

DIE GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN IN EINZELDARSTELLUNGEN  
BAND XLVI

R. NEVANLINNA  
EINDEUTIGE  
ANALYTISCHE FUNKTIONEN

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

DIE GRUNDLEHREN DER  
MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER  
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE · F. K. SCHMIDT · B. L. VAN DER WAERDEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT

BAND XLVI

EINDEUTIGE

ANALYTISCHE FUNKTIONEN

VON

ROLF NEVANLINNA



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1936

# EINDEUTIGE ANALYTISCHE FUNKTIONEN

VON

DR. ROLF NEVANLINNA

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT HELSINKI

MIT 24 ABBILDUNGEN



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1936

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG  
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.

**COPYRIGHT 1936 BY Springer-Verlag Berlin Heidelberg**  
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1936

ISBN 978-3-662-41664-8  
DOI 10.1007/978-3-662-41799-7

ISBN 978-3-662-41799-7 (eBook)

## Vorwort.

In den wenigen Jahren, die seit dem Erscheinen meiner zusammenfassenden Darstellung der neueren Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen (Gauthier-Villars, Paris 1929) verflossen sind, hat sich die Lehre von der Wertverteilung der analytischen Funktionen durch die Arbeiten verschiedener Forscher wesentlich weiter entwickelt. Die Forschungen auf diesem funktionentheoretischen Gebiete sind keineswegs zu einem Abschluß gebracht; die erzielten Fortschritte haben im Gegenteil den Weg zu neuen ungelösten Fragen angebahnt. Andererseits findet man unter den neueren Ergebnissen eine Menge von solchen, die definitiven Charakters sind und die zu einer größeren Einheitlichkeit in verschiedenen funktionentheoretischen Gebieten beigetragen haben. Eine Darstellung der Hauptzüge der Theorie in dieser Sammlung erscheint deshalb berechtigt.

Bei der Darstellung einer Lehre, die sich in steter Entwicklung befindet, bietet eine zweckmäßige Abgrenzung gewisse Schwierigkeiten. Einige Bemerkungen über die Gesichtspunkte, welche bei der Auswahl des Stoffes bestimmend gewesen sind, findet der Leser in der nachstehenden Einleitung. Der Verfasser hat insofern Vollständigkeit angestrebt, als die zur Anwendung kommenden Hilfsmittel, welche außerhalb der Elemente der Funktionen- und Potentialtheorie, der nichteuklidischen Geometrie oder der Topologie liegen, soweit als möglich begründet werden. In vielen Fällen gelang dies im Zusammenhang mit der Darstellung gewisser allgemeiner Prinzipien, die wegen ihrer Bedeutung für verschiedene Fragen der Wertverteilung vollständig dargestellt werden. Eine Ausnahme bilden die fundamentalen Existenzsätze der Theorie der konformen Abbildung, sowie die klassischen Sätze über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung schlichter Gebiete; diese Sätze mußten als bekannt vorausgesetzt werden. Überhaupt hätte eine systematische Darstellung der Lehre von der Uniformisierung, von den automorphen Funktionen und den diesen Funktionen zugeordneten, regulär verzweigten RIEMANNSchen Flächen der vorliegenden Arbeit, die sich zum ganz wesentlichen Teil mit gewissen höheren Stufen jenes Lehrgebäudes beschäftigt, vorausgehen müssen.

Herrn Professor Dr. R. COURANT, der mich zur Veröffentlichung dieser Darstellung aufgefordert und meine Arbeit mit freundlichem Interesse verfolgt hat, spreche ich hiermit meinen aufrichtigen Dank aus. Mein Dank gilt auch der Verlagsbuchhandlung, die meinen Wünschen mit Bereitwilligkeit entgegengekommen ist und die mit Präzision und Schnelligkeit für die technische Herstellung der Arbeit Sorge getragen hat.

Herrn Professor Dr. L. AHLFORS bin ich für seinen wertvollen Beistand bei der Abfassung des XII. Abschnittes zu Dank verpflichtet. Verschiedene wichtige sachliche Bemerkungen verdanke ich Herrn Dr. E. ULLRICH, der mir auch beim Lesen der Korrektur behilflich gewesen ist.

Helsinki, im März 1936.

**ROLF NEVANLINNA.**

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	1
<b>I. Konforme Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Gebiete.</b>	<b>4</b>
§ 1. Konforme Abbildung durch lineare Transformationen . . . . .	4
§ 2. Hauptsatz der konformen Abbildung. Abbildung der universellen Überlagerungsfläche eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes	8
§ 3. Fall der $p$ -fach punktierten Ebene . . . . .	14
§ 4. Der allgemeine Fall eines $p$ -fach zusammenhängenden Gebietes .	20
<b>II. Lösung des DIRICHLETSchen Problems für ein schlichtes Gebiet . . .</b>	<b>21</b>
§ 1. Das POISSONSche Integral . . . . .	21
§ 2. Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe . . . . .	23
§ 3. Integraldarstellung der Lösung der Randwertaufgabe mittels des harmonischen Maßes . . . . .	26
§ 4. GREENSche Funktion und harmonisches Maß . . . . .	28
§ 5. Über die Niveaulinien des harmonischen Maßes . . . . .	33
<b>III. Prinzip über das harmonische Maß und seine Anwendungen . . . . .</b>	<b>37</b>
§ 1. Aufstellung und Begründung des Prinzips . . . . .	37
§ 2. Anwendungen auf den absoluten Betrag einer analytischen Funktion	41
§ 3. Prinzip vom hyperbolischen Maß . . . . .	45
§ 4. Sätze über Kreisgebiete . . . . .	51
§ 5. Sätze von LANDAU und SCHOTTKY . . . . .	55
§ 6. Anwendungen zur Untersuchung der Grenz- und Häufungswerte beschränkter Funktionen . . . . .	58
<b>IV. Beziehungen zwischen nichteuklidischen und euklidischen Maßbestimmungen . . . . .</b>	<b>62</b>
§ 1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	62
§ 2. CARLEMANS Prinzip der Gebietserweiterung . . . . .	63
§ 3. Abschätzung des hyperbolischen Maßes durch Gebietserweiterung	80
§ 4. Verzerrungssätze von AHLFORS . . . . .	87
§ 5. Das Problem von CARLEMAN-MILLOUX . . . . .	94
<b>V. Punktmengen vom harmonischen Maß Null . . . . .</b>	<b>106</b>
§ 1. Definition der Punktmengen vom harmonischen Maß Null . . . . .	106
§ 2. Punktmengen von der Kapazität Null . . . . .	114
§ 3. GREENSche Funktion und logarithmisches Potential . . . . .	122
§ 4. Verhalten einer analytischen Funktion in der Umgebung einer Punktmenge vom harmonischen Maß Null . . . . .	130
§ 5. Hilfssätze über additive Mengenfunktionen . . . . .	136
§ 6. Metrische Eigenschaften einer Punktmenge vom harmonischen Maß Null . . . . .	142
<b>VI. Erster Hauptsatz der Theorie der meromorphen Funktionen . . . . .</b>	<b>153</b>
§ 1. POISSON-JENSENSche Formel . . . . .	153
§ 2. Die charakteristische Funktion . . . . .	156
§ 3. Geometrische Deutung der charakteristischen Funktion . . . . .	163
§ 4. Verallgemeinerungen . . . . .	169

	Seite
<b>VII. Beschränktartige Funktionen</b> . . . . .	174
§ 1. Quotientendarstellung einer Funktion von beschränkter Charakteristik . . . . .	174
§ 2. POISSON-STIELTJESSche Integraldarstellung einer beschränktartigen Funktion . . . . .	180
§ 3. Satz von FATOU . . . . .	190
§ 4. Über die Randwertmenge einer beschränktartigen Funktion . . . . .	197
§ 5. Anwendung auf die konforme Abbildung der universellen Überlagerungsfläche eines schlichten Gebietes . . . . .	201
<b>VIII. Meromorphe Funktionen endlicher Ordnung</b> . . . . .	206
§ 1. Ordnung einer meromorphen Funktion . . . . .	206
§ 2. Kanonische Darstellung einer meromorphen Funktion endlicher Ordnung . . . . .	211
§ 3. Einige Eigenschaften der kanonischen Produkte . . . . .	214
§ 4. Das Geschlecht einer meromorphen Funktion . . . . .	222
<b>IX. Zweiter Hauptsatz der Theorie der meromorphen Funktionen</b> . . . . .	226
§ 1. Einleitende Bemerkungen . . . . .	226
§ 2. Die Fundamentalbeziehung . . . . .	233
§ 3. Hilfssatz über die logarithmische Ableitung. Zweiter Hauptsatz . . . . .	237
§ 4. Direkter Beweis des zweiten Hauptsatzes mit Hilfe der Fundamentalbeziehung . . . . .	242
<b>X. Anwendungen des zweiten Hauptsatzes</b> . . . . .	249
§ 1. Der Satz von PICARD-BOREL . . . . .	249
§ 2. Die Defektrelationen . . . . .	254
§ 3. Sätze über verzweigte Werte . . . . .	265
<b>XI. Die RIEMANNSche Fläche einer einwertigen Funktion</b> . . . . .	269
§ 1. Über die Singularitäten einwertiger Funktionen . . . . .	269
§ 2. RIEMANNSche Flächen, deren Windungspunkte über endlich vielen Punkten liegen . . . . .	278
§ 3. RIEMANNSche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten . . . . .	287
§ 4. Über den Zusammenhang zwischen der Ordnung einer meromorphen Funktion und der kritischen Stellen der Umkehrfunktion . . . . .	292
<b>XII. Der Typus einer RIEMANNSchen Fläche</b> . . . . .	296
§ 1. Verzweigtheit einer RIEMANNSchen Fläche . . . . .	296
§ 2. Defektrelationen und Verzweigtheit . . . . .	301
§ 3. Hinreichende Bedingungen für den parabolischen Fall . . . . .	305
<b>XIII. Die AHLFORSSche Theorie der Überlagerungsflächen</b> . . . . .	312
§ 1. Topologische Grundbegriffe . . . . .	312
§ 2. Einführung einer Metrik . . . . .	315
§ 3. Metrische Eigenschaften der Überlagerungsflächen . . . . .	318
§ 4. Hauptsatz über endliche Überlagerungsflächen . . . . .	323
§ 5. Umkehrung des Hauptsatzes . . . . .	330
§ 6. Sätze über regulär ausschöpfbare offene Überlagerungsflächen . . . . .	331
§ 7. Anwendungen auf die konforme Abbildung einfach zusammenhängender RIEMANNScher Flächen . . . . .	338
§ 8. Erweiterungen auf Abbildungen von beschränkter Exzentrizität . . . . .	343
<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	346
<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	351



## Einleitung.

Die eindeutigen analytischen Funktionen können von verschiedenen Gesichtspunkten aus untersucht werden. Die in der vorliegenden Arbeit zur Darstellung gelangenden Fragen gruppieren sich um ein großes Hauptproblem. Einige allgemeine Bemerkungen über diese zentrale Fragestellung sollen hier vorausgeschickt werden.

Wir denken uns ein gegebenes analytisches Funktionselement unbeschränkt fortgesetzt. Angenommen, daß die so entstehende analytische Funktion  $w = w(z)$  eindeutig ist, existiert ein schlichtes Gebiet  $G_z$  mit nachstehenden Eigenschaften.

1. Jedem inneren Punkt  $z$  von  $G_z$  entspricht ein und nur ein Element von rationalem Charakter der Funktion  $w(z)$ .

2. Jeder Randpunkt  $z^*$  von  $G_z$  ist eine wesentliche Singularität von  $w(z)$ .

Falls  $G_z$  die ganze geschlossene Ebene umfaßt (elliptischer Fall), so ist  $w(z)$  eine rationale Funktion. Schließt man diesen einfachsten Sonderfall aus, so hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem  $G_z$  einfach oder mehrfach zusammenhängend ist. Wir beschränken uns auf den erstgenannten Fall und haben dann weitere zwei Möglichkeiten zu berücksichtigen: die Berandung  $\Gamma_z$  von  $G_z$  ist entweder ein Punkt (parabolischer Fall) oder ein Kontinuum (hyperbolischer Fall).

Das Gebiet  $G_z$  wird durch die Funktion  $w = w(z)$  auf eine über der  $w$ -Ebene ausgebreitete RIEMANNSCHE Fläche  $G_w$  konform abgebildet. Die Umkehrfunktion  $z = z(w)$  von  $w(z)$  ist eine auf dieser Fläche  $G_w$  eindeutige und wegen der Eindeutigkeit von  $w(z)$  *einwertige* Funktion, d. h. den Mittelpunkten von zwei verschiedenen Elementen von  $z(w)$  sind stets zwei verschiedene Punkte  $z$  zugeordnet.

Umgekehrt gilt nach dem Hauptsatz der Theorie der konformen Abbildung, daß eine beliebige, über der  $w$ -Ebene liegende, einfach zusammenhängende RIEMANNSCHE Fläche stets auf eins der folgenden drei schlichten Normalgebiete  $G_z$  eineindeutig und konform bezogen werden kann: 1. die Vollebene (elliptischer Fall); 2. die punktierte Ebene (parabolischer Fall); 3. den Einheitskreis oder, allgemeiner, ein beliebiges, von einem Randkontinuum  $\Gamma_z$  begrenztes Gebiet (hyperbolischer Fall).

Die Wertverteilungslehre der eindeutigen analytischen Funktionen beschäftigt sich mit der Untersuchung des Systems  $(z_n)$  derjenigen

Punkte in  $G_z$ , wo die Funktion  $w(z)$  einen vorgegebenen Wert  $w = a$  annimmt; sämtliche Werte  $a$  werden hierbei in Betracht gezogen. Das klassische Resultat auf diesem Gebiet ist der berühmte Satz von PICARD, nach welchem eine in der punktierten Ebene meromorphe, transzendente Funktion sämtliche Werte  $a$ , mit Ausnahme von höchstens zwei Werten, unendlich oft annimmt. Hieran schloß sich die Wertverteilungslehre von HADAMARD, BOREL, JULIA u. a. Bei diesen weitgehenden Verallgemeinerungen und Verfeinerungen des PICARDSchen Satzes spielten die Gesichtspunkte der konformen Abbildung eine untergeordnete Rolle. Aufstellung und Behandlung der Probleme geschah ohne Rücksicht auf die RIEMANNSche Fläche  $G_w$ , auf welche die meromorphe Funktion die punktierte Ebene  $G_z$  abbildet. Umgekehrt hatten die ersten Untersuchungen über die RIEMANNSche Fläche einer ganzen oder meromorphen Funktion (HURWITZ, BOUTROUX, IVERSEN, GROSS u. a.) nur wenige Berührungspunkte mit den Ergebnissen der Wertverteilungslehre.

Die Begründung der neueren Theorie der meromorphen Funktionen hat eine Brücke zwischen den beiden Forschungsrichtungen geschlagen. An Stelle der WEIERSTRASSschen kanonischen Darstellung einer ganzen oder meromorphen Funktion treten funktionen- und potentialtheoretische Hilfsmittel von größerer Tragweite. Auf der neuen Grundlage läßt sich die HADAMARD-BORELSche Theorie einfach darstellen und verschärfen. Allein der wichtigste Fortschritt besteht darin, daß die neuen analytischen Begriffsbildungen zugleich eine geometrische Bedeutung besitzen. Die Fundamentalgrößen (Charakteristik, Defekte, Verzweigungsindizes) setzen das asymptotische Verhalten einer eindeutigen analytischen Funktion  $w(z)$  in Beziehung zu den Eigenschaften der RIEMANNSchen Fläche  $G_w$ , auf welche das schlichte Existenzgebiet  $G_z$  konform abgebildet wird. Der PICARDSche Satz und seine Verallgemeinerungen können auf diese Weise als Aussagen über den Verzweigungscharakter der Überlagerungsfläche  $G_w$  aufgefaßt werden. Diese neue Wendung verlegt den Schwerpunkt der Wertverteilungslehre auf die Untersuchung der Verzerrung der Abbildung  $G_z \rightarrow G_w$  im Innern und vor allem in der Umgebung der Ränder dieser Flächen; es handelt sich also um eine weitgehende Verallgemeinerung der klassischen Sätze über die Verzerrung und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung von schlichten Gebieten.

Die Wertverteilungslehre ordnet sich so in die allgemeine Theorie der konformen Abbildung ein. Als zentrale Frage jener Lehre erscheint nach dieser Auffassung das *Typenproblem*, eine interessante und komplizierte Aufgabe, welche von der klassischen Uniformisierungstheorie offen gelassen wird. Auf Grund der topologisch-metrischen Eigenschaften einer offenen Überlagerungsfläche gilt es zu entscheiden, ob der parabolische oder der hyperbolische Fall vorliegt, d. h. ob die Fläche auf die punktierte Ebene oder auf das Innere des Einheitskreises konform abbildbar ist.

Diejenigen Erweiterungen des PICARDSchen Satzes, welche man unter dem Namen „Defektrelationen“ zusammenzufassen pflegt, enthalten notwendige Kriterien für den Grenzpunktfall. Obwohl auch verschiedene hinreichende Bedingungen bekannt sind, ist man selbst bei relativ einfachen Klassen von RIEMANNSchen Flächen noch nicht im Besitz einer vollständigen Lösung der Typenfrage.

Unter den RIEMANNSchen Flächen vom parabolischen Typus zeichnen sich speziell diejenigen durch einfache Verzweigungseigenschaften aus, welchen eine meromorphe Abbildungsfunktion  $w(z)$  von endlicher Ordnung entspricht. Zu diesen gehören u. a. die Flächen mit endlich vielen Windungspunkten.

Auch unter den Grenzkreisflächen sondern sich gewisse bemerkenswerte Flächenklassen aus. Es läßt sich für die Charakteristik der Abbildungsfunktion eine kritische Wachstumsordnung angeben, oberhalb welcher die Sätze von PICARD und sämtliche Defektrelationen noch gelten. Mit abnehmender Wachstumsordnung der Charakteristik nimmt die Mächtigkeit der Verzweigkeit der RIEMANNSchen Fläche zu. Eine wohlabgegrenzte Klasse bilden schließlich die *beschränktartigen* Flächen, denen eine beschränkte Charakteristik entspricht. Um den Umfang der Singularitäten einer beschränktartigen Fläche genau beschreiben zu können, muß der Begriff einer Punktmenge von der Kapazität Null herangezogen werden. Diese Punktmenge spielen auch bei anderen Fragen der Wertverteilungslehre eine wichtige Rolle. In unserer Darstellung wird der Kapazitätsbegriff in die Theorie des sog. harmonischen Maßes eingeordnet. Durch die Einführung und systematische Benutzung dieses eindeutigen konformen Abbildungen gegenüber invarianten Maßes wird es möglich, verschiedene mit der Wertverteilungslehre nahe zusammenhängende Sonderfragen einheitlich und übersichtlich zu behandeln.

# I. Konforme Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Gebiete.

## §1. Konforme Abbildung durch lineare Transformationen.

1. Die Gruppe der eindeutigen und konformen Abbildungen der Vollebene auf sich selbst wird analytisch durch die Gesamtheit der linear gebrochenen Transformationen

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (1)$$

bestimmt. Jede lineare Transformation vermittelt eine solche Abbildung, und umgekehrt reduziert sich jede Transformation  $t(z)$ , welche eine derartige Abbildung vollzieht, auf die Form (1); denn  $t(z)$  ist dann regulär in jedem Punkt der  $z$ -Vollebene, mit Ausnahme eines einzigen Punktes  $z_0$ , welcher dem Wert  $t = \infty$  zugeordnet ist; als einzige Singularität hat  $t(z)$  somit einen Pol erster Ordnung, woraus nach einem elementaren funktionentheoretischen Satz folgt, daß sie eine rationale Funktion erster Ordnung ist.

2. Geht man mittels stereographischer Projektion von der  $z$ -Ebene zur RIEMANNschen Kugel über, die mit dem Durchmesser 1 die Ebene im Anfangspunkt berührt, so erhält man aus (1) die Gesamtheit der konformen Abbildungen der Kugel auf sich selbst. Unter diesen Abbildungen verdient die Gruppe der Drehungen der Kugel besondere Beachtung. Die allgemeine Form einer Drehungstransformation, welche die Punkte  $z$  und  $\zeta$ , sowie  $z = a$  und  $\zeta = b$  einander zuordnet, ist

$$\frac{z - a}{1 + \bar{a}z} = e^{i\alpha} \frac{\zeta - b}{1 + \bar{b}\zeta}, \quad (2)$$

wo der Querstrich den Übergang zu der konjugiert komplexen Größe angibt und  $\alpha$  ein reeller Parameter ist.

Durch den Grenzübergang  $z \rightarrow a$ ,  $\zeta \rightarrow b$  ergibt sich

$$\frac{|dz|}{1 + |z|^2} = \frac{|d\zeta|}{1 + |\zeta|^2},$$

woraus zu sehen ist, daß sich der Ausdruck

$$d\sigma = \frac{ds}{1 + r^2}, \quad (2')$$

wo  $ds$  die euklidische Länge und  $r$  der Nullpunktsabstand eines Bogenelementes der  $z$ -Ebene ist, gegenüber einer Kugeldrehungstransformation invariant verhält. Dies wird geometrisch dadurch erklärt, daß der

Ausdruck (2') die *sphärische Länge* des betrachteten Bogenelementes darstellt. Die geodätischen Linien sind in der durch (2') definierten Maßbestimmung diejenigen Kreise der  $z$ -Ebene, welche den größten Kreisen der Kugel entsprechen; sie sind durch die Eigenschaft charakterisiert, den Einheitskreis  $|z| = 1$  in zwei diametralen Punkten zu schneiden.

Für spätere Anwendungen soll noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß der Logarithmus des Verhältnisses zwischen dem sphärischen und dem euklidischen Bogenelement

$$u(z) = \log \frac{d\sigma}{ds} = \log \frac{1}{1+r^2}$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u = -4e^{2u} \quad (2'')$$

genügt, wo  $\Delta$  der LAPLACESCHE Operator ist.

3. Außer den Kugeldrehungen verdient die Gruppe derjenigen linearen Transformationen besondere Aufmerksamkeit, welche das Innere (und somit auch das Äußere) des Einheitskreises in sich überführen. Die allgemeine Form einer solchen Transformation, welche die Punkte  $z = a$  und  $\zeta = b$  einander zuordnet ( $|a| < 1$ ,  $|b| < 1$ ), ist

$$\frac{z-a}{1-\bar{a}z} = e^{i\alpha} \frac{\zeta-b}{1-\bar{b}\zeta}. \quad (3)$$

Umgekehrt gilt, daß jede eineindeutige und konforme Abbildung  $\zeta = \zeta(z)$  des Einheitskreises auf sich selbst von einer linearen Transformation der Gruppe (3) beider Variablen  $z$  und  $\zeta$  bewirkt man nämlich zunächst, daß die Abbildung die Nullpunkte  $z=0$ ,  $\zeta=0$  einander zuordnet. Auf dem Kreis  $|z|=r$  ( $0 < r < 1$ ) liegt der Wert der für  $|z| < 1$  regulären Funktion  $\frac{\zeta}{z}$  dem absoluten Betrag nach unter  $\frac{1}{r}$ , und dasselbe gilt somit nach dem Prinzip des Maximums für  $|z| \leq r$ . Für  $r \rightarrow 1$  ergibt sich hieraus, daß  $|\zeta| \leq |z|$  für jedes  $|z| < 1$ . Vertauscht man den Platz der Variablen, so ergibt sich auch  $|z| \leq |\zeta|$  und also notwendigerweise  $|\zeta| = |z|$ , woraus  $\zeta = e^{i\varphi} z$  folgt. Da man mittels linearer Transformation von hier aus zu den ursprünglichen Veränderlichen gelangt, so folgt, daß auch diese durch eine lineare Substitution miteinander verbunden sind.

Setzt man in (3)  $z = a$ ,  $\zeta = b$ , so folgt wie in Nr. 2 die Invarianz des Differentialausdruckes

$$d\sigma = \frac{ds}{1-r^2} \quad (3')$$

gegenüber der Transformationsgruppe (3). Deutet man diesen Ausdruck als die Länge des betrachteten Bogenelementes, so gelangt man, wie zuerst von POINCARÉ [1] gezeigt wurde, zu einer Metrik, die innerhalb

$|z| < 1$  den Regeln der hyperbolischen (BOLYAI-LOBATSCHESKYSCHEN) Geometrie gehorcht; dabei wird die Rolle der kürzesten Linien von denjenigen Kreisbogen übernommen, welche den Grenzkreis  $|z| = 1$ , der das „unendlich Ferne“ darstellt, orthogonal schneiden<sup>1</sup>. Man rechnet leicht nach, daß das Verhältnis der nichteuklidischen und der euklidischen Bogenelemente einer der in Nr. 2 besprochenen verwandten Differentialgleichung genügt. Setzt man nämlich  $u = \log \frac{d\sigma}{ds}$ , so wird nach (3')

$$\Delta u = 4 e^{2u}. \tag{3''}$$

4. Zu einer anderen wichtigen Invariante gelangt man, wenn man die Beziehung (3) logarithmisch differenziert. Es wird

$$\frac{1 - |a|^2}{(z - a) \left( \frac{1}{z} - a \right)} \frac{dz}{z} = \frac{1 - |b|^2}{(\zeta - b) \left( \frac{1}{\zeta} - b \right)} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

und läßt man hier  $z$  gegen einen Peripheriepunkt  $e^{i\varphi}$  rücken, wobei  $\zeta$  gegen den zugeordneten Peripheriepunkt  $e^{i\theta}$  strebt und der Differentialquotient  $\frac{d \log z}{d \log \zeta}$  gegen  $\frac{d\varphi}{d\theta}$  konvergiert, so folgt

$$\frac{1 - |a|^2}{|e^{i\varphi} - a|^2} d\varphi = \frac{1 - |b|^2}{|e^{i\theta} - b|^2} d\theta.$$

Der Differentialausdruck

$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} d\theta$$

behält also seinen Wert, wenn man die Punkte  $z = r e^{i\varphi}$  und  $w = e^{i\theta}$  gleichzeitig einer Substitution der Gruppe (3) unterwirft.

Der Ausdruck

$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} = \frac{1 - |z|^2}{|w - z|^2},$$

der als Realteil der Funktion

$$\frac{w + z}{w - z}$$

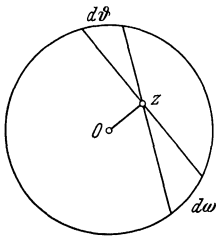


Abb. 1.

eine harmonische Funktion des Aufpunktes  $z$  darstellt, gestattet eine einfache, zuerst von SCHWARZ [I] angegebene geometrische Deutung. Nach einem elementargeometrischen Satz ist nämlich

$$1 - |z|^2 = |w - z| |w' - z|,$$

wo  $w'$  der zweite Endpunkt der von den Punkten  $w$  und  $z$  bestimmten Sehne des Einheitskreises ist (s. Abb. 1); und da ferner

$$\frac{d\theta}{|w - z|} = \frac{d\omega}{|w' - z|},$$

<sup>1</sup> Für den kürzesten „Abstand“ zwischen den Punkten 0 und  $z$  findet man den Wert  $\frac{1}{2} \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$ .

wo  $d\omega$  das von  $w'$  bei einer infinitesimalen Drehung der Sehne um den Aufpunkt  $z$  beschriebene Bogenelement ist, so ergibt sich schließlich die einfache Beziehung

$$\frac{d\omega}{d\vartheta} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}.$$

Als Niveaulinien dieses Ausdruckes hat man die Schar derjenigen Kreise, welche den Einheitskreis im Punkte  $e^{i\vartheta}$  berühren; nichteuklidisch gedeutet, stellen sie Orizykeln oder Grenzlinien dar, welche die Schar der gegen den „unendlich fernen“ Punkt  $e^{i\vartheta}$  gerichteten parallelen „Geraden“ (Orthogonalkreise von  $|z|=1$ ) senkrecht schneiden.

5. Wegen der Invarianz des Differentials  $d\omega$  ist auch das zwischen zwei beliebigen Grenzen  $\vartheta_1, \vartheta_2$  ( $0 \leq \vartheta_2 - \vartheta_1 \leq 2\pi$ ) genommene Integral

$$\omega(z; \vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta$$

invariant gegenüber der Transformationsgruppe (3); d. h. übt man auf die drei Punkte  $z = re^{i\varphi}$  ( $0 \leq r < 1$ ),  $e^{i\vartheta_1}$ ,  $e^{i\vartheta_2}$  eine und dieselbe beliebige Transformation der Gruppe aus, und werden hierbei diese Punkte in  $z'$ ,  $e^{i\vartheta'_1}$ ,  $e^{i\vartheta'_2}$  transformiert, so gilt

$$\omega(z; \vartheta_1, \vartheta_2) = \omega(z'; \vartheta'_1, \vartheta'_2).$$

Nach obigem ist  $\omega(z; \vartheta_1, \vartheta_2)$  gleich der durch  $2\pi$  dividierten Länge des Bogens, der von den einerseits durch  $z$ , andererseits durch  $e^{i\vartheta_1}$  und  $e^{i\vartheta_2}$  bestimmten Sehnen aus der Peripherie des Einheitskreises ausgeschnitten wird. Ist  $\alpha$  der von diesen Sehnen gebildete Winkel, so ist, wie man unmittelbar einsieht, auch

$$2\pi\omega = 2\alpha - (\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

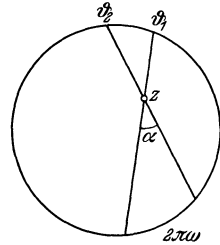


Abb. 2.

Hieraus wird ersichtlich, daß die Größe  $\omega(z; \vartheta_1, \vartheta_2)$  für  $|z| < 1$  zwischen Null und Eins variiert; als Niveaulinien hat sie die Schar der die Punkte  $e^{i\vartheta_1}$ ,  $e^{i\vartheta_2}$  verbindenden Kreisbogen, welche in der POINCARÉschen Deutung die Rolle der Abstandslinien spielen, d. h. derjenigen Linien, welche auf konstantem nichteuklidischen Abstand voneinander laufen. Auf dem Bogen  $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$  nimmt  $\omega$  den Wert Eins, auf dem Komplementärbogen  $\vartheta_2 < \vartheta < \vartheta_1 + 2\pi$  den Wert Null an.

Für  $z=0$  wird  $\omega$  einfach gleich der durch die Länge  $2\pi$  der ganzen Peripherie  $|z|=1$  gemessenen Bogenlänge des gegebenen Bogens ( $\vartheta_1, \vartheta_2$ ). Läßt man nun  $z$  variieren, so kann man den Wert von  $\omega$  als eine verallgemeinerte „Länge“ dieses Bogens auffassen, welche also relativ zu dem innerhalb des Einheitskreises beweglichen Aufpunkt  $z$  gemessen wird. Da  $\omega$  ferner eine harmonische Funktion von  $z$  ist, so nennen wir sie „das harmonische Maß des Bogens ( $\vartheta_1, \vartheta_2$ ) im Punkte  $z$  in bezug auf den Einheitskreis“.

Das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha)$  eines Bogens  $\alpha$  der Peripherie  $|z|=1$  in bezug auf den Einheitskreis hat also nachstehende Eigenschaften:

1.  $\omega(z, \alpha)$  ist für  $|z| < 1$  harmonisch und beschränkt.
2. In jedem inneren Punkt von  $\alpha$  nimmt  $\omega$  den Randwert 1 an; es verschwindet auf dem Komplementärbogen  $\beta$  von  $\alpha$ .

Man sieht unter Anwendung des Prinzips vom Maximum und Minimum einer harmonischen Funktion sofort ein, daß das harmonische Maß durch diese zwei Bedingungen eindeutig bestimmt ist.

6. Die Fixpunkte  $c_1, c_2$  einer Transformation der Gruppe (3) sind entweder zum Einheitskreis spiegelbildlich (elliptischer Fall), oder sie liegen beide auf der Peripherie des Einheitskreises (hyperbolischer Fall), wo sie auch zusammenfallen können (parabolischer Fall). Die Normalformen der entsprechenden Substitutionen sind:

$$\text{elliptisch: } \frac{z - c_1}{z - c_2} = e^{i\vartheta} \frac{\xi - c_1}{\xi - c_2} \quad (|c_1| \neq 1, c_1 \bar{c}_2 = 1, \vartheta \text{ reell});$$

$$\text{hyperbolisch: } \frac{z - c_1}{z - c_2} = \lambda \frac{\xi - c_1}{\xi - c_2} \quad (|c_1| = |c_2| = 1, \lambda > 0);$$

$$\text{parabolisch: } \frac{1}{z - c} = \frac{1}{\xi - c} + i\lambda c \quad (|c| = 1, \lambda \text{ reell}).$$

## § 2. Hauptsatz der konformen Abbildung. Abbildung der universellen Überlagerungsfläche eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes.

7. Über die Abbildung allgemeinerer Gebiete als der in § 1 betrachteten setzen wir vor allem folgenden Abbildungssatz als bekannt voraus.

A. *Jedes einfach zusammenhängende schlichte Gebiet  $G$ , dessen Berandung  $\Gamma$  mehr als einen Punkt enthält, kann auf das Innere des Einheitskreises eineindeutig und konform bezogen werden.*

*Falls  $\Gamma$  einen freien Jordanbogen<sup>1</sup> enthält, so wird diesem eineindeutig und stetig ein Bogen der Kreisperipherie entsprechen.*

Der erste Teil dieses Fundamentalsatzes ist als spezieller Fall im nachstehenden Hauptsatz der konformen Abbildung enthalten.

B. *Jede einfach zusammenhängende RIEMANNsche Fläche  $F$  läßt sich eineindeutig und, bis auf eventuelle innere Windungspunkte endlicher Ordnung, konform auf eines der nachstehenden Normalgebiete abbilden:*

1. Die Vollebene (elliptischer Fall);
2. Die punktierte Ebene (parabolischer Fall);
3. Der Einheitskreis (hyperbolischer Fall).

Die Abbildungsfunktion, welche die Fläche  $F$  auf eines der drei Normalgebiete bezieht, ist bis auf eine eineindeutige und konforme

<sup>1</sup> Als „frei“ bezeichnet man einen solchen zum Rand  $\Gamma$  gehörigen Jordanbogen  $\gamma$ , dessen innere Punkte nicht als Häufungspunkte außerhalb von  $\gamma$  gelegener Randpunkte vorkommen.



gegenseitige Abbildung dieser Normalgebiete eindeutig bestimmt. Nach §1 wird eine solche Abbildung stets von einer linearen Transformation vermittelt. Ein Übergang von einem der drei Normalgebiete zu einem anderen wird hierbei nicht möglich sein: es lassen sich also sämtliche einfach zusammenhängende RIEMANNSche Flächen in drei Typen einteilen, entsprechend den drei Normalgebieten, in die sie konform abbildbar sind.

Unter Beachtung wohlbekannter Eigenschaften linearer Transformationen, welche teilweise auch in §1 besprochen wurden, schließt man, daß die Abbildung eindeutig festgelegt wird, wenn man fordert, daß im Falle 1 drei Paare vorgegebener Punkte, im Falle 2 zwei Paare vorgeschriebener Punkte (falls der einzige Randpunkt des Normalgebietes festgehalten wird) und im Falle 3 ein Paar von Punkten und zwei Richtungen in ihnen einander entsprechen sollen.

Sofern es sich um ein schlichtes, von einer Jordankurve begrenztes Gebiet handelt, läßt sich wegen der Stetigkeit der Abbildung auf den Rändern die Unität der Abbildung auch derart erzielen, daß drei Paare von Randpunkten einander zugeordnet werden.

8. Von dem allgemeinen Uniformisierungssatz  $B$  wird im folgenden nur selten, und wenn, dann immer unter ausdrücklichem Hinweis darauf, Gebrauch gemacht werden. In diesem vorbereitenden Abschnitt werden wir eingehender nur einen speziellen Fall dieses Satzes besprechen, der für das folgende von besonderem Gewicht ist. Es handelt sich um diejenige Klasse RIEMANNScher Flächen, auf welche das Problem der konformen Abbildung *mehrfach* zusammenhängender Gebiete führt.

Ein derartiges Gebiet kann auf *einen Kreis* nicht mehr eineindeutig konform bezogen werden, denn die Zusammenhangszahl ist eine topologische Invariante, die bei einer topologischen, d. h. *stetigen* und *eindeutigen* Abbildung erhalten bleibt. Dagegen kann zwischen diesen Gebieten eine vieldeutige, nämlich eine unendlich-eindeutige konforme Abbildung hergestellt werden. Diese ließe sich durch gewisse charakteristische Eigenschaften der gesuchten analytischen Abbildungsfunktion analytisch präzise definieren. Wir wollen uns indes auf einen allgemeineren Standpunkt stellen, indem wir den topologischen Teil der Abbildungsaufgabe (Forderung der Stetigkeit und der umkehrbaren Eindeutigkeit im Kleinen) von der speziellen Bedingung der Analytizität (Konformität) trennen. Dies geschieht durch die Einführung des Begriffes der *universellen Überlagerungsfläche* des gegebenen mehrfach zusammenhängenden Gebietes folgendermaßen.

9. Wir beschränken uns auf die Betrachtung eines *schlichten Gebietes*  $G$  von *endlicher Zusammenhangszahl*  $p$ . Die Berandung eines solchen Gebietes setzt sich aus  $p$  verschiedenen Kontinuen oder Punkten  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$

zusammen. Wir verbinden die Mengen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  durch einen innerhalb  $G$  verlaufenden Jordanbogen  $q_1$ , und verfahren in gleicher Weise mit  $\gamma_2$  und  $\gamma_3, \dots, \gamma_p$  und  $\gamma_1$ . Das Gebiet  $G$  zerfällt durch die derart gezogenen Querschnitte  $q_1, \dots, q_p$ , welche punktfremd gewählt werden können, in zwei einfach zusammenhängende Gebiete  $G_1$  und  $G_2$ , welche von den Querschnitten  $q_v$  und den  $p$  Randpunktmengen  $\gamma_v$  begrenzt werden.

Um nun zu der universellen Überlagerungsfläche von  $G$  zu gelangen, nehmen wir andererseits ein schlichtes, einfach zusammenhängendes Kurvenpolygon  $G_1^0$ , das von  $p$  Jordanbogen begrenzt ist.  $G_1^0$  könnte ganz beliebig gewählt werden; nur um eine anschauliche und in den folgenden Untersuchungen oft vorkommende wichtige Figur zu erhalten, wollen wir die Seiten des Polygons speziell als einander *berührende Orthogonalkreisbogen* des Einheitskreises wählen, falls  $p > 2$  ist; für  $p = 2$  nehme man das Zweieck  $G_1^0$  als einen *Parallelstreifen* an. Wir vervielfältigen alsdann das Polygon durch einen unbeschränkt fortzusetzenden Spiegelungsprozeß:  $G_1^0$  wird zuerst an jeder seiner  $p$  Seiten gespiegelt; dem aus  $G_1^0$  und den durch die Spiegelung entstandenen  $p$  Polygonen zusammengesetzten Polygon  $F_1$ , dessen Seitenanzahl  $p(p-1)$  beträgt, wird durch wiederholte Spiegelung ein Kranz von  $p(p-1)$  Polygonen angehängt; mit dem in dieser Weise konstruierten Polygon  $F_2$  verfährt man dann in analoger Weise und so weiter in infinitum fort.

Im Falle  $p = 2$  füllt das System der Parallelstreifen  $F_v$  die ganze Ebene aus. Entsprechendes gilt für  $p > 2$ ; da jede Spiegelung den Einheitskreis invariant läßt, so dringen die Polygone allerdings nie ins Äußere dieses Kreises, auf dessen Peripherie sämtliche Polygonspitzen belegen sind; es läßt sich aber andererseits unschwer zeigen, daß das Polygonnetz *schlicht* und *lückenlos* das Innere dieses Kreises ausfüllt, und zwar so, daß jeder Peripheriepunkt als Häufungspunkt der Polygone  $G_1^{2^v}, G_1^{2^v+1}$  erscheint.

Auf die so hergestellte Netzfläche  $F$  wird nun das Gebiet  $G$  durch eine stetige und im kleinen eineindeutige Abbildung folgendermaßen bezogen: Zuerst denken wir uns das Innere des Teilgebiets  $G_1$  von  $G$  auf das Innere eines beliebigen der Gebiete  $G_1^{2^v}$  topologisch und bis auf den Rand stetig abgebildet, so daß sich die inneren Punkte der begrenzenden Querschnitte  $q_v$  und die der Seiten des Polygons eineindeutig entsprechen; außerdem werden den Randpunktmengen  $\gamma_v$  die Spitzen des Polygons zugeordnet (diese letzte Zuordnung ist also nur dann eineindeutig, wenn jede Menge  $\gamma_v$  sich auf einen Punkt reduziert). Durch den oben erklärten unendlichen Spiegelungsprozeß sind andererseits sämtliche Polygone  $G_1^{2^v} (v = 0, 1, \dots)$  aufeinander topologisch (und sogar konform) bezogen, und die Zusammensetzung beider Abbildungen ergibt eine Abbildung des Gebietes  $G_1$  auf sämtliche Gebiete  $G_1^{2^v}$ , so daß jedem Punkt von  $G_1$  eine unendliche Menge *äquivalenter* d. h. durch eine gerade Anzahl aufeinander folgender Spiegelungen verbundener Punkte der

Fläche  $F$  entspricht. In analoger Weise verfahren wir auch mit dem Gebiet  $G_2$ , indem wir es auf ein beliebiges Polygon  $G_2^{2\nu+1}$  topologisch abbilden, wobei die Ränderzuordnung so bewerkstelligt wird, daß die Bildpunkte der Querschnittspunkte  $q_\nu$  stets mit den in den ersteren Abbildungen (von  $G_1$ ) vorkommenden Bildpunkten derselben Punkte zusammenfallen.

Als Ergebnis dieser Konstruktion ist eine stetige, im kleinen umkehrbar eindeutige, im ganzen dagegen unendlich-eindeutige Abbildung zwischen den Inneren der Gebiete  $G$  und  $F$  hervorgegangen. Jedem Punkt von  $G$  entspricht eine unendliche Folge äquivalenter Punkte von  $F$ . Zwei nebeneinander gelegene Polygone  $G_1^{2\nu}$ ,  $G_2^{2\nu+1}$  bilden einen *Fundamentaltbereich* der Fläche; die  $2p-2$  Seiten eines solchen Gebietes sind paarweise äquivalent. Identifiziert man zwei äquivalente Randpunkte, so entsteht ein Gebiet, das als topologisches Abbild des Gebietes  $G$  erscheint. Die äquivalenten Punkte sowie die Fundamentalgebiete sind durch eine *Gruppe von Transformationen* aufeinander bezogen, welche aus einer geraden Anzahl sukzessiver Spiegelungen zusammengesetzt sind und die, wie schon jede einzelne Spiegelung, die Figur  $F$  in sich selbst überführt. Diese *Gruppe der Decktransformationen* kann durch Zusammensetzung von  $p-1$  *Fundamentalsubstitutionen* und deren inversen Substitutionen erzeugt werden, wofür diejenigen Transformationen gewählt werden können, die ein beliebiger Punkt von  $F$  erfährt, wenn man den Bildpunkt in  $G$  einen Umlauf um je eine gewisser  $p-1$  der Randpunktmenge  $\gamma_\nu$  beschreiben läßt; sie können offenbar auch als diejenigen speziellen Decktransformationen definiert werden, welche den  $p-1$  Paaren äquivalenter Seiten eines beliebigen Fundamentalgebietes zugeordnet sind durch die Vorschrift, daß sie je eine Seite in die äquivalente überführen.

Durch die Abbildung von  $G$  auf  $F$  haben wir die universelle Überlagerungsfläche eines  $p$ -fach zusammenhängenden Gebietes eindeutig definiert. Die Fläche  $F$  ist als eine *Darstellung* der Überlagerungsfläche zu betrachten; diese Darstellung ist eine spezielle unter unendlich vielen anderen möglichen. Der Begriff der Überlagerungsfläche ist topologischer Natur: als Repräsentant dafür kann, statt der besonderen Fläche  $F$ , jede Fläche  $F'$  angenommen werden, welche aus der Figur  $F$  durch eine topologische Abbildung hervorgeht. Eine Abbildung des Gebietes  $G$  auf ein Gebiet  $F'$ , welche durch Zusammensetzung der oben definierten Abbildung von  $G$  auf  $F$  mit einer topologischen Abbildung von  $F$  auf  $F'$  entsteht, wollen wir zu der Abbildung  $G \rightarrow F$  *isomorph* nennen. Die universelle Überlagerungsfläche wird durch den Inbegriff dieser isomorphen Abbildungen erklärt.

Unwesentlich vom Standpunkt der Definition der Überlagerungsfläche aus ist also z. B., daß wir im Falle  $p > 2$  diese Fläche durch eine offene *endliche*, im Falle  $p = 2$  dagegen durch eine *unendliche*

Kreisscheibe (punktierte Ebene) dargestellt haben, denn diese Flächen sind aufeinander topologisch abbildbar. Gewöhnlich denkt man sich die Überlagerungsfläche über das betreffende Gebiet  $G$  unendlich vielblättrig ausgebreitet: man gibt sich eine unendliche Folge kongruenter Exemplare der beiden Teilgebiete  $G_1$  und  $G_2$ , mit denen diese überdeckt werden, indem man die einzelnen Exemplare längs der Querschnitte  $q_v$  genau wie die Gebiete  $G_1^{2^v}$  und  $G_2^{2^{v+1}}$  in der Figur  $F$  zusammenheftet. In der so entstandenen mit der Fläche  $F$  topologisch äquivalenten, unendlich vielblättrigen Fläche  $G^\infty$  sind die unendlich vielen, einem gegebenen Punkte von  $G$  zugeordneten äquivalenten Punkte sämtlich über jenem Punkt gelegen, wodurch die Benennung „Überlagerungsfläche“ ihre Erklärung findet. Die Fundamentalbereiche sind hier mit den verschiedenen Blättern von  $G^\infty$  identisch. — Als topologisches Abbild einer Kreisscheibe ist die universelle Überlagerungsfläche eines  $p$ -fach zusammenhängenden Gebietes *einfach zusammenhängend*.

10. Das Wesentliche im Begriffe der universellen Überlagerungsfläche (wie überhaupt in dem Begriffe einer RIEMANNschen Fläche) ist nach obigem die Regel, nach welcher die Fundamentalbereiche („Blätter“) aneinander gefügt sind. Diese Regel, *das Verzweigungsschema der Fläche*, kann analytisch durch die Gruppe der Deckformationen charakterisiert werden; geometrisch läßt sie sich noch einfacher als durch die Figur  $F$  durch folgende, mittels  $F$  herstellbare Konfiguration veranschaulichen<sup>1</sup>.

Man nehme in den Gebieten  $G_1$  und  $G_2$  je einen Punkt,  $P_1$  und  $P_2$ , und verbinde dieselben durch  $p$  Jordanbogen  $l_v (v=1, \dots, p)$ , so daß  $l_v$  nur den Querschnitt  $q_v$  schneidet. Dem Liniensystem  $l_v$  entspricht auf der Fläche eine baumartige Linie, welche in der untenstehenden Abbildung

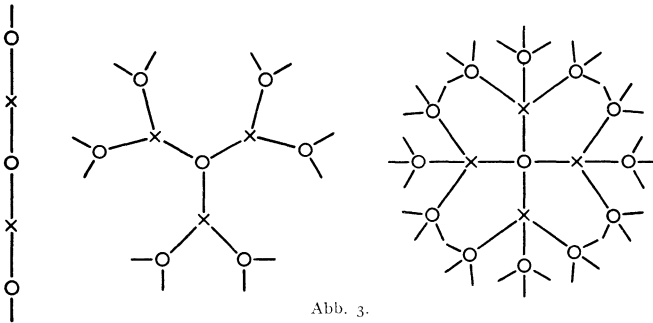


Abb. 3.

für  $p=2, 3, 4$  schematisch gezeichnet ist. Die Kreispunkte (1) und Kreuzpunkte (2) dieses „topologischen Baumes“ sind den Gebieten  $G_1$  und  $G_2$ , die „Glieder“ (12), (21) wiederum den Seiten dieser Gebiete eindeutig zugeordnet. Der topologische Baum läßt sich offenbar umgekehrt zur Herstellung der Figur  $F$  verwenden, woraus hervorgeht,

<sup>1</sup> A. SPEISER [2], R. NEVANLINNA [10].

daß die Überlagerungsfläche durch dieses Schema topologisch vollkommen definiert ist.

11. Nachdem die topologische Seite des Problems durch die obigen Ausführungen vollständig klargelegt worden ist, können wir jetzt, indem wir auch die spezielle Forderung der Konformität berücksichtigen, unsere Abbildungsaufgabe folgendermaßen genau formulieren:

*Es soll eine zu der oben erklärten Zuordnung  $G \rightarrow F$  isomorphe konforme Abbildung von  $G$  auf ein schlichtes Gebiet  $K$  hergestellt werden.*

Indem wir die Gebiete  $G$  und  $K$  in der komplexen  $z$ - bzw.  $x$ -Ebene gelegen denken, nehmen wir an,  $x = x(z)$  sei eine analytische Funktion, welche die gesuchte Abbildung  $G \rightarrow K$  vermittelt. Aus den definierenden Eigenschaften dieser Abbildung schließt man unmittelbar, daß die Abbildungsfunktion nachstehenden Bedingungen genügt:

1.  $x(z)$  ist innerhalb  $G$  unbeschränkt analytisch fortsetzbar;
2.  $x(z)$  ist einwertig, d. h. den Mittelpunkten von zwei verschiedenen Funktionselementen entsprechen stets verschiedene Funktionswerte;
3. Das von den Funktionswerten (zufolge der Einwertigkeit) schlicht überdeckte Wertgebiet  $K$  ist einfach zusammenhängend.

Diese Eigenschaften sind umgekehrt für die abbildende Funktion charakteristisch: nimmt man nämlich an, eine analytische Funktion erfülle die drei obengenannten Bedingungen, so löst sie unsere Abbildungsaufgabe. Um dies einzusehen, zeichne man die Querschnitte  $q_v$  und verfolge, bei Berücksichtigung der drei Voraussetzungen, die Art und Weise, in welcher sich die Abbilder der zwei Teilgebiete  $G_1$  und  $G_2$  nebeneinander lagern; man überzeugt sich davon, daß die Abbildung tatsächlich mit der topologischen Zuordnung  $G \rightarrow F$  isomorph ist. Die obenstehenden drei analytischen Bedingungen genügen also schon, um die Abbildungsaufgabe vollständig zu definieren. Auf die Möglichkeit einer *analytischen* Formulierung des Problems wurde bereits hingewiesen.

Als topologisches Abbild der Kreisscheibe  $F$  ist das Gebiet  $K$  einfach zusammenhängend, und es wird folglich entweder von einem Punkt oder von einem Kontinuum begrenzt. Da im letzteren Falle, nach dem Fundamentalsatz über konforme Abbildungen schlichter Gebiete, eine weitere konforme Abbildung von  $K$  auf den Einheitskreis möglich ist, so bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, von vornherein anzunehmen, daß  $K$  entweder mit der punktierten Ebene oder mit dem Innern des Einheitskreises zusammenfällt.

Die Umkehrfunktion  $z = z(x)$  von  $x = x(z)$  ist eine innerhalb  $K$  eindeutige, aber vielwertige Funktion, die jeden Wert  $z$ , der durch einen inneren Punkt von  $G$  repräsentiert wird, in einer unendlichen Anzahl äquivalenter Punkte  $x$  annimmt. Es seien nun  $x_1(z)$  und  $x_2(z)$  zwei verschiedene Elemente der Funktion  $x(z)$ , deren Mittelpunkte übereinander liegen (d. h. denselben Zahlenwert  $z$  haben) und die diese Mittelpunkte in

die Punkte  $x = x_1$  bzw.  $x = x_2$  überführen. Diese zwei äquivalenten Punkte sind aufeinander bezogen durch die Decktransformation  $x_2 = x_2(z(x_1))$ , welche in  $K$  unbeschränkt fortsetzbar ist und nach dem Monodromiesatz somit eine für  $|x| < 1$  eindeutige Funktion definiert; dasselbe gilt nun aber auch für die Umkehrfunktion, woraus folgt, daß die zwischen  $x_1$  und  $x_2$  bestehende Relation eine eineindeutige und konforme Abbildung von  $K$  auf sich selbst erklärt, die sich nach dem in Nr. 3 angegebenen Satz auf eine lineare Transformation reduzieren muß.

Die Decktransformationen bilden also bei einer *konformen* Abbildung der Überlagerungsfläche eine *Gruppe von linearen Transformationen* ( $S$ ), welche den Kreis  $K$  invariant lassen. Die mehrdeutige Abbildungsfunktion  $x = x(z)$  ist eine *linear polymorphe* Funktion, deren Zweige sich den Transformationen ( $S$ ) gemäß vertauschen, wenn der Punkt  $z$  einen geschlossenen Weg beschreibt. Die eindeutige, für  $|x| < 1$  definierte meromorphe Umkehrfunktion  $z = z(x)$  wiederum ist eine *automorphe* Funktion, die ihren Wert behält, falls man auf die Veränderliche  $x$  eine beliebige Substitution der Gruppe ( $S$ ) ausübt.

Die Existenz dieser automorphen Funktion ist durch den Hauptsatz B gesichert. Da wir nun aber, wie bereits weiter oben bemerkt wurde, die Anwendung dieses allgemeinen Satzes soweit als möglich vermeiden wollen, werden wir in dem folgenden Paragraphen einige Fragen etwas genauer erörtern, die für die Herstellung der Abbildung der hier betrachteten Überlagerungsfläche von Bedeutung sind und die uns zugleich zu einigen für das folgende wichtigen Eigenschaften der Abbildungsfunktion führen werden.

### § 3. Fall der $p$ -fach punktierten Ebene.

12. Wir betrachten vorerst einen besonderen Fall, der später eine wichtige Rolle spielen wird. Die Berandung des  $p$ -fach zusammenhängenden Gebietes  $G$  möge sich auf  $p \geq 2$  Punkte  $a_1, \dots, a_p$  reduzieren; es handelt sich also um die konforme Abbildung der universellen Überlagerungsfläche  $G_\infty(a_1, \dots, a_p)$  der an diesen  $p$  Stellen punktierten Ebene.

Im einfachsten Falle,  $p = 2$ , wird diese Fläche, die sich unendlich vielblättrig um die zwei Randpunkte  $a_1, a_2$  windet, durch die elementare Transformation

$$x = \alpha \log \frac{z - a_1}{z - a_2} + \beta, \quad (4)$$

wo  $\alpha$  und  $\beta$  willkürliche Konstanten und die Randpunkte  $a_1, a_2$  vom unendlich fernen Punkte  $z = \infty$  verschieden angenommen sind, auf die punktierte Ebene  $x \neq \infty$  konform abgebildet. Die Fläche  $G_\infty(a_1, a_2)$  gehört also dem parabolischen Typus an.

Nimmt man als Querschnitte  $q_\nu$  ( $\nu = 1, 2$ ) die zwei Bogen, in welche ein beliebiger durch die Randpunkte  $a_1, a_2$  gehender Kreis durch diese Punkte geteilt wird, so findet man als Bilder des Kreisinnern  $G_1$  und des

Kreisäußern  $G_2$ , die einander spiegelbildlich zugeordnet sind, ein System von kongruenten, paarweise symmetrischen Parallelstreifen, die die  $x$ -Ebene überdecken; eine Figur also, die mit der zur topologischen Definition der Überlagerungsfläche konstruierten Figur  $F$  identisch ist. Die Existenz der Abbildungsfunktion (4) hätte man auch unter Vermeidung der Theorie der elementaren Transzendenten, in genauer Analogie mit dem bei der Konstruktion der topologischen Abbildung  $G_\infty \rightarrow F$  verwendeten Verfahren, so nachweisen können, daß man zuerst den Kreis  $G_1$  auf einen Parallelstreifen  $G_1^0$  abbildet, so daß die zwei Randpunkte  $a_1, a_2$  in die beiden unendlich fernen Randpunkte übergehen, was nach dem Fundamentalsatz A möglich ist; durch analytische Fortsetzung der derart gewonnenen Abbildungsfunktion mittels des SCHWARZschen Spiegelungsprinzipes ergibt sich schließlich die gesuchte Abbildung.

Die konforme Abbildung der Fläche  $G_\infty(a_1, a_2, a_3)$  läßt sich ebenfalls auf dem zuletzt beschriebenen Wege ausführen. Man teilt das Gebiet  $G$  wieder in zwei Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  durch den von den Punkten  $a_1, a_2, a_3$  bestimmten Kreis, und bildet das Gebiet  $G_1$  auf das Innere eines von drei beliebigen, einander berührenden Orthogonalkreisen des Einheitskreises  $|x| < 1$  gebildeten Spitzendreiecks konform ab, so daß die drei Randpunkte  $a_v$  in die drei Spitzen übergehen. Durch analytische Fortsetzung mittels des Spiegelungsprinzips entsteht eine unendlich vieldeutige analytische Funktion  $x = x(z; a_1, a_2, a_3)$ , welche die gewünschte Abbildung leistet. In der  $x$ -Ebene wiederum entsteht die vorhin konstruierte Figur  $F$  (Modulfigur). Die so gewonnene automorphe Umkehrfunktion  $z = z(x; a_1, a_2, a_3)$  ist die *Modulfunktion*. — Die Fläche  $G_\infty(a_1, a_2, a_3)$  ist vom hyperbolischen Typus.

In den höheren Fällen  $p > 3$  läßt sich die obige Konstruktion der Abbildungsfunktion  $x(z; a_1, \dots, a_p)$  nicht mehr wiederholen (außer für spezielle symmetrische Lagen der Windungspunkte  $a_v$ ); denn selbst wenn die Randpunkte  $a_v$  auf einem Kreise liegen, ist der Nachweis dafür, daß das Innere des Kreises auf ein geeignetes Spitzenpolygon von der in Nr. 9 betrachteten Art so abbildbar ist, daß die  $p > 3$  Randpunkte  $a_v$  den  $p$  Spitzen zugeordnet werden, nicht mit Hilfe des Fundamentalsatzes zu erbringen.

Zur Konstruktion der Abbildung empfiehlt es sich, in den Fällen  $p > 3$  zuerst eine vorbereitende Hilfstransformation mittels der oben konstruierten Modulfunktion vorzunehmen. Bevor wir dazu übergehen, wollen wir jedoch, unter der Annahme der Existenz der Abbildungsfunktion, einige Eigenschaften derselben beweisen.

Zuerst soll gezeigt werden, daß die Überlagerungsfläche  $G_\infty(a_1, \dots, a_p)$  auch für  $p > 3$  zum hyperbolischen Typus gehört.

Wäre nämlich die Fläche  $G_\infty(a_1, \dots, a_p)$  für  $p \geq 3$  vom parabolischen Typus, also auf die offene Ebene  $x \neq \infty$  schlicht und konform abbildbar, so würde die Umkehrfunktion  $z = z(x; a_1, \dots, a_p)$  eine in der ganzen

endlichen Ebene eindeutige, bis auf isolierte Pole reguläre Funktion, also eine *meromorphe* Funktion sein, welche die Werte  $a_1, \dots, a_p$  und insbesondere also die Werte  $a_1, a_2, a_3$  nicht annimmt. Daß dies nicht möglich ist, folgt aus dem

**Satz von PICARD.** *Eine für  $t \neq \infty$  eindeutige meromorphe Funktion  $f(t)$ , welche drei verschiedene Werte  $a_1, a_2, a_3$  ausläßt, reduziert sich auf eine Konstante.*

Zum Beweise dieses berühmten Satzes fixiere man, dem klassischen Vorbild PICARDS [I] folgend, einen beliebigen Punkt  $t \neq \infty$  und in dem entsprechenden Punkt  $z = f(t)$  einen beliebigen Zweig der linear polymorphen Funktion  $x = x(z; a_1, a_2, a_3)$ . Durch Zusammensetzung dieser zwei Funktionselemente wird die Veränderliche  $x$  als eine Funktion  $x = x(f(t); a_1, a_2, a_3) = \varphi(t)$  von  $t$  erklärt, die in der offenen Ebene  $t \neq \infty$  unbeschränkt fortsetzbar ist, da die innere Funktion  $f$  die einzigen für die äußere Funktion  $x(z)$  kritischen Werte  $a_1, a_2, a_3$  vermeidet. Wegen des einfachen Zusammenhanges des Gebietes  $t \neq \infty$  ist  $\varphi(t)$  nach dem Monodromiesatz eindeutig, und da es ferner beschränkt ist ( $|\varphi| < 1$ ), so muß es nach dem LIOUVILLESchen Satze konstant sein. Da die äußere Funktion  $x(z)$  keine Konstante ist, so folgt hieraus, daß die innere Funktion  $f(t)$  sich auf eine Konstante reduzieren muß, was zu beweisen war.

Die automorphe Umkehrfunktion  $z = z(x; a_1, \dots, a_p)$  ist nicht konstant; aus dem PICARDSchen Satz folgt also, daß sie für  $p \geq 3$  als Existenzgebiet nicht die punktierte Ebene haben kann; sie ist somit innerhalb des Einheitskreises  $|x| < 1$  erklärt, und die Überlagerungsfläche  $G_\infty$  gehört folglich dem hyperbolischen Typus an, sobald die Anzahl  $p$  der Grenzpunkte größer als zwei ist.

**13.** Wir kommen nun zu der Frage, wie sich das Fundamentalgebiet der automorphen Funktion  $z = z(x; a_1, \dots, a_p)$  in den höheren Fällen  $p > 3$  konstruieren läßt<sup>1</sup>.

Es läßt sich zeigen, daß, wie in den Fällen  $p = 2, 3$ , die Kreisfigur  $K$ , welche vermittels der Funktion  $x = x(z; a_1, \dots, a_p)$  als Bild des Gebietes  $G = G_1 + G_2$  entsteht, mit der oben (Nr. 9) erklärten Figur  $F$  nicht nur topologisch äquivalent, sondern, bei geeigneter Wahl der zwei Teilgebiete  $G_1$  und  $G_2$ , sogar *identisch* ist. Zu diesem Zweck untersuchen wir die Fundamentalsubstitutionen der zugehörigen Gruppe (S) der Decktransformationen von  $K$ , als welche, wie wir gesehen haben, ein System von  $p - 1$  Substitutionen  $S_1, \dots, S_{p-1}$  genommen werden kann, die einen Unlauf um je einen der Punkte  $z = a_1, \dots, a_{p-1}$  entsprechen.

Wir wählen, nachdem der Punkt  $a_p$  durch einen kleinen Kreis vom Radius  $\varrho$  isoliert worden ist, in der Kreisscheibe  $0 < |z - a_p| < \varrho$  einen beliebigen Punkt, und fixieren in ihm ein Funktionselement, das

<sup>1</sup> Vgl. F. NEVANLINNA [2].



die Substitution  $S_\nu$  erfährt, wenn der Punkt  $z$  einen Umlauf um  $a_\nu$  beschreibt. Setzt man dieses Element in der Kreisscheibe unbeschränkt fort, so entsteht eine vieldeutige Funktion, deren Zweige durch die von den Potenzen  $S_\nu^k (k=0, \pm 1, \dots)$  der Substitution  $S_\nu$  gebildeten Untergruppe der Gruppe  $(S)$  zusammenhängen.

Als eine Substitution, die den Einheitskreis invariant läßt, ist  $S_\nu$  entweder elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch (Nr. 6). Wir werden zuerst zeigen, daß die letztgenannte Möglichkeit zutrifft. Hierbei werden wir wesentlich die evidente Tatsache benutzen, daß der Punkt  $x(z)$  für  $z \rightarrow a_\nu$  gegen den Rand  $|x|=1$  rücken muß.

Nehmen wir zunächst an,  $S_\nu$  sei eine elliptische Transformation

$$\varphi(x) = \frac{x-c_1}{x-c_2} \cdot \frac{1}{c_1} = e^{i\theta} \frac{\xi-c_1}{\xi-c_2} \cdot \frac{1}{c_1}$$

mit den Fixpunkten  $c_1, c_2$  ( $|c_1| < 1, c_1 \bar{c}_2 = 1$ ), so erfährt der Ausdruck

$$\frac{2\pi}{|\theta|} \log \varphi(x(z))$$

bei einem Umlauf von  $z$  um den Punkt  $a_\nu$ , der den Wert  $x$  in den durch die Transformation  $S_\nu$  bestimmten Wert  $\xi$  überführt, den Zuwachs  $\pm 2\pi i$ . Die Funktion

$$e^{\frac{2\pi}{|\theta|} \log \varphi} = \varphi^{\frac{2\pi}{|\theta|}}$$

ist also in dem Kreisring  $0 < |z - a_\nu| < \rho$  eindeutig, und da sie wegen der leicht bestätigten Relation  $|\varphi| < 1$  für dieselben Werte  $z$  beschränkt ist, so folgt aus dem CAUCHY-RIEMANNNSCHEN Satz über hebbare Singularitäten analytischer Funktionen, daß sie für  $z = a_\nu$  regulär ist; sei  $\varphi(a_\nu) = b_\nu$ . Beachtet man den Zusammenhang zwischen  $\varphi$  und  $x$ , so folgt, daß auch  $x$  sich in  $z = a_\nu$  regulär verhalten würde, falls  $b_\nu \neq c_1$ , während es sich im Falle  $b_\nu = c_1$  in eine Reihe der Form

$$x = c_1 + (z - a_\nu)^{\frac{m|\theta|}{2\pi}} \mathfrak{F}(z - a_\nu)$$

entwickeln ließe. Beide Fälle sind ausgeschlossen, weil  $x$  für hinreichend kleines  $\rho$  dann die Kreisscheibe  $|z - a_\nu| < \rho$  auf ein ganz *innerhalb*  $|x| < 1$  liegendes Gebiet abbilden müßte, während doch  $|x| \rightarrow 1$  für  $z \rightarrow a_\nu$  sein muß.

Man nehme zweitens an,  $S_\nu$  sei eine hyperbolische Transformation. Wenn ihre auf der Peripherie des Einheitskreises gelegenen Fixpunkte mit  $c_1, c_2$  bezeichnet werden, so kann  $S_\nu$  in der Form

$$\varphi(x) = e^\lambda \frac{x-c_1}{x-c_2} = \frac{\xi-c_1}{\xi-c_2}$$

geschrieben werden, wo  $\lambda$  eine reelle Zahl ist. Wir bilden alsdann den Ausdruck

$$e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \log \varphi(x)}$$

wobei stets derjenige Zweig des Logarithmus genommen wird, der durch die Ungleichung  $\alpha < \arg \varphi < \alpha + \pi$  definiert ist, wo  $\alpha$  den von der Kreisperipherie  $|x|=1$  und der Sehne  $(c_1, c_2)$  gebildeten Winkel bezeichnet. Setzt man für  $x$  die Funktion  $x(z; a_1, \dots, a_p)$  ein, so wird der Exponent bei vollen Umläufen von  $z$  um den Randpunkt  $a_v$  stets um ein Multipel von  $2\pi i$  vermehrt, und die durch den Exponentialausdruck definierte analytische Funktion von  $x$  ist infolgedessen *eindeutig* in der Umgebung von  $a_v$ . Ferner ist sie daselbst *beschränkt*, denn ihr absoluter Betrag ist auf das Intervall  $\left( e^{-\frac{2\pi\alpha}{\lambda}}, e^{-\frac{2\pi\alpha}{\lambda} - \frac{2\pi^2}{\lambda^2}} \right)$  eingeschränkt. Nach dem CAUCHY-RIEMANNschen Satz schließt man wieder, daß diese Funktion für  $z=a_v$  regulär und, da ihr Modul nach unten beschränkt ist, von Null verschieden sein muß. Hieraus ergibt sich dann weiter, daß auch der Exponent des betrachteten Ausdruckes, sowie schließlich auch die Funktion  $x$  selbst im Punkte  $z=a_v$  regulär ist, was jedoch ihren definierenden Eigenschaften widerspricht.

Die Substitution  $S_v$  kann also auch nicht hyperbolisch sein, und es bleibt als einzige Möglichkeit übrig, daß  $S_v$  *parabolisch* ist. Hieraus läßt sich über das Verhalten der Abbildungsfunktion  $x$  im Punkte  $z=a_v$  eine wichtige Schlußfolgerung ziehen: Wenn  $S_v$  den Peripheriepunkt  $x=c_v$  des Einheitskreises zum Fixpunkt hat, so ist sie in der Form

$$\frac{\xi + c_v}{\xi - c_v} = \frac{x + c_v}{x - c_v} + i\omega$$

darstellbar, wo  $\omega$  eine von Null verschiedene, positive Konstante ist (Nr. 6). Wie oben schließt man nun, unter Anwendung des CAUCHY-RIEMANNschen Satzes, daß der Ausdruck

$$\psi(z) = c^{-\omega} \frac{x + c_v}{x - c_v}$$

eine im Punkte  $z=a_v$  reguläre Funktion von  $z$  darstellt. Ferner muß  $\psi(a_v)$  gleich Null sein, denn andernfalls würde man auf denselben Widerspruch wie oben, nämlich auf die Regularität der Funktion  $x$  im Punkt  $z=a_v$ , stoßen. Man hat also in der Umgebung von  $a_v$  eine Entwicklung

$$\psi(z) = b(z - a_v)^n + \dots \quad (n \geq 1, b \neq 0)$$

und also

$$x^* \equiv \frac{x + c_v}{x - c_v} = \beta + \gamma \log(z - a_v) + \varepsilon(z - a_v),$$

wo  $\varepsilon(z - a_v)$  für  $z \rightarrow a_v$  verschwindet<sup>1</sup>.

Aus dieser Entwicklung ist zunächst zu sehen, daß der betrachtete Funktionszweig für  $z \rightarrow a_v$  den Fixpunkt  $x=c_v$  als Grenzwert hat. Ferner sieht man, daß der Punkt  $x^*$ , dessen Lage in der Nähe von  $z=a_v$  sich

<sup>1</sup> Falls der Grenzpunkt  $a_v$  unendlich fern liegt, so hat man in den obigen Entwicklungen  $z - a_v$  durch  $\frac{1}{z}$  zu ersetzen.

asymptotisch durch den Ausdruck  $\beta + \gamma \log(z - a_v)$  bestimmt, asymptotisch eine Gerade  $L_\varrho$  beschreibt, wenn  $z$  eine kleine Kreislinie  $|z - a_v| = \varrho$  in beiden Richtungen umkreist; da andererseits die Variabilität von  $x^*$  auf die linke Halbebene beschränkt ist, so folgt, daß  $L_\varrho$  mit der imaginären Achse parallel sein muß, und daß also die Bildkurve des genannten Kreises in der  $x$ -Ebene eine geschlossene Kurve ist, die den Einheitskreis im Fixpunkt  $x = c_v$  berührt. Jeder Kurve, die mit einer bestimmten Richtung in  $z = a_v$  einmündet, entspricht wieder in der  $x^*$ -Ebene eine Kurve, welche eine zur reellen Achse parallele Gerade als Asymptote hat; als Bildkurve im Einheitskreis  $|x| < 1$  ergibt sich infolgedessen ein Bogen, der die Peripherie  $|x| = 1$  in  $x = c_v$  orthogonal schneidet. — Die Gesamtanzahl aller Punkte  $c_v$ , welche durch verschiedene Wahl des Anfangselementes  $x(z)$  als Bildpunkte dem Grenzpunkt  $a_v$  zugeordnet werden können, ist unendlich; diese Fixpunkte liegen auf der Peripherie  $|x| = 1$  überall dicht.

Nummehr läßt sich die Gestalt des Fundamentalgebietes der automorphen Umkehrfunktion leicht bestimmen. Man wähle die  $p$  Jordanbogen  $q_v$ , durch welche wir das Gebiet  $G$  in zwei Halblätter  $G_1$  und  $G_2$  geteilt haben (Nr. 9), so daß sie mit bestimmten Tangenten in den Grenzpunkten  $a_v$  münden. Dann entspricht nach obigem jedem Halblatt immer ein *Spitzenpolygon*  $P_v$  des Einheitskreises  $|x| < 1$ , das von  $p$ , den Bogen  $q_v$ , entsprechenden Orthogonalbogen  $\lambda_v$ , des Kreises  $|x| = 1$  begrenzt wird, und dessen Spitzen Fixpunkte der den Punkten  $a_v$  zugeordneten parabolischen Substitutionen sind. Zwei benachbarte Polygone  $P_v$  bilden einen Fundamentalbereich  $F_v$  der automorphen Funktion.

Durch geeignete Wahl der Kurven  $q_v$  kann man es immer so einrichten, daß die Polygone  $P_v$  von lauter *Orthogonalkreisbogen* des Einheitskreises begrenzt werden. Man braucht nur von einem beliebigen, in oben erklärter Weise konstruierten Polygonsystem  $P_v$  auszugehen und dann in jedem Polygon die Kurven  $\lambda_v$  durch einen, die Endpunkte desselben verbindenden Orthogonalkreisbogen  $\tilde{\lambda}_v$  zu ersetzen. Ist nun  $S$  eine Substitution, durch welche zwei, einem „Schnitt“  $q_v$  zugeordnete Seiten  $\lambda'_v, \lambda''_v$  aufeinander bezogen sind, so führt  $S$  die Endpunkte von  $\lambda'_v$  in die Endpunkte von  $\lambda''_v$  über und transformiert folglich auch die Orthogonalkbogen  $\lambda'_v$  und  $\lambda''_v$ , durch welche wir jene Seiten ersetzt haben, ineinander. Zwei beliebigen derartigen Bogen entspricht somit *ein* wohlbestimmter Bogen  $\tilde{q}_v$ , welcher die Endpunkte von  $q_v$  verbindet. Durch diese Kurven  $\tilde{q}_v$  müssen wir somit die Einteilung  $G = G_1 + G_2$  vornehmen, um zu einer Figur zu gelangen, in welcher sämtliche Fundamentalgebiete von lauter Orthogonalkbogen des Einheitskreises begrenzt sind<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Die beiden „Hälften“ eines Fundamentalgebietes sind auch bei dieser besonderen Wahl der Kurven  $q_v$  im allgemeinen nicht spiegelbildlich zueinander. Man kann zeigen, daß dies nur dann zutrifft, wenn sämtliche Punkte  $a_v$  auf einer Kreislinie liegen.

14. Wir müssen hier auf eine vollständige Darstellung des Beweises für die *Existenz* der Abbildung  $G \rightarrow K$ , welche oben in den Fällen  $p > 3$  vorausgesetzt wurde, verzichten. Am einfachsten gestaltet der Existenzbeweis sich bei Anwendung des CARATHÉODORY-KOEBSCHEN Schmiegungsverfahrens (durch welches auch der Fundamentalsatz A (Nr. 7) unschwer begründet werden kann)<sup>1</sup>. Wir beschränken uns hier darauf, an folgende Hauptpunkte eines nach dieser Methode geführten Beweises zu erinnern.

a) Vermittels der linear polymorphen Funktion  $x = x(z; a_1, a_2, a_3)$  wird das Gebiet auf den, an den unendlich vielen Bildpunkten  $a_v^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) der Randpunkte  $z = a_v$  ( $v = 4, \dots, p$ ) punktierten Einheitskreis  $G'$  konform und unendlich-eindeutig abgebildet.

b) Durch wiederholte Anwendung der bekannten CARATHÉODORY-KOEBSCHEN Wurzeltransformation wird  $G'$  auf eine Folge von Gebieten  $G^k$  sukzessiv abgebildet, welche aus dem, an den Bildpunkten der Punkte  $a_v$  punktierten Einheitskreis bestehen. Wird der innerhalb dieses Kreises liegende Windungspunkt stets in den, dem Nullpunkt zunächst liegenden Randpunkt von  $G^k$  verlegt, so ist die Abbildung  $G \rightarrow G^k$  konform und unendlich-eindeutig. Die Randpunkte vermehren sich bei wachsendem  $k$ , rücken aber für  $k \rightarrow \infty$  sämtlich gegen die Peripherie des Einheitskreises.

c) Die Abbildung  $G \rightarrow G^k$  nähert sich für  $k \rightarrow \infty$  einer Grenzabbildung, welche sämtliche geforderten Eigenschaften besitzt.

Dieser Existenzbeweis zeigt zugleich daß, wie bereits oben bewiesen wurde, die abzubildende universelle Überlagerungsfläche vom *hyperbolischen Typus* ist.

