufstellung der Deformationsarbeit nur die Biegemomente, so wird

$$A_1 = \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{(Px)^2}{2EJ_1} dx + \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{Px - P \left(x - \frac{h}{2} \right)^2}{2EJ_1} dx + \int_0^b \frac{\left(Bx' - \frac{qx'^2}{2} \right)^2}{2EJ_2} dx.$$

woraus man nach Einsetzen von B auf die geschilderte Weise den bereits oben erhaltenen Wert für f_1 erhält. Zur Bestimmung von f_2 wird der in Abb. 178c dargestellte Belastungsfall, ergänzt durch eine an der Angriffsstelle von P in dessen Richtung wirkende fiktive Kraft Q_f (Abb. 178d), der Anwendung des angezogenen Castiglianoschen Satzes zugrunde gelegt. Es entstehen die Reaktionen \bar{A} , $\bar{B} = -\bar{A}$, \bar{C} , die aus den statischen Gleichungen $\bar{C} + 1 - Q_f = 0$, $\bar{A}b = Q_f \frac{h}{2}$ mit $\bar{C} = Q_f - 1$, $\bar{A} = \frac{Q_f h}{2b}$ folgen. Die Deformationsarbeit A_2 , welche diesem Belastungszustande entspricht, ist nunmehr

$$A_2 = \int_0^{\frac{h}{2}} [(Q_f - 1)x]^2 \frac{dx}{2EJ_1} + \int_{\frac{h}{2}}^h \left[(Q_f - 1)x - Q_f \left(x - \frac{h}{2} \right) \right]^2 \frac{1}{2EJ_1} dx + \int_0^b \frac{(1 \cdot x)^2}{2EJ_1} dx \\ + \int_0^b \left(\frac{Q_f h}{2b} x' - h \right)^2 \frac{1}{2EJ_2} dx'.$$

Es folgt

$$\frac{\partial A_2}{\partial Q_f} = \frac{1}{EJ_1} \int_0^{\frac{h}{2}} (Q_f - 1)x^2 dx + \frac{1}{EJ_1} \int_{\frac{h}{2}}^h \left(Q_f \frac{h}{2} - x \right) \frac{h}{2} dx + \frac{1}{EJ_2} \int_0^b \left(\frac{Q_f h}{2b} x' - h \right) \frac{hx'}{2b} dx'. \quad (h)$$

Wenn die Integrationen ausgeführt werden und in dem erhaltenen Ausdrucke $Q_f = 0$ gesetzt wird, erhalten wir den oben bereits für f_2 gefundenen Ausdruck. Als dritter hierher gehöriger Weg wäre noch denkbar, daß man von einer Superposition der Verschiebung f_1 und $f_1 X$ absieht und die Deformationsarbeit für den gegebenen statisch nicht bestimmten Rahmen als Funktion der gegebenen Kräfte und der statisch unbestimmten Reaktion X darstellt. Durch deren Differentiation nach P wird die Durchbiegung f unmittelbar gewonnen.

Wären die Auflager 1, 2 nicht fest, sondern in gegebener Weise, z. B. um die beziehungsweisen Beträge u_1 und u_2 , horizontal nach rechts verschieblich, so kann zur Bestimmung der Durchbiegung unter P z. B. die allgemeine Gleichung (72) auf Seite 127 als Ausgangspunkt der Lösung gewählt werden. Diese Gleichung wendet man entweder auf die in den obigen Abb. 178a bzw. 178d dargestellten Belastungszustände an und gewinnt dann die Verschiebung f in der Richtung der Kraft P wieder durch Superposition oder man könnte die Gleichung (72) direkt auf die Deformationsarbeit als Funktion der gegebenen Kräfte P und X des statisch unbestimmten Rahmens anwenden.

Im ersteren Falle hat man, da in der angezogenen Ausgangsgleichung unter V_s die Auflagerreaktionen, unter n_s die den Auflagerreaktionen zukommenden Verschiebungskomponenten verstanden werden, zur Bestimmung der Verschiebung f_1 zu setzen: $\sum \frac{\partial V_s}{\partial P} n_s = -u_1$.

Dabei ist (Abb. 178a) zu bedenken, daß nur einer der in Betracht kommenden Auflagergrößen V_s , nämlich nur der Reaktion C' , eine Verschiebung u_1 entgegengesetzt ihrer Richtung entspricht. Somit ist

$$f_1 - u_1 = \frac{\partial A_1}{\partial P}, \tag{i}$$

woraus f_1 folgt. Die Größe von f_2 ergibt sich (Abb. 178d) in ähnlicher Weise mit

$$f_2 - u_2 = \left(\frac{\partial A_2}{\partial Q_f} \right)_{Q_f=0}. \tag{k}$$

Die statisch unbestimmte Größe X ist z. B. aus der Gleichung (72a) auf Seite 127 zu bestimmen, in der $\sum \frac{\partial V_s}{\partial X} n_s = -\frac{\partial C}{\partial X} u_1 = u_1$ und $u_2 = -u_1$ zu setzen ist, so daß $u_1 - u_2 = \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial X}$ als Bestimmungsgleichung für X gefunden wird, wenn \bar{B}_i als Funktion von P, q und X ausgedrückt ist. Setzen wir $u_1 = u_2$ voraus, so hat die Größe X denselben Wert, den sie hätte, wenn die Auflager unverschieblich wären.

Legt man zur Bestimmung der Verschiebung f unter der Last P bei verschieblichen Auflagern den gegebenen statisch unbestimmten Rahmen zugrunde, so gilt die Bestimmungsgleichung

$$f - u_1 = \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial P} \tag{l}$$

worin \bar{B}_i in der angegebenen Form dargestellt werden muß.

Soll für den angegebenen statisch unbestimmten Rahmen der Verdrehungswinkel am Knotenpunkt 3 bestimmt werden, der gleichzeitig der Verdrehungswinkel der Stäbe 1 3

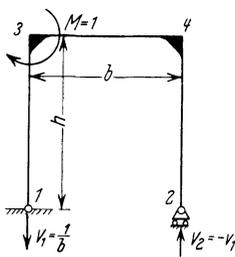


Abb. 178e.

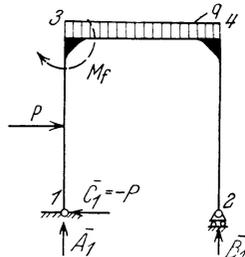


Abb. 178f.

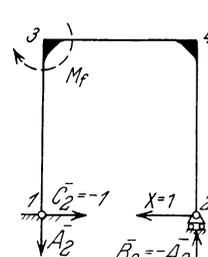


Abb. 178g.

bzw. 3 4 ist, die ja steif miteinander verbunden sein sollen. Wählen wir als Lösungsweg das Prinzip der virtuellen Arbeit nach Gleichung (68'') auf Seite 117, so können wir völlig gleichartig wie oben vorgehen, wo es sich um die Verschiebung unter der Kraft P handelte. Der Verdrehungswinkel φ (positiv im Uhrzeigersinne) ist auf Grund der Superposition zweier Verdrehungswinkel φ_1 und φ_2 X durch

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 X \tag{m}$$

ausdrückbar. Zur Bestimmung von φ_1 wird das Arbeitsprinzip auf den Verschiebungszustand entsprechend der Belastung nach Abb. 178a angewendet, der als der wirkliche angesehen wird, und den virtuellen Belastungszustand nach Abb. 178e, für welchen $M = 1$ ein äußeres, im Knotenpunkt 3 übertragenes Moment ist. φ_2 wird mit dem genannten Prinzip bei Zu-

grundelegung des wirklichen Verschiebungszustandes nach Abb. 178c und der virtuellen Belastung nach Abb. 178e ermittelt.

Will man das Castiglianosche Prinzip verwenden, so legt man bei Superposition von q_1 und $q_2 X$ die Belastungszustände nach den Abb. 178f und 178g zugrunde, in welchen M_f ein fiktives äußeres Moment ist, das nach Differentiation der entsprechenden Deformationsarbeiten nach demselben gleich Null gesetzt wird.

Ebenso wie oben kann auch jetzt der Belastungszustand des gegebenen, statisch unbestimmten Systemes plus einem am Knotenpunkt 3 wirkenden fiktiven äußeren Moment M_f zugrunde gelegt werden, die Deformationsarbeit als Funktion der gegebenen angreifenden Kräfte des fiktiven Momentes und der statisch unbestimmten Größe X ausgedrückt werden und hierauf durch Differentiation nach dem fiktiven Moment ein Ausdruck gewonnen werden, der bei Nullsetzen von M_f in den Verdrehungswinkel φ übergeht. Bei Aufstellung der Deformationsarbeit sind die statischen Gleichungen $P = N + X$, $qb = K + L$, $\frac{qb^2}{2} - M_f - \frac{Ph}{2} - Kb = 0$ zu beachten, aus welchen die Auflagerreaktionen

$$K = \frac{qb}{2} - \frac{Ph}{2b} - \frac{M_f}{b}, \quad L = \frac{qb}{2} + \frac{Ph}{2b} + \frac{M_f}{b}, \quad N = P - X$$

folgen.

III. Näherungslösungen für einige wichtige dynamische Beanspruchungen gerader Stäbe.

1. Freie Transversal- und Torsionsschwingungen eines geraden Stabes.

a) Transversalschwingungen. Wenn ein irgendwie gelagerter Stab durch eine stoßartig wirkende Kraft auf gerade Biegung und Schub beansprucht wird, so gerät er hauptsächlich in freie Transversal oder Querschwingungen, die dadurch charakterisiert werden können, daß die parallel zur Stoßrichtung genommenen Abstände der Punkte der schwingenden Stabachse von einer mittleren Gleichgewichtslage derselben mit der Zeit veränderlich sind. Die Schwingungen werden als freie oder Eigenschwingungen bezeichnet, weil sie nicht durch eine von außen her auf den Stab wirkende periodische Kraft erzwungen werden, sondern nach Aufhören der Stoßwirkung unabhängig von äußeren angreifenden Kräften, d. h. frei erfolgen (Seite 208). Wenn die Schwingung der Stabachse in der xz -Ebene erfolgt (x -Achse mit der Stabachse, z -Achse mit einer zentralen Trägheitshauptachse einer der beiden Endquerschnitte des Stabes zusammenfallend) und die z -Richtung die Stoßrichtung war, so können die elastokinetischen Grundgleichungen (90b) auf Seite 200 näherungsweise in der Form

$$0 = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \quad \text{und} \quad \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Z_x}{\partial y} \quad (\text{a})$$

angesetzt werden, worin μ die Dichtigkeit, w die Verschiebungskomponente parallel zur z -Achse, ferner X_x die Biegungsspannungen und $X_z = Z_x$ die Schubspannungen parallel zur Schwingungsebene bedeuten. Bei Ansatz dieser Gleichungen wurde angenommen, daß sich Wirkungen der Hysterese, des äußeren Luftwiderstandes und der inneren Reibung, denen zufolge die aufeinanderfolgenden größten Schwingungsausschläge in der Zeit kleiner werden und schließlich auf Null abklingen, im Gegensatz zur Erfahrung nicht zeigen, daß ferner nur die Trägheitskräfte parallel zur z -Achse einen entscheidenden Einfluß besitzen und zusammen mit den auftretenden Reaktionen Spannungen X_x und $X_z = Z_x$ hervorrufen, daß also die zweifellos auch vorhandenen Trägheitskräfte parallel zur y - bzw. x -Achse ebenso wie die Schubspannungen Y_x und das Eigengewicht vernachlässigt werden dürfen. Die erste der Gleichungen (a) wird befriedigt, wenn $X_x = \frac{M_{By}}{J_y} z$ und $\frac{\partial X_z}{\partial z} = -Q_z \frac{z}{J_y}$ (Seite 242) gesetzt wird. Die Biegungs-

momente M_{By} und die Querkräfte Q_z sind nach dem oben Gesagten als eine Folge der zur z -Achse parallelen Trägheitskräfte und der ihnen entsprechenden Reaktionen anzusehen. Multiplizieren wir die zweite der Gleichungen (a) mit dem Flächenelement $dy dz$ und integrieren über die Querschnittsfläche F , so erhalten wir, wenn wir näherungsweise annehmen, daß die auf die Volumeneinheit bezogene Trägheitskraft sich mit y und z nicht ändert,

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} F = \mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} F = \int_F \frac{\partial Z_x}{\partial x} dy dz.$$

In dem zweiten Ausdruck dieser Gleichung bedeutet z die Durchbiegung der Stabachse F . Setzen wir für Z_x den auf Seite 243 berechneten Mittelwert $\bar{Z}_x = \frac{Q_z S_{yb}}{b J_y}$ ein, so ergibt sich

$$\int_F \frac{\partial \bar{Z}_x}{\partial x} dy dz = \frac{\partial Q_z}{\partial x} \cdot \frac{1}{J_y} \int_F \frac{S_{yb}}{b} dy dz = \frac{\partial Q_z}{\partial x} \frac{1}{J_y} \int_F \frac{S_{yb}}{b} b dz$$

und da

$$\int_F S_{yb} dz = \int_{F_1} dz \int_{F_1} z b dz = \int_F z^2 b dz = J_y,$$

worin F_1 die Fläche vorstellt, dessen statisches Moment mit Bezug auf die y -Achse S_{yb} ist, so gilt

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} F = \mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} F = \frac{\partial Q_z}{\partial x}. \tag{b}$$

Nun lautet bei Nichtbeachtung der Schubspannungen Z_x die Differentialgleichung der elastischen Linie zu einer bestimmten Zeit $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{M_{By}}{E J_y}$, woraus, da bekanntlich $\frac{\partial M_{By}}{\partial x} = Q_z$ also $\frac{\partial^2 M_{By}}{\partial x^2} = \frac{\partial Q_z}{\partial x}$ ist,

$$E J_y \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial Q_z}{\partial x} = E J_y \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} F = 0$$

folgt. Führen wir für J_y den Wert $F \varrho_y^2$ ein mit ϱ_y als Trägheitsradius der Querschnittsfläche bezogen auf die y -Achse, so können wir die letzte Gleichung nach Division durch μF und wenn $K^2 = \frac{E}{\mu}$ gesetzt wird in der Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + K^2 \varrho_y^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \tag{180}$$

schreiben. Diese partielle Differentialgleichung ist die übliche Ausgangsgleichung für die Transversalschwingungen eines Stabes und dient zur Bestimmung von z als Funktion von x und der Zeit t . Zu ihrer Lösung wird ähnlich wie bei der Lösung der Differentialgleichung (96), welche die Längsschwingungen eines Stabes bestimmt (Seite 208) zunächst $z = r(t)s(x)$ angenommen mit r und s als Funktionen von t bzw. x . Setzen wir diese Werte in die Differentialgleichung (180) ein, so erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} s(x) + K^2 \varrho_y^2 r(t) \frac{d^4 s(x)}{dx^4} = 0,$$

die man in die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = -K^2 \lambda^2 r(t) \quad (181a)$$

mit $\lambda^2 = \frac{\varrho_y^2}{s(x)} \cdot \frac{d^4 s(x)}{dx^4}$ und

$$\frac{d^4 s(x)}{dx^4} = -s(x) \frac{1}{\varrho_y^2 K^2} \cdot \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \cdot \frac{1}{r(t)} = \nu^4 s(x) \quad (181b)$$

mit $\nu^4 = \frac{\lambda^2}{\varrho_y^2}$ trennen kann. Die Differentialgleichung (181a) gibt, wie bereits wiederholt angewendet, die Lösung

$$r(t) = A \sin(\lambda K t) + B \cos(\lambda K t) \quad (c)$$

mit A und B als Integrationskonstanten. Die lineare Differentialgleichung (180b) führt auf die charakteristische Gleichung $p^4 - \nu^4 = 0$ mit p als Unbekannter, die die Lösungen $p_{1,2} = \pm \nu$ und $p_{3,4} = \pm i\nu$ besitzt. Infolgedessen ist die Lösung von (181b) durch $s(x) = C_1 e^{\nu x} + D_1 e^{-\nu x} + E_1 e^{i\nu x} + F_1 e^{-i\nu x}$ mit C, D, E, F als Integrationskonstanten darstellbar, für die bei Übergang auf den hyperbolischen Sinus und Kosinus bzw. den Kreis-Sinus und -Kosinus auf Grund der bekannten Identitäten

$$\frac{e^{\nu x} - e^{-\nu x}}{2} = \sinh(\nu x), \quad \frac{e^{\nu x} + e^{-\nu x}}{2} = \cosh(\nu x)$$

und

$$\frac{e^{i\nu x} - e^{-i\nu x}}{2} = \sin \nu x, \quad \frac{e^{i\nu x} + e^{-i\nu x}}{2} = \cos \nu x,$$

auch

$$s(x) = C \sinh(\nu x) + D \cosh(\nu x) + E \sin(\nu x) + F \cos(\nu x) \quad (d)$$

mit den neuen Konstanten C, D, E, F geschrieben werden kann. Es ist somit $z = r(t) s(x) = [A \sin(\lambda K t) + B \cos(\lambda K t)] [C \sinh(\nu x) + D \cosh(\nu x) + E \sin(\nu x) + F \cos(\nu x)]$ (e)

eine partikulare Lösung der Differentialgleichung (180). Der als Parameter eingeführte Wert ν und die Konstanten müssen aus den Auflagerbedingungen bzw. den Anfangsbedingungen für die Zeit $t = 0$ bestimmbar sein. Nehmen wir an, daß der Stab als horizontal liegender Balkenträger ausgebildet ist, so müssen für $x = 0$ und $x = l$ die Biegemomente und daher zufolge der Gleichung der elastischen Linie $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ferner die Schwingungsordinaten für jede Zeit t verschwinden. Es gelten daher die Bedingungen

$$0 = s(0) = D + F,$$

$$\left. \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \right|_{x=0} = C \nu^2 \sinh(\nu x) + D \nu^2 \cosh(\nu x) - E \nu^2 \sin(\nu x) - F \nu^2 \cos(\nu x) \Big|_{x=0} = 0,$$

d. h. $0 = D - F$, woraus $D = F = 0$ folgt und

$$0 = s(l) = C \sinh(\nu l) + E \sin(\nu l) \quad (f) \quad \text{bzw.} \quad 0 = C \sinh(\nu l) - E \sin(\nu l). \quad (g)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich, wenn C und E nicht auch verschwinden sollen, die zur Bestimmung des Parameters ν dienende Beziehung

$$\begin{vmatrix} \sinh(\nu l), & \sin(\nu l) \\ \sinh(\nu l), & -\sin(\nu l) \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Es muß also } \sinh(\nu l) \sin(\nu l) = 0 \text{ sein, was zur Folge}$$

hat, daß der Parameter ν die Werte $\nu = \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \frac{3\pi}{l}, \dots, \frac{n\pi}{l}$ annehmen muß.

Durch Summation der beiden Gleichungen (f) und (g) erhalten wir $0 = 2 C \sinh(\nu l)$ woraus sich $C = 0$ ergibt. Wir können daher jetzt allgemeiner als oben schreiben

$$s_n(x) = E_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{h}$$

worin n alle ganzen positiven Werte annehmen kann und E_n eine dem Werte n zugeordnete Konstante bedeutet. Durch (h) sind unendlich viele Funktionen $s_n(x)$ festgelegt, denen unendlich viele partikuläre Lösungen von z_n

$$z_n = [A_n \sin(\lambda_n K t) + B_n \cos(\lambda_n K t)] E_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{182}$$

zugeordnet sind. Der gefundene Ausdruck für z_n wird noch etwas einfacher, wenn wir $A_n = H_n \cos \varphi_n$ und $B_n = H_n \sin \varphi_n$ mit H_n und φ_n als neuen Konstanten setzen, wodurch wir

$$z_n = \sin(\lambda_n K t + \varphi_n) C_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{182a}$$

mit C_n als konstanter Größe erhalten.

$$\lambda_n K = \varrho_y \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{E}{\mu}} \tag{i}$$

bestimmt für die verschiedenen Werte von n die Eigen- oder Normalschwingungen des Balkens mit der aus $\lambda_n K \tau_n = 2\pi$ folgenden Schwingungsdauer

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\lambda_n K} = \frac{2}{n^2 \pi} \cdot \frac{l^2}{\varrho_y} \sqrt{\frac{\mu}{E}}, \tag{k}$$

die sonach mit dem Quadrate der Länge des Balkens und der Wurzel aus der Massendichtigkeit wächst und um so kleiner wird, je größer unter sonst gleichen Umständen der Trägheitsradius bzw. die Wurzel aus dem Elastizitätsmodulus wird. Lange dünne Stäbe haben sonach eine große, kurze dicke Stäbe eine kleine Schwingungsdauer unter sonst gleichen Umständen. Die Eigenschwingungszahl $\beta_n = \frac{1}{\tau_n}$, die die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit bestimmt, ergibt sich mit

$$\beta_n = \frac{n^2 \pi}{2 l^2} \varrho_y \sqrt{\frac{E}{\mu}} \tag{l}$$

(Seite 209). Die n te Eigenschwingung hat $n + 1$ Knotenpunkte, in welchen die Schwingungsordinate z_n zu jeder Zeit t verschwindet. In Abb. 179 sind die Stabformen zur Zeit $t = 0$ für $n = 1, n = 2, n = 3$ dargestellt, entsprechend der Gleichung $z'_n = K_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ mit $K_n = C_n \sin \varphi_n$, wobei K_n einstweilen unbestimmt bleibt (siehe Punkt 2, S. 413). Die Schwingung für $n = 1$ heißt Grundschwingung, die Schwingungen für $n > 1$ werden als Nebenschwingungen bezeichnet. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (180) ergibt sich wieder wie bei den Längsschwingungen eines Stabes [Gleichung (98) Seite 210] als Überlagerung der unendlich vielen, den Eigenschwingungen des Stabes entsprechenden partikulären Integrale.

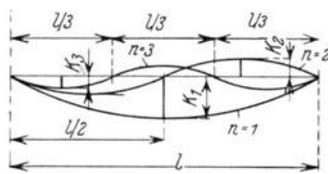


Abb. 179.

b) Torsionsschwingungen. Wenn ein gerader einseitig eingespannter Stab von der Länge l z. B. durch ein an seinem freien Ende plötzlich wirkendes Drillungsmoment beansprucht wird, so gerät er in Drillungs- oder Torsionsschwingungen um seine Längsachse, die wieder als freie bezeichnet werden, weil sie nicht durch

eine periodisch von außen her wirkende Kraft erzwungen werden. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß der Stab kreisförmigen Querschnitt besitzt¹. Zur Differentialgleichung für die Drillungsschwingungen gelangt man durch Anwendung des d'Alembertschen Prinzipes auf ein Volumenelement des Stabes, das nach Abb. 180 in der Entfernung ϱ von der Stabachse x aus demselben herausgeschnitten ist. Die im Schwerpunkt S_0 des Volumenelementes angreifende Trägheitskraft ist $A = -\mu \varrho d\varphi d\varrho dx \cdot \varrho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ mit μ als Massendichtigkeit $\varrho d\varphi d\varrho dx$ als Rauminhalt des Elementes und $\varrho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ als Verschiebungsbeschleunigung in der Richtung normal zum Radius ϱ , wenn ψ den Verdrehungswinkel in der Entfernung x vom festen Stabende, wo $\psi = 0$ ist, bedeuten (Seite 237). Das d'Alembertsche Prinzip angewendet normal zur Richtung des Radius ϱ

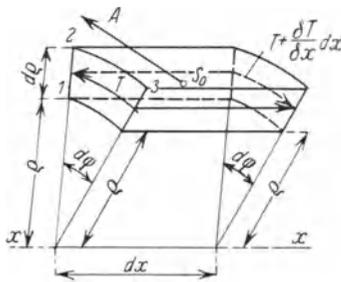


Abb. 180.

besagt $\frac{\partial T}{\partial x} dx \varrho d\varphi d\varrho - \mu \varrho d\varphi d\varrho dx \varrho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$ mit T als Schubspannung normal zum Radius ϱ . Nachdem $T = G \varrho \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ist, nimmt diese Gleichung nach Abkürzung durch $\varrho^2 dx d\varphi d\varrho$ die Form

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = K^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{183}$$

mit $K^2 = \frac{G}{\mu}$ an. Diese Differentialgleichung stimmt formal mit der Gleichung (96) auf Seite 208 für die Längsschwingungen eines einseitig eingespannten Stabes überein. In allen aus dieser Gleichung gezogenen Folgerungen treten an Stelle der Längsverschiebungen u und des Elastizitätsmodulus E jetzt die Verdrehungswinkel ψ und der Schubmodul G . Insbesondere ist eine Drillungseigenschwingung von der Ordnung n durch

$$\psi_n = \left[A_n \sin \frac{n\pi K}{2l} t + B_n \cos \frac{n\pi K}{2l} t \right] \sin \frac{n\pi x}{2l}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \tag{184}$$

bestimmt, mit der Schwingungsdauer $\tau_n = \frac{4l}{nK}$ und der Frequenz $\gamma_n = \frac{n\pi K}{2l}$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (183) ist nach Art der Gleichung (98) auf Seite 210 aufzustellen. Nehmen wir an, der Stab werde durch ein an seinem freien Ende wirkendes statisches Drillungsmoment M_D verdreht, das hierauf, d. i. zur Zeit $t = 0$ plötzlich abgebracht wird. Der Anfangszustand ist dann für einen beliebigen Querschnitt x durch $f(x) = \psi|_{t=0} = \frac{M_D}{GJ_P} x$ und $g(x) = \frac{\partial \psi}{\partial t}|_{t=0} = 0$ charakterisiert. Infolgedessen wird nach den Gleichungen (98a) auf Seite 210 $A_n = 0$ und

$$B_n = \frac{2}{l} \cdot \frac{M_D}{GJ_P} \int_0^l x \sin \frac{n\pi x}{2l} dx = \frac{2 M_D}{l G J_P} \cdot \frac{4 l^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

womit als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (183)

$$\psi = \sum_1^{\infty} \frac{8 M_D l}{G J_P n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi K t}{2l} \sin \frac{n\pi x}{2l}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \tag{185}$$

¹ Drillungsschwingungen von Stäben mit rechteckigem und elliptischem Querschnitt haben A. Schulze in den Ann. Physik **13** (1904) und F. H. van den Dungen: Cours de Technique des vibrations, Bd. 1, Brüssel 1926, untersucht.

folgt. Der Grundschiwingung für $n = 1$, der unter allen Eigenschwingungen der größte Verdrehungswinkel des Stabes zukommt, entspricht die Lösung

$$\psi_1 = \frac{8 M_D l}{G J_P \pi^2} \cos \frac{\pi K}{2l} t \sin \frac{\pi x}{2l} \quad (185a)$$

2. Näherungstheorien für den Längs- und Querstoß von geraden Stäben.

a) Längsstoß auf einen einseitig fest eingespannten Stab. Auf S. 211ff. wurde die Wellentheorie des Längsstoßes eines einseitig eingespannten geraden Stabes entwickelt und bereits auf Näherungstheorien hingewiesen, die wir nunmehr behandeln wollen. Vom praktischen Gesichtspunkte aus gesehen, sind dieselben mehr oder weniger gut brauchbar.