#### § 4. Der allgemeine Fall eines $p$ -fach zusammenhängenden Gebietes.

15. Wenn das Gebiet nicht mehr von lauter isolierten Punkten begrenzt wird, und also mindestens eine der Randpunktmengen  $\gamma_v$  ein Kontinuum ist, so lassen sich die wichtigsten Eigenschaften der Abbildung  $G \rightarrow K$  durch eine Kombination der Resultate der vorigen Nummer mit dem Fundamentalsatz A herleiten. Wir beschränken uns hierbei auf denjenigen, für die Anwendungen wichtigsten Fall, wo die Randkontinua  $\gamma_v$  *Jordankurven* sind. Einfachheitshalber wollen wir weiter voraussetzen, daß keine der  $p$  Mengen  $\gamma_v$  sich auf einen Punkt reduziert; wie die nachstehenden Resultate für die derart ausgeschlossenen Mischfälle zu modifizieren sind, dürfte ohne weiteres einleuchtend sein, weswegen wir auf diese Fälle auch späterhin nicht näher eingehen wollen.

Um die gesuchte Abbildung  $G \rightarrow K$  herzustellen, nehmen wir nun außerhalb der äußersten Kurve  $\gamma_1$  und innerhalb der inneren Randkurven  $\gamma_2, \dots, \gamma_p$  je einen äußeren Punkt  $z = a_v$  ( $v = 1, \dots, p$ ) des

<sup>1</sup> Vgl. z. B. CARATHÉODORY [4].

Gebietes  $G$  und bilden zunächst das Gebiet  $G_\infty(a_1, \dots, a_p)$  durch die Abbildungsfunktion  $x(z; a_1, \dots, a_p)$  auf das Innere des Einheitskreises ab. Das Äußere von  $\gamma_1$  und das Innere von  $\gamma_2, \dots, \gamma_p$  werden hierbei auf gewisse Gebiete  $H_1^i, H_2^i, \dots, H_p^i$  abgebildet, welche innerhalb des Einheitskreises gelegen sind, so daß ihre Ränder, die aus den, den Konturen  $\gamma_\nu$  entsprechenden Jordanbogen  $\gamma_\nu^i (i=1, 2, \dots)$  bestehen, den Kreis  $|x|=1$  in je einem der den Punkten  $a_\nu$  zugeordneten Fixpunkte  $c_\nu^i$  berühren, außer im Falle  $p=2$ , wo die Linien  $\gamma_\nu^i (\nu=1, 2)$  durch den unendlich fernen Randpunkt gehen. Als Bild von  $G$  hat man also dasjenige von den Jordanbogen  $\gamma_\nu^i$  begrenzte einfach zusammenhängende Gebiet  $G'$ , welches aus der Kreisscheibe  $|x|<1$  entsteht, wenn die Gebiete  $H_\nu^i$  entfernt werden. Die gewünschte Abbildung erhält man einfach dadurch, daß das schlichte Gebiet  $G'$  weiter auf den Einheitskreis abgebildet wird, was nach dem Fundamentalsatz  $A$  möglich ist.

Daß die Figur  $K$ , die durch die derart hergestellte Abbildung im Einheitskreise entsteht, mit der Figur  $F$  isomorph ist, sofern man die inneren Punkte des Einheitskreises ins Auge faßt, ist evident; in der Tat beziehen sich ja auch die Bedingungen unseres Problems ausschließlich auf das Verhalten der Abbildung *im Innern* der Gebiete  $G$  und  $K$ . Was nun aber das *Randverhalten* der Abbildung betrifft, so unterscheidet sich der hier betrachtete Fall, wo die Punktmenge  $\gamma_\nu$  Jordanbogen sind, von dem Falle  $G_\infty(a_1, \dots, a_p)$  darin, daß auch auf dem Kreisrande diesen Mengen keine Punkte, sondern eine Folge von *Bogen*  $\bar{\gamma}_\nu^i$  entsprechen. In der Tat folgt aus dem Fundamentalsatz  $A$  über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung schlichter Gebiete, daß jedem Jordanbogen  $\gamma_\nu^i$  ein bestimmtes Segment  $\bar{\gamma}_\nu^i$  des Kreises zugeordnet ist. Im Falle  $p=2$  reduziert sich die Anzahl dieser Segmente auf zwei zueinander komplementären Bogen  $\bar{\gamma}_1$  und  $\bar{\gamma}_2$  der Kreisperipherie. Ein kompliziertes Bogensystem entsteht dagegen für  $p \geq 3$ , wo jedem  $\gamma_\nu$  unendlich viele  $\gamma_\nu^i$  entsprechen. Eine interessante Frage ist, ob die zusammengesetzte Länge dieser Bogen den vollen Betrag  $2\pi$  erreicht. Daß dem tatsächlich so ist, daß also die Komplementärmenge der Peripheriepunkte das Maß Null hat, soll im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

## II. Lösung des DIRICHLETSchen Problems für ein schlichtes Gebiet.

### §1. Das POISSONSche Integral.

16. Als wesentliches Hilfsmittel in den nachfolgenden Untersuchungen werden einige Sätze aus der Theorie der harmonischen Funktionen verwendet. Die Grundlage dieser Sätze bildet die Lösbarkeit der *ersten Randwertaufgabe*, d. h. die Möglichkeit, mit vorgegebenen Randwerten eine in einem Gebiet  $G$  harmonische Funktion zu konstruieren. Unter

Anwendung der Ergebnisse des ersten Abschnittes soll in diesem Paragraphen folgender spezielle Fall dieses allgemeinen Satzes vollständig begründet werden.

In jedem Randpunkt  $z = \zeta$  eines in der  $z$ -Ebene gelegenen schlichten, von den Jordankurven  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$  berandeten  $p$ -fach zusammenhängenden Gebietes  $G$  sei ein reeller Wert  $u(\zeta)$  vorgeschrieben, so daß diese Funktion auf jedem Bogen  $\Gamma_\nu$  beschränkt und bis auf höchstens eine endliche Anzahl von Punkten stetig ist. Es existiert dann eine und nur eine innerhalb  $G$  harmonische und beschränkte Funktion, welche bei Annäherung an einen Stetigkeitspunkt  $z = \zeta$  dem betreffenden Randwert  $u(\zeta)$  zustrebt.

17. Falls  $G$  der Einheitskreis  $|z| < 1$  ist, so wird die Randwertaufgabe, wie zuerst von H. A. SCHWARZ gezeigt worden ist, durch das POISSONSche Integral

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} d\theta \quad (1)$$

gelöst<sup>1</sup>. Wie in I, § 4, bewiesen wurde, ist der Kern des Integrals eine harmonische Funktion des Aufpunktes  $z = re^{i\varphi}$  und dasselbe gilt somit auch für das POISSONSche Integral, in jedem Punkt des Einheitskreises. Um weiter einzusehen, daß die durch das Integral definierte Funktion für  $z \rightarrow \zeta$  gegen den vorgegebenen Randwert  $u(\zeta)$  strebt, empfiehlt es sich zunächst, die speziellere Randwertaufgabe zu betrachten, wo  $u(\zeta)$  auf einem Bogen  $\zeta_1 \zeta_2$  ( $\zeta_1 = e^{i\vartheta_1}$ ,  $\zeta_2 = e^{i\vartheta_2}$ ) des Einheitskreises von der Länge  $\vartheta_2 - \vartheta_1 = \alpha$  ( $0 < \alpha \leq 2\pi$ ) den Wert 1 annimmt, während es auf dem Komplementärbogen verschwindet. Das POISSONSche Integral geht dann in

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} d\theta$$

über; dieser Ausdruck stimmt mit dem auf S. 7 definierten, „harmonischen Maß“  $\omega(z; \vartheta_1, \vartheta_2)$  des Bogens  $(\vartheta_1 \vartheta_2)$  überein und hat also, wie daselbst gezeigt wurde, die geforderten Randeigenschaften.

Nach dieser Vorbereitung kehren wir zu dem allgemeinen Integral (1) zurück, das sich auch in der Form

$$u(z) = \int_{\vartheta=0}^{2\pi} u(e^{i\vartheta}) d\omega(z; 0, \vartheta) \quad (1')$$

schreiben läßt. Sei  $\zeta = \zeta_0 = e^{i\vartheta_0}$  ein Stetigkeitspunkt von  $u(\zeta)$ ,  $\varepsilon$  eine beliebig kleine positive Zahl und  $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$  ein den Wert  $\zeta_0$  umgebendes Intervall, wo die Schwankung von  $u(\zeta)$  kleiner als  $\varepsilon$  ist. Es wird dann

$$\begin{aligned} u(z) - u(\zeta_0) &= \int_{\vartheta=0}^{2\pi} (u(e^{i\vartheta}) - u(\zeta_0)) d\omega \\ &= \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \langle \varepsilon \rangle d\omega + \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1+2\pi} (u(e^{i\vartheta}) - u(\zeta_0)) d\omega, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> H. A. SCHWARZ [I].

wo  $\langle \varepsilon \rangle$  eine Größe von einem Betrag  $< \varepsilon$  bezeichnet<sup>1</sup>. Hier ist der Betrag des ersten Gliedes rechts kleiner als  $\varepsilon$ , während das zweite Glied höchstens

$$2M\omega(z; \vartheta_2, \vartheta_1 + 2\pi)$$

beträgt, wo  $M$  das Maximum von  $|u(\zeta)|$  bezeichnet. Strebt nun  $z$  gegen den Punkt  $\zeta_0 = e^{i\vartheta_0}$ , wo ja  $\vartheta_1 < \vartheta_0 < \vartheta_2$  ist, so verschwindet das harmonische Maß  $\omega(z; \vartheta_2, \vartheta_1 + 2\pi)$  gleichmäßig. Es läßt sich somit eine Zahl  $\varrho_\varepsilon$  finden, so daß  $\omega < \varepsilon$  wird für  $|z - \zeta_0| < \varrho_\varepsilon$ ; für dieselben Werte  $z$  gilt dann

$$|u(z) - u(\zeta_0)| < \varepsilon(2M + 1),$$

woraus zu sehen ist, daß  $u(z)$  für  $z \rightarrow \zeta_0$  dem vorgegebenen Randwert  $u(\zeta_0)$  gleichmäßig zustrebt.

An jedem Unstetigkeitspunkt  $\zeta_0$ , wo der links- und rechtsseitige Grenzwert  $u(e^{i(\vartheta_0+0)})$  bzw.  $u(e^{i(\vartheta_0-0)})$  existiert, hat man, auf einem Wege, der mit der positiven Tangente des Kreises  $|z|=1$  den Winkel  $\lambda\pi$  bildet, für  $u(z)$  den Grenzwert

$$\lambda u(e^{i(\vartheta_0+0)}) + (1-\lambda)u(e^{i(\vartheta_0-0)}).$$

Der Beweis gestaltet sich dem obigen, einen Stetigkeitspunkt betreffenden, vollkommen analog.

18. Es soll noch gezeigt werden, daß das Poissonsche Integral  $u(z)$  die *einzige* für  $|z| < 1$  beschränkte Lösung des vorgelegten Randwertproblems darstellt. Sei in der Tat  $u_1(z)$  eine gegebene solche Lösung; die Differenz  $v(z) = u(z) - u_1(z)$  definiert dann eine für  $|z| < 1$  harmonische und beschränkte Funktion, welche in jedem Randpunkt  $\zeta$  verschwindet, außer möglicherweise in den Unstetigkeitsstellen  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  der Randfunktion  $u(\zeta)$ , in deren Nähe sie jedenfalls beschränkt bleibt. Die Anwendung des Prinzips über das Maximum und Minimum einer harmonischen Funktion zeigt nun, daß die Differenz  $v(z)$  identisch verschwindet, womit die Unität der Lösung der Randwertaufgabe bewiesen ist.

Wir werden später sehen (Abschnitt VII), daß das Poissonsche Integral unter viel allgemeineren Voraussetzungen als den obigen zur Lösung des DIRICHLETSchen Problems führt.

## § 2. Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe.

19. Nimmt man an, das Gebiet  $G$  sei von *einer* Jordankurve  $\Gamma$  begrenzt, so läßt sich die Konstruktion einer harmonischen Funktion, die den in § 1 angegebenen Randbedingungen genügt, auf den Kreisfall zurückführen, indem das Gebiet auf den Einheitskreis  $K$  konform abgebildet wird. Da gemäß dem Fundamentalsatz A diese Abbildung noch auf den Rändern stetig und eineindeutig ist, so wird die auf

<sup>1</sup> Diese von E. LINDELÖF herrührende Bezeichnung werden wir auch im folgenden oft benutzen.

$\Gamma$  gegebene Randwertmenge  $u(\zeta)$  in eine auf der Peripherie von  $K$  erklärte, höchstens mit Ausnahme endlich vieler Punkte, stetige Funktion übergehen. Mittels des POISSONSchen Integrals wird nun eine sich diesen Randwerten stetig anschließende harmonische Funktion konstruiert, welche, wenn man vermöge der Abbildung  $K \rightarrow G$  wieder zum Gebiet  $G$  zurückgeht, in eine innerhalb  $G$  erklärte Funktion  $u(z)$  transformiert wird, die die gegebenen Randwerte  $u(\zeta)$  besitzt. Diese Funktion ist auch *harmonisch*, da diese Eigenschaft Variabeltransformationen gegenüber, die eine konforme Abbildung vermitteln, invariant ist.

**20.** Um nun die vorgelegte Randwertaufgabe für den allgemeinen Fall zu lösen, wo die Berandung von  $G$  aus *mehreren* verschiedenen Jordankurven  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$  zusammengesetzt ist, nehmen wir die in I, § 4 untersuchte konforme Abbildung der universellen Überlagerungsfläche des mehrfach zusammenhängenden Gebietes  $G$  auf den Einheitskreis  $K$  zur Hilfe. Diese Abbildung wird durch eine linear polymorphe Funktion  $x = x(z)$  vermittelt, und zwar so, daß jeder Kurve  $\Gamma_\nu$  im Falle  $p = 2$  ein einziger Randbogen  $\gamma_\nu$ , im Falle  $p > 2$  dagegen eine unendliche Folge punktfremder offener Bogen  $\gamma_\nu^1, \gamma_\nu^2, \dots$  der Peripherie  $|x| = 1$  zugeordnet ist (vgl. Nr. 15); die zwischen dem Bogen  $\Gamma_\nu$  und je einem der Bildbogen  $\gamma_\nu^i$  bestehende Abbildung ist eineindeutig und stetig.

Wir definieren nun auf dem Bogen  $\gamma_\nu^i$  eine Randwertmenge  $u(\xi)$ , indem wir  $\bar{u}(\xi) = u(\zeta)$  setzen, wobei  $\xi$  den dem Punkt  $\zeta$  eindeutig zugeordneten Punkt von  $\gamma_\nu^i$  bezeichnet. Ergänzen wir dann noch die Definition von  $u(\xi)$ , indem wir  $u = 0$  erklären für jeden Punkt des Kreises  $|\xi| = 1$ , der keinem der offenen Bogen  $\gamma_\nu^i$  angehört, so können wir das POISSONSche Integral ( $x = r e^{i\varphi}$ ,  $\xi = e^{i\theta}$ )

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}(e^{i\theta}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} d\theta$$

ansetzen. Der Integrand  $\bar{u}(e^{i\theta})$  weist allerdings im allgemeinen Unstetigkeiten verwickelter Art auf; daß das Integral dessenungeachtet (sogar als CAUCHYSches Integral) einen Sinn hat, geht aus dem Umstand hervor, daß es als eine konvergente Reihe geschrieben werden kann, als deren Glieder die über die einzelnen Segmente  $\gamma_\nu^i$  erstreckten Teilintegrale auftreten. Diese Reihe ist, wie man sofort einsieht, in jedem inneren Teilbereich von  $K$  absolut und gleichmäßig konvergent und die Summe  $\bar{u}$  ist somit nach dem WEIERSTRASSSchen Reihensatz eine harmonische Funktion in  $K$ .

Bei Annäherung an einen beliebigen Punkt eines Bogens  $\gamma_\nu^i$ , der Stetigkeitspunkt der Wertmenge  $u(\xi)$  ist, strebt  $u(x)$  gegen diesen Randwert, denn der von dem betreffenden Bogen  $\gamma_\nu^i$  herrührende Teil des Integrals konvergiert nach den Ergebnissen von II, § 1 gegen den vorgegebenen Randwert, während der Rest des Integrals verschwindet.



Die Funktion  $\bar{u}(x)$  besitzt noch eine andere, für uns wichtige Eigenschaft: sie ist ein *automorphes* Potential, das bei den Substitutionen der Gruppe  $\Sigma$ , welche der linear polymorphen Funktion  $x = x(z)$  zugeordnet ist, invariant verbleibt. Um dies einzusehen, betrachten wir das einem inneren Punkt  $e^{i\vartheta}$  eines Bogens  $\gamma_v^i$  entsprechende Element des POISSONschen Integrals. Führt man hier eine Substitution  $S$  der Gruppe  $\Sigma$  aus, so verbleibt der erste Faktor  $\bar{u}(e^{i\vartheta})$  gemäß der Definition der Randfunktion  $u$  invariant. Was nun den zweiten Faktor, den Differentialausdruck

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta$$

betrifft, so ist er, wie schon in I, § 1 gezeigt wurde, eine *Invariante für überhaupt jede den Einheitskreis erhaltende Transformation*. Jedes Element des POISSONschen Integrals behält also bei den Substitutionen  $S$  seinen Wert, und dasselbe gilt somit auch für das Integral.

Aus dieser Invarianzeigenschaft folgt nun, daß die harmonische Funktion  $u(z) = u(x(z))$  innerhalb  $G$  *eindeutig* ist. Denn läßt man den Punkt  $z$ , von einem beliebigen Punkt  $z_0$  ausgehend, längs eines geschlossenen Weges in seine Anfangslage zurückkehren, so erleidet die Abbildungsfunktion  $x(z)$  eine Substitution  $S$  der Gruppe  $\Sigma$ , und der Endwert von  $u(z)$  wird also mit dem Anfangswert übereinstimmen.

Aus den oben auseinandergesetzten Stetigkeitseigenschaften der Abbildung  $G \rightarrow K$  in den Randpunkten von  $G$  folgt ferner, daß  $u(z)$  für  $z \rightarrow \zeta$  dem betreffenden Randwert  $u(\zeta)$  zustrebt. Die *harmonische Funktion*  $u(z)$  stellt somit eine Lösung der gestellten Randwertaufgabe dar.

Daß die derart hergestellte Funktion  $u$  andererseits die einzige Lösung des Problems ist, ergibt sich durch einen Beweis, der dem in Nr. 18 gegebenen nachgebildet werden kann.

Wir sind jetzt in der Lage den am Ende des ersten Abschnitts in Aussicht gestellten Beweis dafür zu erbringen, daß die Bogen  $\gamma_v^i$ , welche bei der Abbildung  $G \rightarrow K$  den Randbogen  $\Gamma_v$  entsprechen, die volle Kreisperipherie  $|x|=1$  ausfüllen. Das harmonische Maß der ganzen Berandung  $\Gamma$  ist konstant gleich 1. Nach obigem gestattet es andererseits die Darstellung

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_v^i} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta,$$

und es wird demnach für  $r=0$

$$\int_{\gamma_v^i} d\vartheta = 2\pi,$$

woraus zu ersehen ist, daß das Maß der Bogen  $\gamma_v^i$  tatsächlich den vollen Betrag  $2\pi$  erreicht.

### § 3. Integraldarstellung der Lösung der Randwertaufgabe mittels des harmonischen Maßes.

21. Es sei  $\alpha$  eine aus endlich vielen Randbogen des Gebietes  $G$  zusammengesetzte Punktmenge. Nach den Ergebnissen von § 2 dieses Abschnittes existiert *eine und nur eine innerhalb  $G$  harmonische und beschränkte Funktion, welche in jedem inneren Punkte von  $\alpha$  den Randwert 1 annimmt, während sie in jedem inneren Punkt des zu  $\alpha$  komplementären Teiles  $\beta$  der Berandung  $\Gamma = \alpha + \beta$  verschwindet.*

In Analogie mit der Definition von Nr. 5 wollen wir den Wert dieser Funktion in einem inneren Punkt  $z$  von  $G$  das *harmonische Maß der Bogen  $\alpha$  im Punkte  $z$  in bezug auf  $G$*  nennen; wir bezeichnen ihn durch  $\omega(z, \alpha, G)$  oder, falls kein Mißverständnis zu befürchten ist, kürzer durch  $\omega(z, \alpha)$ .

Das harmonische Maß  $\omega$  ist konstant gleich 1, falls  $\alpha$  die ganze Berandung  $\Gamma$  umfaßt; andernfalls variiert es innerhalb  $G$  zwischen den Grenzen 0 und 1. Wenn  $\alpha$  und  $\beta$  zwei punktfremde Bogen sind, so ist stets  $\omega(z, \alpha) + \omega(z, \beta) = \omega(z, \gamma)$ , wo  $\gamma$  die Vereinigungsmenge  $\gamma = \alpha + \beta$  der Punkte  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnet; speziell gilt  $\omega(z, \alpha) + \omega(z, \beta) = 1$ , falls  $\alpha$  und  $\beta$  Komplementärbogen sind ( $\alpha + \beta = \Gamma$ ). Das harmonische Maß ist also eine *additive* Funktion des gemessenen Randbogens.

Um das harmonische Maß in seiner Abhängigkeit von dem Bogen  $\alpha$  näher zu untersuchen, denke man sich die Einheitsstrecke  $0 \leq t < 1$  in  $p$  beliebige Teilstrecken  $t_{v-1} \leq t < t_v$  ( $v = 1, \dots, p$ ;  $t_0 = 0, t_p = 1$ ) eingeteilt und, für jedes  $v = 1, \dots, p$ , die  $v$ -te Teilstrecke eineindeutig und stetig auf die Jordankurve  $\Gamma_v$  bezogen, welche zur Berandung von  $G$  gehört ( $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_p$ ), so daß der Randpunkt  $\zeta(t)$  von  $G$  den Rand  $\Gamma$  in positiver Richtung in bezug auf  $G$  durchläuft, wenn  $t$  stetig von 0 bis 1 wächst. Es sei  $\alpha(t)$  derjenige Teil des Randes  $\Gamma$ , der dem Intervall  $(0, t)$  entspricht.

Man beweist nun, daß  $\omega(z, \alpha(t))$  für jedes feste  $z$  eine *monoton zunehmende* und *stetige* Funktion von  $t$  ist. Sei nämlich  $\Delta t > 0$  und  $\Delta \alpha$  derjenige Teil von  $\Gamma$ , welcher dem Intervall  $t, t + \Delta t$  zugeordnet ist. Wegen der Additivität von  $\omega$  ist  $\Delta \omega = \omega(z, \alpha(t + \Delta t)) - \omega(z, \alpha(t)) = \omega(z, \Delta \alpha)$ , also der Zuwachs  $\Delta \omega$  positiv und  $\omega$  somit zunehmend. Um den Endpunkt  $\zeta(t)$  von  $\Delta \alpha$  schlage man den kleinsten Kreis  $|z - \zeta(t)| \leq \varrho_{\Delta}$ , der diesen Bogen  $\Delta \alpha$  enthält. Wegen der Stetigkeit des Randpunktes  $\zeta$  als Funktion von  $t$  ist  $\varrho_{\Delta} \rightarrow 0$  für  $\Delta t \rightarrow 0$ . Ist nun  $|z - \zeta(t)| \leq d$  ein Kreis, der das ganze Gebiet  $G$  enthält, so hat man in

$$u(z) = \log \frac{d}{|z - \zeta(t)|} : \log \frac{d}{\varrho_{\Delta}}$$

eine in  $G$  harmonische Funktion, die daselbst *nicht negativ* und im Kreise  $|z - \zeta(t)| < \varrho_{\Delta}$ , also speziell auf dem Bogen  $\Delta \alpha$ , größer als 1 ist. Diese

Funktion bildet somit eine Majorante des harmonischen Maßes  $\Delta\omega = \omega(z, \Delta\alpha)$ , und wegen  $u(z) \rightarrow 0$  für ein festes  $z$  und  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\varrho_{\Delta} \rightarrow 0$  gilt hierbei auch  $\Delta\omega \rightarrow 0$ . Das harmonische Maß ist rechtsseitig stetig; die linksseitige Stetigkeit ergibt sich durch eine vollkommen analoge Betrachtung.

Es besteht somit eine eindeutige und stetige Zuordnung zwischen den Intervallen  $0 \leq t < 1$  und  $0 \leq \omega < 1$ . Durchläuft  $\omega$  dieses Intervall, so beschreibt also der Randpunkt  $\zeta(t)$  den vollen Rand  $\Gamma$  in positiver Richtung und umgekehrt.

22. Nach dieser Vorbereitung können wir nun zeigen, daß die Lösung  $u(z)$  des S. 22 vorgelegten Randwertproblems die Darstellung

$$u(z) = \int_0^1 u(\zeta) d\omega \quad (2)$$

gestattet, mit  $\omega = \omega(z, \alpha(t))$  und  $\zeta = \zeta(t)$ . Für den besonderen Fall, wo  $G$  der Einheitskreis ist, wurde dies bereits in Nr. 17 gezeigt; in diesem Falle geht nämlich die obige Darstellung in das Poissonsche Integral über. Im allgemeinen Fall sieht man durch eine, der auf S. 22 durchgeführten vollkommen analogen Betrachtung leicht ein, daß das Integral die geforderten Randeigenschaften besitzt. Ferner ist  $u(z)$  *beschränkt*; es variiert nämlich, wie aus (2) ersichtlich ist, zwischen der oberen und unteren Grenze der als beschränkt vorausgesetzten Randbelegung  $u(\zeta)$ . Schließlich ist das Integral (2) eine innerhalb  $G$  *harmonische* Funktion.

Die letzte Eigenschaft ergibt sich am einfachsten als eine Folgerung aus der Definition des Integrals als Grenzwert der Funktion

$$u_n(z) = \sum_1^n u(\zeta_\nu) \Delta_\nu \omega$$

für  $n \rightarrow \infty$ , wo  $\Delta_\nu \omega$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ) die harmonischen Maße eines Systems  $S_n$  von Teilbogen des Randes  $\Gamma$  sind, auf denen die Punkte  $\zeta_\nu$  beliebig zu nehmen sind, und die so gewählt werden müssen, daß ihre Durchmesser (maximale Entfernung zwischen zwei Punkten ein und desselben Bogens) für  $n \rightarrow \infty$  verschwinden. Diese Näherungsfunktion ist eine harmonische Funktion von  $z$  in  $G$  und da die Konvergenz in jedem inneren Teilbereich von  $G$  gleichmäßig ist<sup>1</sup>, so folgt die Harmonizität der Grenzfunktion  $u(z)$  mit Hilfe des WEIERSTRASSschen Satzes über gleichmäßig konvergente Folgen analytischer (oder harmonischer) Funktionen.

Aus den oben bewiesenen Eigenschaften des Integrals geht hervor, daß es, wie behauptet wurde, tatsächlich die Lösung des Randwertproblems darstellt.

<sup>1</sup> Für den Beweis der Gleichmäßigkeit hat man zunächst die Unstetigkeitsstellen von  $u(\zeta)$  durch kleine Bogen zu isolieren, die für einen gegebenen inneren Bereich von  $G$  vom harmonischen Maß  $< \varepsilon$  sind; der übrige Teil der Summe unterscheidet sich dann vom Integral durch einen Betrag, der kleiner ist als die Schwankung von  $u(\zeta)$  auf den entsprechenden Bogen  $S_n$ .

#### § 4. GREENSche Funktion und harmonisches Maß.

23. Unter gewissen spezielleren Voraussetzungen über den Rand  $\Gamma$  des Gebietes  $G$ , läßt sich für die Lösung  $u(z)$  eine zweite Integraldarstellung mit Hilfe der GREENSchen Funktion  $g(x, y)$  des Gebietes  $G$  aufstellen. In diesem Paragraphen wollen wir einige grundlegende Eigenschaften dieser Funktion besprechen.

1.  $g(x, y)$  ist eine innerhalb  $G$  harmonische Funktion des Punktes  $z = x$ , außer für  $x = y$ , in welchem Punkt sie positiv unendlich ist, so daß

$$g(x, y) + \log |x - y|$$

auch für  $x = y$  harmonisch ist.

2.  $g(x, y)$  verschwindet in jedem Randpunkt  $x = \zeta$  des Gebietes  $G$ .

Gemäß dem Minimumprinzip ist  $g(x, y)$ , die in jedem Randpunkt des in  $x = y$  punktierten Gebietes nichtnegativ ist, in jedem inneren Punkt von  $G$  positiv.

Die unter 1 erwähnte, im ganzen Gebiete  $G$  harmonische Funktion hat die Randwerte  $\log |\zeta - y|$  und läßt folglich nach 2 die Darstellung zu:

$$g(x, y) + \log |x - y| = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\zeta - y| d\omega(x, \alpha(t)).$$

Hieraus ist speziell ersichtlich, daß  $g(x, y)$  auch in bezug auf die Veränderliche  $y$  harmonisch ist. Diese Bemerkung erlaubt auf eine wichtige Symmetrieeigenschaft der GREENSchen Funktion zu schließen: Der Ausdruck  $d(x, y) = g(x, y) - g(y, x)$  ist eine harmonische Funktion von sowohl  $x$  als  $y$ ; läßt man zunächst  $x$  variieren, so hat  $g(x, y)$  die Randwerte Null, während  $g(y, x)$  jedenfalls nicht negativ ist. Also ist  $\lim_{d \rightarrow 0} d \leq 0$  in jedem Randpunkt  $x = \zeta$  und es folgt aus dem Maximumprinzip, daß dann überhaupt  $d \leq 0$  ist. Wiederholt man nun dieselbe Schlußweise für die Veränderliche  $y$ , so ergibt sich andererseits, daß  $d \geq 0$ . Also muß  $d(x, y)$  identisch verschwinden, und es gilt demnach die Symmetrie

$$g(x, y) = g(y, x).$$

24. Wir nehmen nun speziell an, daß die Randkurven  $\Gamma$  von  $G$  glatt<sup>1</sup> und die GREENSche Funktion daselbst stetig differenzierbar sind. Beide Voraussetzungen sind gleichzeitig z. B. dann erfüllt, wenn  $\Gamma$  analytisch ist; denn dann läßt sich  $g(x, y)$  gemäß dem Spiegelungsprinzip harmonisch über  $\Gamma$  fortsetzen. Weiter setzen wir voraus, daß auch die mittels der Randwerte  $u(\zeta)$  konstruierte harmonische Funktion  $u(z)$  auf dem Rand  $\Gamma$  stetig differenzierbar sei<sup>2</sup>. Wir können dann von der GREENSchen Integrationsformel

$$\int_{\Gamma} \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = - \int_G (U \Delta V - V \Delta U) d\sigma$$

<sup>1</sup> D. h. stetig und mit einer stetig veränderlichen Tangente versehen.

<sup>2</sup> Falls  $\Gamma$  analytisch ist, so ist hierzu hinreichend, daß die Randfunktion  $u(\zeta)$  in bezug auf die Bogenlänge von  $\Gamma$  stetig differenzierbar ist.

Gebrauch machen, wo  $U$  und  $V$  in  $G$  zweimal und auf dem Rande  $\Gamma$  einmal stetig differenzierbare Funktionen sind,  $ds$  das Bogenelement von  $\Gamma$  und  $d\sigma$  das Flächenelement von  $G$  bezeichnet;  $\Delta$  bedeutet den LAPLACEschen Operator und die Ableitungen links sind nach der inneren Normale von  $\Gamma$  zu nehmen. Für  $U(z)$  setze man die oben konstruierte Funktion  $u(z)$  ein; als Funktion  $V(z)$  nehme man die GREENSCHE Funktion  $g(z, z_0)$  von  $G$ . Isoliert man nun den Pol  $z = z_0$  durch einen kleinen Kreis vom Radius  $\rho$  und setzt dann die Transformationsformel im übriggebliebenen Teil von  $G$  an, so ergibt sich unter Beachtung der Eigenschaft 1 der GREENSCHEN Funktion durch den Grenzübergang  $\rho \rightarrow 0$  folgende Darstellung, wo wir statt  $z_0$  einfach  $z$  geschrieben und den beweglichen Randpunkt durch  $\zeta$  bezeichnet haben,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(\zeta) \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} ds. \quad (3)$$

25. Setzen wir speziell die Randkurven  $\Gamma_v$  *analytisch* an und halten die für die Gültigkeit der Formel (3) nötigen Voraussetzungen über das Verhalten der Funktion  $u(z)$  auf  $\Gamma$  aufrecht, so können wir diese Formel auf eine einfachere Form bringen, wenn wir die zu  $g(\zeta, z)$  konjugierte harmonische Funktion *in bezug auf die Veränderliche*  $\zeta$  einführen. Diese Funktion  $-h(\zeta, z)$  ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt und gestattet nach 1, Nr. 23 eine Entwicklung der Form

$$h(\zeta, z) = \arg(\zeta - z) + v(z),$$

wo  $v(z)$  eine in der Umgebung von  $\zeta = z$  eindeutige harmonische Funktion ist. Beschreibt  $\zeta$  einen kleinen Kreis in positiver Umlaufrichtung um den Pol  $z$ , so erhält  $h$  den Zuwachs  $2\pi$ . Ist  $G$  mehrfach zusammenhängend, so erfährt auch  $v(z)$  im allgemeinen gewisse additive Zuwächse (Periodizitätsmoduln), wenn  $\zeta$  die inneren Randkurven  $\Gamma_2, \dots, \Gamma_p$  umkreist.

Nach den CAUCHY-RIEMANNschen Gleichungen ist in einem Randpunkt  $\zeta$

$$\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} = \frac{\partial h(\zeta, z)}{\partial s},$$

wo die letzte Ableitung in der positiven Richtung des Randbogenelements  $ds$  zu nehmen ist, und es wird also gemäß (3)

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(\zeta) dh(\zeta, z), \quad (4)$$

wobei der Punkt  $\zeta$  den Rand in positiver Richtung durchläuft.

Ein Vergleich mit der Integraldarstellung (2) (II, § 3) weist auf einen Zusammenhang zwischen der Funktion  $h$  und dem harmonischen Maß  $\omega(z, \alpha)$  eines Bogens  $\alpha = \alpha(\zeta)$  hin, der von einem willkürlichen festen Randpunkt  $\zeta_0$  und dem beweglichen Randpunkt  $\zeta$  begrenzt wird. In

der Tat findet man auch, wenn man das harmonische Maß des Randbogens  $\alpha(\zeta_1)$  durch die Formel (4) darstellt, wobei man also  $u(\zeta) = 1$  für alle Punkte von  $\alpha$  und  $u(\zeta) = 0$  für alle übrigen Randpunkte zu setzen hat,

$$\omega(z, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta_0 \zeta_1} dh(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} (h(\zeta_1, z) - h(\zeta_0, z)).$$

*Das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha)$  ist also gleich dem durch  $2\pi$  dividierten Zuwachs, den die zur GREENSchen Funktion  $g(\zeta, z)$  (in bezug auf  $\zeta$ ) konjugierte harmonische Funktion  $-h(\zeta, z)$  erfährt, wenn  $\zeta$  den Bogen  $\alpha$  in negativer Richtung durchläuft.*

**26.** Dieses Resultat haben wir unter gewissen speziellen Stetigkeitsvoraussetzungen über den Rand  $\Gamma$  hergeleitet. Kehren wir nun wieder zu der ursprünglichen Annahme zurück, daß nämlich die Randkurven  $\Gamma_v$  ganz beliebige Jordankurven sind, so existiert immer noch sowohl die GREENSche Funktion von  $G$  und somit auch ihre konjugierte Funktion  $-h$ , wie auch das harmonische Maß eines jeden Randbogens  $\alpha$ , und es entsteht also die Frage, ob der obige Zusammenhang auch unter diesen allgemeinen Voraussetzungen gilt. Es soll gezeigt werden, daß dies tatsächlich der Fall ist.

Zu diesem Zweck muß zunächst die Stetigkeit der Funktion  $h$  auf dem Gebietsrand nachgewiesen werden.

Geht man mittels der Funktion  $z = z(x)$ , welche den Einheitskreis  $|x| < 1$  auf die universelle Überlagerungsfläche  $G^\infty$  abbildet, zu der Funktion  $g(z(x), z_0)$  über, so ist sie, wegen der eineindeutigen und stetigen Zuordnung der Bogen  $\Gamma_v$  und  $\gamma_v^i$  (vgl. Nr. 15) auf jedem solchen Peripheriebogen  $\gamma_v^i$  stetig gleich Null und somit nach dem Spiegelungsprinzip harmonisch. Hieraus folgt, daß die konjugierte Funktion  $-h(z(x), z_0)$  ebenfalls auf  $\gamma_v^i$  harmonisch und also jedenfalls stetig ist. Folglich ist auch  $h(z, z_0)$  auf den Randbogen  $\Gamma_v$  stetig, was zu beweisen war.

Die Niveaulinien von  $g(x, y)$  und  $h(x, y)$  sind, für eine feste Lage des Poles  $y$ , zueinander orthogonal. Für große Werte der Konstante  $\lambda > 0$  schließt sich die Linie  $g(x, y) = \lambda$  um den Pol  $x = y$ , erweitert sich bei abnehmenden  $\lambda$ , um im Falle eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes  $G$  ( $p > 1$ ) für einen gewissen Wert  $\lambda$  sich selbst zu schneiden. Nachher zerfällt die Niveaulinie in mehrere getrennte, geschlossene Teile, deren Anzahl von einem gewissen Wert  $\lambda$  ab gleich  $p$  ist; diese  $p$  geschlossenen Kurven gehen für  $\lambda \rightarrow 0$  in die  $p$  Randkurven  $\Gamma_v$  stetig über. Dies alles ist mit Hilfe des Prinzips über das Minimum einer harmonischen Funktion leicht einzusehen.

Von besonderem Interesse sind diejenigen Punkte des Gebietes, in denen die GREENSchen Niveaulinien sich selbst schneiden. *Die Anzahl dieser Punkte beträgt  $p - 1$ .*

Um dies einzusehen bemerke man, daß die analytische Funktion  $f(x) = g(x, y) - ih(x, y)$  von  $x$  in jedem Punkt  $x + y$  von  $G$  regulär ist und auf geschlossenen, den Punkt  $y$  vermeidenden Wegen wegen der Eindeutigkeit ihres reellen Teiles Zuwächse erhält, die sich aus rein imaginären Periodizitätsmoduln linear (mit ganzzahligen Koeffizienten) zusammensetzen; die Periodizitätsmoduln sind gleich den Zuwächsen, welche  $h(x, y)$  erfährt, wenn  $x$  je eine der Randkurven  $\Gamma_2, \dots, \Gamma_p$  oder den Pol  $y$  umkreist. Hieraus folgt, daß die Ableitung  $f'(x)$  innerhalb  $G$  regulär und *eindeutig* ist. In jedem Punkt  $x$ , wo  $f' \neq 0$ , ist die von der Funktion  $f$  vermittelte Abbildung konform und durch den Punkt geht also eine reguläre  $g$ -Linie und eine zu dieser senkrechte  $h$ -Linie. Ist dagegen  $f'(x) = 0$  von der Ordnung  $k \geq 1$ , so ist jene Abbildung nicht konform; die Stelle  $x$  erscheint dann als Schnittpunkt von  $k+1$  verschiedenen Zweigen einer  $g$ -Linie und von  $k+1$  trennenden Zweigen einer  $h$ -Linie; die Tangenten dieser Zweige im Punkte  $x$  teilen die Ebene in gleiche Winkel der Größe  $\frac{\pi}{2(k+1)}$ . Die obenerwähnten Schnittpunkte der  $g$ -Linie sind also mit den Nullstellen von  $f'(x)$  identisch.

Um die Anzahl dieser Stellen zu berechnen, nehme man jetzt eine so große Zahl  $\lambda_1 > 0$  und eine so kleine Zahl  $\lambda_2 > 0$ , daß die Niveaulinie  $g = \lambda$  für  $\lambda = \lambda_1$  eine den Pol  $x = y$  umgebende Jordankurve ist, während  $g = \lambda_2$  in  $p$  getrennte Jordankurven zerfällt. In den Gebieten  $g \geq \lambda_1$ , und  $g \leq \lambda_2$  ist dann sicher  $f'(x) \neq 0$ . Nach dem Prinzip der Variation des Arguments einer analytischen Funktion ist die Anzahl der Nullstellen von  $f'$  innerhalb des Gebietes  $\lambda_1 > g > \lambda_2$  gleich dem Zuwachs von  $\arg f'$  bei einem positiven Umlauf um den gesamten Gebietsrand, dividiert durch  $2\pi$ . Nun ist, wenn  $ds$  ein Bogenelement einer  $g$ -Linie ist,  $\frac{\partial g}{\partial s} = 0$  und daher, wenn man das Differential  $dx$  mit dem positiv gerichteten Element des Randes vom Gebiete  $\lambda_1 > g > \lambda_2$  zusammenfallen läßt, in jedem Randpunkt

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = -i \frac{dh}{dx},$$

somit  $\arg f'(x) = -\arg dx + \text{const.}$  Bei einem positiven Umlauf erhält der Richtungswinkel  $dx$  den Zuwachs  $2\pi$  auf der äußersten Kurve  $g = \lambda_2$  während er auf jeder der  $p-1$  inneren Kurven  $g = \lambda_2$  und auf  $g = \lambda_1$  um  $2\pi$  abnimmt. Die gesamte Zunahme von  $\arg f'$  ist somit gleich  $2\pi(p-1)$ , woraus ersichtlich wird, daß die gesamte Anzahl der Nullstellen von  $f'$ , welche mit den Verzweigungsstellen der  $g$ -Linien zusammenfallen, tatsächlich gleich  $p-1$  ist.

Über den Verlauf der  $h$ -Linien ist folgendes zu bemerken: Falls  $G$  einfach zusammenhängend ist, so ist  $-g + ih$  einfach gleich dem Logarithmus der Abbildungsfunktion, welche  $G$  in den Einheitskreis überführt, so daß der Pol  $x = y$  dem Nullpunkt entspricht. Die  $h$ -Linien erscheinen also als Bilder der Radien des Einheitskreises; sie strömen

folglich vom Pole  $x=y$  aus, so daß zwei Linien, welche den Werten  $h_1, h_2$  entsprechen, sich unter dem Winkel  $h_2 - h_1$  schneiden, und münden in bestimmte Randpunkte aus. Wenn der Randpunkt einen vollen Umlauf (in positiver Richtung) beschreibt, so nimmt der  $h$ -Wert um  $2\pi$  zu.

Im Falle eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes ist die Funktion

$$t = e^{-g + ih}$$

nicht mehr eindeutig in  $G$ . Beschränkt man sich jedoch auf ein Teilgebiet  $g > \lambda > 0$ , wo  $\lambda$  so groß gewählt wird, daß dieses Teilgebiet  $G_\lambda$  einfach zusammenhängend wird, so gibt die obige Exponentialfunktion eine eineindeutige und konforme Abbildung von  $G_\lambda$  auf den Kreis  $|t| < e^{-\lambda}$ , woraus zu ersehen ist, daß die  $h$ -Linien im Gebiete  $G_\lambda$  das oben beschriebene einfache Verhalten aufweisen. Auch im Falle eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes gilt also, daß die vom Pole ausströmenden  $h$ -Linien dem Wertintervall  $(0, 2\pi)$  zugeordnet sind, so daß zwei den Werten  $h_1, h_2$  entsprechende Linien einen Winkel der Größe  $h_2 - h_1$  einschließen.

Außerhalb des Gebietes  $G_\lambda$  werden gewisse (endlich viele)  $h$ -Linien einander schneiden, und zwar in den oben besprochenen Verzweigungsstellen der  $g$ -Linien. Jede solche  $h$ -Linie spielt die Rolle einer *Grenzlinie*,

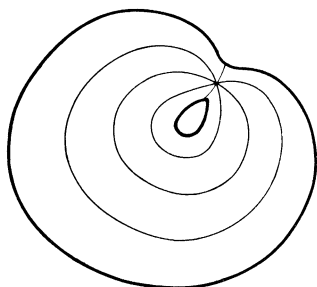


Abb. 4.

welche die unmittelbar kleineren und größeren Werten entsprechenden  $h$ -Linien in zwei Gruppen teilt, die auf *verschiedenen* Randkurven  $\Gamma_v$  enden. Durch jeden Verzweigungspunkt gehen mindestens zwei Zweige einer solchen Grenzlinie und aus Segmenten dieser Zweige läßt sich stets ein Bogen zusammensetzen, der jene zwei Randkurven miteinander verbindet, ohne durch den Pol zu gehen. Man vergleiche hierzu Abb. 4, welche den Verlauf der Grenzlinien im Falle  $p=2$  darstellt.

Nunmehr läßt es sich leicht zeigen, daß das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha)$  eines Randbogens  $\alpha$  gleich dem Zuwachs von  $h(\zeta, z)$  auf diesem Bogen ist. Zieht man nämlich die den Endpunkten von  $\alpha$  entsprechenden  $h$ -Linien:  $h = h_1, h = h_2$  ( $0 \leq h_2 - h_1 \leq 2\pi$ ), so schneiden diese aus der Niveaulinie  $g = \lambda > 0$  einen Bogen  $\alpha_\lambda$  aus, der für  $\lambda \rightarrow 0$  stetig in  $\alpha$  übergeht. Ist nun  $G_\lambda$  das durch  $g > \lambda$  definierte Gebiet, so ist nach S. 30

$$2\pi \omega(z, \alpha_\lambda, G_\lambda) = h_2 - h_1.$$

Andererseits strebt die Kurve  $g = \lambda$  für  $\lambda \rightarrow 0$  gegen den Rand  $\Gamma$ , woraus unter Beachtung der definierenden Eigenschaften des harmonischen Maßes folgt, daß der absolute Betrag der Differenz

$$\omega(z, \alpha, G) - \omega(z, \alpha_\lambda, G_\lambda)$$



für hinreichend kleines  $\lambda$  auf  $g = \lambda$  beliebig klein gemacht werden kann; nach dem Prinzip vom Maximum gilt also dasselbe im ganzen Gebiet  $G_\lambda$  und man schließt infolgedessen, daß die obige Differenz im gegebenen Punkte  $z$  für  $\lambda \rightarrow 0$  verschwindet. Also ist auch

$$2\pi\omega(z, \alpha, G) = h_2 - h_1, \text{ w. z. b. w.}$$

Aus dem Obigen ergibt sich gleichzeitig eine neue geometrische Deutung des harmonischen Maßes:

*Das harmonische Maß eines Randbogens in einem Punkt  $z$  ist gleich dem durch  $2\pi$  dividierten Winkel, den die von  $z$  zu den Endpunkten des Bogens laufenden  $h$ -Linien einschließen.*

## § 5. Über die Niveaulinien des harmonischen Maßes.

27. Falls  $G$  der Einheitskreis und  $\alpha$  ein Peripheriebogen ist, der die volle Peripherie nicht umfaßt, so fallen die Niveaulinien  $K_\lambda$ :

$$\omega(z, \alpha, G) = \lambda \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

mit denjenigen Kreisbogen zusammen, welche die Endpunkte von  $\alpha$  verbinden. Durch konforme Abbildung schließt man hieraus, daß das System der Niveaulinien ein analoges Verhalten aufweist, wenn  $\alpha$  ein Randbogen eines von einer Jordankurve  $I'$  begrenzten Gebietes  $G$  ist: Die Linie  $K_\lambda$  endet in den Endpunkten von  $\alpha$  und streicht einmal über die Fläche  $G$ , wenn  $\lambda$  von 0 bis 1 wächst.

28. In dem allgemeinen Fall, wo  $\alpha$  aus mehreren (endlich vielen) Randbogen eines von endlich vielen Jordanbogen  $I'_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, p$ ) begrenzten Gebietes  $G$  ist, zerfallen die  $\omega$ -Linien im allgemeinen in mehrere getrennte Zweige. Da  $\omega = 1$  oder 0 in jedem inneren Punkt von  $\alpha$ , bzw. von dem Komplementärbogen  $\beta$  ist, so können die Linien für  $0 < \lambda < 1$  hier nicht enden. Es sind also nur zwei Fälle möglich: entweder sie enden in den Endpunkten von  $\alpha$ , oder aber sind sie geschlossen, in welchem Falle sie ein oder mehrere Randbogen  $I'_\nu$  einschließen müssen (wie überhaupt jede geschlossene Teilbogen einer Niveaulinie).

Wir betrachten nun die analytische Funktion

$$\varphi(z, \alpha, G) = \omega(z, \alpha, G) + i\bar{\omega}(z, \alpha, G)$$

wo  $\bar{\omega}$  die zu  $\omega$  konjugierte Funktion bezeichnet;  $\bar{\omega}$  ist bis auf eine additive Konstante bestimmt. Im Falle eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes ( $p > 1$ ) erhält sie auf geschlossenen Wegen Zuwächse, die von  $p - 1$ , den inneren Randkurven  $I'_2, \dots, I'_{p-1}$  entsprechenden Periodizitätsmoduln linear abhängig sind.

Wenn nun  $G$  speziell eine Halbebene und  $\alpha$  ein Segment  $(z_1, z_2)$  ihrer Begrenzungsgeraden ist, so hat  $\omega$  die Form

$$\frac{1}{\pi} \arg \frac{z - z_2}{z - z_1}$$

und es ist also

$$\varphi = \frac{i}{\pi} \log \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

woraus zu sehen ist, daß diese Funktion das Innere von  $G$  auf den Parallelstreifen

$$0 < \omega < 1 \quad (P)$$

der  $\varphi = \omega + i\bar{\omega}$ -Ebene eineindeutig und konform abbildet. Entsprechendes gilt somit auch, wenn  $G$  von einer beliebigen Jordankurve  $\Gamma$  begrenzt ist, auf welcher der Bogen  $\alpha$  liegt. In der Abbildung  $G \rightarrow P$  entsprechen die Unstetigkeitspunkte von  $\omega(z)$  den unendlich fernen Randpunkten  $\bar{\omega} = \pm \infty$ .

**29.** Falls  $p > 1$  oder  $\alpha$  aus mehreren Bogen zusammengesetzt ist, so fallen die Werte der Funktion  $\varphi$  offenbar immer noch auf den Parallelstreifen  $P$ ; die Abbildung ist aber nicht mehr im Innern von  $G$  ausnahmslos konform. Als Ausnahmestellen erscheinen die Nullstellen, der Ableitung  $\varphi'(z)$ , die, wie aus den oben erklärten Eigenschaften von  $\varphi(z)$  folgt, innerhalb  $G$  eindeutig und regulär ist. Diese Nullstellen sind Verzweigungsstellen der Niveaulinien  $\omega = \lambda$ .

Wir beweisen zunächst, daß die Verzweigungsstellen sich nicht gegen den Rand  $\Gamma$  häufen können. Zu diesem Zwecke nehmen wir einen Randpunkt  $\zeta$ , der z. B. auf der äußersten Randkurve  $\Gamma_1$  liegen möge, und bilden das von  $\Gamma_1$  begrenzte Gebiet, das  $G$  als Teilgebiet enthält, auf die Halbebene  $\Im x > 0$  konform ab. Die Funktion  $\varphi$  geht in eine, in einem Teilgebiet  $G^*$  dieser Halbebene definierte reguläre Funktion  $\varphi^*(x)$  über; der Kurve  $\Gamma_1$  entspricht die reelle Achse und dem Punkt  $\zeta$  ein Punkt  $\xi$ , in dessen Umgebung das Verhalten von  $\varphi^*$  untersucht werden soll.

Wenn nun  $\zeta$  ein Stetigkeitspunkt des harmonischen Maßes  $\omega$  ist, so nimmt diese Funktion auf einem den Punkt  $\xi$  umgebenden Segment entweder den Wert 0 oder den Wert 1 an und ist also gemäß dem Spiegelungsprinzip in einer gewissen Umgebung  $|x - \xi| \leq r$  von  $\xi$  harmonisch; die Funktion  $\varphi^*$  ist also hier regulär. Ferner ist  $\varphi'(\xi) \neq 0$ . Denn  $\varphi^*$  nimmt für  $x = \xi$  einen auf die Begrenzung des Parallelstreifens  $P$  fallenden Wert an, während seine Werte in dem Teil des Kreises  $|x - \xi| \leq r$  oberhalb der reellen Achse innerhalb  $P$  liegen. Wäre nun  $\varphi^*(\xi) = 0$ , so müßte  $\varphi^*$  in diesem Halbkreis auch Werte außerhalb von  $P$  annehmen.

Da also  $\varphi^{*'}(\xi) \neq 0$  ist, so kann man eine Umgebung von  $\xi$  finden, wo die Ableitung  $\varphi^{*'}$  überall von Null verschieden ist. Dieser Umgebung entspricht in der  $z$ -Ebene eine Umgebung des Randpunktes  $\zeta$ ; hier ist  $\varphi'(z) = \frac{d\varphi^*}{dx} \frac{dx}{dz}$ , und da  $\frac{dx}{dz}$  wegen der Konformität der Hilfsabbildung von Null verschieden ist, so schließt man, daß der Punkt  $\zeta$  nicht ein Häufungspunkt der Nullstellen von  $\varphi'$  sein kann.

Dasselbe gilt auch, wenn  $\zeta$  Endpunkt eines Bogens  $\alpha$  ist. Sei  $\zeta$  ein „Anfangspunkt“ eines Bogens  $\alpha$ ; d. h. der Randpunkt bewege sich in *positiver* Umlaufsrichtung, wenn er, von  $\zeta$  ausgehend, den Bogen  $\alpha$  durchläuft. Der reelle Teil  $\omega$  der transformierten Funktion  $\varphi^*(x)$  nimmt dann auf dem Segment  $0 < x - \xi < \rho$  der reellen Achse den Wert 1, auf dem Segment  $0 > x - \xi > -\rho$  den Wert Null an (für hinreichend kleines  $\rho > 0$ ). Dieselbe Eigenschaft besitzt die Funktion

$$\varphi_1 = \frac{1}{i\pi} \log \frac{1}{\xi - x},$$

welche die obere Halbebene auf den Parallelstreifen  $P$  abbildet, so daß dem Teil  $x > \xi$  der reellen Achse die Gerade  $\omega = 1$ , dem Teil  $x < \xi$  die Gerade  $\omega = 0$  zugeordnet ist. Also ist der reelle Teil von

$$\psi(x) = \varphi^* - \varphi_1$$

in jedem Punkt  $0 < |x - \xi| \leq \rho$  der reellen Achse stetig und gleich Null, während er in der Umgebung von  $x = 0$  jedenfalls beschränkt ist. Folglich ist nach dem Spiegelungsprinzip  $\psi(x)$  im Kreise  $|x - \xi| \leq \rho$  regulär analytisch, und man hat also für  $\varphi^*$  die Entwicklung

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{i\pi} \log \frac{1}{\xi - x} + \psi(x) \quad (5)$$

und

$$\varphi^{*'}(x) = \frac{1}{i\pi} \frac{1}{\xi - x} + \psi'(x),$$

woraus zu ersehen ist, daß die Funktion  $\bar{\omega}(z, \alpha, G)$  für  $z \rightarrow \zeta$  gegen  $-\infty$  strebt und daß  $\frac{d\varphi^*}{dx}$  den Grenzwert unendlich hat. Die Ableitung

$\varphi'(z) = \frac{d\varphi^*}{dx} \frac{dx}{dz}$  ist somit in der Umgebung von  $\zeta$  von Null verschieden.

Aus (5) ist weiter zu sehen, daß die Funktion  $\varphi^*(x)$  den Halbkreis  $|x - \xi| < r$ ,  $\Im x > 0$  auf ein gewisses Teilgebiet  $P_r$  von  $P$  eindeutig und konform abbildet, sobald  $r$  hinreichend klein ist. Um dies streng zu beweisen, schreiben wir  $x - \xi = r e^{i\theta}$  und erhalten aus (5), wenn wir wieder  $\varphi^* = \omega + i\bar{\omega}$  schreiben und  $\psi = u + iv$  setzen,

$$\omega = -\frac{\theta}{\pi} + u + 1$$

und

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = -\frac{1}{\pi} + \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Nach den CAUCHY-RIEMANNschen Gleichungen ist hier  $\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$ , wo  $\frac{\partial v}{\partial r}$  wegen der Harmonizität von  $v$  in der Umgebung von  $x = \xi$  beschränkt ist. Also strebt  $\frac{\partial u}{\partial \theta} \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow 0$  und es ist folglich  $\frac{\partial \omega}{\partial \theta}$  jedenfalls *negativ* für jedes hinreichend kleine  $r$ .

Wir nehmen nun  $r$  so klein an, daß die letzte Eigenschaft im Halbkreis  $|x - \xi| \leq r$  gilt. Auf dem Halbkreisbogen  $|x - \xi| = r$  ist dann  $\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} < 0$ , und der Punkt  $\varphi^* = \omega + i \bar{\omega}$  beschreibt also, wenn  $x = r e^{i \vartheta}$  jenen Bogen durchläuft, einen Kurvenbogen  $b_r$ , der doppelpunktfrei ist und die Geraden  $\omega = 0$ ,  $\omega = 1$  miteinander verbindet. Dieser Querschnitt  $b_r$  teilt  $P$  in zwei einfach zusammenhängende Teile, von denen der untere,  $P_r$ , als Bild des Halbkreises erscheint. Aus obigem folgt, daß die Berandungen dieser beiden Gebiete eineindeutig und konform aufeinander bezogen sind. Daß auch die Inneren der Gebiete eineindeutig und konform einander entsprechen, folgt bei Beachtung der Relation

$$\left| \frac{d\varphi^*}{dx} \right|^2 = \left( \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \right)^2$$

in bekannter Weise aus dem Argumentprinzip oder auch daraus, daß sowohl  $\varphi^*$  im Halbkreis als auch seine Umkehrfunktion in  $P_r$  unbeschränkt fortsetzbar ist; beide definieren somit nach dem Monodromiesatz *eindeutige* Funktionen.

Es sei noch bemerkt: Wenn man einmal die Zahl  $r$  so klein gewählt hat, daß das obenstehende Resultat im Halbkreis  $|x - \xi| < r$  für eine gewisse Wahl des Zweiges  $\varphi^*$  gilt, so besteht dasselbe Ergebnis für *alle* Zweige von  $\varphi^*$  in demselben Halbkreis. Zwei Zweige von  $\varphi^*$  unterscheiden sich nämlich nur durch eine additive, imaginäre Konstante und die Vertauschung von Zweigen hat also nur eine Parallelverschiebung des Gebietes  $P_r$  zur Folge.

Ein analoges Verhalten weist die Funktion in einem „Endpunkt“  $\zeta$  eines Bogens  $\alpha$  auf. Ein solcher Punkt ist dem unendlich fernen Punkt  $\bar{\omega} = +\infty$  des Parallelstreifens  $P$  zugeordnet.

**30.** Wir isolieren nun sämtliche Unstetigkeitspunkte  $\zeta$  durch kleine Bogen  $B$ , auf welchen  $\bar{\omega} = \text{const}$  ist. Nach obigem können diese so gewählt werden, daß sie einfach zusammenhängende Umgebungen jener Unstetigkeitspunkte abtrennen, in welchen die Ableitung  $\varphi'$  nicht verschwindet. Ferner können wir ein so kleines  $\varepsilon > 0$  finden, daß die Kurven  $\omega = \varepsilon$ ,  $\omega = 1 - \varepsilon$  doppelpunktfrei sind und ein Teilgebiet von  $G$  definieren, das sämtliche Nullstellen von  $\varphi'$  enthält. Es sei  $G_\varepsilon$  das von diesen Kurven und den Bogen  $B$  begrenzte Gebiet. Für ein hinreichend kleines  $\varepsilon$  setzt sich die Berandung  $\Gamma_\varepsilon$  von  $G_\varepsilon$  aus  $p$  verschiedenen Jordankurven zusammen, entsprechend den  $p$  Randkurven  $\Gamma_\nu$ .

Um jetzt die Anzahl der Nullstellen der Ableitung  $\varphi'$  zu bestimmen, berechnen wir den Zuwachs von  $\arg \varphi' = \arg d\varphi - \arg dz$  für einen positiven Umlauf auf  $\Gamma_\varepsilon$ . Wenn auf  $\Gamma_\nu$  insgesamt  $2k_\nu$  ( $k_\nu \geq 0$ ) Unstetigkeitspunkte liegen, so wird das Argument des Bogendifferentials  $d\varphi$  auf  $\Gamma_\nu$  um  $k_\nu \cdot 2\pi$  zunehmen, das Argument von  $dz$  wiederum um  $2\pi$  oder  $-2\pi$ , je nachdem  $\nu = 1$  oder  $\nu > 1$  ist. Der totale Zuwachs von  $\arg \varphi'$  ist

also  $2\pi(\Sigma k_p + p - 2)$  und wir schließen infolgedessen mit Hilfe des Argumentprinzips:

*Die Funktion  $\varphi'(z)$  hat im Gebiete  $G$  insgesamt  $n + p - 2$  Nullstellen, wo  $n$  die Anzahl derjenigen Bogen  $\alpha$  ist, welche nicht mit einer ganzen Randkurve  $\Gamma_p$  von  $G$  zusammenfallen.*

Dieselbe Zahl gibt die Anzahl der Verzweigungsstellen der Niveaulinien des harmonischen Maßes  $\omega(z, \alpha, G)$  an.

### III. Prinzip über das harmonische Maß und seine Anwendungen.

#### §1. Aufstellung und Begründung des Prinzips.

31. Von den Ergebnissen der zwei ersten Abschnitte brauchen wir im vorliegenden Kapitel vor allem die Existenz des harmonischen Maßes  $\omega(z, \alpha, G)$  eines Bogens  $\alpha$  in bezug auf ein von endlich vielen Jordanbogen ( $\alpha + \beta$ ) begrenztes Gebiet  $G$  im Punkte  $z$  dieses Gebietes; dieses Maß ist durch folgende Bedingungen eindeutig bestimmt:

1.  $\omega(z, \alpha, G)$  ist in  $G$  harmonisch und beschränkt;
2. Auf  $\alpha$  nimmt  $\omega$  den Wert 1, auf dem Komplementärbogen  $\beta$  den Wert 0 an.

Im folgenden werden wir das Verhalten des harmonischen Maßes bei konformen Abbildungen des gegebenen Gebietes  $G$  untersuchen.

Führt man eine *eindeutige*, im Innern von  $G$  konforme und auf dem Rand  $\Gamma = \alpha + \beta$  stetige Abbildung des Bereiches  $G + \Gamma$  auf einen Bereich  $G' + \Gamma'$  aus, so daß die Bogen  $\alpha, \beta$  in die Bogen  $\alpha', \beta'$  übergehen, so transformiert sich das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha, G)$  in eine Funktion des Bildpunktes  $z'$  von  $z$ . Da sich die Harmonizität einer Funktion bei konformen Abbildungen erhält, so ist diese letzte Funktion eine harmonische Funktion von  $z'$ ; ferner ist  $\omega$  beschränkt in  $G'$  und nimmt auf  $\alpha'$  den Wert 1 an, während es auf  $\beta'$  verschwindet. Die transformierte Funktion stimmt somit mit dem harmonischen Maß  $\omega(z', \alpha', G')$  überein, und es ist also

$$\omega(z', \alpha', G') = \omega(z, \alpha, G).$$

*Das harmonische Maß ist gegenüber eindeutigen konformen Abbildungen des Bezugsgebietes invariant.*

Diese Eigenschaft gilt auch dann, wenn die Gebiete  $G$  und  $G'$  mehrfach überdeckt, also RIEMANNSche Flächenstücke sind.

32. Bei eindeutigen, aber nicht umkehrbar eindeutigen, d. h. *mehrwertigen* konformen Abbildungen verhält sich das harmonische Maß i. a. nicht mehr invariant. Als Beispiel transformieren wir den Einheitskreis  $|z| \leq 1$ , auf dessen Peripherie wir gewisse beliebige Bogen  $\alpha$  wählen, durch die Funktion  $z' = z^2$ , welche  $|z| \leq 1$  in  $|z'| \leq 1$  und  $\alpha$  in gewisse

Bogen  $\alpha'$  des Kreises  $|z'|=1$  überführt. Dann ist im allgemeinen nicht  $\omega(z, \alpha)$  gleich  $\omega(z', \alpha')$ , wo beide Maße in bezug auf den Einheitskreis berechnet sind. Denn der Kreis  $|z|\leq 1$  wird *eindeutig* auf die zweiblättrige Kreisfläche  $|z|\leq 1$  abgebildet; und bei dieser Abbildung entspricht den über  $\alpha'$  liegenden Bogen, welche in bezug auf den zweiblättrigen Kreis ebenfalls das harmonische Maß  $\omega(z', \alpha')$  haben, eine Punktmenge von  $|z|=1$ , welche, außer den Bogen  $\alpha$ , i. a. noch gewisse andere Bogen  $\bar{\alpha}$  enthält. Wegen der Invarianz des harmonischen Maßes gegenüber eindeutigen Abbildungen ist nun das harmonische Maß dieser Punktmenge gleich dem Maß von  $\alpha'$ , also

$$\omega(z', \alpha') = \omega(z, \alpha) + \omega(z, \bar{\alpha}),$$

woraus zu sehen ist, daß das harmonische Maß der Bogen  $\alpha$  sich durch unsere Abbildung *vergrößert* hat, außer in dem einzigen Fall, wo  $\alpha$  die *Gesamtheit* der den Bogen  $\alpha'$  zugeordneten Bogen enthält; d. h. falls  $\alpha$  gegenüber dem Automorphismus  $z \mapsto -z$ , welcher den Wert  $z' = z^2$  invariant läßt, selbst invariant ist.

**33.** Diese Vergrößerung des harmonischen Maßes ist nun eine allgemeine für eindeutige, mehrwertige Abbildungen geltende Tatsache, die sich unter gewissen speziellen Voraussetzungen durch eine der oben durchgeführten analoge Betrachtung begründen ließe. Wir wollen indes dieses Prinzip, welches von großer funktionentheoretischer Bedeutung ist, sogleich in einer hinreichend allgemeinen, für die Anwendungen geeigneten Fassung aussprechen und beweisen<sup>1</sup>:

**Prinzip über das harmonische Maß.** *In einem von endlich vielen Jordanbogen  $\Gamma_z$  begrenzten Gebiet  $G_z$  sei eine eindeutige und reguläre analytische Funktion  $w = w(z)$  gegeben, welche nachstehenden Bedingungen genügt:*

1. *Die Werte  $w$ , welche  $w(z)$  in  $G_z$  annimmt, fallen in ein von endlich vielen Jordanbogen  $\Gamma_w$  begrenztes Gebiet  $G_w$ .*

2. *In jedem Punkt  $\zeta$  gewisser gegebener Teilbogen  $\alpha_z$  von  $\Gamma_z$  ist  $w(\zeta)$  stetig und nimmt hier Werte an, die auf einen von endlich vielen Jordanbogen  $\alpha_w$  begrenzten (oder gebildeten)<sup>2</sup> Teilbereich  $A_w$  von  $G_w$  fallen.*

*Unter diesen Voraussetzungen gilt in jedem Punkt  $z$  von  $G_z$ , wo  $w(z)$  einen außerhalb  $A_w$  liegenden Wert annimmt,*

$$\omega(z, \alpha_z, G_z) \leq \omega(w(z), \alpha_w, G_w^*), \quad (1)$$

*wo  $G_w^*$  dasjenige Teilgebiet von  $G_w$  ist, welches  $w(z)$  enthält und von den Punkten  $\Gamma_w$  und  $\alpha_w$  begrenzt wird.*

*Beweis.* Sei  $z$  ein Punkt, wo  $w(z)$  außerhalb  $A_w$  fällt, und  $G_z^*$  dasjenige wohlbestimmte Teilgebiet von  $G_z$ , welches den Punkt  $z$  enthält

<sup>1</sup> R. NEVANLINNA [12].

<sup>2</sup> Wir beachten also auch die Möglichkeit, daß der „Bereich“  $A_w$  eindimensional, aus den Bogen  $\alpha_w$  allein zusammengesetzt ist.

und, außer von  $\Gamma_z$ , von der Punktmenge  $\bar{\alpha}_z$  begrenzt wird, wo  $w(z)$  Werte der Bogen  $\alpha_w$  annimmt. Die Differenz

$$u(z) = \omega(w(z), \alpha_w, G_w^*) - \omega(z, \alpha_z, G_z) \tag{2}$$

ist in  $G_z^*$  harmonisch und eindeutig. Bezüglich der Randpunkte  $z^*$  von  $G_z^*$  sind vier Fälle zu unterscheiden.

1.  $z^*$  liegt innerhalb  $G_z$  und gehört somit der Menge  $\bar{\alpha}_z$  an. Hier ist  $\omega(z^*, \alpha_z, G_z)$  harmonisch und jedenfalls  $\leq 1$ . Die Funktion  $\omega(w(z), \alpha_w, G_w^*)$  nähert sich wieder dem Wert 1, wenn der Punkt  $z$  (innerhalb  $G_z^*$ )

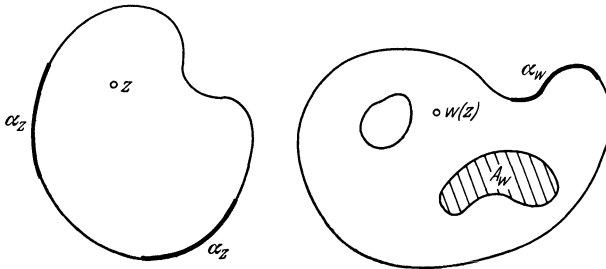


Abb. 5.

gegen  $z^*$  strebt; denn  $w(z)$  nimmt für  $z = z^*$  einen Wert auf  $\alpha_w$  an, und hier wird das betreffende harmonische Maß gleich 1<sup>1</sup>. Die Differenz  $u(z)$  ist also im Randpunkt  $z^*$  stetig und nichtnegativ.

2.  $z^*$  gehört den Bogen  $\alpha_z$  an. Dann nähert sich für  $z \rightarrow z^*$  das erste (sowie auch das zweite) Glied rechts in (2) dem Grenzwert 1 und die Differenz  $u(z)$  ist also wieder für  $z = z^*$  nichtnegativ (sogar genau gleich Null).

3.  $z^*$  liegt auf den Komplementärbogen  $\beta_z$  von  $\alpha_z$ . Hier verschwindet das zweite Glied der rechten Seite von (2), und da das erste Glied jedenfalls nichtnegativ ist, so schließt man, daß  $\lim u(z^*) \geq 0$  ist.

4.  $z^*$  ist ein gemeinsamer Endpunkt von  $\alpha_z$  und  $\beta_z$ ; die Anzahl dieser Unstetigkeitspunkte ist nach Voraussetzung endlich.

Wir haben also gefunden, daß die beschränkte harmonische Funktion  $u(z)$  in allen Randpunkten von  $G_z^*$ , außer höchstens endlich vielen, eine nichtnegative untere Grenze hat. Da  $u$  jedenfalls beschränkt ist, so ist nach dem Prinzip vom Minimum folglich überhaupt  $u(z) \geq 0$ , und es besteht also die Beziehung (1), was zu beweisen war.

34. Das in Nr. 32 betrachtete Beispiel zeigte uns schon, daß die Relation (1), selbst bei mehrwertigen Abbildungen, unter Umständen

<sup>1</sup> Durch eine eventuelle Erweiterung des Bereiches  $A_w$  kann man nämlich immer erreichen, daß  $w$  hierbei gegen einen inneren (Stetigkeitspunkt) von  $\alpha_w$  strebt; nachträglich kann man dann wieder den Grenzübergang zu dem ursprünglichen Bereich  $A_w$  vornehmen.

in eine Gleichheit übergeht. Nehmen wir für einen Augenblick an, daß dies für einen inneren Punkt  $z$  von  $G_z$  zutrifft. Da die harmonische Funktion  $u(z) = \omega(w(z), \alpha_w, G_w^*) - \omega(z, \alpha_z, G_z)$  jedenfalls nichtnegativ ist, so muß sie nach dem Prinzip vom Minimum identisch verschwinden:

*Die Beziehung (1) geht für einen inneren Punkt  $z$  des Gebietes  $G_z$  dann und nur dann in eine Gleichheit über, wenn für jedes Paar zugeordneter Punkte  $z$  und  $w$*

$$\omega(w, \alpha_w, G_w^*) = \omega(z, \alpha_z, G_z). \quad (3)$$

Es fragt sich nun, wenn  $G_z$  und  $G_w^*$  beliebige Gebiete und  $\alpha_z, \alpha_w$  gegebene Randpunkt mengen derselben sind: Was für eine Funktion  $w = w(z)$  wird durch die Gleichung (3) definiert?

Eine vollständige Antwort hierauf ergibt sich aus den Ergebnissen von II, §5. Setzen wir  $\varphi = \omega + i\bar{\omega}$ , wo  $\bar{\omega}$  die, bis auf eine reelle Konstante bestimmte, konjugierte Funktion von  $\omega$  bezeichnet, so wird (3) äquivalent mit

$$\varphi(w, \alpha_w, G_w^*) = \varphi(z, \alpha_z, G_z) + i\mu, \quad (3')$$

wo  $\mu$  ein reeller Parameter ist.

Falls nun die linksstehende Funktion eine von Null verschiedene Ableitung hat, d. h. falls die zu  $G_w$  gehörige Zahl  $n + p - 2 = 0$  ist (vgl. Nr. 30), was dann und nur dann eintritt, wenn entweder  $p = 1, n = 1$  oder  $n = 0, p = 2$  ist, so bildet diese Funktion das Gebiet  $G_w^*$  bzw., falls  $p = 2$ , die Überlagerungsfläche  $G_w^{*\infty}$  ausnahmslos konform auf den Parallelstreifen  $0 < \omega < 1$  ab, während der Wert von  $\varphi(z, \alpha_z, G_z)$  jedenfalls innerhalb dieses Streifens variiert. Ein durch (3') gegebenes Funktionselement  $w = w(z)$  läßt sich also in  $G_z$  unbeschränkt fortsetzen und definiert somit eine in jedem Punkt von  $G_z$  reguläre Funktion.

Falls  $G_z$  einfach zusammenhängend ist, so ist  $w(z)$  eine im ganzen Gebiet  $G_z$  *eindeutige* Funktion, welche  $G_z$  auf eine endlich vielblättrige ( $p = 1$ ) oder unendlich vielblättrige ( $p = 2$ ) Überlagerungsfläche von  $G_w^*$  abbildet. Dieses Ergebnis besteht, wie immer der Parameter  $\mu$  gewählt wird; eine Änderung des  $\mu$ -Wertes hat nur eine Strömung der Punkte  $w$  längs den Niveaulinien von  $\omega(w, \alpha_w, G_w)$  zur Folge.

Ist dagegen  $G_z$  mehrfach zusammenhängend, so wird die Funktion  $w(z)$  i. a. nicht mehr eindeutig sein. Dies wird nur dann der Fall sein, wenn die Periodizitätsmoduln von  $\bar{\omega}(z, \alpha_z, G_z)$  genaue Multipla der Periodizitätsmoduln von  $\bar{\omega}(w, \alpha_w, G_w)$  sind, was nur für ganz spezielle Konfigurationen ( $G_z, G_w$ ) zutrifft.

Falls die zu  $G_w$  gehörige Zahl  $n + p - 2 > 0$  ist, so hat die Ableitung  $\varphi'(w, \alpha_w, G_w^*)$  Nullstellen innerhalb  $G_w$ , und ihre Umkehrfunktion hat im Streifen  $0 < \omega < 1$  gewisse algebraische Windungsstellen. Die Gleichung (3') definiert jetzt  $w$  als eine Funktion von  $z$ , die innerhalb  $G_z$  mit algebraischem Charakter fortsetzbar ist, und nur unter ganz speziellen, sowohl die Periodizitätsmoduln, wie die Lage der Verzweigungsstellen



der Niveaulinien der Funktionen  $\omega(z, \alpha_z, G_z)$  und  $\omega(w, \alpha_w, G_w^*)$  betreffenden Bedingungen in  $G_z$  eindeutig ist.

*Bemerkung.* Die Tatsache, daß die beim obigen Prinzip vorkommenden Extremalfunktionen  $w(z, \mu)$  i. a. mehrdeutig sind, legt die Frage nahe, ob das Prinzip auch für *mehrdeutige* Funktionen  $w(z)$  besteht. Eine Erweiterung in dieser Richtung ist tatsächlich möglich; so gilt z. B. das Prinzip, wenn  $w(z)$  in jedem Punkt von  $G_z$  eindeutig ist, außer höchstens für gewisse Stellen, welche über endlich vielen Stellen des Gebietes  $G_z$  liegen. Auf derartige Verallgemeinerungen wollen wir indes hier nicht näher eingehen (Vgl. HÖSSJER [I]).

35. Es ist nützlich, das Prinzip über die Vergrößerung des harmonischen Maßes geometrisch zu deuten.

Unter den Voraussetzungen von Nr. 33 wird für jedes  $0 < \lambda < 1$  der Punkt  $w = w(z)$  innerhalb des Gebietes  $1 > \omega(w, \alpha_w, G_w^*) > \lambda$  liegen, sobald  $z$  im Gebiet  $1 > \omega(z, \alpha_z, G_z) > \lambda$  liegt. Dies gilt auch, wenn  $z$  auf die Niveaulinie  $\omega(z, \alpha_z, G_z) = \lambda$  fällt, außer für die durch die Gleichung (3') definierten Funktionen  $w = w(z, \mu)$  (falls diese eindeutig sind), welche die einem und demselben Wert  $\lambda$  entsprechenden Niveaulinien in  $G_z$  und  $G_w$  ineinander transformieren.

## § 2. Anwendungen auf den absoluten Betrag einer analytischen Funktion.

36. Zu einem ersten Spezialfall des Prinzips vom harmonischen Maß nehmen wir als Gebiet  $G_w$  einen Kreis  $|w| < M$  und als Bereich  $A_w$  einen kleineren konzentrischen Kreis  $|w| \leq m < M$ . Für das harmonische Maß  $\omega(w, \alpha_w, G_w^*)$ , wo  $\alpha_w$  also die Kreislinie  $|w| = m$  und  $G_w^*$  der Kreisring  $m < |w| < M$  ist, hat man dann den Ausdruck

$$\omega = \frac{\log \frac{M}{|w|}}{\log \frac{M}{m}},$$

und unser Prinzip gibt den sogenannten<sup>1</sup>

**Zweikonstantensatz.** *Es sei  $w(z)$  eine im Gebiete  $G$  reguläre analytische Funktion, deren absoluter Betrag daselbst der Ungleichung*

$$|w(z)| \leq M$$

*genügt, während auf gewissen gegebenen Randbogen  $\alpha$  von  $G$*

$$\overline{\lim} |w(z)| \leq m < M.$$

*Dann gilt in jedem Punkt des Gebietes  $0 < \lambda < \omega(z, \alpha, G) < 1$  die Ungleichung*

$$\log |w(z)| < \lambda \log m + (1 - \lambda) \log M.$$

<sup>1</sup> F. u. R. NEVANLINNA [I], A. OSTROWSKI [I].

Auf der Niveaulinie  $\omega(z, \alpha, G) = \lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) ist

$$\log |w(z)| \leq \lambda \log m + (1 - \lambda) \log M.$$

Tritt hier Gleichheit für einen Wert  $z$  ein, so gilt dasselbe für alle  $z$  in  $G$  und für jedes  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) und die Funktion  $w(z)$  hat die Form

$$w(z) = e^{i\mu} m^{\varphi(z)} M^{1-\varphi(z)},$$

wo  $\mu$  eine beliebige reelle Zahl und  $\varphi(z)$  diejenige analytische Funktion ist, welche als reellen Teil das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha, G)$  hat.

**37.** Dieser Satz erlaubt eine interessante Folgerung in bezug auf den Maximalbetrag  $M_\lambda$  einer in  $G$  definierten Funktion  $w(z)$  auf der Niveaulinie  $\omega(z, \alpha, G) = \lambda$ . Wir fixieren zwei Werte  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$ ) und betrachten das Gebiet

$$\lambda_1 < \omega(z, \alpha, G) < \lambda_2.$$

Das harmonische Maß der Bogen  $\lambda_2$  in bezug auf dieses Gebiet ist offenbar gleich  $\frac{\omega - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ , und der Zweikonstantensatz ergibt die für  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$  gültige Beziehung

$$\log M_\lambda \leq \frac{(\lambda - \lambda_1) \log M_{\lambda_2} + (\lambda_2 - \lambda) \log M_{\lambda_1}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Errichtet man also in jedem Punkt des Intervalls  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$  als Ordinate  $y$  die Zahl  $\log M_\lambda$ , so wird der Kurvenbogen  $y = \log M_\lambda$ , welcher die Punkte  $\lambda_1, \log M_{\lambda_1}$  und  $\lambda_2, \log M_{\lambda_2}$  verbindet, nicht oberhalb der diese Endpunkte verbindenden Sehne verlaufen, deren Ordinate durch die rechte Seite der obigen Ungleichung gegeben wird. Hieraus schließt man:

Der Logarithmus des Maximalbetrages  $\log M_\lambda$  ist eine konvexe Funktion des Parameters  $\lambda$ . Er hat also eine monoton wachsende, bis auf abzählbar viele Sprungstellen stetige erste Ableitung  $\frac{d \log M_\lambda}{d \lambda}$  und für fast alle Werte  $\lambda$  eine zweite Ableitung.

Nimmt man speziell auch  $G$  als einen Kreisring an, so wird  $\omega$  eine lineare Funktion von  $\log |z|$ , und man findet den HADAMARDSchen Dreikreissatz, wonach der Logarithmus des Maximalbetrages

$$\max_{|z|=r} |w(z)| = M(r)$$

eine konvexe Funktion von  $\log r$  ist.

**38.** Als zweite Anwendung betrachten wir eine analytische Funktion die innerhalb der Halbebene  $\Im z > 0$  regulär und in jedem endlichen Punkt  $z = t$  der reellen Achse beschränkt ist, so daß

$$\overline{\lim} |w(z)| \leq 1$$

für  $z = t$  gilt.

Den Maximalbetrag von  $w(z)$  auf einem oberhalb der reellen Achse befindlichen Halbkreisbogen  $|z| = r$  bezeichnen wir durch  $M(r)$ . Wir

können dann das Prinzip ansetzen, indem wir das Innere dieses Halbkreisbogens als Gebiet  $G_z$  und den von  $|w|=1$  und  $|w|=M(r)$  begrenzten Kreisring als Gebiet  $G_w$  nehmen. Für das harmonische Maß des Halbkreisbogens findet man den Wert

$$\omega = 2 \left( 1 - \frac{\vartheta}{\pi} \right) = 2 \left( 1 - \frac{1}{\pi} \arg \frac{z-r}{z+r} \right),$$

wo  $\vartheta$  der Winkel ist, unter dem der Durchmesser  $(-r, r)$  vom Aufpunkte  $z$  erscheint.

Der Zweikonstantensatz ergibt uns dann für jeden Punkt  $z$  des Halbkreises

$$\left. \begin{aligned} \log |w(z)| &\leq \\ &\leq 2 \left( 1 - \frac{\vartheta}{\pi} \right) \log M(r). \end{aligned} \right\} (4)$$

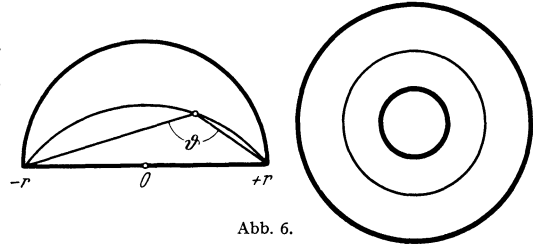


Abb. 6.

Fixiert man nun einen

Punkt  $z$ , so wird aus der Figur sofort ersichtlich, daß  $\omega = 2 \left( 1 - \frac{\vartheta}{\pi} \right)$  für  $r \rightarrow \infty$  verschwinden wird. Eine leichte Rechnung ergibt uns die Entwicklung ( $z = t + i\tau$ )

$$\omega = \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \frac{\tau}{r+t} + \arcsin \frac{\tau}{r-t} \right) \sim \frac{4r\tau}{\pi(r^2 - t^2)}.$$

Wir bezeichnen durch  $\sigma$  die untere Grenze

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r}.$$

Es wird dann gemäß (4), wo wir, für ein festes  $z$ , den Wert  $r$  eine Folge von Werten  $r_1, r_2, \dots$  durchlaufen lassen, die ins Unendliche wachsen und für die der Quotient  $\frac{\log M}{r}$  gegen  $\sigma$  konvergiert,

$$\log |w(z)| \leq \frac{4\sigma}{\pi} \tau.$$

Hieraus folgt insbesondere<sup>1</sup>:

**Satz von PHRAGMÉN-LINDELÖF.** Falls  $w(z)$  in der oberen Halbebene regulär und in jedem endlichen Punkt der reellen Achse beschränkt ist, so daß hier  $\overline{\lim} |w(z)| \leq 1$ , so sind nur zwei Fälle möglich:

Entweder wächst der absolute Betrag  $|w|$  für  $|z| \rightarrow \infty$  so schnell ins Unendliche, daß die untere Grenze

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r}$$

<sup>1</sup> E. PHRAGMÉN u. E. LINDELÖF [1]. Eine noch schärfere Fassung dieses Satzes wurde von F. u. R. NEVANLINNA [1] gegeben.

positiv ausfällt, oder aber die Funktion ist beschränkt, so daß

$$|w(z)| \leq 1$$

in jedem Punkt der Halbebene gilt.

Ferner ergibt sich der Zusatz<sup>1</sup>:

Falls unter den Voraussetzungen des obigen Satzes  $w(z)$  auf einer Folge von Halbkreisbogen gegen Null strebt, so daß

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{r} = -\infty,$$

so verschwindet  $w(z)$  identisch.

39. Als dritte Anwendung betrachten wir eine in der oberen Halbebene beschränkte Funktion  $w(z)$  ( $|w| \leq 1$ ), welche auf der positiven reellen Achse stetig ist und hier gegen einen bestimmten Grenzwert (z. B. gegen Null) strebt, wenn  $z \rightarrow \infty$ . Für ein gegebenes beliebig kleines  $0 < \varepsilon (< 1)$  wird dann  $|w(z)| < \varepsilon$  sein, sobald  $z$  auf der positiven reellen Achse einen gewissen Punkt  $z = t_0$  passiert hat. Wir können also, wenn wir die obere Halbebene als Gebiet  $G_z$  und das erwähnte Segment der

positiven reellen Achse als Bogen  $\alpha$  wählen, den Zweikonstantensatz anwenden mit  $M = 1$ ,  $m = \varepsilon$ , und finden

$$\log |w(z)| \leq \lambda \log \varepsilon \quad (5)$$

in jedem Punkt  $z$  des Gebietes  $\lambda \leq \omega(z, \alpha, G_z) \leq 1$ .

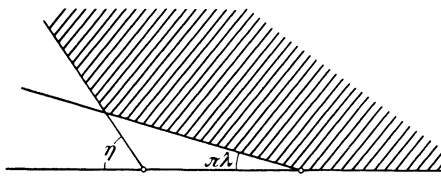


Abb. 7.

Nun sieht man unmittelbar ein, daß das harmonische Maß  $\omega$  gleich dem durch  $\pi$  dividierten Betrag des Winkels ist, unter dem das rechts von  $t_0$  liegende Segment der reellen Achse vom Punkte  $z$  erscheint ( $\pi\omega = \pi - \arg(z - t_0)$ ), und das Gebiet  $\lambda < \omega < 1$  besteht also aus dem Winkel, dessen Scheitel in  $z = t_0$  liegt und der von der positiven reellen Achse und dem Halbstrahl  $\arg(z - t_0) = \pi(1 - \lambda)$  begrenzt wird.

Wird also  $\eta > 0$  beliebig gewählt, so gilt, sobald  $\lambda$  im Intervall  $0 < \lambda < \frac{\eta}{\pi}$  genommen wird, die Beziehung (5) in jedem Punkt des Winkels  $0 < \arg z < \pi - \eta$ , der oberhalb des Strahls  $\arg(z - t_0) = \pi(1 - \lambda)$  (im schraffierten Gebiet der Figur) liegt. Man folgert hieraus:

Wenn eine in der oberen Halbebene beschränkte Funktion auf der positiven reellen Achse für  $z \rightarrow \infty$  gegen einen Grenzwert konvergiert, so strebt sie gleichmäßig gegen denselben Wert in jedem Winkel

$$0 < \arg z < \pi - \eta \quad (\eta > 0).$$

Wir bemerken, daß sämtliche harmonische Maße, die wir hier gebraucht haben, zu so einfachen Gebieten gehören, daß die Bestimmung

<sup>1</sup> Für weitere Ergebnisse aus demselben Ideenkreis vgl. F. u. R. NEVANLINNA [1].

der entsprechenden Maße eine elementare Aufgabe ist, die unmittelbar zu lösen ist, ohne allgemeine Existenzsätze aus der Theorie der konformen Abbildung heranzuziehen.

### § 3. Prinzip vom hyperbolischen Maß.

40. Es sei  $w(z)$  wieder eine innerhalb eines Gebietes  $G_z$  reguläre, eindeutige analytische Funktion, deren Werte für jeden Punkt  $z$  von  $G_z$  in ein Gebiet  $G_w$  der  $w$ -Ebene fallen. Es sei ferner  $z_0$  und  $w_0 = w(z_0)$  ein Paar von einander zugeordneten Punkten und  $g(z, z_0, G_z)$  und  $g(w, w_0, G_w)$  die GREENSchen Funktionen der Gebiete  $G_z, G_w$ , welche die Punkte  $z_0$  bzw.  $w_0$  als Pole haben.

Wir fixieren eine Zahl  $\lambda > 0$  und betrachten die Werte von  $w(z)$  im Bereiche  $g(z, z_0, G_z) \geq \lambda$ ; bezeichnet man das Minimum von  $g(w(z), w_0, G_w)$  in diesem Bereich mit  $\mu$  ( $\mu \geq 0$ ), so liegt also der Punkt  $w = w(z)$  für dieselben Werte  $z$  im Bereiche  $g(w, w_0, G_w) \geq \mu$ . Wir können nun unser Prinzip ansetzen für die Gebiete  $G'_z: 0 < g(z, z_0) < \lambda$  und  $G_w$ , indem wir als Bogen  $\alpha_z$  die Niveaulinie  $g = \lambda$ , als Bogen  $\alpha_w$  die Linie  $g = \mu$  nehmen. Es wird dann

$$\omega(z, \alpha_z, G'_z) = \frac{1}{\lambda} g(z, z_0, G_z), \quad \omega(w, \alpha_w, G_w^*) = \frac{1}{\mu} g(w, w_0, G_w),$$

und es gilt folglich für jeden Punkt  $z$  des Bereiches  $0 < g < \lambda$

$$g(w(z), w_0, G_w) > \frac{\mu}{\lambda} g(z, z_0, G_z).$$

Für die GREENSchen Funktionen hat man die Entwicklungen

$$g(z, z_0, G_z) = \log \left| \frac{1}{z - z_0} \right| + u_1(z), \quad g(w, w_0, G_w) = \log \left| \frac{1}{w - w_0} \right| + u_2(w), \quad (6)$$

wo  $u_1$  und  $u_2$  für  $z = z_0$  bzw.  $w = w_0$  stetig sind. Weil nun  $w(z)$  im Punkte  $z_0$  regulär angenommen wurde, so ist der Ausdruck

$$\left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right|$$

in der Umgebung von  $z_0$  beschränkt, und es folgt aus (6)

$$g(w, w_0, G_w) > g(z, z_0, G_z) (1 - \varepsilon)$$

mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow z_0$ . Also ist die obere Grenze des Quotienten  $\frac{\mu}{\lambda}$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  sicher  $\geq 1$ , und es wird somit

$$g(w(z), w_0, G_w) \geq g(z, z_0, G_z)$$

für jeden Punkt  $z$  des Gebietes  $G_z$ .

Als Grenzfall unseres Prinzips haben wir so das *Prinzip von LINDELÖF* gewonnen<sup>1</sup>:

*Es seien  $G_z$  und  $G_w$  zwei Gebiete und  $z_0, w_0$  innere Punkte derselben. Wenn  $w(z)$  eine in  $G_z$  eindeutige, meromorphe Funktion ist, deren Werte*

<sup>1</sup> E. LINDELÖF [2].

in  $G_w$  fallen und die für  $z = z_0$  den Wert  $w = w_0$  annimmt, so wird jedem Punkt des Gebietes

$$g(z, z_0, G_z) > \lambda > 0$$

ein Punkt  $w = w(z)$  des Gebietes

$$g(w, w_0, G_w) > \lambda$$

entsprechen.

41. Es wurde schon oben bemerkt, daß wir in unserer Darstellung Gewicht darauf legen, die innere Einheitlichkeit und den gegenseitigen Zusammenhang verschiedener wichtiger funktionentheoretischer Sätze hervorzuheben; in dieser Richtung liegt die *prinzipielle* Bedeutung des Satzes über das harmonische Maß. Strebt man dagegen zu möglichst *kurzen* Beweisen der verschiedenen Folgesätze, so bedeutet das Zurückgreifen auf das allgemeine Prinzip oft einen Umweg. Dies gilt auch für das LINDELÖFSche Prinzip, das sich einfacher als oben begründen läßt, wenn man bemerkt, daß die Differenz  $g(w(z), w_0, G_w) - g(z, z_0, G_z)$  innerhalb  $G_z$  harmonisch ist, außer möglicherweise für  $z = z_0$ , wo sie unendlich mit *positivem* Vorzeichen werden kann, und daß sie auf der Berandung von  $G_z$  eine nichtnegative untere Grenze hat. Die Anwendung des Prinzips des Minimums in  $G_z$  oder, falls  $z_0$  ein Pol jener Differenz ist, in dem in  $z = z_0$  punktierten Gebiete  $G_z$ , gibt das erwünschte Resultat.

Auf der Niveaulinie  $g(z, z_0, G_z) = \lambda$  ist  $g(w(z), w_0, G_w) \geq \lambda$ , wo Gleichheit für jedes  $z$  und jedes  $\lambda > 0$  besteht, sobald sie in einem Punkt  $z$  und für einen Wert  $\lambda$  gilt. Die Funktion  $w(z) = w(z, \mu)$  bestimmt man dann aus der Gleichung

$$g(z, z_0, G_z) - ih(z, z_0, G_z) = g(w, w_0, G_w) - ih(w, w_0, G_w) + i\mu,$$

wo  $-h$  die konjugierte Funktion von  $g$  und  $\mu$  ein reeller Parameter ist.

42. Die Extremalfunktionen  $w(z, \mu)$  werden allerdings für mehrfach zusammenhängende Gebiete i. a. nicht eindeutig sein. In diesen Fällen erhält man eine exakte Abschätzung, wenn man die universellen Überlagerungsflächen  $G_z^\infty$  und  $G_w^\infty$  auf den Einheitskreis konform abbildet, wodurch die Extremalaufgabe auf *einfach* zusammenhängende Gebiete zurückgeführt wird, für welche das LINDELÖFSche Prinzip jedenfalls die bestmögliche Abschätzung gibt.

Diese letzte Bemerkung ist von großer Bedeutung, weil sie die Anwendung des Prinzips auch in solchen Fällen erlaubt, wo die Gebiete  $G_z$  und  $G_w$  eine so „schwache“ Randpunktmenge besitzen, daß sie *keine GREENSche Funktion besitzen*; dies ist z. B. dann der Fall, wenn sie von isolierten Punkten begrenzt sind<sup>1</sup>. Als einzige Bedingung für die Anwendbarkeit des Prinzips erscheint so die Forderung, daß *die universellen*

<sup>1</sup> Notwendig und hinreichend, damit ein schlichtes Gebiet  $G$  eine GREENSche Funktion besitzt, ist daß seine Randpunktmenge nicht „vom harmonischen Maß Null“ ist. Diese Frage wird im Abschnitt V näher untersucht.

Überlagerungsflächen  $G_z^\infty$ ,  $G_w^\infty$  auf den Einheitskreis abbildbar sind, d. h. daß diese Flächen vom hyperbolischen Typus sind, was dann und nur dann der Fall ist, wenn die entsprechenden Randpunktmengen mindestens drei Punkte enthalten (vgl. Nr. 12).

Eine besonders prägnante Form erhält das Prinzip von LINDELÖF, wenn man mit PICK [1] und CARATHÉODORY [2] auf diesen Flächen vom hyperbolischen Typus eine POINCARÉSCHE, nichteuklidische Maßbestimmung einführt, wie dies schon in I, § 1 für die Kreisfläche dargestellt wurde.

43. Um zu dieser allgemeinen Formulierung zu gelangen, müssen wir etwas eingehender den einfachsten Fall besprechen, wo sowohl  $G_z$  als  $G_w$  der Einheitskreis ist. Setzt man dann  $z_0 = w_0 = 0$ , so geht das LINDELÖFSCHES Prinzip in das SCHWARZSCHE Lemma über, das am einfachsten direkt durch Anwendung des Maximalmodulprinzips auf die für  $|z| < 1$  reguläre Funktion  $\frac{w}{z}$  bewiesen wird:

Falls  $w(z)$  für  $|z| < 1$  regulär und beschränkt ist:

$$|w(z)| \leq 1$$

und  $w(0) = 0$ , so gilt

$$|w(z)| \leq |z|$$

für jedes  $|z| < 1$ . Gleichheit trifft hier für einen Punkt  $z \neq 0$  nur für die Funktion  $w = e^{i\vartheta} z$  ein, wo  $\vartheta$  eine reelle Konstante ist.

Ersetzt man hier die Bedingung  $w(0) = 0$  durch die allgemeinere:  $w(z_0) = w_0$  ( $|w_0| < 1$ ), so stimmen die Niveaulinien  $g(z, z_0) = \lambda$  und  $g(w, w_0) = \lambda$  mit den um  $z_0$  und  $w_0$  beschriebenen nichteuklidischen Kreisen vom nichteuklidischen Radius

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

über (vgl. Nr. 3) und das LINDELÖFSCHES Prinzip besagt somit, daß die nichteuklidische Distanz der Punkte  $z$ ,  $z_0$  mindestens so groß ist, wie die nichteuklidische Distanz der Bildpunkte  $w$ ,  $w_0$ , und ferner, daß Invarianz dieser Distanz nur bei einer Transformation des Einheitskreises in sich selbst, also bei einer nichteuklidischen Bewegung vorkommt. Durch einen Grenzübergang ergibt sich hieraus, daß das Verhältnis von zwei nichteuklidisch gemessenen, durch die Transformation  $w = w(z)$  einander zugeordneten Bogenelementen  $|dw|$  und  $|dz|$  höchstens gleich Eins ist.

Dies läßt sich auch direkt durch das Maximumprinzip folgendermaßen begründen. Ist  $w_0 = w(z_0)$ , so definiert der Quotient

$$\frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0} w} : \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$$

eine für  $|z| < 1$  reguläre Funktion, deren absoluter Betrag auf der Peripherie  $|z| = 1$  die obere Grenze 1 hat; daraus folgt, daß ihr Betrag auch in jedem inneren Punkt des Einheitskreises höchstens gleich 1 ist, wobei Gleichheit nur dann zutrifft, falls der Quotient konstant gleich einer Zahl vom absoluten Betrag 1 ist, so daß die Funktion  $w = w(z)$  diesen Kreis konform auf sich selbst abbildet. Für  $z = z_0$  ergibt sich hieraus

$$\frac{|dw|}{1 - |w|^2} \leq \frac{|dz|}{1 - |z|^2},$$

was gemäß der Definition des nichteuklidischen Bogenelementes (vgl. Nr. 3) die obige Behauptung enthält.

Durch Integration findet man hieraus folgenden Satz:

*Wenn man den Einheitskreis  $|z| < 1$  durch eine reguläre analytische Transformation  $w = w(z)$  abbildet, so daß  $|w| < 1$  für  $|z| < 1$ , so wird die nichteuklidische Länge eines beliebigen Bogens verkleinert, außer wenn  $w(z)$  den Einheitskreis konform auf sich selbst abbildet, in welchem Fall die nichteuklidischen Längen erhalten werden.*

Diese interessante Formulierung des SCHWARZSchen Lemmas rührt von G. PICK [I] her. Durch konforme Abbildung des Einheitskreises kann die nichteuklidische Maßbestimmung auf allgemeinere Gebiete übertragen werden, und so läßt sich das LINDELÖFSche Prinzip in einer entsprechenden allgemeinen, konformen Abbildungen gegenüber invarianten Formulierung aussprechen, worauf schon oben hingewiesen wurde.

44. Diese Übertragung gelingt in der Tat für jede einfach zusammenhängende RIEMANNSche Fläche  $F$ , die vom hyperbolischen Typus ist, die also auf den Einheitskreis eindeutig und konform abbildbar ist; speziell also, wie oben bereits bemerkt wurde, für die universelle Überlagerungsfläche  $G^\infty$  eines schlichten, mehrfach zusammenhängenden Gebietes  $G$ , dessen Berandung mindestens drei Punkte enthält. Um die hyperbolische Länge  $d\sigma$  eines Linienelementes  $dz$ , das von dem Punkt  $z$  der Fläche  $F$  ausgeht, in bezug auf diese Fläche  $F$  zu definieren, verfährt man einfach so, daß man  $F$  auf den Einheitskreis  $K$  abbildet; es möge hierbei  $z$  in den Punkt  $x$  übergehen ( $|x| < 1$ ), so daß  $dz$  in das Linienelement  $dx$  transformiert wird. Die hyperbolische Länge  $d\sigma$  wird dann als die hyperbolische Länge des transformierten Linienelements  $dx$  erklärt, also

$$d\sigma = \frac{dx}{1 - |x|^2}. \quad (7)$$

Diese Erklärung erteilt der Größe  $\frac{d\sigma}{|dz|}$  einen durch den Flächenpunkt  $z$  und die Fläche  $F$  eindeutig bestimmten Wert; denn die rechte Seite behält einen invarianten Wert, wie immer der Bildpunkt  $x$  von  $z$  im Einheitskreise  $K$  gewählt wird.



Nehmen wir nun insbesondere  $F$  als die universelle Überlagerungsfläche  $G^\infty$  eines schlichten Gebietes  $G$  mit mindestens drei Randpunkten an, so ist der Differentialquotient  $\frac{d\sigma}{|dz|}$  nicht nur auf  $G^\infty$ , sondern auch in der Grundfläche  $G$  *eindeutig* definiert; denn in zwei „übereinander“ liegenden Punkten der Überlagerungsfläche  $G^\infty$  hat sowohl  $|dz|$  als auch  $d\sigma$ , wegen der Invarianz des Ausdruckes (7) gegenüber eineindeutigen konformen Transformationen des Einheitskreises, gleiche Werte.

*Durch (7) ist also nicht nur auf der Überlagerungsfläche  $G^\infty$ , sondern auch in der Grundfläche  $G$  eine hyperbolische Maßbestimmung eindeutig erklärt.*

45. Sei nunmehr  $w(z)$  eine analytische Funktion, die den Voraussetzungen des LINDELÖFSCHEN Prinzips genügt, d. h. die in jedem Punkt eines Gebietes  $G_z$  regulär ist (bis auf eventuelle Pole) und hier Werte annimmt, die in ein gegebenes Gebiet  $G_w$  fallen. Wir transformieren die entsprechenden universellen Überlagerungsflächen  $G_z^\infty$  und  $G_w^\infty$  konform in den Einheitskreis  $|x| < 1$  bzw.  $|t| < 1$  und bilden die Funktion  $t(w(z(x))) \equiv \varphi(x)$ , welche für  $|x| < 1$  unbeschränkt fortsetzbar ist und Werte aus der Kreisfläche  $|t| < 1$  annimmt. Bezeichnen wir die hyperbolischen Längen von vier einander zugeordneten Linienelementen  $dx, dz, dw, dt$  bzw. durch  $d\sigma_x, d\sigma_z, d\sigma_w, d\sigma_t$ , so ist nach der definitionsmäßigen Invarianz dieser Länge gegenüber den Abbildungen  $x \rightarrow z$  und  $w \rightarrow t$ ,  $d\sigma_x = d\sigma_z$  und  $d\sigma_w = d\sigma_t$ . Nach dem PICKSCHEN Satz ist ferner  $d\sigma_t \leq d\sigma_x$ , und es wird also schließlich

$$d\sigma_w \leq d\sigma_z.$$

Gleichheit trifft hier dann und nur dann zu, wenn sich  $t = \varphi(x)$  auf eine lineare Transformation reduziert, die den Einheitskreis invariant läßt, in welchem Fall die gegebene Funktion  $w(z)$  eine eineindeutige und konforme Abbildung zwischen den universellen Überlagerungsflächen  $G_z^\infty$  und  $G_w^\infty$  bewerkstelligt. Diese Extremalfunktion ist allerdings im allgemeinen auf  $G_z$  nicht eindeutig. Es ist aber zu bemerken, daß die obige Überlegung nicht die *Eindeutigkeit* von  $w(z)$  in  $G_z$  voraussetzt. Ist diese Funktion nur in  $G_z$  mit rationalem Charakter unbeschränkt fortsetzbar, so gilt dasselbe für die Funktion  $t = \varphi(x)$ , welche nach dem Monodromiesatz jedenfalls dann auch eindeutig ist.

Wir können das Ergebnis jetzt folgendermaßen zusammenfassen:

**Prinzip des hyperbolischen Maßes.** *Es seien  $G_z$  und  $G_w$  zwei schlichte Gebiete, welche mindestens drei Randpunkte haben, und  $w(z)$  eine analytische Funktion, die innerhalb  $G_z$  unbeschränkt fortsetzbar ist, in der Weise, daß ihre Werte innerhalb  $G_w$  fallen. Ist dann  $l_z$  ein beliebiger Kurvenbogen auf  $G_z$  und  $l_w$  sein vermittle der Abbildung  $w = w(z)$  erklärter Bildbogen in  $G_w$ , so ist die hyperbolische Länge von  $l_z$  (gemessen auf  $G_z$ ) mindestens so groß wie die hyperbolische Länge von  $l_w$  (mit  $G_w$  als Maßgebiet).*

Die Längen sind einander gleich in dem einzigen Fall, wo  $w = w(z)$  die universellen Überlagerungsflächen  $G_z^\infty$  und  $G_w^\infty$  eineindeutig aufeinander bezieht.

Im Falle einfach zusammenhängender Gebiete  $G_z$  und  $G_w$  decken sich die Prinzipien von LINDELÖF und des hyperbolischen Maßes. Für mehrfach zusammenhängende Gebiete gibt dagegen das letztgenannte Prinzip vielfach eine schärfere Abschätzung als das LINDELÖFSche. Nimmt man z. B.  $G_z$  einfach,  $G_w$  hingegen mehrfach zusammenhängend an, so wird die GREENSche Niveaulinie

$$g(z_0, z, G_z) = \mu$$

gleichzeitig eine nichteuklidische Kreislinie vom Radius

$$\lambda = \frac{1}{2} \log \frac{1 + e^{-\mu}}{1 - e^{-\mu}}$$

darstellen. Entsprechendes gilt dagegen nicht im Gebiete  $G_w$ . Zieht man die uniformisierende Hilfsabbildung  $w \rightarrow t$  heran, so sieht man nämlich leicht ein, daß das Gebiet  $g(w, w_0, G_w) \geq \mu$  die Kreisfläche vom nichteuklidischen Radius  $\lambda$  um den Mittelpunkt  $w_0$  als echtes Teilgebiet enthält. Das Prinzip des hyperbolischen Maßes führt also im vorliegenden Falle zu einer engeren Einschränkung der Variabilität der Funktionswerte als der LINDELÖFSche Satz. Es sei ferner noch einmal betont, daß jenes Prinzip auch den Vorteil hat, für mehrdeutige Funktionen zu gelten und für jede Fläche anwendbar zu sein, deren universelle Überlagerungsfläche vom hyperbolischen Typus ist; unter diesen Flächen gibt es eine Menge von solchen, deren Randpunktmenge so schwach ist, daß sie keine GREENSche Funktion besitzen, und für welche also das LINDELÖFSche Prinzip versagt.

**46.** Bei verschiedenen Fragen spielt der Logarithmus des Quotienten zwischen der nichteuklidischen und euklidischen Länge eines Bogenelementes eine wichtige Rolle.

Setzt man  $u(z, G) = \log \frac{d\sigma}{|dz|}$ , so ist  $u$  eindeutig in  $G$  definiert und zwar unabhängig davon wie der Bildpunkt  $x = x(z)$  von  $z$  bei der Hilfsabbildung  $G^\infty \rightarrow K$  gewählt wird. Es ist

$$d\sigma = e^{u(z, G)} |dz| = e^{u(x, K)} |dx|$$

der gegenüber der erwähnten Abbildung invariante Wert der hyperbolischen Länge  $d\sigma$  von  $dz$  und  $dx$ .

Hier ist

$$u(x, K) = \log \frac{1}{1 - |x|^2},$$

eine Größe, die nach Nr. 3 der Differentialgleichung

$$\Delta u = 4e^{2u} \tag{8}$$

genügt. Nun gilt allgemein für den LAPLACESchen Ausdruck  $\Delta u(x)$ , wenn man  $x$  *analytisch* transformiert:  $x = x(t)$ ,

$$\Delta_t u(x(t)) = \Delta_x u \left| \frac{dx}{dt} \right|^2,$$

und man findet demnach, unter Beachtung der Relationen

$$u(z, G) = u(x, K) + \log \left| \frac{dx}{dz} \right|$$

und (8),

$$\Delta_z u(z, G) = \Delta_x u(x, K) = \Delta_x u(x, K) \left| \frac{dx}{dz} \right|^2 = 4e^{2u(x, K) + 2 \log \left| \frac{dx}{dz} \right|}.$$

Der Logarithmus  $u(z, G)$  des Quotienten aus der hyperbolischen und der euklidischen Länge eines Bogenelements  $dz$  genügt also der Differentialgleichung  $\Delta u = 4e^{2u}$ , unabhängig von der Wahl des Bezugsgebietes  $G$ .

#### § 4. Sätze über Kreisgebiete.

47. Wir wenden uns einigen anderen Erweiterungen des SCHWARZschen Lemmas zu. Nimmt man  $G_z$  und  $G_w$  als den Einheitskreis und  $\alpha_z$  und  $\alpha_w$  als zwei Randbogen an, so ergibt das Prinzip über das harmonische Maß ohne weiteres folgenden Satz (vgl. Nr. 35):

*Wenn  $|w(z)| \leq 1$  ist für  $|z| < 1$  und wenn ferner  $w(z)$  auf einem Randbogen  $\alpha_z$  stetig ist und hier Werte annimmt, die auf einen Randbogen  $\alpha_w$  der Peripherie  $|w| = 1$  fallen, so unterliegt die Variabilität des Punktes  $w = w(z)$  folgender Einschränkung:*

*Wählt man den Punkt  $z$  innerhalb desjenigen Gebietes, das von dem Bogen  $\alpha_z$  und einem Kreisbogen  $K_\lambda(\alpha_z)$  begrenzt wird, der die Peripherie  $|z| = 1$  in den Endpunkten von  $\alpha_z$  unter dem Winkel  $\lambda\pi$  ( $0 < \lambda < 1$ ) schneidet, so wird der Bildpunkt  $w = w(z)$  innerhalb desjenigen Zweiecks fallen, der von den Bogen  $\alpha_w$  und  $K_\lambda(\alpha_w)$  begrenzt wird.*

*Zwei Punkte der Bogen  $K_\lambda(\alpha_z)$  und  $K_\lambda(\alpha_w)$  entsprechen einander dann und nur dann, wenn  $w = w(z)$  den Kreis  $|z| \leq 1$  in  $|w| \leq 1$  konform so transformiert, daß  $\alpha_z$  in  $\alpha_w$  übergeht.*

Der Satz gilt unverändert, falls man die Gebiete  $\alpha$  und  $\alpha_w$  als beliebige Kreise (oder Halbebenen) wählt.

Nimmt man insbesondere  $w(0) = 0$  an, so folgt unter den Voraussetzungen des obigen Satzes, daß  $\alpha_w$  nicht kürzer sein kann als  $\alpha_z$ ; denn sonst würde der Bogen  $K_\lambda(\alpha_w)$  zusammen mit  $\alpha_w$  ein Zweieck begrenzen, das den Nullpunkt  $w = 0$  nicht enthält, falls  $\lambda$  so gewählt wird, daß  $K_\lambda(\alpha_z)$  durch  $z = 0$  geht; das ist aber nach dem Satz nicht möglich. Dies ist das<sup>1</sup>

**Lemma von LÖWNER.** *Sei  $|w| < 1$  für  $|z| < 1$  und  $w(0) = 0$ . Wenn  $w(z)$  auf einem Randbogen  $\alpha$  stetig ist und hier Werte annimmt, die*

<sup>1</sup> K. LÖWNER [J].

auf der Peripherie  $|w|=1$  liegen, so wird der Bildbogen  $\alpha_w$  von  $\alpha_z$  mindestens so lang wie  $\alpha_z$  sein. Gleichheit gilt nur für

$$w = e^{i\theta} z.$$

48. Der LÖWNERsche Satz besagt in Übereinstimmung mit unserem Prinzip, daß das harmonische Maß  $\omega(0, \alpha_z)$  des Bogens  $\alpha_z$  im Nullpunkte durch eine Transformation  $w=w(z)$  obiger Art i. a. vergrößert wird; in der Tat sind die harmonischen Maße der zwei Bogen  $\alpha_z$  und  $\alpha_w$  im vorliegenden Fall nichts anderes als die betreffenden *Bogenlängen* dividiert durch  $2\pi$ . Wir fixieren nun auf  $\alpha_z$  einen beliebigen Punkt  $z^* = e^{i\varphi}$ ; aus dem SCHWARZschen Spiegelungsprinzip folgt, daß  $w(z)$  noch auf  $\alpha_z$ , also speziell in  $z^*$ , analytisch ist; wählt man also mit  $z^*$  als Endpunkt einen Teilbogen  $\alpha$  von  $\alpha_z$  und bezeichnet den Bildbogen von  $\alpha$  mit  $\beta$ , so ergibt sich, falls man  $w(z^*) = e^{i\theta}$  schreibt, aus der Ungleichung

$$\frac{\omega(w(z), \beta)}{\omega(z, \alpha)} \geq 1$$

durch den Grenzübergang  $\alpha \rightarrow 0$  die Beziehung

$$\left[ \frac{d\omega(w, \beta)}{d\omega(z, \alpha)} \right]_{\alpha=0} \geq 1,$$

oder, unter Beachtung des Ausdruckes  $d\omega$  (Nr. 4),

$$\frac{1 - |w|^2}{|e^{i\theta} - w|^2} \frac{d\theta}{d\varphi} \geq \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2}.$$

Hier ist  $\frac{d\theta}{d\varphi}$  der absolute Betrag der Ableitung  $w'(z)$  im Randpunkte  $z = z^*$ . Die geometrische Deutung dieser Ungleichung ist folgende:

Wenn der Punkt  $z$  innerhalb des Orizykels

$$O_{\lambda, \varphi}: \quad \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} = \lambda \quad (0 < \lambda < \infty)$$

liegt, so fällt der Punkt  $w = w(z)$  in den Orizykel

$$O_{\lambda q, \theta}: \quad \frac{1 - |w|^2}{|e^{i\theta} - w|^2} = \lambda q,$$

$$\text{wo } q = \frac{d\varphi}{d\theta} = \left| \frac{dz}{dw} \right| \text{ für } z = e^{i\varphi}, w = e^{i\theta}.$$

49. Dies ist das JULIASche Lemma<sup>1</sup>, das indes unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen als den obigen besteht. Es läßt sich nämlich folgendes nachweisen:

**Satz von JULIA-CARATHÉODORY.** *Es seien  $z^* = e^{i\varphi}$  und  $w^* = e^{i\theta}$  zwei beliebige Punkte des Einheitskreises. Wenn  $w = w(z)$  eine im Einheitskreise reguläre und beschränkte Funktion ist:*

$$|w(z)| \leq 1 \quad \text{für} \quad |z| < 1,$$

<sup>1</sup> G. JULIA [1], C. CARATHÉODORY [4].

so existiert der endliche oder unendliche Grenzwert

$$c \equiv \lim_{z \rightarrow z^*} \left| \frac{e^{i\vartheta} - w(z)}{e^{i\varphi} - z} \right| \quad (0 \leq c \leq \infty),$$

wenn der Punkt  $z$  dem Randpunkt  $z^* = e^{i\varphi}$  in Winkelannäherung zustrebt, d. h. so daß er sich innerhalb eines von zwei aus diesem Randpunkt ausgehenden Sehnen des Einheitskreises gebildeten Winkels bewegt. Falls  $c$  endlich und  $\neq 0$  ist, so gilt hierbei ferner

$$\arg \frac{e^{i\vartheta} - w(z)}{e^{i\varphi} - z} \rightarrow \vartheta - \varphi,$$

und es ist  $w'(z) \rightarrow ce^{i(\vartheta - \varphi)}$ .

Schließlich ist

$$\frac{1 - |w|^2}{|e^{i\vartheta} - w|^2} \geq \frac{1}{c} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2}$$

für jeden Punkt  $|z| < 1$ , wobei Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn  $w$  und  $z$  durch die Gleichung

$$\frac{1 + e^{-i\varphi}z}{1 - e^{-i\varphi}z} = c \frac{1 + e^{-i\vartheta}w}{1 - e^{-i\vartheta}w} + i\mu$$

verbunden sind, in welchem Fall  $w = w(z)$  also den Kreis  $|z| \leq 1$  auf den Kreis  $|w| \leq 1$  konform so abbildet, daß die gegebenen Randpunkte einander entsprechen und der Abbildungsmodul  $\left| \frac{dw}{dz} \right|$  daselbst gleich  $c$  ist.

Für  $c = 0$  ist identisch  $w = e^{i\vartheta}$ .

*Beweis*<sup>1</sup>. Durch die linearen Transformationen

$$\frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \quad \text{und} \quad \frac{e^{i\vartheta} + w}{e^{i\vartheta} - w} \quad (9)$$

werden die Einheitskreise  $|z| \leq 1$ ,  $|w| \leq 1$  zunächst auf die rechte Halbebene abgebildet. Wir können also vorerst eine Funktion  $w(z) = u(z) + iv(z)$  von  $z = x + iy$  betrachten, die für  $x > 0$  einen nichtnegativen reellen Teil besitzt, und dann, nachdem wir sein asymptotisches Verhalten für  $x \rightarrow \infty$  untersucht haben, wieder zum Einheitskreis übergehen.

Es sei für  $0 < x < \infty$  die untere Grenze

$$\liminf \frac{u(x + iy)}{x} = c;$$

es ist  $0 \leq c < \infty$ , außer wenn  $w = \infty$ , welchen Fall wir hier sogleich ausschließen.

Wir nehmen zunächst  $c = 0$  an. Seien dann  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $z_1 = x_1 + iy_1$  zwei beliebige Punkte der Halbebene. Nach dem LINDELÖF-PICKSchen Prinzip ist die nichteuklidische Entfernung zwischen  $w(z_1)$  und  $w(z_0)$  höchstens gleich dem nichteuklidischen Abstand der Punkte  $z_0$  und  $z_1$ ,

<sup>1</sup> Der Satz wurde in der obigen endgültigen Fassung von CARATHÉODORY [4] gegeben. Der nachfolgende einfache Beweis rührt von LANDAU und VALIRON [1] her.

wie es die Figur zum Ausdruck bringt, in der wir zwei „kongruente“ nichteuklidische Kreise um  $z_0 = x_0 + iy_0$  und  $w(z_0) = w_0 = u_0 + iv_0$  gezeichnet haben, so daß der erste durch  $z_1 = x_1 + iy_1$  geht; der zweite Kreis wird also den Punkt  $w(z_1)$  enthalten.

Die Kreise gehen auseinander durch die lineare Transformation

$$w = iv_0 + \frac{u_0}{x_0} (z - iy_0)$$

hervor. Aus der Figur sieht man, daß

$$|w(z_1)| \leq OA + AB = |v_0| + \frac{u_0 b}{x_0}.$$

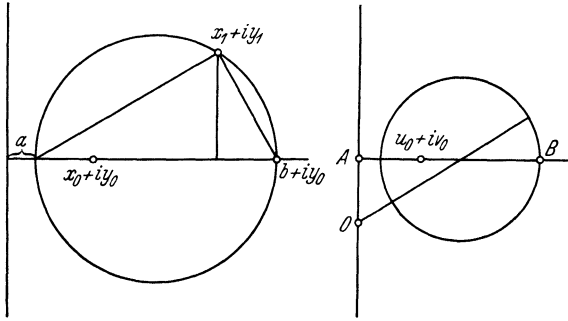


Abb. 8.

Hier ist

$$b = a + \frac{(x_1 - a)^2 + (y_1 - y_0)^2}{x_1 - a}$$

oder, da  $a < x_0$ ,  $x_1$ ,

$$\begin{aligned} b &< x_1 + \frac{x_1^2 + (y_1 - y_0)^2}{x_1 - x_0} < x_1 \left( 1 + \frac{1 + \left( \frac{|y_1|}{x_1} + \frac{|y_0|}{x_1} \right)^2}{1 - \frac{x_0}{x_1}} \right) \\ &< x_1 (3 + 2(k + 1)^2) = x_1 K, \end{aligned}$$

wenn  $x_1 > 2x_0$ ,  $x_1 > |y_0|$  und  $|y_1| < kx_1$  ( $k > 0$ ).

Ist also  $\left| \frac{y_1}{x_1} \right| < k$ , so gilt für jedes hinreichend große  $x_1$

$$|w(z_1)| < |v_0| + K \frac{u_0}{x_0} x_1,$$

woraus für  $x_1 \rightarrow \infty$  folgt

$$\overline{\lim}_{z_1 \rightarrow \infty} \left| \frac{w(z_1)}{z_1} \right| \leq K \frac{u_0}{x_0}.$$

Dieses Resultat besteht, wie immer der Punkt  $z_1$  im Winkel  $\left| \frac{y}{x} \right| < k$  gegen Unendlich strebt. Da nun  $c = 0$ , so kann der Quotient  $\frac{u_0}{x_0}$  beliebig klein gemacht werden und der Quotient  $\frac{w}{z}$  hat also für  $|z| \rightarrow \infty$  den Winkelgrenzwert Null.

Ist  $c > 0$ , so kann man die obige Überlegung auf die Funktion  $w - cz$  anwenden, welche nach der Definition von  $c$  einen nichtnegativen reellen Teil  $u - cx$  hat. Innerhalb eines beliebig großen Winkels  $|y| < kx$  ist dann  $\frac{w - cz}{z} \rightarrow 0$ , also  $\frac{w}{z} \rightarrow c$ .

Wenn also  $w(z)$  eine beliebige für  $x > 0$  reguläre Funktion ist mit nichtnegativem reellen Teil, so hat der Quotient  $\frac{w}{z}$  für  $|y| < kx$ ,  $x \rightarrow \infty$  einen reellen, nichtnegativen Grenzwert  $c$ , der gleich  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u}{x}$  für  $x > 0$  ist. Es ist also

$$u(z) \geq cx,$$

wo Gleichheit nur dann stehen kann, wenn  $u(z) \equiv cx$  und also  $w(z) \equiv cz + i\mu$ , wo  $\mu$  ein reeller Parameter ist.

Was nun die Ableitung  $w'(z)$  betrifft, so findet man nach der CAUCHY-schen Integralformel für  $0 < p < q < 1$  im Kreise  $|z - r| \leq pr$  die Ungleichung ( $\zeta = r + qr e^{i\theta}$ )

$$|w'(z)| \leq \frac{qr}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|w(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} d\theta.$$

Für ein gegebenes  $\varepsilon > 0$  gilt nach Obigem, wenn  $c = 0$  ist,

$$\left| \frac{w(\zeta)}{\zeta} \right| < \varepsilon.$$

sobald  $r$  eine gewisse Schranke  $r_\varepsilon$  überschritten hat, und es wird somit, da  $|\zeta| \leq (1 + q)r$  ist,

$$|w'(z)| \leq \varepsilon \frac{q(q+1)r^2}{(qr - |z - r|)^2},$$

also für  $|z - r| \leq pr$

$$|w'(z)| \leq \varepsilon \frac{q(1+q)}{(q-p)^2},$$

woraus zu sehen ist, daß  $\lim w' = 0$ , wenn  $z$  innerhalb des Winkels  $|\arg z| < \arcsin p$  gegen Unendlich strebt.

Für ein endliches  $c$  ergibt sich wiederum

$$w' = c + (w' - c) = c + \frac{d}{dz} (w - cz) \rightarrow c$$

wie immer der Punkt in Winkelannäherung gegen  $z = \infty$  konvergiert.

Geht man durch die Transformationen (9) zum Einheitskreis zurück, so findet man durch eine leichte Rechnung, deren Ausführung dem Leser überlassen wird, den JULIASchen Satz in der oben gegebenen Formulierung.

## § 5. Sätze von LANDAU und SCHOTTKY.

50. Als Anwendung des Prinzips über das hyperbolische Maß wollen wir die von LANDAU und SCHOTTKY gegebenen Verschärfungen des PICARDSchen Satzes herleiten<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> E. LANDAU [1], F. SCHOTTKY [1].

Es sei  $w(z)$  eine für  $|z| < R$  definierte Funktion. Nimmt man an, es gebe  $p \geq 3$  Werte  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , welche die Funktion im Kreise  $|z| < R$  nicht annimmt, so daß also  $w(z) \neq a_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, p$ ) gilt für die erwähnten Werte  $z$ , so läßt sich mittels des Prinzips des hyperbolischen Maßes eine Beziehung aufstellen, welche eine obere Schranke für den Radius  $R$  gibt mittels der Werte  $w(0)$ ,  $w'(0)$  und  $a_1, \dots, a_p$ .

Die universelle Überlagerungsfläche der punktierten Ebene  $w \neq a_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, p$ ) gehört, da voraussetzungsgemäß  $p \geq 3$ , zum hyperbolischen Typus, und es wird somit, wenn wir als Gebiete  $G_z$  und  $G_w$  bzw.  $|z| < R$  und  $w \neq a_\nu$  annehmen,

$$\frac{d\sigma_w}{d\sigma_z} \leq 1, \quad (10)$$

wo  $d\sigma_z$  die hyperbolische Länge

$$d\sigma_z = \frac{R |dz|}{R^2 - |z|^2}$$

eines Bogenelementes  $dz$  in bezug auf  $|z| < R$  ist und  $d\sigma_w$  die in bezug auf die punktierte Ebene  $G_w$  gemessene hyperbolische Länge des Bildbogens  $dw$ . Bezeichnet man, wie in I, § 3, durch  $x = x(w; a_1, \dots, a_p)$  die Funktion, welche die universelle Überlagerungsfläche  $G_w^\infty$  auf den Einheitskreis  $|x| < 1$  konform abbildet, so daß der Punkt  $w$  in den Nullpunkt  $x=0$  übergeht, so wird ferner  $d\sigma_w = d\sigma_x = |dx|$  und die Ungleichung (10) ergibt

$$\left| \frac{dx}{dw} \right| \leq \frac{R}{R^2 - |z|^2} \left| \frac{dz}{dw} \right|$$

oder also

$$|w'(z)| \leq \frac{R}{R^2 - |z|^2} |\zeta'(0; a_1, \dots, a_p)|,$$

wo  $\zeta(x; a_1, \dots, a_p)$  die Umkehrfunktion von  $x(w; a_1, \dots, a_p)$ , also diejenige automorphe Funktion bezeichnet, welche den Einheitskreis  $|x| < 1$  so auf die Fläche  $G_w^\infty$  abbildet, daß der Nullpunkt in den Punkt  $w = w(z)$  übergeht.

**51.** Für  $z=0$  folgt insbesondere die Beziehung

$$R \leq \frac{|\zeta'(0; a_1, \dots, a_p)|}{|w'(0)|},$$

welche den LANDAUSCHEN Satz enthält:

Falls die für  $|z| < R$  meromorphe Funktion  $w(z)$ , welche im Nullpunkte die Entwicklung

$$w(z) = c_0 + c_1 z + \dots \quad (c_1 \neq 0)$$

hat, von den  $p \geq 3$  Werten  $a_1, \dots, a_p$  verschieden ist, so gilt

$$R \leq \frac{|\zeta'(0; a_1, \dots, a_p)|}{|c_1|}, \quad (11)$$



wo  $\zeta(x; a_1, \dots, a_p)$  diejenige automorphe Funktion ist, welche den Einheitskreis  $|x| < 1$  auf die universelle Überlagerungsfläche der punktierten Ebene  $w \neq a_1, \dots, a_p$  so abbildet, daß  $x=0$  in den Punkt  $w=c_0$  übergeht.

Die gefundene obere Schranke hängt nur von den Ausnahmewerten  $a_1, \dots, a_p$  und den zwei Koeffizienten  $c_0$  und  $c_1$  ab. Sie läßt sich durch keine kleinere ersetzen. Denn aus dem Prinzip folgt, daß die Beziehung (11) dann und nur dann in eine Gleichheit übergeht, wenn  $w(z)$  mit der Abbildungsfunktion  $\zeta\left(\frac{z}{R}; a_1, \dots, a_p\right)$  übereinstimmt, welche den Kreis  $|z| < R$  in die Fläche  $G_w^\infty$  transformiert. Tatsächlich gilt ja für diese Funktion

$$c_1 = w'(0) = \frac{1}{R} \zeta'(0; a_1, \dots, a_p),$$

was eingesetzt in (11) zu einer Identität führt.

Der LANDAUSCHE Satz enthält den PICARDSCHEN als unmittelbaren Folgesatz. Ist nämlich  $w(z)$  eine in jedem endlichen Punkt der Ebene meromorphe Funktion und nimmt man drei beliebige Werte  $a_1, a_2, a_3$ , so folgt aus jenem Satz, daß  $w(z)$  mindestens einen dieser Werte für  $|z| < R$  annehmen muß, sobald  $R$  größer als die in (11) stehende Schranke gewählt wird.

**52. Bemerkung.** Es ist evident, daß man den LANDAUSCHEN Satz ohne Heranziehung des Prinzips über das hyperbolische Maß direkt begründen könnte durch Anwendung des SCHWARZSCHEN Lemmas auf die zusammengesetzte Funktion  $x(w(z); a_1, \dots, a_p)$ , welche für  $|z| < R$  regulär und beschränkt ist und für  $z=0$  verschwindet. Diese Bemerkung erlaubt auch eine obere Schranke für  $R$  aufzustellen für den Ausnahmefall, wo die Nullpunktsableitung  $c_1 = w'(0)$  verschwindet, in welchem Fall die obige Abschätzung versagt. Hat man im Nullpunkte

$$w(z) = c_0 + c_k z^k + \dots \quad (k \geq 1, c_k \neq 0),$$

so hat die obige zusammengesetzte Funktion für  $z=0$  eine  $k$ -fache Nullstelle. Der Quotient

$$\frac{x(w(z); a_1, \dots, a_p)}{z^k} = x'(c_0; a_1, \dots, a_p) c_k + \dots$$

ist für  $|z| < R$  regulär und die obere Grenze ihres absoluten Betrages in jedem Randpunkt  $|z|=R$  höchstens gleich  $R^{-k}$ . Nach dem Maximumprinzip wird also der Betrag des Quotienten auch für  $|z| < R$  unterhalb dieser Schranke liegen, woraus für  $z=0$  folgt

$$R^k \leq \frac{|\zeta'(0; a_1, \dots, a_p)|}{|c_k|}.$$

**53.** Der Satz von SCHOTTKY ergibt sich durch Integration des LANDAUSCHEN Satzes (in der Form (10)). Wählt man den Punkt  $z$  beliebig in

der Kreisscheibe  $|z| \leq r$ , so wird nach dem Prinzip des hyperbolischen Maßes der Funktionswert  $w = w(z)$  in diejenige nichteuklidische, auf der Fläche  $G_w^\infty$  liegende Kreisfläche fallen, die als Mittelpunkt den Punkt  $w(0) = c_0$  hat und deren (nichteuklidischer) Radius  $\lambda$  dem nichteuklidischen Radius von  $|z| \leq r$  gleich ist, also gleich

$$\lambda = \int_0^r \frac{R dt}{R^2 - t^2} = \frac{1}{2} \log \frac{R+r}{R-r}.$$

Die kleinste Entfernung der Peripherie dieser Kreisfläche von den  $p$  Randpunkten  $a_1, \dots, a_p$  der Fläche  $G_w$  ist eine Zahl  $d\left(\frac{r}{R}, c_0; a_1, \dots, a_p\right)$ , die nur von der Lage dieser Randpunkte, von dem Funktionswert  $c_0$  und vom Quotienten  $\frac{r}{R}$  abhängig ist; mit wachsendem  $r$  nimmt  $d$  monoton ab. Um auch den Spezialfall bequem berücksichtigen zu können, wo einer der Werte  $a_\nu$  unendlich ist, empfiehlt es sich die Entfernung  $d$  in sphärischer Maßbestimmung zu bestimmen (wozu man also die  $w$ -Ebene durch stereographische Projektion auf die  $w$ -Kugel zu projizieren hat). Der SCHOTTKYSche Satz erhält dann nachstehende Fassung:

Wenn  $w(z) = c_0 + c_1 z + \dots$  für  $|z| < R$  regulär ist und die  $p \geq 3$  Werte  $a_1, \dots, a_p$  ausläßt, so hat die sphärische Entfernung des Punktes  $w = w(z)$  von den Ausnahmewerten  $a_\nu$  ein Minimum

$$d\left[\frac{|z|}{R}, c_0; a_1, \dots, a_p\right],$$

das nur von den in den Klammern stehenden Größen abhängig ist.

Durch das Obige ist für  $d$  auch der bestmögliche Wert hervorgegangen.

## § 6. Anwendungen zur Untersuchung von Grenz- und Häufungswerten beschränkter Funktionen.

54. Wir gehen wieder zum Prinzip des harmonischen Maßes zurück, so wie es in Nr. 33 ausgesprochen worden ist. Die Randpunktmenge  $\alpha_z$  denken wir uns jetzt in zwei punktfremde Teilmengen  $\alpha'_z$  und  $\alpha''_z$  zerlegt, welche beide aus einer endlichen Anzahl von Randbögen zusammengesetzt sind. In entsprechender Weise teilen wir das Gebiet  $A_w$  in zwei punktfremde Teilmengen  $A'_w$  und  $A''_w$  des Gebietes  $G_w$  ein, welche von endlich vielen Jordanbögen  $\alpha'_w$  und  $\alpha''_w$  begrenzt werden.

Nunmehr nehmen wir speziell an, daß die Funktion  $w(z)$ , deren Werte auf das Gebiet  $G_w$  fallen mögen, wenn  $z$  in  $G_z$  variiert, auf den Randbogen  $\alpha_z$  stetig ist und zwar so, daß ihre Randwerte auf  $\alpha'_z$  in die Punktmenge  $A'_w$  und auf  $\alpha''_z$  in die Punktmenge  $A''_w$  fallen. Lassen wir dann den Punkt  $z$  innerhalb  $G_z$  stetig einen Kurvenbogen  $l_z$  beschreiben, der die Bogen  $\alpha'_z$  und  $\alpha''_z$  verbindet, so wird sich auch der Bildpunkt stetig bewegen auf einem Weg  $l_w$ , welcher innerhalb des Gebietes  $G_w$

verläuft und die Punktmengen  $A'_w$  und  $A''_w$  verbindet (Abb. 9). Nach unserem Prinzip muß andererseits diese Bewegung derart vor sich gehen, daß jedesmal wenn der Funktionswert  $w(z)$  außerhalb der zwei Gebiete  $A'_w$  und  $A''_w$  liegt, das harmonische Maß der Bogen  $\alpha'_w$ , der Bogen  $\alpha''_w$  und auch das der Vereinigungsmenge  $\alpha_w = \alpha'_w + \alpha''_w$ , gemessen im Punkte  $w = w(z)$  in bezug auf dasjenige diesen Punkt enthaltende Restgebiet  $G_w^*$ , welches nach Abtrennung der Gebiete  $A'_w$ ,  $A''_w$  aus  $G_w$  übrig bleibt, mindestens so groß wird wie das harmonische Maß bzw. der Mengen  $\alpha'_z$ ,  $\alpha''_z$  und  $\alpha = \alpha'_z + \alpha''_z$ <sup>1</sup>.

Es bezeichne  $m(l_z)$  das Minimum des harmonischen Maßes  $\omega(z, \alpha_z, G_z)$  auf einem Bogen  $l_z$ , welcher die Mengen  $\alpha'_z$  und  $\alpha''_z$  verbindet, ohne aus  $G_z$

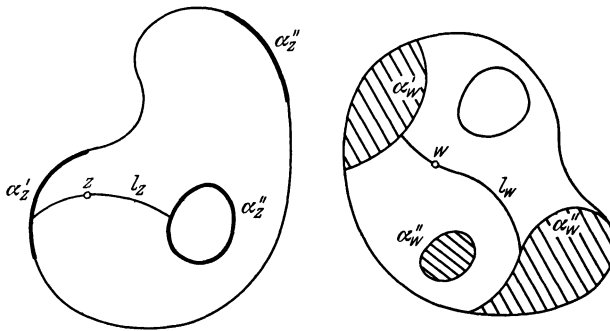


Abb. 9.

auszutreten; es ist also  $m(l_z) \leq 1$  und  $= 1$  nur wenn  $\alpha_z$  den ganzen Gebietsrand  $\Gamma_z$  umfaßt. Die obere Grenze sämtlicher solcher Minima sei

$$m_z = \overline{\lim} m(l_z).$$

In entsprechender Weise bezeichnen wir durch  $m(l_w)$  das Minimum des harmonischen Maßes  $\omega(w, \alpha_w, G_w^*)$  auf einem Bogen  $l_w$ , welcher innerhalb eines beliebigen der Restgebiete  $G_w^*$  die Mengen  $A'_w$  und  $A''_w$  verbindet, und durch  $m_w$  die obere Grenze der Zahlenmenge  $m(l_w)$

$$m_w = \overline{\lim} m(l_w) \quad (0 < m_w \leq 1).$$

Nach dem Prinzip vom harmonischen Maße gilt, wie immer der Bogen  $l_z$  gewählt wird,

$$m(l_z) \leq m_w$$

und, da der Ausdruck links bei passender Wahl des Bogens beliebig wenig von der oberen Grenze  $m_z$  abweicht, also auch

$$m_z \leq m_w. \tag{12}$$

Diese Beziehung enthält eine bemerkenswerte Einschränkung bezüglich der von den Mengen  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  und den Gebieten  $G$  gebildeten

<sup>1</sup> Vgl. R. NEVANLINNA [12].

Konfigurationen. Liegen die Bogen  $\alpha'_z$  und  $\alpha''_z$  in  $G_z$  verhältnismäßig „nahe“ aneinander, so daß der Punkt  $z$  von jener zu dieser Menge gelangen kann, ohne daß das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha_z, G_z)$  sehr tief unter den Maximalbetrag 1 sinkt, so können auch die Bogen  $\alpha'_w$  und  $\alpha''_w$  relativ zum Gebiete  $G_w^*$  nicht sehr „weit“ voneinander entfernt sein, da ja das harmonische Maß  $\omega(w(z), \alpha_w, G_w^*)$  nie unter den Betrag des erstgenannten Maßes sinken darf.

55. In folgendem Abschnitt werden wir uns in einigen speziellen Fällen mit den durch den obigen Satz bedingten Einschränkungen für die Konfiguration  $(\alpha', \alpha'', G)$  in den  $z$ - und  $w$ -Ebenen näher beschäftigen. Hier wollen wir nur einen besonders einfachen Fall behandeln, der zu interessanten Folgerungen leiten wird. Nehmen wir an, daß die zwei Bogenmengen  $\alpha'_z$  und  $\alpha''_z$  in einen Randpunkt  $P_z$  zusammenstoßen, der dann eine eventuelle Unstetigkeitsstelle der Funktion  $w(z)$  darstellt, so wird ja das harmonische Maß der Menge  $\alpha_z = \alpha'_z + \alpha''_z$  in der Nähe von  $P_z$  beliebig wenig vom Maximalwerte 1 abweichen, woraus folgt, daß die obere Grenze  $m_z = 1$  sein muß. Nach unserem Prinzip ist also dann auch  $m_w = 1$ . Man sieht unmittelbar ein, daß dies möglich ist, nur wenn einer der zwei nachstehenden Fälle eintritt:

1. Die Distanz zwischen den Mengen  $\alpha'_w$  und  $\alpha''_w$  ist Null<sup>1</sup>.
2. Die Bogen  $\alpha'_w$  und  $\alpha''_w$  begrenzen ein Teilgebiet  $G_w^*$  von  $G_w$ , welches keine anderen Randbogen als jene aufweist. — Besitzt also  $G_w$  noch weitere Randstücke, so wird die eine Menge (z. B.  $\alpha'_w$ ) durch die andere ( $\alpha''_w$ ) von diesen Randstücken isoliert.

Eine Konfiguration wie z. B. die in Abb. 9 gegebene, wo die Mengen  $\alpha'_w$  und  $\alpha''_w$  im Gebiete  $G_w$  isoliert „nebeneinander“ liegen, ist also unter der gegebenen Voraussetzung (daß nämlich die Distanz zwischen  $\alpha'_z$  und  $\alpha''_z$  verschwindet) nicht möglich.

Als Beispiel eines Falles, wo die Möglichkeit 2. vorliegt, nehmen wir  $w(z) = e^z$  ( $z = x + iy$ ) und wählen als Gebiet  $G_z$  den Streifen  $-1 < x < 1$ , den wir noch längs der positiven imaginären Halbachse aufschlitzen. Nimmt man dann  $\alpha'_z$  als die Gerade  $x = -1$  und  $\alpha''_z$  als jene Halbachse  $x = 0, y \geq 0$ , so kann man für  $G_w, \alpha'_w, \alpha''_w$  wählen bzw. den Kreisring  $\frac{1}{e} < |w| < e$ , die Kreislinie  $|w| = \frac{1}{e}$  und die Kreislinie  $|w| = 1$ . Man sieht, daß in Übereinstimmung mit 2., die Kreise  $\alpha'_w$  und  $\alpha''_w$  tatsächlich einen Ring  $G_w^*$  vollständig begrenzen (wo also das harmonische Maß von  $\alpha'_w + \alpha''_w$  konstant  $= 1$  ist), so daß der innere Kreis ( $|w| = \frac{1}{e}$ ) durch den äußeren ( $|w| = 1$ ) von dem übrigen Rand des Gebietes  $G$  (d. h. vom Kreise  $|w| = e$ ) getrennt wird.

<sup>1</sup> Um die Sonderstellung des unendlich fernen Punktes aufzuheben, empfiehlt es sich, die Distanzen auf der Kugel zu messen.

56. Als Anwendung des obigen Ergebnisses betrachten wir ein Gebiet  $G$ , zu dessen Begrenzung zwei, in einem Punkt  $P$  zusammenstoßende Jordanbogen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  gehören. In  $G$  sei eine eindeutige und beschränkte analytische Funktion  $w(z)$  definiert ( $|w| < M$ ). Wir nehmen an,  $w(z)$  sei in jedem inneren Punkt von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  stetig, und bezeichnen durch  $H_1$  und  $H_2$  die *Häufungsbereiche* von  $w(z)$  für  $z \rightarrow P$  auf  $\alpha_1$ , bzw.  $\alpha_2$ <sup>1</sup>.

Nach unserem Satz können dann die Punktmenge  $H_1$  und  $H_2$  nicht „nebeneinander“ im Kreise  $|w| < M$  liegen. Sind sie punktfremd, so müssen sie also eingeschachtelt sein, so daß die eine die andere einhüllt und sie von der Peripherie  $|w| = M$  brennt. Insbesondere wird also die Möglichkeit ausgeschlossen, daß beide Häufungsmengen sich auf *Punkte* reduzieren, woraus die Richtigkeit des nachstehenden wichtigen Konvergenzsatzes von LINDELÖF ersichtlich wird<sup>2</sup>:

*Wenn eine in der Umgebung eines singulären Punktes  $P$  eindeutige analytische Funktion längs zweier in  $P$  endenden Jordanbogen für  $z \rightarrow P$  zwei verschiedenen Grenzwerten zustrebt, so kann die Funktion in der Umgebung von  $P$  nicht beschränkt sein.*

57. Durch die Möglichkeit die universelle Überlagerungsfläche der dreifach punktierten Ebene auf den Einheitskreis konform abzubilden, lassen sich die obigen Sätze auf eindeutige Funktionen erweitern, die in einem gegebenen einfach zusammenhängenden Gebiet  $G_z$  drei Werte  $a_1, a_2, a_3$  auslassen. Nimmt eine derartige Funktion auf den Randbogen  $\alpha'_z$  bzw.  $\alpha''_z$  Werte an, welche in eine von gewissen Jordanbogen  $\alpha'_w$  bzw.  $\alpha''_w$  begrenzte Teilmenge  $G'_w$  bzw.  $G''_w$  der punktierten Ebene  $w \neq a_1, a_2, a_3$  fallen, so wird durch Zusammensetzung mit der unformisierenden Abbildungsfunktion  $x = x(w; a_1, a_2, a_3)$  eine, ausgehend von einem beliebig festgelegten Anfangselement in  $G_z$  unbeschränkt fortsetzbare und also nach dem Monodromiesatz *eindeutige* Funktion

$$\varphi(z) \equiv x(w(z); a_1, a_2, a_3)$$

erklärt. Liegen nun die Bogen  $\alpha'_w$  und  $\alpha''_w$  „nebeneinander“, d. h. gibt es einen geschlossenen, durch einen Randpunkt  $a_v$  gehenden Weg, der diese Bogen voneinander trennt, so wird die Funktion  $\varphi(z)$ , deren Werte innerhalb des Einheitskreises  $|x| < 1$  variieren, auf den Bogen  $\alpha'_z$  und  $\alpha''_z$  Randwerte annehmen, die auf zwei „nebeneinander“ liegenden Bogenmengen  $\alpha'_x$  und  $\alpha''_x$  im Kreise  $|x| < 1$  liegen; diese Mengen sind zwei wohlbestimmte unter den abzählbar vielen Bildern der Mengen  $\alpha'_w$  und  $\alpha''_w$ . Wenn nun  $\alpha'_z$  und  $\alpha''_z$  einen gemeinsamen Endpunkt haben, so ist dies nach Obigem *nicht möglich*.

<sup>1</sup>  $H_v (v = 1, 2)$  besteht also aus der Gesamtheit derjenigen Punkte  $w$ , denen der Funktionswert  $w(z)$  in beliebiger Nähe von  $P$  auf  $\alpha_v$  beliebig nahe kommt. Nach dieser Definition ist  $H_v$  entweder ein Punkt oder ein Kontinuum.

<sup>2</sup> E. LINDELÖF [3].

Hieraus folgt u. a. daß eine zwischen zwei in  $P$  endenden Jordanbogen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  eindeutige analytische Funktion, welche für  $z \rightarrow P$  auf diesen Bogen *verschiedene Grenzwerte* hat, nicht nur, wie oben gezeigt wurde, in der Umgebung von  $P$  Werte von beliebig großem Betrag, sondern überhaupt *jeden Wert* annehmen muß, außer höchstens *zwei* Werten. Daß andererseits unter obigen Voraussetzungen zwei solche Ausnahmewerte vorkommen können, zeigt wieder die Exponentialfunktion, welche auf der positiven und der negativen reellen Achse für  $z \rightarrow \infty$  gegen die verschiedenen Grenzwerte 0 und  $\infty$  strebt, welche gleichzeitig Ausnahmewerte der Funktion sind.

## IV. Beziehungen zwischen nichteuklidischen und euklidischen Maßbestimmungen.

### § 1. Allgemeine Bemerkungen.

58. Die Anwendbarkeit verschiedener nichteuklidischer Maßbestimmungen (harmonisches Maß, hyperbolisches Maß) in der Funktionentheorie ist einerseits darin begründet, daß diese Maße *funktions-theoretische Invarianten* sind; so bezeichnen wir jede Größe die sich gegenüber der Gruppe der konformen Abbildungen invariant verhält. Andererseits zeigt es sich bei verschiedenen Fragekomplexen, daß sich gewisse Erscheinungen gerade unter Anwendung von Begriffen der nichteuklidischen Geometrie scharf abgrenzen lassen; dies trifft z. B. bei der Charakterisierung verschiedener Extremaleigenschaften oft zu. Die Einführung solcher Maßbestimmungen liegt also durchaus in der Natur der Sache und es scheint deshalb von Bedeutung zu sein, die Theorie dieser Maße systematisch aufzubauen, ohne sich sogleich um die Frage zu kümmern, wie sich diese Maßbestimmungen zu den gewöhnlichen Maßen (euklidischen oder sphärischen) verhalten.

Andererseits ist es evident, daß die im vorigen Abschnitt entwickelten Prinzipien erst dann zu ihrer vollen Anwendbarkeit gelangen können, wenn man die erwähnten Beziehungen bis zu einem gewissen Grade bewältigt. In konkreten, dem soeben erörterten Fragekreis angehörenden Problemen liegen gewöhnlich einige mehr oder weniger genaue Angaben über die euklidischen Maßverhältnisse der gegebenen geometrischen Konfigurationen (z. B.  $G_z, \alpha_z, z$ ) vor, und die allgemeinen Prinzipien lassen sich in solchen Fällen nur dann verwerten, wenn man aus den gegebenen Bestimmungsstücken entsprechende Bedingungen über die nichteuklidischen Maßverhältnisse der Abbildung ablesen kann und umkehrt.

Nun sind die gegenseitigen Beziehungen zwischen den verschiedenen Maßen in den einfachsten Fällen unmittelbar auf Grund der Definitionen dieser Begriffe bekannt. So z. B. ist ja das harmonische Maß eines

Bogens des Einheitskreises, im Nullpunkte gemessen, nichts anderes als der durch  $2\pi$  dividierte Betrag des entsprechenden Zentriwinkels; und die hyperbolische Länge eines vom Nullpunkte ausgehenden Linien-elementes (mit dem Einheitskreis als Bezugsgebiet) ist gleich der euklidischen Länge desselben Elements. Für allgemeinere Fälle, wo jene Beziehungen sich mit Hilfe elementarer Funktionen nicht genau ausdrücken lassen, ist zu bemerken, daß das Problem auf den Einheitskreis zurückgeführt werden kann, indem man die betreffenden Bezugsgebiete oder, falls diese mehrfach zusammenhängend sind, deren universelle Überlagerungsflächen auf jenen Kreis eineindeutig und konform abbildet. Hierbei verhält sich das harmonische bzw. hyperbolische Maß invariant; die euklidischen Maßverhältnisse ändern sich dagegen. So sieht man ein, daß das Problem des vorliegenden Abschnitts im Grunde identisch ist mit der Frage nach der *Verzerrung*, welche ein Gebiet im Innern und auf dem Rande erleidet, wenn es auf ein gegebenes Normalgebiet (z. B. auf den Einheitskreis) konform abgebildet wird. Als derartige Verzerrungsaussagen können die im folgenden zu besprechenden Sätze gedeutet werden. Hierbei werden wir allerdings die Theorie der Verzerrung nicht als eine selbständige Lehre vollständig darstellen, sondern vor allem dasjenige herausgreifen, was vom Standpunkt der Frage nach den gegenseitigen Relationen der verschiedenen Maßbestimmungen wesentlich ist.

### § 2. CARLEMANS Prinzip der Gebietserweiterung.

59. In vielen Fällen läßt sich das harmonische Maß eines Randbogens mit genügender Schärfe vermittels des nachstehenden Satzes abschätzen, von dem zuerst CARLEMAN in seiner bekannten Arbeit über die asymptotischen Werte ganzer Funktionen Gebrauch gemacht hat und der späterhin von verschiedenen Autoren, namentlich von OSTROWSKI und dessen Schülern verwendet worden ist<sup>1</sup>.

#### Prinzip der Gebietserweiterung.

Das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha, G)$  vergrößert sich, wenn man das Gebiet  $G$  über den zu  $\alpha$  komplementären Teil  $\beta$  des Randes  $\Gamma = \alpha + \beta$  erweitert.

Dies bedeutet folgendes: Man ersetze das Gebiet  $G$  durch ein weiteres Gebiet  $G'$ , das  $G$  als Teilgebiet enthält und dessen Berandung  $\Gamma'$ , außer von den gegebenen Bogen  $\alpha$ , aus gewissen Jordanbogen  $\beta'$  besteht, welche also entweder vollständig außerhalb  $G$  verlaufen oder teilweise

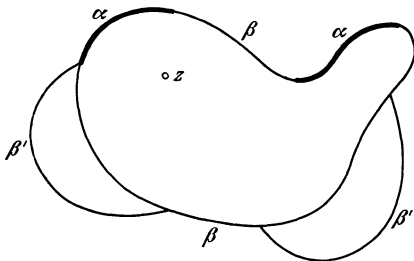


Abb. 10.

<sup>1</sup> T. CARLEMAN [1], A. OSTROWSKI [3], S. WARSCHAWSKI [1].

mit Stücken der Bogen  $\beta$  zusammenfallen. Dann gilt in  $G$ :

$$\omega(z, \alpha, G) \leq \omega(z, \alpha, G'), \quad (1)$$

und Gleichheit besteht hier nur für  $G = G'$ .