Der Stab sei, wie in Abb. 84, Seite 211 dargestellt, einseitig fest eingespannt, besitze die Länge l , eine Querschnittsfläche F , die Massendichtigkeit μ , ferner sei $m = \frac{Q}{P}$ das Verhältnis des Gewichtes Q eines mit der Geschwindigkeit v zur Zeit $t = 0$ auf den Stab in dessen Längsrichtung stoßenden Körpers zu dem Gewicht P des Stabes. Die für diesen und auch für sehr viele andere Fälle der Technik zugrunde gelegten Näherungstheorien wie sie unter anderen von Young, Cox, De Saint Venant (L) aufgestellt wurden, gehen in der Regel von Energiebetrachtungen aus, unter Hinzufügung bestimmter Annahmen und Vernachlässigungen. Nennen wir die kinetische Energie, welche die stoßende Masse zur Zeit $t = 0$ besitzt, $\frac{M v^2}{2} = T_2$, so besteht nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie, wenn nur mechanische Energien in Betracht gezogen werden und Verluste ausgeschlossen sein sollen, die Beziehung

$$T_2 = T_1 + B, \quad (a)$$

worin T_1 die kinetische, B die potentielle Energie des Stabes vorstellen. Letztere zeigt sich in einer Aufspeicherung von Formänderungsarbeit. Hat der Stab die größte Deformation in der Richtung des Stoßes erreicht, so wird danach die kinetische Energie $T_1 = 0$, und T_2 hat sich vollkommen in Formänderungsarbeit umgesetzt. Das Vorstehende wäre, von im Stabe auch entstehenden Wellenbewegungen und anderen Verlusten, wie z. B. Übergang von Energie in den den Stab stützenden Körper usw. abgesehen (Seite 205ff.), richtig, wenn der Stoß ein vollkommen elastischer ist. Um aber einen Anhaltspunkt für die Berechnung der Geschwindigkeitsverhältnisse des gestoßenen Stabes nach dem Stoß bekommen zu können, nehmen wir näherungsweise den Stoß als vollkommen unelastisch an, und dann entsteht bekanntlich ein Energieverlust, der um so größer ist, je mehr sich die Masse des gestoßenen Körpers ihrer Größe nach jener der stoßenden annähert oder vielleicht sogar übertrifft. Nennen wir den Energieverlust t_1 , so muß sonach dann, wenn die größte Zusammendrückung des Stabes erreicht wird, die Gleichung

$$B + t_1 = T_2 = \frac{M v^2}{2} \quad (b)$$

bestehen. Würden wir die Masse des Stabes vollkommen gegenüber der Masse des stoßenden Körpers vernachlässigen, so entfiere auch der Energieverlust t_1 . Zur Bestimmung der Größe von B nehmen wir an, daß im Stabe Druckspannungen entstehen, die sich gleichförmig über die ganze Stablänge verteilen und von Null aus bis zu einem Endwerte anwachsen, wie es im Falle einer statischen Druckbeanspruchung zutreffen würde. Die Deformationsarbeit ist dann $B = \frac{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 E F l}{2}$ mit $\frac{\partial u}{\partial x}$ als mittlere Verzerrungskomponente und E als Elastizitäts-

modul. Für den Energieverlust t_1 brauchten wir die Geschwindigkeitsverhältnisse des gestoßenen Stabes unmittelbar nach dem Stoß. Wir machen diesbezüglich die Annahme (siehe auch weiter unten), daß nach dem Stoße das Stabende die Geschwindigkeit v übernommen hat und in dem übrigen Teile des Stabes die Geschwindigkeiten den dort auftretenden Verschiebungen, also den Entfernungen vom unfreien Stabende proportional sind. Es wird demzufolge der Ansatz $v : v_x = l : (l - x)$ gemacht, woraus $v_x = \frac{v(l-x)}{l} = \frac{v x'}{l}$ folgt. Die Geschwindigkeit fällt danach geradlinig vom gestoßenen Ende des Stabes bis auf Null am unfreien Stabende ab, und es wird

$$t_1 = \int_0^l \mu F dx' \frac{v_x^2}{2} = \int_0^l \frac{\mu F v^2}{2 l^2} x'^2 dx' = \frac{\mu F v^2 l}{6}$$

mit $\mu F dx'$ als Inhalt eines Stabteilchens von der Höhe dx' . t_1 entspricht darnach der lebendigen Kraft einer mit der Geschwindigkeit v begabten Masse, die gleich ein Drittel der Masse des Stabes ist. Man nennt sie in der Stoßtheorie auch die reduzierte Masse des Stabes aus Gründen, die sich weiter unten ergeben werden. Mit diesen Voraussetzungen wird die Gleichung (b)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{EF l}{2} + \frac{\mu F v^2 l}{6} = \frac{M v^2}{2} \quad (c)$$

woraus sich $\frac{\partial u}{\partial x}$ und damit die zugeordnete Druckspannung, sowie die Verschiebung des gestoßenen Stabendes berechnen lassen. Man findet zunächst

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v \sqrt{\left(Q - \frac{P}{3}\right) \frac{1}{EF l g}} \quad (186)$$

mit g als Schwerebeschleunigung, woraus, wenn man bedenkt, daß $P = \mu F l g$ und daher $F l = \frac{P}{\mu g}$, bei Einführung von $\frac{E}{\mu} = K^2$ mit K als Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Wellen im Stabe (Seite 211)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{K} \sqrt{\frac{Q}{P} - \frac{1}{3}} = \frac{v}{K} \sqrt{\frac{3m-1}{3}} \quad (186a)$$

erhalten wird. Aus (186a) folgt die größte Verschiebung am Stabende mit

$$u_l = \frac{v}{K} l \sqrt{\frac{3m-1}{3}} \quad (186b)$$

und als Druckspannung

$$\sigma_D = \frac{v E}{K} \sqrt{\frac{3m-1}{3}}. \quad (186c)$$

Vernachlässigt man die Masse des Stabes in dem Sinne, daß man ihr nach dem Stoß nahezu keine kinetische Energie zuschreibt, was nur zulässig wäre, wenn sie im Verhältnis zur Masse des stoßenden Körpers klein wäre, so entfällt in Gleichung (c) das zweite Glied auf der linken Seite und wir erhalten unter sonst gleichen Voraussetzungen wie oben

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{EF l}{2} = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2 \quad (c')$$

als Bestimmungsgleichung für $\frac{\partial u}{\partial x}$, aus der

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v \sqrt{\frac{Q}{EF l g}} = \frac{v}{K} \sqrt{m} \quad (187)$$

folgt. In dem negativen Zusatzglied unter der Wurzel in (186a) kommt zum Ausdruck, daß ein Teil der dem Stab zugeführten kinetischen Energie nicht in Formänderungsenergie umgewandelt wird, sondern für dieselbe verlorengeht. Zur Gleichung (186a) können wir auch durch eine für praktische Zwecke sehr brauchbare Vorstellung kommen. Wenn nämlich zwei freie Massen m_1 und m_2 , die vor ihrem geraden Zusammenstoß (z. B. zwei Kugeln, die sich in einer Geraden gegeneinander bewegen) die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 besitzen, so haben sie nach dem Stoß, vorausgesetzt, daß derselbe vollkommen unelastisch erfolgt, die gleichen Geschwindigkeiten, welche der durch den Stoß (innere Kraft) nicht abgeänderten Geschwindigkeiten v_s des Schwerpunktes beider Massen gleichkommt. Es folgt das aus dem Impulssatz (c) bzw. (c') auf Seite 203ff. im Verein mit der Definition des Schwerpunktes und daraus, daß beim unelastischen Stoß sich die Geschwindigkeiten in der Stoßnormalen v_1 und v_2 zur gemeinsamen Geschwindigkeit des Schwerpunktes beider Massen ausgleichen (die Stoßziffer ist in diesem Fall gleich Null). Analytisch drückt man das durch die Beziehung

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_s \quad (\alpha)$$

aus. In unserem Falle, wo eine Masse auf einen elastischen Stab auftrifft, kann naturgemäß etwas Derartiges nicht eintreten, es haben ja verschiedene Punkte des Stabes nach dem Stoß verschiedene Geschwindigkeiten. Wir können aber den unelastischen Stoß der beiden oben betrachteten freien Massen bildhaft bei Aufstellung einer Näherungstheorie zur Anwendung bringen. Setzt man in der Beziehung (α) $m_1 = \frac{Q}{g}$, $v_1 = v$ und $m_2 = \frac{P}{3g}$, $v_2 = 0$, wobei m_2 die oben erwähnte reduzierte Masse des Stabes bedeutet, so erhalten wir $\frac{Q}{g} v = \left(\frac{Q}{g} + \frac{P}{3g}\right) v_s$ und daraus $v_s = Q \frac{v}{Q + \frac{P}{3}}$. Die lebendige Kraft einer Masse $\left(\frac{Q}{g} + \frac{P}{3g}\right)$, die mit der

Geschwindigkeit v_s begabt ist, berechnet sich sonach mit

$$T = \left(\frac{Q}{g} + \frac{P}{3g}\right) \frac{1}{2} Q^2 \frac{v^2}{\left(Q + \frac{P}{3}\right)^2} = \frac{1}{2g} Q^2 \frac{v^2}{Q + \frac{P}{3}}. \quad (\beta)$$

Man sieht, daß T um so mehr dem Werte $\frac{Q v^2}{2g}$, d. i. der lebendigen Kraft des stoßenden Körpers vor dem Stoß gleich kommt, je mehr P gegenüber Q verschwindend ist. Der Energieverlust beim Stoß ergibt sich mit

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2g} \cdot \frac{Q^2 v^2}{Q + \frac{P}{3}} = \frac{v^2}{6g} \cdot \frac{P}{1 + \frac{P}{3Q}}. \quad (\gamma)$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem in Gleichung (c) eingeführten Energieverlust um so mehr überein, je größer Q im Vergleich zu P ist. Gehen wir mit dem Werte (γ) in die Gleichung (b), bei gleichzeitigem Ersatz von B durch den oben berechneten Wert, und berechnen $\frac{\partial u}{\partial x}$, so ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{K} \sqrt{\frac{Q^2}{\left(Q + \frac{P}{3}\right) P}} = \frac{v}{K} \sqrt{\frac{Q}{P} - \frac{1}{3}}, \quad (\delta)$$

was wir bereits oben erhalten haben. Auf den Ausdruck (δ) für die Verzerrung wären wir auch, wie man sich leicht überzeugt, gekommen, wenn wir v^2 aus der

Näherungsgleichung (c') auf der linken Seite der Näherungsgleichung (c) eingeführt und dann aus dieser $\frac{\partial u}{\partial x}$ berechnet hätten. Man kann also den Stoß einer mit einer Geschwindigkeit v auf einen elastischen Stab in dessen Längsrichtung stoßenden Masse unter dem Bilde des geraden unelastischen Stoßes zweier Massen betrachten, von denen die eine der Masse des stoßenden Körpers, die andere ein Drittel der Masse des gestoßenen Stabes mit den beziehungsweisen Geschwindigkeiten v und 0 vor dem Stoße ist, hierauf die kinetische Energie des aus beiden Maßen gebildeten Systemes nach dem Stoße berechnen, und zwar auf Grund der Annahmen der elementaren Stoßtheorie, und schließlich fordern, daß diese kinetische Theorie vollkommen in Formänderungsarbeit umgewandelt wird. Der tiefere Sinn dieses Vorganges ist der, daß infolge des beim unelastischen Stoße auftretenden Energieverlustes ein kleinerer Wert als $\frac{M v^2}{2}$ in Deformationsarbeit des Stabes umgesetzt wird, als dann, wenn dieser Energieverlust nicht vorhanden ist. Im letzteren Falle würde die Gleichung (187) als Grundlage der Berechnung von $\frac{\partial u}{\partial x}$ dienen können.

Die Beziehung zwischen der dynamischen größten Verkürzung des Stabes am gestoßenen Ende und der statischen Verkürzung $\frac{Ql}{EF}$, die eintreten würde, wenn das Gewicht Q nicht stoßartig, sondern unendlich langsam anwachsend, also statisch wirken würde, kann gefunden werden, indem man den Energiesatz (93) auf Seite 201 auf das Zeitintervall, beginnend bei Einsatz des Stoßes und endigend mit der Zeit, in der u_l am gestoßenen Stabende ihren größten Wert erlangt hat, anwendet. Es wird dann bei Festhaltung der Annahme eines unelastischen Stoßes $B - T = Qu_l$ (Seite 207). In dieser Gleichung ist T die lebendige Kraft, die nach Abzug des Energieverlustes auf den gestoßenen Körper übertragen

wird. Für dieselbe können wir mit $\frac{Q + \frac{P}{3}}{g}$ als Masse und $v = v_s = Q \frac{v}{Q + \frac{P}{3}}$ als Geschwindigkeit den oben gefundenen Ausdruck (β) setzen. Wir erhalten somit

$$\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 \frac{EF l}{2} - \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{Q^2}{\left(Q + \frac{P}{3}\right)} = Qu_l. \quad (d)$$

Führen wir $\frac{Ql}{EF} = \bar{u}_l$ (woraus $EF = \frac{Ql}{\bar{u}_l}$ folgt) als die der Kraft Q zugeordnete statische Verschiebung ein, so erhalten wir aus (d), nachdem $\frac{v^2}{2g} = h$ mit h als Fallhöhe der Masse $\frac{Q}{g}$ die umgeformte Gleichung

$$u_l^2 - 2u_l \bar{u}_l - \frac{2Qh\bar{u}_l}{Q + \frac{P}{3}} = 0, \quad (d')$$

deren brauchbare Lösung für u_l

$$u_l = \bar{u}_l + \sqrt{\bar{u}_l^2 + \frac{2h\bar{u}_l}{1 + \frac{P}{2Q}}} \quad (188)$$

wird. Ist das stoßende Gewicht Q groß gegenüber dem Gewicht des Stabes P ,

so können wir annehmen, daß sich die gesamte lebendige Kraft der stoßenden Masse in Formänderungsarbeit umsetzt, und wir erhalten dann aus (188)

$$u_l = \bar{u}_l + \sqrt{\bar{u}_l^2 + 2h\bar{u}_l}.$$

Wird das Gewicht Q ohne lebendige Kraft plötzlich auf den Stab aufgelegt, so ist $h = 0$, und es ergibt sich $u_l = 2\bar{u}_l$ (Seite 205ff.).

b) Querstoß auf einen auf zwei Stützen gelagerten Stab. Das Gewicht Q treffe auf die Mitte des Stabes von der Länge l aus einer Höhe h mit der Geschwindigkeit v derartig, daß stoßartig gerade Durchbiegungen in der xz -Ebene entstehen (Koordinatensystem wie in Abb. 108, Seite 252), die mit der Zeit veränderlich sind. Der Gedankengang der Näherungslösung entspricht völlig dem unter A für den Längsstoß angegebenen. Wir wenden die Energiegleichung (93) auf Seite 201 auf die Zeit an, die zwischen Beginn des Stoßes (der bildlich mit dem Ende des Stoßes zweier vollkommen unelastischer Körper zusammenfällt) und dem Zeitpunkte, wo der infolge des Stoßes größte Ausschlag erreicht wird, verfließt. Wir haben sonach wieder

$$B - T = Qf \quad (e)$$

mit f als größte dynamische Durchbiegung unter der Last Q zu setzen. Zur Bestimmung der potentiellen Energie B wird die Annahme gemacht, daß die Durchbiegungskurve, welche die Stabachse bei ihrer Deformation einnimmt, für eine dynamische Beanspruchung so wie für eine statische Beanspruchung bestimmt werden kann. Wie die Schwingungstheorie lehrt, ist dies nicht genau zutreffend. Wenn die Last Q statisch wirken würde, soll ihr die größte Durchbiegung \bar{f} unter der Last zukommen. Daher ist zur Durchbiegung 1 die Last $\frac{Q}{\bar{f}}$ und zur Durchbiegung z die Last $\frac{Q}{\bar{f}}z$ erforderlich. Die Arbeit auf dem Wege dz wird demnach $\frac{Q}{\bar{f}}z dz$ und die gesamte Arbeit bei dynamischer Wirkung der Last Q daher

$$\int_0^f \frac{Q}{\bar{f}} z dz = \frac{1}{2} \frac{Qf^2}{\bar{f}}. \quad (f)$$

Diese Arbeit ist gleich der potentiellen Energie B des Stabes bei größtem Ausschlag und dynamischer Wirkung der Last Q . Zur Bestimmung der lebendigen Kraft T am Ende des Stoßes zweier vollkommen unelastischer Körper (stoßender Körper und Stab mit reduzierter Masse) brauchen wir die Geschwindigkeitsverhältnisse im Stabe nach dem Stoß. Wir können so wie unter a)

$$T = \frac{M + m_2}{2} v_s^2 \quad (g)$$

setzen, worin v_s die gemeinsame Geschwindigkeit von stoßender Masse und einer zu suchenden, die Masse des Stabes ersetzenden reduzierten Masse m_2 , die an der Stelle zu denken ist, wo sich der Stoß abspielt, bedeuten. Letztere soll den ganzen Stab ersetzen und mit der Masse M zum unelastischen Stoß kommen. Die Massen m_2 und M haben vor dem Stoße beziehungsweise die Geschwindigkeiten 0 und v . Die Geschwindigkeit v_s wird wieder aus der elementaren Stoßtheorie mit $v_s = Q \frac{v}{Q + m_2 g}$ gefolgert. Die lebendige Kraft T wird daher

$$T = \frac{Q^2 v^2}{2g(Q + m_2 g)} = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{Q}{\left(1 + \frac{m_2 g}{Q}\right)} = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{Q}{1 + \frac{cP}{Q}}, \quad (g')$$

wenn wieder P das Gewicht des Balkens, und c eine Reduktionszahl bedeutet. Um letztere zu bestimmen, wird ähnlich wie unter **a**), die Annahme gemacht, daß die Geschwindigkeiten nach dem Stoß der Stabelemente von der Länge dx , in die wir uns den Stab normal zur Achse geteilt denken können, zu einer bestimmten Zeit proportional den zugehörigen Verschiebungen der Stabachse sind, oder mit anderen Worten es soll $v : v_s = z : f$, d. h. $v = \frac{z v_s}{f}$ bestehen. Es wird dann die

kinetische Energie T_1 des Balkens nach dem Stoß $2 \int_0^{\frac{l}{2}} \mu F dx \frac{z^2 v_s^2}{2 f^2}$ mit μ als Massen-

dichtigkeit und F als Querschnittsfläche des Balkens. Wenn wir das Verhältnis der Durchbiegung \bar{z} an einer beliebigen Stelle des Balkens zur größten Durchbiegung \bar{f} in der Mitte bei statischer Beanspruchung kennen, so soll nach einer oben gemachten Bemerkung dieses Verhältnis auch bei einer dynamischen Beanspruchung gegeben sein. Nach Gleichung (f) auf Seite 254 wird für statische Beanspruchung durch eine Last Q

$$\bar{z} = \frac{Q x}{48 E J_y} (3 l^2 - 4 x^2) \quad \text{und} \quad \bar{f} = \frac{Q l^3}{48 E J_y}, \quad \text{daher} \quad \frac{\bar{z}}{\bar{f}} = \frac{x}{l^3} (3 l^2 - 4 x^2).$$

Mit diesem Wert wird die kinetische Energie des Stabes nach dem Stoß

$$T_1 = \frac{\mu F}{l^6} \int_0^{\frac{l}{2}} v_s^2 x^2 (3 l^2 - 4 x^2)^2 dx = \frac{\mu F l}{2} \cdot \frac{17 v_s^2}{35} = \frac{P}{2g} \cdot \frac{17}{35} v_s^2, \quad (\text{h})$$

da $\mu F l g = P$. Man sieht, daß $m_2 = \frac{P}{g} \cdot \frac{17}{35}$ sein muß, da T_1 auch gleich $m_2 \frac{v_s^2}{2}$ ist, der Zahlenwert c ist sonach $\frac{17}{35}$. Die Energiegleichung (e) lautet nach Einsetzen der Werte B und T , $\frac{1}{2} Q \frac{f^2}{\bar{f}} - \frac{v^2 Q}{2g \left(1 + c \frac{P}{Q}\right)} = Q f$, die, wenn $\frac{v^2}{2g} = h$, d. h.

der Fallhöhe des Gewichtes Q gleichgesetzt wird, auf Null gebracht, die Form

$$f^2 - 2 f \bar{f} - \frac{2 h \bar{f}}{1 + \frac{c P}{Q}} = 0 \quad (189)$$

annimmt. Daraus ergibt sich

$$f = \bar{f} + \sqrt{\bar{f}^2 + \frac{2 h \bar{f}}{1 + \frac{c P}{Q}}}. \quad (190)$$

Man bemerkt, daß die Lösung (190), welche den Zusammenhang zwischen dynamischer und statischer Durchbiegung bei gleich großer Kraft Q angibt, völlig analog jener oben für den Längsstoß eines Stabes gefundenen ist. In ihr wurde der Wert c , der oben ausgerechnet wurde, nicht eingesetzt, um ihre Anwendung für andere Auftreffstellen der Masse $\frac{Q}{g}$ auf den Stab als die Mitte offen zu lassen, für die die Formel ebenfalls gültig ist. Die Berechnung des Wertes c wird jedesmal nach dem oben angegebenen Richtung gebenden Beispiel vorgenommen. Wenn die Masse des Stabes klein gegenüber dem auffallenden Gewicht ist, geht (190) in

$$f = \bar{f} + \sqrt{\bar{f}^2 + 2 h \bar{f}} \quad (190a)$$

über. Für ein plötzlich ohne lebendige Kraft auf den Stab gelegtes Gewicht nimmt sie die besondere Form

$$f = 2\bar{f} \quad (190b)$$

an (Seite 205ff.).

Der maximale Wert der Biegungsspannung $\sigma_{\max} = \frac{(M_B)_{\max}}{W}$ mit W als kleinerem von den beiden Widerstandsmomenten des Stabes wird für den Stoß in Mitte des Stabes zufolge der Differentialgleichung der elastischen Linie $\sigma_{\max} = -\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{EJ_y}{W} \Big|_{x=\frac{l}{2}}$,

wobei $z = \frac{fx}{l^3} (3l^2 - 4x^2)$, also $\frac{d^2z}{dx^2} \Big|_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{24fx}{l^3} \Big|_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{12f}{l^2}$. Es wird somit

$$\sigma_{\max} = \frac{12f}{l^2} \cdot \frac{EJ_y}{W}, \quad (191)$$

worin f aus (190) mit $c = \frac{17}{35}$ einzusetzen ist.

Wir wollen noch einen genaueren, zuerst von Kaufmann (L) eingeschlagenen Weg zur Bestimmung der Durchbiegungen verfolgen, der unmittelbar an die auf Seite 402ff. behandelten Transversalschwingungen eines Balkens anknüpft. Diese Schwingungen, die durch ein auf die Mitte eines beiderseits gestützten Balkens fallendes Gewicht ausgelöst gedacht werden, gehorchen für die n te Eigenschwingung dem durch Gleichung (182a) auf Seite 405 ausgesprochenen Gesetz, in dem C_n und φ_n aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen. Wir nehmen die Zeit $t = 0$ für den Augenblick an, in dem eine Schwingung den größten Ausschlag erreicht hat, d. h. es muß

$$z_{\max} = \sum_1^{\infty} C_n \sin \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n = 1, 2, \dots \quad (i)$$

sein. Da für den größten Ausschlag die Verschiebungsgeschwindigkeiten Null sein müssen, so ist auch

$$\frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_1^{\infty} C_n \lambda_n K \cos \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \quad (k)$$

zu erfüllen, wodurch bedingt wird, daß $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$ ist. In der Schwingungslehre sagt man dann, die Phasenverschiebung φ_n ist für jede Teilschwingung gleich $\frac{\pi}{2}$. Es bleibt sonach nur mehr die Bedingung (i). Multiplizieren wir dieselbe mit $\sin \frac{n\pi x}{l} dx$ und integrieren von 0 bis l , so erhalten wir [Gleichung (98a), Seite 210]

$$\int_0^l z_{\max} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = C_n \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = C_n \frac{l}{2}$$

und

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l z_{\max} \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (l)$$

Zur Auswertung von C_n bedürfen wir des maximalen Wertes von z_{\max} als Funktion von x . Hierzu schließt Kaufmann näherungsweise wie folgt: Wird die Zeit τ vom Augenblicke des Auftreffens der stoßenden Masse M auf den Balken gerechnet, so kann für die Bewegung dieser Masse nach dem Auftreffen und bevor der maximale Ausschlag erreicht wird, als Bewegungsgleichung

$$M \frac{d^2z}{d\tau^2} = -xz \quad (m)$$

angesetzt werden, worin α die auf die Masse M wirkende Kraft ist, wenn $z = 1$ geworden ist und das negative Zeichen davon herrührt, daß die Bewegung der Masse verzögert ist. Das Integral dieser Differentialgleichung ist bekanntlich $z = A \sin \beta \tau + B \cos \beta \tau$ mit A und B als Konstanten und $\beta^2 = \frac{\alpha}{M}$. A und B bestimmen sich aus den Bedingungen, daß für $\tau = 0, z = 0$, woraus $B = 0$ folgt, und daß für $\tau = 0, \frac{dz}{d\tau} = v$ ist, woraus sich $v = A\beta$, also $A = \frac{v}{\beta}$ ergibt. Es wird demnach $z = \frac{v}{\beta} \sin \beta \tau$ und die größte Durchbiegung in der Mitte

$$f = \frac{v}{\beta} = v \sqrt{\frac{M}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2ghM}{\alpha}} \quad (n)$$

mit h als Fallhöhe des Gewichtes $Q = Mg$, und zwar für die Zeit $\tau = \frac{\pi}{2\beta} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{\alpha}}$. Eine in der Mitte des Balkens aufgebraachte Last 1 bewirkt, wenn wir statische Verhältnisse ins Auge fassen und sie auf die Dynamik übertragen, dort eine Durchbiegung $\frac{l^3}{48 E J_y}$. α ist daher gleich $\frac{48 E J_y}{l^3}$ zu setzen. Nun ist $\frac{z_{\max}}{f} = \frac{x}{l^3} (3l^2 - 4x^2)$ (siehe oben), d. h.

$$z_{\max} = \sqrt{\frac{2ghM}{48 E J_y}} \cdot \frac{x}{l^3} (3l^2 - 4x^2) = \frac{x}{l^2} (3l^2 - 4x^2) \sqrt{\frac{Qlh}{24 E J_y}}. \quad (o)$$

Dieser Wert ist in die obige Bestimmungsgleichung (l) für C_n einzuführen, dabei aber zu bedenken, daß das Integral von 0 bis $\frac{l}{2}$ zu nehmen und dann zu verdoppeln ist, da z_{\max} nur für die eine Stabhälfte berechnet wurde. Durch Ausführung der Integration in (l) und bei Einführung von $\varepsilon = \sqrt{\frac{6Qhl}{E J_y}}$ erhält man schließlich

$$C_n = \frac{\varepsilon l}{3 n^4 \pi^4} \left[24 \sin \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{2} (n^2 \pi^2 + 12) n \pi \right]. \quad (p)$$

Damit ist die Aufgabe der Bestimmungen der dynamischen Durchbiegungen für jede Zeit t und jeden Wert x zur Lösung gebracht. Weitere diesbezügliche interessante Einzelheiten wolle der Leser in der oben zitierten Quelle einsehen.

IV. Das allgemeine Dimensionierungsproblem und die zulässige Anstrengung unter statischen und dynamischen Verhältnissen.

1. Allgemeine Grundlagen. Sonderfall des ebenen Spannungszustandes.

Es liege ein Körper aus gegebenem, durchschnittlich als homogen und isotrop gedachtem Stoffe bestimmter Formgebung vor, der unter dem Einflusse eines gegebenen äußeren Kraftsystemes steht. Das Dimensionierungsproblem besteht dann darin, die Ausmaße dieses Körpers bei Festhaltung seiner Form derart zu bestimmen, daß das äußere Kraftsystem mit Sicherheit getragen werden kann. Die Forderung der Sicherheit soll besagen, daß durch die Wahl der Ausmaße die Gewähr dafür besteht, daß in keinem Punkte des Körpers das Maß der Anstrengung (Punkt 39 auf Seite 179ff.) einen für den betreffenden Stoff zulässigen Wert überschreitet. Dieser Wert muß jedenfalls so gewählt werden, daß er unterhalb jenes Wertes liegt, der der Elastizitätsgrenze des betreffenden Stoffes (Punkt 33, Seite 153ff.) entspricht, damit nach Abbringen der Belastung die ihr zugeordneten Deformationen in jedem Punkte des Körpers wieder bis auf einen geduldeten Rest zurückgehen. Nun ist aber, wie wir bereits wissen, die Frage nach dem Maß der Anstrengung und damit im Zusammenhang die Frage, welche

Umstände die Erreichung der Elastizitätsgrenze bedingen, noch nicht restlos aufgeklärt. Es bleibt bei dem derzeitigen Stande der theoretischen und Erfahrungsgrundlagen sonach nichts anderes übrig, als zwischen den verschiedenen Anschauungen über das Maß der Anstrengung die Wahl zu treffen und etwaige in besonderen Fällen sich einstellende Unstimmigkeiten mit der Erfahrung durch Einführung von praktischen Korrektionsziffern auszugleichen, die nach dem Vorschlage von Bach in manchen Fällen als Anstrengungsziffern bezeichnet werden und sogar auch für inhomogene und anisotrope Körper (Holz) üblich sind.

Am meisten verbreitet ist derzeit die Annahme der De Saint Venantschen Anschauung über das Maß der Anstrengung als Grundlage für die Dimensionierung nach welcher bei nicht wechselnder statischer Beanspruchung die größte positive oder die dem Zahlenwerte nach größte negative Hauptdehnung oder, was bei Voraussetzung der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes auf das gleiche hinauskommt, die größte positive oder die dem Zahlenwerte nach größte negative reduzierte Spannung (Seite 149) die Anstrengung mißt. Träte diese Annahme vollständig zu, so wäre es notwendig a) die bei Beanspruchung auf Zug zugelassene Dehnung $(e_z)_{zul}$ bzw. die ihr proportionale zugelassene Zugspannung $(\sigma_z)_{zul}$, b) die bei Beanspruchung auf Druck zugelassene Quetschung $(e_D)_{zul}$ bzw. die ihr proportionale zugelassene Druckspannung $(\sigma_D)_{zul}$ festzulegen. Für jede nicht lineare Beanspruchung müßte dann an der Zulässigkeitsgrenze die Forderung erhoben werden, daß 1. keine von den Haupt-Dehnungen (-Quetschungen) bzw. reduzierten Spannungen die zugelassenen Dehnungen (Quetschungen) bzw. zugelassenen Spannungen bei Beanspruchung auf Zug oder Druck überschreitet, und daß 2. entweder die größte positive Hauptdehnung bzw. größte positive reduzierte Spannung gleich der zugelassenen Dehnung bzw. Spannung bei Beanspruchung auf Zug oder der Zahlenwert der absolut größten negativen Hauptdehnung bzw. der Zahlenwert der absolut größten negativen reduzierten Spannung gleich dem Zahlenwert der zugelassenen Quetschung bzw. Spannung bei Beanspruchung auf Druck ist. Würde demnach ein Spannungszustand von der Art vorliegen, daß die reduzierten Spannungen S_1, S_2, S_3 mit Bezug auf ihr Zeichen und ihre Größenverhältnisse den Voraussetzungen $S_1 > 0, S_2 < 0, S_3 < 0$ und $|S_1| > |S_2| > |S_3|$ genügen, und wäre der Stoff von einer solchen Beschaffenheit, daß $(\sigma_z)_{zul} < |(\sigma_D)_{zul}|$, wie es z. B. für gegossene Metalle und Steine zutrifft, so befände sich der Spannungszustand an der Zulässigkeitsgrenze, wenn $S_1 = (S_1)_{zul} = (\sigma_z)_{zul}$; es ist dann gewiß $|S_2| < |(\sigma_D)_{zul}|$. Wäre für einen vorliegenden Stoff $|(\sigma_D)_{zul}| < (\sigma_z)_{zul}$ (fehlerfreies Holz in der Richtung der Fasern), so käme für die Zulässigkeitsgrenze des angenommenen Spannungszustandes entweder a) $S_2 = (S_2)_{zul} = (\sigma_D)_{zul}$, wobei $S_1 \leq (\sigma_z)_{zul}$ sein müßte, oder b) $S_1 = (S_1)_{zul} = (\sigma_z)_{zul}$, wobei gleichzeitig $|S_2| \leq |(\sigma_D)_{zul}|$ zu erfüllen wäre, in Betracht. Ob der Fall a) oder b) zutrifft, hängt natürlich von den besonderen Werten der reduzierten Spannungen S_1, S_2, S_3 ab. Schließlich könnte $(\sigma_z)_{zul} = (\sigma_D)_{zul}$ sein, wie es für Flußeisen zutrifft. Für den oben angenommenen Spannungszustand müßte dann an der Zulässigkeitsgrenze $S_1 = (S_1)_{zul} = (\sigma_z)_{zul}$ sein, was schon $|S_2| < |(\sigma_D)_{zul}|$ zur Folge hätte.

Die Dimensionierungsaufgabe für einen Körper bestimmter Formgebung bestände dann darin, die größte positive bzw. die dem Zahlenwerte nach größte negative reduzierte Spannung im ganzen Bereiche des Körpers, d. i. S_{\max} bzw. S_{\min} als Funktion der äußeren Kräfte zu berechnen und dann die Dimensionierungsgleichung

$$S_{\max} = (\sigma_z)_{zul} \quad (192a)$$

oder

$$S_{\min} = (\sigma_D)_{zul} \quad (192b)$$

anzusetzen, je nach den Zahlenwerten von S_{\max} und S_{\min} und dem besonderen Stoffe, der gerade vorliegt. Die Dimensionierungsgleichung enthält das äußere Kraftsystem, die für den betreffenden Stoff gegeben gedachte zulässige Beanspruchung auf Zug oder Druck und die Dimensionen des Körpers. Versteht man unter gegebener Formgebung des Körpers auch das Gegebensein des Verhältnisses der Dimensionen des Körpers, so kann aus der Dimensionierungsgleichung ein Ausmaß nach einer Dimension berechnet werden, wodurch dann auch die übrigen Ausmaße in den restlichen Dimensionen bestimmt sind. Bei geraden Stäben ist gewöhnlich die Langsdimension und die Form des Querschnittes (das Profil) gegeben, die Dimensionen des Querschnittes sind dann die gesuchten Größen, die Unbekannten der Dimensionierungsgleichung. Die Zahl der Dimensionierungsgleichungen von der Form (192a) bzw. (192b) ist gleich n , wenn wir uns den Körper aus n Teilen aufgebaut denken, von denen jeder eine bestimmte Formgebung in dem angegebenen Sinne besitzt.

Als Sonderfall wollen wir zunächst den ebenen Spannungszustand parallel zur xz -Ebene nach Abb. 6b, Seite 19, in der $X_y = Y_x = X'_y = Y'_x = 0$ gesetzt wird, betrachten, wie er zum Beispiel im Inneren eines auf gerade Biegung und Schub beanspruchten Balkens außerhalb der Nullstellen der Biegungsspannungen, d. i. der neutralen Ebene (Seite 238ff.) auftritt. Die Hauptspannungen σ_1, σ_3 genügen zunächst dem Hookeschen Gesetze

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{E} \left(\sigma_1 - \frac{1}{m} \sigma_3 \right) = \frac{1}{E} S_1, & e_2 &= -\frac{1}{E m} (\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{1}{E} S_2, \\ e_3 &= \frac{1}{E} \left(\sigma_3 - \frac{1}{m} \sigma_1 \right) = \frac{1}{E} S_3, \end{aligned}$$

worin die reduzierten Spannungen durch

$$S_1 = \left(\sigma_1 - \frac{1}{m} \sigma_3 \right), \quad S_2 = -\frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{m}, \quad S_3 = \left(\sigma_3 - \frac{1}{m} \sigma_1 \right)$$

und die Hauptspannungen durch $\sigma_{1,3} = \frac{X_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{X_x^2 + 4Z_x^2}$ [Gleichung (36), auf Seite 69] bestimmt sind. Da die Hauptspannungen ungleich bezeichnet sind ($\sigma_1 < 0, \sigma_3 > 0$), so ist S_2 dem Zahlenwerte nach bestimmt kleiner als $|S_1|$ und S_3 , für die Dimensionierung kommen sonach nur S_1 und S_3 in Frage. Setzen wir die Hauptspannungen σ_1 und σ_3 in die Ausdrücke für die reduzierten Spannungen S_1 und S_3 ein, so erhalten wir

$$S_{1,3} = \frac{m-1}{2m} X_x \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{X_x^2 + 4Z_x^2} \dots S_1 < 0, \quad S_3 > 0. \quad (193)$$

Nehmen wir an, es sei X_x positiv, dann ist $|S_1| < S_3$ und die zu erfüllende Bedingung an der Zulässigkeitsgrenze nimmt, wenn für den betreffenden Stoff $(\sigma_z)_{zul} > |(\sigma_D)_{zul}|$ ist, die Form

$$\left. \begin{aligned} (S_3)_{zul} &= \left(\frac{m-1}{2m} X_x + \frac{m+1}{2m} \sqrt{X_x^2 + 4Z_x^2} \right)_{zul} = (\sigma_z)_{zul} \\ \text{mit} & \\ |S_1| &= \left| \frac{m-1}{2m} X_x - \frac{m+1}{2m} \sqrt{X_x^2 + 4Z_x^2} \right| \leq |(\sigma_D)_{zul}| \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

oder die Form

$$(S_1)_{zul} = (\sigma_D)_{zul} \quad \text{mit} \quad S_3 \leq (\sigma_z)_{zul} \quad (194a)$$

an. In ähnlicher Weise könnten wir die Bedingungen für die Zulässigkeitsgrenze

unter der Voraussetzung, daß $(\sigma_z)_{zul} < |(\sigma_D)_{zul}|$ oder $(\sigma_z)_{zul} = |(\sigma_D)_{zul}|$ ist, ansetzen.

Nehmen wir an, daß $X_x = 900 \text{ kg/cm}^2$, $Z_x = 500 \text{ kg/cm}^2$ und $m = 4$, so wird $S_3 = 1178,1 \text{ kg/cm}^2$ und $S_1 = -503,1 \text{ kg/cm}^2$. Wäre $(\sigma_z)_{zul} = |(\sigma_D)_{zul}| = 900 \text{ kg/cm}^2$, so läge der angenommene Spannungszustand bereits über der Zulässigkeitsgrenze.

Für den besonderen ebenen Spannungszustand der reinen Schubbeanspruchung parallel zur xz -Ebene werden die reduzierten Spannungen, da jetzt $X_x = 0$ ist,

$$S_{1,3} = \pm \frac{m+1}{m} Z_x. \quad (195)$$

Der Spannungszustand läge an der Zulässigkeitsgrenze bei Annahme von

$$(\sigma_z)_{zul} > |(\sigma_D)_{zul}|,$$

wenn

$$(S_3)_{zul} = S_{1,zul} = \frac{m+1}{m} Z_x \text{ }_{zul} = |(\sigma_D)_{zul}| \quad (a)$$

oder bei Annahme von $(\sigma_z)_{zul} < |(\sigma_D)_{zul}|$, wenn

$$S_{1,zul} = (S_3)_{zul} = \frac{m+1}{m} Z_x \text{ }_{zul} = (\sigma_z)_{zul}. \quad (b)$$

Bei Annahme von $(\sigma_z)_{zul} = |(\sigma_D)_{zul}|$ fallen die Gleichungen (a) und (b) zusammen. Im Falle des Zutreffens der Beziehung (a) würde, wenn $m = 4$ gesetzt wird,

$$|Z_x|_{zul} = \tau_{zul} = \frac{m}{m+1} |(\sigma_D)_{zul}| = 0,8 |(\sigma_D)_{zul}| \quad (195a)$$

gelten, trifft die Beziehung (b) zu, so wird für den gleichen Wert von m die Bedingung

$$|Z_x|_{zul} = \tau_{zul} = \frac{m}{m+1} (\sigma_z)_{zul} = 0,8 (\sigma_z)_{zul} \quad (195b)$$

zu erfüllen sein. Man sieht, daß auf Grund der De Saint Venantschen Anschauung über das Maß der Anstrengung die zulässige Beanspruchung auf reinen Schub $(\tau)_{zul}$ unmittelbar aus der zulässigen Beanspruchung auf Zug bzw. Druck berechnet werden könnte. Da bei reiner Verdrehungsbeanspruchung ein reiner Schubspannungszustand auftritt, wäre die zulässige Beanspruchung auf Verdrehung gleichfalls aus der zulässigen Beanspruchung auf Zug oder Druck ermittelbar.

Bei reiner Biegungsbeanspruchung eines geraden Stabes ist bekanntlich sowohl der reine Zug- als auch der reine Druckspannungszustand verwirklicht. Die zulässige Beanspruchung auf Biegung $(\sigma_D)_{zul}$, die zugleich die zulässige reduzierte Spannung bei reiner Biegungsbeanspruchung ist, müßte sonach auf Grund unserer Annahme über das Anstrengungsmaß folgerichtig a) entweder gleich der zulässigen Beanspruchung auf Zug oder b) der zulässigen Beanspruchung auf Druck oder c) einer der beiden zulässigen Beanspruchungen auf Zug oder Druck gleichgültig welcher gleichkommen, je nachdem

$$(\sigma_z)_{zul} < |(\sigma_D)_{zul}| \quad \text{oder} \quad (\sigma_z)_{zul} > |(\sigma_D)_{zul}| \quad \text{oder} \quad (\sigma_z)_{zul} = |(\sigma_D)_{zul}|$$

zutreffend ist.

Zur Geschlossenheit der Anwendungsmöglichkeit der De Saint Venantschen Anschauung in einem vorgelegten Fall, gehört jetzt nur noch die Festlegung jener Gesichtspunkte, nach welchen für die verschiedenen Stoffe die Werte der

zulässigen Beanspruchung auf Zug und Druck gewählt werden. Man setzt gewöhnlich für kontinuierliche Belastung ohne Wechsel derselben

$$(\sigma_z)_{zul} = \frac{K_z}{n_1} \quad (196a) \quad \text{und} \quad (\sigma_D)_{zul} = \frac{K_D}{n_2}, \quad (196b)$$

d. h. leitet die zulässigen Beanspruchungen auf Zug und Druck aus der idealen Zugfestigkeit K_z bzw. der idealen Druckfestigkeit K_D durch Division mit Zahlenwerten n_1 bzw. n_2 ab, die als Sicherheitskoeffizienten bezeichnet werden. Existiert keine Druckfestigkeit wie bei fließenden Materialien, so tritt an Stelle derselben die bezügliche Fließgrenze. Die Sicherheitskoeffizienten n_1 und n_2 müssen anschließend an eine bereits oben erwähnte Forderung jedenfalls so groß gewählt werden, daß die genannten zulässigen Werte unter die Elastizitätsgrenze auf Zug bzw. Druck zu liegen kommen. Aus diesem Grunde bezieht man auch häufig die Sicherheitskoeffizienten auf die Elastizitätsgrenze selbst und wählt sie dementsprechend kleiner als bei Bezugnahme auf die Festigkeiten.

Wenn z. B. für Flußeisen die Zugfestigkeit $K_z = 4500 \text{ kg/cm}^2$, die die Druckfestigkeit ersetzende Fließgrenze $(\sigma_F)_D = 2000 \text{ kg/cm}^2$, die Elastizitätsgrenzen auf Zug und Druck $\sigma_{zE} = \sigma_{DE} = 1800 \text{ kg/cm}^2$ sind, so kommt man bei Wahl von $n_1 = 5$ und $n_2 = 2,2$ auf Grund der Gleichungen (196a, b) auf $|(\sigma_D)_{zul}| = (\sigma_z)_{zul} = 900 \text{ kg/cm}^2$. Bei Bezugnahme auf die Elastizitätsgrenze ergeben sich für die zulässigen Beanspruchungen auf Zug und Druck die gleichen Werte, wenn die Sicherheitskoeffizienten den gemeinsamen Wert 2 besitzen.

Die Wahl der Größe der Sicherheitskoeffizienten hängt außer von dem bereits genannten Umstand noch hauptsächlich ab:

1. Von der Zuverlässigkeit des betreffenden Stoffes, die für verschiedene Beanspruchungsarten verschieden sein kann, und von der Forderung, denselben soweit, als auf Grund der Erfahrungen und Versuche möglich ist, auszunützen, um in Fällen, in denen der Stoff zum Aufbau von Werken der Technik benützt wird, möglichst wirtschaftlich, d. h. mit dem geringsten Aufwande auszukommen.
2. Von der fallweisen Forderung nach nicht zu großer Verformung des Körpers.

Wenn, wie es in wissenschaftlich nicht einwandfreier Weise häufig geschieht, die gegenüber statischer Kraftwirkung ungleich größere Gefährlichkeit der dynamischen Beanspruchung unter freilich — auch bei Zugrundelegung eines besonderen Dehnungsmaßstabes — ungerechtfertigter Festhaltung der de Saint Venantschen Anstrengungstheorie in der Größe des Sicherheitskoeffizienten bezogen auf die statische Zug- und Druckfestigkeit zum Ausdruck gebracht werden wollte (Zurückführung einer dynamischen Beanspruchung auf eine gleichwertige statische Beanspruchung), so käme für die Wahl des Sicherheitskoeffizienten auch

3. die Aufbringungsart der Belastung und die mit ihr verbundene Beanspruchungsart (Seite 8ff. und 20),
4. der Belastungscharakter (Seite 8) in Betracht.

ad 1. Wir schreiben einem Werkstoffe Zuverlässigkeit zu, wenn die aus Versuchsreihen gewonnenen auf Verformung und zugeordneten Spannungszustand bezüglichen Eigenschaften keine große Streuung zeigen. Der Grad der Zuverlässigkeit ist begründet auf der mehr oder weniger unveränderlichen chemisch-physikalischen Konstitution, die bei der Natur unmittelbar entnommenen Stoffen, wie z. B. bei Holz, als etwas Gegebenes vorliegt, bei durch technologische Prozesse gewonnenen Stoffen, wie z. B. Gußeisen, Flußeisen, Ziegel, durch die genannten Prozesse bedingt wird.

Holz erscheint mit Bezug auf die Zugfestigkeit parallel zur Faser ziemlich unzuverlässig, da sie durch Asteinschlüsse, Drehwuchs, Harzgalleneinschlüsse in außerordentlich empfind-

licher Weise beeinflußt wird. Bei Beanspruchung des Holzes auf Druck parallel zur Faser sind diese Einflüsse weniger von Belang. So fand Lang (L) für fehlerfreies lufttrockenes Fichtenholz eine Zugfestigkeit parallel zu den Fasern von 1000 kg/cm^2 , bei schief gewachsenem lufttrockenen Fichtenholz nur eine Zugfestigkeit parallel zu den Fasern von 367 kg/cm^2 . Der Sicherheitskoeffizient für Holz bei Beanspruchung auf Zug parallel zur Faser wird demnach höher zu wählen sein als jener bei Beanspruchung auf Druck in der gleichen Richtung, so daß, obwohl die Zugfestigkeit bei fehlerfreiem Holz parallel zur Faser größer ist als die Druckfestigkeit, die zulässigen Beanspruchungen auf Zug und Druck nicht nennenswert verschieden angesetzt werden. Wenn man den Sicherheitskoeffizienten bei Beanspruchung auf Druck parallel zur Faser mit 4 wählt, so wird man denselben bei Zugbeanspruchung etwa gleich 6 setzen müssen. Auch bei Steinen, für die, da deren Druckfestigkeit bedeutend höher als deren Zugfestigkeit liegt, praktisch in erster Linie die Beanspruchung auf Druck in Frage kommt, ist die Zuverlässigkeit infolge der nicht zu vermeidenden Inhomogenitäten des Materiales keine große, infolgedessen wählt man den Sicherheitskoeffizienten sehr hoch (z. B. etwa 15). Gußeisen zeigt bei Beanspruchung auf Zug eine größere Empfindlichkeit für Materialfehler als bei Beanspruchung auf Druck, außerdem liegt in der Regel die Druckfestigkeit bedeutend höher als die Zugfestigkeit. Ferner zeigt es wegen der im Bereiche des betreffenden Formstückes oft ungleichen Abkühlungsvorgänge häufig Anfangsspannungen und ist aus diesem Grunde als ein nicht gerade ideales Material anzusprechen. Aus den angegebenen Gründen wählt man für Gußeisen den Sicherheitskoeffizienten eher zu groß als zu klein und bei Beanspruchung auf Zug höher als bei Beanspruchung auf Druck, für die derselbe etwa gleich 6 angenommen werden kann.

Die oben betonte Forderung auf Wirtschaftlichkeit, d. h. möglichst guter Ausnützung eines Werkstoffes kann naturgemäß dann um so eher erfüllt werden, je genauer die Eigenschaften desselben bekannt sind. So hängt Ökonomie und wissenschaftliche Forschung auch hier enge zusammen.

ad 2. Fallweise wird aus Zweckmäßigkeitsgründen die Forderung erhoben, daß die zulässigen Beanspruchungen und damit die Sicherheitskoeffizienten so groß gewählt werden, daß gewisse, für das betreffende Gebilde und die zugehörige Beanspruchungsart charakteristische Deformationsgrößen — wie z. B. die größte Durchbiegung der Stabachse eines geraden Stabes bei Beanspruchung auf Biegung oder der größte Verdrehungswinkel des Stabes bei Beanspruchung auf Verdrehung — bestimmte vorgegebene Grenzen nicht überschreiten. Soll die größte Durchbiegung eines durch gegebene Kräfte auf Biegung beanspruchten Blechträgers höchstens gleich einem gegebenen zulässigen Wert werden, so wird das nur bei bestimmten Ausmaßen des Trägers möglich sein. Die Dimensionierungsgleichung (192a) bzw. (192b) wird dann ersetzt durch die Bedingungsgleichung, die die Gleichheit der unter Zuhilfenahme der Differentialgleichung der elastischen Linie berechneten größten Durchbiegung mit dem gegebenen zulässigen Wert derselben ausspricht. Dem zulässigen Wert der größten Durchbiegung entspricht ein zulässiger Wert der größten Biegungsspannung und damit ein bestimmter Sicherheitskoeffizient.

ad 3. Wie wir in Punkt 37 auf Seite 171ff. gesehen haben, hängen die Festigkeits- und Deformationsverhältnisse eines Stoffes im allgemeinen auch davon ab, ob eine Belastung dauernd oder wechselnd aufgebracht wird, und ob die zugeordnete Beanspruchungsart die gleiche bleibt oder gleichfalls wechselt. Insbesondere wurden dort die Begriffe der Arbeitsfestigkeit und die Wöhlerschen Gesetze, die sich freilich nur auf lineare Spannungszustände beziehen, entwickelt. Aus letzteren ist der Schluß zu ziehen, daß wechselnde Beanspruchungs- und Aufbringungsart die Widerstandsfähigkeit eines Stoffes im Vergleich zu jener bei dauernder statischer Beanspruchung herabsetzt, und infolgedessen das Anstrengungsmaß in beiden Fällen bei gleicher Größe der Spannung nicht dasselbe ist und auch von der Zahl der Wechsel abhängig sein muß. Man hilft sich dann auf die folgende Weise. Handelt es sich z. B. um eine wechselnde Beanspruchung zwischen Null und einer oberen Grenzspannung auf Zug oder Druck, so kann man die Vereinbarung treffen, die zugeordneten zulässigen Beanspru-

chungen gleichsam auf statisch zulässige Beanspruchungen auf Zug oder Druck dadurch zu reduzieren, daß man den Sicherheitskoeffizienten für die zulässige wechselnde Beanspruchung auf die Zugfestigkeit K_z oder die Druckfestigkeit K_D bezieht und ihn, da für einen gegebenen Stoff die Ursprungsfestigkeit dem Zahlenwerte nach kleiner als die Zug- bzw. Druckfestigkeit ist, größer wählt als er genommen würde, wenn dauernde Beanspruchung vorliegt. In ähnlicher Weise könnte man auch bei schwingender Beanspruchung zwischen zwei dem Zahlenwerte nach gleichen Grenzspannungen auf Zug und Druck eine von den beiden Beziehungen (196 a), (196 b) für die Wahl der zulässigen Beanspruchung zugrunde legen, müßte aber dann den Sicherheitskoeffizienten wieder größer nehmen als bei Belastung zwischen Null und einer oberen linearen Grenzspannung, da die Schwingungsfestigkeit für einen gegebenen Stoff kleiner ist als die Ursprungsfestigkeit desselben.

Anstatt die Gleichungen (196 a, b) zu benützen, kann man in mehr befriedigender Weise von der Arbeitsfestigkeit für die betreffende wechselnde lineare Spannung selbst ausgehen, um die zugeordnete zulässige Spannung zu finden. Als Erfahrungsgrundlage für die verschiedenen Flußeisensorten kann die Arbeitsfestigkeit z. B. in der Form, wie sie Tetmayer aufgestellt hat [Gleichung (86) auf Seite 173], benützt werden. Die zulässige Spannung ergibt sich dann mit $\frac{A_v}{n_3} = (\sigma)_{zul}$, worin $(\sigma)_{zul}$ eine Zug- oder Druckspannung sein kann und bei gegebenem Werte von n in Gleichung (86) den dem Zahlenwerte nach größeren von den beiden Anspannungswerten bezeichnet, bis zu welchem man in zulässiger Weise gehen kann, und der Zahlenwert n_3 den Sicherheitskoeffizienten mit Bezug auf die Arbeitsfestigkeit bedeutet. Letzterer kann für die verschiedenen Flußeisensorten etwa mit $\frac{7}{2}$ angenommen werden.

Bei folgerichtiger Übertragung der für nicht wechselnde Beanspruchungs- und Aufbringungsart gelten sollenden Annahme von De Saint Venant über das Maß der Anstrengung auf wechselnde Beanspruchungs- und Aufbringungsart müßte zwei verschiedenen wechselnden Beanspruchungen zwischen gegebenen Grenzspannungszuständen die gleiche Anstrengung zukommen, wenn den Grenzspannungszuständen für sich betrachtet die gleichen Anstrengungen zukommen. Danach müßte allgemeinen dreidimensionalen Spannungszuständen, die zwischen zwei Grenzspannungszuständen derart wechseln, daß für den einen die reduzierten Spannungen S_1, S_2, S_3 , für den anderen die reduzierten Spannungen nS_1, nS_2, nS_3 auftreten, mit n als positiver oder negativer Zahl, die von 1 verschieden ist, ein wechselnder linearer Spannungszustand mit freilich nur postulierter gleicher Materialanstrengung zugeordnet werden können, dessen lineare Spannungen zwischen Werten schwanken, deren Größen von dem besonderen Material und den Größenverhältnissen der reduzierten Spannungen der Grenzspannungszustände des wechselnden dreidimensionalen Spannungszustandes abhängen.