Zum Beweis bildet man die Differenz  $u(z) = \omega(z, \alpha, G') - \omega(z, \alpha, G)$ , welche eine in  $G$  reguläre und beschränkte harmonische Funktion darstellt. In jedem inneren Punkt der (voraussetzungsgemäß endlich vielen) Bogen  $\alpha$  werden die rechtsstehenden harmonischen Maße beide gleich 1 und daher  $u = 0$ . In den inneren Punkten von  $\beta$  ist wiederum  $\omega(z, \alpha, G) = 0$ , während  $\omega(z, \alpha, G')$  jedenfalls nichtnegativ ausfällt und es ist somit hier  $u \geq 0$ . Da diese Funktion in den noch übrigen Randpunkten (Endpunkten von  $\alpha$  und  $\beta$ ) beschränkt bleibt, so folgt aus dem Minimumprinzip, daß die Beziehung  $u \geq 0$  und folglich auch die Behauptung (1) in jedem Punkte des Gebiets  $G$  gilt. Gleichheit kommt für einen inneren Punkt  $z$  von  $G$  dann und nur dann in Betracht, wenn  $u$  identisch verschwindet. Da dies dann insbesondere für den Randbogen  $\beta$  gilt, wo ja  $\omega(z, \alpha, G) = 0$ , so ist daselbst auch  $\omega(z, \alpha, G') = 0$ , was offenbar nur so möglich ist, daß die Bogen  $\beta'$  und  $\beta$  und somit auch die Gebiete  $G'$  und  $G$  vollständig zusammenfallen. Hiermit ist der Nachweis des CARLEMANSCHEN Prinzips beendet.

Da  $\omega(z, \alpha, G) + \omega(z, \beta, G) = 1$ , so folgt aus dem Prinzip weiter

$$\omega(z, \beta, G) \geq \omega(z, \beta', G'). \quad (1')$$

Das CARLEMANSCHES Verfahren liefert also ein Mittel, das harmonische Maß sowohl nach oben wie nach unten abzuschätzen.

Auf Grund der Bemerkungen in § 1 kann das obige Resultat so gedeutet werden: Wenn  $G$  und  $G'$  oder, falls sie mehrfach zusammenhängend sind, ihre universellen Überlagerungsflächen auf den Einheitskreis so abgebildet werden, daß  $z$  in den Nullpunkt übergeht, so wird der Menge  $\alpha$  im ersten Falle ( $G$ ) eine Randbogenmenge von kürzerer Gesamtlänge entsprechen als im letzten Falle ( $G'$ ).

**60.** Die Bedeutung des CARLEMANSCHEN Prinzips beruht darauf, daß es oft gestattet, komplizierte Konfigurationen  $(G, \alpha, z)$  durch einfachere  $(G', \alpha, z)$  zu ersetzen, bei welchen die rechnerische Beherrschung der Beziehungen zwischen dem harmonischen Maß  $\omega$  und den euklidischen Bestimmungsstücken der Konfiguration  $(G', \alpha, z)$  ohne weiteres gelingt, so daß man Majoranten und Minoranten des harmonischen Maßes aufstellen kann.

Die direkte Anwendung dieser harmonischen Majoranten und Minoranten gestattet übrigens in vielen Fällen allgemeine Sätze elementar zu beweisen, ohne das Prinzip des harmonischen Maßes in seiner allgemeinsten Fassung heranzuziehen, in welcher Form dieses Prinzip nicht als „elementar“ bezeichnet werden darf, weil es ja die ziemlich



tiefliegenden Fundamentalsätze über konforme Abbildung und die Ränderzuordnung bei einer solchen Abbildung voraussetzt.

Um dies an einem Beispiel zu erläutern, beweisen wir, bei Benutzung des CARLEMANSchen Gedankenganges, nachstehenden Grenzwertsatz über beschränkte Funktionen, der zur Begründung der Hauptsätze über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung mit Erfolg benutzt werden kann:

*Es sei  $w(z)$  eine in der rechten Halbebene reguläre und beschränkte analytische Funktion und  $l$  ein in dieser Halbebene verlaufender Jordanbogen, der im Nullpunkt  $z=0$  endet. Wenn dann  $w(z)$  für  $z \rightarrow 0$  auf  $l$  einen Grenzwert  $a$  hat, so gilt*

$$\lim_{z=0} w(z) = a$$

*gleichmäßig in jedem Winkel  $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \delta$  ( $\delta > 0$ ).*

*Beweis.* Für ein beliebig gegebenes  $0 < \varepsilon < 1$  können wir nach der Voraussetzung eine so kleine Zahl  $r > 0$  finden, daß  $|w - a| < \varepsilon$  in jedem in den Kreis  $|z| \leq r$  fallenden Punkt der Kurve  $l$  ist. Wir verfolgen  $l$  vom Nullpunkt bis zum ersten Schnittpunkt  $P_r$  mit dem Kreis  $|z| = r$ ; durch diesen Teilbogen von  $l$ , zerfällt der Halbkreis  $D_r(|z| \leq r, s \geq 0; z = s + it)$  in zwei Gebiete  $D'_r$  und  $D''_r$ , welche bzw. an die Segmente  $(0, ir)$ ,  $(0, -ir)$  der imaginären Achse grenzen.

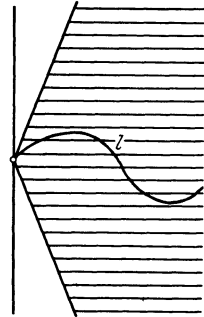


Abb. 11.

Es sei nun  $\omega(z, l_r, D'_r)$  das harmonische Maß von  $l_r$  in bezug auf  $D'_r$ , gemessen in einem inneren Punkte  $z$  dieses Gebietes. Nach dem Zweikonstantensatz gilt dann<sup>1</sup> (vgl. S. 41)

$$\log |w(z) - a| < \omega(z, l_r, D'_r) \log \varepsilon. \tag{2}$$

Hier wird das harmonische Maß von  $l_r$  mit Hilfe des CARLEMANSchen Prinzips nach unten abgeschätzt. Als Minorante ergibt sich das harmonische Maß desjenigen Teils der Berandung des Halbkreises  $D_r$ , der aus dem Segment  $s_r(0, -ir)$  der imaginären Achse und dem Kreisbogen  $(-ir, P_r)$  zusammengesetzt ist. Dieses Maß verkleinert sich noch, wenn man den letztgenannten Bogen wegläßt, und es wird somit

$$\omega(z, l_r, D'_r) > \omega(z, s_r, D_r). \tag{3}$$

Nun könnte man leicht einen expliziten Ausdruck für das letzte harmonische Maß bestimmen. Für unsere Zwecke genügt es indessen folgendes zu bemerken. Ist  $u(z)$  das harmonische Maß des Radius  $(0, -i)$  des Halbkreises  $D_r$ , mit  $r=1$ , so ist offenbar

$$\omega(z, s_r, D_r) = u\left(\frac{z}{r}\right).$$

<sup>1</sup> Da  $w$  voraussetzungsgemäß beschränkt ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, es sei in der rechten Halbebene  $|w - a| < 1$ .

Nun hat  $u(z)$  im Kreissektor  $|z| \leq \frac{1}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \delta$  ein nur von  $\delta$  abhängiges positives Minimum  $\lambda_\delta$ , und es gilt dann auch, sobald  $z$  in den Sektor  $S_r \left( |z| \leq \frac{r}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \delta \right)$  fällt,

$$u\left(\frac{z}{r}\right) \geq \lambda_\delta.$$

Nummehr folgt aus (2) und (3), daß

$$\log |w(z) - a| < \lambda_\delta \log \varepsilon$$

für jeden Wert  $z$ , der in den Durchschnitt des Sektors  $S_r$  und des Gebiets  $D'_r$  fällt.

Dasselbe Ergebnis findet man auch im Durchschnitt des Sektors  $|z| \leq \frac{r}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} + \delta \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$  mit dem Gebiet  $D''_r$ , und es wird also schließlich

$$|w(z) - a| < \varepsilon^{\lambda_\delta},$$

sobald  $|z| \leq \frac{r}{2}$ ,  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ , woraus die behauptete Konvergenzeigenschaft folgt.

Bei diesem Beweis haben wir den Umweg über das Prinzip vom harmonischen Maß gemacht, und insbesondere die nicht ganz elementare Tatsache der Existenz des harmonischen Maßes des Jordanbogens  $l_r$  benutzt. Wie oben bemerkt wurde, läßt sich dieser Umweg vermeiden, indem man das CARLEMANSche Prinzip direkt zur Konstruktion einer elementaren harmonischen Majorante verwendet. Der Beweis gestaltet sich dann einfach folgendermaßen:

Die Funktion

$$u\left(\frac{z}{r}\right) \log \varepsilon - \log |w(z) - a| \tag{4}$$

ist im Gebiete  $D'_r$  harmonisch bis auf die Nullstellen von  $w - a$ , in denen sie positiv unendlich wird. In der Nähe jedes Randpunktes von  $D'_r$  ist sie ferner nichtnegativ, außer höchstens in den zwei Unstetigkeitsstellen (0 und  $P_r$ ) von  $u(r, z)$ . In der Tat: auf  $l_r$  ist  $0 < u < 1$  und  $\log |w - a| < \log \varepsilon$ , also die Differenz (4) positiv; auf dem übrigen Randteil verschwindet  $u$ , während  $\log |w - a|$  hier eine negative obere Grenze hat. Da die Differenz schließlich in der Nähe der zwei Unstetigkeitspunkte von  $u$  jedenfalls nach unten beschränkt bleibt, so ist gemäß dem Prinzip vom Minimum der Ausdruck (4) auch in jedem inneren Punkt von  $D'_r$  nichtnegativ. Der Beweis wird dann wie oben zu Ende geführt.

**61.** Als zweite Anwendung nehmen wir ein allgemeines Problem auf, das zuerst von CARLEMAN (l. c.) aufgestellt und untersucht wurde und später insbesondere von MILLOUX [I] behandelt worden ist, weshalb es oft das „MILLOUXsche Problem“ genannt wird. Diese Aufgabe, die für verschiedene Anwendungen von Bedeutung ist, wird uns noch in den späteren Paragraphen dieses Abschnitts beschäftigen.

**Problem von CARLEMAN-MILLOUX.** *Man beschreibe um einen Randpunkt oder um einen äußeren Punkt  $\zeta$  eines von endlich vielen Jordanbogen berandeten, einfach zusammenhängenden Gebiets  $G$  einen Kreis  $|z - \zeta| \leq R$ , und bezeichne mit  $\alpha$  die innerhalb dieses Kreises liegende Randpunktmenge von  $G$  und mit  $G_R$  den Durchschnitt von  $G$  und jener Kreisscheibe. Es gilt für das harmonische Maß*

$$\omega(z, \alpha, G_R)$$

eine untere Schranke aufzustellen, die nur vom Radius  $R$  und dem Abstand  $|z - \zeta|$  abhängt.

Zur Lösung<sup>1</sup> empfiehlt es sich, das Gebiet  $G$  durch  $t = \log(\zeta - z)$  in ein in der  $t = \sigma + i\tau$ -Ebene gelegenes schlichtes Gebiet  $D$  zu transformieren, das den unendlich fernen Punkt  $t = \infty$  als äußeren oder als Randpunkt haben wird. Es sei  $D_\sigma$  das Bild des Durchschnitts  $G_R$  und  $\Theta_\sigma$  die Menge der auf der Geraden  $\sigma = \log R$  liegenden Randpunkte von  $D_\sigma$ . Es gilt also dann das harmonische Maß der Bildbogen von  $\alpha$  nach unten oder, was auf dasselbe herauskommt, das harmonische Maß des Komplements, d. h. gerade der Punktmenge  $\Theta_\sigma$ , in bezug auf das Gebiet  $D_\sigma$  nach oben abzuschätzen.

Zu diesem Zwecke machen wir von dem Erweiterungsprinzip Gebrauch und zwar so, daß das Gebiet  $D_\sigma$  durch die Halbebene  $\sigma \leq \log R$  ersetzt wird. Das harmonische Maß der Bogenmenge  $\Theta_\sigma$  vergrößert sich hierbei und wird einfach gleich der Summe der Winkel, unter denen diese Menge vom Aufpunkte  $t_0 = \log z$  erscheint, dividiert durch  $\pi$  (vgl. Nr. 39). Durch eine leichte Erwägung, die dem Leser überlassen wird, sieht man ferner ein, daß diese Winkelsumme bei gegebener Gesamtlänge  $\Theta(\sigma)$  ( $\sigma = \log R$ ) der Bogen ihr Maximum erreicht, wenn  $\Theta_\sigma$  aus einem einzigen Segment besteht, das zur Geraden  $\tau = \tau_0$  ( $t_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ ) symmetrisch orientiert ist. Der entsprechende maximale Winkel ist dann gleich

$$2 \operatorname{arctg} \frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma_0)},$$

und man hat also für das harmonische Maß der Menge  $\Theta_\sigma$  die obere Schranke

$$\omega(t_0, \Theta_\sigma, D_\sigma) \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma_0)}.$$

**62.** Dieses Ergebnis verdient wegen seiner großen Anwendbarkeit als ein selbständiger Satz ausgesprochen zu werden.

**Satz von CARLEMAN.** *Es sei  $D$  ein in der  $t = \sigma + i\tau$ -Ebene gelegenes schlichtes, einfach zusammenhängendes Gebiet.  $\Theta(\sigma)$  bezeichne die Gesamtlänge der innerhalb oder auf die Begrenzung von  $D$  fallenden Segmente  $\Theta_\sigma$  der Geraden  $\Re t = \sigma$  und  $D_\sigma$  denjenigen Teil von  $D$ , der links von dieser Geraden liegt.*

<sup>1</sup> Für das Folgende vgl. CARLEMAN [I].

Unter diesen Voraussetzungen hat man für das harmonische Maß der Bogen  $\Theta_\sigma$  die für jedes  $t_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ ,  $\sigma_0 < \sigma$  gültige Abschätzung

$$\omega(t_0, \Theta_\sigma, D_\sigma) \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma_0)}. \quad (5)$$

Wir bemerken noch, daß diese Beziehung wegen des Erweiterungsprinzips a fortiori gelten muß, wenn man links  $D_\sigma$  durch  $D$  und  $\Theta_\sigma$  durch den rechts von diesen Querschnitten fallenden Randteil von  $D$  ersetzt.

Aus der obigen Herleitung folgt auch, daß die in (5) gegebene Schranke sich unter den gegebenen Voraussetzungen durch keine kleinere ersetzen läßt. In der Tat geht (5) in eine Gleichheit über, wenn man  $D$  als die Halbebene  $\Re t \leq \sigma$  nimmt und  $\Theta_\sigma$  als die zur Geraden  $\tau = \tau_0$  symmetrisch liegende Teilstrecke von der Länge  $\Theta(\sigma)$  der Begrenzungsgeraden  $R(t) = \sigma$  wählt.

**63.** Der Satz von CARLEMAN enthält folgende Aussage über die Randverzerrung bei konformer Abbildung: Wenn das Gebiet  $D$  auf den Einheitskreis derart konform abgebildet wird, daß der Punkt  $t_0 = \sigma_0 + i\tau_0$  in den Nullpunkt übergeht, so bildet sich die Randpunktmenge  $\Theta_\sigma$  auf eine Peripheriebogenmenge ab, deren Gesamtlänge höchstens gleich

$$4 \operatorname{arctg} \frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma_0)}$$

ist.

Dieses Resultat gestattet im Falle eines *konvexen* Gebietes  $D$  eine interessante Anwendung. Ist  $\alpha$  ein beliebiger Randbogen eines solchen Gebiets, so erhält man für  $\omega(t, \alpha, D)$  die obere Schranke  $\frac{\gamma(t, \alpha)}{\pi}$ , wo  $\gamma$  der Winkel ist unter dem der Bogen  $\alpha$  vom Aufpunkte  $t$  erscheint. Also:

*Wenn ein konvexes Gebiet  $D$  auf den Einheitskreis so konform abgebildet wird, daß der innere Punkt  $P$  in den Nullpunkt übergeht, so wird einem Randbogen, der vom Punkte  $P$  aus unter dem Winkel  $\gamma$  erscheint, ein Peripheriebogen entsprechen, dessen Länge kleiner als  $2\gamma$  ist, außer wenn  $D$  eine Halbebene ist, für welche dieser Bildbogen genau gleich  $2\gamma$  wird.*

Da dieses Ergebnis besteht, wie klein immer der Bogen  $\alpha$  gewählt wird, so gilt es auch für ein Bogendifferential. Nimmt man den Aufpunkt  $P$  als Anfangspunkt eines Polarkoordinatensystems  $(r, \varphi)$ , in welchem die konvexe Randkurve von  $D$  die Gleichung  $r = r(\varphi)$  hat, so ist also  $d\omega \leq \frac{1}{\pi} d\varphi$ . Denkt man sich nun auf dem Rande eine Folge von nichtnegativen Randwerten  $u(r, \varphi)$  gegeben, so bestimmt sich die durch diese Randwerte erklärte, in  $D$  harmonische Funktion durch (vgl. Nr. 22)

$$u(P) = \int u(r, \varphi) d\omega,$$

und es wird also

$$u(P) \leq \frac{1}{\pi} \int u(r, \varphi) d\varphi$$

eine Abschätzung, die wegen ihrer Einfachheit und Genauigkeit bei der Untersuchung der Eigenschaft harmonischer Funktionen in der Umgebung eines singulären Randpunktes eines konvexen Gebietes sehr anwendbar ist.

64. Wir kehren zu der CARLEMANSchen Ungleichung (5) zurück und wollen nachsehen, was aus ihr über die CARLEMAN-MILLOUXSche Frage (Nr. 61) geschlossen werden kann. Gehen wir durch die Variablentransformation  $t = \log(\zeta - z)$  zu der  $z$ -Ebene zurück, so ergibt sich für die in (5) stehende Majorante des harmonischen Maßes der Ausdruck  $(\log R = \sigma, \log r = \sigma_0)$

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Theta(R)}{2 \log \frac{R}{r}},$$

wo  $R\Theta(R)$  die Länge der in das Gebiet  $G$  fallenden Kreisbogen  $|z - \zeta| = R$  ist. Man gelangt also zu folgendem Ergebnis:

**Satz 1.** *Es sei  $G$  ein von endlich vielen Jordanbögen begrenztes schlichtes einfach zusammenhängendes Gebiet, das den Nullpunkt  $z = 0$  nicht als inneren Punkt enthält. Wenn die Länge der in  $G$  fallenden Bogen des Kreises  $|z| = R$  gleich  $R\Theta(R)$  ist, so genügt das harmonische Maß der im Kreisäußeren  $|z| \geq R$  liegenden Randbogen  $\beta$  von  $G$  für jeden Gebietspunkt  $z$ , der in den Kreis  $|z| < R$  fällt, der Ungleichung*

$$\omega(z, \beta, G) \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Theta(R)}{2 \log \frac{R}{|z|}}. \quad (6)$$

Für das Maß des komplementären, in  $|z| < R$  liegenden Teiles  $\alpha$  der Berandung von  $G$  gilt somit

$$\omega(z, \alpha, G) \geq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R}{\Theta(R)|z|}. \quad (6')$$

Wegen  $\Theta \leq 2\pi$  gelten die Beziehungen (6) und (6') a fortiori, wenn man  $\Theta$  durch  $2\pi$  ersetzt.

Die Bedeutung dieses Resultats liegt darin, daß es für die betreffenden harmonischen Maße Schranken angibt, die für  $|z| \leq r < R$  allein durch das Verhältnis  $\frac{r}{R}$ , bestimmt sind, unabhängig vom Verlauf der Randkurve des Gebietes  $G$  sowie von der Wahl des Aufpunktes  $z$  im Kreise.

Die oben gegebenen Schranken sind, im Gegensatz zu der rechts in (5) stehenden, nicht die bestmöglichen. Überträgt man nämlich den dem Satz (5) entsprechenden Extremalfall auf die  $z = e'$ -Ebene, so wird man allerdings zu einem harmonischen Maß gelangen, welches der in Satz 1 stehenden Schranke gleich ist, die aber nur auf der, der Halbebene  $\Re t \leq \sigma$  entsprechenden, unendlich vielblättrigen Kreisfläche  $0 < |z| < R$ , also nicht (wie Satz 1 voraussetzt) auf einem *schlichten* Gebiet  $G$  eindeutig ist.

65. Bei Anwendung von Satz 1 ergibt sich als Spezialfall des allgemeinen Zweikonstantensatzes (Nr. 36)<sup>1</sup>

**Satz 2.** Es sei  $w(z)$  eine in einem Gebiet der in Satz 1 erwähnten Art reguläre und beschränkte Funktion ( $|w| \leq 1$ ). In jedem Randpunkt des Gebietes, der innerhalb des Kreises

$$|z| \leq R$$

liegt, sei

$$\overline{\lim} |w(z)| \leq m \quad (0 < m < 1).$$

Dann gilt in jedem Gebietspunkt  $z$ , der innerhalb jenes Kreises liegt, die Beziehung

$$|w(z)| \leq m^{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R}{|z|}}.$$

Als ein Beispiel für die Anwendbarkeit dieses Satzes beweisen wir folgenden Grenzwertsatz von LINDELÖF [3], der in der Theorie der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung eine wichtige Rolle spielt.

**Satz von LINDELÖF.** Sei  $G$  ein von einer Jordankurve begrenztes Gebiet,  $\gamma$  ein Randbogen desselben und  $\zeta$  ein innerer Punkt von  $\gamma$ . Sei ferner  $w(z)$  eine innerhalb  $G$  erklärte, reguläre und beschränkte analytische Funktion, die auf dem Randbogen  $\gamma$  noch stetig ist, höchstens mit Ausnahme des Punktes  $\zeta$ . Falls dann  $w(z)$  bei links- und rechtsseitiger Annäherung des Randpunktes  $\zeta'$  an den Punkt  $\zeta$  ein und demselben Grenzwert  $a$  zustrebt, so ist  $w(z)$  auch im Punkte  $z = \zeta$  stetig, d. h. es ist  $w(z) \rightarrow a$ , wie immer der Punkt  $z$  im Bereiche  $G$  gegen den Randpunkt  $\zeta$  konvergiert.

*Beweis.* Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß  $|w(z) - a| < 1$  innerhalb  $G$  sei. Für ein gegebenes, beliebig kleines  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) läßt sich nach der Voraussetzung eine Zahl  $r > 0$  finden, so daß in jedem innerhalb  $0 < |\zeta - \zeta'| < 2r$  liegenden Randpunkt  $\zeta'$  die Beziehung  $|w(\zeta') - a| < \varepsilon$  gilt. Nach (6') ist dann für jeden in dem Kreis  $|z - \zeta| < r$  gelegenen Gebietspunkt  $z$

$$|w(z) - a| < \varepsilon^\delta,$$

wo

$$\delta = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\log 2}{\pi},$$

woraus die behauptete gleichmäßige Konvergenz hervorgeht.

66. Die in den obigen Sätzen gegebenen Abschätzungen lassen sich durch ein ebenfalls von CARLEMAN herrührendes Verfahren so abändern, daß sie nicht nur die Länge eines speziellen Querschnittes  $\Re t = \sigma$  bzw.

<sup>1</sup> Der Leser wird aufgefordert, den nachfolgenden Satz direkt als Folgerung des Minimumprinzips unter Betrachtung der harmonischen Funktion  $\log |w|$  und Anwendung der oben konstruierten harmonischen Minorante zu beweisen. Dieser direkte Beweis hat den Vorteil, zu zeigen, daß der Satz ohne irgendwelche einschränkende Voraussetzungen über den Gebietsrand gilt.

$|z|=R$  des Gebietes  $D$  bzw.  $G$ , sondern gewissermaßen die *mittlere* Länge eines solchen Querschnittes berücksichtigen, was für viele Anwendungen bedeutsam ist.

Bezeichnet man mit  $\Theta_\sigma$  die Gesamtheit der Querschnitte  $\Re t = \sigma$  des Gebietes  $D$  und mit  $\Theta(\sigma)$  deren Gesamtlänge, so wird nach (5) für  $\sigma' < \sigma$

$$\omega(\sigma' + i\tau, \Theta_\sigma, D_\sigma) \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma')},$$

wo  $D_\sigma$  den links von  $\Theta_\sigma$  liegenden Teil des Gebietes  $D$  bezeichnet<sup>1</sup>. Also ist

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma')} \omega(t, \Theta_{\sigma'}, D_{\sigma'})$$

für  $\Re t = \sigma'$  mindestens so groß wie  $\omega(t, \Theta_{\sigma'}, D_{\sigma'})$ , denn der zweite Faktor des Produktes wird hier gleich 1. Auf dem übrigen Teil des Randes von  $D_{\sigma'}$  verschwinden definitionsgemäß beide obige harmonische Maße, woraus mittels des Maximumprinzips folgt

$$\omega(t_0, \Theta_{\sigma'}, D_{\sigma'}) \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma')} \omega(t_0, \Theta_{\sigma'}, D_{\sigma'}),$$

wie immer der Punkt  $t_0$  im Gebiete  $D_{\sigma'}$  gewählt wird. Schreibt man der Kürze halber statt  $\omega(t_0, \Theta_{\sigma'}, D_{\sigma'})$  kurz  $\omega(t_0, \sigma)$ , so wird also

$$\omega(t_0, \sigma) - \omega(t_0, \sigma') \leq -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(\sigma - \sigma')}{\Theta(\sigma)} \omega(t_0, \sigma').$$

Hieraus wird ersichtlich, daß  $\omega(t_0, \sigma)$  eine monoton abnehmende Funktion von  $\sigma$  ist<sup>2</sup> und als solche für fast alle Werte  $\sigma$  eine wohlbestimmte Ableitung hat. Durch Division mit  $\sigma - \sigma'$  und den Grenzübergang  $\sigma' \rightarrow \sigma$  findet man für diese Ableitung die Abschätzung

$$\frac{d\omega(t_0, \sigma)}{d\sigma} \leq -\frac{4}{\pi \Theta(\sigma)} \omega(t_0, \sigma),$$

welche auch für diejenigen Werte  $\sigma$  besteht, für die  $w$  keine bestimmte Ableitung hat, wenn man  $\frac{d\omega}{d\sigma}$  die obere linksseitige Derivierte bedeuten läßt. Durch Integration dieser Differentialungleichung zwischen den Grenzen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  gelangt man zu folgendem Ergebnis

**Satz 3.** *Unter den Voraussetzungen von Nr. 62 hat man für  $t_0 = \sigma_0 + i\tau_0$*

$$\omega(t_0, \Theta_{\sigma_2}, D_{\sigma_2}) \leq \omega(t_0, \Theta_{\sigma_1}, D_{\sigma_1}) e^{-\frac{4}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta(\sigma)}}, \quad (7)$$

wie immer die Zahlen  $\sigma_0 \leq \sigma_1 < \sigma_2$  gewählt werden mögen.  $D_\sigma$  bezeichnet hierbei dasjenige links von der Geraden  $\Re t = \sigma$  liegende Teilgebiet des gegebenen Gebietes  $D$ , welches den Punkt  $t = t_0$  enthält.

<sup>1</sup>  $D_\sigma$  besteht möglicherweise aus mehreren getrennten zusammenhängenden Teilgebieten. Wenn  $t$  ein Gebietspunkt ist, so verstehe man unter  $D_\sigma$  stets dasjenige jeder Teilgebiete, welches diesen Punkt  $t$  enthält.

<sup>2</sup> Dies ist übrigens schon eine unmittelbare Folgerung aus dem Prinzip der Gebietserweiterung.

Um die Genauigkeit dieses Satzes zu prüfen, nehmen wir speziell  $D$  als den Parallelstreifen  $|\tau| < \frac{\pi}{2}$  an. Eine einfache Rechnung ergibt dann für das Maximum des harmonischen Maßes  $\omega$  der Strecke  $|\tau| \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\Re t = \sigma$  in bezug auf den Halbstreifen  $D_\sigma$ , gemessen auf dem Querschnitt  $\Re t = \sigma_0$ ,  $|\tau| < \frac{\pi}{2}$  den Wert

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} e^{(\sigma_0 - \sigma)}.$$

Die allgemeine Beziehung (7) liefert andererseits für den vorliegenden Spezialfall, wo  $\sigma_2 = \sigma$ ,  $\sigma_0 = \sigma_1$  und also  $\omega(t_0, \Theta_{\sigma_1}, D_{\sigma_2}) = 1$  zu setzen ist, die obere Schranke

$$\omega \leq e^{\frac{4}{\pi^2}(\sigma_0 - \sigma)},$$

welche für große Werte  $\sigma - \sigma_0$  von richtiger Größenordnung ist. Ein Vergleich der im Exponenten stehenden Koeffizienten legt die Vermutung nahe, daß der vor dem Integral stehende Faktor  $-\frac{4}{\pi}$  rechts in (7) durch den schärferen  $-\pi$  ersetzt werden könnte. Daß dem tatsächlich so ist, soll in § 4 dieses Abschnitts gezeigt werden, wo wir auf die Frage über die Randverzerrung bei konformer Abbildung zurückkommen werden.

Bemerkt sei noch, daß die in (5) enthaltene Abschätzung asymptotisch, d. h. für  $\sigma \rightarrow \infty$ , viel ungenauer als (7) ist. In der Tat findet man nach (5) im oben betrachteten Beispiel für  $\omega$  die Schranke

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2(\sigma - \sigma_0)},$$

welche für  $\sigma \rightarrow \infty$  verschwindet wie  $\frac{1}{\sigma}$ , während die richtige Größenordnung ja doch  $e^{-\sigma}$  ist.

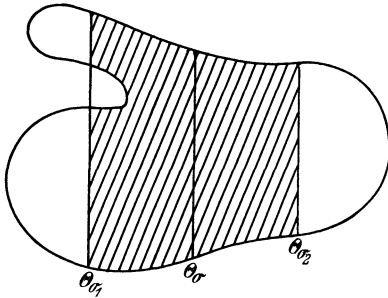


Abb. 12.

67. Wir gehen zu der Beziehung (7) zurück und bemerken, daß eine analoge Ungleichung auch rechts von den Querschnitten  $\Theta_{\sigma_2}$  gilt, d. h. wenn  $\sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_0$  und  $D_{\sigma_2}$  das rechts von  $\Theta_{\sigma_2}$  liegende Teil-

gebiet von  $D$  ist, so bleibt (7) in Kraft, wenn man die Grenzen im Integral der rechten Seite vertauscht. Setzt man speziell  $\sigma_1 = \sigma_0$  und also  $\omega(t_0, \Theta_{\sigma_1}, D_{\sigma_1}) = 1$ , so wird man durch Addition dieser zwei Ungleichungen auf folgendes Ergebnis geführt.

Es sei wie oben,  $D$  ein schlichtes Gebiet,  $\Theta_\sigma$  die Menge der auf der Geraden  $\Re t = \sigma$  gelegenen Querschnitte von  $D$  und  $\Theta(\sigma)$  die Gesamtlänge derselben.



Sei ferner  $D_{12}$  der von den Querschnittmengen  $\Theta_{\sigma_1}$  und  $\Theta_{\sigma_2}$  ( $\sigma_1 < \sigma_2$ ) begrenzte Teil von  $D$ .

Unter diesen Voraussetzungen hat man für die Summe der harmonischen Maße der Querschnitte  $\Theta_{\sigma_1}$ ,  $\Theta_{\sigma_2}$  gemessen in bezug auf  $D_{12}$  in einem inneren Punkt  $t = \sigma + i\tau$  ( $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ) die obere Schranke

$$\omega(t, \Theta_{\sigma_1}, D_{12}) + \omega(t, \Theta_{\sigma_2}, D_{12}) \leq e^{-\frac{4}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{ds}{\Theta(s)}} + e^{-\frac{4}{\pi} \int_{\sigma}^{\sigma_2} \frac{ds}{\Theta(s)}}.$$

Wir wählen nun den Wert  $\sigma$  so, daß die zwei Integrale der Exponenten einander gleich werden. Man gelangt dann zu folgendem

**Satz 4.** Wenn  $\sigma_1 < \sigma_2$  und  $D_{12}$  der zwischen den Querschnitten  $\Theta_{\sigma_1}$  und  $\Theta_{\sigma_2}$  liegende Teil des Gebietes  $D$  ist, so läßt sich ein Querschnitt  $\Theta_{\sigma}$  ( $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ) finden, so daß die Summe  $\omega_{12}$  der harmonischen Maße der Querschnitte  $\Theta_{\sigma_1}$  und  $\Theta_{\sigma_2}$  in jedem Punkt  $t$  des Querschnitts  $\Theta_{\sigma}$ , in bezug auf dasjenige zusammenhängende Teilgebiet von  $D_{12}$ , welches den Punkt  $t$  enthält, der Ungleichung

$$\omega_{12} \leq 2e^{-\frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{ds}{\Theta(s)}} \tag{8}$$

genügt, wo  $\Theta(\sigma)$  die Gesamtlänge der Querschnittmenge  $\Theta_{\sigma}$  bezeichnet.

*Bemerkung.* Nach dem Erweiterungsprinzip besteht dieses Ergebnis a fortiori, wenn man  $\omega_{12}$  die Summe der harmonischen Maße der außerhalb des Streifens  $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$  liegenden Randbogen von  $D$  bedeuten läßt, welche also durch die Querschnitte  $\Theta_{\sigma_1}$ ,  $\Theta_{\sigma_2}$  vom Aufpunkt  $t$  getrennt werden.

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß man zur Abschätzung der Größe  $\omega_{12}$  auch (5) verwenden kann. Eine einfache Rechnung, die der Leser leicht nachprüfen kann, liefert das Resultat

$$\omega_{12} \leq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Theta(\sigma_1) + \Theta(\sigma_2)}{2(\sigma_2 - \sigma_1)},$$

was für große Werte von  $\sigma_2 - \sigma_1$  im allgemeinen bedeutend unschärfer als (8) ist.

68. Satz 4 erlaubt aus den allgemeinen Ergebnissen von III, § 6 einige interessante Schlüsse zu ziehen. Es sei  $D_{12}$  ein Gebiet, das, außer von gewissen Segmenten  $\Theta_{\sigma_1}$  und  $\Theta_{\sigma_2}$  der Geraden  $x = \sigma_1$ ,  $x = \sigma_2$  ( $z = x + iy$ ) von einer Anzahl von Jordanbogen begrenzt wird, von denen genau zwei,  $L_1$  und  $L_2$ , die Begrenzungsgeraden  $x = \sigma_1$ ,  $\sigma_2$  verbinden (Abb. 13); zu jenen Bogen können, außer  $L_1$  und  $L_2$ , auch gewisse  $L_3$  gehören, welche nur eine der Begrenzungsgeraden  $x = \sigma_1$ ,  $\sigma_2$  begegnen. Wir nehmen ferner an, daß eine in  $D_{12}$  gegebene eindeutige Funktion  $w(z)$  hier Werte annimmt, die in ein Gebiet  $G$  der  $w$ -Ebene fallen, welches von einer endlichen Anzahl Jordanbogen berandet ist. Auf  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  sei  $w(z)$  stetig und zwar möge es auf  $L_1$  und  $L_2$  Werte annehmen, die auf

zwei vorgegebenen Punktmengen  $H_1$  bzw.  $H_2$  liegen, die eine positive Entfernung voneinander besitzen; die den Bogen  $L_3$  entsprechenden Funktionswerte mögen entweder auf  $H_1$  oder auf  $H_2$  fallen. Durch eventuelle Erweiterung dieser Mengen  $H_1$  und  $H_2$  können wir erreichen, daß ihre Grenzpunkte aus einer endlichen Anzahl Jordanbogen  $\alpha_1, \alpha_2$  bestehen, welche sich ebenfalls in positivem Abstand voneinander befinden. Die Menge  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$  liegt möglicherweise teilweise oder vollständig auf dem Rand von  $G$ ; wir setzen indes voraus, daß der zu  $\alpha$  komplementäre Randteil  $\beta$  von  $G$  nicht leer ist. Schließlich nehmen wir an, daß die Mengen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  nicht ineinander geschachtelt sind, so daß

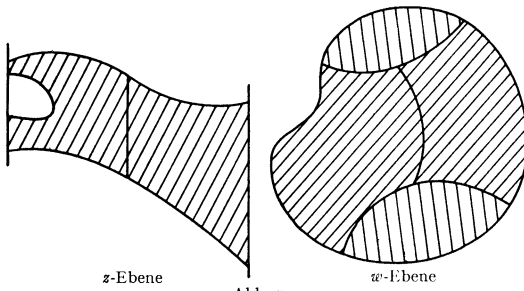


Abb. 13.

also jedes der zusammenhängenden Gebiete  $G^*$ , das nach Entfernung der Mengen  $H_1, H_2$  aus  $G$  übrig bleibt, außer von gewissen Bogen  $\alpha_1, \alpha_2$  noch von gewissen anderen, zu  $\beta$  gehörigen Bogen begrenzt ist.

Jetzt bezeichnen wir (vgl. Nr. 54) durch  $m(l)$

das Minimum des harmonischen Maßes der Bogenmenge  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$  auf einem Bogen  $l$ , der innerhalb  $G^*$  die Mengen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  verbindet (gemessen in bezug auf  $G^*$ ), und setzen

$$m_w = \lim m(l),$$

wobei alle Wege  $l$  zur Konkurrenz zugelassen werden. Unter den obigen Voraussetzungen ist dann

$$0 < m_w < 1.$$

In analoger Weise sei  $m(\sigma)$  das Minimum des harmonischen Maßes der Bogen  $L_1 + L_2 + L_3$  auf der Geraden  $x = \sigma$ , gemessen in bezug auf  $D_{12}$ , und  $m_z$  die obere Grenze

$$m_z = \lim m(\sigma)$$

von  $m(\sigma)$  für  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ . Nach dem Satz über die Vergrößerung des harmonischen Maßes (III, § 6) ist dann

$$m_z \leq m_w. \tag{9}$$

Hier läßt sich  $m_z$  mittels des Satzes 4 dieses Paragraphen weiter abschätzen. Nach der Ungleichung (8) findet man, wenn beachtet wird, daß das harmonische Maß von  $L_1 + L_2 + L_3$  vermehrt um die harmonischen Maße von  $\Theta_{\sigma_1}$  und  $\Theta_{\sigma_2}$  gleich 1 ist, für das Minimum  $m(\sigma)$ , entsprechend einem geeignet gewählten Wert  $\sigma$ , und folglich auch für die obere Grenze  $m_z$  die untere Schranke

$$m_z \geq 1 - 2e^{-\frac{2}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{dx}{\Theta(x)}}, \tag{10}$$

und es wird also gemäß (9)

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{dx}{\Theta(x)} \leq K, \tag{11}$$

wo

$$K = \frac{\pi}{2} \log \frac{2}{1 - m_w} \tag{11'}$$

nur von  $m_w$ , also nur von der Konfiguration  $G, H_1, H_2$  abhängig ist.

69. Eine interessante Aufgabe ist es nun, unter gegebenen speziellen Voraussetzungen über die Abbildung  $w = w(z)$  auch  $m_w$  zu berechnen. Es gilt offenbar für diese Größe eine obere Schranke zu finden. Unter Anwendung des Erweiterungsprinzips soll dies für zwei besondere Fälle näher ausgeführt werden.

Wir nehmen vorerst an, daß die Funktion  $w(z)$ , welche in dem im Satz erwähnten Gebiet  $D_{12}$  regulär ist, folgenden speziellen Bedingungen genügt:

1. Auf den Bogen  $L_1$  und  $L_2$  nimmt  $w(z) = u + iv$  Werte an, die bzw. in den Halbebenen  $v \leq -b, v \geq b$  ( $b > 0$ ) liegen.
2. Auf den Bogen  $L_3$  ist  $|v| \geq b$ .
3. Es ist im ganzen Gebiet  $D_{12}$   $|u(z)| \leq a$  ( $a > 0$ ).

Unter diesen Voraussetzungen können wir den obigen Satz anwenden, in dem wir als Gebiet  $G$  den Streifen  $|u| < a$ , als Gebiete  $H_1, H_2$  wiederum die von den Geraden  $v = -b$  bzw.  $v = b$  und  $u = \pm a$  begrenzten Halbstreifen nehmen, so daß also die Bogen  $\alpha_1, \alpha_2$  durch die Strecken  $v = \pm b, |u| \leq a$  dargestellt sind und  $G^*$  aus dem Rechteck  $|u| \leq a, |v| \leq b$  besteht.  $m_w$  ist also jetzt die obere Grenze des Minimums des harmonischen Maßes der Strecken  $v = \pm b, |u| \leq a$  (in bezug auf das Rechteck) auf einer Kurve, die diese Strecken innerhalb des Rechtecks verbindet. Aus Symmetriegründen erhellt unmittelbar, daß diese obere Grenze im Nullpunkt erreicht wird. Vermittels des Erweiterungsprinzips findet man weiter, daß  $m_w$  kleiner ist als das harmonische Maß jener Strecken für  $w = 0$ , gemessen in bezug auf den vollen Streifen  $|v| < b$ .

Dieses Maß läßt sich einfach so berechnen, daß man den Streifen durch die Transformation

$$e^{\frac{\pi}{2b} w}$$

in die rechte Halbebene überführt, wobei jene zwei Strecken in die Strecken  $\left(ie^{-\frac{\pi a}{2b}}, ie^{\frac{\pi a}{2b}}\right)$  und  $\left(-ie^{-\frac{\pi a}{2b}}, -ie^{\frac{\pi a}{2b}}\right)$  der imaginären Achse übergehen. Das zu berechnende harmonische Maß wird nun einfach gleich der durch  $\pi$  dividierten Summe der Winkel, unter denen die letztgenannten Segmente vom Punkt 1 der reellen Achse aus erscheinen, wofür man den Wert

$$1 - \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} e^{-\frac{\pi a}{2b}}$$

findet<sup>1</sup>. Es wird also

$$1 - m_w \geq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} e^{-\frac{\pi a}{2b}}$$

und somit, gemäß (11) und (11'),

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{dx}{\Theta(x)} \leq \frac{\pi}{2} \log \frac{\pi}{2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{\pi a}{2b}}}.$$

Da  $\operatorname{arctg} t \geq \frac{\pi}{4} t$  für  $0 \leq t \leq 1$ , so ergibt sich hieraus weiter die einfachere Abschätzung

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{dx}{\Theta(x)} < \frac{\pi}{2} \log 2 + \frac{\pi^2}{4} \frac{a}{b}. \tag{12}$$

Nimmt man speziell  $D_{12}$  als ein von zwei Strecken  $\Theta_{\sigma_1}, \Theta_{\sigma_2}$  und zwei verbindenden Kurvenbogen  $L_1, L_2$  begrenztes „Viereck“ an, und denkt man sich dieses auf ein Rechteck mit den Seiten  $2a, 2b$  konform abgebildet, so daß die Kurvenbogen  $L_1, L_2$  in zwei Segmente der (einander gegenüberliegenden) Seiten der Länge  $2a$  übergehen, so hat man also, wenn  $\Theta(x)$  die „Breite“ des Streifens ist (d. h. die Länge des Querschnitts  $\Theta_i$ ), die Beziehung (12), welche zeigt, daß der Streifen  $D_{12}$  in der Längsrichtung (d. h. in der Richtung der  $x$ -Achse) nicht beliebig weit ausgedehnt sein kann. Hat der Streifen insbesondere dieselbe Breite ( $2b$ ) und Länge ( $2a$ ) wie das Rechteck, so wird der Ausdruck links gleich  $\frac{a}{b}$ ; vermutlich kann also der Faktor  $\frac{\pi^2}{4}$  vor dem Ausdruck  $\frac{a}{b}$  rechts durch die kleinere 1 ersetzt werden<sup>2</sup>.

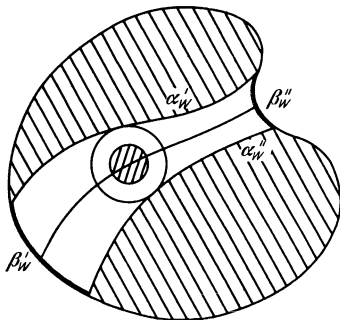


Abb. 14.

**70.** Als zweites Beispiel für die allgemeine Beziehung (11) wählen wir die Gebiete  $G, H_1, H_2$  folgendermaßen:  $G$  sei von einer Jordankurve  $\Gamma$  begrenzt;  $H_1, H_2$  seien zwei Teilgebiete von  $G$ , welche von zwei punktfremden Querschnitten  $\alpha', \alpha''$  aus demselben abgeschnitten werden. Das Restgebiet  $G^*$  wird außer von  $\alpha', \alpha''$  von zwei Teilbogen  $\beta', \beta''$  der Randkurve  $\Gamma$  berandet (Abb. 14).

Wir verbinden diese zwei Bogen  $\beta$  durch einen regulären Kurvenbogen  $l$  innerhalb  $G^*$ . Die Bogenlänge von  $l$ , berechnet von einem beliebig festgesetzten Anfangspunkt, sei  $s$ ; sie soll auf  $l$  in der Richtung

<sup>1</sup> Eine genauere Abschätzung von  $m_w$  findet man unter Zuhilfenahme der elliptischen Funktionen durch konforme Abbildung des Rechtecks auf eine Halbebene.

<sup>2</sup> Mit anderen Methoden wurde das obige Problem behandelt von L. AHLFORS [6]. Vgl. auch G. PÓLYA [1].

von  $\beta'$  nach  $\beta''$  von  $s_1$  bis  $s_2$  zunehmen. Die kürzeste Entfernung eines Punktes  $w = w_s$  von  $l$  zu den Randbogen  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  sei  $\varrho(s)$ .

Wir betrachten nun das harmonische Maß  $\omega(w, \beta' + \beta'', G^*)$  und bezeichnen, wenn  $k$  eine beliebige Zahl des Intervalls  $0 < k < 1$  bedeutet, mit  $m(s)$  das Minimum von  $\omega$  im Durchschnitt des Gebietes  $G^*$  mit dem Kreis

$$|w - w_s| \leq k \varrho(s).$$

Zur Abschätzung von  $m(s)$  machen wir von dem Ausdruck

$$u(w) = m(s) \frac{\log \frac{\varrho(s)}{|w - w_s|}}{\log \frac{1}{k}} \quad (13)$$

Gebrauch, welcher im Kreisring  $k \varrho(s) \leq |w - w_s| \leq \varrho(s)$  harmonisch ist und auf dem inneren Kreis den Wert  $m(s)$  annimmt, während er auf dem äußeren verschwindet. Ist nun  $w$  ein Gebietspunkt, der in diesem Kreisring liegt, so wird  $\omega(w, \beta' + \beta'', G^*)$  sicher mindestens so groß ausfallen wie der Ausdruck (13) angibt. Der Durchschnitt  $D_s$  vom Kreisring mit  $G^*$  wird nämlich von drei Arten von Punkten  $w$  begrenzt: 1. von Punkten des Kreises  $|w - w_s| = k \varrho(s)$ ; hier ist  $\omega \geq m(s)$  und  $u(w) = m(s)$ , also  $\omega - u \geq 0$ ; 2. von Punkten der Peripherie  $|w - w_s| = \varrho(s)$ , wo  $\omega \geq 0$  und  $u = 0$ , also  $\omega - u \geq 0$ ; 3. von Punkten der Bogen  $\beta' + \beta''$ , hier gilt  $\omega = 1$ ,  $u \leq m(s) < 1$ , somit wieder  $\omega - u \geq 0$ . Bei Anwendung des Minimumprinzips ergibt sich dann, daß  $u$  tatsächlich eine Minorante von  $\omega$  darstellt.

Nimmt man nun auf  $l$  einen Punkt  $w_{s+\Delta s}$ , so wird also für ein hinreichend kleines  $\Delta s > 0$

$$m(s + \Delta s) \geq \frac{\log \frac{\varrho(s)}{\Delta r + k \varrho(s + \Delta s)}}{\log \frac{1}{k}} m(s),$$

wo  $\Delta r$  der Abstand der Punkte  $w_{s+\Delta s}$  und  $w_s$  ist. Unter Beachtung der Erklärung der Größe  $\varrho$  hat man ferner

$$\varrho(s + \Delta s) \leq \varrho(s) + \Delta r,$$

und es wird folglich

$$m(s + \Delta s) \geq \frac{\log \frac{1}{k} - \log \left( 1 + \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \frac{\Delta r}{\varrho(s)} \right)}{\log \frac{1}{k}} m(s),$$

also

$$\frac{m(s + \Delta s) - m(s)}{\Delta r} \geq - \frac{\left( 1 + \frac{1}{k} \right) m(s)}{\varrho(s) \log \frac{1}{k}}.$$

Durch den Grenzübergang  $\Delta s \rightarrow 0$  findet man hieraus, da  $\frac{\Delta s}{\Delta r} \rightarrow 1$ , für die untere Ableitung  $\frac{dm}{ds}$  die untere Schranke

$$\frac{dm}{ds} \geq -\frac{1 + \frac{1}{k}}{\log \frac{1}{k}} \cdot \frac{m(s)}{\varrho(s)}.$$

Setzt man hier  $k = \frac{1}{e}$ ,  $\frac{1 + \frac{1}{k}}{\log \frac{1}{k}} = 1 + e < 4$ , so erhält man durch Integration zwischen den Grenzen  $s_1$  und  $s$

$$m(s) \geq m(s_1) e^{-4 \int_{s_1}^s \frac{ds}{\varrho(s)}}. \quad (14')$$

Es gilt nun  $m(s_1)$ , d. h. das Minimum von  $\omega(w, \beta' + \beta'', G^*)$  auf dem Kreis  $|w - w_{s_1}| \leq k\varrho(s_1)$  abzuschätzen, wo also  $w_s$  jetzt auf dem Randbogen  $\beta'$  gelegen ist. Hierzu können wir unmittelbar das Ergebnis von Satz 1, Nr. 64 verwenden. Die Beziehung (6') ergibt uns für  $R = \varrho(s_1)$ ,

$$|z| = |w - w_{s_1}| \leq \frac{\varrho(s_1)}{e} \quad \omega \geq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi} > \frac{1}{2\pi}$$

und somit  $m(s_1) > \frac{1}{2\pi}$ .

Durch eine ganz analoge Betrachtung findet man die Beziehung

$$m(s) \geq m(s_2) e^{-4 \int_s^{s_2} \frac{ds}{\varrho(s)}} \quad (14'')$$

mit  $m(s_2) > \frac{1}{2\pi}$ , und es wird durch Addition

$$m(s) > \frac{1}{4\pi} \left( e^{-4 \int_{s_1}^s \frac{ds}{\varrho}} + e^{-4 \int_s^{s_2} \frac{ds}{\varrho}} \right) \geq \frac{1}{2\pi} e^{-2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\varrho}}.$$

Wir gelangen so zu

**Satz 5.** Wenn das Gebiet  $G^*$  von einer Jordankurve  $\alpha' + \beta'' + \alpha'' + \beta'$  begrenzt ist, deren Teilbogen  $\alpha, \beta$  in der angegebenen Reihenfolge aufeinander folgen, so genügt das harmonische Maß der Bogen  $\beta' + \beta''$  in jedem Punkt  $w$  eines Querschnitts  $l$  von  $G^*$ , welcher die Bogen  $\beta$  verbindet, der Ungleichung

$$\omega(w, \beta' + \beta'', G^*) > \frac{1}{2\pi} e^{-2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\varrho(s)}}, \quad (14)$$

wobei  $s$  die zwischen  $s_1$  und  $s_2$  variierende Bogenlänge von  $l$  ist und  $\varrho(s)$  die kürzeste Entfernung desjenigen Punktes  $w_s$  von  $l$  von den Bogen  $\alpha' + \alpha''$  bezeichnet, welcher dem Parameterwert  $s$  entspricht.

71. Gehen wir nun zu der Frage von Nr. 69 S. 75 zurück, so finden wir aus (14) für die durch  $m_w$  bezeichnete obere Grenze der Minima des harmonischen Maßes  $\omega(w, \alpha' + \alpha'', G^*)$  auf Kurven, welche  $\alpha'$  und  $\alpha''$  verbinden, die obere Schranke

$$m_w < 1 - \frac{1}{2\pi} e^{-2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\varrho(s)}}, \tag{15}$$

und die fundamentale Beziehung  $m_z \leq m_w$  gibt uns unter den Voraussetzungen von Nr. 68, mit Rücksicht auf (11) und (11'),

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta(\sigma)} \leq \frac{\pi}{2} \log \frac{2}{1 - m_w} < \pi \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\varrho(s)} + \frac{\pi}{2} \log 4\pi. \tag{16}$$

Hieraus folgert man speziell:

**Satz 7.** *Es sei  $G_z$  ein in der  $z = x + iy$ -Ebene gelegenes Gebiet, das von einer Jordankurve  $\Gamma_z = \alpha'_z + \beta'_z + \alpha''_z + \beta''_z$  berandet ist, die aus vier Teilbogen  $\alpha'_z, \beta'_z, \alpha''_z, \beta''_z$  in der angegebenen Reihenfolge zusammengesetzt ist, so daß für  $x_1 \leq x \leq x_2$  die Gerade  $\Re z = x$  nur die zwei Bogen  $\alpha'_z, \alpha''_z$  trifft. Die totale Länge  $\Theta(x)$  der innerhalb  $G_z$  liegenden Segmente dieser Geraden habe das Maximum*

$$\max \Theta(x) = \Theta \quad \text{für} \quad x_1 \leq x \leq x_2.$$

In  $G_z$  sei eine regulär analytische Funktion  $w(z)$  von folgenden Eigenschaften gegeben:

1.  $w(z)$  nimmt innerhalb  $G_z$  Werte an, die in ein von gewissen Jordankurven  $\Gamma_w$  berandetes Gebiet  $G_w$  fallen.

2. Auf den Randbogen  $\alpha'_z, \alpha''_z$  ist  $w(z)$  stetig und nimmt hier Werte an, welche auf zwei punktfremde abgeschlossene Punktmengen  $H'_w$  bzw.  $H''_w$  fallen, die so liegen, daß sie durch einen Querschnitt des Gebiets  $G_w$  getrennt werden können. Es sei  $Q$  ein solcher Querschnitt,  $a$  die kürzeste Entfernung von  $Q$  zur Menge  $H'_w + H''_w$  und  $b$  die Länge von  $Q$ .

Unter diesen Voraussetzungen gilt die Ungleichung

$$\frac{x_2 - x_1}{\Theta} < \pi \frac{b}{a} + C, \tag{17}$$

wo  $C$  eine numerische Konstante ( $C < \frac{\pi}{2} \log 4\pi$ ) ist.

Dieses Ergebnis ist eine unmittelbare Folgerung aus der allgemeinen Beziehung (16), wenn man hier als Gebiet  $G_w^*$  dasjenige Teilgebiet von  $G_w$  annimmt, welches von einem Kreis mit dem Radius  $a$  überstrichen wird, falls dessen Mittelpunkt den Bogen  $Q$  durchläuft. Die Mengen  $H'_w$  und  $H''_w$  können dann nämlich durch diejenigen Teilgebiete  $H_1, H_2$  ersetzt werden, in welche  $G_w$  durch das Streifengebiet  $G_w^*$  zerlegt wird, und von denen  $H_1$  die Menge  $H'_w$ ,  $H_2$  die Menge  $H''_w$  enthält.

### § 3. Abschätzung des hyperbolischen Maßes durch Gebietserweiterung.

72. Jedem durch einen Punkt  $P$  eines Gebietes  $G$  vom hyperbolischen Typus gehenden Bogenelement der (euklidischen) Länge  $ds$  haben wir in Nr. 44 eine nichteuklidische Länge  $d\sigma$  zugeordnet. Das Prinzip über das hyperbolische Maß (Nr. 45) besagt, daß die hierdurch erklärte nicht-euklidische Bogenlänge durch eine analytische eindeutige Transformation  $w = w(z)$  *verkleinert* wird, falls man als Bezugsgebiet in der  $z$ -Ebene ein Gebiet  $G_z$ , wo  $w(z)$  eindeutig und analytisch ist, in der  $w$ -Ebene wiederum ein Gebiet  $G_w$  nimmt, wo die entsprechenden Werte  $w$  liegen. Nach dem in § 1 dieses Abschnitts angedeuteten Programm müssen wir, um das Prinzip auch für solche Fälle anwendbar zu machen, in denen die hyperbolische Maßbestimmung nicht elementar rechnerisch bewältigt werden kann, Mittel aufsuchen zur Aufstellung approximativer Beziehungen zwischen den hyperbolischen und euklidischen Maßverhältnissen der gegebenen Abbildungen.

Hierzu bietet uns das erwähnte Prinzip selbst eine einfache Methode, die in vielen Fällen zu anwendbaren Ergebnissen in der gewünschten Richtung führt. Es seien  $G_1$  und  $G_2$  Gebiete vom hyperbolischen Typus, und  $G_1$  in  $G_2$  als Teilgebiet enthalten. Wenn  $P$  ein innerer Punkt von  $G_1$  ist, so gilt für die hyperbolischen Längen  $d\sigma_1$  und  $d\sigma_2$  eines entsprechenden Bogenelements  $ds$ , gemessen in bezug auf  $G_1$  bzw.  $G_2$ ,

$$d\sigma_1 \geq d\sigma_2. \quad (18)$$

Dies ist tatsächlich eine spezielle Folgerung aus dem Prinzip über die Verkleinerung des hyperbolischen Maßes. Denn nimmt man  $G_z \equiv G_1$ ,  $G_w \equiv G_2$  so genügt die Funktion  $w \equiv z$  sämtlichen Bedingungen unseres Satzes, und das Prinzip liefert uns unmittelbar die Beziehung (18), wo Gleichheit dann und nur dann zutrifft, wenn  $G_1 \equiv G_2$  ist.

Läßt sich nun  $G_2$  so wählen, daß die konforme Abbildung von  $G_2$  (oder  $G_2^\infty$ , falls  $G_2$  mehrfach zusammenhängend ist), auf den Einheitskreis  $E(|x| < 1)$  möglich ist, so ist durch (18) eine Minorante für das hyperbolische Maß  $d\sigma_1$  gegeben. Ist nämlich  $x(z)$  diejenige einwertige Funktion, welche die genannte Abbildung so ausführt, daß  $P$  in den Nullpunkt  $x=0$  übergeht, so wird definitionsgemäß (vgl. Nr. 44)

$$d\sigma_2 = |dx| = \left| \frac{dx}{dz} \right| ds,$$

wo  $ds = |dz|$  und die Ableitung  $\frac{dx}{dz}$  im Punkte  $P$  zu nehmen ist. Es wird also

$$\frac{d\sigma_1}{ds} \geq \left| \frac{dx}{dz} \right|_P = \frac{1}{|z'(0)|},$$

wo  $z(x)$  diejenige Funktion ist, welche den Einheitskreis  $|x| < 1$  so auf  $G_2^\infty$  konform abbildet, daß  $x=0$  dem Punkt  $P$  zugeordnet wird.

In analoger Weise findet man Majoranten für das Verhältnis  $\frac{d\sigma_1}{ds}$ .



**73. Der KOEBESCHE Verzerrungssatz.** Als Anwendung untersuchen wir die Verzerrung bei konformer Abbildung des Einheitskreises  $|z| < 1$  auf ein *schlichtes* Gebiet  $D$ , das den Unendlichkeitpunkt nicht enthält. Die abbildende Funktion

$$w(z) = z + a_2 z^2 + \dots \tag{19}$$

sei derart normiert, daß die Nullpunkte einander entsprechen und der entsprechende Abbildungsmodul gleich 1 ist, was durch eine Ähnlichkeitstransformation des Gebietes stets erreicht werden kann. Die kürzeste Entfernung des Nullpunktes  $z=0$  vom Rande  $\Gamma$  von  $D$  sei gleich  $d^1$ .

**Satz von KOEBE.** *Wenn die Potenzreihe (19) für  $|x| < 1$  konvergiert und den Einheitskreis schlicht abbildet, so ist die kürzeste Entfernung  $d$  des Randes des Bildgebietes vom Nullpunkt größer als eine positive numerische Konstante  $k$  (KOEBSCHESCHE KONSTANTE).*

*Beweis.* Sei  $d e^{i\delta}$  ein Randpunkt des schlichten Bildgebietes  $D$ , der in der Entfernung  $d$  vom Nullpunkt liegt. Wir transformieren  $w$  durch die Wurzel

$$w_1 = \sqrt{d - w e^{-i\delta}} = \sqrt{d} + bz + \dots, \tag{20}$$

welche für  $w=0$  den positiven Wert  $\sqrt{d}$  annimmt. Die derart definierte Funktion  $w_1$  ist für  $|z| < 1$  unbeschränkt fortsetzbar, also eindeutig (Monodromiesatz) und, infolge der Einwertigkeit von  $w(z)$ , einwertig; sie bildet somit den Einheitskreis auf ein schlichtes Gebiet  $D_1$  der  $w_1$ -Ebene eineindeutig und konform ab. Wenn  $w_1$  ein innerer Punkt von  $D_1$  ist ( $w_1 \neq 0$ ), so liegt  $-w_1$  nicht in  $D_1$ . Denn sonst würden diese Werte, vermöge der Transformation  $w_1 = w_1(z)$ , zwei verschiedenen Punkten  $z_1$  und  $z_2$  entsprechen; diesen würden dann in der  $w$ -Ebene die gleichen Werte  $w = e^{i\delta}(d - w_1^2)$  zugeordnet sein, was wegen der vorausgesetzten Einwertigkeit von  $w(z)$  unmöglich ist.

Da nun der Kreis  $|w| < d$  in  $D$  liegt, so wird von der ihm durch (20) zugeordneten Lemniskate

$$|d - w_1^2| < d$$

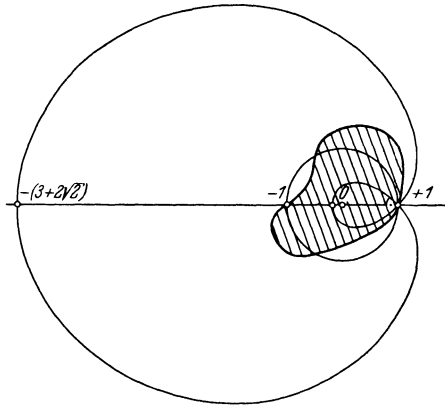


Abb. 15.

die rechts von der imaginären Achse befindliche Hälfte  $H$  dem Gebiet  $D_1$  zugehören, während die symmetrische, links liegende Hälfte  $H_2$  keinen Punkt von  $D$  enthält. Entfernt man also aus der  $w_1$ -Ebene das Gebiet  $H_2$ , so hat man im Restgebiet  $D_1^*$  ein Majorantgebiet zu  $D_1$ . Eine noch

<sup>1</sup> P. KOEBE [I].

bequemere Majorante erhält man, wenn man  $D_1$  durch

$$x = x(z) = \frac{\sqrt{d} - w_1}{\sqrt{d} + w_1} = \frac{e^{-i\delta}}{4d} z + \dots \quad (21)$$

transformiert. Als Bildgebiet ergibt sich ein schlichtes Gebiet  $D_x$ , das vollständig in  $D_x^*$ , dem Bildgebiet von  $D_1^*$ , liegt. Für die größte Nullpunktsentfernung des Randes von  $D_x^*$  ergibt sich der Wert  $3 + 2\sqrt{2} < 6$  und man hat also

$$|x(z)| < 6$$

für  $|z| < 1$ .

Mittels des Prinzips des hyperbolischen Maßes (oder, was gleichbedeutend damit ist, des SCHWARZSchen Lemmas) ergibt sich nunmehr für die Nullpunktsableitung  $x'(0)$  die Beziehung

$$|x'(0)| = \frac{1}{4d} < 6, \quad d > \frac{1}{24}, \quad (22)$$

womit die Existenz der behaupteten universellen Konstante nachgewiesen ist.

**74.** Das Bildgebiet  $D_x$  hat als Abbild des Gebietes  $D_1$  vermöge der Transformation (21) die Eigenschaft, daß es kein Paar von Punkten  $x_1, x_2$  enthält, welche durch die Beziehung

$$x_1 x_2 = 1$$

verbunden sind. Aus Symmetriegründen erwartet man, daß der größtmögliche Wert des Abbildungsmoduls  $|x'(0)| = \frac{1}{4d}$  dann vorkommt, wenn  $D_x$  der Einheitskreis ist und also  $x = z$ ,  $|x'(0)| = 1$ ; für die KOEBESche Konstante würde sich dann der genaue Wert  $\frac{1}{4}$  ergeben. Das entsprechende Bildgebiet  $D$  in der  $w$ -Ebene ist die mit einem Schlitz:  $\arg w = \delta$ ,  $|w| \geq \frac{1}{4}$  versehene Vollebene, welche nach (20) und (21) vermittels der Transformation

$$e^{-i\delta} z = \frac{1 - \sqrt{1 - 4w e^{-i\delta}}}{1 + \sqrt{1 - 4w e^{-i\delta}}}, \quad w = \frac{z}{(1 + z e^{-i\delta})^2}$$

auf den Einheitskreis  $|z| < 1$  abgebildet wird. Wir werden sogleich die Richtigkeit dieser Vermutung nachweisen.

Für die kürzeste Nullpunktsentfernung  $d$  des Randes des Gebietes  $D$ , welches durch die Transformation (19) als Bild des Einheitskreises erhalten wird, findet man andererseits unmittelbar eine genaue obere Schranke. Beachtet man nämlich, daß die Umkehrfunktion  $z = z(w)$  den Kreis  $|w| < d$  auf ein Teilgebiet des Einheitskreises abbildet, so ergibt sich unter Anwendung des SCHWARZSchen Lemmas die Abschätzung

$$\left| \frac{z}{w} \right| \leq \frac{1}{d},$$

also für  $z = w = 0$  (22')

$$d \leq 1,$$

wo Gleichheit dann und nur dann besteht, wenn  $w \equiv z$  und  $D$  also mit dem Einheitskreis zusammenfällt.

**75.** Wir werden jetzt den genauen Wert der KOEBESCHEN Konstante ermitteln unter Anwendung eines einfachen von ERHARD SCHMIDT herührenden Verfahrens<sup>1</sup>. Oben wurde gezeigt, daß ein schlichtes Gebiet  $D_w$ , welches den Nullpunkt, dagegen nicht den unendlich fernen Punkt als inneren Punkt enthält, und dessen Berandung vom Nullpunkt die kürzeste Entfernung  $d$  hat, auf ein Gebiet  $D_x$  von folgenden Eigenschaften schlicht und konform abgebildet werden kann:

A. Wenn der Punkt  $x$  in  $D_x$  liegt, so liegt der Punkt  $\frac{1}{x}$  außerhalb  $D_x$ .

B.  $D_x$  hat den Punkt  $x = 1$  als Randpunkt.

Diese Abbildung läßt sich ferner so normieren, daß  $x = 0$  für  $w = 0$  und

$$\left| \frac{dx}{dw} \right| = \frac{1}{4d} \quad \text{für} \quad w = x = 0.$$

Unter der Annahme, daß die Funktion  $w(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  den Einheitskreis auf  $D_w$  konform abbildet, soll jetzt also gezeigt werden,  $d \geq \frac{1}{4}$ . Zu diesem Zwecke bemerke man, daß die Funktion  $\frac{x}{z}$  für  $|z| < 1$  regulär und von Null verschieden ist. Es wird folglich nach dem GAUSSSCHEN Mittelwertsatz für  $x = R e^{i\phi}$ ,  $z = r e^{i\varphi}$  ( $r < 1$ )

$$\log \frac{1}{4d} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{R}{r} d\varphi. \tag{23}$$

Andererseits stellt das Integral

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \log \frac{R}{r} d(\Phi - \varphi) = I(r)$$

den Flächeninhalt desjenigen Gebietes  $D'$  dar, auf welches ein beliebiger Zweig der Funktion  $\log \frac{x}{z}$  den Kreis  $|z| \leq r$  abbildet. Dieser Ausdruck ist somit *nichtnegativ*, und es wird

$$\int \log \frac{R}{r} d\Phi = \int \log \frac{R}{r} d\varphi + I(r). \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt nun

$$\log \frac{1}{4d} = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \log R d\Phi - \log r - I(r). \tag{25}$$

Das letzte Integral kann in folgender Weise gedeutet werden:

<sup>1</sup> Den SCHMIDTSCHEN Beweis findet man bei CARATHÉODORY [5]. Vgl. auch W. GRUNSKY [1].

Man denke sich aus dem Gebiet  $D_x(r)$ , in welches der Kreis  $|z| < r$  durch die Abbildung  $z \rightarrow x$  transformiert wird, eine kleine Kreisscheibe  $|x| \leq R_0$  entfernt. Wird nun das Restgebiet aufgeschlitzt längs eines radialen Querschnitts, der die zwei Randkurven  $|x| = R_0$  und  $R = R(\Phi)$  (welche als Bild von  $|z| = r$  erscheint) verbindet, so wird dieses aufgeschlitzte Ringgebiet durch irgendeinen Zweig von  $\log x$  auf ein Gebiet  $D_0(r)$  abgebildet, dessen Flächeninhalt offenbar gleich

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \log R d\Phi + 2\pi \log \frac{1}{R_0}$$

ist. Unter Anwendung der Eigenschaft *A* des Gebiets  $D_x$  läßt sich zeigen, daß dieser Flächeninhalt andererseits nicht größer als das zweite Glied des obigen Ausdrucks ist. Dies sieht man am einfachsten derart ein, daß in der  $w$ -Ebene ein beliebiges Gebiet  $D^*$  genommen wird, welches  $D(r)$  (das Bildgebiet von  $|z| < r$ ) enthält, und von einem vom Randpunkt  $de^{i\delta}$  von  $D$  bis zu  $w = \infty$  verlaufenden *Schlitz* begrenzt wird. Transformiert man dieses Gebiet gleichzeitig mit  $D$  auf die  $x$ -Ebene, so erhält man als Bild ein Gebiet  $D_x^*$ , welches  $D_x(r)$  enthält und dessen Rand durch die Beziehung  $x' = \frac{1}{x}$  in sich selbst übergeht. Die Gleichung des Randes sei  $R = R^*(\Phi)$ . Verfährt man nun mit  $D$  wie oben mit  $D_x(r)$ , so erhält man als Bild in der  $\log x$ -Ebene ein Gebiet  $D_x$ , welches  $D_0(r)$  als Teilgebiet enthält und dessen Flächeninhalt also

$$\int_{\Phi=0}^{2\pi} \log R^* d\Phi + 2\pi \log \frac{1}{R_0} > \int_{\varphi=0}^{2\pi} \log R d\Phi + 2\pi \log \frac{1}{R_0}$$

ist.

Wegen der erwähnten Eigenschaft der Randkurve  $R = R^*(\Phi)$  verschwindet jedoch das erste Integral, und es wird somit

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \log R d\Phi < 0.$$

Nach (25) erhalten wir nunmehr

$$\log \frac{1}{4d} < -\log r - I(r)$$

und also für  $r \rightarrow 1$

$$d \geq \frac{1}{4} e^I, \tag{26}$$

wo  $I$  der Flächeninhalt desjenigen Gebietes ist, auf welches die Funktion  $\log \frac{x}{z}$  den Kreis  $|z| < 1$  abbildet.

Hieraus folgt nun

$$d \geq \frac{1}{4},$$

und es wird  $d = \frac{1}{4}$  dann und nur dann, wenn  $I = 0$ . Dies ist nur so möglich, daß  $x = cz$ , wo  $c$  konstant ist. Da nun das vermittels der Abbildung  $z \rightarrow x$  erhaltene Bildgebiet  $D_x$  den Punkt  $x = 1$  als Randpunkt hat, so wird  $|c| = 1$  und  $D_x$  fällt mit dem Einheitskreis zusammen. Dann ist aber  $D$  das KOEBESCHE Schlitzgebiet; für dieses und nur für dieses Bildgebiet erreicht also die kürzeste Nullpunktentfernung ihr Minimum  $\frac{1}{4}$ .

**76.** Ist man einmal im Besitz des genauen Wertes der KOEBESCHEN Konstante, so gelangt man auch zu den genauen Verzerrungsformeln von PICK, welche Schranken für den Betrag der Abbildungsfunktion und ihrer Ableitung geben. Dies geschieht durch folgende einfache Erwägung.

Es sei  $w = w(z)$  eine Funktion, welche den Einheitskreis  $|z| < 1$  auf ein schlichtes, im Endlichen gelegenes Gebiet  $D$  konform abbildet. Unter  $a$  und  $b$  zwei beliebige Punkte verstanden, denken wir uns durch diese Punkte einen Orthogonalkreis  $C(a, b)$  zu  $|z| = 1$  gelegt und schlitzen den Einheitskreis längs desjenigen Bogens von  $C(a, b)$  auf, der  $b$  mit  $|z| = 1$  verbindet und den Punkt  $a$  nicht enthält. Der aufgeschlitzte Einheitskreis  $E(a, b)$  wird auf dasjenige Teilgebiet  $D(a, b)$  von  $D$  schlicht abgebildet, welches aus diesem Gebiet entsteht, wenn man  $D$  längs des Bildbogens von  $C(a, b)$  aufschneidet.

Wir bilden jetzt  $E(a, b)$  auf den vollen Einheitskreis so ab, daß  $a$  in den Nullpunkt übergeht. Durch die Transformation

$$z_1^2 = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z} e^{-i\alpha},$$

wo  $\alpha = \arg \frac{b - a}{1 - \bar{b}a}$ , wird  $E(a, b)$  zunächst auf den oberen Halbkreis

$|z_1| < 1$  abgebildet, so daß  $z = a$  dem Punkt  $z_1 = c = i \sqrt{\frac{a - b}{1 - \bar{b}a}}$  entspricht. Durch die Beziehung

$$t = \frac{z_1 - c}{1 - \bar{c}z_1} \frac{1 - c z_1}{z_1 - c}$$

führt man nun den Halbkreis weiter in den Einheitskreis  $|t| < 1$  über, so daß  $c \rightarrow 0$ . Die gesuchte Transformation  $t = t(z)$  ergibt sich nun durch Zusammensetzung der zwei obigen Abbildungen. Es wird für  $z = a$ ,  $t = 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{dt}{dz} \right| &= |t'(a)| = \left| \frac{dz_1}{dz} \right| \left| \frac{dt}{dz_1} \right| \\ &= \frac{1}{4|a - b|} \cdot \frac{(1 - |b|^2)(|1 - \bar{b}a| + |a - b|)}{|1 - \bar{a}b|(|1 - \bar{b}a| - |a - b|)}. \end{aligned}$$

Nun hat man in

$$\varphi(t) = \frac{w(z(t)) \cdot t'(a)}{w'(a)} = \frac{w(a) t'(a)}{w'(a)} = t + c_2 t^2 + \dots$$

eine Funktion, welche den Kreis  $|t| < 1$  auf dasjenige schlichte Gebiet  $D_1(a, b)$  konform abbildet, welches aus  $D(a, b)$  durch die Transformation

$$w_1 = \frac{t'(a)}{w'(a)} (w - w(a))$$

hervorgeht und dessen Rand eine kürzeste Nullpunktentfernung höchstens vom Betrag

$$d = \left| \frac{t'(a)}{w'(a)} \right| |w(a) - w(b)|$$

hat. Nach dem obigen Satz ist dieser Ausdruck  $\geq \frac{1}{4}$  und es wird somit

$$|w'(a)| \left| \frac{a-b}{w(a)-w(b)} \right| \left| \frac{1-\bar{a}b}{1-|b|^2} \right| \left| \frac{1-\bar{b}a}{|1-\bar{b}a|+|a-b|} \right| \leq 1. \quad (27)$$

Aus dieser Beziehung, die zu verschiedenen interessanten Folgerungen leitet, schließen wir zunächst für  $a=0$ ,  $b=z$ , daß

$$\frac{|w'(0)| |z|}{|w(z)| (1+|z|)^2} \leq 1,$$

ist, oder also, falls  $w = z + a_2 z^2 + \dots$ , d. h.  $w'(0) = 1$ ,

$$|w(z)| \geq \frac{|z|}{(1+|z|)^2}. \quad (28)$$

Ferner ergibt sich für  $b=0$ ,  $a=z$ :

$$\left| \frac{w'(z)}{w(z)} \right| \leq \frac{1}{|z|} \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad (29)$$

woraus durch Integration von 0 bis  $z = |z| e^{i\varphi}$  längs des Radius  $\arg z = \varphi$

$$|w(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \quad (30)$$

Um noch eine untere Schranke für den Betrag der logarithmischen Ableitung zu ermitteln, betrachte man für ein gegebenes  $z$  die von  $t$  abhängige Funktion

$$w\left(\frac{t+z}{1+\bar{z}t}\right) = w(z) + w'(z)(1-|z|^2)t + \dots,$$

welche den Einheitskreis  $|t| < 1$  schlicht abbildet. Nach (30) wird also

$$\frac{\left| w\left(\frac{t+z}{1+\bar{z}t}\right) - w(z) \right|}{|w'(z)| (1-|z|^2)} \leq \frac{|t|}{(1-|t|)^2},$$

oder für  $t = -z$

$$\left| \frac{w'(z)}{w(z)} \right| \geq \frac{1}{|z|} \frac{1-|z|}{1+|z|}. \quad (31)$$

Durch Multiplikation der Formeln (31) und (28), sowie (29) und (30) erhalten wir noch

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |w'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \quad (32)$$

Alle diese Formeln enthalten genaue Schranken, welche bei dem KOEBESchen Extremalgebiet, und nur bei diesem erreicht werden.