Für einen Stoff, dessen Elastizitätsgrenze auf Zug gleich der Elastizitätsgrenze auf Druck ist, entspräche danach einem in der xz -Ebene entsprechend $n = -1$ schwankenden Schubspannungszustand Z_x mit den extremen positiven bzw. negativen reduzierten Spannungen $S_1 = \frac{m+1}{m} Z_x$ bzw. $S_2 = -\frac{m+1}{m} Z_x$ ein zwischen $\sigma_z = S_1$ und $\sigma_D = S_2$ schwankender linearer Zug- bzw. Druckspannungszustand gleicher Anstrengung.

Derartige Überlegungen könnten naturgemäß nur als erste Anhaltspunkte gewertet werden und müßten für den Fall, als positive Erfahrungen nicht bestehen, durch besondere aus eigens angestellten Versuchen geschöpfte Unterlagen korrigiert werden.

Für die verschiedenen Eisensorten setzt Bach das Verhältnis der zulässigen oberen Zug- oder Druckspannungen bei statischer Beanspruchung Ursprungs- und Schwingungsbeanspruchung gleich 3 : 2 : 1 derart, daß z. B. für weniger feste Flußeisensorten ($K_z < 4500 \text{ kg/cm}^2$) die zulässigen Spannungen der Reihe nach mit 900, 600, 300 kg/cm^2 angesetzt werden. Wenn das Verhältnis der zugeordneten Festigkeiten mit Bezug auf die wechselnden Beanspruchungen ein wesentlich

günstigeres ist (Stahl, s. S. 172) erscheinen die zulässigen Spannungen bei schwingender bzw. bei stets auf Null zurückgehender Ursprungsbelastung zu ungünstig¹.

ad 4. Auch der Belastungscharakter (stoßartig oder kontinuierlich) wird häufig schon bei Ansatz der Grundgleichungen (196a, b) mit einbezogen, indem die stoßartige Belastung auf eine langsam wachsende kontinuierliche oder, wie wir auch kurz sagen, statische Belastung reduziert wird. Das hat freilich zur Voraussetzung, daß der betreffende Stoff mit Bezug auf die auftretenden Deformationen bei stoßartiger und gleich großer statischer Belastung nur einen graduellen Unterschied zeigt, in dem Sinne, daß die in den Deformationen zum Ausdruck kommende Wirkung der stoßartigen Belastung größere Deformationen zur Folge hat als die gleich große statische Belastung. So sind, wie auf Seite 205ff. ausgeführt, z. B. für stoßartige, durch ein plötzlich aufgelegtes Gewicht bewirkte Biegungsbeanspruchungen eines geraden Stabes unter gewissen wenig annähernd richtigen Voraussetzungen, die Durchbiegungen bei stoßartiger Biegungsbeanspruchung doppelt so groß wie bei gleich großer statischer Beanspruchung oder eine statisch wirkende Last müßte annähernd doppelt so groß als die stoßartig wirkende Last sein, wenn die gleichen Durchbiegungen zustande kommen sollen. Daraus wäre dann der Schluß zu ziehen, daß der Sicherheitskoeffizient bei stoßartiger Beanspruchung annähernd doppelt so groß zu wählen ist wie bei gleich großer statischer Beanspruchung oder bei gleich großem Sicherheitskoeffizienten die stoßartig wirkende statisch gemessene Belastung mit einer Zahl, die man als Stoßzahl bezeichnet, zu multiplizieren ist, die in dem angegebenen Fall etwa gleich 2 zu setzen wäre.

Nun ergibt sich aber aus Versuchen bei stoßartiger Belastung einerseits und gleich großer statischer Belastung andererseits, daß ein und derselbe Stoff nicht einen graduellen Unterschied in den Deformationen in dem angegebenen Sinne zeigt, sondern sich bei der einen Beanspruchung überhaupt ganz verschieden wie bei der anderen verhält. Gewisse Sorten von Flußeisen in Stabform verhalten sich z. B. bei stoßartiger Biegungsbeanspruchung durch fallende Gewichte spröde, zeigen also vor dem Bruch verhältnismäßig ganz geringe Deformationen, während sie bei statischer Belastung zähe sind. Dabei kann die Stoßbiegungsfestigkeit erheblich gegenüber der statischen Biegungsfestigkeit abgenommen haben. Ähnliche Erscheinungen zeigt eine auf stoßartige und statische Biegung beanspruchte Siegellackstange. Derartige Erscheinungen erklären sich zwanglos aus der Abhängigkeit des Zusammenhanges zwischen Deformations- und Spannungsverhältnissen von der Belastungsgeschwindigkeit, die bei stoßartiger Belastung eine sehr große ist (Seite 169ff.).

Versuche bei stoßartiger Beanspruchung werden mit Fallwerken oder in neuerer Zeit auch mit Schlagpendeln zur Ausführung gebracht. In den Fallwerken wirkt ein fallender massiger Bär gegen das Versuchsstück und beansprucht dasselbe in der Regel auf Stoßdruck, Stoßzug oder Stoßbiegung. Das Versuchsstück hat dementsprechend die Form eines Würfels oder Kreiszylinders von kleiner Kantenlänge bzw. Höhe oder die Form längerer aus dem zu untersuchenden Stoffe geschnittener Stäbe. Die Schlagpendel lassen Stoßzug- und Stoßbiegeversuche zu und bestehen im wesentlichen aus einem in möglichst reibungslosen Lagern schwingenden schweren Pendel, dessen zum Stoß gelangender Teil mit einer Stahlschneide versehen ist, und zwei möglichst elastisch gelagerten Widerlagern für den Versuchsstab. Das fallende Pendel wirkt beim Stoßbiegeversuch gegen einen gekerbten prismatischen auf zwei Stützen gelagerten Probestab, dessen Ausmaße dem Gewichte des Pendels angepaßt sind. In der Abb. 181

¹ Siehe hierzu auch das Werk: Die Hütte, des Ing. Taschenbuch, 24. Aufl. 1, 604. Berlin: W. Ernst 1923.

ist eine Versuchsform mit sog. scharfer Kerbe dargestellt, die sich gegen feste Widerlager A und B stützt. Die Richtung der Wirkung des Schlagpendels ist durch den Pfeil angedeutet. In der Umgebung der scharfen Ecken des Kerbes entstehen bei gegebener Stoßwirkung größere Spannungen als die größte Stoßbiegungsspannung, die bei nicht vorhandenem Kerb durch die gleiche Stoßkraft erzeugt würde. Die auf diese Weise durchgeführte Probe ist zufolge der Kerbwirkung eine besonders scharfe und heißt kurz Kerbschlagprobe¹.

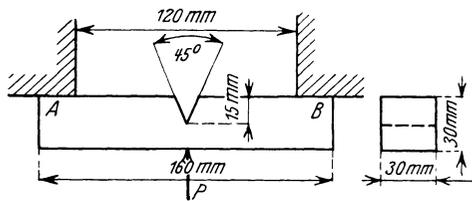


Abb. 181.

Unter anderem lassen die bisherigen Versuchsergebnisse den Schluß zu, daß bei stoßartiger Beanspruchung auf Zug und Druck durch mit lebendiger Kraft begabte Massen der von dieser lebendigen Kraft in dem gestoßenen Körper als Arbeitsaufwand entfallende Anteil bezogen auf die Raumeinheit des Versuchskörpers charakteristisch

für die Deformation und den Bruch ist, und als Maß der Anstrengung gelten könnte².

Aus dem Vorstehenden dürfte zur Genüge hervorgehen, daß die De Saint Venantsche Anschauung über das Anstrengungsmaß, wenn sie auch für statische Anstrengung brauchbar sein sollte, nicht auch in gleicher Weise für stoßartige Beanspruchung verwendbar wäre. Praktisch hilft man sich über die hierdurch sich ergebenden Schwierigkeiten dadurch hinweg, daß man alle für eine bestimmte stoßartige Beanspruchung eines Stoffes gemachten Erfahrungen in einer Stoßzahl zusammenfaßt, mit der die statische Belastung zu multiplizieren ist, wie das oben weniger allgemein, d. h. ohne Berücksichtigung der möglicherweise völlig verschiedenen Verhaltens eines und desselben Stoffes einerseits bei statischer, andererseits bei stoßartiger Beanspruchung für den einfachen Fall der Stoßbiegebeanspruchung bereits angedeutet wurde.

Wir kehren nunmehr zur nicht wechselnden statischen Beanspruchung und den für dieselbe aus der De Saint Venantschen Anschauung und der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes gefolgerten zulässigen Beanspruchungen zurück. Der Umstand, daß viele technisch wichtige Stoffe nicht homogen und anisotrop sind (Steine, Holz, Gußeisen mit Gußhaut usw.), ferner weil man der De Saint Venantschen Anschauung berechtigterweise nicht völlig vertraut, leitet man zunächst die zulässige Beanspruchung auf Biegung $(\sigma_D)_{zul}$ aus der theoretischen Biegezugfestigkeit K_b , die zulässige Beanspruchung auf Schub, wie sie bei der Beanspruchung auf Drillung auftritt, die in der Technik als zulässige Beanspruchung auf Drehung $(\tau_D)_{zul}$ bezeichnet wird, aus der theoretischen Verdrehungszugfestigkeit K_D durch bzw. Division mit einem Sicherheitskoeffizienten ab, der jedenfalls so groß gewählt werden muß, daß wir unter die Elastizitätsgrenze auf Biegung bzw. Drillung kommen und die auf Seite 418 unter den Ziffern 1. und 2. erwähnten Umstände Berücksichtigung finden. Außer der zulässigen Beanspruchung auf Verdrehung $(\tau_D)_{zul}$ wird noch eine zulässige Beanspruchung auf Abscheren $(\tau_s)_{zul}$ eingeführt, die in technischen Tabellenwerten, wenn auch mit Unrecht, häufig als zulässige Beanspruchung auf Schub bezeichnet wird und

¹ Näheres hierüber siehe z. B. O. Wawrzyniok: Handbuch des Material-Prüfungswesens, Berlin: Julius Springer 1908 und Ehrenberger: Z. V. d. I. 1907, sowie das Werk von G. Sachs: Mechanische Technologie der Metalle, Leipzig: Akadem. Verlag 1925.

² Siehe hierzu A. Martens: Materialkunde für den Maschinenbau Bd. 1, Berlin: Julius Springer 1898 und Mitteilungen aus den königlich technischen Versuchsanstalten zu Berlin 1891, ferner F. Kick: Das Gesetz der proportionalen Widerstände, Leipzig 1885.

aus der theoretischen Scherfestigkeit K_s , gleichfalls durch Division mit einem Sicherheitskoeffizienten abgeleitet wird. Die Unterscheidung einer zulässigen Beanspruchung auf Verdrehung und Abscherung ist gerechtfertigt, weil letztere Beanspruchung, d. i. eine mit kleinen Biegungsbeanspruchungen verbundene hauptsächlich Schubbeanspruchung als besonderer Typus praktisch sehr oft vorkommt. Daß die Beanspruchung auf Verdrehung nicht als solche auf Schub eingeführt wird, hängt damit zusammen, daß man eine homogene Beanspruchung auf Schub in einem endlichen Bereiche eines Körpers von einer nicht homogenen, wie sie durch die Drehungsbeanspruchung vorgestellt wird, unterscheiden will. Inhomogenität, Anisotropie, Fehler des Materiales, Besonderheiten mit Bezug auf das Elastizitätsgesetz können sich bei homogener Schubbeanspruchung anders auswirken als bei nicht homogener. Siehe hierzu außerdem Punkt 15, S. 317ff., bes. S. 320.

Der Ableitung der zulässigen Beanspruchung auf Verdrehung bzw. auf Biegung aus der theoretischen Drehungsfestigkeit bzw. Biegungsfestigkeit entsprechend ist die zulässige Beanspruchung auf Verdrehung bzw. auf Biegung für Stoffe, für welche sich eine ins Gewicht fallende Abhängigkeit der theoretischen Drehungs- bzw. Biegungsfestigkeit von der Querschnittsform zeigt, wie z. B. bei Gußeisen, abhängig von dieser. So ergibt sich für Gußeisen auf Grund der von Bach mit geraden Stäben erhaltenen Versuchsergebnisse bei Beanspruchung auf Verdrehung und Annahme der Beziehung $K_D = \mu_1 K_z$, wobei μ_1 für verschiedene Querschnittsformen verschiedene Werte annehmen kann, die zulässige Beanspruchung auf Verdrehung mit

$$(\tau_D)_{zul} = \mu_1 (\sigma_z)_{zul} \quad (197)$$

(S. 350) und bei Beanspruchung auf Biegung auf Grund der Beziehung (128) S. 294 als zulässige Beanspruchung auf Biegung

$$(\sigma_B)_{zul} = \mu_0 \sqrt{\frac{z_a}{z_0}} (\sigma_z)_{zul}, \quad (198)$$

worin μ_0 und z_a, z_0 die an der zitierten Stelle angegebene Bedeutung besitzen.

Auch die theoretische Scherfestigkeit insbesondere der spröden Körper erweist sich als abhängig von der Querschnittsform des Versuchsstabes. Geht man von der Beziehung $K_s = \mu K_z$ (S. 320) aus, worin μ z. B. für Gußeisen zwischen 1 und 1,2 liegt, so erhält man als zulässige Beanspruchung auf Abscheren

$$(\tau_s)_{zul} = \mu (\sigma_z)_{zul}. \quad (197a)$$

Für die verschiedenen Flußeisensorten, die als statistisch isotrop und homogen und das Hookesche Gesetz befolgend angesehen werden können, findet man in den Tabellenwerken, z. B. in dem bereits zitierten Taschenbuch „Die Hütte“, die zulässige Beanspruchung auf Abscheren (Schub) entsprechend der Gleichung $(\tau_s)_{zul} = 0,8 (\sigma_z)_{zul} = 0,8 (\sigma_D)_{zul}$ angegeben, die mit den auf Seite 417 angegebenen Gleichungen (195a, b) übereinstimmt. Dieses Resultat wird auf Grund von Abscherversuchen erhalten und kann offenbar nicht als eigentliche Bestätigung der De Saint Venantschen Anschauung, sondern nur als eine zufällige Übereinstimmung einer Folgerung aus dieser mit der Erfahrung gewertet werden.

Die zulässige Beanspruchung auf Verdrehung für verschiedene Flußeisensorten findet man häufig etwas niedriger als jene auf Abscheren (Schub) angegeben. Das ist schon aus dem Grunde gerechtfertigt, weil die Elastizitätsgrenze bei Beanspruchung auf Verdrehung für diese Stoffe niedriger liegt, als auf Grund der De Saint Venantschen Anschauung zu erwarten ist (Versuche von Bauschinger Seite 155), aber auch deswegen, weil sich der Einfluß des Gefüges auf das Ergebnis von Verdrehungsversuchen in weit empfindlicherem Maße geltend macht, als auf das Ergebnis von Scherversuchen. Auf den Einfluß des faserigen Gefüges ist auch zurückzuführen, daß man für Schweißisen als zulässige Beanspruchung auf Abscheren normal zur Faser bei nicht wechselnder statischer Beanspruchung $720 \text{ kg/cm}^2 = 0,8 (\sigma_z)_{zul}$, dagegen für die zulässige Beanspruchung auf Verdrehen 360 kg/cm^2 angegeben findet.

Die Resultate, die für die zulässigen Beanspruchungen auf Zug, Druck, Biegung, Abscheren und Verdrehung aus zugehörigen Versuchen gezogen werden, werden bei möglichster Beibehaltung der De Saint Venantschen Anschauung unter fallweise erforderlicher Einführung von weiteren Korrekturen auf verwickeltere Beanspruchungsfälle (mehr dimensionale Spannungszustände) übertragen.

Betrachten wir zunächst neuerlich die Beanspruchung auf Biegung und Schub in der xz -Ebene. Aus dem statischen Biegungsversuch folgt ein zulässiger Wert der Biegungsspannung, der zwar in der Regel positiv, möglicherweise aber auch negativ sein kann.

Halten wir die De Saint Venantsche Anschauung fest, so können wir anknüpfend an das auf Seite 416ff. Gesagte an der Zulässigkeitsgrenze

$$|(\sigma_B)_{zul}| = \frac{m-1}{2m} X_x \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{X_x^2 + 4Z_x^2} = |S_{1,2}|_{zul} \quad (199)$$

ansetzen, worin das obere oder untere Zeichen bzw. S_1 oder S_2 zu nehmen ist, je nachdem die Biegungsspannung X_x positiv oder negativ ist. Diese Bedingung besagt, daß an der Zulässigkeitsgrenze die dem Zahlenwerte nach größte reduzierte Spannung dem Zahlenwerte der zulässigen Biegungsspannung gleichkommen soll. Setzen wir in dieser Gleichung $X_x = 0$, wodurch wir auf den Fall der reinen Schubbeanspruchung kommen, so ergäbe sich die im allgemeinen nicht zutreffende Beziehung $|(\sigma_B)_{zul}| = \frac{m+1}{m} (\tau)_{zul}$, worin $(\tau)_{zul}$ den zulässigen Wert der Schubspannung bei Beanspruchung auf reinen Schub vorstellen würde. Will man aber Resultate von Scher- und Biegeversuchen verwerten, auf Grund welcher sich eine andere Beziehung zwischen den zulässigen Beanspruchungen auf Abscheren und Biegung ergeben kann, als die durch die letzte Gleichung zum Ausdruck gebrachte, so muß man die letztere verallgemeinern, d. h. an ihre Stelle die Gleichung

$$|(\sigma_B)_{zul}| = \lambda \frac{m+1}{m} (\tau_s)_{zul} \quad (200)$$

setzen, worin λ ein Korrektions- oder, nach der Ausdrucksweise von Bach, ein Anstrengungskoeffizient (S. 415) ist, der z. B. für Flußeisen gleich 1 wird, da für diesen Stoff die Beziehung

$$|(\sigma_B)_{zul}| = (\sigma_z)_{zul} = |(\sigma_D)_{zul}| = \frac{m+1}{m} (\tau_s)_{zul} = 1,25 (\tau_s)_{zul}$$

mit $m = 4$ besteht. Handelt es sich um Holz, daß durch die Biegungsspannungen X_x parallel zu den Fasern durch die Schubspannungen Z_x normal, durch die zugeordnete Schubspannung X_z parallel zu den Fasern beansprucht wird, so ist die Schubspannung X_z die gefährlichere, weil die Scherfestigkeit parallel zu den Fasern bei weitem kleiner, als jene normal zu den Fasern ist. (Für Nadelhölzer ist das Verhältnis der Scherfestigkeiten parallel und normal zu den Fasern in lufttrockenem Zustande etwa 1:4). Die zulässige Beanspruchung auf Biegung verhält sich zur zulässigen Beanspruchung auf Abscheren parallel zur Faser bei Nadelhölzern wie etwa 10:1, (die zugehörigen Festigkeiten sind im lufttrockenen Zustande etwa 600 kg/cm² und 65 kg/cm², die zulässigen Spannungen wären sonach bei Wahl von zehnfacher Sicherheit bzw. 60 kg/cm² und 6,5 kg/cm²). Infolgedessen geht, wenn wir $m = 4$ setzen, die Beziehung (200) in

$$10 = \lambda \frac{m+1}{m} = \lambda \frac{5}{4}$$

über, woraus $\lambda = 8$ folgt. Hätte man zur Auswertung von λ mittels Gleichung (200) die zulässige Beanspruchung auf Abscheren normal zu den Fasern zugrunde gelegt, so hätte sich, wie aus den gemachten Angaben gefolgert werden kann, $\lambda = 2$ ergeben.

Die Gleichung (200) muß sich als Sonderfall aus der Gleichung (199) ergeben. An Stelle der letzteren muß daher in allen Fällen wo λ nicht mit 1 zusammenfällt die allgemeinere Beziehung

$$|S_{1,2}|_{zul} = |(\sigma_B)_{zul}| = \left| \frac{m-1}{2m} X_x \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{X_x^2 + 4(\lambda Z_x)^2} \right| \quad (199a)$$

treten, die für $\lambda = 1$ in die Form (199) übergeht. Bei Beanspruchung von Nadelholz auf Biegung und Schub muß in (199a) für λ der größere der beiden möglichen Werte eingesetzt werden, um den größeren der beiden möglichen Werte der reduzierten Spannung zu erhalten, der der größeren, also ungünstigeren Anstrengung des Materiales entspricht.

Als zweites Beispiel wählen wir die Anstrengung eines Volumenelementes eines gleichförmig um seine Achse rotierenden Stabes aus Flußeisen mit kreisförmigem Querschnitt, der (bei Vernachlässigung der die Biegungsspannungen begleitenden Schubspannungen) auf Biegung und Verdrehung beansprucht ist (Abb. 96, S. 227). In dem Teil 1, 2 treten Biegungs- und Verdrehungsspannungen auf, doch ist dabei zu bedenken, daß die Drillungsspannungen bei Rotation der Welle ihrer Größe nach unveränderlich bleiben, dagegen die Biegungsspannungen in einem ins Auge gefaßten Punkte des Stabes periodisch fortgesetzt ihre Größe wechseln, da die Ebene der Biegemomente zwar im Raume konstant ist, mit Bezug auf den rotierenden Stab ihre Lage aber periodisch verändert. In einer Periode, d. i. einer Zeitdauer, die einer ganzen Umdrehung der Welle entspricht, geht die Biegungsspannung in einem Punkte des Stabes zweimal durch die Null und erreicht zweimal extreme Werte. Die Biegungsbeanspruchung ist also in jedem Punkte mit Ausnahme der Punkte der Stabachse eine zwischen einem positiven und einem gleich großen negativen Werte wechselnde, oder wie wir oben gesagt haben, eine schwingende, die Schubbeanspruchung dagegen ist eine nicht wechselnde statische.

In der auch hier in Betracht kommenden Grundgleichung (199) fassen wir jetzt $(\sigma_B)_{zul}$ wieder als zulässige Biegungsspannung bei statischer Beanspruchung auf. Nehmen wir an, es sei nur schwingende Biegungsbeanspruchung vorhanden, also $Z_x = 0$, so ginge dann (199) in $|(\sigma_B)_{zul}| = |(X_x)_{zul}|$ über, was aber nicht richtig sein kann, da die zulässige Beanspruchung $|(\sigma_B)_{zul}|$ bei schwingendem Biegungsspannungszustand nicht gleich der zulässigen Beanspruchung bei statischem Biegungsspannungszustand sein kann. Wir setzen daher $|(\sigma_B)_{zul}| = \lambda_1 |(X_x)_{zul}|$ worin λ_1 wieder einen Anstrengungskoeffizienten bedeutet, der für Flußeisen, wenn wir einem Vorschlage Bachs folgen wollen (siehe oben) in etwas zu ungünstiger Weise gleich 3 gesetzt werden kann. Lassen wir in der Gleichung (199) die Biegungsspannung verschwinden, d. h. setzen den reinen Verdrehungsspannungszustand voraus, so erhalten wir eine Beziehung, die den Zusammenhang der zulässigen, statischen Biegungsspannung und der zulässigen Verdrehungsspannung im allgemeinen nicht wiedergibt. Derselbe kann vielmehr nur seinen Ausdruck in einer zur Beziehung (200) analogen Beziehung, d. i.

$$|(\sigma_B)_{zul}| = \lambda_2 \frac{m+1}{m} (\tau_D)_{zul}, \quad (200a)$$

finden, mit λ_2 als Anstrengungskoeffizienten und $(\tau_D)_{zul}$ als zulässiger Beanspruchung auf Verdrehung. Für Flußeisen für das $(\tau_D)_{zul}$ allerdings nahezu gleich $(\tau_s)_{zul}$ ist, kann λ_2 nahezu gleich 1 gesetzt werden. Würde es sich aber um Schweiß-eisen handeln, für welches (siehe oben) die zulässige Beanspruchung auf Verdrehung gleich der Hälfte der zulässigen Beanspruchung auf Abscheren ist, so ergäbe sich für $m = 4$ und $(\sigma_B)_{zul} = 900 \text{ kg/cm}^2$ als Anstrengungskoeffizient $\lambda_2 = 2$.

An Stelle der Beziehung (199) werden wir also allgemein für ein beliebiges Material bei Beanspruchung auf schwingende Biegung und statische Verdrehung

$$|\mathcal{S}_{1,2} \text{ zul} = (\sigma_B)_{zul} = \frac{m-1}{2m} (\lambda_1 X_x) \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\lambda_1 X_x)^2 + 4(\lambda_2 Z_x)^2} \text{ zul} \quad (199 \text{ b})$$

als Anstrengungsgleichung zu setzen haben. Setzen wir in dieser Gleichung $X_x = 0$ und $\lambda_2 = 1$, so erhalten wir die für Flußeisen spezialisierte Beziehung (201).

Wenn außer den zulässigen Beanspruchungen auf Zug und Druck, die allein eingeführt zu werden brauchten, wenn das De Saint-Venantsche Anstrengungsmaß allgemein zuträfe, noch zulässige Beanspruchungen auf Biegung, Abscheren und Verdrehen als Grundlage für die Dimensionierung angenommen werden, so müssen folgerichtig die Dimensionierungsgleichungen (192a, b) auf Seite 415 in allen jenen Fällen, in denen die letztgenannten zulässigen Beanspruchungen eine Rolle spielen, auf Grund der bezüglichen Erfahrungen abgeändert werden. Darauf kommen wir im nächsten Punkte bei Besprechung einiger Beispiele zurück.

Bisher wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß dann, wenn es sich um statische Verhältnisse handelt, stabiles Gleichgewicht vorliegt. Ist die Gefahr vorhanden, daß sich bei einer bestimmten Größe des äußeren Kraftsystemes labiles Gleichgewicht (Seite 193ff.) einstellt, was bei Anwachsen der äußeren Kräfte und Erhaltung der Art der Belastung immer dann zu erwarten ist, wenn eine oder zwei Dimensionen im Vergleich zu den restlichen klein werden (siehe den Fall der Knickungsbeanspruchung), so muß man, wenn es sich um die Dimensionierung handelt, von einem ganz anderen Grundsatz ausgehen als jenem, der für das stabile Gleichgewicht gültig ist. Derselbe hat nunmehr dahin zu lauten, daß der zu befürchtende labile Gleichgewichtszustand mit Sicherheit nicht erreicht werden soll. Die Dimensionen müssen danach bei vorausgesetzter Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes — nur diesen Fall können wir allgemein betrachten — so gewählt werden, daß in allen Punkten des Körpers gegebener Form die Größen der für die gegebenen äußeren Kräfte auftretenden Spannungszustände nur den n ten Teil der Größen der Spannungszustände besitzen sollen, die an der Labilitätsgrenze bei Erhaltung der Belastungsart wirklich auftreten würden. Der Zahlenwert n kann auch hier als Sicherheitskoeffizient angesprochen werden. Dieses Verlangen wird für alle Punkte befriedigt sein, wenn es in jenen Punkten des Körpers, wo bei proportionalem Anwachsen der äußeren Kräfte stets die für den ganzen Bereich des Körpers dem Zahlenwerte nach größte Hauptspannung eintritt, erfüllt wird, daß heißt, wenn diese Hauptspannung nur den n ten Teil der Hauptspannung ausmacht, die dort an der Labilitätsgrenze herrscht. Die Bedingung für die Dimensionierung enthält also den im Bereiche des Körpers größten durch den Sicherheitskoeffizient dividierten Hauptspannungswert an der Labilitätsgrenze, der jetzt an die Stelle der zulässigen Spannungen im Falle der stabilen Gleichgewichtsbedingungen tritt und im Gegensatz zu den letzteren von den zu suchenden Dimensionen selbst abhängig ist. Ein Beispiel hierzu folgt im Punkte 3 dieses Abschnittes.

2. Fortsetzung. Beispiele zur Dimensionierung bei verschiedenen Beanspruchungen und stabilem Gleichgewicht.

a) Beanspruchung eines geraden Stabes auf Zug oder Druck. Es liege ein Stab von gegebener Länge vor, der durch eine gegebene Kraft P auf Zug oder Druck beansprucht wird. Im Falle der Druckbeanspruchung machen wir noch die Voraussetzung, daß keine Knickgefahr zu erwarten ist. Es soll die Größe F der Querschnittsfläche bestimmt werden, die nötig ist, um die Last mit Sicherheit zu tragen. Die Dimensionierungsgleichung (192a) bzw. (192b) auf Seite 415 sagt in diesen Fällen, daß die durch die Kraft P bewirkte Zug- bzw. Druckspannung, d. i. $\frac{P}{F}$, gleich der zulässigen Beanspruchung auf Zug bzw. Druck sein soll, d. h. bei Zugbeanspruchung die Gleichung $\frac{P}{F} = (\sigma_D)_{zul}$, bei Druckbeanspruchung die Gleichung $\frac{P}{F} = (\sigma_D)_{zul}$ zu erfüllen ist. Die nötige Querschnittsfläche ist also durch

$$F = \frac{P}{(\sigma_z)_{zul}} \quad (201a) \quad \text{bzw.} \quad F = \frac{P}{(\sigma_D)_{zul}} \quad (201b)$$

bestimmt.

b) Beanspruchung auf Abscheren und Beanspruchung auf reine Biegung. Die Dimensionierung bei Beanspruchung auf Abscheren kann durch die Anleitungen, die im Punkte 15, Seite 315ff., in zwei Beispielen gegeben wurde, als erledigt gelten.

Liegt reine gerade Biegung in der xz -Ebene vor, wie z. B. im Falle der Abb. 93, Seite 225 im Bereiche des Stabes zwischen den Auflagern, oder nach Abb. 92 im ganzen Bereiche des Stabes, so gilt für den betreffenden Bereich die Grundgleichung (111a), Seite 238 der Biegung, d. i. $\sigma_B = \frac{M_B y}{J_y} z$. Die Dimensionierungsgleichung nimmt nunmehr, da die reduzierte Spannung jetzt mit der Biegungsspannung zusammenfällt, die Form [siehe die Gleichung (199a) auf Seite 425, in der Z_x Null zu setzen ist, und die Bemerkungen bezüglich des allgemeinen Dimensionierungsvorganges auf Seite 415]

$$|(\sigma_B)_{zul}| = \frac{(M_B)_{\max}}{W_{ya}} \quad (202)$$

an, worin $W_{ya} = \frac{J_y}{z_a}$ das kleinere von den beiden Widerstandsmomenten des Querschnittes (Seite 241), $(M_B)_{\max}$ das extreme im Bereiche des Stabes auftretende Biegemoment und $(\sigma_B)_{zul}$ die zulässige Biegebeanspruchung vorstellen. Die Gleichung (202) sagt aus, daß der Zahlenwert der im Bereiche des Stabes auftretenden extremen Biegungsspannung dem Zahlenwert der zulässigen Biegebeanspruchung gleich sein soll. Aus (202) kann das kleinere von den beiden Widerstandsmomenten berechnet werden, das notwendig ist, um die gegebene Belastung mit Sicherheit zu tragen. (Über Träger gleichen Biege-widerstandes siehe S. 279.) Für die sehr häufig vorkommenden Querschnitte, wie z. B. die gewalzten \mathbf{I} , \mathbf{C} , \mathbf{F} , \mathbf{T} , \mathbf{L} , $\mathbf{+}$, $\mathbf{-}$ -Profile aus Flußeisen sind die Widerstandsmomente in den Tabellenwerken für verschiedene normierte Abmessungen ein für allemal berechnet, so daß jenes Profil, das auf Grund der Gleichung (202) das Widerstandsmoment

$$W_{ya} = \frac{M_B y}{(\sigma_R)_{zul}} \quad (202a)$$

oder ein zunächst liegendes besitzt, leicht gefunden werden kann. Für nicht normierte Querschnitte kann auf Grund der Gleichung (202) nur ein Querschnittsausma bestimmt werden, die übrigen Ausmaße müssen dann entweder auf Grund konstruktiver Rücksichten von vornherein gegeben sein, oder stehen in einem gegebenen Verhältnisse zu dem zu bestimmenden Ausmaße.

Es sei für den nach Abb. 93 belasteten Stab $a = 1$ m, $l = 4$ m, $P = 4$ t. Nehmen wir ferner an, daß der Stab aus gewalztem Flußeisen besteht und $\bar{\mathbf{T}}$ -förmigen Querschnitt besitzt, so stellt sich die Rechnung wie folgt: Zwischen den Auflagern des Stabes ist

$$M_{By} = (M_{By})_{\max} = Pa \text{ mt} = 4 \cdot 1 \cdot 10^5 \text{ cmkg},$$

$(\sigma_B)_{zul}$ ist für Flußeisen bei statischer Belastung gleich 900 kg/cm^2 zu setzen, das notwendige Widerstandsmoment ist dann zufolge Gleichung (202a) $W_{ya} = W_{zb} = \frac{10^5 \cdot 4 \cdot 1}{900} = 444 \text{ cm}^3$.

Wir finden in dem Tabellenwerk¹ bei Profil Nr. 27 ein Widerstandsmoment von 442 cm^3 , bei Profil Nr. 27 ein solches von 491 cm^3 , das erstgenannte Profil wird infolge des geringen Unterschiedes seines Widerstandsmomentes von dem notwendigen genügen.

Wäre der Stab aus Fichtenholz und besäße einen rechteckigen Querschnitt (Höhe h , Breite b), so würde man $\frac{h}{b} = 1,4$ (Seite 253) wählen und $(\sigma_B)_{zul} = 60 \text{ kg/cm}^2$ zu setzen haben.

Auf Grund der Gleichung (202a) erhält man $60 = \frac{10^5 \cdot 4 \cdot 1}{\frac{1}{6} b h^2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 1,4}{h^3}$, woraus

$h = 38,2 \text{ cm}$ und $b = 27,3 \text{ cm}$ folgen.

In den über die Auflager vorkragenden Teilen des Stabes findet Beanspruchung auf Biegung und Schub statt. Es fragt sich, ob das gewählte Profil auch für diese Teile genügt. Diese Frage wird weiter unten behandelt werden.

c) Beanspruchung eines geraden Stabes auf gerade Biegung und Schub unter statischen Verhältnissen. Wird die Belastung zur Beanspruchung eines geraden Stabes auf gerade Biegung und Schub in der xz -Ebene gedacht, der Querschnitt des Stabes symmetrisch zur xz -Ebene angenommen und werden die normal zur xz -Ebene auftretenden Schubspannungen nicht berücksichtigt, so lautet die Dimensionierungsgleichung bei Beziehung auf die Anstrengungsgleichung (199a) auf Seite 425 und bei dieser Gleichung angepaßten Berücksichtigung der Grundgleichungen (192a, b)

$$S_{\max} = (\sigma_B)_{zul} = \frac{m-1}{2m} X_x \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{X_x^2 + 4(\lambda \bar{Z}_x)^2} \Big|_{\max}, \quad (203)$$

d. h. die dem Zahlenwerte nach mit Bezug auf den ganzen Bereich des Stabes größte reduzierte Spannung muß gleich sein dem Zahlenwerte der aus Biegeversuchen abgeleiteten zulässigen Beanspruchung auf Biegung. Die Aufsuehung der zahlenmäßig größten reduzierten Spannung ist naturgemäß dem besonderen Falle der Belastung angepaßt. Unter allen Umständen können wir sagen, daß der extreme Zahlenwert der reduzierten Spannung nicht an ein bestimmtes Volumenelement, sondern an eine Reihe von Volumenelementen gebunden sein wird, die langens einer Parallelen zur y -Achse liegen, da die Biegungsspannungen X_x und die mittleren Schubspannungen \bar{Z}_x nur von den Koordinaten x und z nicht aber von der Koordinate y abhängig sind.

Liegt Belastung eines einfachen Balkenträgers von der Länge l durch eine Kraft P , die in der Entfernung a vom linken Auflager angreift ($l - a = c$), so müssen die extremen Werte der reduzierten Spannungen offenbar in einem Querschnitte etwas links von der Kraft P auftreten, da dort das Bieugungsmoment

¹ Hütte 1, 24. Aufl., S. 771.

M_{By} und die Querkraft Q_z , die extremen Werte $(M_{By})_{\max} = \frac{Pc}{l}a$ bzw. $(Q_z)_{\max} = \frac{Pc}{l}$ annehmen.

Setzen wir sonach in dem Ausdrucke (203) $X_x = \frac{(M_{By})_{\max}}{J_y}z = \frac{Pc}{lJ_y}az$ und $\bar{Z}_x = \frac{(Q_z)_{\max}S_{yb}}{bJ_y} = \frac{Pc}{lJ_yb}S_{yb}$ (Seite 241 ff.) so erhalten wir die Gleichung

$$|(\sigma_B)_{zul}| = \left| \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{Pca}{lJ_y}z \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\left(\frac{Pca}{lJ_y}z\right)^2 + 4\left(\lambda \frac{Pc}{lJ_yb}S_{yb}\right)^2} \right|_{\max}. \quad (a)$$

Zur weiteren Ausführung nehmen wir an, daß infolge der ungleichen Verteilung der Querschnittsfläche zu beiden Seiten der Nulllinie die extremen Zahlenwerte der reduzierten Spannung auf der Zugseite auftreten (wäre der Querschnitt auch symmetrisch mit Bezug auf die Nulllinie, so wäre auch die Spannungsverteilung mit Bezug auf dieselbe symmetrisch und es gäbe dann zwei entgegengesetzt gleiche Werte von z für die sich gleiche extreme Zahlenwerte der reduzierten Spannungen, und zwar die einen auf der Zug- die anderen auf der Druckseite ergeben). In der Gleichung (a) kann somit das negative Zeichen weggelassen werden und z positiv gewählt werden. In den äußersten Fasern, welche die Entfernung $z = e_1$ von der Nulllinie haben sollen, stellt sich eine reduzierte Spannung gleich der Biegungsspannung $S_a = \frac{Pca}{lJ_y}e_1$ ein, und in der Nulllinie herrscht die reduzierte Spannung $S_0 = \frac{m+1}{m} \lambda \frac{Pc}{lJ_y} \cdot \frac{S_{yb_0}}{b_0}$, wenn S_{yb_0} und b_0 die für die Nulllinie in Betracht kommenden Werte des statischen Momentes S_{yb} und der in der y -Richtung genommenen Breite des Querschnittes bedeuten.

Nimmt die Koordinate z von Null aus zu, so nehmen die Biegungsspannungen zu, die Schubspannungen aber ab. Infolgedessen wird es im allgemeinen einen zwischen $z = 0$ und $z = e_1$ liegenden Wert z_1 geben, für den die Zunahme der reduzierten Spannung infolge der Biegungsspannungen der Abnahme derselben infolge der Schubspannungen ganz oder nahezu gleichkommt, d. h. die zugehörige reduzierte Spannung S wieder gleich oder nahezu gleich S_0 geworden ist. In dem Bereiche von $z = 0$ bis $z = z_1$ ändert sich die reduzierte Spannung für die praktisch in Frage kommenden Querschnitte sehr wenig. Das Größenverhältnis zwischen S_a und S_0 hängt von dem Verhältnis der Größe ae_1 zur Größe $\frac{m+1}{m} \lambda \frac{S_{yb_0}}{b_0}$ ab. Ist die Länge des Trägers und damit die zu ihr proportional gedachte Strecke a groß im Vergleich zu den Querdimensionen, so können wir ae_1 als von der ersten Größenordnung klein, und $\frac{m+1}{m} \lambda \frac{S_{yb_0}}{b_0}$ demzufolge als von der zweiten Größenordnung klein betrachten, d. h. für lange Träger ist S_a bedeutend größer als S_0 . Hat der Träger eine Länge von derselben Größenordnung wie die Querdimensionen, so ist S_a von derselben Größenordnung wie S_0 , sind die Querdimensionen bedeutend größer als die Länge des Trägers, so ist, wenn $\frac{m+1}{m} \lambda \frac{S_{yb_0}}{b_0}$ von der zweiten Größenordnung groß ist ae_1 nur von der ersten Größenordnung groß, d. h. es ist S_0 bedeutend viel größer als S_a . Läßt man die Länge des Trägers und proportional zu ihm auch a und c wachsen oder abnehmen, die Dimensionen des Querschnittes aber ungeändert so wächst, wenn die Last immer in ähnlicher Weise aufgebracht wird, S_a oder nimmt ab, S_0 bleibt aber in beiden Fällen ungeändert.

Aus dieser Betrachtung sieht man, daß bei im Vergleich zu den Querdimensionen langen bzw. kurzen Stäben S_a bzw. S_0 mit großer Annäherung als größte

reduzierte Spannung gelten kann. Wenn

$$a e_1 = \frac{m+1}{m} \lambda \frac{S_y b_0}{b_0}, \quad (b)$$

so ist $S_0 = S_a$ und es kann, weil sich dann die reduzierten Spannungen für die gebräuchlichen Querschnitte in dem ganzen Bereiche $z = 0$ bis $z = e_1$ wenig ändern werden, sowohl S_0 als auch S_a mit großer Annäherung als größte reduzierte Spannung gelten.

Setzen wir in der Gleichung (b) $a = \frac{l}{n}$ worin n eine positive Zahl vorstellt, so erhalten wir durch Lösung dieser Gleichung nach l die sogenannte Grenzlänge

$$l_0 = \frac{m+1}{m} n \lambda \frac{S_y b_0}{e_1 b_0}. \quad (c)$$

Dieselbe ergibt sich für $\lambda = 8$ (Nadelholz) und rechteckigem Querschnitt von der Breite b und Höhe h ($S_y b_0 = \frac{bh^2}{8}$, $b_0 = b$, $e_1 = \frac{h}{2}$) und für $m = 4$ mit $l_0 = \frac{5n}{4} 8 \cdot \frac{bh^2 \cdot 2}{8 \cdot hb} = \frac{5h}{2} n$. Wäre für denselben Querschnitt $\lambda = 1$ (Flußeisen), so ergäbe sich die Grenzlänge viel kleiner, nämlich mit $l_0 = 0,31 hn$. Die Grenzlänge hängt im allgemeinen von der Form und Größe des Querschnittes, der Art des Werkstoffes aus dem der Stab besteht und, durch n zum Ausdruck kommend, von der Lage der Kraft P in bezug auf den Stab ab. Den möglichen Werten von n , die zwischen 2 und ∞ liegen, entsprechend schwankt l_0 zwischen $\frac{m+1}{m} \cdot 2 \lambda \frac{S_y b_0}{e_1 b_0}$ und ∞ . Je größer n wird, um so mehr rückt die Kraft P aus der Mitte des Stabes gegen das linke Auflager, um so kleiner wird das für die Berechnung der extremen Spannungen in Betracht kommendem maximale Biegemoment, um so mehr tritt bei gleich bleibender maximaler Querkraft die Beanspruchung auf Schub in den Vordergrund. Für $n = \infty$, d. h. unendlich kleinen Wert von a , liegt der Grenzfall der Beanspruchung auf Abscheren bei verschwindender Biegebbeanspruchung vor (Beanspruchung auf „Schub schlechthin“, S. 225).

Aus dem Gesagten wird es verständlich, daß man praktisch für einen Stab aus gegebenem Stoffe, gegebenen Querdimensionen und gegebener Art der äußeren Belastung (d. h. für unser Beispiel bei gegebenem Wert $\frac{l}{a} = n$) für Längen $l < l_0$ so dimensionieren kann, als ob die Biegungsspannungen nicht da wären und nur Beanspruchung auf Abscheren vorläge, bei Werten von $l > l_0$ aber die Dimensionierung so vorgenommen wird, als ob nur Biegungsspannungen und keine Schubbeanspruchung zur Wirkung gelangten. Für $l = l_0$ kann die Beanspruchung mit gleichem Rechte als eine solche auf Abscheren oder eine solche auf Biegung aufgefaßt und demgemäß entweder auf Biegung oder auf Abscheren dimensioniert werden.

Für unser gegebenes Belastungsbeispiel fielen die Querschnitte des maximalen Biegemomentes und der maximalen Querkraft zusammen. Im allgemeinen ist das aber nicht zutreffend, wie z. B. dann, wenn ein Balkenträger in der xz -Ebene gleichförmig über seine gesamte Länge l mit $q t/m$ belastet ist. Das maximale Biegemoment tritt dann in der Mitte auf und hat die Größe $\frac{ql^2}{8}$, die maximale Querkraft $\frac{ql}{2}$ wird an den Auflagern übertragen. In derartigen Fällen müßte zunächst der Querschnitt gesucht werden, in dem die extremen Zahlenwerte der reduzierten Spannungen übertragen werden. Zu diesem Behufe müßten in dem allgemeinen Ausdruck (203) für die größte reduzierte

Spannung die Biegungsspannungen und Schubspannungen durch die von x abhängigen Biegemomente und Querkräfte ausgedrückt werden, und dann die x -Koordinate des fraglichen Querschnittes, in dem die maximalen reduzierten Spannungen auftreten, aus der Bedingung $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$ gefunden werden. Hierauf könnte man darangehen, unter allen in dem gefundenen Querschnitt vorhandenen reduzierten Spannungen, die extremen Werte zu finden. Der Vorgang führt zu vielen Einzelrechnungen, die sich praktisch nicht lohnen. Man schließt daher ähnlich wie oben, wo extreme Schub- und Biegungsspannungen in einem und demselben Querschnitt lagen: wenn der Stab bei gegebenen Querdimensionen gegebener stofflicher Beschaffenheit und gegebener Wirkungsweise der äußeren Belastung eine Grenzlänge l_0 angenommen hat, bei der die größte Biegungsspannung S_a in der Querschnittsebene des größten Biegemomentes gleich der reduzierten Spannung S_0 in der Nulllinie der Querschnittsebene der größten Querkraft gleich geworden ist, unterscheiden sich die in einem von den beiden genannten Querschnitten verschiedenen Querschnitt auftretenden größten reduzierten Spannungen so wenig von S_0 und S_a , daß man annähernd mit dem gleichen Recht wie auf Biegung auch auf Abscheren dimensionieren kann, usw. Wir können uns die Sache auch so vorstellen: sind für eine gegebene Länge l des Stabes die Querdimensionen des Stabes unendlich klein, so liegt nur eine Beanspruchung auf Biegung vor, da die Schubspannungen gegenüber den Biegungsspannungen von höherer Kleinheitsordnung sind. Lassen wir nun die Querdimensionen des Stabes bei unveränderter Länge und Belastung wachsen, so nehmen sowohl Biegungs- als auch Schubspannungen endliche Werte an, letztere wachsen aber stärker als erstere, infolgedessen wird bei einer bestimmten Größe der Querdimensionen die größte Biegungsspannung gleich der der größten Schubspannung entsprechenden reduzierten Spannung gleich geworden sein. Diese Länge ist dann die Grenzlänge.

Für den oben gedachten Fall der gleichförmigen Belastung eines Balkenträgers über seine ganze Länge l mit q t/m wird, S_0 in den Auflagerquerschnitten $S_0 = \frac{ql}{2} \cdot \frac{S_y b_0}{b_0 J_y} \cdot \frac{(m+1)}{m} \lambda$ und S_a in der Mitte des Trägers $S_a = \frac{ql^2}{8J_y} e_1$ mit e_1 als Abstand der äußersten Faserschichte von der Nulllinie. Aus

$$\frac{ql^2}{8J_y} e_1 = \frac{ql}{2} \cdot \frac{S_y b_0}{b_0 J_y} \cdot \frac{m+1}{m} \lambda$$

gewinnen wir durch Lösung nach l die Grenzlänge $l_0 = \frac{4(m+1)}{m} \lambda \frac{S_y b_0}{e_1 b_0}$. Für Nadelholz mit $m = 4$, $\lambda = 8$ und rechteckigem Querschnitt mit b als Breite, h als Höhe geht diese Gleichung in $l_0 = 10h$ über.

Nennen wir bei gerader Beanspruchung in der xz -Ebene auf Biegung und Schub $(M_{By})_{\max}$ das maximale Biegemoment, $(\bar{Z}_x)_{\max}$ die maximale Schubspannung, $W_y = \frac{J_y}{e_1}$ das kleinere Widerstandsmoment und verwenden sonst die bisherigen Zeichen, so können für beliebige Belastung die Gleichung bzw. die Ungleichungen

$$\frac{(M_{By})_{\max}}{W_y} \leq (\bar{Z}_x)_{\max} \lambda \frac{m+1}{m} \quad (204)$$

als Grundlage für die Dimensionierung gelten. Für den Fall, als der links stehende Ausdruck kleiner oder größer als der rechts stehende Ausdruck ist, wird bzw. auf Abscheren oder auf Biegung dimensioniert, trifft das Gleichheitszeichen zu, so kann mit dem gleichen Rechte auf Biegung wie auf Abscheren dimensioniert werden.

Als weiteres Beispiel der Beanspruchung auf Biegung und Schub wollen wir jene des in Abb. 93 dargestellten Trägers in den vorkragenden Teilen betrachten, und zwar unter der Voraussetzung, daß derselbe aus Nadelholz besteht und rechteckigen Querschnitt besitzt. Für den zwischen den Auflagern liegenden Teil des Trägers haben wir unter **b)** für die dort angegebenen Werte von a, l, P , die auch jetzt gelten sollen, als für die Beanspruchung auf Biegung nötigen Ausmaße $h \doteq 38$ cm und $b \doteq 27$ cm gefunden.

Die zur Bestimmung der Grenzlänge der vorkragenden Teile nötige Bedingung nimmt bei Zugrundelegung der Formel (204), da $(M_{By})_{\max} = Pa \sin t$ und $(\bar{Z}_x)_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{bh}$, $W_{ya} = W_{yb} = \frac{1}{6} b h^3$, $\lambda \frac{m+1}{m} = 8 \cdot \frac{5}{4} = 10$, die Form $\frac{6Pa}{bh^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{bh} \cdot 10$ an, woraus die Grenzlänge mit $a_0 = \frac{5}{2} h = 95$ cm folgt. Für die vorkragenden Teile kommt, da $a > 95$ cm, die Dimensionierung auf Biegung allein in Frage, und es würden die Ausmaße, welche oben für den Teil des Trägers, der zwischen den Auflagern liegt, gefunden wurden, auch für die vorkragenden Teile genügen¹. Wäre $a < 95$ cm, z. B. $a = 20$ cm, so käme für die vorkragenden Teile die Beanspruchung auf Abscheren in den Auflagerquerschnitten als Grundlage für die Dimensionierung in Betracht. Die Dimensionierungsgleichung lautet dann

$$S_0 = \frac{m+1}{m} \lambda (\bar{Z}_x)_{\max} = (\sigma_B)_{zul}$$

oder, wenn auf Grund der Gleichung (200) auf Seite 424 und der dort gemachten Bemerkung über das Verhältnis der zulässigen Beanspruchung auf Abscheren und auf Biegung für Nadelholz $(\tau_s)_{zul} = \frac{(\sigma_B)_{zul}}{\frac{m+1}{m} \lambda} = 6,5 \text{ kg/cm}^2$ gesetzt wird, $(\bar{Z}_x)_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{bh} = 6,5 \text{ kg/cm}^2$. Die not-

wendige Fläche des Querschnittes folgt hieraus mit $bh = \frac{3 \cdot 4000}{2 \cdot 6,5} = 92,3 \text{ cm}^2$, ist also viel kleiner als jene, die für den zwischen den Auflagern liegenden Teil des Trägers gefunden wurde.

d) Beanspruchung auf geraden oder schiefen exzentrischen Druck (Zug). Berechnen wir die Druck- (Zug-) Spannungen auf Grund der allgemeinen Gleichungen (129a) auf Seite 302, so können wir als Dimensionierungsgleichung für schiefen (oder geraden) exzentrischen Druck (Zug)

$$|(\sigma_B)_{zul}| = \left| \frac{P}{F} \nu + \frac{P z^* z}{J_y} + \frac{P \eta y}{J_z} \right|_{\max} \quad (205)$$

ansetzen, mit ν als Anstrengungskoeffizienten, dessen Bedeutung gewonnen wird, wenn wir die Biegungsbeanspruchung verschwinden lassen, d. h. nur eine Beanspruchung auf Druck (Zug) annehmen. Die Gleichung (205) geht dann in $|(\sigma_B)_{zul}| = \frac{P}{F} \nu$ über. Da die Dimensionierungsgleichung für reinen Druck (Zug)

$$\frac{P}{F} = |(\sigma_{z,D})_{zul}| \text{ lautet, so wird } \nu = \left| \frac{(\sigma_B)_{zul}}{(\sigma_{z,D})_{zul}} \right|.$$

Für Flußeisen wird $\nu = 1$, für fehlerfreies Nadelholz nimmt ν , wenn $(\sigma_B)_{zul} = 90 \text{ kg/cm}^2$, $|(\sigma_D)_{zul}| = 50 \text{ kg/cm}^2$ und $(\sigma_{z,D})_{zul} = 80 \text{ kg/cm}^2$, bei Beanspruchung auf Druck den Wert $\nu = \frac{90}{50} = 1,8$, bei Beanspruchung auf Zug den Wert $\nu = \frac{90}{80} = 1,12 \doteq 1$ an.

Zur Auffindung des größten Wertes der Druck- (Zug-) Spannung im Querschnitt, als Funktion der Querschnittsdimensionen, wird man bei schiefer exzentrischer Biegung zunächst von dem der rechten Seite von (205) gleichwertigen Ausdruck $\left| \frac{P}{F} \nu + \frac{M_{B,u}}{J_u} \right|_{\max}$ ausgehen [Gleichung (129b) auf Seite 302], worin $M_{B,u}$ und J_u das Biegungs- bzw. Trägheitsmoment mit Bezug auf die Nulllinie vorstellt, die vorhanden wäre, wenn die zur Biegungsbeanspruchung hinzutretende Druck- (Zug-) Beanspruchung nicht da wäre. Hat man diese Nulllinie

¹ Allgemein müßte der Dimensionierungsvorgang schätzungsweise gewählt und nach Berechnung von W_y konstatiert werden, ob die zugehörige Bedingung (204) wirklich erfüllt wird.

gefunden, so ist es nicht schwer die Stellen extremer Druck- (Zug-) Beanspruchung im Querschnitt anzugeben. Die weitere Rechnung läuft dann wie in dem Falle gerader exzentrischer Druck- (Zug-) Beanspruchung, für die wir nunmehr ein Beispiel folgen lassen.