77. Zum Schluß machen wir auf eine spezielle Folgerung aus den obigen Formeln aufmerksam. Aus (28') folgt

$$|1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots| \leq 1 + 2|z| + 3|z|^2 + \dots,$$

also, falls  $a_2 \neq 0$ , für  $z = e^{-i\alpha} |z|$  ( $\alpha = \arg a_2$ )

$$1 + |a_2| |z| + (z^2) \leq 1 + 2|z| + (z^2),$$

wo (x) jede Größe angibt, die dividiert durch  $x$  für  $x=0$  endlich verbleibt. Folglich wird

$$|a_2| \leq 2 + (|z|)$$

und

$$|a_2| \leq 2. \quad (33)$$

Aus dieser Ungleichung lassen sich umgekehrt sämtliche obigen Verzerrungsformeln einfach ableiten<sup>1</sup>.

#### § 4. Verzerrungssätze von AHLFORS<sup>2</sup>.

78. In der  $z = x + iy$ -Ebene denken wir uns ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $G$  gegeben, welches den unendlich fernen Punkt nicht enthält. Es seien  $Z_1 = X_1 + iY_1$  und  $Z_2 = X_2 + iY_2$  ( $X_1 < X_2$ ) zwei erreichbare Randpunkte von  $G$ ; hierbei werden auch die Möglichkeiten  $X_1 = -\infty$ ,  $X_2 = +\infty$  mitberücksichtigt.

Die Gerade  $\Re z = x$  hat ein oder mehrere Segmente mit dem Gebiet  $G$  gemeinsam. Eine jede dieser Strecken ist ein Querschnitt<sup>3</sup>  $Q$  des einfach zusammenhängenden Gebietes  $G$  und zerlegt dieses somit in zwei einfach zusammenhängende Gebiete, deren Punkte durch  $Q$  voneinander getrennt werden. Wir werden im folgenden einige wichtige Eigenschaften dieser Querschnitte zusammenfassen.

Wir verbinden  $Z_1$  und  $Z_2$  durch einen Querschnitt  $z = z(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ;  $Z_1 = z(0)$ ,  $Z_2 = z(1)$ ). Man kann diesen ohne Einschränkung derart wählen, daß er aus einer abzählbaren Menge von Strecken zusammengesetzt ist, von denen keine der  $y$ -Achse parallel ist und deren Endpunkte sich höchstens in  $Z_1$ ,  $Z_2$  häufen. Wir beweisen:

*I. Wenn  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  ( $x_1 < x_2$ ) zwei Gebietspunkte sind, so gibt es auf der Geraden  $\Re z = x$  ( $x_1 < x < x_2$ ) mindestens einen Querschnitt  $Q_x$ , der  $z_1$  und  $z_2$  trennt.*

Verbindet man nämlich  $z_1$  und  $z_2$  durch einen in  $G$  verlaufenden Polygonzug  $C$ , so wird die Gerade  $\Re z = x$  von diesem in einer ungeraden Anzahl von Punkten geschnitten. Unter den auf dieser Geraden gelegenen Querschnitten existiert also mindestens einer, der dieselbe Eigenschaft besitzt, und dieser trennt  $z_1$  von  $z_2$ .

<sup>1</sup> G. PICK [2], R. NEVANLINNA [1].

<sup>2</sup> L. AHLFORS [1].

<sup>3</sup> So bezeichnen wir jeden stetigen Jordanbogen, dessen Endpunkte Randpunkte sind, während alle übrigen Punkte innerhalb des Gebietes gelegen sind.

Der Satz gilt auch dann, wenn  $z_1, z_2$  erreichbare Randpunkte sind.

Wir betrachten speziell für ein gegebenes  $X_1 < x < X_2$  diejenigen Querschnitte  $Q_x$ , welche die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  trennen. Da der vorgegebene Polygonzug  $C$  jede Gerade  $\Re z = x$  in einer endlichen Anzahl von Punkten trifft, so muß es unter den Querschnitten  $Q_x$  einen wohlbestimmten geben, dem der Punkt  $z(t)$  zuerst begegnet, wenn  $t$  von 0 bis 1 wächst; dies möge für die Werte  $t = t(x), z_x = z(t(x))$  eintreten. Der betreffende Querschnitt  $Q_x$  sei durch  $\Theta_x$ , seine Länge durch  $\Theta(x)$  bezeichnet.

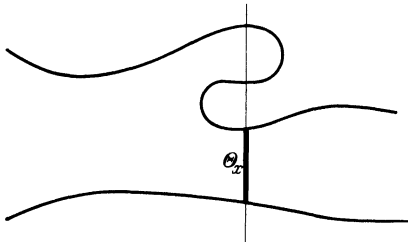


Abb. 16.

Die Funktion  $\Theta(x)$  ist im allgemeinen von komplizierter Beschaffenheit. Es läßt sich jedoch beweisen:

*II. Wenn die Berandung von G in den beiden Endpunkten des Querschnitts  $\Theta_x$  eine zur y-Achse nicht parallele Tangente hat, so ist  $\Theta(x)$  für den betreffenden Wert  $x$  stetig.*

*Beweis.* Es sei  $t_0$  der Wert, für welchen der Polygonzug  $z = z(t)$  zuerst die Gerade  $\Re z = x_0$  schneidet; dieser Schnitt liegt auf dem Querschnitt  $\Theta_{x_0}$ , in dessen Endpunkten die Berandung von  $G$  die in dem zu beweisenden Satze vorausgesetzte Eigenschaft besitzen möge. Man kann dann eine so kleine Zahl  $h > 0$  finden, daß für jedes  $t$  des Intervalles  $t_0 - h \leq t \leq t_0 + h$  der Schnittpunkt  $z(t)$  auf einem Segment  $\bar{\Theta}_x$  der Geraden  $\Re z = x(t)$  liegt, das einen Querschnitt von  $G$  darstellt und dessen Endpunkte auf zwei, durch die Endpunkte von  $\Theta_{x_0}$  gehenden stetigen Zweigen der Begrenzung von  $G$  gelegen sind. Die Länge  $\bar{\Theta}(x)$  von  $\bar{\Theta}_x$  ist eine stetige Funktion von  $t$ , und es genügt also jetzt zu zeigen, daß der Querschnitt  $\Theta_x$  für die betreffenden Werte von  $t$  mit dem Querschnitt  $\Theta_{x_0}$  übereinstimmt, sobald  $h$  hinreichend klein gewählt wird.

Um dies einzusehen, betrachten wir die von  $\Theta_{x_0}$  verschiedenen Querschnitte  $\Theta_{x_0}$ , welche auf der Geraden  $R(z) = x_0$  liegen. Falls unter diesen Querschnitten keiner von dem Polygonzug  $C$  getroffen wird, so gilt dasselbe für jeden von  $\Theta_x$  verschiedenen Querschnitt der Geraden  $\Re z = x(t)$ , sobald  $|x - x_0|$  hinreichend klein gewählt wird, und damit ist der Beweis des Satzes erbracht. Im entgegengesetzten Falle seien  $z_\nu = z(t_\nu)$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) diejenigen gemeinsamen Punkte von  $C$  mit den Geraden  $\Re z = x_0$ , welche nicht auf  $\Theta_{x_0}$  gelegen sind. Grenzen wir nun um die Werte  $t_\nu$  beliebig vorgegebene punktfremde Intervalle  $\Delta_\nu$  ab, so können wir eine so kleine Zahl  $\epsilon > 0$  bestimmen, daß jede Gerade  $\Re z = x$  für  $|x - x_0| < \epsilon$  von  $C$  in Punkten  $z_\mu$  geschnitten wird, welche, sofern sie außerhalb  $\Theta_x$  liegen, gewissen Werten  $t'_\mu$  der Intervalle  $\Delta_\nu$



entsprechen, und zwar so, daß die Anzahl der in  $\Delta_v$  gelegenen Punkte gleich Eins ist, falls  $t_v$  ein Schnittpunkt von  $C$  und  $\Re z = x$  ist, während sie entweder Zwei oder Null beträgt, falls  $t_v$  ein Eckpunkt von  $C$  ist, wo  $C$  durch die Gerade  $\Re z = x$  nicht hindurchgeht. Hieraus folgt, daß, falls  $z = z(t_v)$  einen Querschnitt  $\Re z = x$  bestimmt, der von  $C$  in  $n$  Punkten geschnitten wird, der oder die in das Intervall  $\Delta_v$  fallenden Werte  $t'_\mu$  einen Querschnitt auf der Geraden  $\Re z = x$  bestimmen, welche in  $m$  Punkten von  $C$  so geschnitten wird, daß die Differenz  $m - n$  eine gerade Zahl ist.

Aus obigem schließt man, daß  $\Theta_x = \Theta_x$  ist, sobald  $t = t(x)$  hinreichend wenig von  $t_0$  abweicht. Nimmt man nämlich  $h$  so klein, daß  $|x(t) - x_0| < \varepsilon$  für  $|t - t_0| < h$ , und wählt man gleichzeitig auch  $h < \Delta_v$  ( $v = 1, \dots, n$ ), so wird jeder Querschnitt, der auf der Geraden  $\Re z = x(t)$  gelegen und von  $\Theta_x$  verschieden ist, für  $t < t_0$  von dem Polygonzug  $C$  in einer geraden Anzahl von Punkten geschnitten. Anderenfalls müßte nämlich unter den Werten  $t_v < t_0$  mindestens einer existieren, der einen auf der Geraden  $R(z) = x_0$  gelegenen, von in einer ungeraden Anzahl von Punkten geschnittenen und also die Punkte  $Z_1, Z_2$  trennenden Querschnitt bestimmen würde, was der Definition des Querschnitts  $\Theta_{x_0}$  widerspricht. Durchläuft  $t$  das Intervall  $(0, 1)$ , so ist folglich  $\bar{\Theta}_x$  der erste von der Geraden  $R(z) = x$  definierte Querschnitt, den der Polygonzug  $C$  schneidet und es ist somit  $\Theta_x = \Theta_x$ , was zu beweisen war.

79. Unter der Voraussetzung, daß das Gebiet  $G$  in jedem endlichen Randpunkt der in der vorigen Nummer (Satz II) aufgestellten Regularitätsbedingung genügt, außer höchstens für isolierte Punkte, sei  $w = u + iv = w(z)$  eine Funktion, welche das Innere von  $G$  auf den Streifen  $|v| < \frac{a}{2}$  ( $a > 0$ ) konform so abbildet, daß der Randpunkt  $Z_1$  in den Punkt  $u = -\infty$ , der Randpunkt  $Z_2$  in  $u = +\infty$  übergeht. Der Querschnitt  $\Theta_x$  geht hierbei in einen stetigen Kurvenbogen  $L_x$  über, welcher die zwei Begrenzungsgeraden  $v = \pm \frac{a}{2}$  des Streifens miteinander verbindet. Der größte bzw. kleinste Wert von  $u$  auf  $L_x$  sei durch  $u_2(x)$  bzw.  $u_1(x)$  bezeichnet. Diese Größen sind offenbar als wachsende Funktionen von  $x$  definiert.

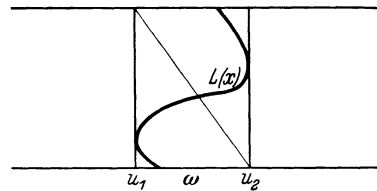


Abb. 17.

Um nun die Funktionen  $u_1, u_2$  näher zu untersuchen, bemerke man, daß die Länge des Bogens  $L_x$  mindestens gleich der Diagonale des umschriebenen Rechtecks  $u_1 \leq u \leq u_2, |v| \leq \frac{a}{2}$ , d. h. mindestens gleich

$$\sqrt{a^2 + \omega^2}$$

ist, mit  $\omega = \omega(x) = u_2(x) - u_1(x)$ . Andererseits ergibt sich für diese Länge der Ausdruck

$$\int_{\Theta_x} |w'(z)| dy,$$

der gemäß der SCHWARZSchen Ungleichung<sup>1</sup> höchstens gleich

$$\sqrt{\int_{\Theta_x} dy \int_{\Theta_x} |w'|^2 dy}$$

ist. Zusammenfassend wird somit

$$a^2 + \omega(x)^2 \leq \int_{\Theta_x} dy \int_{\Theta_x} |w'(z)|^2 dy = \Theta(x) \int_{\Theta_x} |w'(z)|^2 dy.$$

Wir dividieren durch  $\Theta$  und integrieren dann in bezug auf  $x$  zwischen den Grenzen  $x_1$  und  $x_2$  ( $X_1 < x_1 < x_2 < X_2$ ), was erlaubt ist, da  $\Theta(x)$  unter den aufgestellten Regularitätsbedingungen höchstens isolierte Unstetigkeitsstellen aufweisen kann (vgl. Nr. 78). Man erhält also

$$a^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta(x)} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\omega(x)^2}{\Theta(x)} dx \leq \int_{\Theta_x} \int_{x_1}^{x_2} |w'(z)|^2 dx dy.$$

Der rechtsstehende Ausdruck stellt den Flächeninhalt  $A(x_1, x_2)$  desjenigen schlichten Gebiets dar, welches der Bogen  $L_x$  beschreibt, wenn  $x$  stetig von  $x_1$  bis  $x_2$  wächst. Da diese Fläche als Teil im Rechteck  $|v| \leq \frac{a}{2}, u_1(x_1) \leq u \leq u_2(x_2)$  enthalten ist, so ist  $A(x_1, x_2) \leq a(u_2(x_2) - u_1(x_1)) = a(u_1(x_2) - u_2(x_1) + \omega(x_1) + \omega(x_2))$ , und es wird

$$u_1(x_2) - u_2(x_1) \geq a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta(x)} + \frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\omega^2}{\Theta} dx - \omega(x_1) - \omega(x_2). \quad (35)$$

<sup>1</sup> Die SCHWARZSche Ungleichung lautet:

$$\left( \int_a^b g(x) h(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b g(x)^2 dx \int_a^b h(x)^2 dx. \quad (34)$$

Ihre Begründung erfolgt einfach vermittels der LAGRANGESchen Identität

$$\left( \sum_1^n a_\mu b_\mu \right)^2 = \sum_1^n a_\mu^2 \sum_1^n b_\mu^2 + \sum_{\mu < \nu} (a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu)^2,$$

wonach

$$(\sum a_\mu b_\mu)^2 \leq \sum a_\mu^2 \sum b_\mu^2$$

folgt. Gleichheit tritt hier dann und nur dann ein, wenn die Zahlen  $a_\mu$  zu den Zahlen  $b_\mu$  proportional sind.

Durch einen Grenzübergang ergibt sich

$$\left( \int_a^b g(x) h(x) dx \right)^2 = \int_a^b g(x)^2 dx \int_a^b h(x)^2 dx + \int_a^b dy \int_a^y (g(x) h(y) - g(y) h(x))^2 dx.$$

Die Beziehung (34) gilt hiernach, und zwar so, daß Gleichheit dann und nur dann vorkommt, wenn das Verhältnis  $g : h$  konstant ist (außer höchstens für eine Wertmenge  $x$  vom Maße Null).

Um dieses Ergebnis auf eine brauchbare Form zu bringen, soll jetzt die Schwankung  $\omega$  von  $u$  auf  $L_x$  weggeschafft werden. Wir fixieren einen beliebigen Wert  $x_0$  ( $X_1 < x_0 < X_2$ ) und setzen

$$\frac{1}{a} \int_{x_0}^x \frac{\omega^2}{\Theta} dx \equiv \lambda(x). \quad (36)$$

Sei ferner  $m$  eine beliebige positive Zahl und, für ein gewisses  $x > x_0$ ,

$$\lambda(x) < \omega(x) - m. \quad (37)$$

Dann wird

$$\omega^2 = a\Theta \frac{d\lambda}{dx} > (\lambda(x) + m)^2$$

und somit

$$\frac{dx}{\Theta(x)} \leq \frac{a d\lambda}{(\lambda + m)^2}.$$

Hieraus folgt, daß das Integral

$$\int \frac{dx}{\Theta(x)} \quad (38)$$

erstreckt über diejenigen Intervalle rechts von  $x_0$ , wo die Ungleichung (37) besteht, höchstens gleich

$$a \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda + m)^2} = \frac{a}{m} \quad (39)$$

ist. In genau derselben Weise sieht man ein, daß das Integral (38) über diejenigen Werte  $x < x_0$  erstreckt, für welche die Ungleichung

$$-\lambda(x) < \omega(x) - m \quad (40)$$

besteht, höchstens gleich dem Ausdruck (39) ist.

Wir wählen jetzt  $x_0$  im Intervall  $x_1 < x_0 < x_2$ , so daß

$$\int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\Theta(x)} = \int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{\Theta(x)} = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta(x)}.$$

Falls dann

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta(x)} > \frac{2a}{m} \quad (41)$$

ist, so seien  $x'_1, x'_2$  ( $x_1 < x'_1 < x'_2 < x_2$ ) die durch die Gleichungen

$$\int_{x_1}^{x'_1} \frac{dx}{\Theta} = \int_{x'_2}^{x_2} \frac{dx}{\Theta} = \frac{a}{m}$$

definierten Zahlen. Es existiert dann im Intervall  $(x_1, x'_1)$  eine Zahl  $\xi_1$  und im Intervall  $x'_2, x_2$  eine Zahl  $\xi_2$ , so daß

$$-\lambda(\xi_1) \geq \omega(\xi_1) - m, \quad \lambda(\xi_2) \geq \omega(\xi_2) - m$$

und daher

$$\frac{1}{a} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\omega^2}{\Theta} dx = \lambda(\xi_2) - \lambda(\xi_1) \geq \omega(\xi_1) + \omega(\xi_2) - 2m.$$

Die Beziehung (39), angewandt im Intervall  $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$ , ergibt dann also

$$u_1(\xi_2) - u_2(\xi_1) \geq a \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{\Theta} - 2m,$$

woraus, da  $u_1$  und  $u_2$  wachsende Funktionen sind und  $x_1 < \xi_1$ ,  $\xi_2 < x_2$  ist,

$$\begin{aligned} u_1(x_2) - u_2(x_1) &\geq a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta} - 2m - a \int_{x_1}^{\xi_1} \frac{dx}{\Theta} - a \int_{\xi_2}^{x_2} \frac{dx}{\Theta} \\ &\geq a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta} - 2m - \frac{2a^2}{m}. \end{aligned}$$

Setzt man speziell  $m = a$ , so folgt hieraus der

**Satz von AHLFORS.** *Ist*

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta(x)} > 2,$$

so wird

$$u_1(x_2) - u_2(x_1) \geq a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta(x)} - 4a. \tag{42}$$

Daß der vor dem Integral stehende Faktor  $a$  durch keinen kleineren ersetzt werden kann, wird ersichtlich, wenn man als Gebiet  $G$  einen zur  $x$ -Achse parallelen Streifen von konstanter Breite  $\Theta$  wählt. Es wird dann  $w = \frac{az}{\Theta}$  und

$$u_1(x_2) - u_2(x_1) = \frac{a(x_2 - x_1)}{\Theta} = a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta}.$$

**80.** Es soll sogleich eine Anwendung des AHLFORSschen Satzes besprochen werden. Sei

$$s = f(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \dots \tag{43}$$

eine für  $|t| < 1$  reguläre Funktion, welchen den Einheitskreis  $E_t$  auf ein schlichtes Gebiet  $D_s$  konform abbildet. Man schneide  $D_s$  längs der positiven reellen Achse von  $s = 0$  bis zum nächsten Randpunkt auf,  $E_t$  wiederum längs der Bildkurve  $\gamma$  dieses Schnittes, und bilde die aufgeschnittenen Gebiete durch zwei beliebig festgelegte Zweige der Funktionen  $w = \log s$  und  $z = x + iy = \log t$  auf zwei Streifengebiete  $D_w$  und  $E_z$  konform ab.

Es sei nun  $Z_1$  der unendlich ferne, und  $Z_2$  ein beliebiger, auf der imaginären Achse befindlicher Randpunkt von  $E_z$ . Wie in Nr. 78

definieren wir jetzt einen zur  $y$ -Achse parallelen Querschnitt  $\Theta_x$  von  $E_x$ , der die Randpunkte  $Z_1$  und  $Z_2$  trennt; seine Länge  $\Theta(x)$  ist offenbar  $\leq 2\pi$  und seine Bildkurve  $l_x$  in dem Gebiete  $D_w$  hat eine Länge  $l(x) \geq 2\pi$ . Das in Nr. 79 befolgte Verfahren ergibt nun die für jedes  $x < 0$  gültige Ungleichung

$$\int_x^0 l^2 dx \leq 2\pi A(x), \tag{44}$$

wo  $A(x)$  der Flächeninhalt desjenigen Teilgebiets von  $D_w$  ist, welches durch die Kurve  $l_x$  abgetrennt wird und rechts von dieser liegt.

Diese Ungleichung wollen wir jetzt verwenden, um den genauen Wert der KOEBESCHEN Konstante zu bestimmen, die bereits in § 3, Nr. 75 vermittels einer anderen Methode ermittelt wurde. Wir sahen dort: Wenn die für  $|t| < 1$  konvergente Potenzreihe

$$\varphi(t) = t + a_2 t^2 + \dots$$

den Einheitskreis auf ein schlichtes Gebiet abbildet, dessen Berandung die kürzeste Nullpunktentfernung  $d$  hat, so ergibt die Zusammensetzung dieser Funktion  $\varphi$  mit Hilfe einer einfachen Wurzeloperation (S. 81) eine Funktion  $f(t)$ , deren Nullpunktentwicklung (43) als ersten Koeffizienten

$$c_1 = \frac{e^{-i\delta}}{4d} \quad (\delta \text{ reell}) \tag{45}$$

hat, und die den Einheitskreis  $E_t$  auf ein schlichtes Gebiet  $D_s$  abbildet, welches den Punkt  $s=1$  als Randpunkt hat, die ganze Strecke  $(0,1)$  der reellen Achse enthält und nachstehende spezielle Eigenschaft besitzt:

Wenn der Punkt  $s$  innerhalb  $D_s$  liegt, so liegt der Punkt  $\frac{1}{s}$  außerhalb  $D_s$ .

Wir setzen nun die Ungleichung (44) an, nehmen  $|x|$  so groß an, daß der Bogen  $l_x$  vollständig links von der imaginären Achse zu liegen kommt und zerlegen die Fläche  $A(x)$  in zwei Teile durch eine zur  $v$ -Achse ( $w = u + iv$ ) parallele Strecke mit der Abszisse  $u_0 < 0$ . Da der rechts von  $u = u_0$  gelegene Gebietsteil, wegen der obenerwähnten speziellen Eigenschaft von  $D_s$ , kein Paar in bezug auf  $w = 0$  symmetrischer Punkte enthalten kann, so findet man, daß dieses Teilgebiet von  $D_s$  einen Flächeninhalt hat, der höchstens  $2\pi |u_0|$  beträgt, und es ist also

$$A(x) \leq A_0(x) - 2\pi u_0,$$

wo  $A_0(x)$  den Inhalt der durch die Ungleichung  $u < u_0$  bestimmten Teilfläche von  $A(x)$  bezeichnet. Wenn noch  $u_1(x)$  den kleinsten Wert,  $u_1(x) + \omega(x)$  den größten Wert von  $u$  auf  $l_x$  bezeichnen, so ist  $A_0(x) \leq 2\pi(u_0 - u_1(x))$ , also

$$A(x) \leq -2\pi u_1(x) \tag{46}$$

und

$$(l(x))^2 \geq 4\pi^2 + \omega^2, \tag{47}$$

so daß schließlich gemäß (44)

$$-x + \frac{1}{4\pi^2} \int_x^0 \omega^2 dx \leq -u_1(x). \tag{48}$$

Für

$$u_1(x) = \min_{\log t = x} \log |f(t)|$$

hat man aber nach (43) die Entwicklung

$$u_1(x) = \log |c_1| + x + \left(\frac{1}{x}\right), \tag{49}$$

wo  $\left(\frac{1}{x}\right)$  für  $|x| \rightarrow \infty$  verschwindet, und es wird also nach (45) und (48)

$$-\log |c_1| = \log(4d) \geq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^0 \omega^2 dx$$

oder

$$d \geq \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^0 \omega^2 dx} \geq \frac{1}{4}. \tag{50}$$

Die Grenze  $\frac{1}{4}$  kann nur dann erreicht werden, wenn  $\omega = 0$ , d. h. wenn bei der Abbildung  $t \rightarrow s$  die Kreise  $|t| = \text{const.}$  in konzentrische Kreise  $|s| = \text{const.}$  verwandelt werden. Es ist also dann  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  und, da  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  und  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ ,  $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ ,  $u = ax + b_1$ ,  $v = ay + b_2$ ,

$$w = u + iv = az + b, \quad \text{mit} \quad b = b_1 + ib_2.$$

Nun ist aber nach (49)  $b_1 = \log(4d) = 0$ ,  $a = 1$ , und somit  $w = z + ib_2$ ,  $s = e^{ib_2} \cdot t$ . Der Wert  $d = \frac{1}{4}$  kommt also nur bei dieser speziellen Abbildung vor; das entsprechende Bildgebiet in der  $\varphi$ -Ebene ist dann das KOEBESCHE Extremalgebiet (vgl. Nr. 74).

Der AHLFORSSCHE Randverzerrungssatz leitet einfach also auch zu den klassischen Verzerrungsformeln, welche die Deformation bei schlichten konformen Abbildungen im *Innern* der Gebiete bestimmen.

### § 5. Das Problem von CARLEMAN-MILLOUX.

81. In § 2 dieses Abschnitts haben wir unter Anwendung des Erweiterungsprinzips für das harmonische Maß einige Abschätzungen gegeben, welche, ohne die bestmöglichen zu sein, immerhin einen Genauigkeitsgrad besitzen, der für viele Anwendungen als genügend betrachtet werden kann. Im folgenden sollen einige anschließende Extremalprobleme, die zu dem schon in § 2 behandelten Problem von CARLEMAN und MILLOUX in enger Beziehung stehen, genau gelöst werden.

Die zur Anwendung kommende, von BEURLING und vom Verfasser herrührende Methode<sup>1</sup> gründet sich auf eine Integraldarstellung des harmonischen Maßes, welche jetzt aufgestellt werden soll.

Wir gehen von einem Gebiet  $G$  aus, dessen Berandung vorerst aus einer endlichen Anzahl analytischer Bogen  $\Gamma$  zusammengesetzt angenommen werden soll. Durch endlich viele analytische Jordanbogen  $\beta$ , die sich entweder innerhalb  $G$  schließen oder Querschnitte von  $G$  sind, trennen wir nun gewisse Teilgebiete ab, so daß aus  $G$  ein zusammenhängendes Teilgebiet  $G^*$  übrig bleibt. Die Berandung  $\Gamma^*$  von  $G^*$  besteht aus einem Teil  $\alpha$  von  $\Gamma$  sowie aus den Bogen  $\beta$ .

Es gilt nun das harmonische Maß der Randkurven  $\alpha$  in bezug auf  $G^*$  durch die GREENSche Funktion  $g(\zeta, z)$  von  $G$  auszudrücken. Zu diesem Zweck wenden wir die GREENSche Transformationsformel (Nr. 24) mit  $U = g$ ,  $V = \omega(\zeta, \alpha, G^*)$  im Gebiete  $G^*$  an, aus dem zuvor der Pol  $\zeta = z$  durch einen kleinen Kreis vom Radius  $\varrho$  isoliert worden ist. Durch den Grenzübergang  $\varrho \rightarrow 0$  findet man dann

$$2\pi\omega(z, \alpha, G^*) = \int_{\alpha} \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} ds - \int_{\beta} g \frac{\partial \omega(\zeta, \alpha, G^*)}{\partial n} ds$$

oder, wegen

$$\int_{\alpha} \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} ds = \int_{\alpha} dh(\zeta, z) = 2\pi\omega(z, \alpha, G)$$

und  $\frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}$ , wo  $-h$  die zu  $g$  und  $-\bar{\omega}$  die zum harmonischen Maß  $\omega$  konjugierte harmonische Funktion ist, schließlich

$$\omega(z, \alpha, G^*) = \omega(z, \alpha, G) - \frac{1}{2\pi} \int_{\beta} g(\zeta, z) d\bar{\omega}(\zeta, \alpha, G^*). \quad (51)$$

Wir haben diese Darstellung unter der Voraussetzung hergeleitet, daß die Bogen  $\alpha$  und  $\beta$  analytisch sind. Tatsächlich gilt die Formel auch wenn  $\alpha$  und  $\beta$  aus einer endlichen Anzahl von Jordanbogen zusammengesetzt sind. Genau wie in Nr. 26 sieht man zunächst ein, daß die zu  $\omega$  konjugierte Funktion  $-\bar{\omega}$  noch auf dem Rande  $\beta$  stetig ist; da  $\omega$  hier verschwindet, somit gegen das Innere des Gebietes  $G$  zunimmt, so muß auch  $\bar{\omega}$  stetig wachsen, wenn der Punkt  $\zeta$  die Bogen  $\beta$  in positiver Richtung durchläuft. Man setze nun die Formel (51) in demjenigen Teilgebiet  $G_{\varepsilon}^*$  von  $G^*$  an, das von den analytischen Kurven  $\omega(z, \alpha, G^*) = 1 - \varepsilon$  ( $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$ ) und  $\omega = \varepsilon$  begrenzt wird. Das harmonische Maß der ersteren Bogen  $\alpha_{\varepsilon}$  in bezug auf  $G_{\varepsilon}^*$  ergibt sich als eine *lineare* Funktion von  $\omega$ :

$$\omega(z, \alpha_{\varepsilon}, G_{\varepsilon}^*) = \frac{\omega(z, \alpha, G^*) - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon}.$$

<sup>1</sup> A. BEURLING [I], R. NEVANLINNA [II].

Setzt man diesen Ausdruck ein und nimmt dann unter Berücksichtigung der Stetigkeit der GREENSchen Funktion auf dem Rande  $\alpha + \beta$  den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  vor, so ergibt sich in der Grenze die Formel (51).

Man sieht daß diese Formel, welche in der Folge eine wichtige Rolle spielen wird, das Prinzip über die Gebietserweiterung als unmittelbaren Folgesatz in sich schließt. In der Tat ist das Integral rechts in (51), wegen  $d\bar{\omega} \geq 0$ , nichtnegativ und es ist also

$$\omega(z, \alpha, G^*) \leq \omega(z, \alpha, G),$$

was gerade das Erweiterungsprinzip enthält.

**82.** Wir stellen uns nun folgende Aufgabe<sup>1</sup> (Problem von CARLEMAN-MILLOUX):

*Es sei  $G$  ein schlichtes Gebiet von der Art, daß jeder Kreis  $|z| = r$  ( $0 \leq r \leq R$ ) mindestens einen Punkt enthält, der nicht zu  $G$  gehört. Sei ferner  $u(z)$  eine innerhalb  $G$  eindeutige harmonische Funktion, welche nachstehenden Bedingungen genügt:*

1. Innerhalb  $G$  ist  $u(z) \geq 0$ .
2. In jedem im Kreise  $|z| < R$  gelegenen Randpunkt  $z$  von  $G$  ist  $\lim u(z) \geq 1$ .

*Es gilt, für  $0 \leq r \leq R$ , eine nur von  $r$  abhängige, auf dem Kreise  $|z| = r$  gültige untere Schranke der Funktion  $u(z)$  zu finden.*

*Vorbemerkung.* Falls die Berandung von  $G$  so regulär ist, daß man vom harmonischen Maß der innerhalb  $|z| < R$  liegenden Randbogen  $\alpha$  von  $G$  sprechen kann (dies ist z. B. dann der Fall, wenn  $G$  von lauter Jordanbogen begrenzt ist), so handelt es sich also um eine Abschätzung nach unten des harmonischen Maßes  $\omega(z, \alpha, G)$  für  $|z| = r$  ( $0 \leq r \leq R$ ). Als trivial kann der Fall beiseite gelassen werden, wo sämtliche Randpunkte von  $G$  und also auch  $G$  selbst innerhalb des Kreises  $|z| < R$  gelegen sind, denn dann umfaßt  $\alpha$  den ganzen Rand von  $G$ , und es ist also  $\omega \equiv 1$ . Nehmen wir also an, daß  $G$  Randpunkte enthält, die außerhalb jenes Kreises oder auf diesem liegen. Nach dem Erweiterungsprinzip wird dann  $\omega$  nicht größer, wenn man  $G$  durch sein innerhalb des Kreises  $|z| < R$  liegendes Teilgebiet  $G_R$  ersetzt, und es genügt somit, das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha, G_R)$  nach unten abzuschätzen. Fixiert man nun einen inneren Punkt  $z = re^{i\varphi}$  von  $G_R$ , scheint es anschaulich fast evident zu sein, daß das harmonische Maß der Bogen  $\alpha$  in diesem Punkt möglichst klein ausfällt, wenn sämtliche Punkte  $\alpha$  dem Aufpunkt  $re^{i\varphi}$  diametral gegenüberstehen, so daß also  $\alpha$  aus dem Radius  $(0, -Re^{i\varphi})$  und  $G_R$  aus dem längs dieser Strecke aufgeschlitzten Kreis  $|z| < R$  besteht. Daß dies tatsächlich der Fall ist, wird aus der unten folgenden exakten Lösung

<sup>1</sup> Vgl. hierzu, außer den oben genannten Arbeiten von BEURLING und vom Verfasser, E. LANDAU [3], W. FENCHEL [J], E. SCHMIDT [I].



des CARLEMAN-MILLOUXschen Problems hervorgehen. Um die dieser Lösung zugrunde liegende anschauliche Idee klarer hervortreten zu lassen, sollen hier einige vorbereitende heuristische Bemerkungen vorausgeschickt werden, die den Schlüssel zur Lösung geben, obwohl sie für das nachfolgende nicht unbedingt notwendig sind.

Wir stellen uns zunächst folgende einfachere Aufgabe: Gegeben sei eine Funktion  $u(z)$ , die im Gebiete  $G$  nichtnegativ und harmonisch ist, außer in gewissen logarithmischen Polen  $z_\nu$ , die auf vorgegebenen Kreisen  $|z| = r_\nu$  ( $0 < r_\nu < R$ ;  $\nu = 1, \dots, n$ ) gelegen sind; und zwar gelte in  $z_\nu$

$$u(z) = \delta_\nu \log \frac{1}{|z - z_\nu|} + \text{harmonische Funktion,}$$

wo  $\delta_\nu$  vorgegebene positive Zahlen sind. Es soll für  $|z| = r$  eine nur von den Zahlen  $r$ ,  $\delta_\nu$  und  $r_\nu$  abhängige untere Schranke von  $u(z)$  gefunden werden.

Nun sieht man unmittelbar ein, daß die Differenz

$$u(z) - \sum \delta_\nu g(z, z_\nu),$$

wo

$$g(z, z_\nu) = \log \left| \frac{R^2 - \bar{z}_\nu z}{R(z - z_\nu)} \right|$$

die GREENSche Funktion des Kreises  $|z| \leq R$  ist, eine für  $|z| < R$  harmonische Funktion ist, die in jedem Punkt der Peripherie  $|z| = R$  eine nichtnegative untere Grenze hat und die also im ganzen Kreis  $|z| < R$  nichtnegativ sein muß, so daß

$$u(z) \geq \sum \delta_\nu g(z, z_\nu).$$

Für die GREENSche Funktion  $g$  gilt aber, wie leicht zu bestätigen ist,

$$\log \frac{R^2 + |z_\nu| |z|}{R(|z| + |z_\nu|)} \leq g(z, z_\nu) \leq \log \frac{R^2 - |z_\nu| |z|}{R||z| - |z_\nu||}$$

oder

$$g(-|z|, |z_\nu|) \leq g(z, z_\nu) \leq g(|z|, |z_\nu|), \tag{52}$$

wo Gleichheit links nur für  $\arg z = \arg z_\nu + \pi$ , rechts nur für  $\arg z = \arg z_\nu$  besteht. Also ist

$$u(re^{i\varphi}) \geq \sum \delta_\nu g(-r, r_\nu); \tag{53}$$

das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn  $z_\nu = -r_\nu e^{i\varphi}$ , d. h. wenn sämtliche Pole dem Punkt  $re^{i\varphi}$  diametral gegenüberliegen.

Hiermit ist die Hilfsaufgabe vollständig gelöst. Durch dieses Ergebnis wird aber auch der Weg zur Lösung des ursprünglichen Problems angebahnt. Denkt man sich nämlich die Anzahl der Werte  $r_\nu$  unbeschränkt wachsen und sucht man die Zahlen  $\delta_\nu$  so zu wählen, daß die rechts in (53) stehende Summe sich einem Integral nähert, das, wenn anstatt  $-r$  die Variable  $z$  geschrieben wird, eine Funktion darstellt, welche auf dem Radius  $(0, R)$  den Randwert 1 annimmt, eine Funktion also, die nichts anderes als das harmonische Maß dieses Radius in bezug

auf das längs desselben aufgeschlitzten Kreis  $|z| < R$  ist, so wird die Ungleichung (53) gerade die in Aussicht gestellte Lösung des Problems enthalten; zugleich ist mit den obigen Bemerkungen ein Verfahren vorgezeichnet zur Begründung jener Ungleichung, welche aus (53) durch Grenzübergang entstehen wird. Es kommt alles auf die Möglichkeit des Grenzüberganges an; daß dieser tatsächlich gelingt, wird durch die Integraldarstellung des harmonischen Maßes gezeigt, welche in Nr. 81 hergeleitet worden ist.

Wir gehen nun an die direkte Lösung des Problems von CARLEMAN-MILLOUX. In der Formel (51) S. 95 nehme man für  $G$  den Kreis  $|z| < R$  und für  $G^*$  dasjenige Teilgebiet dieses Kreises, welches entsteht, wenn man den Kreis längs des durch den Radius  $(0, R)$  definierten Schlitzes  $\beta$  aufschneidet; der Bogen  $\alpha$  ist also durch die volle Kreisperipherie  $|z| = R$  gegeben. Es ist also  $\omega(z, \alpha, G) = 1$  und da  $\omega(z, \beta, G^*) = 1 - \omega(z, \alpha, G^*)$ , so wird

$$\omega(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\beta} g(\zeta, z) d\omega(\zeta), \tag{54}$$

wo wir kürzer  $\omega(z) \equiv \omega(z, \beta, G^*)$  und  $\omega(\zeta) \equiv \omega(\zeta, \beta, G^*)$  geschrieben haben.

Für das harmonische Maß  $\omega(z)$  hat man andererseits den expliziten Ausdruck

$$\omega(z) = \frac{2}{\pi} \Re \left( \frac{1}{i} \log \frac{i(\sqrt{R} - \sqrt{z})}{\sqrt{R} + \sqrt{z}} \right) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{R - |z|}{R - z},$$

und es ist also für ein reelles, positives  $z$

$$\omega(z) = \frac{2}{\pi} \log \frac{\sqrt{R} - \sqrt{z}}{\sqrt{R} + \sqrt{z}}$$

bis auf eine additive Konstante. Setzt man diesen Wert in (54) ein und beachtet man, daß der Schlitz  $\beta$  mit zwei Ufern versehen ist, so wird schließlich

$$\omega(z) = \frac{2}{\pi^2} \int_{t=0}^R g(z, t) d \log \frac{\sqrt{R} + \sqrt{t}}{\sqrt{R} - \sqrt{t}}, \tag{55}$$

mit

$$g(z, t) = \log \left| \frac{R^2 - zt}{R(z-i)} \right|.$$

Es sei jetzt  $z = re^{i\varphi}$  ( $0 < r < R$ ) ein innerer Punkt des Gebietes  $G$ , wo die gegebene Funktion  $u(z)$  die auf S. 96 aufgezählten Eigenschaften besitzt. Wir fixieren für jedes  $0 \leq t \leq R$  einen äußeren oder Randpunkt  $\zeta = te^{i\vartheta}$  des Gebietes  $G$  und nehmen vorerst an, daß dies derart geschehen kann, daß die hierdurch definierte Funktion  $\vartheta = \vartheta(t)$  meßbar ist. Es sei dann

$$v_\varrho(z) = \frac{2}{\pi^2} \int_{t=0}^\varrho g(z, \zeta) d \log \frac{\sqrt{R} + \sqrt{t}}{\sqrt{R} - \sqrt{t}} \quad (0 < \varrho < R).$$

Man sieht unmittelbar ein, daß diese Funktion nachstehenden Bedingungen genügt:

1.  $v_\varrho(z)$  ist in jedem Punkt  $z + \zeta$  des Kreises  $|z| < R$  harmonisch.
  2.  $v_\varrho(z)$  verschwindet für  $|z| = R$ .
- Neben diesen evidenten Eigenschaften hat  $v_\varrho$  noch die folgende:
3. Für  $|z| < R$  ist  $v_\varrho(z) \leq 1$ .

Zum Beweise machen wir von den elementaren Abschätzungen (52) Gebrauch. Nach der rechtsstehenden Beziehung wird unter Beachtung der Formel (55)

$$v_\varrho(z) \leq \frac{2}{\pi^2} \int_0^R g(|z|, t) d \log \frac{\sqrt{R} + \sqrt{t}}{\sqrt{R} - \sqrt{t}} = \omega(|z|) = 1.$$

Wir betrachten nun den innerhalb des Kreises  $|z| < R$  gelegenen Teil  $G_R$  des Gebietes  $G$ . Unter Beachtung der Voraussetzungen des vorgelegten Problems folgt aus den oben genannten Eigenschaften 1., 2. und 3., daß die Differenz  $u(z) - v_\varrho(z)$  welche eine in  $G_R$  harmonische Funktion darstellt, in jedem Randpunkt von  $G_R$  eine nichtnegative untere Grenze hat. Nach dem Minimumprinzip ist also  $u(z) \geq v_\varrho(z)$  in jedem Punkt von  $G_R$ . Ferner ergibt sich bei Anwendung der ersten Bedingung (52)

$$u(re^{i\varphi}) \geq v_\varrho(re^{i\varphi}) \geq \frac{2}{\pi^2} \int_0^\varrho g(-|z|, t) d \log \frac{\sqrt{R} + \sqrt{t}}{\sqrt{R} - \sqrt{t}},$$

woraus für  $\varrho \rightarrow R$  folgt ( $v_R = \lim v_\varrho$ ):

$$\left. \begin{aligned} u(re^{i\varphi}) \geq v_R(re^{i\varphi}) &\geq \frac{2}{\pi^2} \int_0^R g(-|z|, t) d \log \frac{\sqrt{R} + \sqrt{t}}{\sqrt{R} - \sqrt{t}} \\ &= \omega(-|z|) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{R-r}{R+r}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Es soll noch gezeigt werden, daß die rechtsstehende untere Schranke nur dann von der Funktion  $u$  erreicht werden kann, wenn  $G$  der von 0 bis  $-e^{i\varphi}$  radial aufgeschlitzte Kreis  $|z| < R$ , also  $u(z) \equiv \omega(-ze^{-i\varphi})$  ist. Nach (52) erfordert das Bestehen der Gleichheit  $v_R(re^{i\varphi}) = \omega(-r)$ , daß  $\vartheta = \varphi + \pi$  außer höchstens für eine Nullmenge von  $t$ -Werten. Hieraus folgt, daß die Strecke  $(0, -Re^{i\varphi})$  keinen inneren Punkt von  $G$  enthalten kann. In der Vergleichsfunktion  $v_\varrho$  kann daher  $\vartheta(t) = \varphi + \pi$  gesetzt werden und es wird somit  $v_R(z) = \omega(-ze^{-i\varphi})$ . Soll nun die in  $G_R$  harmonische und nach (56) nichtnegative Funktion  $u - v_R$  im inneren Punkt  $z = re^{i\varphi}$  verschwinden, so muß gemäß dem Minimumprinzip identisch

$$u(z) \equiv v_R(z) \equiv \omega(-ze^{-i\varphi})$$

sein. Hiermit ist auch der das Gleichheitszeichen betreffende Teil des Problems gelöst worden.

Die oben gegebene Lösung gründet sich auf die Voraussetzung, daß die Funktion  $\vartheta(t)$  meßbar konstruiert werden kann. Falls die Berandung von  $G$  so kompliziert ist, daß dies nicht gelingen sollte, so modifiziere man die Definition von  $\vartheta(t)$  folgendermaßen: Nachdem ein innerer Punkt  $z = re^{i\varphi}$  von  $G_R$  fixiert worden ist, nehme man eine positive Zahl  $\varepsilon$  und, außerhalb oder auf dem Rand von  $G$ , eine Punktmenge  $\zeta_n = t_n e^{i\vartheta_n}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ;  $t_0 = 0, t_n < t_{n+1}, t_n \rightarrow R$  für  $n \rightarrow \infty$ ), so daß  $u(z) > 1 - \varepsilon$  für  $|z - \zeta_n| \leq t_{n+1} - t_n$ , was gemäß der Voraussetzung 2 möglich ist; jede Differenz  $t_{n+1} - t_n$  soll hierbei kleiner als die kürzeste Entfernung von  $z = re^{i\varphi}$  zum Rande von  $G_R$  gewählt werden. Dann setze man  $\vartheta(t) = \vartheta_{n+1}$  für  $t_n \leq t < t_{n+1}$ .

Mit dieser Funktion  $\vartheta(t)$  wiederhole man nun die Konstruktion der Hilfsfunktion  $v_\vartheta$ . Die Lösung erfolgt dann wie oben; nur wird diesmal das Minimumprinzip auf die Funktion  $u - v_\vartheta$  in jenem Teilgebiet von  $G_R$  angewandt, das den Punkt  $re^{i\varphi}$  enthält und von den Punkten  $\zeta = te^{i\vartheta}$  begrenzt wird. Durch den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  gelangt man dann zum Endergebnis, das dem obigen genau gleich lautet.

*Bemerkung.* Aus den oben stehenden Erörterungen folgt nicht nur (56), sondern sogar die schärfere Beziehung

$$\begin{aligned} u(re^{i\varphi}) &\geq \omega(-r) + \frac{2}{\pi^2} \int_0^R \log \left| \frac{(R^2 - \zeta z)(t+r)}{(\zeta - z)(R^2 + tr)} \right| d \log \frac{\sqrt{R} + \sqrt{t}}{\sqrt{R} - \sqrt{t}} \\ &\geq \omega(-r) + \frac{r(R-r)}{\pi^2 R^3 \sqrt{R}} \int_0^R \sqrt{t} \cos^2 \frac{\vartheta(t) - \varphi}{2} dt. \end{aligned}$$

**83.** Das CARLEMAN-MILLOUXSche Problem und die oben gegebene Lösungsmethode lassen sich in verschiedener Richtung verallgemeinern. Zu einer naheliegenden Erweiterung gelangt man, wenn die oben gemachte Annahme über den Rand des Gebietes  $G$  durch folgende etwas allgemeinere ersetzt wird:

*Es existiert eine Folge von Intervallen  $\Delta_\nu: r'_\nu - r_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ;  $0 \leq r_\nu < r'_\nu < r_{\nu+1} \leq R$ ), so daß jeder Kreis  $|z| = r$  für  $r_\nu \leq r \leq r'_\nu$  mindestens einen Rand- oder äußeren Punkt des Gebietes  $G$  enthält.*

Es gilt dann der

**Satz 1.** *Falls die Funktion  $u(z)$  in dem oben definierten Gebiet  $G$  den Voraussetzungen 1 und 2, S. 96 genügt, so ist in jedem inneren Punkt  $z$  ( $|z| < R$ ) des Gebietes*

$$u(z) \geq \omega(-z), \tag{57}$$

wo  $\omega(z)$  das harmonische Maß desjenigen Teilgebietes  $G_\Delta$  des Kreises  $|z| < R$  bezeichnet, das entsteht, falls dieser Kreis längs der Strecken  $\Delta_\nu$  der positiven reellen Achse aufgeschlitzt wird.

Gleichheit kommt in (57) dann und nur dann in Betracht, wenn  $G$  aus diesem Schlitzgebiet durch eine Drehung um den Winkel  $\varphi$  hervorgeht, und zwar dann für alle Werte  $z$  des Radius  $(0, -Re^{i\varphi})$ .

Der Beweis wird genau in derselben Weise wie oben erbracht unter Anwendung der aus (54) fließenden Darstellung

$$\omega(z, \Delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} g(\zeta, z) d\bar{\omega}(\zeta, \Delta)$$

für das harmonische Maß der Schlitze; hier bedeutet  $g$  die GREENSche Funktion des Kreises  $|z| < R$  und  $\bar{\omega}$  die zu  $\omega$  konjugierte harmonische Funktion; die Integration ist über die Menge  $\Delta$  in positiver Richtung zu führen ( $d\bar{\omega} \geq 0$ ).

84. Die oben angestellten Betrachtungen legen folgende, von BEURLING [I] gelöste Frage nahe:

*Wie sollen die Intervalle  $\Delta$  bei gegebener Gesamtlänge  $m$  ( $0 < m < R$ ) auf dem Radius  $(0, R)$  gelegen sein, damit das harmonische Maß  $\omega(0, \Delta)$  möglichst klein ausfällt?*

Es ist fast einleuchtend, daß diese Extremallage dann vorliegt, wenn die Strecken  $\Delta$  möglichst weit vom Nullpunkt liegen und somit ein einziges Intervall  $(R - m, R)$  bilden. Es soll dies jetzt streng gezeigt werden.

Für den Beweis empfiehlt es sich, neben dem gewöhnlichen Maß

$$m = \int_{\Delta} dr = \sum (r'_v - r_v)$$

der Intervalle  $\Delta$ , deren logarithmisches Maß

$$l = \int_{\Delta} d \log r = \log \frac{r'_1 \cdots r'_n}{r_1 \cdots r_n}$$

einzuführen. Es ist

$$r'_v - r_v = r'_v \left( 1 - e^{-\log \frac{r'_v}{r_v}} \right),$$

woraus zu ersehen ist, daß das logarithmische Maß eines Intervalls  $(r_v, r'_v)$  sich verkleinert, wenn das Intervall sich vom Nullpunkt entfernt. Die logarithmische Länge der Intervallfolge  $\Delta$  von der gegebenen Gesamtlänge  $m$  erreicht also ihr Minimum  $l_0$ , wenn  $\Delta$  mit der Strecke  $(R - m, R)$  zusammenfällt. Gemäß obiger Identität ist aber für diese besondere Lage

$$m = R(1 - e^{-l_0}),$$

und es gilt also zwischen dem gewöhnlichen und dem logarithmischen Maß einer Punktmenge  $\Delta$  der Strecke  $(0, R)$  allgemein die Beziehung

$$m \leq R(1 - e^{-l}), \tag{58}$$

wo Gleichheit nur im obenerwähnten speziellen Fall eintritt.

Nach dieser vorbereitenden Bemerkung nehmen wir vorerst an, daß  $\Delta$  aus einem einzigen Intervall  $(r_1, r'_1)$  ( $0 < r_1 < r'_1 < R$ ) besteht. Wir

vergleichen das harmonische Maß  $\omega(z, \Delta)$  dieser Strecke mit dem harmonischen Maß  $\omega(z, \Delta_0)$  des Segments

$$\Delta_0: \left( R e^{-l} = \frac{r_1}{r'_1} R, R \right),$$

welches dieselbe logarithmische Länge  $l$  hat wie die Strecke  $\Delta$ . Zu diesem Zwecke beachte man, daß  $\omega\left(z \frac{r_1}{R}, \Delta\right)$  eine im Schlitzgebiet  $G_{\Delta_0}$  harmonische und nichtnegative Funktion ist, die auf  $\Delta_0$  den Wert 1 annimmt. Die Randwerte von

$$\omega\left(z \frac{r'_1}{R}, \Delta\right) - \omega(z, \Delta_0)$$

sind somit nichtnegativ und man schließt also nach dem Maximumprinzip, daß diese Differenz in  $G_{\Delta_0}$  nichtnegativ sein muß und daß also speziell für  $z = 0$

$$\omega(0, \Delta) \geq \omega(0, \Delta_0), \tag{59}$$

wo Gleichheit dann und nur dann besteht, wenn  $\Delta = \Delta_0$  ist.

Falls  $\Delta$  aus mehreren Teilintervallen zusammengesetzt ist, so setze man folgendes Reduktionsverfahren an. Es ist

$$\omega(z, \Delta) = \omega_1(z) + \omega_2(z),$$

wo

$$\omega_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\zeta=r_1}^{r'_1} g(\zeta, z) d\bar{\omega}(\zeta, \Delta)$$

und  $\omega_2 = \omega(z, \Delta) - \omega_1(z)$  also in analoger Weise durch ein über die Gesamtheit der übrigen Strecken erstrecktes Integral definiert ist.

Der Ausdruck

$$v(z) = \omega_1\left(\frac{r'_1}{r_2} z\right) + \omega_2(z)$$

stellt eine in den außerhalb der Strecken

$$\Delta_1: \left(\frac{r_1 r_2}{r'_1}, r_2\right), (r_r, r'_r) \quad (r = 3, \dots, n)$$

gelegenen Punkten  $|z| < R$  harmonische, nichtnegative Funktion von  $z$  dar. Um ihre Randwerte zu untersuchen, bemerke man, daß die GREENSche Funktion  $g(t, r)$  ( $0 < r < t < R$ ) mit wachsendem  $r$  zunimmt und daß folglich für  $|z| = r$ ,  $\frac{r_1 r_2}{r'_1} < r < r_2$  gilt

$$\begin{aligned} v(r) &= \omega_1\left(\frac{r'_1 r}{r_2}\right) + \omega_2(r) > \omega_1\left(\frac{r'_1 r}{r_2}\right) + \omega_2\left(\frac{r'_1 r}{r_2}\right) \\ &= \omega\left(\frac{r'_1 r}{r_2}, \Delta\right) = 1. \end{aligned}$$

Andererseits ist, für  $0 < t < r < R$ ,  $g(t, r)$  eine mit wachsendem  $r$  abnehmende Funktion, und es gilt also für  $r_r < r < r'_r$  ( $r \geq 2$ )

$$v(r) > \omega_1(r) + \omega_2(r) = \omega(r, \Delta) = 1.$$

Aus obigem folgt, daß die im Gebiete  $G_{\Delta_1}$  harmonische Funktion  $v(z) - \omega(z, \Delta_1)$  nichtnegative Randwerte hat und man schließt also unter Anwendung des Minimumprinzips daß  $v(0) = \omega(0, \Delta) > \omega(0, \Delta_1)$ . Das harmonische Maß  $\omega(0, \Delta)$  wird also verkleinert, wenn man die  $n$ -Strecken  $\Delta$  durch die  $n-1$ -Strecken ersetzt, welche die gleiche logarithmische Länge  $l$  wie jene  $\Delta$  besitzen.

Wiederholt man nun den obigen Schluß  $(n-1)$ -mal, so kommt man auf den Fall eines einzigen Intervalls  $\Delta$  von der gegebenen logarithmischen Länge  $l$  zurück, und es läßt sich folgender Satz aussprechen:

*Wenn die gegebenen Strecken  $\Delta$  das logarithmische Gesamtmaß  $l$  haben, so ist*

$$\omega(0, \Delta) \geq \omega(0, \Delta_0), \tag{60}$$

wo  $\Delta_0$  das Intervall

$$(Re^{-l}, R)$$

$\Delta_0$ :

bezeichnet. Gleichheit kommt nur im Falle  $\Delta \equiv \Delta_0$  vor.

Unter Verwendung der Beziehung (58) folgt hieraus weiter, daß für eine Menge  $\Delta$  von gegebenem Maß ein analoges Ergebnis besteht:

*Falls die Intervalle  $\Delta$  die Gesamtlänge  $m$  ( $0 < m < R$ ) haben, so gilt*

$$\omega(0, \Delta) \geq \omega(0, \Delta_0), \tag{60'}$$

wo  $\Delta_0$  das Intervall  $(R-m, R)$  bezeichnet, und zwar gilt das Gleichheitszeichen nur für  $\Delta \equiv \Delta_0$ .

85. Die in den Formeln (60) und (60') stehende Größe  $\omega(0, \Delta_0)$ , wo  $\Delta_0$  das Intervall  $(\varrho, R)$  ( $\varrho = R - m = Re^{-l}$ ) der positiven reellen Achse bedeutet, ist leicht zu berechnen. Führt man nämlich die lineare Transformation

$$\frac{R^2(z + \varrho)}{R^2 + z\varrho} \tag{61}$$

aus, welche den Kreis  $|z| < R$  in sich überführt, so daß die Strecke  $(0, R)$  in  $(\varrho, R)$  übergeht und  $z = -\varrho$  dem Nullpunkt entspricht, so folgt wegen der Invarianz des harmonischen Maßes gegenüber konformen Abbildungen

$$\begin{aligned} \omega(0, \Delta_0) &= \omega(-\varrho) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{R - \varrho}{R + \varrho} \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{e^l - 1}{e^l + 1} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1 - \Theta}{1 + \Theta}, \end{aligned}$$

wo  $m = (1 - \Theta)R$  ( $0 \leq \Theta \leq 1$ ).

Die Beziehungen (60) und (60') lassen sich also in die Ungleichung

$$\omega(0, \Delta) \geq \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1 - \Theta}{1 + \Theta} \tag{62}$$

zusammenfassen. Diese gilt für jede Punktmenge  $\Delta$  der Strecke  $(0, R)$ , deren Gesamtmaß der Zahl  $(1 - \Theta)R$ , oder deren logarithmisches Gesamtmaß dem Wert  $l = \log \frac{1}{\Theta}$  gleich (oder größer) ist. Gleichheit tritt nur dann ein, wenn  $\Delta$  mit der Strecke  $(\Theta R, R)$  zusammenfällt.

Noch eine weitere Deutung dieses Ergebnisses ist der Beachtung wert. Es sei  $\bar{\Delta}$  die zu  $\Delta$  komplementäre Punktmenge der Strecke  $(0, R)$ ; ihre in bezug auf den Kreis  $|z| \leq R$  bestimmte *hyperbolische Länge*

$$R \int_{\bar{\Delta}} \frac{dr}{R^2 - r^2}$$

erreicht für ein gegebenes  $m = (1 - \Theta)R$  offenbar ihr Minimum  $\lambda$ , wenn  $\bar{\Delta}$  mit der Strecke  $(0, \Theta R)$  zusammenfällt, und zwar ist

$$\lambda = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \Theta}{1 - \Theta}.$$

Man schließt hieraus:

Die Beziehung (62) gilt, sobald diejenigen Punkte  $\Delta$  der Strecke  $(0, R)$ , welche von den Intervallen  $\bar{\Delta}$  nicht überdeckt werden, ein hyperbolisches Maß haben, das höchstens gleich

$$\lambda = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \Theta}{1 - \Theta} \quad (63)$$

ist. Gleichheit besteht nur, wenn  $\Delta$  mit der Strecke  $(0, \Theta R)$  identisch ist.

**86.** In Verbindung mit den Sätzen von Nr. 84 ergibt sich nun

**Satz 2.** *Es sei  $R > 0$ ,  $0 \leq \Theta \leq 1$  und  $G$  ein Gebiet, das den Nullpunkt  $z = 0$  enthält und außerdem einer der nachfolgenden drei Bedingungen genügt:*

a) *Das Maß derjenigen Werte  $r$  ( $0 \leq r \leq R$ ), für welche die Kreislinie  $|z| = r$  mindestens einen Rand- oder äußeren Punkt von  $G$  enthält, beträgt mindestens  $(1 - \Theta)R$ .*

b) *Das logarithmische Maß der unter a) erwähnten Wertmenge  $Q(r)$  ist nicht kleiner als  $\log \frac{1}{\Theta}$ .*

c) *Das in bezug auf den Kreis  $|z| \leq R$  gemessene nichteuklidische (hyperbolische) Maß der zu  $Q(r)$  komplementären Wertmenge  $P(r)$ , die also aus sämtlichen Werten  $r$  des Intervalls  $(0 \leq r < R)$  besteht, für welche die Kreislinie  $|z| = r$  vollständig innerhalb  $G$  verläuft, ist höchstens gleich  $\lambda = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \Theta}{1 - \Theta}$ .*

Sei ferner  $u(z)$  eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1.  $u(z)$  ist in  $G$  eindeutig, harmonisch und nichtnegativ.
2. In jedem innerhalb des Kreises  $|z| < R$  liegenden Randpunkt von  $G$  ist  $\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) \geq 1$ .

Unter diesen Bedingungen ist

$$u(0) \geq \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1 - \Theta}{1 + \Theta}, \quad (64)$$

wo Gleichheit dann und nur dann besteht, wenn  $G$  die längs der, durch die Ungleichung  $\Theta R \leq |z| \leq R$  definierten Strecke  $\Delta_q$  eines beliebigen Radius



$\arg z = \varphi$  aufgeschnittene Kreisfläche  $|z| < R$  ist, und  $u(z)$  das in bezug auf dieses Schlitzgebiet  $G_{\Delta\varphi}$  bestimmte harmonische Maß der Strecke  $\Delta_\varphi$  bedeutet.

Wir machen auf zwei unmittelbare Folgesätze dieses allgemeinen Satzes aufmerksam.

Die Voraussetzungen 1. und 2. sind speziell dann erfüllt, wenn man  $u(z)$  durch das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha, G)$  derjenigen Randpunkte  $\alpha$  von  $G$  ersetzt, welche in  $|z| < R$  fallen. Unter Beachtung der mehrmals erwähnten geometrischen Bedeutung des harmonischen Maßes bei konformer Abbildung des Bezugsgebietes auf ein Kreisgebiet, folgt der

**Satz 3.** Wenn  $G$  ein Gebiet von der im obigen Satz angegebenen Art und  $\alpha$  die Menge seiner im Kreise  $|z| < R$  liegenden Randpunkte ist, so wird bei konformer Abbildung von  $G$  (oder der universellen Überlagerungsfläche  $G^\infty$  von  $G$ , falls dieses Gebiet mehrfach zusammenhängend ist) auf den Einheitskreis  $|x| < 1$ , so daß der Nullpunkt invariant bleibt, die Menge  $\alpha$  in eine Punktmenge  $\alpha'$  der Peripherie  $|x| = 1$  übergehen, deren Gesamtlänge mindestens

$$4 \arcsin \frac{1 - \Theta}{1 + \Theta}$$

beträgt. Gleichheit kommt nur im Falle des Schlitzgebietes  $G_{\Delta\varphi}$  in Betracht.

Eine zweite unmittelbare Anwendung bezieht sich auf den Zweikonstantensatz:

**Satz 4.** Es sei  $w(z)$  eine analytische Funktion, welche in dem oben definierten Gebiet  $G$  nachstehenden Bedingungen genügt:

1.  $w(z)$  ist innerhalb  $G$  eindeutig und regulär.
2. In jedem inneren Punkt von  $G$  gilt  $|w(z)| < 1$  und in jedem, im Kreise  $|z| < R$  liegenden Randpunkt von  $G$ :  $\lim |w| \leq \delta$ , wo  $\delta$  eine vorgegebene Zahl des Intervalles  $(0 < \delta < 1)$  ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist für  $z = 0$

$$|w(0)| < \delta^{\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1 - \Theta}{1 + \Theta}},$$

wo Gleichheit nur für das Gebiet  $G_{\Delta\varphi}$  und für die Funktion

$$\log w(z) = \frac{2 \log \delta}{\pi i} \log \left( i \frac{\sqrt{R - z\Theta} - \sqrt{z - R\Theta}}{\sqrt{R - z\Theta} + \sqrt{z - R\Theta}} \right)$$

besteht, deren absoluter Betrag auf der Peripherie  $|z| = R$  konstant gleich 1, und auf der Strecke  $\Delta_\varphi$  konstant gleich  $\delta$  ist.

87. Für manche Anwendungen ist es wichtig auch für von Null verschiedene Punkte  $z$  des Kreises  $|z| < R$  ähnliche Abschätzungen zu kennen. Aus den obenstehenden Sätzen lassen sich derartige Beziehungen ableiten, indem man den Kreis  $|z| < R$  auf sich so abbildet, daß der gegebene Punkt  $z_0$  in den Nullpunkt übergeht. Am einfachsten geschieht

dies unter Anwendung der hyperbolischen Maßbestimmung, welche gegenüber solchen Transformationen invariant ist. Aus Satz 2 schließt man unmittelbar

**Satz 5.** *Das Gebiet  $G$ , welches den Punkt  $z_0$  ( $|z_0| < R$ ) als inneren Punkt enthält, möge folgende Eigenschaft besitzen: Das Maß derjenigen Werte  $\rho$ , für welche die hyperbolische Kreislinie  $K_\rho(z_0)$ , mit  $z_0$  als Mittelpunkt und mit einem Radius von der hyperbolischen Länge  $\rho$ , vollständig innerhalb  $G$  verläuft, ist höchstens gleich  $\lambda$ .*

*Wenn dann die Funktion den Bedingungen 1 und 2 des Satzes genügt, so wird*

$$u(z_0) \geq \frac{2}{\pi} \arcsin e^{-2\lambda}. \quad (65)$$

Gleichheit kommt nur dann vor, wenn  $G$  ein Schlitzgebiet ist, das so aus dem Kreis  $|z| < R$  entsteht, daß man diesen von einem beliebigen Punkt  $P_\lambda$  der Kreislinie  $K_\lambda(z_0)$  bis zur Peripherie  $|z| = R$  längs der Verlängerung der nichteuklidischen Strecke  $(0, P_\lambda)$  aufschneidet. Die entsprechende Extremalfunktion  $u$  ist das harmonische Maß dieses Schlitzes.

Im Falle eines einfach zusammenhängenden Gebietes  $G$  schließt man, daß die Ungleichung für jede Funktion  $u$  besteht, die in  $G$  den Bedingungen 1, 2 von Satz 2 genügt, wobei  $\lambda$  die kürzeste nichteuklidische Entfernung vom Punkte  $z_0$  bis zum Rande von  $G$  bezeichnet; als Bezugsgebiet der nichteuklidischen Maßbestimmung wird nach wie vor der beliebig vorgegebene Kreis  $|z| = R$  benutzt.

## V. Punktmengen vom harmonischen Maß Null.

### § 1. Definition der Punktmengen vom harmonischen Maß Null.

88. Auf die Möglichkeit einer Erweiterung der Theorie des harmonischen Maßes wurde bereits im II. Abschnitt hingewiesen. Eine unmittelbare Verallgemeinerung ergibt sich schon auf Grund der Betrachtungen jenes Abschnitts, wenn man, unter Festhaltung der Voraussetzung, daß das gegebene Bezugsgebiet von einer endlichen Anzahl Jordanbogen  $I$  berandet ist, die Punktmenge  $\alpha$  nicht als eine Menge von Randbogen, sondern als eine beliebige Punktmenge auf  $I$  annimmt. Bildet man wiederum die universelle Überlagerungsfläche  $G^\infty$  von  $G$  auf den Einheitskreis  $K$  konform ab, so wird der Menge  $\alpha$  eine gewisse Menge  $\alpha_x$  von Punkten der Peripherie  $|x| = 1$  eindeutig zugeordnet. Gesetzt diese Menge sei meßbar, so nennen wir  $\alpha$  in bezug auf  $G$  *harmonisch meßbar*. Unter Anwendung der Theorie des POISSONSchen Integrals in der erweiterten Form, in welcher sie von FATOU [I] auf Grund der LEBESGUESchen Maßtheorie entwickelt worden ist, und in welcher sie später

(Abschnitt VII) zur Sprache kommen wird, könnte man nun das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha, G)$  in genauer Analogie mit den Erklärungen des II. Abschnitts definieren. Es würde uns indes zu weit führen, hier auf derartige Erweiterungen einzugehen. Uns interessieren vor allem die Mengen vom harmonischen Maß Null; diese werden unter den obigen Voraussetzungen folgendermaßen erklärt:

*Die Punktmenge  $\alpha$  ist in bezug auf  $G$  vom harmonischen Maß Null, wenn die Bildpunktmenge  $\alpha_x$  das (lineare) Maß Null hat, d. h. falls  $\alpha_x$  durch eine Folge von Bogen von beliebig kleiner Gesamtlänge überdeckt werden kann.*

Nach dieser Definition kommt der Wert Null dem harmonischen Maße  $\omega(z, \alpha, G)$  einer Randpunktmenge  $\alpha$  unabhängig von der Wahl des Aufpunktes  $z$  zu.

89. Dagegen verbleibt das Verschwinden des harmonischen Maßes in dem Sinne relativ, daß es eine vom Bezugsgebiet  $G$  abhängige Eigenschaft ist. Man könnte Beispiele von Punkt mengen  $\alpha$  angeben, die relativ zu einem Gebiet harmonische Nullmengen sind, während sie relativ zu einem anderen Gebiet ein positives harmonisches Maß erhalten. Im folgenden werden wir einige besondere Punkt mengen sehr allgemeiner Natur in Betracht ziehen, für welche das Verschwinden des harmonischen Maßes so definiert werden kann, daß es ein *absolutes* Merkmal der Punktmenge wird.

Wir betrachten zunächst eine *abgeschlossene* Punktmenge  $\alpha$ , welche die Vollebene nicht umfaßt. Die zu  $\alpha$  komplementäre Punktmenge  $G$  besteht aus einem oder mehreren (jedenfalls abzählbar vielen) zusammenhängenden Gebieten; im letzteren Falle werden je zwei der verschiedenen Teilgebiete  $G$  durch ein zu  $\Gamma$  gehöriges Kontinuum getrennt.

Wir entfernen nun aus  $G$  einen kleinen, von einer Jordankurve  $\beta$  begrenzten oder gebildeten Bereich, und bezeichnen das übrig bleibende, an  $\beta$  grenzende, zusammenhängende Teilgebiet von  $G$  mit  $G_\beta$ . Als dann fassen wir eine Folge von Teilgebieten  $G^n$  von  $G$  ins Auge, welche von je endlich vielen Jordanbögen  $\alpha_n$  begrenzt werden, ineinander geschachtelt sind und  $G$  ausschöpfen:

$$G^1 \subset G^2 \subset \dots; G^n \rightarrow G,$$

so daß also jedes vorgegebene Teilbereich  $B$  von  $G$  in  $G^n$  enthalten ist, sobald  $n$  hinreichend groß ist.

Bezeichnet man durch  $G_\beta^n$  das von  $\alpha_n$  und der Hilfskurve  $\beta$  berandete zusammenhängende Teilgebiet von  $G^n$ , so können wir das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n)$  der Bogen  $\alpha_n$  in bezug auf  $G_\beta^n$  bilden. Nach dem Erweiterungsprinzip (IV, § 2) nimmt diese Größe, deren Werte im Intervall (0,1) liegen, mit wachsendem  $n$  monoton ab, und es existiert somit in jedem Punkte des Gebietes  $G_\beta$  der Grenzwert  $\lim \omega(z, \alpha_n, G_\beta^n)$ , den wir in natürlicher Weise als das *harmonische Maß der Punktmenge  $\alpha$  in bezug*

auf das Gebiet  $G_\beta$  definieren und demgemäß durch  $\omega(z, \alpha, G_\beta)$  bezeichnen. Wir werden zeigen, daß diese Grenzfunktion, die ihrer Definition nach in jedem inneren Punkte von  $G$  der Bedingung  $0 \leq \omega < 1$  genügt, daselbst *harmonisch* ist. Dies wird mit Hilfe des nachstehenden allgemeinen Satzes geschehen, der auch später zur Anwendung kommen wird und das Wesentliche eines klassischen, von HARNACK herrührenden Prinzips enthält.

**Hilfssatz.** *Es sei  $u(z)$  eine in einem zusammenhängenden Gebiet  $D$  eindeutige harmonische und nichtnegative Funktion. Wenn  $z_0$  ein innerer Punkt und  $B$  ein Teilbereich von  $D$  ist, so existiert eine nur von der Konfiguration  $(z_0, B, D)$  abhängige Zahl  $0 < k < 1$ , so daß die Beziehungen*

$$ku(z_0) \leq u(z) \leq \frac{1}{k} u(z_0) \quad (1)$$

in jedem Punkte des Bereiches  $B$  gelten.

Es bedeutet keine Einschränkung anzunehmen, daß der Bereich  $B$  zusammenhängend ist und den Punkt  $z_0$  enthält, denn dies kann stets durch geeignete Erweiterung von  $B$  erreicht werden. Die kürzeste Entfernung zwischen den Rändern von  $B$  und  $D$  ist eine positive Zahl  $d$ . Wir überdecken die Ebene mit einem Quadratnetz, das  $z_0$  als einen Eckpunkt hat und dessen Seitenlänge  $r < \frac{d}{4}$  genommen wird. Diejenigen Quadrate, die mindestens einen inneren oder Randpunkt mit  $B$  gemeinsam haben, bilden eine zusammenhängende, den Bereich  $B$  überdeckende Polygonfläche  $P$ . Jeder Randpunkt von  $P$  hat von mindestens einem Punkt des Bereiches  $B$  einen Abstand  $< r\sqrt{2} < 2r$ . Also liegt  $P$  vollständig in  $D$  und hat von der Berandung desselben eine kürzeste Entfernung  $> d - 2r > 2r$ .

Nunmehr fassen wir die auf  $P$  gelegenen Eckpunkte  $z_0, z_1, \dots, z_m$  ins Auge und überdecken das Polygon  $P$ , und somit auch  $B$ , durch die  $m+1$  Kreise  $|z - z_\nu| \leq 2r$  ( $\nu = 0, 1, \dots, m$ ), welche andererseits sämtlich innerhalb  $D$  liegen. Mittels des POISSONSchen Integrals erhalten wir

$$u(z_0 + te^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + 2re^{i\theta}) \frac{4r^2 - t^2}{4r^2 + t^2 - 4rt \cos(\theta - \varphi)} d\theta$$

und es wird, da der Kern des Integrals für  $t \leq r$  zwischen den Grenzen  $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$  variiert und da ferner

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + 2re^{i\theta}) d\theta = u(z_0), \quad \frac{u(z_0)}{3} \leq u(z_0 + te^{i\varphi}) \leq 3u(z_0).$$

Diese Beziehung besteht somit insbesondere in den zu  $z_0$  benachbarten Eckpunkten  $z_\nu$ . Durch schrittweise Wiederholung dieses Schlusses in den verschiedenen Überdeckungskreisen gelangen wir zu dem Ergebnis,

daß die behauptete Relation (1) sicher dann im ganzen Bereich  $B$  gilt, wenn die Konstante  $k$  gleich  $3^{-m}$  gesetzt wird.

90. Wir gehen nun zu der monoton abnehmenden Folge  $\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n)$  zurück und fixieren einen beliebigen Punkt  $z_0$  und einen Teilbereich  $B$  von  $G_\beta$ . Sobald  $n$  eine gewisse Schranke überschritten hat, werden  $z_0$  und  $B$  in  $G_\beta^n$  enthalten sein. Da nun der Grenzwert

$$\omega(z_0, \alpha, G_\beta) = \lim \omega(z_0, \alpha_n, G_\beta^n)$$

existiert, so wird für  $\varepsilon > 0$  und  $z = z_0$  die Differenz

$$-u_{m,n}(z) = \omega(z, \alpha_m, G_\beta^m) - \omega(z, \alpha_n, G_\beta^n),$$

welche für  $m > n$  eine in  $B$  nichtnegative harmonische Funktion darstellt, kleiner als  $\varepsilon$  sein, sobald  $n$  hinreichend groß gewählt wird. Für dieselben Werte  $n$  wird dann in einem beliebigen Teilbereich  $B_0$  von  $B$ ,

$$u_{m,n}(z) < \frac{1}{k} \varepsilon$$

sein, wo  $k$  die durch die Konfiguration  $(z_0, B_0, B)$  bestimmte, im Hilfsatz erwähnte Konstante ist. Hiermit ist gezeigt worden, daß die Konvergenz der Folge  $\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n)$  in  $B_0$  gleichmäßig und folglich die Grenzfunktion  $\omega(z, \alpha, G_\beta)$  in  $G_\beta$  harmonisch ist.