In dem in Abb. (182) dargestellten statisch bestimmten Rahmen aus Nadelholz, der auf die dargestellte Weise belastet ist, sind die Streben $\mathfrak{A}C$ und $\mathfrak{B}D$ in den Teilen $\mathfrak{A}E$ und $\mathfrak{B}F$ auf geraden exzentrischen Druck belastet. Die Lage der Kräfte P mit Bezug auf den rechteckigen Querschnitt der Streben ist aus Abb. 182a ersichtlich. Es fragt sich um die Größe der Rechteckhöhe h unter der Voraussetzung, daß $\frac{h}{b} = 1,4$ mit b als Breite des Rechteckes.

Die genannten Strebenteile empfangen je eine Druckkraft $P + \frac{ql}{2}$, außerdem noch je ein

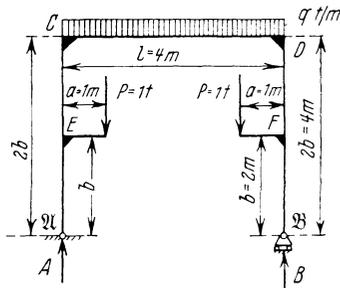


Abb. 182.

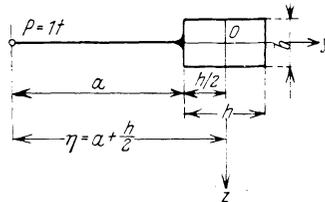


Abb. 182a.

biegendes Moment $P\left(a + \frac{h}{2}\right)$. Die größten Druckspannungen liegen an der Innenseite des Rahmens und haben, abgesehen vom Zeichen, die Größen

$$| (X_x)_{\max} | = \left(P + \frac{ql}{2} \right) \frac{1}{bh} + \frac{P\left(a + \frac{h}{2}\right)}{J_z} \cdot \frac{h}{2}$$

mit $J_z = \frac{bh^3}{12}$. Die Dimensionierungsgleichung (205) lautet daher für $\nu = 1,8$ für $P = 1 \text{ t}$, $q = 1 \text{ t/m}$, $l = 4 \text{ m}$, $a = 1 \text{ m}$

$$| (\sigma_B)_{zul} | = 90 \text{ kg/cm}^2 = 0,09 \text{ t/cm}^2 = (1 + 2) \cdot \frac{1,4 \cdot 1,8}{h^2} + 1 \cdot \frac{\left(100 + \frac{h}{2}\right)}{h^3} \cdot 6 \cdot 1,4,$$

oder $0,09 h^3 = 11,76 h + 840$, woraus $h \doteq 23 \text{ cm}$ folgt.

Bei im Vergleich zu den Querschnitten langen Stäben werden die Biegungsspannungen bei exzentrischer Druckbeanspruchung infolge der Durchbiegungen des Stabes größer als die bisher der Dimensionierung zugrunde gelegten. Aus Sicherheitsgründen empfiehlt es sich dann, von der Gleichung (136a), S. 313 auszugehen, und z. B. für den Fall eines einseitig eingespannten Stabes die Dimensionierungsgleichung in der Form

$$| (\sigma_B)_{zul} | = \left| \frac{P}{F} \nu + \frac{z \zeta P}{J_y \cos(\lambda l)} + \frac{y \eta P}{J_z \cos(\mu l)} \right|_{\max} \quad (206)$$

anzusetzen, mit $\lambda^2 = \frac{P}{EJ_y}$ und $\mu^2 = \frac{P}{EJ_z}$. Der Ausdruck rechts stellt die bestimmten Randwerten von z und y zugeordnete maximale Druckspannung im Einspannungsquerschnitt vor, der der gefährliche Querschnitt mit dem extremen Biegemomente ist.

Die numerische Rechnung bei gegebenen Werten von $P, E, l, \zeta, \eta, (\sigma_B)_{zul}, \nu$ und gegebener Querschnittsform wird bei Entwicklung der Kosinuse in Reihen, die wegen der großen Werte von E mit dem zweiten Gliede abgebrochen werden können, näherungsweise durchzuführen sein.

e) Beanspruchung auf reine Verdrehung oder auf Verdrehung, Biegung und Schub. Bei reiner Verdrehungsbeanspruchung, wie z. B. in dem in Abb. 151, S. 325 dargestellten Falle, wird als Grundlage für die Dimensionierung die Bedingung

$$(\tau_D)_{zul} = T_{\max} \quad (207)$$

zu erfüllen sein, worin $(\tau_D)_{zul}$ die zulässige Beanspruchung auf Verdrehung und $|T_{\max}|$ den Zahlenwert der im Bereiche des Stabes auftretenden größten Schubspannung vorstellt. Letztere tritt in dem aus dem Drillungsmomentenschaubilde bestimmbareren Querschnitt auf, in dem das Drillungsmoment einen extremen Wert erlangt (in den meisten Fällen der Anwendung der Verdrehungstheorie ist freilich das Drillungsmoment über die ganze Stablänge konstant), und nimmt bei gegebenem extremen Drillungsmoment je nach der Querschnittsform verschiedene die Dimensionen des Querschnittes enthaltende Werte an.

Ein Stab von der Länge l mit rechteckigem Querschnitte mit den noch unbekanntenen Seiten h und b sei auf beiden Seiten fest eingespannt und werde durch ein Drillungsmoment M_D , das in der durch den Abstand a von der einen Einspannungsstelle bestimmten Ebene wirkt, auf Verdrehung beansprucht. In den Einspannungsquerschnitten entstehen zwei Reaktionsmomente M_A und M_B , die der einzigen statischen Gleichgewichtsbedingung $M_A + M_B = M_D$ unterworfen sind. Die Aufgabe der Berechnung der Einspannungsmomente ist daher eine einfach statisch unbestimmte. Die Elastizitätsbedingung besagt offenbar, daß der Verdrehungswinkel des Stabteiles von der Länge a im Querschnitte des Momentes M_D gleich sein muß dem Verdrehungswinkel des Stabteiles von der Länge $l - a = c$ im gleichen Querschnitt. Nach Gleichung (151), S. 335 muß

$$\frac{3,6 M_A (b^2 + h^2)}{G h^3 b^3} a = \frac{3,6 M_B (b^2 + h^2)}{G h^3 b^3} c,$$

d. h. $\frac{M_A}{M_B} = \frac{c}{a}$. Bei Berücksichtigung der statischen Gleichgewichtsbedingung wird demnach $M_A = \frac{M_D c}{l}$ und $M_B = \frac{M_D a}{l}$.

Laut Gleichung (149a), S. 333 und mit Rücksicht auf die Gleichung (207) muß $|T_{\max}| = \frac{9M_D}{2hb^2} = (\tau_D)_{zul}$ sein, woraus eine von den beiden Größen h oder b bestimmt werden kann, wenn das Verhältnis $\frac{h}{b}$ von vornherein gegeben ist. Nehmen wir im besonderen $M_D = 300 \text{ kgm}$, $h = b$ und $(\tau_D)_{zul} = 720 \text{ kg/cm}^2$ (zulässige Beanspruchung auf statische Verdrehung für Flußeisen), so erhalten wir aus der letzten Gleichung $720 \text{ kg/cm}^2 = \frac{9 \cdot 3 \cdot 10^4}{2h^3}$ oder $h = 5,7 \text{ cm}$.

Liegt Beanspruchung eines Stabes auf Verdrehung, Biegung und Schub vor wie z. B. in Abb. 96, S. 227 in dem Teile des Stabes der zwischen den Riemen-scheiben liegt, so machen wir zwecks Bestimmung der Ausmaße auf Grund der Anstrengungsgleichung 199b, S. 426 und der allgemeinen Dimensionierungsgleichungen (192a, b) von der Gleichung

$$\left. \begin{aligned} |S|_{\max} = |(\sigma_B)_{zul}| &= \left| \frac{m-1}{2m} (\lambda_1 X_x) \right. \\ &\left. \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\lambda_1 X_x)^2 + 4 [(\lambda_2 T)^2 + (\lambda_3 T_1)^2 + 2\lambda_2 \lambda_3 T T_1 \cos \alpha]} \right|_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

Gebrauch, in der $(\sigma_B)_{zul}$ die zulässige Beanspruchung bei statischer Biegung, X_x eine Biegungsspannung, T eine Verdrehungsspannung infolge der Existenz

von Drillungsmomenten, T_1 eine totale Schubspannung infolge der Existenz von Querkräften, α den Winkel zwischen den Richtungen von T und T_1 , $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Anstrengungskoeffizienten bedeuten. Die Bedingung (208), welche unter anderem berücksichtigt, daß in den am häufigsten vorkommenden Fällen der technischen Praxis eine schwingende Beanspruchung auf Biegung mit einer statischen Beanspruchung auf Verdrehung verknüpft ist, besagt, daß der Zahlenwert der zulässigen Beanspruchung auf statische Biegung gleich dem Zahlenwerte, der im Bereiche des Stabes auftretenden extremen reduzierten Spannung, deren Wert durch Einführung der Anstrengungskoeffizienten der Erfahrung angepaßt ist, sein soll. Der Anstrengungskoeffizient λ_1 entspricht der Erfahrung, daß die zulässige Beanspruchung bei statischer Biegung nicht der zulässigen Beanspruchung bei schwingender Biegung gleichkommt (Seite 419 ff.), λ_2 bringt die Korrektur zum Ausdruck, die an dem Zusammenhang, wie er zwischen der zulässigen statischen Beanspruchung auf Biegung und der zulässigen statischen Beanspruchung auf Verdrehung bestehen würde, wenn das De Saint Venantsche Anstrengungsmaß allgemein richtig wäre, anzubringen ist (Seite 425), λ_3 bezieht sich auf die Korrektur des Zusammenhanges zwischen der zulässigen Beanspruchung auf Biegung und der zulässigen Beanspruchung auf Abscheren und müßte z. B. in dem Falle der Abb. 96 zum Ausdruck bringen, daß auch die infolge der Querkräfte auftretenden Schubspannungen, ebenso wie die Biegungsspannungen einen schwingenden Charakter besitzen (Seite 424).

Um die Sache nicht zu verwickelt zu gestalten, wollen wir annehmen, daß der Stab im Vergleich zu den Querschnittsdimensionen voraussichtlich so lang ist, daß die Schubspannungen neben den Biegungsspannungen zu vernachlässigen sind (Seite 424 ff.). Die Bedingung (208) nimmt dann die einfachere Form

$$|(\sigma_B)_{zul}| = \left[\frac{m-1}{2m} \lambda_1 X_x \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\lambda_1 X_x)^2 + 4(\lambda_2 T)^2} \right]_{\max} \quad (208a)$$

an. Die weitere Berechnung hängt von dem besonderen Belastungsfall und von der gewählten Querschnittsform ab. Bezüglich der Belastung wollen wir annehmen, daß das Drillungsmoment in dem Bereiche des Stabes in dem Verdrehungsbeanspruchung auftritt, eine konstante Größe sei, wie das gewöhnlich zutreffend ist.

a) Kreisförmiger Querschnitt oder kreisringförmiger Querschnitt. Der extreme Zahlenwert der reduzierten Spannung tritt am Umfange des Stabes in dem für die Biegungsbeanspruchung gefährlichen Querschnitt mit dem Biegemoment $(M_{By})_{\max}$, das wir als positive Größe einführen wollen, auf. Für den kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius r lautet die Bedingung (208a) dann

$$|(\sigma_B)_{zul}| = \frac{m-1}{2m} \lambda_1 \frac{(M_{By})_{\max}}{J_y} r + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\left[\lambda_1 \frac{(M_{By})_{\max}}{J_y} r \right]^2 + 4 \left(\lambda_2 \frac{M_D}{J_P} r \right)^2} \quad (a)$$

worin $J_y = \frac{\pi r^4}{4}$ das Trägheitsmoment der Kreisfläche mit Bezug auf eine durch ihren Mittelpunkt gehende und in sie hineinfällende Achse, $J_P = \frac{\pi r^4}{2}$ das polare Trägheitsmoment der Kreisfläche mit Bezug auf ihren Mittelpunkt, M_D das Drillungsmoment vorstellen (Gleichung (146a), Seite 327). Die letzte Gleichung können wir somit in der Form

$$|(\sigma_B)_{zul}| = \left[\frac{m-1}{2m} \lambda_1 (M_{By})_{\max} + \frac{m+1}{2m} \sqrt{[\lambda_1 (M_{By})_{\max}]^2 + (\lambda_2 M_D)^2} \right] \frac{4}{\pi r^3} \quad (b)$$

schreiben, die, wenn wir den in der eckigen Klammer stehenden Ausdruck, der als reduziertes Moment bezeichnet wird, mit M_R einführen und $\frac{\pi r^3}{4} = W$ setzen, mit W als Widerstands-

moment des kreisförmigen Querschnittes in die mit der Dimensionierungsgleichung im Falle reiner Biegung formal einstimmender Gleichung

$$|(\sigma_B)_{zul}| = \frac{M_R}{W} \quad (208b)$$

übergeht, aus der das nötige Widerstandsmoment berechnet werden kann. Die zahlenmäßige Ausrechnung, z. B. für den Fall der Abb. 96 ($r_2 = 0,5$ m, $r_1 = 1$ m, $S_2 - S'_2 = 800$ kg, $S_1 - S'_1 = 400$ kg, $I^2 = 2$ m, $A I = \dot{z} B = 1$ m), unter der Voraussetzung, daß die Welle aus Flußeisen besteht ($\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $m = 4$), wird dem Leser überlassen.

Für kreisringförmigen Querschnitt gilt, wie man leicht einsieht, ebenfalls die Gleichung (208 b), worin für W das Widerstandsmoment der Fläche des Kreisringes einzusetzen.

b) Rechteckiger Querschnitt. Es liege ein Stab mit rechteckigem Querschnitt (Abb. 152 b, S. 330) vor, der auf der einen Seite fest eingespannt, auf der anderen Seite frei ist. Am freien Ende wirke ein Drillungsmoment M_D und eine den Stab auf gerade Biegung beanspruchende Kraft P . Die Biegungsebene falle mit der xz -Ebene zusammen (x -Achse durch Stabachse, z -Achse parallel zur kleineren Rechteckseite b). Die dem Zahlenwerte nach größten reduzierten Spannungen ergeben sich dann offenbar in Volumenelementen des Einspannungsquerschnittes, die den Punkten A, A der freien Endquerschnittsflächen entsprechen, da dort sowohl die Biegungsspannungen als auch die Verdrehungsspannungen die größten im Bereiche des Stabes werden. Die Dimensionierungsgleichung lautet, da $\lambda_1 = 1$ gesetzt werden muß,

$$|(\sigma_B)_{zul}| = \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{|(M_{By})_{\max}|}{J_y} \cdot \frac{b}{2} + \frac{m-1}{2m} \sqrt{\frac{(M_{By})_{\max}^2 b^2}{4 J_y^2} + 4 (\lambda_2 T_{\max})^2}, \quad (c)$$

die, wenn wir $J_y = \frac{1}{12} h b^3$ und $T_{\max} = \frac{9 M_D}{2 h b^2}$ einsetzen, in

$$|(\sigma_B)_{zul}| W = \frac{m-1}{2m} |(M_{By})_{\max}| + \frac{m+1}{2m} \sqrt{(M_{By})_{\max}^2 + \lambda_2 \left(\frac{9}{2} M_D\right)^2} = M_R \quad (208c)$$

übergeht, worin M_R wieder das reduzierte Moment bedeutet und $W = \frac{1}{6} h b^2$ das dem minimalen zentralen Trägheitsmoment zugeordnete Widerstandsmoment der Querschnittsfläche vorstellt.

Weniger einfach stellt sich die Rechnung, wenn die Ebene des biegenden Momentes mit der xy -Ebene zusammenfällt. Die extremen reduzierten Spannungen sind wie im vorhergehenden Fall im Einspannungsquerschnitt zu suchen; da aber nunmehr die Punkte A , in welchen die größten Schubspannungswerte entstehen, nicht mehr mit den Punkten des Einspannungsquerschnittes identisch sind, in denen sich die größten Biegungsspannungen ergeben, so werden, wenn h gegenüber b verhältnismäßig groß und das maximale Biegemoment gegenüber dem Drillingsmoment klein ist, die größten reduzierten Spannungen an symmetrisch zu den Punkten A gelegenen Stellen der Längsseiten h auftreten. Die Verdrehungsspannungen an den Längsseiten ergeben sich aus der zweiten der Formeln (149), S. 332 für $z = \frac{b}{2}$, die Anstrengung für ein beliebiges Volumenelement längs derselben ist demnach durch den Zahlenwert der reduzierten Spannung

$$|S| = \left| \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{(M_{Bz})_{\max}}{J_z} y + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\frac{(M_{Bz})_{\max}^2 y^2}{J_z^2} + 4 \left[\lambda_2 \frac{9 M_D}{2 b^2 h^3} (h^2 - 4 y^2) \right]^2} \right| \quad (d)$$

ausdrückbar, worin $(M_{Bz})_{\max}$ sich auf den Einspannungsquerschnitt bezieht und $J_z = \frac{1}{12} b h^3$ einzusetzen ist. Der weitere langwierige rechnerische Weg besteht darin, den extremen Wert von $|S|$ unter Zuhilfenahme der Gleichung $\frac{d|S|}{dy} = 0$ aufzufinden, aus der sich jener Wert von y ergibt, der $|S|$ zu einem Extrem macht. Die Dimensionierungsgleichung lautet dann wie oben $|S|_{\max} = (\sigma_B)_{zul}$, aus der h berechenbar ist, wenn b gegeben vorliegt. Diese Lösungsmethode führt auf eine Gleichung vierten Grades nach y , die sich auf eine solche zweiten Grades zurückführen läßt. Gangbar ist auch der graphische Weg, der darin besteht, daß man für verschiedene Werte von y (z. B. $y=0$, $y = \frac{h}{8}$, $y = \frac{h}{4}$, $y = \frac{3h}{8}$, $y = \frac{h}{2}$ (die Werte von $|S|$

aus (e) als Funktion von h bei gegeben gedachtem Verhältnis von $\frac{h}{b}$ berechnet und die berechneten Werte normal zu h von den zugeordneten Punkten der Längsseite aus aufträgt.

Man erhält dann durch Verbindung der hierdurch erhaltenen Punkte eine Kurve, deren näherungsweise Extrem leicht angebar ist. Ist h von b nicht viel verschieden oder ist das Biegemoment besonders groß gegenüber dem Verdrehungsmoment, so kann es sein, daß die Anstrengung in der Mitte der kurzen Seiten des Rechteckes annäherungsweise oder genau die Grundlage für die Dimensionierung bildet.

c) Elliptischer Querschnitt (Abb. 153a, S. 337). Der Stab sei wieder, wie unter (b) vorausgesetzt wurde, gelagert und auf Biegung und Verdrehung beansprucht, habe aber jetzt elliptischen Querschnitt mit den Halbachsen a und b . Enthält die Ebene des biegenden Momentes die kleine Achse b der Ellipse, so fällt die in dem für die Dimensionierung in Frage kommenden Einspannungsquerschnitte auftretende größte Schubspannung $T_{\max} = \frac{2 M_D}{a b^2 \pi}$ (Gleichung (153), S. 337) an den Endpunkten der kleinen Achse mit den dort auftretenden größten Biegungsspannungen $(\sigma_B)_{\max} = 4 \frac{(M_{By})_{\max}}{a b^2 \pi}$ zusammen. Die Dimensionierungsgleichung lautet dann

$$|(\sigma_B)_{zul}| = \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{4(M_{By})_{\max}}{a b^2 \pi} + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\frac{4(M_{By})_{\max}^2}{a b^2 \pi} + 4 \lambda_2^2 \left[\frac{2 M_D}{a b^2 \pi} \right]^2}, \quad (e)$$

woraus

$$|(\sigma_B)_{zul}| W = \frac{m-1}{2m} (M_B)_{\max} + \frac{m+1}{2m} \sqrt{(M_B)_{\max}^2 + \lambda_2^2 M_D^2} = M_R \quad (208d)$$

folgt, mit $W = \frac{a b^2 \pi}{4}$ als Widerstandsmoment, bezogen auf Durchbiegungen normal zur großen Achse der Ellipse, und M_R als reduziertem Moment. Die Gleichung (208d) stimmt vollkommen mit der entsprechenden oben für kreis- und kreisringförmigen Querschnitt erhaltenen überein.

Wenn die Biegungsebene die Querschnitte in den großen Achsen der Ellipsen schneidet, so muß der Extremwert der reduzierten Spannung in vier mit Bezug auf die y - und z -Achse symmetrisch gelegenen Punkten des Umfanges der Ellipse im Einspannungsquerschnitte gesucht werden. Die Dimensionierungsgleichung nimmt jetzt die Form

$$|(\sigma_B)_{zul}| = \frac{m-1}{2m} \frac{(M_{Bz})_{\max}}{J_z} \eta + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\frac{(M_{By})_{\max}^2}{J_z^2} \eta^2 + 4(\lambda_2 T)_{\max}^2} \quad (f)$$

an, worin $J_z = \frac{b a^3 \pi}{4}$ und $T = \frac{2 M_D}{a^3 b^3 \pi} \sqrt{b^2 [a^2 - \eta^2 (a^2 - b^2)]}$ (Seite 337). Zur Bestimmung des Extremwertes des in Gleichung (f) rechts stehenden Ausdruckes ist, ähnlich so wie das oben für den rechteckigen Querschnitt auseinandergesetzt wurde, ein analytischer und ein graphischer Weg gangbar.

3. Fortsetzung. Dimensionierung bei Knickung und bei Knickung und Biegung. Die Navier-Schwarz-Rankinesche Formel.

Auf Seite 426 wurde auseinandergesetzt, was für besondere Verhältnisse sich im Hinblick auf das Dimensionierungsproblem der Körper ergeben, für die bei einer bestimmten Größe des äußeren Lastsystemes und gegebener Art desselben der Eintritt labilen Gleichgewichtes zu befürchten ist.

Im Falle der Beanspruchung auf Knickung gestaltet sich der Dimensionierungsvorgang sehr einfach, weicht aber naturgemäß von jenem in den vorhergehenden Punkten behandelten ab, da die Knicklast, die mit Sicherheit nicht erreicht werden darf, bei gegebener Länge des Stabes von den zu bestimmenden Querdimensionen selbst abhängig ist. Denn ist P_l die Knicklast, $\frac{P_l}{F} = \sigma_l$ mit F als Querschnittsfläche des Stabes die Knickspannung, ferner P die den Stab auf Knickung beanspruchende Kraft, so ist die Dimensionierungsgleichung offenbar durch

$$\frac{P}{F} m = \sigma_l \quad (209)$$

mit m als Sicherheitskoeffizienten gegen das Erreichen der Knickspannung σ_l

gegeben, welche letztere aber vom Schlankheitsgrade des Stabes α abhängt, der die gegebene Länge des Stabes und den von den zu suchenden Querdimensionen abhängigen minimalen Trägheitsradius enthält. [Siehe die Gleichung (163) auf Seite 359 und z. B. die Gleichung (161a) auf Seite 356.] Für σ_l ist entweder die Eulersche Knickspannung σ_E oder die Engesser-Karmansche Knickspannung σ_K [Gleichung (170) auf Seite 366] einzusetzen, je nachdem der labile Gleichgewichtszustand im elastischen oder unelastischen Gebiete liegt. Da die Berechnung des Knickungsmodulus T umständlich ist, weil ferner die Gleichung (170) nur für wenige Stoffe bisher experimentell bestätigt worden ist, nimmt man in der Regel die Tetmayerschen empirischen Formeln (165a), (166a), (167a), (167a'), (168a) auf Seite 362ff. an Stelle der Gleichung (170) als Grundlage für die Dimensionierung von Stäben aus Holz, Flußeisen, Flustahl und Gußeisen im unelastischen bzw. elastischen Gebiet. Von vornherein weiß man natürlich nicht, ob für σ_l der Eulersche Wert σ_E oder der Engesser-Karmansche bzw. Tetmayersche Wert σ_K einzusetzen ist. Da bleibt nichts anderes übrig als zu probieren: Man nimmt zunächst den mehr wahrscheinlichen Wert (bei langen Stäben σ_E , bei kürzeren Stäben σ_K) und sieht nach durchgeführter Rechnung nach, ob der dann sich ergebende Schlankheitsgrad einer Knickspannung ober- oder unterhalb der Proportionalitätsgrenze eines Materiales bzw. den durch Tetmayer angegebenen Grenzen der Schlankheitsbereiche entspricht. Hat man z. B. σ_E für σ_l gewählt, so muß sich nachträglich zeigen, daß der Schlankheitsgrad gleich oder kleiner als die Grenzschlankheit ist, bis zu welcher die Eulerschen Formeln anwendbar sind. Trifft das nicht zu, so muß die Rechnung nochmals unter Einsatz von σ_K in Gleichung (209) wiederholt werden.

Die Größe $\frac{\sigma_l}{m} = (\sigma_l)_{zul}$ bezeichnet man auch jetzt als zulässigen Wert der Knickspannung σ_l , nur hat diese zulässige Spannung eine ganz andere Bedeutung als die in den vorhergehenden Punkten eingeführte zulässige Spannung auf Biegung, Zug, Druck usw., denn letztere sind einzig und allein von dem gewählten Werkstoff, dem Belastungscharakter und der Aufbringungsart der Belastung abhängig und von den Grenzbedingungen und Querdimensionen des Stabes unabhängig, während die zulässige Knickspannung auch mit den beiden letztgenannten Umständen veränderlich ist.

Die Wahl der Größe des Sicherheitskoeffizienten m hängt in erster Linie von der Zuverlässigkeit des Werkstoffes selbst ab. Bei Holz und Gußeisen, als stets bzw. häufig inhomogenen und mit Anfangsspannungen behafteten Stoffen, wählt man dementsprechend m höher ($m = 8$ für Gußeisen, $m = 10$ für Holz) als bei Schweieisen, Flußeisen und Flustahl ($m = 5$). Die Größe von m steht aber auch in gewisser Abhängigkeit von den Grenzbedingungen des Stabes. Dem ausübenden Ingenieur sind als theoretische Grundlagen für die Dimensionierung in der Regel nur die im Punkte 21, Seite 350ff. angegebenen vier besonderen Knickfälle mit den für sie in ideeller Weise vorausgesetzten Grenzbedingungen und die aus denselben sich ergebenden, für die Berechnung des Schlankheitsgrades nötigen ideellen freien Knicklängen bekannt. Sind diese Grenzbedingungen, wie stets zu erwarten, unvollkommen erfüllt, so muß entweder die freie Knicklänge schätzungsweise abgeändert oder bei Zugrundelegung der den genannten vier Knickfallen zukommenden ideellen Grenzbedingungen der Sicherheitskoeffizient erhöht oder erniedrigt werden, je nachdem der zugrunde gelegte Idealfall im Vergleich zu dem wirklich vorliegenden zu günstig oder zu ungünstig ist, d. h. ihm eine zu große oder zu kleine Knicklast zukommt. Steht z. B. der Kolben des in Abb. 2, S. 4 dargestellten Schubkurbeltriebes in der äußersten Lage links, so kann die Kolbenstange, die durch den

Dampfdruck und die sich ihm in Richtung der Stangenachse entgegengesetzte Kraft auf Knickung beansprucht wird, beiderseits als unvollkommen eingespannt angesehen werden, und die freie Knicklänge L ist etwas größer als die Hälfte der Länge l der Kolbenstange. Legt man der Dimensionierung der Kolbenstange die Formel (161c) auf Seite 358 zugrunde, so hat man die Knicklast etwas zu groß gewählt, was man durch eine kleine Vergrößerung des Sicherheitskoeffizienten wieder wettmachen könnte. In der äußersten Lage rechts kann die Kolbenstange einerseits als unvollkommen eingespannt, andererseits als unvollständig geführt [Gleichung (161b) auf Seite 357] angesehen werden usw. Häufig sind aber die Grenzbedingungen, denen der Stab unterworfen wird, überhaupt ganz anderer Art als jene, die den oben angeführten vier Knickfällen zugrunde liegen, wie z. B. dann, wenn die Stabenden in Schneiden liegen, die nicht mit der Achse des minimalen Schwerpunktträgheitsmomentes zusammenfallen. In derartigen Fällen muß man entweder neue theoretische oder aus Versuchen folgende Grundlagen zur Bestimmung der freien Knicklänge aufsuchen, oder dieselbe schätzungsweise als einer der freien Knicklängen der vier oben angegebenen Fälle mehr oder weniger naheliegend bei passenden, d. h. mögliche Irrtümer ausgleichenden Sicherheitskoeffizienten wählen. In der Größe des letzteren können auch nicht gewollte oder absichtlich zugelassene kleine Exzentrizitäten der auf Knickung beanspruchenden Kraft oder anfängliche Stabkrümmungen, die auch durch das Eigengewicht bewirkt werden können, zum Ausdrucke gebracht werden. Wenn z. B. bei einem nach Abb. 8, S. 25 gebauten flußeisernen Fachwerkträger die Stäbe 2, 4 und 6, 4 durch Druckkräfte beansprucht werden, so wird die Knickgefahr durch das Eigengewicht der Stäbe begünstigt, welche dieselben auch auf Biegung beansprucht. Auch in diesem Falle kann Gleichung (209) als Grundlage für die Dimensionierung dienen, den Sicherheitskoeffizienten wird man aber höher wählen als dann, wenn die kleinen Durchbiegungen durch das Eigengewicht nicht vorhanden wären. Manchmal zieht man es aber in einem solchen Falle vor, die Dimensionierung auf Grund der Beanspruchung auf Biegung und Knickung vorzunehmen. (Siehe die Bemerkung am Schluß dieses Punktes.)

Als Beispiel zur Dimensionierung auf Knickung wählen wir einen Holzstab von rechteckigem Querschnitt mit den Seiten b und h und der Länge $l = 4$ m. Derselbe sei durch eine Kraft $P = 5$ t auf Knickung beansprucht und auf den die Kraft übertragenden Preßplatten stumpf aufgelagert. Nach Gleichung (209) nimmt die Dimensionierungsgleichung, wenn wir $m = 10$ wählen und bei der ansehnlichen Länge des Stabes von 4 m annehmen, daß $\sigma_l = \sigma_E$ zu setzen ist, die Form

$$\frac{5000}{bh} \cdot 10 = \frac{\pi^2 E}{\alpha^2}. \quad (\text{a})$$

Zur Berechnung des Schlankheitsgrades $\alpha = \frac{L}{i_{\min}}$ führen wir die freie Knicklänge mit $L = 0,7l$ ein (Seite 361) und setzen auf Grund der Definition des Trägheitsradius bei Wahl von $1,4 = \frac{h}{b}$, $i_{\min}^2 b^2 1,4 = \frac{b^4}{12} 1,4$ oder $i_{\min} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$, womit $\alpha^2 = \frac{0,49 l^2 \cdot 12}{b^2}$ erhalten wird. Mit dem berechneten Werte von α und für $E = 100000$ kg/cm² geht die Gleichung (a) in

$$\frac{5000 \cdot 10}{b^2 \cdot 1,4} = \frac{100000 \cdot \pi^2 b^2}{0,49 l^2 \cdot 12} = \frac{100000 \pi^2 b^2}{0,49 \cdot 16 \cdot 10^4 \cdot 12}$$

über, woraus $b = 13,6$ cm \doteq 14 cm und damit $h = 19$ cm folgt. Mit diesen Werten berechnet sich der Schlankheitsgrad mit $\alpha = \frac{0,7 \cdot l}{14} \sqrt{3} = 69,85$, der somit unter dem Grenzschlankheitsgrad $\alpha = 100$ für Holz nach den Tetmayerschen Versuchen (Seite 362) liegt. Die Anwendung der Eulerschen Formel war also nicht berechtigt. Wir haben daher die Rechnung neuerdings unter Verwendung der Tetmayerschen empirischen Formel

$$\sigma_K = 0,293 - 0,00194 \alpha \text{ t/cm}^2$$

[Gleichung (165a) auf Seite 362] durchzuführen. Mit ihr ergibt sich, da jetzt als Maßstab für die Spannungen t/cm^2 gilt, die nach b quadratische Gleichung

$$\frac{5}{b^2 \cdot 1,4} 10 = 0,293 - 0,00194 \cdot 0,7 \cdot \frac{400}{b} 2 \sqrt{3},$$

der die Lösung $b \doteq 15$ cm, also $h \doteq 21$ cm entspricht. Ein Stab von diesen Quersdimensionen könnte bei Beanspruchung auf Druck, d. h. wenn keine Knickgefahr vorläge, eine Last $P = 15 \cdot 21 (\sigma_D)_{zul}$, d. i. bei Wahl von $(\sigma_D)_{zul} = 50$ kg/cm² für Fichtenholz $P = 15750$ kg tragen.

Es hat nicht an Bestrebungen gefehlt, den vorgeschilderten Dimensionierungsvorgang bei Beanspruchung auf Knickung durch einen anderen zu ersetzen, bei dem von der Annahme ausgegangen wird, daß es sich in praktischen Fällen, dann wenn von einer Knickungsbeanspruchung die Rede ist, eigentlich um eine exzentrische Druckbeanspruchung handelt, die dem labilen Fall der Knickungsbeanspruchung nahe liegt. Besonders bekannt geworden ist diesbezüglich die Navier-Schwarz-Rankinesche Formel, die so genannt wird, weil sie auf der Navierschen Spannungsgleichung (129c, Seite 305) bei Beanspruchung auf exzentrischen Druck beruht und durch Schwarz bzw. Rankine ziemlich gleichzeitig als Grundlage für die Dimensionierung von geraden Stäben empfohlen wurde, die eine der Knickungsbeanspruchung naheliegende Beanspruchung erfahren.

Wird ein gerader Stab in der xz -Ebene durch eine Kraft P parallel zur Stabachse auf exzentrischen Druck beansprucht, so können wir die auftretende extreme totale Spannung, die sich im gefährlichen Querschnitt in der äußersten Faserschicht auf der Druckseite ergibt,

in der Form $\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{(M_{By})_{\max}}{J_y} e$ schreiben, worin das maximale Moment $(M_{By})_{\max}$ und P als positive Größen eingeführt gedacht sind und e die als positiv aufgefate Entfernung der äußersten Faserschichten auf der Druckseite von der der Biegungsspannung zugeordneten Nulllinie bedeutet. Setzen wir $(M_{By})_{\max} = Pa$ und berechnen aus obiger Gleichung $\frac{P}{F}$, so

erhalten wir $\frac{P}{F} = \frac{\sigma_{\max}}{1 + \frac{aeF}{J_y}}$ oder, da, wenn es sich um eine exzentrische Druckbeanspruchung

handelt, und die zulässige Beanspruchung auf Biegung $(\sigma_B)_{zul}$ nicht viel verschieden ist von der zulässigen Beanspruchung auf Druck $(\sigma_D)_{zul}$, als Grundlage für die Dimensionierung

$\sigma_{\max} = (\sigma_D)_{zul}$ gelten kann $(\bar{\sigma}_K)_{zul} = \frac{(\sigma_D)_{zul}}{1 + \frac{aeF}{J_y}}$, wobei wir $\frac{P}{F}$ gleich $(\bar{\sigma}_K)_{zul}$, d. i. gleich einer

zulässigen Beanspruchung auf Knickung gesetzt haben, die natürlich nicht mit der oben streng definierten zulässigen Beanspruchung auf Knickung $(\sigma_K)_{zul}$ bei zentrischer Übertragung der Kraft verwechselt werden darf. Bezeichnen wir den Zahlenwert der infolge der Biegungsbeanspruchung auftretenden Quetschung im gefährlichen Querschnitt in der am meisten

angestregten Faserschichte mit ε , so gilt $\frac{Pae}{J_y} = \frac{F(\bar{\sigma}_K)_{zul}ae}{J_y} = E\varepsilon$, oder, wenn wir im

elastischen Bereiche angenähert für $F(\bar{\sigma}_K)_{zul}$ den aus der Eulerschen Knicklast P_E durch Division mit dem Sicherheitskoeffizienten m abgeleiteten strengen Wert der zulässigen Knick-

last einführen, also $F(\bar{\sigma}_K)_{zul} = F(\sigma_K)_{zul} = \frac{1}{m} P_E = \frac{1}{m} \cdot \frac{\pi^2 EF}{\alpha^2}$ setzen, $\frac{1}{m} \cdot \frac{\pi^2 EF}{\alpha^2} \cdot \frac{ae}{J_y} = E\varepsilon$,

woraus $\frac{aeF}{J_y} = \frac{m\varepsilon\alpha^2}{\pi^2} = K\alpha^2$ mit $K = \frac{m\varepsilon}{\pi^2}$ folgt. Mit dem so berechneten Werte von $\frac{aeF}{J_y}$ erhält man die Gleichung

$$(\bar{\sigma}_K)_{zul} = \frac{(\sigma_D)_{zul}}{1 + K\alpha^2} \quad (210)$$

mit α als Schlankheitsgrad und K als Koeffizienten, der ursprünglich als Materialkonstante aufgefaßt wurde. Die Beziehung (210) ist die oben erwähnte Navier-Schwarz-Rankinesche Formel. Wenn K wirklich eine Materialkonstante wäre, so könnte mit Hilfe der Glei-

chung (210) der als zulässige Beanspruchung auf Knickung eingeführte Wert für jeden Schlankheitsgrad aus der zulässigen Beanspruchung auf Druck abgeleitet werden. Das ist aber nun nicht der Fall, weil K , wie aus der Ableitung hervorgeht, nicht nur von der Exzentrizität der Kraft und der anfänglichen Stabkrümmung, die berechnete Ausgangspunkte für die Herleitung der Formel (210) sein könnten, sondern auch von der Länge des Stabes abhängig ist. Tatsächlich fand Tetmayer aus seinen Knickversuchen, daß Formel (210), welche eigentlich zufolge ihrer Ableitung auf das elastische Gebiet beschränkt bleiben müßte, aber auch auf das unelastische Gebiet angewendet wurde, nur für verschiedene Stufenbereiche der reduzierten Längen, als angenähert konstant angesehen werden kann. Je größer diese Stufenbereiche gewählt werden, um so mehr nehmen die zugehörigen Werte von K den Charakter von Mittelwerten an. Die Formel (210), die seinerzeit, als man sich über den Gültigkeitsbereich der Eulerschen Formeln noch nicht im klaren war, als Grundlage für die Dimensionierung gute Dienste leistete, ist heute, wo man den labilen Gleichgewichtsfall der Knickung genau studiert hat, kaum mehr in Verwendung.

Für die Dimensionierung eines auf Biegung und Knickung beanspruchten geraden Stabes sind, wenn nicht vorgezogen wird, in der oben angegebenen Weise vorzugehen, die auf Seite 369ff. gemachten Bemerkungen zu beachten.

Literaturnachweis.

Die eingeklammerten Zahlen weisen auf die Seitenzahlen des Textes hin. In letzterem nimmt das Zeichen (L) Bezug auf die folgenden Angaben.

- Bach-Baumann: Elastizität und Festigkeit, 9. Aufl. Berlin: J. Springer 1924. (147), (150), (187), (232), (233), (294), (350), (415).
- Bach, C.: Z. V. d. I. 1897 (147); 1904 (160). — Forsch.-Arb. Ing. H. 29 (160). — Dt. Bauzg. 1914 (361). — Mitt. üb. Zement, Beton, Eisenbeton Nr. 5 (361). — Z. V. d. I. 1913 (361).
- Bauschinger, J.: Mitt. a. d. Festigkeitslaboratorium der techn. Hochschule in München 1874, H. 3 (155); 1886, H. 13 (171), (174); 1891, H. 12 (177). — Z. bayr. Arch. Ing.-V. 1875 H. 2—6 (235). — Mitt. a. d. Festigkeitslaboratorium der techn. Hochschule in München 1892, H. 21 (232); 1887, H. 15 (360).
- Barba, J.: Mém. Soc. Ing. Civ. France 1880 (228).
- Betti, E.: Il nuovo Cimento 1872 (136).
- Beltrami, E.: Math. Ann. 1903 (191).
- Brettschneider: Zivilingenieur 1881 (339).
- Bryan, G. H.: Cambridge phil. society proceedings 1888 (195).
- Castigliano, A.: Théorie de l'élasticité des systèmes élastiques, Turin 1879, deutsch von E. Hauffe. Wien: Gerold 1876 (119).
- Clapeyron, B. P. E.: Arbeitssatz in Lamé: Théorie de l'élasticité des corps solides. Paris 1886 (108).
- Clebsch-de Saint Venant: Théorie de l'élasticité des corps solides, Paris: Dunod, 1883 (96), (204), (407).
- Clebsch, A.: Theorie der Elastizität, Leipzig: B. G. Teubner (96).
- Coulomb, A. Ch.: Mémoires présentées par divers savants. Paris 1776 (159), (181).
- Cox, H.: Transactions of the Cambridge phil. society 9 (1849) (407).
- De Saint Venant, B.: Comptes Rendus 1878 u. 1879 (335). — Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique, Paris: Dunod editeur 1864, 1. Art. V (336).
- Dungen, F. H. van den: Cours de technique des vibrations 1. Brüssel 1926 (406).
- Ehrenberger: Z. V. d. I. 1907 (422).
- Engesser: Schweiz. Bauzg. 1895 (364).
- Elwitz, E.: Forsch.-Arb. Ing. 1921, H. 236 (362).
- Faust, O. u. G. Tammann: Z. Phys. Chem. 1910 (153).
- Föppl, A.: Vorlesungen über techn. Mechanik, 3. 5. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner 1920 (114), (249), (119); 4 (344); 5 (114), (119). — Mitt. a. d. mech.-techn. Laboratorium in München 1890, H. 27 (184), (186). — Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss. 1917 u. 1921 (339). — Z. V. d. I. 1922 (339).
- Föppl, A. u. L.: Drang und Zwang, eine höhere Festigkeitslehre f. Ingenieure, 1. u. 2. München u. Berlin: R. Oldenburg 1920 (26), (114), (116), (191), (345), (373).
- Föppl, O.-Becker von Heydekampf: Die Dauerprüfung der Werkstoffe. Berlin: Julius Springer 1929 (174).
- Föttinger, H.: Forsch.-Arb. Ing. 1905, H. 25 (328).
- Gerstner, G. v.: Mechanik fester Körper. Prag 1833 (365).
- Grammel, R.: Z. ang. Math. Mech. 3 (1923) (373).
- Graf, O.: Die Dauerfestigkeit der Werkstoffe und Konstruktionselemente (174).
- Grashof, F.: Theorie der Elastizität und Festigkeit, 2. Aufl. Berlin: Gaertner 1878 (188), (237), (259).
- Grübler, M.: Z. V. d. I. 1897 (218).
- Grüning, M.: Statik der ebenen Tragwerke. Berlin: Julius Springer 1925 (120).
- Guest, J.: Phil. Mag. 1900 (159).

- Hartmann, L.:** Distributions des déformations dans les métaux soumis à des efforts. Paris 1896 (163), (184), (190).
- Henky, H.:** Z. ang. Math. Mech. **4** (1924) (170).
- Hertz, H.:** Gesammelte Werke **1** (204).
- Jaumann, G.:** Bewegungslehre von einem modernen Standpunkt. Leipzig: Barth 1905 (14).
- Kármán, Th. v.:** Forsch.-Arb. Ing. H. 118 (166), (190), (191). — Z. V. d. I. **1911** (166). Enzyklopädie d. math. Wissenschaften **4**, 31 (178). — Forsch.-Arb. Ing. **1910**, H. 81 (364).
- Kaufmann, W.:** Z. ang. Math. Mech. **2** (1922) (413).
- Kick, F.:** Z. öst. Ing.-V. **1891** (166). — Das Gesetz der proportionalen Widerstände. Leipzig 1885 (229), (422).
- Kirchhoff, G.:** Vorlesungen über math. Physik **1**, Mechanik. Leipzig: B. G. Teubner 1897 (119).
- Kirkaldy, D.:** Results of an experimental inquiry into the comparison tensile strength and other properties of various kinds of wrought-iron and steel. London 1862 (233).
- Lagrange, J. L.:** Analytische Mechanik, übersetzt von Dr. Servus, Berlin: J. Springer 1887 (119).
- Lamé, G.:** Leçons sur la théorie de l'élasticité des corps solides. Paris 1866 (119).
- Lang, G.:** Das Holz als Baustoff. Wiesbaden 1915 (419).
- Love, A. E. H.:** Lehrbuch der Elastizität, übersetzt von Timpe. Leipzig: B. G. Teubner 1907 (95), (215).
- Ludwik, P.:** Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien **1926** (141), (145). — Elemente der technolog. Mechanik. Berlin: Julius Springer 1909 (141), (164). — Z. Metallkunde **1924** (166). — Techn. Blätter, Vierteljahrschrift d. deutschen polytechn. Vereines in Böhmen **1905** (295). — Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien **1927** (166). — Phys. Z. **1909** (176).
- Ludwik, P. u. Scheu, Stahleisen** **1923** (233).
- Lüders: Dingler** **1854** (163).
- Mailänder, R.:** Z. Metallkunde **1928** (173).
- Martens, A. u. E. Heyn:** Materialienkunde f. den Maschinenbau **1**. Berlin: Julius Springer 1898 (173), (177), (317), (422); **2** (178). — Mitt. a. d. kgl. techn. Versuchsanstalten zu Berlin **1896** (236); **1891** (422).
- Masing, J. u. W. Mauksch:** Z. Metallkunde **1925** (171).
- Maxwell, J. Cl.:** Scientific papers. Cambridge 1890 (175). — Phil. Mag. **1864** (135).
- Menabrea, J.:** Comptes Rendus **1858** (119).
- Mises, R. v.:** Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl. **1913** (191). — Z. ang. Math. Mech. **1923** (196), (355).
- Mohr, O.:** Gesammelte Abhandlungen aus d. Gebiete der techn. Mechanik, 2. Aufl. Berlin: Ernst 1914 (61), (119), (155), (189 ff.), (271), (305).
- Moore, H.:** The fatigue of metals (172), (173).
- Müller-Breslau, H.:** Neuere Methoden der Festigkeitslehre, 4. Aufl. Leipzig: Kröner 1913 (119). — Graph. Statik d. Baukonstruktionen, 4. Aufl. Stuttgart 1907 (119).
- Nádai, A.:** Der bildsame Zustand der Werkstoffe **1927** (191).
- Neumann, F.:** Vorlesungen über die Theorie der Elastizität. Leipzig 1885 (204).
- Poisson:** Traité de Mécanique **2**, 2. Aufl. (204).
- Pöschl, T.:** Der Stoß im Handbuch f. Physik, herausgegeben von Geiger u. Scheel **6**. Berlin 1928 (204). Lehrbuch der techn. Mechanik, Berlin: J. Springer 1923 (119).
- Prandtl, L.:** Schweiz. Bauzg. **1924** (164). — Ber. üb. d. Vers. d. Naturforscher u. Ärzte **1908** (166). — Phys. Z. **1903** (331). — Kipperscheinungen. Dissertation München **1899** (373).
- Preuß, E.:** Z. V. d. I. **1913** (233).
- Ramsauer, C.:** Ann. Physik **30** (1909) (211).
- Rankine, W. J. M.:** A manuel of applied mechanics. London 1858 (237).
- Rasch, E.:** Mitt. d. internationalen Verbandes der Materialprüfungen **1** (1909) VII/3 (153).
- Riemann-Weber:** Partielle Differentialgleichungen der Physik, herausgegeben von Dr. v. Mises, **1925**, 1. Teil (355), (375).
- Ritter, W.:** Anwendungen der graphischen Statik. Zürich 1888 (289).
- Routh, E. J., Die Dynamik starrer Körper** **1**. Leipzig 1898 (197).
- Sachs, G. u. G. Fiek:** Der Zugversuch, Leipzig: Akadem. Verl. 1926 (178). — Grundbegriffe der mechanischen Technologie der Metalle, Leipzig: Akadem. Verl. 1925 (178) (422).

- Schulze, A.: Ann. Physik **13** (1904) (406).
Stodola, A.: Die Dampfturbinen **1905** (219).
Tamann, G. u. O. Faust: Z. Phys. Chem. **1910** (153).
Tetmayer, L. v.: Angewandte Elastizität und Festigkeitslehre, Leipzig: Deuticke 1905.
(173), (362). — Gesetze der Knickungs- und zusammengesetzten Druckfestigkeit d.
techn. wichtigsten Baustoffe, 3. Aufl. Wien: Deuticke, 1903 (362).
Thomson, W. (Lord Kelvin): Math. a. phys. Papers. Cambridge 1882 (110). — Phil.
Mag. 1878 (110).
Try, A.: Stahleisen **1921** (164).
Valentiner, S.: Vectoranalysis, 2. Aufl., Berlin u. Leipzig: S. J. Göschen 1912 (14).
Vicat, L. J.: Ann. Ponts Chauss. **1833** (235).
Voigt, W.: Ann. Physik **1894**, **1898** (185); **1883** (204); **1915** (204).
Wawrziniok, O.: Handbuch des Materialprüfungsvereins. Berlin: Julius Springer 1908
(139), (345), (422).
Weber, W.: Ann. Phys. Chem. **1835** (170).
Wehage, H.: Mitt. a. d. kgl. techn. Versuchsanstalten zu Berlin **1888** (188).
Werkstoffhandbuch, herausgegeben von der deutschen Gesellschaft f. Metallkunde im V.d.I.
(229).
Wöhler, A.: Z. Bauw. **1858** bis **1870** (171).
Young, T.: A course of lectures on natural philosophie **1807** (407).

Sachverzeichnis.

(Die Zahlen weisen auf die Seiten hin.)

- Abscheren** s. Beanspruchung.
Abscherversuch 317 ff.
Ähnlichkeitsgesetz 228 ff., 234, 289 ff., 320, 350.
Äquivalenz eines Lastsystemes 20 ff.
Akkomodation 151, 168, 347.
Anisotropie 74 ff.
Annäherungstheorien 220 ff.
Annäherungsverfahren 221.
Anspannung 172.
Anstrengungsmaß 179 ff., 234, 414 ff.
— **Anschauung von Coulomb** 159, 181 ff., 185.
— — **von Poncelet, de Saint Venant, Grasshof** 153 ff., 188 ff., 415 ff.
— — **von Mohr** 155 ff., 189 ff.
— — **von Lamé und Clebsch** 184 ff.
— — **von Beltrami** 191.
Anstrengungsziffer 415, 424, 432.
Arbeitssatz,
— **bei linearer Beanspruchung** 101.
— **bei räumlicher Beanspruchung** 102 ff.
Arbeitsvermögen 165, 231, 348.
Aufbau (Konstitution) 1, 2, 178, 192.
Aufbringungsart einer Kraft,
— **wechselnde** 8, 149 ff., 168, 171 ff.
— **dauernde** 8, 24.
Auflagerbedingungen 125, 248, 262.
— **stäbe** 130.
Ausglühen 178.
Bauschinger Effekt 171 ff.
Beanspruchung s. a. **Aufbringungsart und Charakter einer Kraft, ferner Spannung**.
— **Abscheren** 226, 314 ff., 422, 424, 427.
— **äußere** 8 ff.
— **Art und Größe der äußeren** 8, 9, 20, 171.
— **Biegung (gerade, schiefe)** 187, 224, 225, 237 ff., 307, 422, 427 ff.
— **Biegung und Knickung** 369, 441.
— **Biegung bei veränderlichem Trägheitsmoment** 279 ff.
— **Biegung (ebene) und Schub** 9, 19, 44 ff., 78, 224, 225, 236 ff., 241 ff., 259 ff., 416, 428 ff.
— **Biegung (räumliche) und Schub** 262.
— **Biegung (ebene schiefe, gerade) und Zug (Druck)** 301 ff., 305 ff., 310 ff. 434.
— **Biegung (ebene schiefe, gerade), Schub und Zug (Druck)** 223, 224, 298 ff.
— **Biegung (räumliche) Schub und Zug (Druck)** 223.
Beanspruchung, Biegung, Schub und Drillung 227, 339, 434 ff.
— **Drillung** 9, 83, 90, 155, 181, 187, 227, 325 ff., 422, 425, 434.
— **Drillung und Zug (Druck)** 370 ff.
— **Druck** 9, 19, 39, 73, 77, 142 ff., 153, 160 ff., 165 ff., 168, 170, 178 ff., 180, 186, 223, 228 ff., 415, 418, 427.
— **dynamische** 24, 177, 418.
— **ebene** 57.
— **einfache** 227.
— **hydrostatische ebene** 72, 186.
— — **räumliche** 67, 84, 99, 109 ff., 157, 185.
— **innere** 20.
— **Knickung** 193, 223, 228, 235, 350 ff., 426, 437 ff., s. a. **Biegung**.
— **lineare** 57.
— **räumliche** 57.
— **Schub reiner** 42, 72, 226, 417, s. a. **Biegung**.
— **Schub schlechthin** 225.
— **statische** 23, 173, 418.
— **stoßartige** 8, 24, 421.
— **Torsion** s. **Drillung**.
— **Umschlingsungsdruck** 72, 186.
— **Verdrehung** s. **Drillung**.
— **Zug** 9, 19, 39, 73, 77, 96, 137 ff., 149 ff., 159, 160 ff., 166 ff., 168, 170 ff., 178 ff., 181, 187, 223, 228 ff., 415, 418, 427.
— **Zug (Druck) schiefer (gerader) exzentrischer** s. **Biegung und Zug (Druck)**.
— **zulässige** 279, 280, 283, 316, 414 ff.
— **zusammengesetzte** 228.
Beanspruchungsarten gerader Stäbe 9, 221 ff.
Beanspruchungsgeschwindigkeit 169.
Belastungsgeschwindigkeit 169, 421.
Bettischer Satz 136, 376, 393.
Bewegung, elastische 10, 15, 197.
Biegegrenze 290, 292.
Biegeversuch 297 ff.
Biegung s. **Beanspruchung**.
Biegungsebene 245, 248.
Biegungsfestigkeit s. **Festigkeit**.
Biegungsmonet 222.
Biegungsmomentenschaubild 259, 263 ff.
Biegungspfeil 290.
Biegungsspannung, extreme 240 ff., 251.
Biegungsschaubild 290.
Biegungssteifigkeit 246 ff., 251.
Biegungstheorie, technische 221, s. a. **Beanspruchung**.
Biegungswiderstand 279 ff.
Bruch 2, 23, 172.