Wichtig ist zu bemerken, daß der Ausdruck  $\omega(z, \alpha, G_\beta)$ , den wir der Punktmenge  $\alpha$  als das harmonische Maß zugeordnet haben, unabhängig von der Wahl der Folge  $G_\beta^n$  ist. Ist nämlich  $G_\beta'^n$  eine zweite Näherungsfolge, welche das Gebiet  $G_\beta$  ebenfalls ausschöpft, so können wir für ein gegebenes  $m$  eine so große Zahl  $n$  finden, daß das Näherungsgebiet  $G_\beta^n$  das Gebiet  $G_\beta'^m$  als Teilgebiet enthält, und es ist dann gemäß dem Erweiterungsprinzip

$$\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n) < \omega(z, \alpha'_m, G_\beta'^m)$$

und also die Grenzfunktion der linksstehenden Folge nicht größer als der Grenzwert der rechten Seite. Eine Ungleichung in entgegengesetzter Richtung findet man aber in genau derselben Weise, woraus die Identität der Grenzfunktionen folgt.

91. *Bemerkung.* Die Frage liegt nahe, ob die Konstruktion des harmonischen Maßes  $\omega(z, \alpha, G_\beta)$ , unter Vermeidung des obigen Näherungsprozesses, nicht direkter mittels einer Methode möglich wäre, welche dem bei der Herstellung der harmonischen Maße einer Jordankurve benutzten Verfahren ähnlich ist. Dies ist tatsächlich der Fall, erfordert aber allgemeinere Hilfssätze über die konforme Abbildung von Überlagerungsflächen als die in den Abschnitten I—IV angewandten, weshalb wir oben einen elementarerem Weg eingeschlagen haben.

Es lohnt sich indes, auch jenes direkte Verfahren mit einigen Worten anzudeuten. Zum Gebiet  $G_\beta$  läßt sich die einfach zusammenhängende universelle Überlagerungsfläche  $G_\beta^\infty$  konstruieren und diese kann mittels

einer linear polymorphen Funktion  $x = x(z)$  auf den Einheitskreis  $|x| < 1$  abgebildet werden. Der Jordankurve  $\beta$  wird eine abzählbare Menge von punktfremden Segmenten  $\beta'_r$  der Peripherie  $|x| = 1$  entsprechen. Setzt man dann

$$\omega(x, \beta') = \sum \omega(x, \beta'_r),$$

wo  $\omega(x, \beta'_r)$  das harmonische Maß des Bogens  $\beta'_r$  in bezug auf den Einheitskreis ist, so stellt  $\omega$  eine harmonische Funktion von  $x$  dar, welche auf den Bogen  $\beta'_r$  gleich 1 wird und, wie man mittels des sog. FATOUSCHEN Satzes (VII, § 3) leicht beweisen könnte, auf der komplementären Randpunktmenge  $\alpha'$  fast überall, d. h. höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge, verschwindet. Es liegt infolgedessen nahe  $\omega(x, \alpha') = 1 - \omega(x, \beta')$  als das harmonische Maß von  $\alpha'$  zu definieren. Führt man nun  $x = x(z)$  ein, so läßt es sich beweisen, daß die Funktion  $\omega(x(z), \alpha')$  mit dem oben definierten Maß  $\omega(z, \alpha, G_\beta)$  übereinstimmt.

**92.** Was nun die Eigenschaften des harmonischen Maßes  $\omega(z, \alpha, G_\beta)$  betrifft, so bemerken wir zunächst, daß  $\omega$  auf der Hilfskurve  $\beta$  verschwinden muß. Dies folgt in der Tat unmittelbar daraus, daß die Näherungsfunktion  $\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n)$  dieselbe Eigenschaft besitzt und für  $n \rightarrow \infty$  monoton abnimmt.

Über das Verhalten von  $\omega(z, \alpha, G_\beta)$  auf der gegebenen Punktmenge  $\alpha$  können dagegen keine sicheren Schlüsse gezogen werden. Die Näherungsfunktionen nehmen auf den Rändern  $\alpha_n$  allerdings den Wert 1 an, da sie aber monoton abnehmen, so darf man nicht erwarten, daß die Grenzfunktion auf  $\alpha$  stetig und gleich 1 sei. Es kann sogar der extreme Fall eintreten, daß  $\omega$  identisch verschwindet. Dies trifft z. B. dann zu, wenn  $\alpha$  aus *einem* Punkt, z. B. aus  $z = 0$  besteht. Nimmt man dann als Hilfskurve z. B. den Kreis  $|z| = 1$  und als Näherungsgebiet den Kreisring  $r < |z| < 1$ , so wird die entsprechende Näherungsfunktion gleich dem harmonischen Maß  $\log |z| : \log r$  des Kreises  $|z| = r$  in bezug auf den Kreisring und strebt für  $r \rightarrow 0$  gegen Null.

Wenn dagegen  $\omega$  nicht identisch verschwindet, so hat  $\lim \omega$  auf  $\alpha$  eine *positive* untere Schranke. Umgibt man nämlich  $\alpha$  durch eine in  $G_\beta$  verlaufende geschlossene Kurve  $\beta_0$ , so hat  $\omega$  auf  $\beta_0$  ein positives Minimum  $\Theta (< 1)$ . Sei nun  $z_0$  ein beliebiger Punkt desjenigen Teilgebietes  $G_0$  von  $G_\beta$ , welches von  $\alpha$  und  $\beta_0$  begrenzt wird. Wir nehmen  $n$  so groß, daß sowohl  $\beta_0$  wie  $z_0$  in  $G_\beta^n$  enthalten sind. Da  $\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n)$  sicher größer als  $\omega(z, \alpha, G_\beta)$  ist, so gilt auf  $\beta_0$

$$\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n) > \Theta.$$

Auf  $\alpha_n$  nimmt dieses harmonische Maß den Wert 1 an und man schließt gemäß dem Minimumprinzip, daß die obige Ungleichung im ganzen Gebiet  $G_0$  gelten muß. Für  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich hieraus, daß in  $G_0$  auch  $\omega(z, \alpha, G_\beta) \geq \Theta$ , woraus die Behauptung folgt.

Es lohnt sich noch zu bemerken, daß das harmonische Maß von  $\alpha$  auch folgendermaßen definiert werden kann:

$\omega(z, \alpha, G_\beta)$  ist gleich der oberen Grenze derjenigen in  $G_\beta$  harmonischen Funktionen  $v(z)$ , welche auf  $\beta$  verschwinden und innerhalb  $G_\beta$  kleiner als 1 sind.

Da  $\omega$  selber zu der Klasse ( $v$ ) gehört, so genügt es zu zeigen, daß in  $G_\beta$

$$\omega(z, \alpha, G_\beta) - v(z) \geq 0,$$

wenn  $v$  eine beliebige Funktion der betrachteten Klasse bezeichnet. In der Tat gilt im Nährungsgebiet  $G_\beta^n$ , als eine unmittelbare Folgerung des Minimumprinzips,  $\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n) - v(z) \geq 0$ , und die Behauptung folgt nun durch den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$ .

**93.** Der obenerwähnte besondere Fall, wo die Grenzfunktion  $\omega(z, \alpha, G_\beta)$  *identisch verschwindet*, wird in der Folge unser Interesse in Anspruch nehmen. Wir werden hier diesen Fall etwas näher untersuchen.

Zunächst folgt aus dem Minimumprinzip daß, wenn das harmonische Maß  $\omega$  für einen Punkt verschwindet, dies für jeden Punkt zutreffen muß. Die Eigenschaft der gegebenen Punktmenge, eine „harmonische Nullmenge“ zu sein, ist also unabhängig von der Lage des Aufpunktes  $z$ . Das gleiche gilt nun aber auch in bezug auf die Hilfskurve  $\beta$ :

*Wenn für eine gewisse in  $G$  gelegene Hilfskurve  $\beta$*

$$\omega(z, \alpha, G_\beta) = 0,$$

*so gilt dasselbe für jede Hilfskurve  $\beta$  in  $G$ .*

*Beweis.* Es sei  $\omega(z, \alpha, G_\beta) = 0$  und  $\beta^*$  eine beliebige zweite in  $G$  liegende Hilfskurve; es gilt zu zeigen, daß auch  $\omega(z, \alpha, G_{\beta^*}) = 0$ . Wir wählen einen zusammenhängenden Teilbereich  $T_0$  von  $G$ , der sowohl  $\beta$  als  $\beta^*$  enthält und von einer Jordankurve  $\gamma_0$  begrenzt wird, und ziehen innerhalb  $T_0$  eine Jordankurve  $\gamma_1$ , welche  $\beta$  und  $\beta^*$  umgibt. Die Kurven  $\gamma_0$  und  $\beta^*$  begrenzen ein Teilgebiet  $G_0$  von  $G$ . Es sei

$$\Theta = \max \omega(z, \gamma_0, G_0) \text{ für } z \text{ auf } \gamma_1.$$

Dieses Maximum liegt im Intervall  $0 < \Theta < 1$ .

Nunmehr wählen wir eine beliebige Zahl  $\varepsilon > 0$  und können dann ein Nährungsgebiet  $G^n$  von  $G$  finden derart, daß die Ungleichung  $\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n) < \varepsilon$  besteht, wie immer der Punkt  $z$  im Bereich  $T_0$  auch gewählt wird. Speziell gilt dies also auf der Kurve  $\gamma_0$ .

Mit demselben Gebiet  $G^n$  bilden wir nun zusammen mit der Hilfskurve  $\beta^*$  das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha_n, G_{\beta^*}^n)$ ; die Maxima dieser Größe auf den Kurven  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  seien bzw.  $\lambda_0$  und  $\lambda_1$ ; diese liegen zwischen Null und Eins. Die Differenz

$$\omega(z, \alpha_n, G_{\beta^*}^n) - \omega(z, \alpha_n, G_\beta^n)$$

ist eine in dem von der Kurve  $\gamma_1$  und dem Bogen  $\alpha_n$  begrenzten gemeinsamen Teilgebiet  $G_1^n$  der Gebiete  $G_\beta^n$  und  $G_{\beta^*}^n$  harmonische Funktion,

welche auf  $\alpha_n$  verschwindet und auf  $\gamma_1$  kleiner als  $\lambda_1$  ausfällt. Nach dem Maximumprinzip ist diese Größe also kleiner als  $\lambda_1$  im ganzen Gebiet  $G_1^n$  und somit speziell auf  $\gamma_0$ , woraus folgt, daß  $\lambda_0 \leq \lambda_1 + \varepsilon$ .

Nunmehr bilden wir den Ausdruck

$$\omega(z, \alpha_n, G_{\beta^*}^n) - \lambda_0 \omega(z, \gamma_0, G_0),$$

der eine im Gebiete  $G_0$  harmonische Funktion definiert. Auf der Begrenzungskurve  $\beta^*$  verschwindet er und auf  $\gamma_0$  nimmt er nichtpositive Werte an. Gemäß dem Maximumprinzip ist diese Größe also auch innerhalb  $G_0$  nichtpositiv, und hieraus ergibt sich, wenn wir  $z$  mit demjenigen Punkt der Kurve  $\gamma_1$  zusammenfallen lassen, wo  $\omega(z, \alpha_n, G_{\beta^*}^n)$  sein Maximum  $\lambda_1$  erreicht,  $\lambda_1 \leq \lambda_0 \Theta$ . Verbindet man dies mit der oben gegebenen Relation  $\lambda_0 \leq \lambda_1 + \varepsilon$ , so folgt, daß

$$\lambda_1 \leq \frac{\Theta}{1 - \Theta} \varepsilon,$$

und es wird also a fortiori

$$\omega(z, \alpha_n, G_{\beta^*}^n) \leq \frac{\Theta}{1 - \Theta} \varepsilon$$

für jeden Punkt der Kurve  $\gamma_1$ . Da  $\varepsilon$  hier beliebig klein gewählt werden kann, so muß also die untere Grenze  $\lim \omega(z, \alpha, G_{\beta^*}) = 0$  im Gebiete  $G_0$  sein, wodurch die Behauptung  $\omega(z, \alpha, G_{\beta^*}) = 0$  nachgewiesen ist.

**94.** Der obige Satz zeigt, daß das Verschwinden des harmonischen Maßes eine von der Wahl der Hilfskurve  $\beta$  unabhängige Eigenschaft der Punktmenge  $\alpha$  ist, sofern  $\beta$  stets innerhalb eines und desselben zusammenhängenden Teils des Komplementes  $G$  von  $\alpha$  genommen wird. Daß dies tatsächlich keine Einschränkung bedeutet, wird aus folgendem Satz hervorgehen:

*Wenn die Menge  $\alpha$  ein Kontinuum enthält, so ist*

$$\omega(z, \alpha, G_\beta) > 0$$

*in jedem inneren Punkt  $z$  von  $G$ .*

Nimmt man nämlich einen beliebigen Punkt  $z_0$  von  $G$ , so wird voraussetzungsgemäß dasjenige zusammenhängende Teilgebiet  $G_0$  von  $G$ , welches jenen Punkt enthält, von einem gewissen Kontinuum  $K$  begrenzt. Durch eine eventuelle Quadratwurzeltransformation (vgl. Nr. 74) kann man dann erreichen, daß  $G_0$  äußere Punkte hat. Als Majorantgebiet sämtlicher Näherungsgebiete  $G_\beta^n$  kann man dann das von  $\beta$  und von einer außerhalb von  $G_0$  verlaufenden Jordankurve  $\alpha_0$  begrenzte Ringgebiet  $D_0$  einführen und es wird zufolge des Erweiterungsprinzips

$$\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n) > \omega(z, \alpha_0, D_0) > 0$$

wie immer  $z$  innerhalb  $G_0$  gewählt wird, woraus die Behauptung folgt.



Wenn also umgekehrt  $\omega(z, \alpha, G_\beta) = 0$

sein soll, so kann die Menge  $\alpha$  kein Kontinuum enthalten. Sie ist „punkthaft“ und ihre komplementäre Punktmenge  $G$  bildet ein *einziges zusammenhängendes Gebiet*.

Aus den obenstehenden Sätzen ist hervorgegangen, daß das Verschwinden bzw. Nichtverschwinden des harmonischen Maßes  $\omega(z, \alpha, G_\beta)$  sowohl von der Lage des Aufpunktes als von der Wahl der Hilfskurve unabhängig ist und also einzig und allein durch die Stärke der gegebenen abgeschlossenen Punktmenge  $\alpha$  bedingt ist. Wir sagen deswegen:

Falls eine abgeschlossene Punktmenge  $\alpha$  die Eigenschaft  $\omega(z, \alpha, G_\beta) = 0$  besitzt, so heißt sie eine Menge vom *absoluten harmonischen Maße Null*.

Als Kriterium für eine derartige Punktmenge ergibt sich aus den obigen Ausführungen:

*Die Menge  $\alpha$  ist vom harmonischen Maß Null im absoluten Sinne dann und nur dann, wenn für eine vorgegebene, im Komplementärgebiete  $G$  liegende Jordankurve  $\beta$  und für einen inneren Punkt  $z$  von  $G$*

$$\omega(z, \alpha, G_\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(z, \alpha_n, G_\beta^n) = 0.$$

Ferner gelten folgende Sätze:

*Jede abgeschlossene Teilmenge einer harmonischen Nullmenge hat wieder das harmonische Maß Null.*

Es folgt dies in der Tat unmittelbar aus dem obigen Kriterium.

*Die Vereinigungsmenge von zwei harmonischen Nullmengen ist wieder eine harmonische Nullmenge.*

Es seien nämlich  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zwei Nullmengen. Wenn  $\beta$  eine in dem zur Vereinigungsmenge  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$  komplementären Gebiet  $G$  gezogene Hilfskurve ist, so lassen sich zu einer beliebig kleinen Zahl  $\varepsilon > 0$  zwei Näherungsgebiete  $G'$  und  $G''$  und ein Punkt  $z$  finden, so daß

$$\omega(z, \alpha'_1, G'_\beta) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega(z, \alpha''_2, G''_\beta) < \frac{\varepsilon}{2},$$

wo  $\alpha'_1$  und  $\alpha''_2$  die Berandungen von  $G'$  und  $G''$  bezeichnen.

Nimmt man nun den Durchschnitt  $D$  von  $G'$  und  $G''$  als Näherungsgebiet  $D$  von  $G$ , und bezeichnet man dessen Rand mit  $\alpha'$  (die Näherungsgebiete können derart gewählt werden, daß nicht nur  $\alpha'_1$ ,  $\alpha''_2$  sondern auch  $\alpha'$  aus endlich vielen Jordanbögen bestehen), so wird der Ausdruck

$$\omega(z, \alpha', D_\beta) - \omega(z, \alpha'_1, G'_\beta) - \omega(z, \alpha''_2, G''_\beta)$$

auf  $\beta$  verschwinden und auf  $\alpha'$  jedenfalls nichtpositiv ausfallen, woraus dem Maximumprinzip gemäß folgt, daß im betrachteten Punkt  $z$

$$\omega(z, \alpha', D_\beta) < \varepsilon,$$

woraus die Behauptung folgt.

Im vorstehenden ist der Begriff des absoluten harmonischen Maßes für beliebige *abgeschlossene* Punktmengen erklärt worden. Durch die Einführung „innerer“ und „äußerer“ harmonischer Maße wäre es möglich, die entsprechenden Begriffe für beliebige Punktmengen zu erklären. Da jedoch derartige Erweiterungen von geringer sachlicher Bedeutung für unsere Zwecke sind, soll hierauf nicht näher eingegangen werden.

## § 2. Punktmengen von der Kapazität Null.

95. In diesem Abschnitt wollen wir die Punktmengen vom absoluten Maß Null vermittels eines anderen, von der obigen Methode verschiedenen potentialtheoretischen Verfahrens einführen.

Wir fassen ein von endlich vielen Jordanbogen  $\Gamma$  begrenztes Gebiet  $G$  ins Auge, das den unendlich fernen Punkt  $z = \infty$  enthält. Die zugehörige GREENSche Funktion  $g(z, \infty)$  hat in der Umgebung des Poles  $z = \infty$  eine Entwicklung

$$g(z, \infty) = \log |z| + u(z)$$

wo  $u(z)$  für  $z = \infty$  stetig ist und einen endlichen Wert

$$\gamma = u(\infty) \tag{2}$$

annimmt, der im folgenden eine wichtige Rolle spielen wird. Aus Gründen, die im nächstfolgenden Paragraphen näher auseinandergesetzt werden sollen, nennt man  $\gamma$  die ROBINSche Konstante von  $G$  und die Größe

$$C = e^{-\gamma}$$

die *Kapazität des zu  $G$  komplementären Bereiches  $G^1$* .

Falls  $G_1$  und  $G_2$  zwei Gebiete obiger Art sind und  $G_1$  als Teilgebiet in  $G_2$  enthalten ist, so gilt für die zugehörigen GREENSchen Funktionen  $g_1, g_2$ , für die ROBINSchen Konstanten  $\gamma_1, \gamma_2$  und für die Kapazitäten  $C_1, C_2$

$$g_1(z, \infty) \leq g_2(z, \infty), \quad \gamma_1 \leq \gamma_2, \quad C_1 \geq C_2.$$

Die Differenz  $g_2 - g_1$  ist nämlich in  $G_1$  regulär harmonisch und für  $z = \infty$  gleich  $\gamma_2 - \gamma_1$ . Da sie ferner auf der Berandung von  $G_1$  nichtnegative Randwerte annimmt, so ist sie überall in  $G_1$  nichtnegativ, und speziell folgt für  $z = \infty$  hieraus  $\gamma_2 - \gamma_1 \geq 0$ , und damit die Behauptung.

96. Die obige Erklärung der Kapazität eines Bereiches  $G$  setzt die Existenz der GREENSchen Funktion des Außengebietes  $G$  voraus, welche ja nur unter besonderen, die Berandung  $\Gamma$  betreffenden Regularitätsbedingungen sichergestellt ist. Durch einen Grenzübergang, der dem in § 1 durchgeführten vollkommen analog ist, läßt sich dieser Begriff für ganz beliebige abgeschlossene Punktmengen definieren.

<sup>1</sup> Vgl. hierzu SZEGÖ [1], PÓLYA und SZEGÖ [1], MYRBERG [1], DE LA VALLÉE-POUSSIN [1], FROSTMAN [1], [3].

Sei  $\alpha$  eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge und  $G$  dasjenige der zu  $\alpha$  komplementären, zusammenhängenden Gebiete, welches den unendlich fernen Punkt enthält. Wie in Nr. 90 betrachten wir dann eine Folge von ineinander geschachtelten Teilgebieten  $G_n$  von  $G$ , welche für  $n \rightarrow \infty$  dieses Gebiet ausschöpfen. Die zu  $G_n$  gehörende GREENSche Funktion sei

$$g_n(z, \infty) = \log |z| + u_n(z)$$

und

$$\gamma_n = u_n(\infty)$$

die entsprechende ROBINSche Konstante.

Läßt man nun  $n$  monoton wachsen, so nimmt  $g_n(z)$  monoton zu und es existiert somit für jeden Punkt von  $G$  der endliche oder unendliche Grenzwert

$$g(z, \infty) = \lim g_n(z, \infty).$$

Unter Anwendung des in Nr. 89 dargestellten Hilfssatzes beweist man unmittelbar, daß dieser Grenzübergang in jedem Teilbereich von  $G$  gleichmäßig vor sich geht.

Die Grenzfunktion  $g(z, \infty)$  ist entweder in jedem endlichen Punkt von  $G$  harmonisch oder es ist  $g(z, \infty) = \infty$ .

Wie in Nr. 90 sieht man ein, daß das Ergebnis dieses Grenzprozesses unabhängig von der Wahl der Näherungsfolge  $G_n$  ist.

Falls  $g$  endlich ist, so definieren wir sie als die GREENSche Funktion von  $G$ . Für  $z = \infty$  hat sie eine Entwicklung

$$g(z, \infty) = \log |z| + u(z),$$

wobei  $u(z) = \lim u_n(z)$  in  $G$  harmonisch ist; der Grenzwert

$$\gamma = \gamma(\alpha) = u(\infty) = \lim \gamma_n$$

wird als die ROBINSche Konstante von  $G$  erklärt und die Kapazität  $C(\alpha)$  der gegebenen Punktmenge  $\alpha$  wird gleich

$$C(\alpha) = e^{-\gamma}$$

gesetzt.

**97.** Die GREENSche Funktion  $g(z, \infty)$  ist offenbar in  $G$  nichtnegativ. Was ihr Verhalten auf der Berandung  $\alpha$  betrifft, so kann man nicht schließen, daß sie hier überall verschwindet. Es können im Gegenteil Fälle eintreten, wo sie in gewissen Punkten  $\alpha$  positive Werte annimmt; dies ist z. B. immer in einem isolierten Punkt von  $\alpha$  der Fall; eine solche Singularität ist nämlich hebbar: dort ist also  $g(z)$  harmonisch und gemäß dem Minimumprinzip positiv.

Jedenfalls ist aber  $g(z)$  in der Umgebung von  $\alpha$  nach oben beschränkt. Ist nämlich  $|z| = \rho$  ein Kreis, der die Menge  $\alpha$  umfaßt, so ist gemäß dem Maximumprinzip für jeden Punkt  $z$  von  $G_n$ , der in  $|z| \leq \rho$  liegt,  $g_n(z, \infty) \leq M_n$ , wo  $M_n$  das Maximum von  $g_n$  auf  $|z| = \rho$  bezeichnet. Für

$n \rightarrow \infty$  strebt die monoton wachsende Zahlenfolge  $M_n$  einem endlichen Grenzwert  $M$  zu und es gilt also, für die erwähnten Werte  $z$ ,  $g_n \leq M$ , also auch  $g = \lim g_n \leq M$ , was zu beweisen war.

Genau wie in Nr. 92 kann man weiter beweisen, daß sich  $g(z, \infty)$  durch nachstehende Minimumeigenschaft auszeichnet:  $g$  ist in jedem Punkt  $z$  von  $G$  gleich der unteren Grenze derjenigen harmonischen Funktionen  $v(z)$ , welche in jedem endlichen Punkt von  $G$  harmonisch und positiv sind und in  $z = \infty$  eine Entwicklung

$$v = \log |z| + v_\infty(z)$$

haben, wo  $v_\infty(z)$  für  $z = \infty$  harmonisch ist.

Die Kapazität  $C(\alpha)$  ist nach obigem die untere Grenze der Kapazitäten sämtlicher abgeschlossenen Mengen, welche  $\alpha$  als Teilmenge enthalten.

98. Falls  $G$  keine endliche GREENSche Funktion besitzt, so gilt

$$u_n(z) = g_n(z, \infty) - \log |z| \rightarrow \infty,$$

und zwar gleichmäßig in jedem Teilbereich von  $G$ . Speziell wird also

$$\gamma_n = u_n(\infty) \rightarrow \infty$$

sein. Die ROBINSche Konstante  $\gamma$  von  $G$  wird dann gleich  $+\infty$  und die Kapazität  $e^{-\gamma}$  von  $G$  verschwindet.

Ein beliebiges Gebiet läßt sich immer durch eine Polygonfolge  $P_n$  ausschöpfen z. B. so, daß  $P_n$  als die Vereinigungsmenge der in  $G_n$  liegenden Quadrate eines Quadratnetzes von der Seitenlänge  $2^{-n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) definiert wird. Hieraus ergibt sich folgendes wichtige Kriterium:

*Damit eine abgeschlossene Punktmenge  $\alpha$  von der Kapazität Null sei, ist notwendig und hinreichend, daß sich die Menge für jedes  $\varepsilon > 0$  durch endlich viele Polygonflächen überdecken läßt, deren Gesamtkapazität  $< \varepsilon$  ist.*

99. Die Mengen von verschwindender Kapazität sind für uns von besonderem Interesse. Es besteht nämlich der beachtenswerte Zusammenhang, daß eine Menge vom absoluten harmonischen Nullmaß stets von der Kapazität Null ist und umgekehrt. Dieser wichtige Satz könnte schon hier bewiesen werden; da indes der Nachweis sich einfacher gestaltet unter Anwendung einer Integraldarstellung der GREENSchen Funktion, die uns auch späterhin nützlich sein wird, wollen wir zunächst jene Integralformel herleiten.

Sei  $g(\zeta, z)$  die GREENSche Funktion eines Gebietes  $G$  der  $\zeta$ -Ebene, das von endlich vielen Jordanbogen  $\Gamma$  berandet ist und den Punkt  $\zeta = \infty$  als inneren Punkt enthält. Die in bezug auf die Veränderliche  $\zeta$  konjugierte harmonische Funktion sei  $-h(\zeta, z)$ .

Wenn der Punkt  $z \neq \infty$  in  $G$  liegt, so ist der Ausdruck  $\log |\zeta - z|$  eine in  $G$  harmonische Funktion von  $\zeta$ , mit Ausnahme der Stellen  $\zeta = z$  und  $\zeta = \infty$ , wo er negativ bzw. positiv logarithmisch unendlich wird.

Also ist die Summe

$$u(\zeta, z) \equiv \log |\zeta - z| + g(\zeta, z) - g(\zeta, \infty) \quad (3)$$

überall in  $G$  harmonisch, und es ergibt sich folglich, unter Anwendung der GREENSchen Formel,

$$u(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\zeta^* - z| dh(\zeta^*, \zeta), \quad (4)$$

wo  $\zeta^*$  den Rand  $\Gamma$  von  $G$  im positiven Sinn durchläuft.

Besonders interessant wird diese Formel für  $\zeta = \infty$ . Die GREENSche Funktion  $g(\zeta, \infty)$  hat in der Umgebung des Poles  $\zeta = \infty$  eine Entwicklung der Form

$$g(\zeta, \infty) = \log |\zeta| + \gamma + \varepsilon \left( \frac{1}{\zeta} \right),$$

wo  $\gamma$  die ROBINSche Konstante des Gebietes  $G$  ist und  $\varepsilon \rightarrow 0$  für  $\zeta \rightarrow \infty$ . Setzt man dies in den Ausdruck  $u$  ein, so wird für  $\zeta \rightarrow \infty$

$$u(\infty, z) = g(\infty, z) - \gamma,$$

und es folgt aus (4), wenn man statt  $\zeta^*$  einfacher  $\zeta$  schreibt und die Symmetriebeziehung  $g(\infty, z) = g(z, \infty)$  beachtet,

$$g(z, \infty) - \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\zeta - z| dh(\zeta, \infty). \quad (5)$$

Liegt der Punkt  $z$  außerhalb  $G$ , so kann das Glied  $g(\zeta, z)$  in dem Ausdruck (3) gestrichen werden, ohne daß  $u(\zeta, z)$  aufhört, eine in  $G$  harmonische Funktion von  $\zeta$  zu sein. Die Anwendung der GREENSchen Formel führt uns dann, statt zu (5), zu der einfacheren Beziehung

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log \left| \frac{1}{\zeta - z} \right| dh(\zeta, \infty). \quad (5')$$

Falls der Parameterpunkt  $z$  außerhalb  $G$  variiert, so behält also der rechtsstehende Mittelwert einen konstanten Wert, der gleich der ROBINSchen Konstante von  $G$  ist.

Falls schließlich  $z$  auf den Rand  $\Gamma$  fällt, so stimmen die linken Seiten der Formeln (5) und (5') miteinander überein. Um zu zeigen, daß die Beziehung (5') auch dann gilt, braucht man nur nachzuweisen, daß das rechtsstehende Integral eine stetige Funktion von  $z$  ist. Wir wollen hier auf diese Frage, die in diesem Zusammenhang von unwesentlicher Bedeutung ist und die bei Anwendung der in IV. Abschnitt behandelten Hilfsmittel leicht erledigt werden könnte, nicht näher eingehen.

**100.** Aus (5) folgt eine einfache, wichtige Ungleichung, indem man für einen gegebenen Punkt  $z$  von  $G$  den Integranden durch seinen kleinsten bzw. größten Wert ersetzt.

*Es gilt*

$$\log d_1(z) \leq g(z, \infty) - \gamma \leq \log d_2(z) \quad (6)$$

wo  $d_1, d_2$  den kleinsten bzw. größten Abstand des Punktes  $z$  von dem Gebietsrand  $\Gamma$  bezeichnet.

Unter Anwendung dieser Beziehungen wollen wir jetzt den in Nr. 99 in Aussicht gestellten Beweis dafür erbringen, daß die Klasse der harmonischen Nullmengen mit der Klasse der Punktmengen von verschwindender Kapazität identisch ist.

Sei also  $\alpha$  eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge; durch eine Ähnlichkeitstransformation, die ohne Einfluß auf den zu untersuchenden Zusammenhang ist, verlegen wir  $\alpha$  in das Innere des Kreises  $|z| < 1$ . Mit  $G$  bezeichnen wir dasjenige von  $\alpha$  berandete, zusammenhängende Gebiet, welches den Punkt  $z = \infty$  enthält. Wir wählen eine Zahl  $\varrho > 1$  und ein den Punkt  $z = \infty$  enthaltendes Näherungsgebiet  $G'$  von  $G$ , welches von endlich vielen, innerhalb  $|z| < 1$  verlaufenden Jordanbögen  $\alpha'$  begrenzt wird.

Wir bezeichnen dann durch  $g'(z, \infty)$  die GREENSche Funktion von  $G'$  und durch  $\omega_\varrho(z, \alpha')$  das harmonische Maß von  $\alpha'$  in bezug auf das innerhalb  $|z| < \varrho$  liegende Teilgebiet  $G'_\varrho$  von  $G'$ .

Ist nun  $\alpha$  von positiver Kapazität und also die ROBINSche Konstante  $\gamma (> 0)$  endlich<sup>1</sup>, so wählen wir  $\varrho = 1 + e^{2\gamma}$  und bezeichnen mit  $M_r$  und  $m_r$  das Maximum und Minimum von  $g'(z, \infty)$  auf dem Kreis  $|z| = r$ . Die Differenz

$$g' - (1 - \omega_\varrho) m_\varrho$$

ist offenbar in  $G'_\varrho$  harmonisch und auf dem Rande nichtnegativ. Nach dem Minimumprinzip gilt also dasselbe auch innerhalb  $G'_\varrho$  und es wird folglich, wenn wir für  $z$  den Punkt  $z_1$  des Kreises  $|z| = 1$  nehmen, wo  $g' = m_1$  ist,

$$(1 - \omega_\varrho(z_1, \alpha')) m_\varrho \leq m_1.$$

Als Minimum der für  $|z| \geq 1$  harmonischen Funktion  $u(z) = g' - \log |z|$  auf  $|z| = 1$  ist  $m_1 \leq u(\infty) = \gamma' < \gamma$ , wo  $\gamma'$  die ROBINSche Konstante von  $G'$  ist. Ferner ist gemäß (6)  $m_\varrho \geq \log(\varrho - 1) + \gamma' = 2\gamma + \gamma' > 2\gamma$ . Also wird

$$1 - \omega_\varrho(z_1, \alpha') \leq \frac{1}{2},$$

und es gilt somit, für jedes Näherungsgebiet  $G'$ , daß das Maximum des harmonischen Maßes von  $\alpha'$  auf  $|z| = 1$  (in bezug auf  $G'_\varrho$ ) nicht kleiner als  $\frac{1}{2}$  ist. Dasselbe besteht folglich auch für den Grenzwert  $\omega(z, \alpha, G_\varrho)$ , dem jenes Maß zustrebt, falls man  $G'$  gegen  $G$  konvergieren läßt. Hieraus geht hervor, daß das harmonische Maß von  $\alpha$  positiv ist.

Wenn umgekehrt  $\alpha$  von der Kapazität Null und also  $\gamma = \lim \gamma' = \infty$  ist, so nehme man  $\varrho > 1$  beliebig an und findet, daß die Differenz

$$(1 - \omega_\varrho) M_\varrho - g'$$

<sup>1</sup> Da  $G$  und  $G'$  das Kreisäußere  $|z| \geq 1$  enthalten, welches die ROBINSche Konstante Null hat, so sind ihre ROBINSchen Konstanten positiv.

in  $G'_\varrho$  nichtnegativ ist. Setzt man hier für  $z$  den Punkt des Kreises  $|z|=1$  ein, wo  $g'$  sein Maximum  $>\gamma'$  erreicht, so wird, da nach (6)

$$M_\varrho \leq \log(\varrho + 1) + \gamma'$$

gilt,

$$\gamma' \leq (\log(\varrho + 1) + \gamma')(1 - \omega_\varrho) \leq \log(\varrho + 1) + \gamma'(1 - \omega_\varrho)$$

und somit

$$\min_{|z|=1} \omega_\varrho \leq \frac{\log(\varrho + 1)}{\gamma'}$$

Für  $\alpha' \rightarrow \alpha$  strebt  $\gamma'$  ins Unendliche und das Minimum des harmonischen Maßes  $\omega_\varrho$  auf  $|z|=1$  also gegen Null, woraus zu sehen ist, daß das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha, G_\varrho) = \lim \omega_\varrho$  identisch verschwindet.

*Eine abgeschlossene Punktmenge ist dann nur und dann vom absoluten harmonischen Maß Null, wenn sie die Kapazität Null hat.*

**101.** Daß die abgeschlossenen Punktmenge von harmonischen Maß Null identisch sind mit denjenigen der Kapazität Null, gilt nach dem oben Gesagten unter der Voraussetzung, daß die Punktmenge beschränkt sind.

Sofern diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, kann die gegebene Menge  $\alpha$  durch eine geeignete lineare Transformation  $S(z)$  in eine beschränkte Punktmenge übergeführt werden. Es soll dann  $\alpha$  als eine Menge von der Kapazität Null erklärt werden, falls  $\alpha'$  eine solche Menge ist. Ob diese Definition die Fallunterscheidung  $C(\alpha) \geq 0$  eindeutig festlegt, ist allerdings nicht unmittelbar einleuchtend; denn es muß die Möglichkeit berücksichtigt werden, daß das Verschwinden oder Nichtverschwinden der Kapazität  $C(\alpha')$  der transformierten Menge von der Wahl der benutzten linearen Transformation abhängig sein könnte.

Daß diese Möglichkeit tatsächlich ausgeschlossen ist, muß besonders bewiesen werden. Ein Nachweis könnte direkt mittels der in diesen Paragraphen eingeführten Begriffe gegeben werden. Am einfachsten folgt dies indes aus dem oben bewiesenen Äquivalenzsatz. Da nämlich das harmonische Maß eineindeutigen konformen Abbildungen gegenüber invariant verbleibt, so führt eine beliebige lineare Transformation stets eine harmonische Nullmenge in eine Menge über, die ebenfalls vom harmonischen Maß Null ist. Hieraus folgt unmittelbar, daß zwei beschränkte Mengen, die lineare Transformierte ein und derselben Menge  $\alpha$  sind, entweder beide von positiver oder beide von verschwindender Kapazität sind.

**102.** Eine weitere wichtige Folgerung aus dem obigen Äquivalenzsatz ist nach § 1, Nr. 94, daß die Kapazität einer abgeschlossenen Menge, die Vereinigungsmenge einer abzählbaren Anzahl von Mengen von der Kapazität Null ist, verschwindet.

Diese Eigenschaft läßt sich auch einfach direkt beweisen als eine Folgerung aus nachstehendem Hilfssatz, der an sich nicht ohne Interesse ist.

**Hilfssatz 1.** Falls  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  abgeschlossene, innerhalb des Kreises  $|z| < \frac{1}{2}$  gelegene Punktmengen sind, so gilt für die Vereinigungsmenge  $\alpha = \sum \alpha_v$ ,

$$\frac{1}{\gamma(\alpha)} \leq \sum \frac{1}{\gamma(\alpha_v)}.$$

Es genügt, diese Beziehung für den Fall aufzustellen, daß die Mengen  $\alpha_v$  von endlich vielen analytischen Bogen berandet sind; allgemeinere Punktmengen und die entsprechenden Kapazitäten lassen sich nämlich mittels solcher speziellen Mengen bzw. ihrer Kapazitäten beliebig genau approximieren.

Bezeichnet  $G_v$  das von  $\alpha_v$  begrenzte, den unendlich fernen Punkt enthaltende Gebiet, so wird

$$\gamma(\alpha_v) = \int_{\alpha_v} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu_v(\zeta)$$

für jeden Punkt  $z$  von  $\alpha_v$ , falls für  $2\pi\mu_v(\zeta)$  die in der Integraldarstellung (5') enthaltene Belegung  $h_v(\zeta, \infty)$  substituiert wird, wo  $-h_v$  die zur GREENschen Funktion  $g_v(\zeta, \infty)$  von  $G_v$  konjugierte harmonische Funktion ist.

Andererseits gilt, wie immer die nichtnegative Belegung  $\mu(\zeta)$  vom Gesamtbetrag 1 über die Vereinigungsmenge auch verteilt wird,

$$\gamma(\alpha) \geq \min_{z \text{ auf } \alpha} \left( \int_{\alpha} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu \right). \quad (7)$$

Denn die Summe aus dem rechtsstehenden Integral und der GREENschen Funktion  $g(z, \infty)$  von  $G$  ist in  $G$  harmonisch; für  $z = \infty$  ist ihr Wert gleich  $\gamma(\alpha)$  und auf der Berandung  $\alpha$  verschwindet  $g$ . Die Beziehung (7) folgt hieraus mit Hilfe des Minimumprinzips.

Nimmt man nun  $n$  Zahlen  $\delta_v$  des Intervalls  $0 \leq \delta_v \leq 1$ , so daß  $\sum \delta_v = 1$ , und setzt man  $\mu = \sum \delta_v \mu_v$ , so wird

$$\int_{\alpha} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu = \sum_{\alpha} \delta_v \int_{\alpha} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu_v$$

und weiter, da  $|z - \zeta| < 1$  und der Integrand also jedenfalls nichtnegativ ist,

$$\int_{\alpha} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu_v \geq \int_{\alpha_v} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu_v = \gamma(\alpha_v),$$

sobald  $z$  auf  $\alpha_v$  liegt.

Somit wird für  $z$  auf  $\alpha_v$

$$\min_{\alpha} \int \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu \geq \min_{\alpha_v} \left( \delta_v \int_{\alpha_v} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu_v \right) = \delta_v \gamma(\alpha_v),$$



woraus gemäß (7) ersichtlich wird, daß

$$\gamma(\alpha) \geq \min(\delta_\nu \gamma(\alpha_\nu)) \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Für

$$\delta_\nu = \frac{1}{\gamma(\alpha_\nu)} \frac{1}{\sum_1^n \frac{1}{\gamma(\alpha_\nu)}}$$

werden nun alle Zahlen  $\delta_\nu \gamma(\alpha_\nu)$  einander gleich, und man gelangt so zu der nachzuweisenden Beziehung.

Aus obigem folgert man leicht den

**Hilfssatz 2.** *Es sei  $\alpha_\nu$  eine Folge von abgeschlossenen, in  $|z| < \frac{1}{2}$  gelegenen Punktmenge. Dann gilt für jede abgeschlossene Teilmenge  $\alpha$  der Vereinigungsmenge  $\sum \alpha_\nu$*

$$\frac{1}{\gamma(\alpha)} \leq \sum_1^\infty \frac{1}{\gamma(\alpha_\nu)}. \tag{8}$$

Falls die rechtsstehende Reihe divergent ist, so ist die Behauptung trivial. Andernfalls nehme man eine beliebige positive Zahl  $\varepsilon < 1$  und überdecke jede Menge  $\alpha_\nu$  durch ein Gebiet  $A_\nu$ , dessen Berandung in  $|z| < \frac{1}{2}$  verläuft und aus endlich vielen analytischen Bogen  $\alpha'_\nu$  zusammengesetzt ist, so daß

$$\frac{1}{\gamma(\alpha'_\nu)} < \frac{1}{\gamma(\alpha_\nu)} + \frac{\varepsilon}{2^{\nu+1}}.$$

Da  $\alpha$  abgeschlossen ist, so gibt es unter den Bereichen  $A_\nu + \alpha'_\nu$  gewisse endlich viele,  $A_{\nu_i} + \alpha'_{\nu_i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), welche jene Menge  $\alpha$  bereits überdecken<sup>1</sup>. Ist dann  $A$  die Vereinigungsmenge dieser Bereiche, so wird nach Hilfssatz 1

$$\frac{1}{\gamma(\alpha)} \leq \frac{1}{\gamma(A)} \leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{\gamma(\alpha'_{\nu_i})} < \sum_1^\infty \frac{1}{\gamma(\alpha_\nu)} + \varepsilon$$

und die Behauptung ergibt sich für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Aus (8) folgt speziell, daß jede abgeschlossene Teilmenge  $\alpha$  der Vereinigungsmenge  $\sum \alpha_\nu$  von der Kapazität Null ist, falls sämtliche  $\alpha_\nu$  diese Eigenschaft besitzen. Dies gilt tatsächlich ohne die zusätzliche Voraussetzung, daß jene Mengen im Kreise  $|z| < \frac{1}{2}$  liegen. Zerlegt man sämtliche vorkommenden Mengen in zwei Teilmengen, entsprechend dem Kreisinnern  $|z| \leq r < \frac{1}{2}$  und dem Kreisäußern  $|z| \geq r$ , so kann das Kreisäußere durch eine lineare Transformation in das Innere abgebildet werden und so lassen sich auch in diesem Fall die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllen.

<sup>1</sup> HEINE-BORELScher Überdeckungssatz.

### § 3. GREENSCHE Funktion und logarithmisches Potential.

103. Auf einem beschränkten Bereich  $E$  der  $z$ -Ebene sei eine Massenbelegung mit der Flächendichte  $\rho(z)$  verteilt. Falls  $\rho$  stetig ist, so definiert das *logarithmische Potential*

$$u(z) = \int_E \log \frac{1}{|\xi - z|} d\mu, \quad (9)$$

wo  $d\mu = \rho(\xi) d\xi$  das vom Flächenelement  $d\xi$  getragene Massenelement bezeichnet, eine Funktion  $u(z)$ , welche nachstehende Eigenschaften besitzt:

1. Auf  $E$  genügt  $u$  der POISSONSchen Gleichung  $\Delta u = -2\pi\rho$ .
2. Außerhalb  $E$  ist  $u(z)$  regulär harmonisch, außer für  $z = \infty$ , wo sie logarithmisch unendlich wird:

$$u(z) = -\log |z| + \varepsilon \left( \frac{1}{z} \right) \quad (\varepsilon \rightarrow 0 \text{ für } z \rightarrow \infty).$$

Durch diese zwei Eigenschaften ist  $u$  eindeutig bestimmt.

104. Das logarithmische Potential  $u$  der Massenbelegung  $\mu$  läßt sich durch die Formel (9) auch unter allgemeineren Voraussetzungen über diese Belegung bilden. Es sei  $E$  eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge der Ebene und  $(e)$  eine Menge von Teilmengen derselben von folgender Art:

1. Wenn die endlich oder abzählbar unendlich vielen Mengen  $e_1, e_2, \dots$  zu  $(e)$  gehören, so gilt dasselbe für ihre Vereinigungsmenge  $\sum e_n$ .
2. Die in bezug auf  $E$  komplementäre Punktmenge  $\bar{e}$  von  $e$  gehört wieder zur Menge  $(e)$ .
3. Der Durchschnitt von einer Menge  $e$  mit einem beliebigen offenen oder abgeschlossenen Quadrat (oder Kreis) gehört zu  $(e)$ .

Jeder Menge  $e$  sei eine nichtnegative Zahl  $\mu(e)$  zugeordnet, so daß die Bedingung der Additivität erfüllt ist: Falls  $e_1, e_2, \dots$  punktfremde Teilmengen von  $(e)$  sind, so ist

$$\mu(e_1 + e_2 + \dots) = \mu(e_1) + \mu(e_2) + \dots \quad (10)$$

Es sei nun  $\varphi(z)$  eine auf  $E$  definierte, stetige und beschränkte Funktion der komplexen Variablen  $z$ . Das STIELTJESSche Integral

$$\int_E \varphi(\xi) d\mu(\xi) \quad (11)$$

wird in bekannter Weise als die Grenze einer Summe

$$\sum \varphi(\xi_n) \Delta\mu_n(\xi)$$

für  $n \rightarrow \infty$  erklärt, wo die Punkte  $\xi_n$  und die Massen  $\Delta\mu_n$  einer Einteilung der Ebene in punktfremde, quadratförmige Gebiete entsprechen, deren Seitenlänge für  $n \rightarrow \infty$  verschwindet; der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl dieser Quadratgebiete und der Punkte  $\xi_n$ .

Falls  $\varphi(\zeta)$  nicht stetig ist, so läßt sich das Integral im LEBESGUE-STIELTJESSchen Sinn definieren, sofern  $\varphi(\zeta)$  in bezug auf die Belegung  $\mu$  meßbar ist, d. h. sofern die Menge der Punkte  $E$ , wo  $\varphi < \lambda$  ist, für jedes  $\lambda$  zu der gegebenen Mengenklasse ( $e$ ) gehört. Schaltet man zwischen die obere Grenze  $M$  und die untere Grenze  $m$  von  $\varphi$  die Zahlen  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$  ein, so ergibt sich das Integral (11) als Grenzwert der Summe,

$$\sum_0^n \lambda_v \Delta_v \mu \quad (\lambda_0 = m, \lambda_n = M),$$

wo  $\Delta_v \mu$  die über der durch die Beziehungen  $\lambda_{v-1} \leq \varphi < \lambda_v$  definierten Punktmenge  $e_v$  verteilte Masse ist, indem man  $n$  ins Unendliche wachsen läßt, so daß die Differenzen  $\lambda_v - \lambda_{v-1}$  gleichzeitig gegen Null streben.

Wenn  $\varphi$  nicht beschränkt ist und z. B. eine unendliche obere Grenze hat, so nehme man eine endliche Zahl  $M$  und setze  $\varphi_M = \varphi$  oder  $M$ , je nachdem  $\varphi \leq M$  oder  $\varphi > M$  ist. Man erklärt dann das Integral (11) als den Grenzwert des entsprechenden Integrals von  $\varphi_M$ , indem man  $M$  über alle Grenzen wachsen läßt. Hierbei muß der Fall mitberücksichtigt werden, daß dieser Grenzwert  $+\infty$  ist.

**105.** Die oben erörterten Begriffe gestatten für eine Belegung  $\mu \geq 0$  der erklärten Art, das logarithmische Potential als das STIELTJES-Integral

$$u(z) = \int_E \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu(\zeta)$$

zu definieren. Man sieht unmittelbar ein, daß  $u(z)$  die charakteristische Eigenschaft 2 des logarithmischen Potentials besitzt. Dagegen kann von einer Erfüllung der Bedingung 1 auf  $E$  nicht mehr die Rede sein, denn hier ist  $u(z)$  selbst nicht ausnahmslos endlich oder stetig.

Jedenfalls ist aber  $u(z)$  auf  $E$  eine nach unten *halbstetige* Funktion; es ist also, falls  $m(r)$  die untere Grenze von  $u(z)$  im Kreise  $|z - a| \leq r$  bezeichnet,  $m(r) \rightarrow u(a)$  für  $r \rightarrow 0$ . Sei zunächst  $u(a)$  endlich; für ein gegebenes  $\varepsilon > 0$  existiert dann eine Zahl  $\varrho > 0$ , so daß das Teilintegral

$$u_\varrho(z) = \int_{|z-a| \geq \varrho} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu(\zeta)$$

für  $z = a$  größer als  $u(a) - \varepsilon$  ausfällt. In demselben Kreis ist  $u_\varrho(z)$  eine stetige Funktion von  $z$  und die untere Grenze dieser Funktion für  $z = a$  ist somit gleich  $u_\varrho(a) > u(a) - \varepsilon$ . Da schließlich  $u(z) \geq u_\varrho(z)$  für  $|z - a| < \varrho$ , sobald  $\varrho < \frac{1}{2}$  gewählt wird, so gilt jene Ungleichung a fortiori für die untere Grenze  $m(0) = \lim_{r \rightarrow 0} m(r)$  der Funktion  $u(z)$  im Punkte  $z = a$ .

Man hat also  $u(a) - \varepsilon < m(0) \leq u(a)$ , woraus für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Behauptung  $u(a) = m(0)$  folgt. — Im Fall  $u(a) = +\infty$  gestaltet sich der Beweis ganz analog.

**106.** Wir gehen nun zu den Voraussetzungen von § 2, Nr. 95 dieses Abschnitts zurück und betrachten also wieder ein von endlich vielen Jordanbogen  $I'$  begrenztes Gebiet  $G$  und die entsprechende GREENSche Funktion  $g(z, \infty) = \log |z| + \gamma + \varepsilon \left( \frac{1}{z} \right)$ , für welche wir die Formeln (5) und (5') hergeleitet haben;  $\gamma$  ist die ROBINSche Konstante von  $G$ . Faßt man  $\frac{h}{2\pi}$  als eine auf den Rand  $I'$  verteilte Belegung auf, so daß

$$\frac{1}{2\pi} (h(\zeta, \infty) - h(\zeta_0, \infty))$$

den Wert der Belegung eines Randbogens  $(\zeta_0, \zeta)$  angibt, den der Randpunkt  $(\zeta)$  bei einem positiven Umlauf auf  $I'$ , in der Richtung von  $\zeta_0$  nach  $\zeta$  durchläuft<sup>1</sup>, so hat also das entsprechende logarithmische Potential der positiven Einheitsbelegung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{I'} \log \left| \frac{1}{z - \zeta} \right| dh(\zeta, \infty) \quad (12)$$

in einem Punkt  $z$  von  $G$  den Wert  $-g(z, \infty) + \gamma$ , während es in dem zu  $G$  komplementären Bereich  $\bar{G}$  konstant gleich  $\gamma$  ist.

Es liegt nun nahe zu fragen, wie sich dieses besondere Potential zu anderen Potentialen verhält, welche beliebigen, über den komplementären Bereich  $\bar{G}$  verteilten Belegungen  $\mu$  vom Gesamtbetrage eins entsprechen. Vor allem interessiert uns hier die Frage, wie sich die extremen Werte dieser Potentiale auf dem Bereiche  $G$  zueinander verhalten.

**107.** Um Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir sogleich den allgemeinen Fall betrachten, wo  $G$  ein ganz beliebiges den unendlich fernen Punkt  $z = \infty$  enthaltendes Gebiet ist. Angenommen, daß  $G$  nicht die volle Ebene umfaßt, ist das Komplement von  $G$  eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge  $E$ .

Es sei nun  $\mu$  eine beliebige, nichtnegative Massenbelegung vom Gesamtbetrage 1, welche über  $E$  verteilt wird, und

$$u(z) = \int_E \log \left| \frac{1}{z - \zeta} \right| d\mu(\zeta)$$

das zugehörige Potential. Da  $u(z)$  nach unten halbstetig ist, so erreicht es auf der abgeschlossenen Menge  $E$  ein wohlbestimmtes Minimum  $m$ . Die obere Grenze von  $\bar{\lim} u(z)$  auf  $E$  sei  $M$  ( $m \leq M \leq \infty$ ).

Der Fall  $m = \infty$  ist ausgeschlossen, sofern die Punktmenge  $E$  von positiver Kapazität ist. Nach § 2 hat  $G$  nämlich dann eine endliche GREENSche Funktion

$$g(z, \infty) = \log |z| + \gamma + \varepsilon \left( \frac{1}{z} \right),$$

<sup>1</sup> Die Belegung von  $(\zeta_0, \zeta)$  ist offenbar gleich dem Wert des harmonischen Maßes dieses Bogens in bezug auf  $G$ , gemessen im Punkte  $z = \infty$ .

wo  $\gamma$  die ROBINSche Konstante ist. Man betrachte nun den Ausdruck

$$v(z) = g(z, \infty) + u(z),$$

der eine im ganzen Gebiet  $G$  harmonische Funktion ist. In jedem Randpunkt  $\zeta$  gilt  $\liminf g \geq 0$ ,  $\lim u \geq m$ , also auch  $\liminf v \geq m$ , und es folgt aus dem Minimumprinzip, daß  $v \geq m$  für jeden Punkt von  $G$  gilt. Für  $z = \infty$  ergibt sich hieraus speziell, daß  $v(\infty) = \gamma \geq m$ .

Ist nun  $G$  speziell von einer endlichen Anzahl von Jordanbogen berandet, so ist auf jenen Bogen  $g = 0$ , und die Anwendung des Maximumprinzips auf die Summe  $v(z)$  ergibt die Beziehung  $v(\infty) = \gamma \leq M$ .

Dies gilt aber auch in dem allgemeinsten Fall, wo  $E$  eine beliebige abgeschlossene, beschränkte Punktmenge ist. Im Außengebiet  $G$ , welches den Punkt  $z = \infty$  enthält, bestimme man ein Näherungsgebiet  $G_1$ , dessen Berandung die obige Regularitätsbedingung erfüllt; dann ist die entsprechende ROBINSche Konstante  $\gamma_1$  höchstens gleich der oberen Grenze  $M_1 (\geq M)$  des Potentials  $u(z)$  auf dem zu  $G_1$  komplementären Bereich  $\bar{G}_1$ . Da nun  $u$  eine für  $z \neq \infty$  in  $G$  reguläre, für  $z = \infty$  negativ unendliche harmonische Funktion ist, so ist nach dem Prinzip vom Maximum  $u < M$  in jedem Punkt von  $G$ , und somit  $M_1 \leq M$ . Folglich wird  $\gamma_1 \leq M$  und, da  $\gamma_1 \rightarrow \gamma$  für  $G_1 \rightarrow G$ , auch  $\gamma \leq M$ , was zu beweisen war.

Wenn  $u(z)$  das logarithmische Potential einer beliebigen über der abgeschlossenen beschränkten Punktmenge  $E$  ausgebreiteten nichtnegativen Einheitsbelegung ist, mit dem Minimum  $m$  und mit der oberen Grenze  $M$  auf  $E$ , so gilt

$$m \leq \gamma \leq M, \quad (13)$$

wo  $\gamma$  die ROBINSche Konstante von  $E$  ist.

108. Das sog. Problem von ROBIN<sup>1</sup> verlangt die Bestimmung einer nichtnegativen Einheitsbelegung  $\mu$  einer gegebenen Punktmenge  $E$ , so daß das entsprechende Potential in jedem Punkt von  $E$  einen konstanten Wert annimmt. Aus dem vorstehenden Satz ist zu ersehen, daß dieser Wert kein anderer als die ROBINSche Konstante  $\gamma$  sein kann. Ferner folgt aus den Ausführungen in § 2, daß das ROBINSche Problem sicher dann lösbar ist, wenn  $E$  von endlich vielen Jordanbogen begrenzt (oder zusammengesetzt) ist. In der Tat erklärt die dem Potential  $-g(z, \infty) + \gamma$  entsprechende Belegung  $\mu$  ( $d\mu = \frac{dh}{2\pi}$ ) eine Lösung des Problems (vgl. Nr. 106).

109. Bevor wir zu der Frage nach der Existenz eines ROBINSchen Gleichgewichtspotentials im allgemeinen Fall einer beliebigen, abgeschlossenen Punktmenge  $E$  übergehen, soll erst noch gezeigt werden, daß die obige Überlegung zu einer Konstruktion der GREENSchen Funktion des Außengebietes  $G$  führt, wenn diese fortan einen aus endlich vielen Jordanbogen zusammengesetzten Rand hat. Wir wollen dies

<sup>1</sup> G. ROBIN [1].

an der Hand eines Verfahrens ausführen, zu welchem man durch eine naheliegende Spezialisierung der oben benutzten Hilfsbegriffe gelangt, und das zu weiteren bemerkenswerten Zusammenhängen führen wird.

Es seien  $z_1, \dots, z_n$  beliebige Punkte der Ebene und  $\mu$  eine Belegung, welche durch die Vorschrift erklärt wird, daß sie für jede Punktmenge  $e$ , welche genau  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ) jener Punkte enthält, den Wert  $\frac{m}{n}$  haben soll. Das zugehörige Potential wird dann gleich dem Mittelwert

$$\frac{1}{n} \sum_1^n \log \frac{1}{|z - z_p|}.$$

Man betrachte nun das Minimum dieses Ausdrucks auf  $G$  und bestimme ein Punktsystem  $z_1, \dots, z_n$ , für welches dieses Minimum seinen größten Wert  $\gamma_n$  annimmt. Das entsprechende Potential sei  $u_n(z)$ .

Wir bilden nun den Ausdruck

$$v_n(z) = u_n(z) + g(z, \infty) - \gamma_n$$

und schließen wie oben, unter Anwendung des Minimumprinzips, daß  $v_n$  eine in  $G$  nichtnegative, harmonische Funktion ist. In der Tat: auf der Berandung von  $G$  ist  $u_n \geq \gamma_n$  und  $g=0$ , also jedenfalls  $v_n \geq 0$ . Da ferner  $v_n$  in  $G$  harmonisch ist, mit Ausnahme derjenigen Punkte  $z_p$ , welche eventuell in  $G$  liegen und wo  $v_n = +\infty$  wird, so ergibt sich mit Hilfe des erwähnten Prinzips, daß  $v_n$  überall in  $G$  nichtnegativ ist. Man hat also speziell

$$v_n(\infty) = \gamma - \gamma_n \geq 0.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  ist  $\gamma_n \rightarrow \gamma$ . Um dies einzusehen, gehen wir von der Darstellung (12) der GREENSchen Funktion von  $G$  aus. Für ein gegebenes  $\varepsilon > 0$  können wir eine so große Zahl  $n_\varepsilon$  finden, daß die Schwankung von  $\log |\zeta - z|$ , wie immer der Punkt  $z$  auf der Niveaulinie  $g = \varepsilon$  auch gewählt wird, auf jedem Teilbogen  $\Gamma'$  von  $\Gamma$  kleiner als  $\varepsilon$  ausfällt, sobald nur

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma'} dh(\zeta, \infty) \leq \frac{1}{n_\varepsilon}.$$

Teilt man nun  $\Gamma$  in  $n \geq n_\varepsilon$  Teilbogen, auf denen die Variation von  $\mu_0 = \frac{h}{2\pi}$  genau gleich  $\frac{1}{n}$  ist, und nimmt man auf den Teilbogen je einen Randpunkt  $\zeta_p$  ( $p=1, \dots, n$ ), so unterscheidet sich das Integral (12) vom Mittelwert

$$\frac{1}{n} \sum_1^n \log \frac{1}{|\zeta_p - z|}$$

um eine Größe vom Betrage  $< \varepsilon$ , und zwar für jede Lage des Punktes  $z$  auf der Linie  $g(z, \infty) = \varepsilon$ . Hier gilt also

$$\frac{1}{n} \sum_1^n \log \frac{1}{|\zeta_p - z|} \geq \gamma - 2\varepsilon.$$

Diese Ungleichheit besteht nach dem Minimumprinzip auch *innerhalb* des von der Niveaulinie  $g = \varepsilon$  begrenzten, zum Außengebiet  $g > \varepsilon$  komplementären Gebietes und also speziell auf  $\bar{G}$ . Für die obere Grenze  $\gamma_n$  gilt folglich

$$\gamma_n \geq \gamma - 2\varepsilon,$$

sobald  $n > n_\varepsilon$ . In Verbindung mit dem früheren Resultat  $\gamma_n \leq \gamma$  folgt nun die behauptete Beziehung  $\gamma_n \rightarrow \gamma$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Nunmehr können wir beweisen, daß die Funktion  $v_n(z)$  nicht nur für  $z = \infty$ , sondern überall in  $G$  verschwindet, wenn  $n$  unbeschränkt wächst. Zu diesem Zweck wollen wir vorerst zeigen, daß jeder vorgegebene Teilbereich  $G_0$  des Gebietes  $G$  von Polen  $z_\nu$  des Potentials  $u_n$  frei ist, sobald  $n$  eine gewisse Schranke überschritten hat. Die GREENSCHE Funktion  $g(z, \infty)$  hat nämlich auf  $G_0$  ein gewisses Minimum  $g_0 > 0$ . Gesetzt,  $u_n$  habe in  $G_0$  einen Pol  $z_\nu$ , so schließt man, wie oben, daß die Differenz  $v_n(z) - g(z, z_\nu)$  in  $G$  nichtnegativ ist. Für  $z = \infty$  ergibt sich hieraus, da  $g(z, z_\nu) = g(z_\nu, z)$

$$0 \leq \gamma - \gamma_n - g(z_\nu, \infty) \leq \gamma_\infty - \gamma_n - g_0,$$

folglich  $\gamma - \gamma_n \geq g_0$ . Da aber  $\gamma_n \rightarrow \gamma$  für  $n \rightarrow \infty$ , so kann dies höchstens für endlich viele Werte  $n$  bestehen, und es existiert somit tatsächlich eine Zahl  $n_0$ , so daß das Gebiet  $G_0$  polfrei ist, sobald  $n > n_0$ .

Wir fixieren nun einen beliebigen Teilbereich  $G_0$ , der den Punkt  $z = \infty$  als inneren Punkt enthält, und schlagen um den Nullpunkt einen Kreis vom Radius  $R$ , der den Rand von  $G_0$  umschließt. Für jedes  $z = r e^{i\varphi}$ ,  $r > R$ ,  $n > n_0$  gilt die POISSONSche Integraldarstellung

$$v_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_n(R e^{i\vartheta}) \frac{r^2 - R^2}{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta,$$

und es wird also, wegen  $v_n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 \leq v_n(z) &\leq \frac{r+R}{r-R} \int_0^{2\pi} v_n(R e^{i\vartheta}) d\vartheta \\ &= \frac{r+R}{r-R} v_n(\infty) = \frac{r+R}{r-R} (\gamma - \gamma_n) \end{aligned}$$

und somit  $v_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Daß dasselbe, und zwar gleichmäßig, auf  $G_0$  gilt, folgt durch Wiederholung des obigen Schlusses für eine Kette von endlich vielen, übereinandergreifenden Kreisscheiben, mit welchen  $G_0$  überdeckt wird.

*Die Funktionenfolge  $u_n(z)$  konvergiert in  $G$  gegen  $-g(z, \infty) + \gamma$  und das Minimum*

$$\gamma_n = \min u_n(z) \text{ für } z \text{ auf } E$$

*gegen die ROBINSche Konstante  $\gamma$ .*

**110.** Es lohnt sich zu bemerken, daß die Näherungsfunktion  $u_n$  folgendermaßen erklärt werden kann:

$$e^{-u_n(z)} = \sqrt[n]{|t_n(z)|},$$

wo  $t_n$  dasjenige Polynom  $n$ -ten Grades

$$t_n = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

ist, dessen Maximum  $M_n$  auf  $E$  möglichst klein wird: dies ist das sog. TSCHEBYSCHEFFSche Polynom  $n$ -ten Grades der Punktmenge  $E$ <sup>1</sup>. Es gilt also der Satz:

*Es sei  $E$  der abgeschlossene Komplementbereich eines zusammenhängenden Gebietes  $G$ , das den unendlich fernen Punkt enthält und von endlich vielen Jordanbogen berandet ist. Sei ferner  $t_n(z)$  das zu  $E$  gehörige TSCHEBYSCHEFFSche Polynom  $n$ -ten Grades und  $M_n$  sein Maximalbetrag auf  $E$ . Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{\frac{|t_n(z)|}{M_n}} = g(z, \infty)$$

*gleichmäßig in jedem Teilbereich von  $G$ .*

Für  $z = \infty$  geht diese Relation in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n} = e^{-\gamma}$$

über, wo  $\gamma$  die ROBINSche Konstante ist. Diese letzte Beziehung ist zuerst von SZEGÖ [I] entdeckt worden.

Die Existenz des Grenzwerts  $\lim M_n^{1/n}$  hatte FEKETE schon früher nachgewiesen und diesen als *transfiniten Durchmesser* von  $E$  bezeichnet<sup>2</sup>. Durch den obigen Zusammenhang hat sich die Identität der Kapazität und des transfiniten Durchmessers der Punktmenge  $E$  herausgestellt<sup>3</sup>.

III. Die obigen Ausführungen lassen sich durch den in §§ 1 und 2 dargestellten Grenzprozeß auf beliebige abgeschlossene, beschränkte Punktmengen  $E$  ausdehnen. Insbesondere ist es möglich, sobald  $E$  von positivem harmonischem Maß ist, die GREENSche Funktion des Außengebietes  $G$  auch in diesem allgemeinen Fall als das logarithmische Potential einer über  $E$  verteilten Massenbelegung darzustellen, wie jetzt im Anschluß an DE LA VALLÉE-POUSSIN<sup>4</sup> gezeigt werden soll.

<sup>1</sup> G. FABER [I].

<sup>2</sup> M. FEKETE [I]. Hier wird auch folgende interessante, mit der obigen äquivalente Erklärung des transfiniten Durchmessers angeführt: Man nehme auf  $E$   $n$  Punkte  $z_1, \dots, z_n$  und bilde das Produkt sämtlicher  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  gegenseitigen Entfernungen zwischen zwei von jenen Punkten. Für eine bestimmte Lage der Punkte  $z_p$  erreicht das Produkt sein Maximum  $m_n$ . Für  $n \rightarrow \infty$  strebt die  $\binom{n}{2}$ -te Wurzel von  $m_n$  gegen den transfiniten Durchmesser von  $E$ .

<sup>3</sup> Vgl. hierzu G. PÓLYA und G. SZEGÖ [I]. In dieser inhaltsreichen Arbeit befindet sich auch eine Zusammenstellung der Literatur (bis 1930), welche sich auf den Kapazitätsbegriff und den transfiniten Durchmesser bezieht.

<sup>4</sup> C. DE LA VALLÉE-POUSSIN [I].



Man überdecke die Ebene mit einem Netz von Quadraten  $Q_n$  von der Seitenlänge  $\frac{1}{2^n}$ , so daß für jedes  $n=1, 2, \dots$  die Quadrate  $Q_n$  in vier Quadrate  $Q_{n+1}$  zerfallen. Es sei  $E_n$  derjenige Bereich, der aus sämtlichen abgeschlossenen Quadraten  $Q_n$  zusammengesetzt wird, welche mindestens einen Punkt mit  $E$  gemeinsam haben. Dasjenige zusammenhängende, zu  $E_n$  komplementäre Polygongebiet  $G_n$ , welches den unendlich fernen Punkt enthält, ist ein Teilgebiet des entsprechenden, von  $E$  berandeten Außengebietes  $G$ . Wir bilden die GREENSCHE Funktion

$$g_n(z, \infty) = \log |z| + \gamma_n + \varepsilon \left( \frac{1}{z} \right)$$

von  $G_n$  und wissen dann gemäß § 1 und § 2, daß die ROBINSche Konstante  $\gamma_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen die ROBINSche Konstante  $\gamma$  von  $G$  strebt, ferner, daß  $g_n(z, \infty)$  in jedem Teilbereich von  $G$  gleichmäßig gegen  $+\infty$  oder gegen die GREENSCHE Funktion  $g(z, \infty)$  von  $G$  konvergiert, je nachdem  $E$  von der Kapazität Null ( $\gamma = +\infty$ ) oder von positiver Kapazität ( $\gamma < +\infty$ ) ist.

Für  $g_n$  hat man die Darstellung

$$-g_n(z, \infty) + \gamma_n = \int_{E_n} \log \frac{1}{|\zeta - z|} d\mu_n(\zeta), \quad (14')$$

wo  $\mu_n$  die mittels der zu  $g_n$  konjugierten Funktion  $-h_n$  erklärte, über den äußeren Rand des Polygons  $E_n$  verteilte positive Einheitsbelegung ist ( $2\pi d\mu_n = dh_n$ ). Auf  $E_n$  nimmt das rechtsstehende Integral den konstanten Wert  $\gamma_n$  an.

Aus der Folge der gleichmäßigen beschränkten, additiven Mengenfunktionen  $\mu_n$  läßt sich nach einem allgemeinen Satz der Theorie der Mengenfunktionen eine konvergente Teilfolge auswählen<sup>1</sup>. Die Grenzfunktion  $\mu$  ist eine über die Randpunkte  $\zeta$  von  $E$  verteilte nichtnegative Belegung, die für die Klasse der im BORELSchen Sinne meßbaren Teilmengen ( $e$ ) von  $E$  additiv ist [Eigenschaft (10) Nr. 104].

Sei nun  $\gamma < +\infty$  und  $z$  ein innerer Punkt von  $G$ . Da der Integrand  $\log \frac{1}{|\zeta - z|}$  des Integrals (14') hier stetig ist, so läßt sich der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  unter dem Integral ausführen (vgl. DE LA VALLÉE-POUSSIN [1])

<sup>1</sup> Vgl. hierzu C. DE LA VALLÉE-POUSSIN [1], Note. Über den Beweisgang, dessen vollständige Wiedergabe hier zu weit führen würde, sei folgendes bemerkt: Die abzählbar vielen Quadrate  $Q_1, Q_2, \dots$  lassen sich in eine Folge  $Q^1, Q^2, \dots$  anordnen, und es läßt sich unter Anwendung des BOLZANO-WEIERSTRASSSchen Häufungspunktsatzes und des sog. Diagonalverfahrens eine Folge  $\mu_{v_1}, \mu_{v_2}, \dots$  erklären, die in jedem Quadrat  $Q$  konvergiert. Die Grenzfunktion  $\mu$  ist für jede abgeschlossene oder offene Teilmenge  $e$  von  $E$  definiert und wird infolgedessen mindestens für die Familie der im BORELSchen Sinne meßbaren Teilmengen ( $e$ ) von  $E$  (vgl. z. B. H. LEBESGUE [1]) als eine additive nichtnegative Mengenfunktion vom Gesamtbetrage 1 erklärt. Vgl. auch O. FROSTMAN [3]. In der letzten, nach Beendigung der Redaktion dieses Buches erschienenen Arbeit findet man eine vortreffliche Darstellung der Theorie der Kapazität von Punktmenge.

und man hat also, da andererseits  $g_n \rightarrow g$ ,  $\gamma_n \rightarrow \gamma$ , für die GREENSche Funktion des Gebietes  $G$  die Darstellung

$$-g(z, \infty) + \gamma = \int_E \log \frac{1}{|\zeta - z|} d\mu(\zeta). \quad (14)$$

In ähnlicher Weise findet man in jedem *inneren* Punkt  $z$  des zu  $G$  komplementären Bereiches  $\bar{G}$  (falls es solche Punkte gibt)

$$u(z) = \int_E \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu(\zeta) = \gamma.$$

Sei schließlich  $z$  ein Randpunkt von  $G$ . In beliebiger Nähe von  $z$  gibt es Punkte des Gebietes  $G$ , wo wegen  $g > 0$  und gemäß (14) die Beziehung  $u < \gamma$  gilt. Folglich ist die untere Grenze von  $u$  im Randpunkte  $z$  höchstens gleich  $\gamma$  und, da  $u(z)$  als eine nach unten halbstetige Funktion gleich dieser unteren Grenze ist, wird in jedem Randpunkt von

$$u(z) \leq \gamma.$$

Daß das Ungleichheitszeichen hier wesentlich ist, folgt aus der Bemerkung von Nr. 97, § 2. Falls nämlich  $G$  einen isolierten Randpunkt hat, so ist hier  $g$  harmonisch und  $> 0$ , somit tatsächlich  $u < \gamma$ .

**112.** Falls  $G$  von endlich vielen Jordanbögen berandet ist, so erschien die ROBINSche Konstante  $\gamma$  einerseits als das Maximum der Minima, andererseits als das gleichgroße Minimum der oberen Grenzen sämtlicher logarithmischer Potentiale  $u(z)$  auf der Punktmenge  $E$ , welche von einer über  $E$  verteilten, nichtnegativen Einheitsbelegung herrühren. In dem obenbetrachteten allgemeinen Fall, wo  $E$  eine beliebige abgeschlossene, beschränkte Punktmenge von positiver Kapazität ist, stellt die der Funktion  $-g(z, \infty) + \gamma$  entsprechende Belegung  $\mu$  einen extremen Fall dar, insofern als das von ihr erzeugte Potential die kleinstmögliche obere Grenze  $\gamma$  besitzt. Dagegen können Ausnahmepunkte von  $E$  vorkommen, wo das extremale Potential *kleiner* als  $\gamma$  ausfällt. Solche Punkte sind z. B. stets die isolierten, an das Außengebiet  $G$  grenzenden Punkte der Menge  $E$ .

Jedenfalls ist also die ROBINSche Konstante  $\gamma$  gleich dem Minimum der oberen Grenze sämtlicher oben definierten Potentiale  $u(z)$  auf  $E$ .

#### § 4. Verhalten einer analytischen Funktion in der Umgebung einer Punktmenge vom harmonischen Maß Null.

**113.** In der Theorie der Singularitäten harmonischer und analytischer Funktionen spielen die Punktmengen vom harmonischen Maß Null oder, was nach den Erörterungen der vorhergehenden Abschnitte dasselbe bedeutet, von der Kapazität Null eine wichtige Rolle. Es sollen hier einige in dieser Richtung liegende Sätze besprochen werden.

Nach dem in Abschnitt III dargestellten fundamentalen Prinzip vergrößert sich das harmonische Maß durch eine analytische Abbildung. Diese Tatsache legt die Vermutung nahe, daß eine Punktmenge von positiver Kapazität durch eine analytische Transformation stets in eine Punktmenge übergeführt wird, die ebenfalls positive Kapazität hat. Dies ist auch unter den unten folgenden Bedingungen tatsächlich der Fall.

**Satz 1.** *Es sei  $w(z)$  eine in einem Gebiet  $G_z$  eindeutige meromorphe Funktion und  $\alpha_z$  eine in  $G_z$  gelegene abgeschlossene Punktmenge. Falls diejenige Punktmenge  $\alpha_w$ , auf welche die Funktion  $w = w(z)$  die Menge  $\alpha_z$  abbildet, eine harmonische Nullmenge ist, so gilt dasselbe auch für die Menge  $\alpha_z$ , es sei denn daß  $w(z)$  konstant ist.*

*Beweis.* Die Menge  $\alpha_w$  ist als Bildmenge einer abgeschlossenen Punktmenge selber abgeschlossen. Da sie voraussetzungsgemäß vom harmonischen Maß Null ist, hat sie als Komplement ein zusammenhängendes Gebiet  $G_w$ . In diesem wählen wir eine Kreisscheibe  $\Delta_w$  und entfernen aus  $G_z$  sämtliche Punkte  $z$ , in denen  $w(z)$  auf  $\Delta_w$  fällt. Angenommen, daß  $w(z)$  nicht konstant ist, bleibt aus  $G_z$  ein Gebiet  $G_A$  übrig, das aus einem oder mehreren zusammenhängenden Teilen besteht, welche von den Bildpunkten der Randpunkte gewisser Gebiete  $\Delta_w$  und von gewissen Teilen der Berandung von  $G_z$  begrenzt sind. Da die Teilgebiete  $G_A$  sich nur gegen den Rand  $G_z$  häufen können, während die abgeschlossene Punktmenge  $\alpha_z$  im Innern von  $G_z$  liegt, so folgert man, daß höchstens endlich viele der Gebiete  $G_A$  Punkte  $\alpha_z$  enthalten können. Mit Berücksichtigung der in Nr. 102 besprochenen Additivitätseigenschaft der Mengen vom harmonischen Maß Null, genügt es jetzt zu zeigen, daß die in einem beliebigen der Gebiete  $G_A$  befindliche, notwendigerweise abgeschlossene Teilmenge der gegebenen Menge  $\alpha_z$  das harmonische Maß Null hat.

Zu diesem Zweck fixieren wir ein Gebiet  $G_A$  und wählen in demselben einen beliebigen Punkt  $z^*$  ( $w(z^*) \neq \alpha_w$ ). Sei ferner  $\beta_z$  eine in  $G_A$  gelegene geschlossene Jordankurve, welche die Punkte  $z^*$  und  $\alpha_z$  umgibt, und  $D_z$  das innerhalb von  $\beta_z$  liegende Teilgebiet von  $G_A$ , welches also sowohl  $\alpha_z$  als  $z^*$  enthält. Entfernt man nun aus  $D_z$  noch die Punkte  $\alpha_z$ , so bleibt ein Restgebiet  $G'_z$  übrig, in bezug auf welches man das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha_z, G'_z)$  bilden kann. Es gilt zu zeigen, daß dieses Maß identisch verschwindet.

Da  $\alpha_w$  eine harmonische Nullmenge ist, können wir ein von endlich vielen Jordanbogen  $\alpha'_w$  begrenztes Teilgebiet  $D_w$  von  $G_w$  finden, so daß, für ein vorgegebenes  $\varepsilon > 0$ ,

$$\omega(w^*, \alpha'_w, D'_w) < \varepsilon,$$

wo  $w^* = w(z^*)$  und  $D'_w$  den Durchschnitt des Gebietes  $D_w$  mit dem Äußeren der Kreisscheibe  $\Delta_w$  bezeichnet. Wir schließen alsdann aus dem Gebiet  $G'_z$  alle Punkte  $z$  aus, wo  $w = w(z)$  außerhalb  $D'_w$  liegt, und bezeichnen mit  $D'_z$  dasjenige der nachbleibenden Teilgebiete von  $G'_z$ , welches

den Punkt  $z^*$  enthält. Die Berandung von  $D'_z$  besteht aus Punkten, die entweder auf der Jordankurve  $\beta_z$  oder auf den Bildkurven  $\alpha'_z$  der Bogen  $\alpha'_w$  liegen.

Wir vergleichen nun die durch die Ausdrücke

$$\omega(z, \alpha_z, G'_z) \quad \text{und} \quad \omega(w(z), \alpha'_w, D'_w)$$

definierten, in  $D'_z$  harmonischen Funktionen miteinander. In den Randpunkten  $\beta_z$  von  $D'_z$  verschwindet die erste Funktion, während die zweite hier, wie überhaupt, nichtnegativ ist; auf den Randbogen  $\alpha'_z$  ist wiederum die erste Funktion, wie überhaupt, höchstens gleich 1, während hier die zweite Funktion offenbar denselben Wert 1 erreicht. Also ist die erste dieser Funktionen höchstens gleich der zweiten auf der ganzen Berandung von  $D'_z$ ; zufolge dem Maximumprinzip muß dasselbe dann auch im Innern von  $D'_z$  gelten, woraus für  $z = z^*$  folgt:

$$\omega(z^*, \alpha_z, G'_z) \leq \omega(w^*, \alpha'_w, D'_w) < \varepsilon.$$

Die Zahl  $\varepsilon$  kann aber beliebig klein gewählt werden, und es wird also  $\omega(z^*, \alpha_z, G'_z) = 0$ , und somit überhaupt  $\omega(z, \alpha_z, G'_z) = 0$ , was zu beweisen war.

**114.** Ein klassischer CAUCHY-RIEMANN'SCHER Satz, von dem wir schon mehrmals Gebrauch gemacht haben (I, § 3) besagt, daß eine harmonische oder analytische Funktion, welche in der Umgebung einer isolierten Stelle  $z = a$  eindeutig und beschränkt ist, an dieser Stelle auch harmonisch bzw. analytisch sein muß. Eine wichtige Frage ist nun, wieweit dieser Satz über „hebbare Singularitäten“ verallgemeinert werden kann. Wie mächtig muß eine abgeschlossene Punktmenge  $\alpha$  sein, damit eine in der Umgebung dieser Menge eindeutige und beschränkte Funktion existiert, welche mindestens eine Teilmenge von  $\alpha$  als Singularität hat? Für harmonische Funktionen wird dieses Problem durch nachstehenden Satz restlos gelöst<sup>1</sup>:

**Satz 2.** *Es sei  $\alpha$  eine abgeschlossene Punktmenge der Ebene. Falls sie vom harmonischen Maß Null ist, so ist jede in der Umgebung von  $\alpha$  eindeutige und beschränkte harmonische Funktion in jedem Punkt von  $\alpha$  harmonisch. Ist dagegen  $\alpha$  von positivem harmonischen Maß, so gibt es in der Umgebung von  $\alpha$  eindeutige und beschränkte harmonische Funktionen, die nicht in allen Punkten von  $\alpha$  harmonisch sind.*

Sei  $\alpha$  vom harmonischen Maß Null und  $u(z)$  in der Umgebung von  $\alpha$  eindeutig und beschränkt. Man schlage um  $\alpha$  eine Jordankurve  $\beta$  und bestimme mittels der GREENSchen Formel (II, Nr. 25) eine harmonische Funktion  $u_0(z)$ , welche in dem von  $\beta$  berandeten Gebiet  $G_\beta$ , also speziell in den Punkten  $\alpha$  harmonisch ist und auf  $\beta$  dieselben Randwerte wie  $u(z)$  annimmt. Wir behaupten, daß  $u(z) = u_0(z)$  in jedem Punkt  $z \neq \alpha$  von  $G_\beta$  gilt.

<sup>1</sup> Vgl. hierzu J. W. LINDBERG [1], P. J. MYRBERG [1].

Um dies einzusehen, nehmen wir einen beliebigen Punkt  $z_0 \neq \alpha$  von  $G_\beta$  und konstruieren für ein gegebenes  $\varepsilon > 0$  ein Teilgebiet  $D$  des von  $\alpha$  begrenzten Gebietes  $G$ , so daß sowohl  $\beta$  als  $z_0$  in  $D$  enthalten sind und

$$\omega(z_0, \delta, D_\beta) < \varepsilon,$$

wo  $\delta$  der aus endlich vielen Jordanbögen zusammengesetzte Rand von  $D$  ist und  $D_\beta$  den Durchschnitt der Gebiete  $G_\beta$  und  $D$  bezeichnet.

Es sei nun  $M$  die obere Grenze von  $|u|$  auf  $G_\beta$ ; es gilt dann auch  $|u_0| \leq M$  und die Differenz  $v(z) = u(z) - u_0(z)$  ist also ihrem absoluten Betrag nach höchstens gleich  $2M$ . Wir bilden alsdann den Ausdruck  $v + 2M\omega$ . Er verschwindet auf der Kurve  $\beta$  und ist auf dem Bogen  $\delta$  nichtnegativ. Also nimmt er überhaupt in  $D_\beta$  nur nichtnegative Werte an und es gilt somit speziell

$$v(z_0) \geq -2M\omega(z_0) > -2M\varepsilon.$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt hieraus  $v(z_0) \geq 0$ .

Eine umgekehrte Beziehung ( $v(z_0) \leq 0$ ) ergibt sich, wenn die obige Schlußweise auf die Funktion  $v - 2M\omega$  angewandt wird, und es muß also, wie behauptet wurde,  $v(z_0) = u(z_0) - u_0(z_0) = 0$  sein.

Da also  $u(z)$  mit  $u_0(z)$  identisch ist, ist  $u(z)$  in jedem Punkt  $\alpha$  harmonisch, was zu beweisen war.

Der zweite Teil des Satzes folgt unmittelbar aus den Ergebnissen des ersten Paragraphen. Hat nämlich  $\alpha$  positives harmonisches Maß, so stellt der Ausdruck

$$\omega(z, \alpha, D_\beta),$$

wo  $D_\beta$  dasjenige Teilgebiet von  $G_\beta$  ist, welches von  $G_\beta$  übrig bleibt, falls die Punkte  $\alpha$  ausgeschlossen werden, eine in  $D_\beta$  harmonische, positive und beschränkte Funktion dar. Sie kann nicht in jedem Punkt  $\alpha$  harmonisch sein, denn sonst würde sie identisch verschwinden, da sie ja auf der Begrenzungskurve  $\beta$  von  $G_\beta$  gleich Null ist.

**115.** Im Laufe der vorhergehenden Darstellung haben wir wiederholt von einer wichtigen Erweiterung des Prinzips vom Maximum für eine harmonische oder analytische Funktion Gebrauch gemacht. Um schließen zu können, daß eine in einem Gebiet  $G$  harmonische Funktion  $u(z)$  daselbst kleiner als eine gegebene Zahl  $M$  ist, genügt es zu wissen, daß  $\overline{\lim} u(\zeta) \leq M$  in jedem Randpunkt  $\zeta$  gilt, außer möglicherweise für eine endliche Anzahl von Randpunkten  $\zeta$ , sofern  $u$  auch in der Umgebung dieser Ausnahmepunkte beschränkt bleibt. Hier erhebt sich nun die Frage, wie mächtig diese Ausnahmemenge angenommen werden darf, ohne daß das erweiterte Prinzip seine Gültigkeit einbüßt. Auch für dieses Problem spielen die harmonischen Nullmengen eine entscheidende Rolle. Es gilt nämlich die<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Ein anderes allgemeines Kriterium ist von E. PHRAGMÉN und E. LINDELÖF [1] gegeben worden.

**Erweiterung des Maximumprinzips.** *Es sei  $u(z)$  eine im Gebiete  $G$  harmonische und nach oben beschränkte Funktion. Falls dann eine Zahl  $M$  existiert, so daß*

$$\limsup u(\zeta) \leq M \quad (15)$$

*in jedem Randpunkt  $\zeta$  von  $G$ , außer höchstens für eine Menge  $\alpha$  vom harmonischen (absoluten) Maß Null, so ist  $u(z) \leq M$  in jedem Punkt von  $G$ .*

Zum Beweis nehmen wir einen beliebigen Punkt  $z_0$  von  $G$ . Angenommen, es wäre  $u(z_0) > M$ , so können wir gemäß (15) einen Punkt  $z_1$  von  $G$  finden, so daß  $u(z_1) < u(z_0)$ . Wir schlagen um  $z_1$  einen kleinen Kreis  $\beta$ , so daß  $u(z) \leq M_1$  ( $M < M_1 < u(z_0)$ ) in jedem Punkt von  $\beta$  gilt.

Nach dieser Vorbereitung wählen wir eine beliebig kleine Zahl  $\varepsilon > 0$  und bezeichnen mit  $G'$  ein Teilgebiet des zu  $\alpha$  komplementären Gebietes, derart daß

$$\omega(z_0, \alpha', G'_\beta) < \varepsilon,$$

wobei  $\alpha'$  die Berandung von  $G'$  ist und  $G'_\beta$  den Durchschnitt von  $G'$  mit dem Äußeren der Kreislinie  $\beta$  bezeichnet.

Sei nun  $K \geq M$  die voraussetzungsgemäß endliche obere Grenze von  $u(z)$  in  $G$ . Wir bilden den Ausdruck

$$v(z) = u(z) - M - (K - M)\omega(z, \alpha', G'_\beta),$$

der eine im Durchschnittsgebiet  $D$  von  $G$  und  $G'_\beta$  harmonische Funktion ist.  $D$  hat einen zusammenhängenden Teil  $D_0$ , der den Punkt  $z_0$  enthält; die Randpunkte  $\zeta$  von  $D_0$  liegen entweder auf der Berandung  $\Gamma$  von  $G$  oder auf den Begrenzungsbogen  $\alpha'$  und  $\beta$  von  $G'_\beta$ . In den erstgenannten Punkten, die nach unserer Konstruktion keinen Punkt der Menge  $\alpha$  enthalten, gilt nach (15)  $\limsup v \leq 0$ ; auf  $\alpha'$  ist  $\omega$  stetig gleich 1 und  $u$  höchstens gleich  $K$ , also wieder  $\limsup v \leq 0$ ; auf  $\beta$  schließlich wird  $u \leq M_1$  und  $\omega = 0$ , also  $\limsup v \leq M_1 - M$ . Nach dem Maximumprinzip ist also, überall in  $D_0$ ,  $v \leq M_1 - M$ , woraus für  $z = z_0$  folgt:

$$\begin{aligned} u(z_0) &\leq M_1 + (K - M)\omega(z_0, \alpha', G'_\beta) \\ &\leq M_1 + (K - M)\varepsilon, \end{aligned}$$

oder da  $\varepsilon$  beliebig klein gemacht werden kann,  $u(z_0) \leq M_1$ , wider die oben gemachte Festsetzung. Dieser Widerspruch zeigt, daß, wie behauptet wurde,  $u(z_0) \leq M$  sein muß.

Wenn keinerlei zusätzliche Voraussetzungen über die Lage des Ausnahmepunktes  $\alpha$  im Verhältnis zu den übrigen Randpunkten gemacht werden, so läßt sich das obige Prinzip, sofern es sich um den Umfang der Menge  $\alpha$  handelt, nicht weiter verschärfen. Ist nämlich  $\alpha$  eine beliebige Menge von positivem harmonischen Maß, so läßt sich immer ein Gebiet  $G$  angeben, das eine Teilmenge von  $\alpha$  zu Randpunkten hat, und wo eine harmonische Funktion  $u$  konstruiert werden kann, welche in jedem von  $\alpha$  verschiedenen Randpunkt von  $G$  z. B. der Ungleichung  $\limsup u \leq 0$  genügt, ohne im Inneren ausnahmslos nichtpositiv zu sein.

Es genügt, eine Teilmenge der gegebenen Menge zu betrachten, welche ebenfalls positives harmonisches Maß hat und ein zusammenhängendes Gebiet begrenzt. Schließt man aus letzterem eine kleine Kreisscheibe  $\beta$  aus, so stellt das harmonische Maß  $\omega(z, \alpha, G)$  der betrachteten Teilmenge  $\alpha$  in bezug auf das Restgebiet  $G$  eine in  $G$  harmonische Funktion dar, welche in jedem von  $\alpha$  verschiedenen Randpunkt von  $G$ , d. h. auf  $\beta$ , verschwindet, im Innern von  $G$  jedoch *positiv* ist.

In diesem Beispiel hat  $\alpha$  eine positive Entfernung vom übrigen Teil der Berandung ( $\beta$ ). Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so stellt der obige Satz im allgemeinen nicht mehr die schärfstmögliche Form des Maximumprinzips dar. Die „absoluten“ harmonischen Nullmengen können in diesem Fall durch die zum Bezugsgebiet  $G$  relativen Nullmengen ersetzt werden, von denen in § 1 dieses Kapitels kurz die Rede war. Diese relativen Nullmengen können einen mächtigeren Umfang haben als die absoluten; hierauf werden wir noch im folgenden zurückkommen. Auf eine erschöpfende Darstellung dieser Zusammenhänge, wie auch auf eine nähere Darstellung des Maximumprinzips in der angedeuteten allgemeineren Fassung müssen wir allerdings verzichten. Um ein richtiges Verständnis der wahren Bedeutung der harmonischen Maßbestimmung für diese und andere Fragen der Funktionentheorie zu gewinnen, ist es jedenfalls notwendig, den Unterschied zwischen „relativen“ und „absoluten“ harmonischen Maßen nicht aus dem Auge zu verlieren.

**116.** Als Korollar des obigen Satzes können wir folgendes Theorem beweisen, das als eine Erweiterung eines bekannten klassischen Satzes von LIOUVILLE betrachtet werden kann:

**Satz 3.** *Falls eine außerhalb einer harmonischen Nullmenge  $\alpha_z$  eindeutige analytische Funktion  $w(z)$  im Gebiete  $z \neq \alpha_z$  Werte ausläßt, die eine Menge  $\alpha_w$  von positivem harmonischen Maß bilden, so reduziert sich die Funktion auf eine Konstante.*

Aus der Annahme, daß  $w(z)$  nicht konstant wäre, läßt sich ein Widerspruch in folgender Weise herleiten: Aus der zu  $\alpha_w$  komplementären, offenen, nicht leeren Punktmenge schließen wir eine kleine Kreisscheibe  $\Delta_w$  aus; das an  $\Delta_w$  grenzende Restgebiet sei  $G_w$ . Aus dem gegebenen Gebiet  $z \neq \alpha_z$  entfernen wir ebenfalls sämtliche Gebiete  $\Delta_z$ , in denen der Wert  $w = w(z)$  auf  $\Delta_w$  fällt und bezeichnen mit  $G_z$  ein beliebiges der von der Punktmenge  $\alpha_z$  und den Randkurven der Gebiete  $\Delta_z$  begrenzten zusammenhängenden Restgebiete.

Wir bilden alsdann das harmonische Maß  $\omega(w, \alpha_w, G_w)$ , welches eine in  $G_w$  *positive*, nicht konstante Funktion ist. Andererseits ist auch die zusammengesetzte Funktion  $\omega(w(z), \alpha_w, G_w)$  in  $G_z$  harmonisch. In denjenigen Randpunkten, welche auf den Begrenzungen der Gebiete  $\Delta_z$  liegen, *verschwindet* diese Funktion. Die übrigen Randpunkte von  $G_z$  gehören zur Menge  $\alpha_z$  und bilden somit eine Menge vom harmonischen

Maß Null. Da die betrachtete Funktion in  $G$  jedenfalls beschränkt ist ( $\omega \leq 1$ ), so schließt man nach dem erweiterten Maximumprinzip auf  $\omega \leq 0$  oder, da  $\omega$  nichtnegativ ist,  $\omega(w(z), \alpha_w, G_w) = 0$  in jedem Punkt von  $G_z$ . Da der entsprechende Punkt  $w = w(z)$  auf das Gebiet  $G_w$  fällt, und  $\omega(w, \alpha_w, G_w)$  hier positiv ist, so ist der in Aussicht gestellte Widerspruch hergestellt. Die Funktion  $w(z)$  muß sich also auf eine Konstante reduzieren, was zu beweisen war.

### § 5. Hilfssätze über additive Mengenfunktionen.

117. Um in der Theorie der harmonischen Nullmengen weiter vorzudringen zu können, benötigen wir einige Hilfssätze aus der Theorie der reellen Funktionen, welche die in § 3 dargelegte Theorie weiterführen. Diese Hilfssätze spielen auch bei anderen funktionentheoretischen Fragen eine wichtige Rolle.

Die Sätze dieses Paragraphen sind unter Weiterführung älterer Ideen von P. BOUTROUX und BLOCH im wesentlichen von HENRI CARTAN gegeben worden; wir folgen hier einer von AHLFORS herrührenden Darstellung<sup>1</sup>.

In der komplexen Ebene denken wir uns eine beschränkte Punktmenge  $E$  gegeben und auf jeder meßbaren Teilmenge  $e$  von  $E$  eine Belegung  $\mu (\geq 0)$  definiert, welche vollständig additiv ist: Wenn die Menge  $e$  in endlich oder abzählbar unendlich viele punktfremde Teilmengen  $e_1, e_2, \dots$  zerlegt wird, so ist

$$\mu(e) = \mu(e_1) + \mu(e_2) + \dots$$

Den Gesamtwert  $\mu(E)$  der Belegung wollen wir der Einfachheit halber wieder gleich der Einheit voraussetzen.

Durch  $\mu(r, a)$  bezeichne man die Belegung, welche der im Innern eines um den Punkt  $a$  mit dem Radius  $r$  beschriebenen Kreises liegenden Teilmenge von  $E$  entspricht. Es gilt dann der

**Hilfssatz.** *Es sei  $h(r)$  eine beliebige, für  $0 \leq r \leq \infty$  stetige, mit  $r$  zunehmende Funktion, mit*

$$h(0) = 0, \quad h(\infty) > 1. \quad (16)$$

Dann gilt für  $r > 0$  die Beziehung

$$\mu(r, a) \leq h(r) \quad (17)$$

in jedem Punkt  $a$  der Ebene, außer höchstens für eine Menge  $A$  die sich durch eine Folge von Kreisen  $C_1, C_2, \dots$  überdecken läßt, für deren Radien  $r_1, r_2, \dots$  die Ungleichung besteht:

$$\sum h(r_n) \leq 6. \quad (17')$$

*Beweis.* Es sei für ein gegebenes  $r > 0$

$$\lambda_1(r) = \overline{\lim}_a \mu(r, a)$$

<sup>1</sup> A. BLOCH [3], H. CARTAN [1], L. AHLFORS [3].



die obere Grenze von  $\mu(r, a)$  für variables  $a$ . Diese, gemäß ihrer Definition mit  $r$  zunehmende Funktion ist höchstens gleich  $\lambda_1(\infty) = \mu(E) = 1$ , und somit ist nach (16)

$$\lambda_1(r) \leq h(r) \quad (18)$$

für alle hinreichend großen Werte von  $r$ .

Wenn nun die obige Ungleichung für alle  $r > 0$  gilt, so besteht die behauptete Beziehung (17) für alle Werte  $a \neq \infty$ .

Im entgegengesetzten Fall sei  $r_1$  die obere Grenze der Werte  $r$ , für welche  $\lambda_1(r) > h(r)$ ; es ist  $0 < r_1 < \infty$ , und die Beziehung (17) besteht für jedes  $r > r_1$ . Es ist also  $\lambda_1(r_1 - 0) \geq h(r_1) \geq \lambda_1(r_1 + 0)$  und somit, da andererseits  $\lambda_1(r_1 - 0) \leq \lambda_1(r_1 + 0)$ , notwendigerweise  $\lambda_1(r_1 - 0) = \lambda_1(r_1 + 0)$  und

$$\lambda_1(r_1) = h(r_1). \quad (18')$$

Danach wählen wir irgendeinen Punkt  $a_1$ , wofür

$$\lambda_1(r_1) \leq \mu(r_1, a_1) + \frac{1}{2},$$

und schlagen um  $a_1$  einen Kreis  $C_1$  mit dem Radius  $r_1$ . Es sei alsdann  $\lambda_2(r)$  die obere Grenze von  $\mu(r, a)$  für alle Punkte  $a$ , die außerhalb  $C_1$  liegen:

$$\lambda_2(r) = \overline{\lim} \mu(r, a) \quad (a \text{ außerhalb } C_1).$$

Da nun  $\lambda_2(r)$  seiner Definition zufolge nicht größer als  $\lambda_1(r)$  sein kann, und die Beziehung (18) für alle  $r \geq r_1$  gilt, so ist auch

$$\lambda_2(r) \leq h(r) \quad (19)$$

für  $r \geq r_1$ .

Wenn nun diese Beziehung für alle  $r > 0$  gilt, so besteht die Behauptung (17) für jedes  $r > 0$ , wo immer der Punkt  $a$  außerhalb des Kreises  $C_1$  auch liegen mag, dessen Radius  $r_1$  die Bedingung (18') erfüllt.

Im entgegengesetzten Fall sei  $r_2$  die obere Grenze der Werte  $r$ , für welche  $\lambda_2(r) > h(r)$ ; es ist  $0 < r_2 \leq r_1$ , und die Beziehung (19) gilt für  $r \geq r_2$ . Speziell wird

$$\lambda_2(r_2) = h(r_2).$$

Man nehme dann einen Punkt  $a_2$ , so daß

$$\lambda_2(r_2) \leq \mu(r_2, a_2) + \frac{1}{4},$$

schlage um  $a_2$  einen Kreis  $C_2$  mit dem Radius  $r_2$  und bezeichne

$$\lambda_3(r) = \overline{\lim} \mu(r, a) \quad (a \text{ außerhalb } C_1, C_2).$$

Es ist  $\lambda_3(r) \leq \lambda_2(r)$  und daher

$$\lambda_3(r) \leq h(r)$$

für  $r \geq r_2$ .

Ist nun die letzte Beziehung für alle Werte  $r > 0$  in Kraft, so wird die Beziehung (17) für jedes  $a$  außerhalb der Kreise  $C_1, C_2$  bestehen, deren Radien den Gleichheiten  $\lambda_1(r_1) = h(r_1)$ ,  $\lambda(r_2) = h(r_2)$  genügen.

Im entgegengesetzten Fall läßt sich das eingeleitete Rekursionsverfahren weiterführen. Man bestimmt derart der Reihe nach die Kreise  $C_1, C_2, \dots$ ; der Radius  $r_v$  und der Mittelpunkt  $a_v$  von  $C_v$  werden hierbei durch folgende Vorschriften bestimmt:

Es sei

$$\lambda_v(r) = \overline{\lim} \mu(r, a) \quad (a \text{ außerhalb } C_1, \dots, C_{v-1}) \quad (20)$$

und  $r_v > 0$  die obere Grenze der Werte von  $r$ , wofür  $\lambda_v(r) > h(r)$ ; es ist dann  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_v$ ,

$$\lambda_v(r_v) = h(r_v) \quad \text{und} \quad \lambda_v(r) \leq h(r) \quad \text{für} \quad r \geq r_v. \quad (21)$$

Der Mittelpunkt  $a_v$  wird außerhalb der Kreise  $C_1, \dots, C_{v-1}$  beliebig gewählt, so daß

$$\lambda_v(r_v) \leq \mu(r_v, a_v) + \frac{1}{2^v}, \quad (22)$$

was nach der Definition der Größe  $\lambda_v(r)$  möglich ist.

Nach (21) gilt für  $r \geq r_v$

$$\mu(r, a) \leq h(r), \quad (23)$$

wie immer der Punkt  $a$  außerhalb der Kreise  $C_1, \dots, C_{v-1}$  auch liegt.

Wenn nun für ein gewisses  $v$  diese Beziehung für sämtliche Werte  $r > 0$  besteht ( $a$  außerhalb  $C_1, \dots, C_v$ ), so bricht das Verfahren ab. Es gilt dann nur noch zu zeigen, daß die Radien die behauptete Eigenschaft  $\sum_1^v h(r_i) < 6$  besitzen.

Um dies einzusehen, bemerke man, daß der Konstruktion nach ein jeder der Mittelpunkte  $a_v$  außerhalb aller Kreise  $C_\mu \neq C_v$  liegt. Hieraus folgt, daß jeder beliebige Punkt  $z$  der Ebene höchstens von *fünf* Kreisen überdeckt wird; verbindet man nämlich  $z$  mit den Mittelpunkten der überdeckenden Kreise, so bilden immer je zwei der Verbindungsstrecken wegen der erwähnten Eigenschaft der Mittelpunkte einen Winkel  $> \frac{\pi}{3}$ , woraus die Behauptung folgt.

Nach (21) und (22) ist nun

$$\sum_1^v h(r_i) = \sum_1^v \lambda(r_i) \leq \sum_1^v \mu(r_i, a_i) + \sum_1^v \frac{1}{2^i}. \quad (24)$$

Wenn  $e_k$  diejenige Teilmenge von  $E$  ist, deren Punkte von den Kreisen  $C_1, \dots, C_v$  mindestens  $k$ -mal überdeckt werden, so ist wegen der Additivität von  $\mu$ , und da nur die Werte  $k \leq 5$  in Betracht kommen,

$$\sum_1^v \mu(r_i, a_i) = \sum_{k=1}^5 \mu(e_k) \leq 5 \mu(E) = 5, \quad (24')$$

und es ergibt sich aus (24) die Behauptung

$$\sum h(r_i) \leq 6. \quad (17')$$

Setzt sich dagegen das Rekursionsverfahren in infinitum fort, so erhält man eine unendliche Folge von Kreisen  $C_\nu$  ( $|z - a_\nu| \leq r_\nu$ ). Ist dann  $a$  ein Punkt außerhalb aller dieser Kreise (falls es solche Punkte  $a$  gibt) so besteht hier die Beziehung (17) für jedes  $r > 0$ . Nach obigem besteht sie in der Tat sicher für  $r > r_\nu$ , wo  $\nu$  beliebig groß genommen werden kann. Es bleibt also nur noch  $r_\nu \rightarrow 0$  für  $\nu \rightarrow \infty$  nachzuweisen.

Dies folgt unmittelbar daraus, daß die Summe  $\sum_1^\nu h(r_i)$  nach (24) und (24') für jedes  $\nu$  kleiner als 6 ist. Es ist also  $h(r_\nu) \rightarrow 0$  und folglich auch  $r_\nu \rightarrow 0$  für  $\nu \rightarrow \infty$ . Gleichzeitig ergibt sich die behauptete Relation

$$\sum_1^\infty h(r_\nu) \leq 6.$$

Hiermit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

118. Als leichtes Korollar des Hilfssatzes ergibt sich nun der CARTANsche Satz. Es sollen ihm hier einige Bemerkungen über STIELTJES-Integrale vorausgeschickt werden.

Außer der weiter oben erklärten, monoton wachsenden stetigen Funktion  $h(r)$  betrachten wir eine für  $r > 0$  erklärte, monoton abnehmende Funktion  $g(r) > 0$ . Dann gilt für  $0 < r < \varrho$  die Formel der partiellen STIELTJES-Integration

$$\int_{t=r}^{t=\varrho} g(t) dh(t) = g(\varrho)h(\varrho) - g(r)h(r) - \int_{t=r}^{t=\varrho} h(t) dg(t), \quad (25)$$

wo  $g(\varrho) = g(\varrho - 0)$  und  $g(r) = g(r + 0)$ . Hieraus folgt, daß die Integrale

$$\int_{t=0}^{\varrho} g dh \quad \text{und} \quad \int_{t=0}^{\varrho} h dg$$

gleichzeitig endlich oder unendlich sind und, im erstgenannten Fall,

$$\int_{t=0}^{t=\varrho} g dh = g(\varrho)h(\varrho) - \int_{t=0}^{t=\varrho} h dg.$$

In der Tat gilt, wenn der Grenzwert

$$\int_0^{\varrho} g dh = \lim_r \int_r^{\varrho} g dh$$

endlich ist, für jedes  $0 < r < \varrho$

$$g(r)h(r) = g(r) \int_0^r dh \leq \int_0^r g dh \rightarrow 0$$

für  $r \rightarrow 0$ , und die behauptete Beziehung folgt aus (25) für  $r \rightarrow 0$ .

Wenn umgekehrt

$$\int_0^{\varrho} h dg$$

endlich ist, so gilt für  $0 < r < r_1 < \varrho$ :

$$\int_r^{r_1} h \, |dg| \geq h(r) (g(r) - g(r_1)),$$

also

$$h(r)g(r) \leq h(r)g(r_1) + \int_0^{r_1} h \, |dg|,$$

woraus  $h(r)g(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow 0$  folgt. Die Behauptung ergibt sich hieraus wie oben.

**119.** Auf der Menge  $E$  sei nun, außer der Belegung  $\mu$ , eine nicht-negative meßbare Funktion  $f(z)$  des Punktes  $z$  gegeben, die endlich ist außer höchstens für eine Menge  $e_0$ , mit  $\mu(e_0) = 0$ . Wegen der Meßbarkeit von  $f$  ist für jedes  $r \geq 0$  die durch die Ungleichung  $f > r$  bestimmte Menge  $E_r$  von Punkten  $z$  meßbar. Durch die Beziehung

$$\mu(e_r) = \varphi(r)$$

wird  $\varphi$  als eine nichtnegative, mit wachsendem  $r$  monoton abnehmende Funktion von  $r$  erklärt; es ist  $\varphi(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ .

Unter diesen Voraussetzungen ist das LEBESGUE-STIELTJESSCHE Integral von  $f(z)$  in bezug auf die Belegung  $\mu$  und erstreckt über  $E$  (vgl. Nr. 104):

$$\int_E f(z) d\mu$$

wohlbestimmt als der Grenzwert

$$\int_E f(z) d\mu = - \int_{r=0}^{\infty} r d\varphi(r) = - \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_0^{\varrho} r d\varphi. \quad (26)$$

Wir wollen annehmen, daß dieses Integral endlich ist. Für ein beliebiges  $\varrho > 0$  wird dann durch partielle Integration

$$\int_0^{\varrho} r d\varphi = \varrho \varphi(\varrho) - \int_0^{\varrho} \varphi(r) dr. \quad (27)$$

Lassen wir nun  $\varrho$  unbeschränkt wachsen, so nähert sich der absolute Betrag des Integrals links dem endlichen Grenzwert (26). Ferner beweist man, wie oben, daß  $\varrho \varphi(\varrho) \rightarrow 0$  für  $\varrho \rightarrow \infty$ . Man schließt hieraus, daß auch das Integral rechts in (27) gegen einen endlichen Grenzwert strebt, und daß also

$$\int_E f(z) d\mu = - \int_0^{\infty} r d\varphi(r) = \int_0^{\infty} \varphi(r) dr. \quad (28)$$

**120.** Im folgenden betrachten wir von einem Parameter  $a$  abhängige Funktionen von der Form

$$f(z) = g(|z - a|),$$

wo  $g(r) \geq 0$  eine monoton abnehmende Funktion von  $r > 0$  ist, so daß

$$g(0) = \lim_{r \rightarrow 0} g(r) = \infty.$$

Wir fügen noch die Annahme hinzu, daß  $g$  für  $r \rightarrow 0$  so langsam wächst, daß das STIELTJES-Integral

$$\int_0^{\varrho} g dh$$

endlich ist, wobei  $h$  eine Funktion von der im Hilfssatz erklärten Art ist.

**Satz von H. CARTAN.** *Unter den oben gemachten Voraussetzungen über die Funktionen  $g$ ,  $h$  und  $\mu$  ist*

$$\int_E g(|z-a|) d\mu(z) < \int_{h=0}^{h=1} g(r) dh(r), \quad (29)$$

außer möglicherweise für eine Menge von Punkten  $a$ , die man mittels einer Folge von Kreisen mit den Radien  $r_1, r_2, \dots$  überdecken kann, für welche

$$\sum h(r_n) \leq 6.$$

Zum Beweise bestimme man die Zahl  $\varrho$  durch die Gleichung  $h(\varrho) = 1$ . Es wird dann nach (28), für ein gegebenes  $a$ ,

$$\int_E g(|z-a|) d\mu = \int_{r=0}^{\infty} \mu(g(|z-a|) > r) dr = \int_0^{g(\varrho)} + \int_{g(\varrho)}^{\infty},$$

wo  $\mu(g > r)$  die Belegung derjenigen Teilmenge von  $E$  ist, wo  $g(|z-a|) > r$ . Hier ist, wegen  $\mu \leq 1$ ,

$$\int_0^{g(\varrho)} \mu(g > r) dr \leq g(\varrho)$$

und, unter Anwendung von (17), da  $dg \leq 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{g(\varrho)}^{\infty} \mu(g > t) dt &= - \int_{r=0}^{\varrho} \mu(g(|z-a|) > g(r)) dg(r) \\ &= - \int_{r=0}^{\varrho} \mu(r, a) dg(t) \\ &\leq - \int_{r=0}^{\varrho} h(r) dg(r) \\ &= -g(\varrho) + \int_{h=0}^{h=1} g dh, \end{aligned}$$

außer für eine Kreisfolge, deren Radien  $r_n$  der Bedingung (17') genügen.

Durch Addition der zwei letzten Beziehungen ergibt sich dann die Behauptung.

## § 6. Metrische Eigenschaften einer Punktmenge vom harmonischen Maß Null.

121. Wie in der allgemeinen Theorie des harmonischen Maßes erhebt sich auch für die harmonischen Nullmengen die Frage, wie sich das harmonische Maß zu anderen metrischen Bestimmungen derselben Mengen verhält. In den vorhergehenden Paragraphen haben wir dieses Problem bereits gestreift; wir fanden nämlich, daß eine Menge von endlich vielen Punkten stets das harmonische Maß Null hat, während ein Kontinuum immer von positivem harmonischen Maß ist. Der Sprung von endlich vielen zu kontinuierlich vielen Punkten ist indes ein gewaltiger, und es soll deswegen in der Folge der Versuch gemacht werden, durch Heranziehung geeigneter Maßbestimmungen die harmonischen Nullmengen möglichst genau metrisch zu charakterisieren.

Zuerst wollen wir eine einfache hinreichende Bedingung angeben, damit eine Punktmenge  $\alpha$  vom harmonischen Maß Null sei. Diese Beziehung ergibt sich als Korollar eines von LINDBERG [I] schon im Jahre 1918 bewiesenen Satzes. Als eine hinreichende Bedingung, damit eine in der Umgebung einer Punktmenge  $\alpha$  eindeutige und beschränkte harmonische Funktion noch in den Punkten  $\alpha$  harmonisch sei, fand LINDBERG folgendes:

*Für jedes  $\varepsilon > 0$  soll die Punktmenge  $\alpha$  durch eine Folge von Kreisscheiben  $C_\nu$  überdeckt werden können, deren Radien  $r_\nu$  der Beziehung*

$$\sum \frac{1}{\log \frac{1}{r_\nu}} < \varepsilon \quad (30)$$

*genügen.*

Man sagt, eine solche Menge sei vom *logarithmischen Maß Null*.

Vergleicht man nun diesen LINDBERGSchen Satz mit dem in § 4 gegebenen Satz 2 und dessen Zusatz (Nr. 114), so folgt

**Satz 1.** *Eine abgeschlossene Punktmenge vom logarithmischen Maß Null ist auch vom harmonischen Maß Null.*

Der Satz ist eine leichte Folgerung aus dem Hilfssatz von § 2 dieses Abschnitts. Wenn die gegebene Punktmenge  $\alpha$  vom logarithmischen Maß Null innerhalb des Kreises  $|z| < \frac{1}{2}$  gelegen ist, was ohne Einschränkung angenommen werden darf, so überdecke man sie durch eine Folge von Kreisen  $C_\nu$  mit den Radien  $r_\nu$ . Die Kapazität  $e^{-\gamma}$  von  $\alpha$  ist höchstens gleich der Kapazität der Vereinigungsmenge der Überdeckungskreise  $C_\nu$ . Die Kapazität von  $C_\nu$  ist aber gleich  $r_\nu$  und es wird also nach dem erwähnten Hilfssatz

$$\frac{1}{\gamma} < \sum \frac{1}{\log \frac{1}{r_\nu}},$$

woraus ersichtlich ist, daß  $\gamma = \infty$  sein muß, was zu beweisen war.

122. Einige allgemeine Bemerkungen über die Messung der Inhalte von Punkt Mengen sind uns hier nötig. Eine Menge  $\alpha$  heißt vom *Flächenmaß* bzw. *linearen* Maß Null, falls sie sich durch eine Kreisfolge  $C_\nu$  überdecken läßt, so daß die Summe

$$\sum r_\nu^2 \quad \text{bzw.} \quad \sum r_\nu$$

beliebig klein ausfällt. Allgemeiner heißt sie vom  $\lambda$ -dimensionalen Maß Null ( $\lambda > 0$ ), falls entsprechendes für die Summe

$$\sum r_\nu^\lambda$$

gilt. Wenn  $\alpha$  vom  $\lambda_1$ -dimensionalen Maß Null ist, so ist auch ihr  $\lambda_2$ -dimensionales Maß gleich Null, sofern  $\lambda_1 < \lambda_2$  ist.

Wir haben oben noch „logarithmische Nullmengen“ eingeführt. Eine solche Menge ist offenbar stets eine  $\lambda$ -dimensionale Nullmenge, und zwar für jedes  $\lambda > 0$ .

Es ist für unsere Zwecke nützlich, folgende allgemeine Erklärung aufzustellen<sup>1</sup>:

Sei  $h(r)$  eine für  $r > 0$  stetige und monoton wachsende Funktion von  $r$  und  $h(0) = 0$ .

Jeder Punktmenge  $\alpha$  kann eine nichtnegative, endliche oder unendliche Zahl  $m(\alpha, h)$ , das *h-Maß* der Menge  $\alpha$ , folgendermaßen zugeordnet werden. Man überdecke  $\alpha$  durch eine beliebige Folge von Kreisen  $C_\nu$  mit den Radien  $r_\nu \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) und bezeichne mit  $m_\varepsilon(\alpha, h) \geq 0$  die untere Grenze der entsprechenden Summen  $\sum h(r_\nu)$ . Diese Zahl nimmt mit abnehmenden  $\varepsilon$  monoton zu. Man setzt  $m(\alpha, h)$  gleich dem Grenzwert  $\lim_{\varepsilon=0} m_\varepsilon(\alpha, h)$  ( $0 \leq m(\alpha, h) \leq +\infty$ ). Für  $h = \pi r^2$  findet man

das (äußere) Flächenmaß, für  $h = 2r$  das lineare Maß, für  $h = \frac{1}{\log \frac{1}{r}}$  das logarithmische Maß.

123. Wir gehen dazu über, *notwendige* metrische Bedingungen für Punkt Mengen vom harmonischen Maß Null aufzustellen. Dies gelingt einfach mit Hilfe der Resultate der beiden letzten Paragraphen.

Sei  $\alpha$  eine abgeschlossene, beschränkte Punktmenge vom harmonischen Maß Null; es bedeutet keine wesentliche Einschränkung, wenn wir die Annahme hinzufügen, daß  $\alpha$  im Kreise  $|z| < \frac{1}{2}$  liegt. Wir breiten über diesen Kreis eine nichtnegative Belegung  $\mu$  vom Gesamtbetrag 1 aus und bilden das Potential

$$u(z) = \int \log \left| \frac{1}{\xi - z} \right| d\mu.$$

$|\xi| < \frac{1}{2}$

<sup>1</sup> F. HAUSDORFF [1].

Da die ROBINSche Konstante  $\gamma(\alpha) = +\infty$  ist, so wissen wir (§ 2 und § 3), daß die Belegung  $\mu$  so gewählt werden kann, daß das Minimum von  $u$  auf  $\alpha$  beliebig groß wird<sup>1</sup>.

Wir setzen nun  $g(|z - \zeta|) = \log^+ \frac{1}{|z - \zeta|}$ . Hierdurch ist  $g$  als eine nichtnegative, monoton abnehmende Funktion von  $|z - \zeta|$  erklärt, so daß  $g(0) = \infty$ . Sie erfüllt somit die Bedingung des CARTANSchen Satzes.

Sei ferner  $h(r)$  eine für  $r \geq 0$  definierte monoton zunehmende, stetige Funktion von  $r$ , welche für  $r \rightarrow 0$  so schnell gegen Null konvergiert, daß das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{h(r)}{r} dr = - \int_{r=0} h(r) dg(r)$$

endlich ist. Ersetzen wir nun  $h$  durch die Funktion  $\lambda h$ , wo  $\lambda$  so groß ist, daß  $\lambda h(\infty) > 1$ , so können wir das Integral

$$\int_{\zeta}^+ \log^+ \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu$$

mittels des CARTANSchen Satzes nach oben abschätzen, und finden

$$\left. \begin{aligned} u(z) &\leq \lambda \int_{h=0}^{h=\frac{1}{\lambda}} g(r) dh = g(\varrho) - \lambda \int_{r=0}^{r=\varrho} h(r) dg(r) \\ &= \log^+ \frac{1}{\varrho} + \lambda \int_0^{\varrho} \frac{h(r)}{r} dr \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

für jedes  $z$ , außer möglicherweise für die Punkte gewisser Kreise  $C_\nu$ , deren Radien  $r_\nu$  der Ungleichung

$$\sum h(r_\nu) \leq \frac{6}{\lambda}$$

genügen; hierbei bedeutet  $\varrho$  die durch die Gleichung  $h(\varrho) = \frac{1}{\lambda}$  eindeutig bestimmte positive Zahl.

Aus dem obigen Ergebnis schließt man, daß die gegebene Menge  $\alpha$  das  $h$ -Maß Null haben muß. Ist nämlich  $\varepsilon > 0$ , so fixieren wir  $\lambda$ , so daß außer  $\lambda h(\infty) > 1$  auch die Bedingung  $\frac{6}{\lambda} < \varepsilon$  erfüllt ist. Sodann gibt es eine Belegung  $\mu$ , für welche das Potential  $u$  in jedem Punkt von  $\alpha$  größer als die Zahl

$$\log^+ \frac{1}{\varrho} + \lambda \int_0^{\varrho} \frac{h(r)}{r} dr$$

<sup>1</sup> Nimmt man nämlich ein von endlich vielen Jordanbogen begrenztes Näherungsgebiet  $G_1$  des Außengebietes  $G$  von  $\alpha$ , und löst für  $G_1$  das ROBINSche Problem, so wird das Gleichgewichtspotential auf dem zu  $G_1$  komplementären Bereich, und also speziell auf  $\alpha$  einen konstanten Wert annehmen, der für  $G_1 \rightarrow G$  ins Unendliche wächst.



wird. Andererseits ist nach obigem  $u$  höchstens gleich dieser Zahl in jedem Punkt  $z$  außerhalb der Kreise  $C_\nu$ . Also wird  $\alpha$  von diesen Kreisen überdeckt, und da ferner

$$\sum h(r_\nu) \leq \frac{6}{\lambda} < \varepsilon$$

ist, so verschwindet das  $h$ -Maß von  $\alpha$ , was zu beweisen war.

**Satz 2.** Eine Punktmenge vom harmonischen Maß Null ist vom  $h$ -Maß Null für jede Maßfunktion  $h$ , bei welcher das Integral

$$\int_0^1 \frac{h(r)}{r} dr \tag{32}$$

endlich ist.

**124.** Als zulässige Funktion  $h$  kann man z. B.  $h = r^\lambda (\lambda > 0)$  nehmen. Eine harmonische Nullmenge ist also stets vom  $\lambda$ -dimensionalen Maß Null. Man kann sogar

$$h = \frac{1}{\log \frac{1}{r} \log_2 \frac{1}{r} \dots \left(\log_k \frac{1}{r}\right)^{1+\eta}}$$

setzen, wo  $\log_k$  der  $k$ -mal iterierte Logarithmus und  $\eta > 0$  ist. Man sieht also, daß die gefundene notwendige Bedingung sich sehr nahe an die obige hinreichende Bedingung anschließt (Nr. 121). Dem logarithmischen Maß entspricht nämlich die Maßfunktion

$$h = \frac{1}{\log \frac{1}{r}},$$

für welche das Integral (32) allerdings schon unendlich wird; das Verschwinden des harmonischen Maßes gestattet uns also nicht den Schluß zu ziehen, daß die gegebene Menge  $\alpha$  vom logarithmischen Maß Null ist. Daß diese letzte Bedingung in der Tat kein notwendiges Kriterium für eine harmonische Nullmenge ist, soll später durch ein Beispiel gezeigt werden.

Wenn das  $h$ -Maß einer Punktmenge  $\alpha$  positiv ist für eine Maßfunktion, bei welcher das Integral (32) endlich ist, so hat  $\alpha$  nach Satz 2 ebenfalls positives harmonisches Maß. Die Vermutung liegt nun nahe, daß andererseits folgendes gilt:

Wenn die Punktmenge  $\alpha$  endliches  $h$ -Maß hat für eine Maßfunktion  $h$ , bei welcher das Integral (32) divergent ist, so ist  $\alpha$  vom harmonischen Maß Null.

Wenn dem so wäre, so hätte man das Problem der metrischen Charakterisierung einer Punktmenge vom harmonischen Maß Null mit aller erwünschten Genauigkeit gelöst. Ein Beitrag zu dieser Frage soll am Schlusse des Paragraphen gegeben werden.

**125.** Ein interessantes Beispiel für die oben erörterten Zusammenhänge liefern uns die sog. CANTORSchen Punktfolgen. Diese werden durch das folgende einfache Konstruktionsprinzip erklärt:

Aus der Einheitsstrecke  $\Delta$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) entferne man eine offene Strecke  $\bar{\Delta}_1$  von der Länge  $\Delta \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1 - \frac{1}{p}$  ( $p > 1$ ), so daß beiderseits eine abgeschlossene Teilstrecke  $\Delta_1$  von der Länge  $\frac{\Delta}{2p} = \frac{1}{2p}$  übrig bleibt; wir sagen kurz, diese zwei Strecken  $\Delta_1$  seien durch die Operation ( $p$ ) aus  $\Delta$  hervorgegangen.

Die Vereinigungsmenge der Strecken  $\Delta_1$  heie  $E(p)$ . Wiederholt man die Operation ( $p$ ) auf den Strecken  $\Delta_1$ , so erhält man eine aus vier abgeschlossenen, gleichen Teilstrecken  $\Delta_2$  der Gesamtlänge  $\frac{1}{p^2}$  bestehende Teilmenge  $E(p^2)$  von  $E(p)$ . Dieser Prozeß läßt sich weiter unbeschränkt fortsetzen, und man definiert in dieser Weise eine unendliche Folge von ineinander geschachtelten Punktmengen

$$E(p^v) \quad (v = 0, 1, \dots; E(p^0) = \Delta),$$

von denen  $E(p^v)$  aus  $2^v$  punktfremden, abgeschlossenen Teilstrecken  $\Delta_v$  der Länge  $(2p)^{-v}$  zusammengesetzt ist. Die komplementäre Menge  $\bar{E}(p^v)$  enthält  $2^v - 1$  offene Intervalle  $\bar{\Delta}_v$  von der Gesamtlänge  $1 - p^{-v}$ .

Der Durchschnitt sämtlicher Mengen  $E(p^v)$  oder, was auf dasselbe herauskommt, das Komplement der Vereinigungsmenge der komplementären Intervalle  $\bar{\Delta}_v$  ist eine abgeschlossene, nirgends dichte, perfekte Punktmenge  $E(p^\infty)$ . Der Umfang dieser CANTORSchen Menge soll jetzt näher untersucht werden.

**126.** Zunächst ist  $E(p^\infty)$  als eine abgeschlossene, perfekte Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums. Was nun das Maß der Menge betrifft, so bemerke man, daß sie sich durch die Intervallfolge  $E(p_v)$  von der Gesamtlänge  $\frac{1}{p^v}$  überdecken läßt; jedenfalls ist sie also vom linearen Maß Null. Dies hindert nicht, daß ihr harmonisches Maß *positiv* ausfllt; daß dem tatsächlich so ist, soll jetzt bewiesen werden.

Wir betrachten zu diesem Zweck die Folge der ROBINSchen Konstanten  $\gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \dots$  der berdeckungsmengen  $E(p^0), E(p^1), \dots$ ; da diese Mengen als Grenze die CANTORSche Menge  $E(p^\infty)$  haben, so ist  $\lim \gamma_v$  gleich der ROBINSchen Konstante  $\gamma$  jener Menge, und es gilt also zu zeigen, daß  $\gamma$  endlich ist.

Das Anwachsen der Zahlen  $\gamma_v$  überblickt man leicht mit Hilfe folgender einfachen Bemerkung: Es seien  $G$  und  $G'$  zwei Gebiete, welche den Punkt  $\infty$  enthalten und durch eine Ähnlichkeitstransformation  $z' = az + b$  ineinander übergeführt werden können. Wenn  $g(z, \infty) = \log |z| + \gamma + \varepsilon \left(\frac{1}{z}\right)$  die GREENSche Funktion von  $G$  ist, so ist  $g\left(\frac{z' - b}{a}, \infty\right) = \log |z'| + \gamma - \log |a| + \varepsilon \left(\frac{1}{z'}\right)$  die GREENSche Funktion von  $G'$ , und die ROBINSche Konstante  $\gamma'$  von  $G'$  ist also gleich  $\gamma - \log |a|$ .

Die Menge  $E(p^n)$  setzt sich aus zwei, durch die Strecke  $\bar{A}_1$  getrennte, kongruente Teilmengen  $E_1$  und  $E_2$  zusammen, welche im Verhältnis  $1:2p$  der Menge  $E(p^{n-1})$  ähnlich sind. Es ist also

$$\gamma(E_1) = \gamma(E_2) = \gamma_{n-1} + \log 2p. \tag{33}$$

Andererseits hat man für diese ROBINSchen Konstanten die Integralausdrücke

$$\gamma(E_i) = \int_{E_i} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu_i(\zeta) \quad (i = 1, 2),$$

wo  $z$  auf  $E_i$  beliebig gewählt werden darf. Hier ist das dem Element  $|d\zeta|$  entsprechende Differential  $d\mu_i$  gleich dem harmonischen Maß jenes Bogenelementes, gemessen in bezug auf das Außengebiet von  $E_i$  im Punkte  $z = \infty$ . In zwei, in bezug auf den Mittelpunkt  $\zeta = \frac{1}{2}$  symmetrischen Punkten der Mengen  $E_1$  und  $E_2$  sind die Differentialquotienten  $\left| \frac{d\mu_1}{d\zeta} \right|$  und  $\left| \frac{d\mu_2}{d\zeta} \right|$  einander gleich.

Wir setzen nun das Integral

$$u(z) = \int_{E(p^n)} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu(\zeta)$$

mit der Belegung  $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$  vom Gesamtbetrage 1 an. Nach § 3 liegt die ROBINSche Konstante  $\gamma_n$  zwischen dem Maximum und Minimum, welches dieses Integral auf  $E(p^n)$  erreicht.

Es ist

$$u(z) = \frac{1}{2} \int_{E_1} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu_1 + \frac{1}{2} \int_{E_2} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu_2.$$

Hier ist  $0 \leq \log \frac{1}{|z - \zeta|} \leq \log \frac{p}{p-1}$ , sobald  $z$  auf  $E_1$  und  $\zeta$  auf  $E_2$  liegt, und es wird also, für  $z$  auf  $E_1$ ,

$$\frac{1}{2} \int_{E_1} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu_1 = \frac{\gamma(E_1)}{2} \leq u(z) \leq \frac{\gamma(E_1)}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{p}{p-1}.$$

Dieselbe Relation gilt wegen der Symmetrie auch auf  $E_2$ .

Setzen wir nun

$$d = \log \frac{p}{p-1}, \tag{34}$$

so folgt in Verbindung mit (33)

$$\gamma_{n-1} + \log 2p \leq 2\gamma_n \leq \gamma_{n-1} + \log 2p + d. \tag{35}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Beziehung wird schließlich, da  $\gamma_0 = \log 4$  die ROBINSche Konstante der Einheitsstrecke ist<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> Dies bestätigt man leicht durch eine explizite Berechnung der GREENSchen Funktion des Außengebietes.

$$\frac{\log 4}{2^n} + \log 2p \cdot \sum_1^n \frac{1}{2^v} \leq \gamma_n \leq \frac{\log 4}{2^n} + (\log 2p + d) \sum_1^n \frac{1}{2^v},$$

also

$$\log 2p + \frac{\log \frac{2}{p}}{2^n} \leq \gamma_n \leq \log 2p + \frac{\log \frac{2}{p}}{2^n} + d.$$

Die ROBINSche Konstante  $\gamma$  der Menge  $E(p^\infty)$  genügt also den Ungleichungen

$$\log 2p \leq \gamma \leq \log 2p + d = \log \frac{2p^2}{p-1}.$$

Die entsprechende Kapazität liegt zwischen den Grenzen

$$\frac{1}{2p} - \frac{1}{2p^2} \leq C(E(p^\infty)) \leq \frac{1}{2p}.$$

**127.** Eine Modifikation des obigen Verfahrens liegt auf der Hand. Man nehme eine Folge von Zahlen

$$p_0 = 1, p_1, p_2, \dots \quad (p_v > p > 1 \text{ für } v \geq 1)$$

und definiere, ausgehend von der Einheitsstrecke  $E(p_0)$ , eine Folge von Punktmengen

$$E(p_0 p_1 \dots p_n) \quad (n = 0, 1, \dots),$$

von denen  $E(p_0 p_1)$  aus  $E(p_0)$ ,  $E(p_0 p_1 p_2)$  aus  $E(p_0 p_1)$  usw. durch die Operation  $(p_1)$ ,  $(p_2)$  usw. entstehen. Die Menge  $E(p_0 \dots p_n)$  besteht aus  $2^n$  gleichen abgeschlossenen Strecken von der Gesamtlänge

$$\frac{1}{p_0 p_1 \dots p_n}.$$

Als Durchschnittsmenge dieser Folge erhalten wir wieder eine abgeschlossene, nirgends dichte, perfekte Menge  $E(p_0 p_1 \dots)$  von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Das Maß dieser Menge läßt sich wie oben abschätzen. Bezeichnet man durch  $\gamma_{nv}$  die ROBINSche Konstante von  $E(p_0 p_1 p_2 \dots p_n)$  ( $v = 1, \dots, n$ ), wobei also  $\gamma_{n1} = \gamma_n$  die abzuschätzende Konstante ist, so findet man mittels Wiederholung der obigen Schlußweise [vgl. (35)]

$$\gamma_{n2} + \log 2p_1 \leq \gamma_{n1} \leq \gamma_{n2} + \log 2p_1 + d,$$

wo  $d = \log \frac{p}{p-1}$ . Wendet man nun diese Beziehung statt auf  $(\gamma_{n1}, \gamma_{n2})$  auf das Paar  $(\gamma_{n2}, \gamma_{n3})$ ,  $(\gamma_{n3}, \gamma_{n4})$  usw. an, so folgt durch Auflösung der erhaltenen Ungleichungen schließlich

$$\frac{\log 4}{2^n} + \sum_1^n \frac{\log 2p_v}{2^v} \leq \gamma_n \leq \frac{\log 4}{2^n} + \sum_1^n \frac{\log 2p_v + d}{2^v}.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  geht hieraus hervor:

**Satz 3.** Die Punktmenge  $E(p_0 p_1 \dots)$  ist dann und nur dann vom harmonischen Maß Null, wenn die Reihe

$$\sum_1^{\infty} \frac{\log p_\nu}{2^\nu} \tag{36}$$

divergent ist.

128. Dieses Resultat gestattet eine interessante Prüfung der Genauigkeit der obigen zwei allgemeinen Bedingungen für das Verschwinden bzw. Nichtverschwinden des harmonischen Maßes einer beliebigen Punktmenge.

Wir bezeichnen mit

$$t_n = \frac{2^{-n}}{p_0 p_1 \dots p_n} \tag{37}$$

die Länge des Intervalls  $\Delta_n$  der Überdeckungsmenge  $E(p_0 p_1 \dots p_n)$  und definieren eine stetige, monoton abnehmende Funktion  $n(t)$  von  $t$  ( $0 < t \leq 1$ ), so daß

$$n(t) = \nu \text{ für } t = t_\nu \quad (\nu = 0, 1, \dots). \tag{38}$$

Wie  $n(t)$  zwischen den Werten  $t_\nu$  und  $t_{\nu+1}$  gewählt wird, ist für unseren Zweck ohne Belang; es er bietet indes einen gewissen Vorteil,  $n(t)$  so festzulegen, daß

$$\frac{dn}{dt} \geq -\frac{1}{t} \frac{1}{\log 2 p}. \tag{38'}$$

Dies kann stets z. B. dadurch erreicht werden, daß man  $n$  als eine lineare Funktion von  $\log t$  im Intervall  $(t_\nu, t_{\nu+1})$  bestimmt, denn dann wird

$$n(t) = \nu + \frac{\log \frac{t_\nu}{t}}{\log \frac{t_\nu}{t_{\nu+1}}}$$

und daher

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{t} \frac{1}{\log \frac{t_\nu}{t_{\nu+1}}} = -\frac{1}{t} \frac{1}{\log 2 p_{\nu+1}} \geq -\frac{1}{t} \frac{1}{\log 2 p}.$$

Die Funktion

$$\varphi(t) = 2^{-n(t)}$$

genügt folgenden Bedingungen:

1.  $\varphi(t)$  ist im Intervall  $0 < t \leq 1$  positiv und monoton zunehmend.
2. Es ist  $\frac{d \log \varphi}{d \log t} < \Theta < 1$ .
3. Für  $t = t_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) gilt  $\varphi(t_n) = 2^{-n}$ .

Jede solche Funktion  $\varphi(t)$  nennen wir zu der CANTORSchen Menge  $E(p_0 p_1 \dots)$  assoziiert.

Sei umgekehrt  $\varphi(t)$  eine beliebige Funktion, welche die zwei ersten Eigenschaften 1. und 2. besitzt. Setzt man dann

$$n(t) = \frac{1}{\log 2} \log \frac{1}{\varphi(t)}, \quad \text{wobei } n'(t) > \frac{\Theta}{-t \log 2},$$

so wird  $n(t)$  stetig wachsend das Intervall  $(0, \infty)$  durchlaufen, wenn  $t$  stetig von 1 zu 0 herabsinkt. Die Folge der Wurzeln  $t_\nu (> 0)$  der Gleichungen  $n(t) = \nu (\nu = 0, 1, \dots; t_0 = 1)$  ist also mit wachsendem  $\nu$  monoton abnehmend, und es ist wegen 2.

$$-1 = \int_{t=t_{\nu+1}}^{t_\nu} dn > -\frac{\Theta}{\log 2} \log \frac{t_\nu}{t_{\nu+1}},$$

und folglich

$$\frac{t_\nu}{t_{\nu+1}} > 2^{\frac{1}{\Theta}}.$$

Setzt man also  $p_0 = 1$  und für  $\nu \geq 1$

$$2p_\nu = \frac{t_{\nu+1}}{t_\nu},$$

so ist damit eine unendliche Folge

$$p_1, p_2, \dots$$

von Zahlen  $p_n > 2^{\frac{1}{\Theta}-1} > 1$  definiert, so daß die gegebene Funktion  $\varphi(t)$  zu der CANTORSchen Punktmenge  $E(p_0 p_1 \dots)$  assoziiert ist.

129. Wir beweisen nun den Satz:

**Satz 4.** Eine CANTORSche Menge  $E(p_0 p_1 \dots)$  hat positives endliches  $h$ -Maß in derjenigen Maßbestimmung, wo als Maßfunktion  $h$  die assoziierte Funktion  $\varphi$  benutzt wird.

Sei in der Tat  $(I_\nu)$  eine Menge offener Intervalle, welche die CANTORSche Menge überdecken. Wegen der Abgeschlossenheit dieser Menge gibt es dann endlich viele ( $m$ ) punktfremde  $I_\nu$ , welche bereits diese Eigenschaft besitzen<sup>1</sup>, und es genügt also zu zeigen, daß die entsprechende Summe

$$\sum_{\nu=1}^m \varphi\left(\frac{r_\nu}{2}\right),$$

wo  $r_\nu$  die Länge des Intervalls  $I_\nu$  ist, über einer von der Wahl der Überdeckungsfolge  $(I_\nu)$  unabhängigen positiven Schranke liegt.

Tatsächlich ist es hinreichend, dies für die Summe

$$\sum_1^m \varphi(r_\nu)$$

zu zeigen. Diese ist allerdings größer als die obige Summe; es gilt aber nach der Eigenschaft 2 von  $\varphi$

$$\log \frac{\varphi(r)}{\varphi\left(\frac{r}{2}\right)} < \int_{r/2}^r d \log t = \log 2,$$

<sup>1</sup> Dies folgt aus dem HEINE-BORELSchen Überdeckungssatz.

also  $\varphi(r) < 2\varphi\left(\frac{r}{2}\right)$ , so daß

$$\sum \varphi\left(\frac{r_\nu}{2}\right) > \frac{1}{2} \sum \varphi(r_\nu).$$

Da  $E$  abgeschlossen ist, so enthält  $I_\nu$  ein abgeschlossenes Teilintervall  $I'_\nu$ , das die in  $I_\nu$  liegenden Punkte  $E$  überdeckt und deren Endpunkte  $P'_\nu, P''_\nu$  zu  $E$  gehören. Der Konstruktion von  $E$  zufolge sind diese zwei Punkte zugleich, von einem gewissen  $\nu$  ab, Endpunkte gewisser ineinandergeschachtelter Intervalle  $\Delta_n$ . Es sei  $n_\nu$  die größere der ganzen Zahlen  $n'_\nu$  und  $n''_\nu$ , welche so bestimmt sind, daß  $\Delta_{n'_\nu}$  und  $\Delta_{n''_\nu}$  die größten an  $P'_\nu$  und  $P''_\nu$  grenzenden Intervalle  $\Delta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) sind, welche in  $I_\nu$  liegen, und sei  $n$  die größte der endlich vielen Zahlen  $n_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, m$ ). Dann ist die Überdeckungsfolge  $E(p_0 p_1 \dots p_n)$  vollständig in den Intervallen  $I_\nu$ , und also auch in  $I_\nu$  enthalten.

Es sei nun  $q_\nu$  die Anzahl der in  $I_\nu$  gelegenen Intervalle  $\Delta_n$ ; es ist also

$$\sum_{\nu=1}^m q_\nu = 2^n.$$

Sei ferner  $\lambda_\nu$  die kleinste ganze Zahl, für welche  $I_\nu$  mindestens ein Intervall  $\Delta_{\lambda_\nu}$  enthält; es ist also  $\lambda_\nu \leq n$ . Dann ist, da die Länge  $t_{\lambda_\nu}$  dieses Intervalls  $\leq r_\nu$  ist,

$$\varphi(r_\nu) \geq \varphi(t_{\lambda_\nu}) = 2^{-\lambda_\nu}.$$

Zwei aufeinanderfolgende gleiche Intervalle  $\Delta_i$  gehören nicht immer einem und demselben der Intervalle  $\Delta_{i-1}$  an; von zwei aufeinanderfolgenden Paaren hat aber stets das eine diese Eigenschaft. Würde nun  $I_\nu$  drei Intervalle  $\Delta_{\lambda_\nu}$  enthalten, so würde es auch ein  $\Delta_{\lambda_\nu-1}$  überdecken, im Widerspruch zu der Definition von  $\lambda_\nu$ . Es läßt sich also zu dem Intervall  $I_\nu$  eine Gruppe  $G_\nu$  von vier aufeinanderfolgenden Intervallen  $\Delta_{\lambda_\nu}$  finden, von denen mindestens eines zu  $I_\nu$  gehört, und welche zusammen sämtliche  $q_\nu$  in  $I_\nu$  enthaltenen Intervalle  $\Delta_n$  überdecken. Jedes  $\Delta_{\lambda_\nu}$  enthält aber genau  $2^{n-\lambda_\nu}$  Intervalle  $\Delta_n$ ; die Gruppe  $G_\nu$  hat deren somit genau  $2^{n-\lambda_\nu+2}$ , und es ist also

$$q_\nu \leq 2^{n-\lambda_\nu+2} \quad \text{oder} \quad 2^{-\lambda_\nu} \geq \frac{q_\nu}{2^{n+2}}.$$

Hieraus folgt nun, daß

$$\sum_1^m \varphi(r_\nu) \geq \sum_1^m 2^{-\lambda_\nu} \geq \frac{1}{2^{n+2}} \sum_1^m q_\nu = \frac{1}{4},$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Andererseits ist das  $\varphi$ -Maß der Menge  $E$  sicher endlich, denn für die Überdeckungsintervalle  $\Delta_n$  der Länge  $t_n$  gilt

$$\sum \varphi(t_n) = 2^n \varphi(t_n) = 1.$$

Das  $\varphi$ -Maß der CANTORSchen Menge  $E(p_0 p_1 \dots)$  liegt also zwischen den Grenzen  $\frac{1}{8}$  und 1.

**130.** Mit Hinblick auf die allgemeinen Kriterien für das Verschwinden der Kapazität, welche oben hergeleitet wurden, untersuchen wir nun die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t} dt.$$

Es ist

$$\int_{t_n}^1 \frac{\varphi(t)}{t} dt = \sum_{\nu=1}^n \int_{t_\nu}^{t_{\nu-1}} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

und

$$\varphi(t_\nu) \log \frac{t_{\nu-1}}{t_\nu} \leq \int_{t_\nu}^{t_{\nu-1}} \frac{\varphi(t)}{t} dt \leq \varphi(t_{\nu-1}) \log \frac{t_{\nu-1}}{t_\nu}$$

oder, da  $\varphi(t_\nu) = 2^{-\nu}$  und  $\frac{t_{\nu-1}}{t_\nu} = 2p_\nu$ ,

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\log 2 p_\nu}{2^\nu} \leq \int_{t_n}^1 \frac{\varphi(t)}{t} dt \leq 2 \sum_{\nu=1}^n \frac{\log 2 p_\nu}{2^\nu}.$$

**Satz 5.** Das Integral

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

und die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log p_\nu}{2^\nu}$$

sind gleichzeitig konvergent oder divergent.

Aus dem oben bewiesenen Satz folgert man:

**Satz 6.** Die CANTORSche Menge  $E(p_0 p_1 \dots)$  hat dann und nur dann positives harmonisches Maß, wenn das mittels der assoziierten Maßfunktion  $\varphi(t)$  gebildete Integral

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t} dt \tag{39}$$

konvergent ist.

Einen Teil des letzten Satzes hätte man als Folgerung des allgemeinen Kriteriums von Satz 2 ableiten können. Die Menge  $E$  hat nämlich positives  $\varphi$ -Maß. Ist nun das Integral (39) konvergent, so muß gemäß Satz 2 das harmonische Maß von  $E$ , im Einklang mit dem obigen Satz 6, positiv sein.

Satz 6 zeigt aber weiterhin, daß das allgemeine Kriterium von Satz 2 nicht verschärft werden kann:



Wenn  $h(r)$  eine beliebige Maßfunktion ist, welche den Bedingungen 1., 2., 3. von Nr. 128 genügt und für welche das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{h(r)}{r} dr$$

divergent ist, so gibt es stets Mengen, die zwar von positivem  $h$ -Maß, aber vom harmonischen Maß Null sind.

Diejenige CANTORSche Menge, welche der Maßfunktion  $h(r)$  assoziiert ist, besitzt nämlich diese Eigenschaften.

Wählt man z. B.  $h(r) = \frac{1}{\log \frac{1}{r} \dots \log_k \frac{1}{r}}$  ( $k > 1$ ), so ist die zugeordnete

CANTORSche Menge vom harmonischen Maß Null. Sie hat endliches  $h$ -Maß und, wie man bei Anwendung der Relation

$$h(r) \log \frac{1}{r} \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow 0$$

leicht einsieht, *unendliches logarithmisches Maß*. Unser Resultat beweist also, daß das oben gegebene Kriterium von LINDBERG (Satz 1) eine hinreichende, aber keineswegs eine notwendige Bedingung für das Verschwinden des harmonischen Maßes ist.

In den obigen Ergebnissen über die Kapazität der CANTORSchen Mengen kann man überhaupt eine gewisse Rechtfertigung der allgemeinen, in Nr. 124 ausgesprochenen Vermutung erblicken.

## VI. Erster Hauptsatz der Theorie der meromorphen Funktionen.

### § 1. POISSON-JENSENSCHE Formel.

131. Im vorliegenden und in den nachfolgenden Abschnitten werden wir uns mit der Theorie derjenigen analytischen Funktionen beschäftigen, welche in jedem Punkt eines gegebenen schlichten Gebietes  $G$  von *rationalem Charakter*, oder wie man es kürzer ausdrückt, *meromorph* sind. Eine solche Funktion  $w = w(z)$  ist also bis auf Pole in  $G$  regulär; sind diese in unendlicher Anzahl vorhanden, so häufen sie sich gegen den Rand  $\Gamma$  von  $G$ . Wir werden uns ferner auf den einfachsten Fall beschränken, wo  $G$  *einfach* zusammenhängend ist; nach dem Monodromiesatz ist dann  $w(z)$  eindeutig in  $G$ .

Man hat zwei wesentlich verschiedene Fälle zu betrachten, je nachdem die Berandung  $\Gamma$  aus nur einem Punkt (parabolischer Fall) oder aus einem Kontinuum (hyperbolischer Fall) besteht. Nach dem Hauptsatz der Theorie der konformen Abbildung läßt sich  $G$  dann auf die punktierte Ebene  $|z| < \infty$  oder auf einen endlichen Kreis  $|z| < R < \infty$  konform abbilden, und es bedeutet also keine wesentliche Einschränkung, wenn wir uns von vornherein an diese Normalgebiete halten.

Wir betrachten also eine analytische Funktion  $w = w(z)$ , welche in dem endlichen oder unendlichen Kreis  $|z| < R \leq \infty$  meromorph ist. Der Ausdruck  $\log |w|$  ist dann für dieselben Werte  $z$  harmonisch, mit Ausnahme der Pole  $b_\nu$  und der Nullstellen  $a_\mu$  von  $w$ , wo er logarithmische positive bzw. negative Pole besitzt, so daß die Differenz

$$\log |w| - k_\nu \log \left| \frac{1}{z - b_\nu} \right| \quad \text{bzw.} \quad \log |w| - h_\mu \log |z - a_\mu|,$$

wo  $k_\nu$  bzw.  $h_\mu$  die Vielfachheit des Poles  $b_\nu$  bzw. der Nullstelle  $a_\mu$  bezeichnet, für  $z = b_\nu$  bzw.  $z = a_\mu$  harmonisch ist.

Sei nun  $\varrho$  eine Zahl des Intervalls  $0 < \varrho < R$ , so daß die Funktion  $w$  auf dem Kreis  $|z| = \varrho$  von Null und Unendlich verschieden ist. In jedem Pol  $b_\nu$  bzw. in jeder Nullstelle  $a_\mu$  des Kreises  $|z| < \varrho$  ist der Ausdruck

$$g(z, b_\nu) = \log \left| \frac{1}{z - b_\nu} \right| \quad \text{bzw.} \quad g(z, a_\mu) = \log |z - a_\mu|,$$

wo

$$g(z, \zeta) = \log \left| \frac{\varrho^2 - \bar{\zeta} z}{\varrho(z - \zeta)} \right|$$

die GREENSCHE Funktion des Kreises  $|z| \leq \varrho$  bezeichnet, harmonisch. Der Ausdruck

$$\log |w(z)| - \sum_{|b_\nu| < \varrho} g(z, b_\nu) + \sum_{|a_\mu| < \varrho} g(z, a_\mu),$$

wo die Summation über sämtliche in  $|z| < \varrho$  gelegene Pole und Nullstellen zu erstrecken ist, unter Beachtung der entsprechenden Vielfachheiten (d. h. jedes Glied soll so oft mitgezählt werden, wie die Multiplizität des betreffenden Poles bzw. Nullstelle angibt), definiert folglich eine für  $|z| \leq \varrho$  harmonische Funktion. Wendet man auf sie die POISSONSche Integralformel an (II, § 1), und beachtet man, daß die GREENSCHE Funktion für  $|z| = \varrho$  verschwindet, so wird also<sup>1</sup> ( $z = r e^{i\vartheta}$ )

$$\log |w(r e^{i\vartheta})| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(\varrho e^{i\theta})| \left[ \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \vartheta)} \right] d\theta + \left. \begin{aligned} &+ \sum_{|b_\nu| < \varrho} \log \left| \frac{\varrho^2 - \bar{b}_\nu z}{\varrho(z - b_\nu)} \right| - \sum_{|a_\mu| < \varrho} \log \left| \frac{\varrho^2 - a_\mu z}{\varrho(z - a_\mu)} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dieses Ergebnis wurde unter der Voraussetzung hergeleitet, daß die Peripherie  $|z| = \varrho$  weder einen Pol  $b_\nu$  noch eine Nullstelle  $a_\mu$  enthält. Nun sieht man sofort ein, daß sämtliche Glieder in (1) auch für die ausgeschlossenen Werte  $\varrho$  stetig sind, woraus man schließt, daß die Formel für jedes  $\varrho < R$  gilt.

**132.** Setzt man speziell  $z = 0$ , so geht (1) über in

$$\log |w(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(\varrho e^{i\theta})| d\theta + \sum_{|b_\nu| < \varrho} \log \frac{\varrho}{|b_\nu|} - \sum_{|a_\mu| < \varrho} \log \frac{\varrho}{|a_\mu|}. \quad (2')$$

<sup>1</sup> Vgl. T. CARLEMAN [1] und F. u. R. NEVANLINNA [1].

Dies ist die Formel von JENSEN<sup>1</sup>. Die allgemeine Beziehung (1), welche den Wert von  $\log |w|$  in einem inneren Punkt  $z$  des Kreises  $|z| < \varrho$  gibt als Funktion der Randwerte, sowie der im Kreise gelegenen Nullstellen und Pole, kann als eine Zusammenfassung der Formeln von POISSON und von JENSEN betrachtet werden, weshalb sie kurz als die POISSON-JENSENSCHE Formel bezeichnet werden soll. Addiert man in (1) beiderseits noch die in bezug auf die Veränderliche  $z$  konjugiert harmonischen Funktionen, multipliziert mit  $i$ , so ergibt sich (vgl. Nr. 4)

$$\left. \begin{aligned} \log w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(\varrho e^{i\vartheta})| \frac{\varrho e^{i\vartheta} + z}{\varrho e^{i\vartheta} - z} d\vartheta + \\ + \sum_{|b_\nu| < \varrho} \log \frac{\varrho^2 - \bar{b}_\nu z}{\varrho(z - b_\nu)} - \sum_{|a_\mu| < \varrho} \log \frac{\varrho^2 - \bar{a}_\mu z}{\varrho(z - a_\mu)}. \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

Die Formeln (1), (2') und (1') werden in der folgenden Theorie eine grundlegende Rolle spielen.