- Bruch, Dauer- 174.
 — gemischter 181, 187.
 — Trennungs- 180, 185—188, 191, 219, 289, 293, 319, 350.
 — Verschiebungs- 180, 183, 190, 320, 350.
 Bruchdehnung 141, 164, 177, 179, 230.
 Bruchgrenze 156, 164, 165, 166, 174, 177, 180, 183.
 Bruchquetschung 235.
- Castiglianosche Lehrsätze 124ff., 131ff., 376, 396, 397, 399, 400, 401.
 Castiglianosches Prinzip 119ff., 124ff., 129ff.
 Cauchysches Gesetz 76.
 Clapeyronscher Satz 101, 102ff., 108, 395ff., s. a. Arbeitssatz.
- D'Alembertsches Prinzip 26, 198, 406.
 Dauerversuche 171ff.
 Deformation 11, 13, s. a. Verformung, Verzerrungszustand.
 — verzögerte 170.
 Deformationsarbeit s. Formänderungsarbeit.
 Deformationshauptrichtungen 27, 39ff.
 Deformationsmethode 376.
 Deformationsrest 414, s. a. Dehnungsrest.
 Dehnung in beliebiger Richtung 32.
 — bezogene 15.
 — bleibende 150.
 — Bruch- 229, 230, 232.
 — federnde 150.
 — Haupt- 27, 33, 34, 39, 41, 42, 149, 153ff., 188, 415ff.
 — lokale (örtliche) 140, 230, 232.
 — maximale 140, 141.
 — mittlere 140.
 — wahre 141.
 Dehnungsrest 150, 160.
 Dehnungszahl 77.
 De Saint Venantsches Prinzip 21ff., 221, 244, 254.
 Dilatation, kubische 38, 41, 42, 84, s. a. Dehnung.
 Dimensionierungsgleichung 188, 415ff.
 Dimensionierungsproblem 188, 414ff.
 — bei Abscheren 427, 430.
 — bei Biegung 427ff., 430.
 — bei Biegung und Schub 428ff.
 — bei Biegung, Drillung und Schub 434ff.
 — bei Drillung 434.
 — bei Druck, geradem (schiefer) exzentrischen 432ff.
 — bei Knickung 437ff.
 — bei Knickung und Biegung 441.
 — bei labilem Gleichgewicht 426, 437ff.
 — bei Zug (Druck) 427.
 Drall 95, 203, 327, 338, s. a. Verdrehungswinkel bei Drillung.
 Drang 26.
 Drehgrenze 347.
 Drehstoß 203.
 Drehfestigkeit s. Festigkeit.
 Drillung s. Beanspruchung.
 Drillungsmoment 222.
 — kritisches 370ff.
- Drillungsmomentenschaubild 325.
 Drillungsmoment-Verdrehungsschaubild 348.
 Drillungsschwingung 405.
 Drillungstefigkeit 93, 327, 338.
 Drillungswiderstand 338, 342.
 Druckbeanspruchung s. Beanspruchung.
 Druckfestigkeit s. Festigkeit.
 Druckpyramiden 180, 182.
 Druckversuch 234ff.
 Durchbiegung s. Beanspruchung bei Biegung und Mohrsches graphisches Verfahren.
 Dyade,
 — Deformations- 14, 33.
 — Normalspannungs- 55.
 — Spannungs- 52, 61.
 — Verschiebungs- 14, 31.
 Dynamische Unbestimmtheit 204.
- Eigenfrequenz 209, 406.
 Eigenfunktion 209.
 Eigenschwingung 209, 402, 405, 406.
 Eigenschwingungszahl 209, 405.
 Eigenspannung s. Anfangsspannung unter Spannung.
 Einflußlinie 394.
 Einschnürung 140, 141, 145, 164, 179, 230ff.
 Elastische Linie 245ff., 262ff., 282, 303.
 — Einfluß der Biegungsspannungen 245.
 — Einfluß der Schubspannungen 248.
 — graphisches und rechnerisches Verfahren von Mohr 271ff., 301, 303, 393, 394ff.
 — Wendepunkt 248.
 Elastische Grundgleichungen 85ff.
 Elastisches Verhalten 74.
 Elastizität 2, 101ff., 150.
 — Grad der Vollkommenheit 159ff.
 — Größe der 159ff.
 — vollkommene 152, 202.
 — unvollkommene 152.
 Elastizitätsbedingung 119, 263.
 Elastizitätskonstante 76.
 — Zusammenhang derselben 79ff.
 Elastizitätsgesetz 20, 74.
 Elastizitätsgrenze 152ff., 153ff., 163, 165, 170, 171ff., 178, 180, 190, 291, 292, 414.
 Elastizitätsmodul,
 — Bestimmung 81ff., 83, 256, 328.
 — bei Schub 77, 196, 328.
 — veränderlicher 147ff., 345, 349.
 — wahrer 151ff.
 — bei Zug (Druck) 76, 147, 151, 179.
 Elastizitätstheorie, mathematische 1.
 Elastizitäts- und Festigkeitslehre 1, 25.
 Elastizitätsziffer,
 — bei Schub 77.
 — bei Zug (Druck) 76.
 Elasto-,
 — kinematik 5, 26ff.
 — kinetik 5, 26, 197ff.
 — kinetische Grundgleichungen 199.
 — statik 5, 26, 47ff.
 Elementarkörper 5.
 Energiekriterium 195, 353.
 Energiesalz 200, 205ff., 407ff.

- Erstarrungsprinzip 47.
 Eulersche Knickformeln 350ff.
 — Gültigkeitsbereich 359ff.
- Fachwerk** 120.
 Fallwerk 421.
 Festigkeit,
 — absolute 25.
 — Arbeits- 24, 172, 419, 420.
 — Biegungs- 290, 292, 293, 294, 422.
 — Druck 24, 165, 190, 235.
 — Drehungs- 347, 349, 350, 422.
 — dynamische relative 24.
 — effektive (wahre) 164, 186, 190, 235, 319ff., 347, 349, 350.
 — ideale s. technische.
 — Knick- 361.
 — Säulen- 361.
 — Scher- 318ff., 423.
 — Schwingungs- 172, 420.
 — statische relative 23, 166.
 — Stoß- 24.
 — technische 24, 164, 165, 190, 235, 318ff., 347, 349, 350, 418, 422, 423.
 — theoretische s. technische.
 — Umschlingungsdruck- 186, 190.
 — Umschlingungszug- 188.
 — Ursprungs- 172, 420.
 — Würfeldruck 24, 235, 361.
 — Zug- 164, 179, 232.
- Festigkeitsmaschine 138, 142, 161, 165, 172, 175ff., 228, 231, 297, 345.
 Festlegungsbedingungen 88ff., 331.
 Flächensatz 202ff.
 Fließfiguren 163, 165ff., 180, 183, 189, 190, 292, 347.
 Fließgrenze,
 — bei Biegung 290, 292.
 — bei Drillung 347.
 — bei linearem Spannungszustand 160ff., 165, 171, 189, 233.
 — bei räumlichem Spannungszustand 166, 192.
- Formänderungsarbeit,
 — bei Beanspruchung auf Biegung 321ff.
 — bei Beanspruchung auf Biegung (schiefe, gerade ebene) und Schub 321ff.
 — bei Beanspruchung auf Biegung (schiefe räumliche) und Schub 323.
 — bei Beanspruchung auf Drillung 328, 335, 337, 348.
 — bei Beanspruchung auf Druck (Zug) 100, 159, 164, 321.
 — bei Beanspruchung auf exzentrischen Druck (Zug) 223.
 — bei Gestaltsänderung 108, 195.
 — bei Beanspruchung räumlicher 103ff.
 — bei Beanspruchung auf Schub 102, 322.
 — elementare 100, 103, 106.
 — als Funktion der Spannungs-komponenten 104, 105.
 — als Funktion der Verzerrungskomponenten 104, 105.
 — lokale 165.
 — als potentielle Energie 102, 105.
- Formänderungsarbeit bei Raumänderung 108, 191.
 — virtuelle 112ff., 377ff., s. a. Virtuelle Arbeit, Virtuelles Arbeitsprinzip.
 — als vollständiges Differential 102, 105, 106.
- Formänderungswiderstand 23, 176.
 Freiheitsgrad,
 — des elastischen festen Körpers 4.
 — des starren Körpers 3, 204.
- Gefährlicher Querschnitt 241.
 Gefüge 75.
 Gegenseitigkeit der Verschiebungen s. Maxwell'sches Prinzip.
 Geradliniengesetz 237.
 Gerstnersches Gesetz 365.
 Gestalts- und Raumänderung 2, 5, 16, 38.
 — sehr kleine 3, 16, 26.
 Gleichgewicht 5, 47.
 — indifferentes 192ff.
 — labiles 192ff., s. a. Kippen, Knickung, Beanspruchung bei Drillung und Zug (Druck).
 — stabiles 47, 192ff.
 — Verzweigungslage 192ff., 351.
- Gleichgewichtsbedingungen,
 — notwendige und hinreichende 47.
 — bei sehr kleinen Verschiebungen 48ff.
 — an der Oberfläche 53.
 — eines ∞ kleinen Prismas 48ff.
 — am Tetraeder 51ff.
- Gleichgewichtsproblem 5, 26, 47.
 — Eindeutigkeit 47, 87ff., 195ff.
- Gleitmodul s. Elastizitätsmodul auf Schub.
 Gleitziffer 77.
 Grenzbedingungen 53, 221.
 Grenzkurve 157, 183.
 Grenzlänge 285, 360, 430.
 Grenزشlankheit 360, 438.
 Grundschwingung 211, 405, 407.
 Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes 137—178.
 Gütegrößen 230.
- Hartmannsche Figuren s. Fließfiguren.
 Hauptdehnung s. Dehnung.
 Hauptspannung s. Spannung.
 Hauptspannungslinien 285ff.
 Heterogenität 74.
 Homogenität 74ff.
 Hookesches Gesetz 75—178.
 — einfaches 77, 146.
 — erweitertes 76, 148, s. a. Gültigkeitsbereich.
- Hydrostatischer Spannungszustand s. Beanspruchung, hydrostatische.
 Hydrodynamisches Gleichnis 343ff.
 Hysterese 166ff., 170, 208, 402.
- Inhomogenität 74.
 Isotropie 74ff.
 Jungfräulicher Zustand, s. Zustand.
- Kennziffer s. Gütegrößen.
 Kerbschlagprobe 422.

- Kerbwirkung 233, 422.
 Kern 305 ff.
 Kernmoment 307.
 — punkt 307.
 — weite 307.
 Kinetostatik 200.
 Kippen 195, 373 ff.
 Kipplast 376.
 Knicklast 437.
 — Engesser-Kármánsche 364 ff., 438.
 — Eulersche 351 ff., 438.
 — — höherer Ordnung 355.
 — praktische 368.
 — Telmayersche 362 ff., 438.
 — theoretische 368.
 Knickmodul 366.
 Knickung s. Beanspruchung.
 Körper 1 ff., 3, 4.
 Kompatibilitätsbedingung s. Verträglichkeitsbedingungen.
 Kompressibilität 85.
 Konstitution s. Aufbau.
 Kraft,
 — angreifende 7.
 — Art der Aufbringung 8, 9, 418.
 — Art der Wirkungsweise 8.
 — Charakter 8, 421.
 — ebene 223.
 — Flächen- 7.
 — gebundene 21.
 — Kohäsions- 2, 23, 182.
 — kontinuierliche 7.
 — linie 239.
 — linienflüchtige 21.
 — Massen- 6.
 — methode 376.
 — Momentan- 7.
 — Oberflächen- 6.
 — Reaktions- 7.
 — Stoß- 7, 202 ff., 421.
 — Verbindungs- 7.
 — Volums- 6.
 Kraftverlängerungsschaubild 139.
 Kristalliten 152, 178.
 Krummlinige Koordinaten 89.

 Lamésches Spannungsellipsoid 58 ff., 61, s. a. Spannungsellipse.
 Längskraft 222.
 Länge, reduzierte 359.
 Längsschwingung 208.
 Linearitätsgrenze 149.
 Lokale Dehnung s. Dehnung.
 Lüdersche Figuren s. Fließfiguren.

Material,
 — ausnützung 418 ff.
 — dämpfung 174.
 — ermüdung 172 ff.
 — geschichte 137, 169.
 — prüfungswesen 139.
 Martens-Kennedy-Apparat 162.
 Masse, reduzierte 408.
 Maxwellsches Prinzip 134 ff., 376, 383, 393 ff.
 Meßlänge 82, 345.

 Meßuhr 162, 230, 361.
 Mohrsche Darstellung des Spannungszustandes 61 ff., 68, 71, 73.
 Mohrsches graphisches Verfahren s. elastische Linie.

 Nachfließen 175.
 Nachwirkungerscheinung 168 ff.
 Natürlicher Zustand, s. Zustand.
 Naviersche Gleichung 305.
 Navier-Schwarz-Rankinesche Formel 440 ff.
 Nebenschwingung 211, 405.
 Newtonsche Regel 204.
 Normal-
 — flachstab 138, 228 ff.
 — rundstab 138, 228 ff.
 Normalschwingung s. Eigenschwingung.
 Normalspannung s. Spannung.
 Normalspannungsfläche 54, 56, 68, 72, 73.
 Nulllinie 238 ff., 300, 302, 303 ff., 312.

Oberflächenbedingung 53.

 Poissonsche Konstante 77, 83 ff., 84, 85.
 Potential 105.
 Potenzgesetz 147, 187.
 Prinzip,
 — von Castigliano s. Castiglianosches Prinzip.
 — der Gegenseitigkeit der Verschiebungen s. Maxwellsches Prinzip.
 — der virtuellen Arbeit s. virtuelles Arbeitsprinzip.

 Quasiisotropie 75.
 Querkraft 222.
 Querschnittsverminderung s. Einschnürung.
 Querschwingung 402.
 Quetschgrenze 165, 235.
 Quetschung, bezogene 15.

Raumänderung s. Gestaltsänderung.
 Raummodul 85.
 Raumtransformation 14.
 Reibring 142, 165, 182, 184, 186, 234, 289, 318, 402.
 Reibungslose Gelenke 120.
 Reißwiderstand 164, 234, 320.
 Relaxation 175.

 Scheibe, rotierende 216 ff.
 Scherbeanspruchung s. Beanspruchung.
 Scherfestigkeit s. Festigkeit.
 Scherversuch s. Abscherversuch.
 Schiebeimpuls 203.
 Schiebung 15.
 Schiebungsebene 68.
 — kegel 41, 57.
 — zahl 77.
 Schlagpendel 421.
 Schlagversuch 177, 421 ff.
 Schlankheitsgrad 359, 438, 439.
 Schubspannung s. Spannung und Beanspruchung.
 Schubspannungslinien 286, 342.
 Schwerpunktsatz 202 ff.

- Seifenhautgleichnis 339.
 Seilkurve 271.
 Sicherheitskoeffizient 418ff., 437.
 Spannung 16, s. a. Beanspruchung.
 — Anfangs- 25, 87, 292.
 — Biegungs- s. Beanspruchung.
 — Drillungs- s. Beanspruchung.
 — Druck- 18.
 — Haupt- 55ff., 69ff.
 — Knick- 359, 437ff.
 — maximale 141.
 — Nach- 170.
 — Normal- 17, 55, 302, 306.
 — reduzierte 149, 415.
 — Schub- 18, 49, 50, 67, 69, 181, 241ff., 259ff.
 — Tangential- s. Schub-.
 — Temperatur 25, 87.
 — Total- 17, 51, 52, 59, 69.
 — Verdrehungs- s. Beanspruchung.
 — wahre 141.
 — Wärme 25.
 — Zeichen der 18.
 — ZerreiB- 231.
 — Zug- 18.
 Spannungskomponenten 17.
 Spannungsdehnungsschaubild 137ff.
 — Abhängigkeit von Probenform 228ff.
 — — von Temperatur 178.
 — — von Verformungsgeschwindigkeit 175, 179.
 — technisches für Bronze 145.
 — — für Eichenholz 144.
 — — für Flußeisen 143, 146.
 — — für FluBstahl 144.
 — — für Gußeisen 143.
 — — für Leder 146.
 — — für Messing 145.
 — — für Weichblei 144.
 — — wahres für Flußeisen 146.
 Spannungsellipse 71ff.
 Spannungsellipsoid s. Lamésches Spannungsellipsoid.
 Spannungsfunktion 331.
 Spannungshügel 342.
 Spannungsrichtfläche 58, 61.
 Spannungsrichtkurve 71ff.
 Spannungszustand 19, 20, 57, 61ff., 67, 68ff., 72ff., 99, 216ff.
 Spiegelapparat von Martens 81ff.
 Stabwerk 120, 377ff.
 Statisch bestimmtes Hauptssystem 124, 262.
 Statische Unbestimmtheit,
 — äußere 5, 119ff., 379ff.
 — innere 120ff., 262ff., 389.
 Statisch unbestimmte Größen.
 — Ermittlung der 262ff., 276ff.
 — Wahl der 123.
 Stereomechanik 3.
 Stoß,
 — Anstrengung bei 421ff.
 — dynam 203.
 — Elastizitätstheorie 204.
 — Energieverlust 407.
 Girtler, Mechanik.
 Stoß, Längs- 211ff., 407ff.
 — problem 202.
 — Quer- 411ff.
 — versuche 177, 421ff.
 — ziffer 204, 421, 422.
 Streckgrenze s. Fließgrenze.
 Struktur s. Gefüge.
 Superpositionsgesetz 77.
 Tetmayersches Geradliniengesetz 262ff., 438.
 — parabolisches Gesetz 363, 438.
 Tetraederbedingungen 51ff.
 Torsion s. Beanspruchung bei Drillung.
 Torsionsachse 95.
 Torsionsfunktion 92.
 Torsionsmodul s. Elastizitätsmodul bei Schub.
 Torsionsmaschine 345, 348.
 Torsionsmoment s. Drillungsmoment.
 Torsionsschwingung s. Drillungsschwingung.
 Torsionssteifigkeit s. Drillungssteifigkeit.
 Traggrenze bei Zug 164.
 — bei Druck 165.
 Trägheitsmoment, veränderliches 279ff., 322.
 Transversalschwingung 402.
 Umschlingungsdruckversuch 186, s. a. Beanspruchung auf Umschlingungsdruck.
 Unabhängigkeitsgesetz s. Superpositionsgesetz.
 Vektorrechnung 1, 13ff.
 Verdrehung s. Beanspruchung bei Drillung.
 Verdrehungsarbeit s. Formänderungsarbeit bei Drillung.
 Verdrehungssteifigkeit s. Drillungssteifigkeit.
 Verdrehungsversuch 345ff.
 Verdrehungswinkel bei Biegung 95, 246, 254, 271ff., 298, 396, 398, 401.
 — bei Drillung, bleibender und federnder 346., s. a. Drall.
 Verfestigung 164, 165.
 Verformung,
 — adiabatische 110.
 — Beschleunigung der 45ff., 197.
 — bleibende 153, 160ff., 170, 291, 346.
 — Geschwindigkeit der 45ff., 169, 175, 197.
 — homogene 13.
 — isotherme 110.
 — sehr kleine 16, 196.
 — umkehrbare (federnde) 150, 159, 291, 346; s. a. Deformation, Dehnung, Verzerrungszustand.
 Verschiebungsbeschleunigung 45, 197ff.
 Verschiebungsellipsoid 26, 27, 31, 39, 43.
 Verschiebungsgeschwindigkeit 45, 197.
 Verschiebungskomponenten 10.
 — sehr kleine 16, 26, 196, 198ff.
 — virtuelle 111ff.
 Verschiebungszustand 9.
 Versuchsgeschwindigkeit 169.
 Verträglichkeitsbedingungen 43ff., 244, 331, 332.
 Verzerrung s. Verformung, Deformation, Verzerrungszustand.
 Verzerrungsenergiefunktion 110.

- Verzerrungsfläche** 32, 34, 39ff., 41, 43.
Verzerrungskomponenten 14ff., 29, 30.
Verzerrungszustand 14, 15, 35, 37, 42.
Verzweigungslage s. Gleichgewicht.
Virtuelle Arbeit 111, 113, 117, s. a. Form-
 änderungsarbeit.
Virtuelles Arbeitsprinzip 110ff., 376ff., 397,
 399.
 — — bei virtuellem Spannungszustand
 115ff.
 — — bei virtuellem Verformungszustand
 112ff.
Völligkeitsgrad 231.
Werkstoff s. Material.
Wertziffer 230.
- Widerstandsfähigkeit** 23, 25, 179.
Widerstandsmoment 240ff., 307.
 — veränderliches 279.
Wöhlersches Gesetz 172, 419.
Youngscher Modul 76.
- Zug** s. Beanspruchung auf Zug.
Zugfestigkeit s. Festigkeit.
Zugversuch 228ff.
Zugwiderstand, gleicher 282ff.
Zustand, jungfräulicher 137, 168.
 — natürlicher 25, 87.
Zwang 26.
Zylinderkoordinaten 90.
-

Handbuch des Materialprüfungswesens für Maschinen- und Bauingenieure. Von Professor Dipl.-Ing. **Otto Wawrziniok**, Dresden. Zweite, vermehrte und vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 641 Textabbildungen. XX, 700 Seiten. 1923. Gebunden RM 26.—

Die Dauerprüfung der Werkstoffe hinsichtlich ihrer Schwingungsfestigkeit und Dämpfungsfähigkeit. Von Professor Dr.-Ing. **O. Föppl**, Vorstand des Wöhler-Institutes Technische Hochschule Braunschweig, Dr.-Ing. **E. Becker**, Ludwigshafen, Dipl.-Ing. **G. v. Heydekampf**, Braunschweig. Mit 103 Abbildungen im Text. V, 124 Seiten. 1929. RM 9.50; gebunden RM 10.75

Die Dauerfestigkeit der Werkstoffe und der Konstruktionselemente. Elastizität und Festigkeit von Stahl, Stahlguß, Gußeisen, Nichteisenmetall, Stein, Beton, Holz und Glas bei oftmaliger Belastung und Entlastung sowie bei ruhender Belastung. Von **Otto Graf**. Mit 166 Abbildungen im Text. VIII, 131 Seiten. 1929. RM 14.—; gebunden RM 15.50

Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Von Professor Dr.-Ing. **A. Nádai**, Göttingen. Mit 298 Textabbildungen. VIII, 171 Seiten. 1927. RM 15.—; gebunden RM 16.50

Die Statik des ebenen Tragwerkes. Von Professor **Martin Grüning**, Hannover. Mit 434 Textabbildungen. VII, 706 Seiten. 1925. Gebunden RM 45.—

Elastizität und Festigkeit. Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmäßige Grundlage. Von Professor Dr.-Ing. **C. Bach** und Professor **R. Baumann**, Stuttgart. Neunte, vermehrte Auflage. Mit in den Text gedruckten Abbildungen, 2 Buchdrucktafeln und 25 Tafeln in Lichtdruck. XXVIII, 687 Seiten. 1924. Gebunden RM 24.—

Festigkeitseigenschaften und Gefügebilder der Konstruktionsmaterialien. Von Professor Dr.-Ing. **C. Bach** und Professor **R. Baumann**, Stuttgart. Zweite, stark vermehrte Auflage. Mit 936 Figuren. IV, 190 Seiten. 1921. Gebunden RM 18.—

Festigkeitslehre. Von **George Fillmore Swain**, Professor an der Harvard Universität, New York. Autorisierte Übersetzung von Dr.-Ing. **A. Mehmel**, Hannover. Mit 463 Textabbildungen. XVIII, 630 Seiten. 1928. Gebunden RM 34.—

Festigkeitslehre. Von **S. Timoshenko**, Professor der Mechanik an der Universität Michigan, Ann Arbor; vorm. an den Technischen Hochschulen Kiew und Petersburg, und **I. M. Lessells**, Maschinen-Ingenieur der Research Dept. Westinghouse Electric and Mfg. Co. Ins Deutsche übertragen von Dr. **I. Malkin**, Ingenieur. Mit 391 Abbildungen im Text. XVIII, 484 Seiten. 1928. Gebunden RM 28.—

Elastizitäts- und Festigkeitslehre. 566 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Vierte, vollständig umgearbeitete Auflage, herausgeben von Professor Dr.-Ing. **Theodor Pöschl**, Karlsruhe. (Band II der „Aufgaben aus der Technischen Mechanik“. Von Professor Ferd. Wittenbauer †, Graz.) Mit 498 Textabbildungen. VIII, 318 Seiten. 1931. RM 12.60; gebunden RM 14.—

Autenrieth-Ensslin, Technische Mechanik. Ein Lehrbuch der Statik und Dynamik für Ingenieure. Neu bearbeitet von Dr.-Ing. **Max Ensslin**, Eßlingen. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 295 Textabbildungen. XVI, 564 Seiten. 1922. Gebunden RM 15.—

Lehrbuch der technischen Mechanik für Ingenieure und Physiker. Zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbststudium. Von Professor Dr.-Ing. **Theodor Pöschl**, Karlsruhe. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 249 Textabbildungen. VIII, 318 Seiten. 1930. RM 17.50; gebunden RM 19.—

Lehrbuch der Technischen Mechanik starrer Systeme. Zum Vorlesungsgebrauch und zum Selbststudium. Von Professor Dr. **Karl Wolf**, Wien. Mit 250 Textabbildungen. IX, 359 Seiten. 1931. Gebunden RM 19.—

Ingenieur-Mechanik. Lehrbuch der technischen Mechanik in vorwiegend graphischer Behandlung. Von Professor Dr.-Ing. Dr. phil. **Heinz Egerer**, Diplom-Ingenieur. Erster Band: **Graphische Statik starrer Körper.** Mit 624 Textabbildungen sowie 238 Beispielen und 145 vollständig gelösten Aufgaben. VIII, 380 Seiten. 1919. Unveränderter Neudruck 1923. Gebunden RM 11.—

Leitfaden der Mechanik für Maschinenbauer. Mit zahlreichen Beispielen für den Selbstunterricht. Von Professor Dr.-Ing. **Karl Laudien**. Erstes Heft: **Statik und Dynamik.** Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 246 Textabbildungen. VI, 179 Seiten. 1927. RM 5.50

Theoretische Mechanik. Eine einleitende Abhandlung über die Prinzipien der Mechanik. Mit erläuternden Beispielen und zahlreichen Übungsaufgaben. Von Professor **A. E. H. Love**, Oxford. Autorisierte deutsche Übersetzung der zweiten Auflage von Dr.-Ing. **Hans Polster**. Mit 88 Textfiguren. XIV, 424 Seiten. 1920. RM 12.—; gebunden RM 14.—

Hundert Versuche aus der Mechanik. Von Professor **Georg v. Hanffstengel**, Charlottenburg. Mit 100 Abbildungen im Text. V, 49 Seiten. 1925. RM 3.30

Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern und ihre praktischen Anwendungen. Von Privatdozent Dr.-Ing. **Th. Wyss**, Danzig. Mit 432 Abbildungen im Text und auf 35 Tafeln. IX, 368 Seiten. 1926. Gebunden RM 25.50