Wenn der Nullpunkt  $z=0$  entweder eine Nullstelle oder ein Pol von  $w(z)$  ist, so werden die Ausdrücke beiderseits in der JENSENSCHEN Formel unendlich. Um diesen Übelstand zu beseitigen, wende man, falls  $w$  die Entwicklung

$$w(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z_{\lambda+1} + \dots \quad (c_\lambda \neq 0)$$

hat, die Formel (2') auf den Ausdruck  $wz^{-\lambda}$  an. Es wird so

$$\log |c_\lambda| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(\varrho e^{i\vartheta})| d\vartheta + \sum_{0 < |b_\nu| < \varrho} \log \frac{\varrho}{|b_\nu|} - \sum_{0 < |a_\mu| < \varrho} \log \frac{\varrho}{|a_\mu|} - \lambda \log \varrho. \quad (2'')$$

Diese Beziehung läßt sich auf eine für viele Anwendungen günstige Form bringen, wenn man die Anzahlen  $n(r, \infty)$ ,  $n(r, 0)$  der Pole und der Nullstellen von  $w$  im abgeschlossenen Kreis  $|z| \leq r$  einführt, wobei jede Stelle so oft gezählt wird, wie ihre Multiplizität angibt. Die Summen rechts lassen sich dann als STIELTJES-Integrale schreiben, und es wird nach partieller Integration

$$\sum_{0 < |b_\nu| < \varrho} \log \frac{\varrho}{|b_\nu|} = \int_{r=0}^{\varrho} \log \frac{\varrho}{r} d(n(r, \infty) - n(0, \infty)) = \int_0^{\varrho} \frac{n(r, \infty) - n(0, \infty)}{r} dr$$

und in analoger Weise

$$\sum_{0 < |a_\mu| < \varrho} \log \frac{\varrho}{|a_\mu|} = \int_0^{\varrho} \frac{n(r, 0) - n(0, 0)}{r} dr.$$

<sup>1</sup> J. L. JENSEN [I].

Die JENSENSCHE Formel erhält jetzt die Form

$$\log |c_\lambda| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(\varrho e^{i\vartheta})| d\vartheta + \int_0^{\varrho} \frac{n(r, \infty) - n(0, \infty)}{r} dr - \int_0^{\varrho} \frac{n(r, 0) - n(0, 0)}{r} dr + (n(0, \infty) - n(0, 0)) \log \varrho. \quad (2''')$$

Die POISSON-JENSENSCHE Formel haben wir oben als einen Folgesatz der POISSONSCHEN Integralformel hergeleitet. Man hätte jene Formel auch direkt durch Anwendung der GREENSCHEN Transformationsformel (II, § 4) gewinnen können, in derselben Weise wie die speziellere POISSONSCHEN Formel. Wir wollen dies für die JENSENSCHE Formel näher ausführen, wobei wir von der GAUSSSCHEN Transformationsformel

$$\int_G \frac{\partial u}{\partial n} ds = - \int_G \Delta u d\sigma$$

ausgehen, welche sich aus der GREENSCHEN Formel für  $V=1$  ergibt; diese Beweismethode verdient speziell hervorgehoben zu werden, da sie uns in der Folge bei gewissen verwandten Fragen wichtige Dienste leisten wird<sup>1</sup>. Wir wenden die GAUSSSCHE Formel auf die Funktion  $\log |w|$  an, indem wir als Gebiet  $G$  die Kreisfläche  $|z| < r < R$  nehmen, aus der die Pole  $b_\nu$  und Nullstellen  $a_\mu$  isoliert werden durch kleine Kreise vom Radius  $\delta$ ; für  $|z|=r$  wird  $w \neq 0, \infty$  angenommen. Läßt man dann  $\delta$  gegen Null streben, so ergibt sich durch eine einfache Rechnung

$$r \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \log |w(re^{i\varphi})| d\varphi = 2\pi (n(r, 0) - n(r, \infty)).$$

Durch Division mit  $r$  und nachfolgender Integration zwischen den Grenzen  $r_0, r$  ( $0 < r_0 < r < R$ ) findet man

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(r_0 e^{i\varphi})| d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(re^{i\varphi})| d\varphi + \int_{r_0}^r \frac{n(t, \infty) - n(t, 0)}{t} dt,$$

und hieraus weiter für  $r_0 \rightarrow 0$  die JENSENSCHE Formel (2''').

## § 2. Die charakteristische Funktion.

133. Unter den im vorhergehenden Paragraphen gemachten Voraussetzungen werden wir jetzt die JENSENSCHE Formel auf eine für die folgenden Anwendungen zweckmäßige Form bringen.

Hierzu führen wir folgende einfache Bezeichnung ein: Wenn  $\alpha$  eine nichtnegative Zahl ist, so sei  $\overset{+}{\log} \alpha$  die größere der Zahlen  $\log \alpha$  und 0; es ist also

$$\log \alpha = \overset{+}{\log} \alpha - \overset{+}{\log} \frac{1}{\alpha}, \quad |\log \alpha| = \overset{+}{\log} \alpha + \overset{+}{\log} \frac{1}{\alpha}.$$

<sup>1</sup> Für diese Beweismethode vgl. E. LINDELÖF [I].

und ferner, wie man leicht bestätigt,

$$\left. \begin{aligned} \log^+ (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \dots \alpha_p) &\leq \sum_1^p \log^+ \alpha_v, \\ \log^+ \sum_1^p \alpha_v &\leq \sum_1^p \log^+ \alpha_v + \log^+ p. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wir setzen nun in der JENSENSCHEN Formel  $\log |w| = \log^+ |w| - \log^+ \left| \frac{1}{w} \right|$  und schreiben noch der Kürze wegen

$$\left. \begin{aligned} N(r, w) = N(r, \infty) &= \int_0^r \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt + n(0, \infty) \log r, \\ m(r, w) = m(r, \infty) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w(r e^{i\varphi})| d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Es wird dann<sup>1</sup>

$$m(r, w) + N(r, w) = m\left(r, \frac{1}{w}\right) + N\left(r, \frac{1}{w}\right) + \log |c_\lambda|. \quad (2)$$

Wir nehmen jetzt eine beliebige Zahl  $a \neq \infty$  und wenden die obige Beziehung auf die Funktion  $w - a$  an, in dem wir die Anzahl der Wurzeln der Gleichung  $w - a = 0$  im Kreise  $|z| \leq r$  durch  $n(r, a)$  bezeichnen und

$$\left. \begin{aligned} N(r, a) = N\left(r, \frac{1}{w-a}\right) &= \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \log r, \\ m(r, a) = m\left(r, \frac{1}{w-a}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{w(r e^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

setzen. Es wird dann

$$m(r, w - a) + N(r, w - a) = m\left(r, \frac{1}{w - a}\right) + N\left(r, \frac{1}{w - a}\right) + \text{const.} \quad (5)$$

Hier ist

$$N(r, w - a) = N(r, w)$$

und nach (3)

$$\log^+ |w - a| \leq \log^+ |w| + \log^+ |a| + \log 2,$$

$$\log^+ |w| \leq \log^+ |w - a| + \log^+ |a| + \log 2,$$

$$|m(r, w - a) - m(r, w)| \leq \log^+ |a| + \log 2,$$

woraus nach (5)

$$m(r, a) + N(r, a) = m(r, \infty) + N(r, \infty) + \varphi(r),$$

wo  $|\varphi(r)| \leq \log^+ |a| + \log 2 + |\log |c||$ , und  $c$  der erste nicht verschwindende Koeffizient der Laurententwicklung von  $w - a$  im Nullpunkte  $z = 0$  ist.

<sup>1</sup> R. NEVANLINNA [4].

Bezeichnen wir noch

$$T(r, w) = T(r) = m(r, \infty) + N(r, \infty), \tag{6}$$

so können wir zusammenfassend folgendes Ergebnis aussprechen:

**Erster Hauptsatz.** *Zu jeder im Kreise  $|z| < R \leq \infty$  meromorphen Funktion*

$$w(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \dots \quad (c_\lambda \neq 0)$$

*läßt sich für  $0 \leq r < R$  eine Funktion  $T(r, w)$  erklären, so daß für jedes endliche oder unendliche  $a$  die Beziehung*

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r) + \varphi(r), \tag{I}$$

*besteht, wo*

$$|\varphi(r)| \leq \log^+ |a| + |\log |c|| + \log 2$$

*für jedes  $r$  des Intervalls  $(0, R)$  gilt;  $c$  ist der erste nichtverschwindende Koeffizient der Laurententwicklung von  $w(z) - a$ .*

**134.** Dieses Ergebnis zeigt, daß eine für  $|z| < R$  meromorphe Funktion in ihrem Verhalten gegenüber verschiedenen komplexen Zahlen  $a$  (der Wert  $a = \infty$  nicht ausgeschlossen) eine bemerkenswerte Symmetrie aufweist: *Die Summe  $m(r, a) + N(r, a)$  behält für verschiedene Werte  $a$  einen invarianten, durch den Ausdruck  $T(r)$  gegebenen Betrag, bis auf additive Größen, die für  $r < R$  beschränkt sind.*

Von den zwei konstituierenden Gliedern dieser invarianten Summe gibt die Größe  $N(r, a)$  an, wie dicht die Wurzeln der Gleichung  $w = a$  im Mittel im Kreise  $|z| < R$  liegen. Diese *Anzahlfunktion der  $a$ -Stellen* wächst mit  $r$  um so schneller je größer die Anzahl jener Stellen ist.

Das erste Glied  $m(r, a)$ , welches als der Mittelwert von  $\log^+ \left| \frac{1}{w-a} \right|$  (bzw.  $\log^+ |w|$ , falls  $a = \infty$ ) auf der Peripherie  $|z| = r$  definiert ist, erhält wesentliche Beiträge nur von denjenigen Bogen dieser Peripherie, wo der Funktionswert sehr wenig von dem gegebenen Wert  $a$  abweicht. Der Betrag dieser *Schmiegunsfunktion* kann also als ein Maß für die mittlere Abweichung des Funktionswertes  $w$  vom Werte  $a$  auf der Kreislinie  $|z| = r$  betrachtet werden.

Sind die  $a$ -Stellen einer meromorphen Funktion für ein gewisses  $a$  relativ spärlich, so findet dies also einen analytischen Ausdruck darin, daß die entsprechende Anzahlfunktion  $N(r, a)$  für  $r \rightarrow R$  relativ langsam anwächst; im extremen Fall, wo  $a$  ein PICARDScher Ausnahmewert der Funktion ist (so daß  $w \neq a$  für  $|z| < R$  ist), wird  $N(r, a) = 0$ . Dieser Mangel an  $a$ -Stellen findet aber einen Ersatz dadurch, daß die Funktion im Mittel sehr wenig von dem betreffenden Wert  $a$  abweicht; die entsprechende Schmiegunsfunktion  $m(r, a)$  wird also relativ groß ausfallen, so daß die Summe  $m(r, a) + N(r, a)$  ihren für die gegebene Funktion  $w$  charakteristischen Betrag  $T(r, w)$  erreicht.

Wegen der großen Bedeutung der Größe  $T$  für die asymptotischen Eigenschaften der zugehörigen meromorphen Funktion nennen wir sie die *charakteristische Funktion* oder auch die *Charakteristik* von  $w(z)$ .

Es geht aus obigem hervor, daß wenn man als *Ausnahmewerte* einer Funktion  $w$  solche Werte  $a$  bezeichnet, welche die Funktion überhaupt nicht, oder mindestens relativ selten annimmt, man einseitig darauf acht gibt, wie oft die Funktion den Wert  $a$  wirklich erreicht. Berücksichtigt man aber „die totale Affinität der Funktion  $w(z)$  zum Wert  $a$ “, welche nicht allein durch das Vorhandensein von  $a$ -Stellen, sondern auch durch die Stärke der mittleren Konvergenz der Funktion gegen den Wert  $a$  charakterisiert wird, so verschwindet die Ausnahmestellung dieses besonderen Wertes: die Affinität ist gleich stark für alle Werte  $a$ .

Der erste Hauptsatz gibt einen exakten Ausdruck für diese merkwürdige Invarianzeigenschaft einer meromorphen Funktion an, welche für ein richtiges Verständnis der asymptotischen Eigenschaften derselben bedeutungsvoll ist; hierin liegt die große prinzipielle Wichtigkeit dieses allgemeinen Satzes. Außerdem stellt er auch ein bequemes technisches Hilfsmittel dar, welches das Operieren mit meromorphen Funktionen in hohem Grad erleichtert.

Wenn auch das Verhalten einer meromorphen Funktion in dem oben erklärten Sinn allen komplexen Werten  $a$  gegenüber vollkommen symmetrisch ist, so bleibt die Frage nach den *Ausnahmewerten* der Funktion als ein Problem von größtem Interesse übrig.

Nachdem wir im Besitze des ersten Hauptsatzes sind, wird diese Hauptfrage der sog. *Wertverteilungstheorie* zusammenfallen mit der Frage nach der relativen Größe der zwei Komponenten  $m(r, a)$  und  $N(r, a)$  in der invarianten Summe  $m + N$ . Über diese Frage gibt der erste Hauptsatz keinen Aufschluß, und es wird in der Folge eine unserer wichtigsten Aufgaben sein, diesen Satz in jener Richtung zu ergänzen.

**135.** Als Beispiel betrachten wir zuerst die Exponentialfunktion  $w = e^z$ , welche die Werte  $a = 0$  und  $\infty$  als vollständige PICARDSche Ausnahmewerte hat. Eine leichte Rechnung gibt<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} N(r, a) = 0, \quad m(r, a) = \frac{r}{\pi} \quad \text{für } a = 0, \infty, \\ N(r, a) = \frac{r}{\pi} + O(1), \quad m(r, a) = O(1) \quad \text{für } a \neq 0, \infty. \end{aligned}$$

Es ist also die charakteristische Funktion gleich

$$T(r) = \frac{r}{\pi}$$

und, in Übereinstimmung mit dem ersten Hauptsatz,

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r) + O(1) \quad \text{für jedes } a.$$

<sup>1</sup> Wir benutzen hier die LANDAUSche Schreibweise  $O(\varphi(r))$  für jede Größe, welche dividiert durch  $\varphi(r)$  *beschränkt* ist.

Man sieht, daß die zwei Ausnahmewerte  $0, \infty$  die Eigenschaft haben, daß die Exponentialfunktion sich diesen Werten für  $z \rightarrow \infty$  schnell annähert. Sie sind *asymptotische Werte*, oder wie wir nach dem Vorschlag von ULLRICH sagen, *Zielwerte* der Funktion in jedem inneren Winkel der linken bzw. rechten Halbebene.

Ein in vielen Hinsichten lehrreiches Beispiel liefert uns die ganze Funktion

$$w = \int_0^z e^{-t^p} dt,$$

wo  $p$  eine ganze Zahl  $\geq 1$  ist. Der Integrand strebt für  $|z| \rightarrow \infty$  in den Winkeln

$$\left| \arg z - \frac{\nu \pi}{p} \right| < \frac{\pi}{2p} - \varepsilon \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2p-1) \quad (\varepsilon > 0) \quad (W_\nu)$$

gegen Null oder Unendlich, je nachdem  $\nu$  gerade oder ungerade ist: In jenen Winkeln hat das Integral  $w$  je einen endlichen Zielwert

$$a_\mu = e^{-\frac{2\mu\pi i}{p}} \int_0^\infty e^{-r^\nu} dr \quad \left( \mu = \frac{\nu}{2} = 0, 1, \dots, p-1 \right),$$

in diesen strebt  $w$  dagegen gegen Unendlich.

Diese Ausnahmestellung der  $p+1$  Werte  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_p = \infty$  zeigt sich auch im Verhalten der entsprechenden Fundamentalgrößen  $m$  und  $N$ .

In der Tat findet man durch partielle Integration

$$\int_0^z e^{-t^p} dt = -\frac{e^{-z^p}}{p z^{p-1}} (1 + \varepsilon),$$

wo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , wenn  $z \rightarrow \infty$  in den Winkeln  $W_{2\mu+1}$  ( $\mu = 0, \dots, p-1$ ), und es ergibt sich also in denselben Winkel ( $z = r e^{i\varphi}$ )

$$\log |w| \sim -r^p \cos p\varphi,$$

und daraus

$$m(r, \infty) \sim \frac{r^p}{\pi}.$$

Da  $N(r, \infty)$  identisch verschwindet, wird dieser Ausdruck ebenfalls den Betrag der charakteristischen Funktion angeben:

$$T(r, w) \sim \frac{r^p}{\pi}.$$

Wenn der Punkt  $z$  im Winkel  $W_0$  liegt, so ergibt sich

$$\int_0^z e^{-t^p} dt - \int_0^\infty e^{-r^\nu} dr = -\int_z^\infty e^{-t^p} dt = -\frac{e^{-z^p}}{p z^{p-1}} + \frac{p-1}{p} \int_z^\infty \frac{e^{-t^p}}{t^p} dt \sim -\frac{e^{-z^p}}{p z^{p-1}}$$



auf jedem in  $W_0$  liegenden Halbstrahl. Es wird somit

$$\log |w(z) - a_0| \sim -r^p \cos p\varphi$$

und daher

$$m(r, a_0) \sim \frac{r^p}{p\pi}.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$m(r, a_\mu) \sim \frac{r^p}{p\pi}$$

für  $\mu = 0, 1, \dots, p-1$ .

Schließlich ergibt sich für jedes endliche  $a \neq a_\mu$

$$m(r, a) = \varepsilon r^p, \quad \text{wo } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty.$$

Unter Anwendung des ersten Hauptsatzes erhält man also:

$$m(r, a) \sim \frac{r^p}{\pi}, \quad N(r, a) = 0 \text{ für } a = a_p = \infty,$$

$$m(r, a) \sim \frac{r^p}{p\pi}, \quad N(r, a) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{r^p}{\pi} \text{ für } a = a_0, \dots, a_{p-1},$$

$$m(r, a) \sim \varepsilon r^p, \quad N(r, a) \sim \frac{r^p}{\pi} \text{ für } a \neq a_\mu.$$

Die Anzahlfunktion  $N(r, a)$  wächst also für die  $p$  Zielwerte  $a_0, \dots, a_{p-1}$  und  $a_p$  besonders schwach an.

**136.** Die obigen Beispiele scheinen darauf hinzuweisen, daß von den zwei Gliedern der Summe  $m + N$  die Anzahlfunktion  $N$  im allgemeinen, d. h. für die Mehrzahl der Werte  $a$ , im Verhältnis zur Schmiegungsfunktion  $m$  relativ groß ist, und daß also die Bezeichnung „Ausnahmewert“ mit Recht für diejenigen Werte  $a$  vorbehalten werden kann, für welche umgekehrt die Dichtigkeit der  $a$ -Stellen relativ klein ist. Als ein erstes Resultat in dieser Richtung kann der PICARDSche Satz betrachtet werden; es wird aus der nachfolgenden Untersuchung hervorgehen, daß die obige allgemeine Vermutung tatsächlich für ausgedehnte Funktionsklassen zutrifft.

Andererseits ist es einleuchtend, daß derartige Sätze nicht ohne jede Einschränkung für eine für  $|z| < R$  meromorphe Funktion bestehen können. Es ist nämlich zu beachten, daß die obigen Bemerkungen über die relative Größe der Funktionen  $m$ ,  $N$  und  $T$  nur dann einen Sinn haben, wenn die charakteristische Funktion  $T$  nicht für  $|z| < R$  *beschränkt* ist; wäre dies nämlich der Fall, so würde ja im ersten Hauptsatz die Größe  $\varphi$  nicht mehr die Rolle eines unwesentlichen Restgliedes spielen, und die für die vorhergehenden Betrachtungen wesentliche Invarianzeigenschaft der Summe  $m + N$  wird dann sinnlos. Aus der nachfolgenden, näheren Analyse der charakteristischen Funktion wird hervorgehen, daß  $T(r, w)$  für eine in der ganzen endlichen Ebene  $z \neq \infty$  (Fall  $R = \infty$ ) meromorphe Funktion, die nicht konstant ist, für  $r \rightarrow \infty$  stets *unbeschränkt wächst*. Im Falle einer in einem endlichen Kreise  $|z| < R < \infty$  meromorphen Funktion braucht dies dagegen nicht mehr der Fall zu sein. Da die

Charakteristik  $T$ , wie wir bald sehen werden, die bemerkenswerte Eigenschaft hat, eine wachsende Funktion von  $r$  zu sein, so existiert jedenfalls der Grenzwert  $\lim T$  für  $r \rightarrow R$ , und es wird eine für viele Eigenschaften der meromorphen Funktion entscheidendes Merkmal der Funktion sein, ob dieser Grenzwert endlich oder unendlich ausfällt.

**137.** Ehe wir die Charakteristik einer näheren Untersuchung unterwerfen, sollen hier sogleich einige ihrer Eigenschaften zusammengestellt werden, die sich als unmittelbare Folgerungen aus der Definition dieser Größe ergeben.

Aus den Beziehungen (3) schließen wir zunächst: Wenn  $w_1, \dots, w_n$  für  $|z| < R$  meromorphe Funktionen sind, so genügt die Schmiegungsfunktion  $m(r, \infty)$  ihres Produktes der Ungleichung

$$m(r, w_1 \dots w_n) \leq \sum_1^n m(r, w_n).$$

Da ferner, wie man unmittelbar einsieht,

$$N(r, w_1 \dots w_n) \leq \sum_1^n N(r, w_n),$$

so erhält man durch Addition

$$T(r, w_1 \dots w_n) < \sum_1^n T(r, w_n). \quad (7)$$

Speziell wird, wenn  $k \neq 0$  eine beliebige Konstante ist,

$$|T(r, kw) - T(r, w)| \leq |\log k|.$$

In ähnlicher Weise folgt aus der zweiten der Beziehungen (3)

$$T(r, w_1 + \dots + w_n) \leq \sum_1^n T(r, w_n) + \log n.$$

Unter Anwendung derselben Beziehungen findet man speziell

$$|T(r, w - a) - T(r, w)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$$

Ferner ist, für  $w = c_\lambda z^\lambda + \dots (c_\lambda \neq 0)$ , nach der JENSENSCHEN Formel (2)

$$T(r, w) = T\left(r, \frac{1}{w}\right) + \log^+ |c_\lambda|.$$

Da nun eine beliebige linear Transformierte

$$S(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} \quad (\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0)$$

von  $w$  sich aus einer Ähnlichkeitstransformation und aus einer Inversion zusammensetzen läßt, so schließt man aus den obigen Beziehungen, daß die Charakteristiken

$$T(r, w) \quad \text{und} \quad T(r, S(w))$$

sich um eine additive Größe unterscheiden, die für  $r < R$  beschränkt ist.

Die letzte Bemerkung erlaubt uns, die Charakteristik einer *rationalen Funktion*  $w(z)$  von der Ordnung  $m$  einfach zu berechnen. Durch eine vorbereitende lineare Transformation kann man erreichen, daß  $w$  für  $|z| \rightarrow \infty$  gegen einen endlichen Wert strebt. Für alle hinreichend großen Werte  $r$  ist also die Schmiegungsfunktion  $m(r, \infty)$  beschränkt und, da die Gesamtanzahl der Pole von  $w$  gleich  $m$  ist,  $N(r, \infty) \sim m \log r$ , also

$$T(r) \sim m \log r.$$

### § 3. Geometrische Deutung der charakteristischen Funktion.

138. Man verdankt SHIMIZU und AHLFORS eine interessante geometrische Interpretation der Charakteristik  $T(r)$ , welche neues Licht auf die Bedeutung dieser Fundamentalgröße wirft und zugleich in einfacher Weise zu einigen wichtigen Eigenschaften derselben führt<sup>1</sup>.

Unabhängig von den Entwicklungen der zwei ersten Paragraphen dieses Abschnittes gelangt man zu dieser Deutung, wenn man in der  $w$ -Ebene, deren Punkte die Werte der gegebenen, für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphen Funktion darstellen, eine sphärische Metrik einführt, so daß man diese Ebene auf die RIEMANNSCHE Kugel projiziert und als die sphärische Länge eines Bogenelementes  $|dw| = ds$  die Länge  $d\sigma$  des zugeordneten Linienelementes auf der Kugel erklärt, wie dies in I, § 1 näher ausgeführt wurde. Es wird dann

$$d\sigma = \frac{|dw|}{1 + |w|^2}.$$

Bildet man nun (vgl. S. 5) das Verhältnis  $\frac{d\sigma}{|dw|}$  der sphärischen und der euklidischen Länge des Bogenelementes  $dw$ , so wird der Logarithmus des Quotienten

$$u(w) = \log \frac{|dw|}{d\sigma} = \log(1 + |w|^2)$$

eine für jedes endliche  $w$  stetige und nichtnegative Funktion darstellen, welche der Differentialgleichung

$$\Delta u = 4e^{-2u} = \frac{4}{(1 + |w|^2)^2}$$

genügt.

Im unendlich fernen Punkt  $w = \infty$  wird  $u(w)$  logarithmisch unendlich, so daß

$$u(w) = 2 \log |w| + \varepsilon \left( \frac{1}{w} \right),$$

wo  $\varepsilon \left( \frac{1}{w} \right)$  für  $w \rightarrow \infty$  verschwindet.

<sup>1</sup> T. SHIMIZU [1], L. AHLFORS [2]. Auf die Möglichkeit einer solchen Deutung hatte schon früher A. BLOCH [2] hingewiesen.

Nach dieser Vorbereitung setze man für  $w$  die gegebene meromorphe Funktion  $w = w(z)$  ein. Es wird dann

$$v(z) = u(w(z))$$

eine für  $|z| < R$  stetige Funktion, mit Ausnahme der Pole  $b_\nu$  von  $w(z)$ , wo  $v(z) = 2k_\nu \log \left| \frac{1}{z - b_\nu} \right| +$  stetige Funktion, unter  $k_\nu$  die Vielfachheit des Poles  $b_\nu$  verstanden.

In Analogie mit dem in Nr. 132 zur Herleitung der JENSENSchen Formel angewandten Verfahren setzen wir die GAUSSSche Transformationsformel an im Kreise  $|z| \leq r$ , aus dem zuerst die Pole  $b_\nu$  durch kleine Kreise vom Radius  $\delta$  isoliert werden sollen. Da der LAPLACESche Ausdruck beim Übergang zu der Veränderlichen  $z$  in

$$\Delta_z v = \Delta_z u(w(z)) = \Delta_w u \cdot |w'(z)|^2$$

transformiert wird, so ergibt sich durch den Grenzübergang  $\delta \rightarrow 0$

$$r \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} v(r e^{i\varphi}) d\varphi + 4\pi n(r, \infty) = 4 \int_{|z| < r} \frac{|w'(z)|^2}{(1 + |w|^2)^2} df,$$

wo  $df = r dr d\varphi$  das Flächenelement in der  $z$ -Ebene bezeichnet.

Der Integrand rechts stellt das Verhältnis zwischen der sphärisch gemessenen Bildfläche von  $df$  und dem euklidisch gemessenen Flächeninhalt von  $df$  dar. Der Ausdruck

$$A(r) = \frac{1}{\pi} \int_{|z| < r} \frac{|w'|^2}{(1 + |w|^2)^2} df$$

gibt also den durch die gesamte Kugeloberfläche  $\pi$  dividierten Inhalt desjenigen über der Kugel ausgebreiteten RIEMANNschen Flächenstücks  $F_r$  an, auf welches die Kreisfläche  $|z| < r$  durch die Funktion  $w = w(z)$  abgebildet wird.

Dividiert man nun die obige Beziehung beiderseits durch  $r$  und integriert man dann zwischen den Grenzen  $r_0$  und  $r$  ( $0 < r_0 < r < R$ ), so wird

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} v(r e^{i\varphi}) d\varphi + \int_{r_0}^r \frac{n(t, \infty)}{t} dt = \int_{r_0}^r \frac{A(t)}{t} dt + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} v(r_0 e^{i\varphi}) d\varphi.$$

Setzt man hier noch den Ausdruck von  $v$  ein und läßt man  $r_0$  gegen Null streben, so ergibt sich schließlich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{1 + |w(r e^{i\varphi})|^2} d\varphi + N(r, \infty) = \int_0^r \frac{A(t)}{t} dt + \log \sqrt{1 + |w(0)|^2}. \quad (7)$$

Falls  $z = 0$  ein Pol von  $w$  ist, hat man das konstante Glied rechts in (7) durch  $\log |c_\lambda|$  zu ersetzen, wo  $c_\lambda$  dieselbe Bedeutung wie in der JENSENSchen Formel hat.

139. Wir wollen jetzt das Integral links in (7) etwas näher betrachten. Man rechnet leicht nach, daß der chordale Abstand  $k(w, \infty)$  zwischen denjenigen Punkten der RIEMANNschen Kugel, welche den Punkten  $w$  und  $\infty$  entsprechen, gleich

$$k(w, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |w|^2}}$$

ist. Das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{1 + |w(r e^{i\varphi})|^2} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log k(w, \infty) d\varphi \quad (8)$$

bedeutet also den Mittelwert vom Logarithmus des reziproken Wertes der chordalen Entfernung zwischen den Punkten  $w$  und  $\infty$ . Diese nicht-negative Größe erhält also wesentliche Beiträge von denjenigen Bogen des Kreises  $|z| = r$ , wo  $|w|$  groß wird, und sie kann also als ein Maß für die mittlere Annäherung des Funktionswertes  $w$  an den Wert  $\infty$  dienen, genau wie die oben eingeführte Schmiegungsfunktion

$$m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(r e^{i\varphi})| d\varphi.$$

In der Tat unterscheiden sich diese zwei Ausdrücke auch ihren Beträgen nach nur sehr wenig voneinander: Man sieht unmittelbar ein, daß der Mittelwert (8) stets größer als  $m(r, \infty)$  ist; der Unterschied ist aber beschränkt und erreicht seinen maximalen Wert  $\log 2$  für  $|w| = 1$ .

140. Wir werden jetzt untersuchen, wie sich die Formel (7) transformiert, wenn man eine *Kugeldrehung*

$$w_1 = \frac{1 + \bar{a} w}{w - a} \quad (9)$$

ausführt, welche die Werte  $w_1, \infty$  in  $w, a$  überführt. Setzen wir jene Formel zuerst für die durch (9) definierte Funktion  $w_1 = w_1(z)$  an, und ersetzen wir dann  $w_1$  durch den Ausdruck (9), so ist erstens zu bemerken, daß der sphärische Flächeninhalt  $A(t)$  offenbar bei der Drehung *invariant* bleibt. Die Größe  $N$  links geht in  $N(r, a)$  über und der chordale Abstand  $k(w_1, \infty)$  transformiert sich in den chordalen Abstand zwischen  $w$  und  $a$ :

$$k(w, a) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left| \frac{1 + \bar{a} w}{w - a} \right|^2}} = \frac{|w - a|}{\sqrt{1 + |a|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}. \quad (10)$$

Die Beziehung (7) geht also über in

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{k(w(r e^{i\varphi}), a)} d\varphi + N(r, a) = \int_0^r \frac{A(t)}{t} dt + \log \frac{1}{k(w(0), a)}, \quad (11)$$

wo das letzte Glied durch

$$\log \frac{1 + |a|^2}{|c|} = \log \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^\lambda}{k(w, a)}$$

ersetzt werden soll, falls  $w$  für  $z=0$  eine  $\lambda$ -fache  $a$ -Stelle hat;  $c$  ist der erste nicht verschwindende Koeffizient der TAYLORSchen Entwicklung von  $w - a$ .

Man bestätigt wieder leicht, daß der Mittelwert von  $|\log k(w, a)|$ , stets größer als der oben eingeführte Mittelwert

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{w(r e^{i\varphi}) - a} \right| d\varphi$$

ist, andererseits aber auch kleiner als dieser Ausdruck vermehrt um eine hinreichend große, nur von  $a$  abhängige Größe.

Für viele Fragen empfiehlt es sich nun, die Schmiegun g der Funktion  $w$  an den Wert  $a$ , statt durch  $m(r, a)$ , durch den Mittelwert von  $|\log k(w, a)|$  zu messen. Überhaupt ist zu bemerken, daß es bei solchen Maßfunktionen auf *beschränkte* additive Glieder nicht ankommt; man könnte also, ohne Mißverständnisse zu befürchten, überhaupt jede Größe, welche sich vom Mittelwert  $m$  um ein solches Glied unterscheidet, als Schmiegun gs-funktion benutzen und sogar mit demselben Buchstaben  $m$  bezeichnen. Demnach setzen wir jetzt

$$m(r, a; w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{k(w(r e^{i\varphi}), a)} d\varphi = \log \frac{1}{k(w(t), a)}, \quad (12)$$

wo  $k$  durch die Formel (10) definiert ist.

Wenn  $w(0) = a$  ist, so hat man das letzte Glied rechts durch den endlichen Grenzwert

$$\lim \log \frac{|z|^\lambda}{k(w, a)}$$

zu ersetzen, wo  $\lambda$  die Vielfachkeit der  $a$ -Stelle  $z=0$  bezeichnet. Durch diese Vorschriften ist die neue Schmiegun gs-funktion  $m$  für jedes endliche oder unendliche  $a$  definiert.

**141.** Zusammenfassend gilt also:

Wenn die Größe  $N(r, a; w) = N(r, a)$  durch die Beziehung (4') und der Ausdruck  $m(r, a; w)$  durch die Formel (12) definiert wird, so gilt für jedes  $0 \leq r < R$

$$m(r, a; w) + N(r, a; w) = \int_0^r \frac{A(t)}{t} dt, \quad (I')$$

wo  $A(t)$  die durch  $\pi$  dividierte Fläche desjenigen über der RIEMANNschen Kugel ausgebreiteten RIEMANNschen Flächenstücks  $F_t$  bezeichnet, auf welche die Funktion  $w(z)$  die Kreisfläche  $|z| \leq t$  abbildet.

Dieser Satz, der im wesentlichen als identisch mit dem ersten Hauptsatz betrachtet werden kann, deckt in schöner Weise die Symmetrie im Verhalten einer meromorphen Funktion gegenüber allen Werten  $a$  auf. Der Vorteil dieser neuen Fassung des Hauptsatzes liegt darin, daß sie die frühere angenäherte Invarianz der Summe  $m + N$  in eine exakte verwandelt hat. Als *charakteristische Funktion*  $T$  können wir nun, mit ebenso großem Recht wie die Summe  $m(r, \infty) + N(r, \infty)$ , das Integral

$$\int_0^r \frac{A(t)}{t} dt \quad (13)$$

definieren, welches von jener Summe sich um eine additive Größe unterscheidet, deren Betrag

$$\log 2 + \log_k \frac{1}{(w(0), \infty)}$$

nicht übersteigt.

Wir werden im folgenden den Ausdruck (13) als die *sphärische Normalform der Charakteristik*  $T(r)$  bezeichnen, und für ihn, wo keine Mißverständnisse zu befürchten sind, ebenfalls die abgekürzte Bezeichnung  $T(r)$  benutzen.

**142.** Durch diese Modifikation in der Definition der Charakteristik  $T(r)$  werden, außer einer interessanten geometrischen Deutung dieser Größe, zugleich einige neue wichtige Eigenschaften derselben gewonnen.

Die Summe  $T(r) = m(r, a; w) + N(r, a; w)$  ist eine wachsende Funktion von  $r$  und eine konvexe Funktion von  $\log r$ .

In der Tat ist nach (I')

$$\frac{d(m + N)}{d \log r} = A(r),$$

also gleich dem mit wachsendem  $r$  zunehmenden sphärischen Flächeninhalt von  $F_r$ , woraus die Behauptung folgt.

Dieses Resultat ist nicht trivial, denn von den zwei Gliedern der invarianten Summe ist allerdings  $N$  schon eine wachsende und konvexe Funktion von  $\log r$ , der Mittelwert  $m$  dagegen hat i. a. nicht diese Eigenschaft. Für ein Polynom z. B., wird der Ausdruck  $m(r, 0; w)$  offenbar für alle hinreichend großen Werte  $r$  verschwinden, während er für jeden Wert  $r$ , für welchen das Polynom eine Nullstelle hat, sicher positiv ausfällt.

Es ist nicht ohne Interesse, zu bemerken, daß der obige Satz über die Summe  $m + N$  auch dann gilt, wenn man die Schmiegunsfunktion durch die ursprüngliche, einfache Definition (4') erklärt. Dies läßt sich nach verschiedenen Methoden beweisen; der nachfolgende Nachweis rührt von H. CARTAN her<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> H. CARTAN [2].

Wir nehmen vorerst an, daß der Wert  $w(0)$  der gegebenen meromorphen Funktion endlich sei. Wendet man dann die JENSENSCHE Formel auf die Funktion  $w(z) - e^{i\vartheta}$  an, wo  $\vartheta$  eine beliebige reelle Zahl ist, so wird

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(re^{i\varphi}) - e^{i\vartheta}| d\varphi + N(r, \infty) = N(r, e^{i\vartheta}) + \log |w(0) - e^{i\vartheta}|.$$

Wir multiplizieren diese Identität mit  $\frac{d\vartheta}{2\pi}$  und integrieren von 0 bis  $2\pi$ . Es wird dann erstens

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, \infty) d\vartheta = N(r, \infty),$$

und nach dem GAUSSSchen Mittelwertsatz, falls  $|w(0)| \geq 1$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\vartheta} - w(0)| d\vartheta = \log |w(0)|,$$

während im Falle  $|w(0)| < 1$ , nach demselben Satz,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\vartheta} - w(0)| d\vartheta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(0)e^{-i\vartheta} - 1| d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(0)| e^{i\vartheta} - 1| d\vartheta = \log 1 = 0, \end{aligned}$$

so daß also ohne jede Einschränkung

$$\frac{1}{2\pi} \int \log |w(0) - e^{i\vartheta}| d\vartheta = \log^+ |w(0)|. \quad (14)$$

Ferner wird für  $z = re^{i\varphi}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(z) - e^{i\vartheta}| d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w - e^{i\vartheta}| d\vartheta.$$

Hier ist der Wert des letzten Integrals gemäß (14) gleich  $\log^+ |w(re^{i\varphi})|$ , und das betreffende Glied wird also gleich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w(re^{i\varphi})| d\varphi = m(r, \infty).$$

Zusammenfassend haben wir also durch Integration der JENSENSchen Formel gefunden

$$T(r) = m(r, \infty) + N(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, e^{i\vartheta}) d\vartheta + \log^+ |w(0)|. \quad (15)$$



Diese Formel gilt auch für den Anfangswert  $w(0) = \infty$ ; man hat nur das konstante Glied  $\log |w(0)|$  rechts durch  $\log |c|$  zu ersetzen, wo  $c$  der erste nicht verschwindende Koeffizient der Laurententwicklung von  $w$  im Nullpunkte ist.

Da  $N$  eine wachsende, konvexe Funktion von  $\log r$  ist, so folgt, daß auch das Integral rechts in (15) und somit auch der Ausdruck  $T(r)$  dieselbe Eigenschaft hat, was zu beweisen war.

Die an sich interessante CARTANSche Beziehung (15) kann auch in bemerkenswerter Weise geometrisch gedeutet werden. Das Integral rechts ist gleich

$$\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\vartheta}) d\vartheta = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} n(t, e^{i\vartheta}) d\vartheta.$$

Hier bedeutet das innere Integral offenbar die gesamte Länge  $l(t)$  derjenigen Bogen des Einheitskreises  $|w|=1$ , welche von den Funktionswerten  $w$  für  $|z| \leq t$  überdeckt werden, wobei jeder Bogen so oft mitgezählt wird wie die Anzahl der Überdeckungen angibt, oder anders ausgedrückt:  $l(t)$  ist die gesamte Länge derjenigen Bogen des RIEMANNschen Flächenstücks  $F_t$ , welche sich auf den Einheitskreis  $|w|=1$  projizieren.

Es ist also

$$\frac{dT(r)}{d \log r} = l(r), \tag{16}$$

wo  $l(r)$  die Gesamtlänge der über dem Kreis  $|w|=1$  liegenden Bogen der Fläche  $F_r$  ist.

### § 4. Verallgemeinerungen.

143. Die zuletzt besprochene Integrationsmethode von H. CARTAN läßt sich in bemerkenswerter Weise verallgemeinern. Wir denken uns über einer beschränkten, abgeschlossenen Menge  $E$  von Punkten der Ebene eine nichtnegative Belegung  $\mu$  vom Gesamtbetrage 1 verteilt. Wenn dann  $w(z)$  eine für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphe Funktion ist, so setze man die JENSENSche Formel

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(re^{i\varphi}) - a| d\varphi + N(r, \infty) = N(r, a) + \log |w(0) - a|$$

an ( $a \neq \infty, w(0) \neq \infty$ ), multipliziere beiderseits mit  $d\mu(a)$  und integriere über die Punktmenge  $E$ . Es wird

$$u(w(0)) + N(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w(re^{i\varphi})) d\varphi + \int_E N(r, a) d\mu, \tag{17}$$

wo

$$u(w) = \int_E \log \left| \frac{1}{w-a} \right| d\mu$$

das logarithmische Potential der Massenbelegung  $\mu$  im Punkte  $w$  ist. In der obigen allgemeinen Fassung wurde die Beziehung (17) von O. FROSTMAN angegeben<sup>1</sup>.

Das Integral

$$\int_{\mathbb{E}} N(r, a) d\mu = \int_0^r \frac{\Omega(t)}{t} dt,$$

wo

$$\Omega(t) = \int_{\mathbb{E}} n(t, a) d\mu,$$

hat wieder eine interessante geometrisch-physikalische Bedeutung. Die Größe  $\Omega(r)$  ist gleich der gesamten Masse, welche über dem RIEMANNschen Flächenstück  $F_r$  verteilt ist, worauf die meromorphe Funktion  $w(z)$  die Kreisscheibe  $|z| \leq r$  abbildet, falls jedem Flächenelement  $e$  dieser Fläche die Masse  $\mu(e)$  zugeordnet wird.

144. Die allgemeine Beziehung (17), die uns in der Folge noch wichtige Dienste leisten wird, enthält die Ergebnisse von § 3 als spezielle Fälle. Setzt man zuerst  $d\mu$  gleich dem durch  $\pi$  definierten sphärischen Flächenelement ( $a = |a|e^{i\alpha}$ )

$$d\mu = \frac{a d|a| d\alpha}{\pi(1 + a^2)^2},$$

so wird

$$u(w) = -2 \int_0^{|w|} \frac{a \log |w|}{(1 + a^2)^2} d|a| = -2 \int_{|a|}^{\infty} \frac{|a| \log |a|}{(1 + a^2)^2} d|a| - \log \frac{1}{\sqrt{1 + |w|^2}}.$$

Ferner wird  $\Omega(r)$  gleich dem sphärischen Flächeninhalt  $A(r)$  der RIEMANNschen Fläche  $F_r$ , und die Beziehung (17) geht also über in

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{1 + \overline{w}(r e^{i\varphi})}^2 d\varphi + N(r, \infty) = \int_0^r \frac{d(t)}{t} dt + \log \sqrt{1 + \overline{w}(0)}^2,$$

was mit dem ersten Hauptsatz in der SHIMIZU-AHLFORSSchen Form (7), § 3 übereinstimmt.

Für eine zweite Anwendung der Fundamentalbeziehung (17) nehmen wir als Menge  $E$  eine beliebige Punktmenge von positivem harmonischen Maß. Setzt man dann für  $\mu$  eine Belegung ein, welche das ROBINSche Problem für die Menge  $E$  löst (Nr. 114), so wird das Potential  $u(w)$  gleich der Summe

$$u(w) = -g(w, \infty) + \gamma,$$

wo  $g$  die GREENSche Funktion des von  $E$  berandeten Außengebiets ist und  $\gamma$  die entsprechende ROBINSche Konstante bezeichnet. Wählt man  $E$  insbesondere als die Kreislinie  $|w| = 1$ , so wird  $-u$  für  $|w| \geq 1$  gleich der GREENSchen Funktion  $\log |w|$  des Kreisäußern und  $u = 0$  für  $|w| \leq 1$ ; ferner wird  $d\mu = \frac{d\vartheta}{2\pi}$ . Man findet also den CARTANSchen Satz wieder.

<sup>1</sup> O. FROSTMAN [2], [3].

Falls  $E$  positive Kapazität hat, so besteht ebenfalls ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Mittelwert des oben betrachteten Gleichgewichtspotentials  $u$  und der Schmiegungsfunktion  $m(r, \infty)$ . Angenommen, daß die Punktmenge  $E$  im Kreise  $|a| \leq R (R \geq 1)$  liegt, so wird für  $|w| \geq 2R$

$$\log \frac{2}{3} \leq \log \frac{1}{1 + \left| \frac{a}{w} \right|} \leq \log \left| \frac{w}{w-a} \right| \leq \log \frac{1}{1 - \left| \frac{a}{w} \right|} \leq \log 2,$$

und daher, wegen

$$u(w) = \log \left| \frac{1}{w} \right| + \int_E \log \left| \frac{w}{w-a} \right| d\mu,$$

$$u(w) = \log \left| \frac{1}{w} \right| + \langle \log 2 \rangle.$$

Für  $|w| \leq 2R$  ist wiederum einerseits (vgl. Nr. 112)  $u \leq \gamma$ , andererseits, da  $u$  sein Minimum auf der Kreislinie  $|w| = 2R$  erreicht,  $u(w) \geq -\log 2R - \log 2$ , somit

$$\langle u(z) \rangle < \gamma + \log 4R < \gamma + \log 6R - \log^+ |w|.$$

Zusammenfassend gilt also für jedes  $w$

$$u(w) = -\log^+ |w| + \langle \gamma + \log 6R \rangle,$$

und es wird folglich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w(r e^{i\varphi})) d\varphi = -m(r, \infty) + \langle \gamma + \log 6R \rangle.$$

Führt man dies in die Fundamentalbeziehung (17) ein, so gelangt man zu folgendem Satz:

Wenn  $E$  eine Punktmenge von positivem harmonischen Maß und  $\mu$  eine nichtnegative, über  $E$  ausgebreitete Massenbelegung von der Gesamtmasse 1 ist, welche das ROBINSsche Problem für  $E$  löst, so genügt die charakteristische Funktion  $T(r)$  einer beliebigen für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphen Funktion der Beziehung

$$T(r) = \int_E N(r, a) d\mu + o(1). \tag{18}$$

Hieraus ergibt sich für  $T(r)$  eine neue physikalische Deutung, welche als eine Verallgemeinerung der im § 3 angegebenen Interpretation von CARTAN betrachtet werden kann, und diese als Spezialfall enthält.

Sei  $E$  eine beliebige Punktmenge von positivem harmonischen Maß. Verteilt man über  $E$  eine nichtnegative Einheitsmasse, so daß das von ihr erzeugte Potential auf  $E$  eine möglichst kleine obere Grenze hat, so ist die Charakteristik  $T(r)$  einer beliebigen meromorphen Funktion bis auf ein beschränktes Glied gleich dem Mittelwert

$$\int_0^r \frac{\Omega(t)}{t} dt,$$

wo  $\Omega$  gleich der gesamten Masse ist, welche die Bildfläche  $F_r$  von  $|z| \leq r$  trägt, wenn man jedes Flächenelement von  $F_r$  mit dem über demselben liegenden Massenelement  $d\mu$  belegt.

**145.** Wir haben oben darauf aufmerksam gemacht, daß der erste Hauptsatz, welcher die Invarianz der Summe  $m(r, a) + N(r, a)$  für alle Werte  $a$  behauptet, keinen Aufschluß über die relative Größe der zwei Glieder  $m$  und  $N$  gibt. Der obige Satz zeigt nun, daß die Anzahlkomponente  $N$  i. a. die *Hauptkomponente* der Summe  $m + N$  ist. Integriert man nämlich jene Summe, die bis auf ein beschränktes Glied gleich der Charakteristik  $T(r) = m(r, a) + N(r, a)$  ist, nach Multiplikation mit  $d\mu$  über die Punktmenge  $E$ , so wird

$$T(r) = \int_E N(r, a) d\mu + \int_E m(r, a) d\mu + O(1),$$

woraus unter Beachtung von (18) folgt:

*Das über eine Punktmenge  $E$  von positivem harmonischen Maß erstreckte Integral*

$$\int_E m(r, a) d\mu,$$

wo  $\mu$  die zu  $E$  gehörige ROBINSche Belegung ist, ist für jedes  $r$  beschränkt.

Dieser Satz soll später noch näher analysiert werden. Hier begnügen wir uns damit, einen unmittelbaren Folgesatz der allgemeinen Beziehung (18) hervorzuheben:

*Wenn die Anzahlfunktion  $N(r, a)$  für eine Menge von Werten  $a$  von positivem harmonischen Maß gleichmäßig beschränkt ist, so ist auch die Charakteristik  $T(r)$  beschränkt.*

Für eine in der ganzen Ebene  $z \neq \infty$  meromorphe Funktion  $w(z)$  hat dieser Satz wenig Interesse; die Beschränktheit von  $N(r, a)$  bedeutet ja hier, daß  $N = 0$  (vgl. S. 167), die Beschränktheit von  $T$  wiederum, daß  $w(z)$  sich auf eine Konstante reduziert (dies soll in VII, § 1 gezeigt werden). Nach dem PICARDSchen Satz ergibt sich indes die Konstanz von  $w(z)$  schon als Folgerung des Verschwindens von  $N(r, a)$  für drei verschiedene Werte  $a$ .

Dagegen ist das obige Resultat von großer Bedeutung, falls  $w(z)$  nur in einem *endlichen* Kreis meromorph ist. Hier spielen die Funktionen von beschränkter Charakteristik eine hervorragende Rolle, wie aus dem nächstfolgenden Abschnitt hervorgehen wird, wo wir auch eine wichtige Anwendung aus dem obigen Satz geben werden.

**146.** Wir haben gefunden, daß der Mittelwert

$$\int_0^r \frac{\Omega(t)}{t} dt = \int_{(a)} N(r, a) d\mu(a),$$

wo  $\Omega$  die von der Bildfläche  $F_r$  getragene Masse bezeichnet, bei besonderer Wahl der über die Grundebene ( $w$ -Ebene) ausgebreiteten, nichtnegativen Einheitsmasse  $\mu$  im wesentlichen gleich der Charakteristik  $T(r)$  wird. Es ist für spätere Zwecke wichtig zu bemerken, daß dieser Mittelwert für eine ganz beliebige Belegung  $\mu$  *nicht wesentlich größer* als  $T$  ausfallen kann. Auf Grund des ersten Hauptsatzes, nach welchem  $N(r, a) \leq N(r, a) + m(r, a) < T(r) + O(1)$  ist, scheint dies fast einleuchtend zu sein. Indes ist die Größe  $O(1)$  bei Anwendung der ursprünglichen Definition  $T(r) = m(r, \infty) + N(r, \infty)$  der Charakteristik nicht gleichmäßig beschränkt und die Abschätzung muß deshalb genau ausgeführt werden.

Eine brauchbare Grundlage hierfür bietet uns die sphärische, exakt invariante Normalform [VI, § 3 (11)]

$$T(r) = \int_0^r \frac{A(t)}{t} dt = N(r, a) + \frac{1}{2\pi} \int \log \frac{1}{k(w(r e^{i\varphi}), a)} d\varphi - \log \frac{1}{k(w_0, a)}$$

der Charakteristik, wo

$$k(w, a) = \frac{|w - a|}{\sqrt{1 + |w|^2} \sqrt{1 + |a|^2}}$$

den chordalen Abstand der Projektionen von  $w$  und  $a$  auf der RIEMANNschen Kugel bezeichnet und  $w_0 = w(0)$  ist. Wegen  $k \leq 1$  wird

$$N(r, a) \leq T(r) + \log \frac{1}{k(w_0, a)}$$

und also

$$\int_{(a)} N(r, a) d\mu \leq T(r) + P(w_0), \quad (19)$$

wo

$$P(w) = \int_{(a)} \log \frac{1}{k(w, a)} d\mu$$

das „sphärisch-logarithmische“ Potential<sup>1</sup> der Belegung  $\mu$  definiert, welches aus dem gewöhnlichen logarithmischen Potential

$$u(w) = \int_{(a)} \log \frac{1}{|w - a|} d\mu$$

hervorgeht durch Addition des Zusatzgliedes

$$\log \sqrt{1 + |w|^2} + \int_{(a)} \log \sqrt{1 + |a|^2} d\mu.$$

Die Beziehung (19) wird uns in der allgemeinen Wertverteilungslehre (IX) noch wichtige Dienste leisten. Bei den Anwendungen hat man stets die Massenbelegung  $\mu$  so zu wählen, daß der Potentialwert  $P(w_0)$ , der den größten möglichen Überschuß des Integrals  $\int \Omega d \log r$  über die Charakteristik  $T(r)$  angibt, *endlich* ausfällt.

<sup>1</sup>Vgl. hierzu L. AHLFORS [8].

## VII. Beschränktartige Funktionen.

### §1. Quotientendarstellung einer Funktion von beschränkter Charakteristik.

147. Da die charakteristische Funktion  $T(r)$  einer für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphen Funktion mit wachsendem  $r$  zunimmt, so existiert jedenfalls der Grenzwert

$$T(R) = \lim_{r \rightarrow R} T(r),$$

und man hat zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem  $T(R) = \infty$  oder  $T(R) < \infty$  ist.

Sei zunächst  $R = \infty$ . Die Charakteristik  $T(r)$  unterscheidet sich vom Integral

$$\int_0^r \frac{A(t)}{t} dt$$

um ein beschränktes Glied. Wenn  $w$  nicht konstant ist, so ist der sphärische Flächeninhalt  $A(t)$  der Bildfläche des Kreises  $|z| \leq t$  für jedes  $t > 0$  positiv und, wenn  $r_0$  eine beliebige positive Zahl bezeichnet,  $A(r) > A(r_0) > 0$  für  $r > r_0$ . Also ist für  $r > r_0$

$$\int_0^r \frac{A(t)}{t} dt > \int_{r_0}^r \frac{A(t)}{t} dt > A(r_0) \log \frac{r}{r_0}$$

und daher

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r)}{\log r} > 0;$$

daraus folgt der Satz:

*Wenn die charakteristische Funktion  $T(r)$  einer in der Ebene  $z \neq \infty$  meromorphen Funktion beschränkt ist, oder allgemeiner, wenn schon*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r)}{\log r} = 0,$$

*so reduziert sich die Funktion  $w$  auf eine Konstante.*

148. Bei der nachfolgenden Untersuchung der Funktionen von beschränkter Charakteristik können wir uns also an Funktionen halten, die nur in einem *endlichen* Kreis meromorph sind. Es bedeutet dann keine weitere Einschränkung anzunehmen, daß dieser der Einheitskreis ist.

Sei also  $w(z)$  für  $|z| < 1$  meromorph und

$$T(1) = \lim_{r \rightarrow 1} T(r) \text{ endlich.}$$

Wir wählen im Kreise  $|z| < \varrho < 1$  einen Punkt  $z_0 = r_0 e^{i\vartheta_0}$  ( $r_0 < \varrho$ ) und bezeichnen durch  $g_\varrho(z, z_0)$  die GREENSCHE Funktion

$$g_\varrho(z, z_0) = \log \left| \frac{\varrho^2 - z z_0}{\varrho(z - z_0)} \right|$$

dieses Kreises und durch  $-h(z, z_0)$  ihre, in bezug auf die Veränderliche  $z$  bestimmte, konjugierte harmonische Funktion.

Unter der Annahme, daß  $z_0$  keine Null- oder Unendlichkeitsstelle der Funktion  $w(z)$  ist, welche nichtkonstant vorausgesetzt wird, setzen wir die POISSON-JENSENSENsche Formel an:

$$\log |w(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(\rho e^{i\theta})| \frac{\rho^2 - r_0^2}{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(\theta - \varphi_0)} d\theta + \sum_{|b_\nu| < \rho} g_\rho(z_0, b_\nu) - \sum_{|a_\mu| < \rho} g_\rho(z_0, a_\mu),$$

wo  $a_\mu$  und  $b_\nu$  die Nullstellen und Pole von  $w(z)$  bezeichnen. Schreibt man hier  $\log |w| = \log^+ |w| - \log^+ \left| \frac{1}{w} \right|$  und ferner

$$\left. \begin{aligned} U_\rho(r e^{i\varphi}, w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w(\rho e^{i\theta})| \frac{\rho^2 + r^2 - \frac{\rho^2 - r^2}{2\rho r \cos(\theta - \varphi)}}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} d\theta, \\ V_\rho(z, w) &= \sum_{|b_\nu| < \rho} g_\rho(z, b_\nu), \\ W_\rho(z, w) &= U_\rho(z, w) + V_\rho(z, w), \end{aligned} \right\} (1)$$

so wird also

$$\log |w(z)| = W_\rho(z, w) - W_\rho\left(z, \frac{1}{w}\right). \quad (2)$$

Die Größe  $W_\rho(z, w)$  ist nichtnegativ und harmonisch in  $|z| < \rho$ , außer für die Pole  $b_\nu$ , wo sie logarithmisch unendlich wird; für  $z=0$  geht sie in die charakteristische Funktion  $T(\rho, w)$  über; dies setzt voraus, daß  $z=0$  kein Pol von  $w(z)$  ist, was ohne wesentliche Einschränkung angenommen werden kann.

**149.** Wir beweisen nun:

*Der Ausdruck  $W_\rho(z_0, w)$  ist eine wachsende Funktion von  $\rho$ .*

*Beweis.* Es sei  $r$  eine beliebige Zahl des Intervalles  $0 < r_0 < r < \rho$ . Da der Ausdruck  $W_\rho$  nicht negativ ist, so wird nach (2)

$$\log^+ |w(z)| \leq W_\rho(z, w)$$

für  $|z|=r$ , also

$$\begin{aligned} U_r(z_0, w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w(r e^{i\varphi})| \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2 - 2r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_\rho(r e^{i\varphi}, w) \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2 - 2r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi. \end{aligned}$$

Zur Auswertung des letzten Integrals bemerke man, daß der Ausdruck  $V_r(z, w)$ , welcher für  $|z| < r$  dieselben Pole wie  $W_\rho(z, w)$  hat, auf der Peripherie  $|z|=r$  verschwindet, so daß also die Randwerte von  $W_\rho$  durch diejenigen von  $W_r - V_r$  ersetzt werden können. Da nun diese

Differenz für  $|z| < r$  harmonisch ist, so ergibt die Poissonsche Integralformel für das obige Integral den Wert  $W_\varrho(z_0, w) - V_r(z_0, w)$ . Es wird somit

$$U_r(z_0, w) \leq W_\varrho(z_0, w) - V_r(z_0, w)$$

oder also

$$U_r(z_0, w) + V_r(z_0, w) = W_r(z_0, w) \leq W_\varrho(z_0, w),$$

womit der Nachweis zu Ende geführt ist.

Hierdurch haben wir gleichzeitig einen neuen Beweis für die Monotonie der Fundamentalgröße  $T(r, w) - W_r(0, w)$  erhalten.

**150.** Aus dem obigen Satz schließen wir nun für jeden Punkt des Einheitskreises auf die Existenz des endlichen oder unendlichen Grenzwerts

$$\lim_{r \rightarrow 1} W_r(z, w) = W(z, w).$$

Nun ist dieser Grenzwert für  $z = 0$  gleich  $T(1) = \lim_{r=1} T(r)$ , also nach

Voraussetzung *endlich*. Hieraus schließt man, unter Anwendung der Monotonie von  $W_r$ , nach dem Prinzip von HARNACK (vgl. V, § 1), daß die Konvergenz von  $W_r$  für  $|z| \leq \varrho < 1$  gleichmäßig ist. Die Grenzfunktion  $W(z, w)$  ist somit als eine in jedem Punkt des Einheitskreises nichtnegative und harmonische Funktion erklärt, mit Ausnahme der Pole  $b_r$ , wo sie das gleiche Verhalten wie  $\log|w|$  aufweist.

In ähnlicher Weise geht die Existenz der harmonischen, nichtnegativen Grenzfunktion

$$\lim_{r=1} W_r\left(z, \frac{1}{w}\right) = W\left(z, \frac{1}{w}\right) \quad (3)$$

hervor, so daß also die harmonische Funktion  $\log|w|$  für  $|z| < 1$  als Differenz von zwei daselbst nichtnegativen harmonischen Funktionen

$$\log|w| = W(z, w) - W\left(z, \frac{1}{w}\right) \quad (3')$$

dargestellt ist.

Es erhebt sich die Frage, ob die zwei Glieder  $U_\varrho$  und  $V_\varrho$ , als deren Summe der Ausdruck  $W_\varrho$  definiert ist, schon für sich allein für  $\varrho \rightarrow 1$  konvergieren. Daß dies tatsächlich der Fall ist, geht für die Funktion  $V_\varrho$  hervor durch die oben auf  $W_\varrho$  angewandte Schlußweise (HARNACKSches Prinzip). Hierzu hat man nur zu bemerken, daß  $V_\varrho(z, w)$ , wie aus seiner Definition unmittelbar hervorgeht, eine mit  $\varrho$  wachsende Funktion ist, und daß ferner

$$V_\varrho(0, w) = N(\varrho, w) \leq T(\varrho),$$

woraus die Existenz des Grenzwerts  $\lim V_\varrho = V$  für  $z = 0$ ,  $\varrho \rightarrow 1$  erhellt. Man schließt also, daß die Reihe

$$V(z, w) = \sum_{b_r < 1} g(z, b_r) = \sum \log \left| \frac{1 - b_r z}{z - b_r} \right| \quad (4)$$

für  $|z| \leq r < 1$  gleichmäßig konvergent ist.



Schließlich wird

$$U(z, w) \equiv \lim_{\rho=1} U_\rho(z, w) = W(z, w) - V(z, w).$$

Wir fügen jetzt zu  $W(z, w)$  seine konjugierte harmonische Funktion  $i\bar{W}(z, w)$ . Wenn die in dieser enthaltene additive Konstante in geeigneter Weise gewählt wird, so ergibt sich

$$\log w = (W(z, w) + i\bar{W}(z, w)) - \left( W\left(z, \frac{1}{w}\right) + i\bar{W}\left(z, \frac{1}{w}\right) \right),$$

oder falls noch

$$f(z, w) = e^{-W(z, w) - iW(z, w)} \tag{5}$$

gesetzt wird,

$$w(z) = \frac{f\left(z, \frac{1}{w}\right)}{f(z, w)}. \tag{5'}$$

Hier sind  $f(z, w)$  und  $f\left(z, \frac{1}{w}\right)$  für  $|z| < 1$  reguläre und beschränkte Funktionen,  $|f| \leq 1$ , von denen jene in den Polen  $b_\nu$ , diese in den Nullstellen  $a_\mu$  von  $w(z)$  verschwindet.

Führt man die konjugierten Funktionen  $\bar{U}$  und  $\bar{V}$  der einzelnen Glieder  $U$  und  $V$  von  $W$  ein, so erhält man eine weitere Zerlegung des Ausdrucks rechts in (5). Was besonders die Funktion  $\bar{V}$  betrifft, so läßt sie sich mit Hilfe der Summendarstellung (4) von  $V$  als eine konvergente Reihe darstellen, deren Glieder die konjugierten Funktionen  $-h(z, b_\nu)$  der GREENSchen Funktionen  $g(z, b_\nu)$  sind; um Konvergenz zu erzielen, hat man nur die willkürliche additive Konstante in  $h(z, b_\nu)$  so zu wählen, daß Konvergenz für *einen* Wert  $z$ , z. B. für  $z=0$ , stattfindet. Dies erreicht man am einfachsten so, daß man  $h$  durch die Bedingung  $h(0, b_\nu) = 0$  normiert. Durch diese Vorschrift ergibt sich

$$V(z, w) + i\bar{V}(z, w) = \sum_{|b_\nu| \leq 1} \log \frac{1 - \bar{b}_\nu z}{|b_\nu| - z e^{-i\beta_\nu}} \quad (b_\nu = |b_\nu| e^{i\beta_\nu}). \tag{6}$$

Setzt man dann noch

$$\varphi(z, w) = e^{-U(z, w) - iU(z, w)}, \tag{7}$$

so wird die beschränkte Funktion

$$f(z, w) = \varphi(z, w) \pi(z, w)$$

mit

$$\pi(z, w) = \prod_{|b_\nu| < 1} \frac{|b_\nu| - z e^{-i\beta_\nu}}{1 - \bar{b}_\nu z} \tag{8}$$

als Produkt von zwei für  $|z| < 1$  beschränkten Funktionen  $\varphi$  und  $\pi$  dargestellt, von denen  $\varphi$  nullstellenfrei ist, während  $\pi$  in sämtlichen Polen  $b_\nu$  von  $w(z)$  verschwindet. Solche Produkte  $\pi$  linearer Transformationen, welche den Einheitskreis invariant lassen, sind schon von POINCARÉ in der Theorie der automorphen Funktionen eingeführt

worden; ihre Bedeutung für die allgemeine Theorie der beschränkten Funktionen ist zuerst von BLASCHKE erkannt worden, weshalb man sie oft als BLASCHKE-Produkte bezeichnet<sup>1</sup>. Diese besonderen beschränkten Funktionen zeichnen sich durch interessante Eigenschaften in der Nähe des Randes  $|z|=1$  aus, worauf wir später noch näher zurückkommen werden.

Zusammenfassend haben wir den<sup>2</sup>

**Satz.** Falls die Charakteristik  $T(r)$  einer im Einheitskreise meromorphen Funktion  $w(z)$  für  $r < 1$  beschränkt ist, so läßt sich  $w$  als Quotient

$$w(z) = \frac{f\left(z, \frac{1}{w}\right)}{f(z, w)} = \frac{\varphi\left(z, \frac{1}{w}\right)\pi\left(z, \frac{1}{w}\right)}{\varphi(z, w)\pi(z, w)} \quad (9)$$

von zwei durch die Formeln (3) und (5) definierten beschränkten Funktionen  $f(|f| \leq 1)$  darstellen, welche sich als Produkte von zwei durch die Formeln (7) und (8) erklärten und wieder für  $|z| < 1$  beschränkten Funktionen  $\varphi, \pi$  ( $|\varphi| \leq 1, |\pi| \leq 1$ ) schreiben lassen.

Eine Funktion, die als Quotient von zwei beschränkten Funktionen darstellbar ist, wollen wir kurz beschränktartig nennen. Jede für  $|z| < 1$  meromorphe Funktion von beschränkter Charakteristik  $T(r)$  ist also beschränktartig.

**151.** Umgekehrt gilt aber auch:

Jede für  $|z| < 1$  beschränktartige analytische Funktion  $w(z)$  hat eine beschränkte Charakteristik  $T(r)$ .

*Beweis.* Sei  $w(z)$  für  $|z| < 1$  beschränktartig, d. h.

$$w(z) = \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)}, \quad (10)$$

wo  $\psi_1$  und  $\psi_2$  im Einheitskreise beschränkt sind. Es bedeutet keine Einschränkung anzunehmen, daß  $|\psi_1| \leq 1, |\psi_2| \leq 1$ , denn dies kann stets durch Division des Zählers und Nenners mit einer passenden Konstante erreicht werden.

Um jetzt nachzuweisen, daß die Charakteristik  $T(r, w)$  für  $r < 1$  beschränkt ist, wählen wir einen beliebigen Punkt  $z_0$  des Einheitskreises. Nach (10) gilt für jedes  $|z| < 1$

$$\log^+ |w(z)| \leq \log^+ \frac{1}{|\psi_2(z)|},$$

und es wird somit

$$U_r(z_0, w) \leq U_r\left(z_0, \frac{1}{\psi_2}\right)$$

für  $|z_0| < r < 1$ . Andererseits ist, da die Funktion  $\psi_2$  in jedem Pol von  $w(z)$  verschwindet,

$$V_r(z_0, w) \leq V_r\left(z_0, \frac{1}{\psi_2}\right)$$

<sup>1</sup> H. POINCARÉ [2], W. BLASCHKE [1].

<sup>2</sup> R. NEVANLINNA [3].

und es ergibt sich folglich durch Addition, unter Anwendung der Formel von POISSON-JENSEN,

$$W_r(z_0, w) \leq W_r\left(z_0, \frac{1}{\psi_2}\right) = W_r(z_0, \psi_2) + \log \left| \frac{1}{\psi_2(z_0)} \right|,$$

oder also, da  $W_r(z, \psi_2)$  wegen der Beschränktheit von  $\psi_2$  identisch verschwindet,

$$W_r(z_0, w) \leq \log \left| \frac{1}{\psi_2(z_0)} \right|. \tag{11}$$

Wenn nun  $\psi_2(0) \neq 0$ , so ergibt sich für  $z_0 = 0$ , daß

$$W_r(0, w) =: T(r, w) \leq \log \left| \frac{1}{\psi_2(0)} \right|$$

für jedes  $r < 1$  gilt, woraus die behauptete Beschränktheit von  $T(r, w)$  folgt.

Ist dagegen  $\psi_2(0) = 0$ , so wird man durch Multiplikation der Funktion  $w$  mit einer passenden Potenz von  $z$  auf den Fall  $\psi_2(0) \neq 0$  zurückgeführt, und da die Charakteristik  $T(r, w)$  sich hierbei nur um ein für  $r < 1$  beschränktes additives Glied ändert, ergibt sich das erwünschte Resultat wie oben.

*Hinreichend und notwendig, damit eine für  $|z| < 1$  meromorphe Funktion beschränktartig sei, ist, daß die zugehörige charakteristische Funktion  $T(r)$  für  $r \rightarrow 1$  beschränkt ist.*

Wenn  $w$  für  $|z| < 1$  beschränktartig ist, so läßt sie offenbar unendlich viele Darstellungen der Form

$$w = \frac{\psi_1}{\psi_2} \tag{12}$$

zu, wo  $|\psi_1| \leq 1$  und  $|\psi_2| \leq 1$ . Denn wenn eine solche Darstellung gegeben ist, gelangt man zu einer neuen derselben Art einfach so, daß man Zähler und Nenner mit einer beliebigen für  $|z| < 1$  beschränkten Funktion  $\psi$  ( $|\psi| \leq 1$ ) multipliziert. Unter allen möglichen Darstellungen der Form (12) zeichnet sich die durch die obige Konstruktion gewonnene spezielle Darstellung (9) durch folgende Extremaleigenschaft aus:

*Es ist für jedes  $|z| < 1$*

$$|f(z, w)| \geq |\psi_2(z)|, \quad \left| f\left(z, \frac{1}{w}\right) \right| \geq |\psi_1(z)|. \tag{13}$$

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus der Beziehung (11), wenn man  $r$  gegen Eins streben läßt. Es wird so

$$W(z, w) \leq \log \left| \frac{1}{\psi_2(z)} \right|,$$

oder wegen  $\log |f(z, w)| = -W(z, w)$

$$|f(z, w)| \geq |\psi_2(z)|.$$

Die zweite der Relationen (13) ergibt sich, wenn man dieselbe Schlußweise auf die Funktion  $\frac{1}{w}$  anwendet.

Mit Hilfe des Maximumprinzips folgt weiter leicht: Wenn in den Beziehungen (13) Gleichheit für einen Punkt  $z$  des Einheitskreises gilt, so muß sie identisch bestehen, und es wird dann  $\psi_2 = e^{i\alpha} f(z, w)$ ,  $\psi_1 = e^{i\alpha} f\left(z, \frac{1}{w}\right)$ .

## § 2. POISSON-STIELTJESSche Integraldarstellung einer beschränktartigen Funktion.

152. Die Darstellung einer beschränktartigen Funktion, welche im ersten Paragraphen abgeleitet wurde, erlaubt uns, das Verhalten einer solchen Funktion am Rande  $|z| = 1$  näher zu untersuchen. Als Grundlage wird uns eine Integraldarstellung dienen, die als eine Erweiterung der gewöhnlichen Poissonschen Formel betrachtet werden kann.

Wir betrachten eine für  $|z| < 1$  reguläre analytische Funktion  $w(z) = u(z) + iv(z)$ ; für jedes  $|z| < \varrho < 1$  erlaubt sie die Poissonsche Darstellung

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho e^{i\vartheta}) \frac{\varrho e^{i\vartheta} + z}{\varrho e^{i\vartheta} - z} d\vartheta + iv(0).$$

Solange über das Randverhalten von  $u(z)$  keine besonderen Voraussetzungen gemacht worden sind, ist der Grenzübergang  $\varrho \rightarrow 1$  unter dem Integralzeichen nicht möglich. Wir werden daher der harmonischen Funktion  $u(z)$  eine zweckmäßige einschränkende Bedingung auferlegen; es soll vorausgesetzt werden, daß der Mittelwert von  $|u(z)|$  auf den Kreisen  $|z| = r < 1$  gleichmäßig beschränkt ist:

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})| d\varphi < M \text{ für } r < 1. \quad (14)$$

153. Die derart definierte Klasse von harmonischen Funktionen ist identisch mit der Menge derjenigen Funktionen, welche im Einheitskreise als *Differenz von zwei nichtnegativen harmonischen Funktionen geschrieben werden können*. Es ist dies eine unmittelbare Folgerung aus § 1. Wenn nämlich  $w = u + iv$  für  $|z| < 1$  regulär ist, so ist

$$\left. \begin{aligned} T(r, e^{iw}) = m(r, e^{iw}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|u(re^{i\varphi})| + u(re^{i\varphi})}{2} d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})| d\varphi + \frac{u(0)}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

und  $e^{iw}$  ist also dann und nur dann beschränktartig, wenn das Integral (14) beschränkt ist. Dann und nur dann läßt sich somit  $e^{iw}$  als Quotient von zwei (von Null verschiedenen) beschränkten Funktionen  $\varphi_2$  und  $\varphi_1$  ( $|\varphi_\nu| < 1$ ,  $\nu = 1, 2$ ) darstellen, und  $w$  sich also auf die Form  $w = w_1 - w_2$  bringen, wo  $w_1 = -\log \varphi_1$  und  $w_2 = -\log \varphi_2$  *nichtnegative Realteile* besitzen.

Aus unseren Ergebnissen (§ 1, Nr. 150) folgt ferner, daß unter allen möglichen Darstellungen  $w = w_1 - w_2$  eine besondere existiert, welche durch die Extremaleigenschaft ausgezeichnet ist, daß die Realteile von  $w_1$  und  $w_2$  *möglichst klein* sind. Diese Extremalfunktionen  $w_1$  und  $w_2$  sind als die Grenzwerte

$$w_\nu(z) = \lim_{\varrho=1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_\nu(\varrho e^{i\vartheta}) \frac{\varrho e^{i\vartheta} + z}{\varrho e^{i\vartheta} - z} d\vartheta \quad (\nu = 1, 2) \quad (16)$$

bestimmt, wo

$$u_1 = \frac{1}{2} (|u| + u), \quad u_2 = \frac{1}{2} (|u| - u)$$

ist (vgl. Nr. 149).

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß das Integral (14), wie aus dem Zusammenhang (15) unmittelbar ersichtlich wird, mit  $r$  monoton zunimmt, so daß es jedenfalls für  $r=1$  einen bestimmten, endlichen oder unendlichen Grenzwert hat.

**154.** Durch diese Resultate haben wir die Untersuchung derjenigen analytischen Funktionen, welche der Bedingung (14) genügen, auf die Betrachtung einer analytischen Funktion  $w = u + iv$  zurückgeführt, welche für  $|z| < 1$  einen *nichtnegativen Realteil*  $u$  hat. Auf Funktionen dieser Art werden wir uns beschränken, wenn wir im folgenden dazu übergehen, die in Aussicht gestellte Integralformel herzuleiten.

Wir fixieren eine Zahl  $r_0$  des Intervalls  $0 < r_0 < 1$  und setzen

$$w_1(r e^{i\varphi}) = \int_{r_0}^{r e^{i\varphi}} \frac{w(z)}{i z} dz = \int_{r_0}^r \frac{w(t)}{i t} dt + \int_0^\varphi w(r e^{i\vartheta}) d\vartheta, \quad (17)$$

wodurch  $w_1$  als eine für  $0 < |z| < 1$  reguläre (in der Umgebung von  $z=0$  vieldeutige) Funktion definiert ist. Wir betrachten im folgenden denjenigen Zweig dieser Funktion, welcher durch die Bedingung  $-\beta < \varphi \leq 2\pi + \beta$  festgelegt wird ( $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ).

Für den reellen Teil  $u_1$  von  $w_1$  hat man den Ausdruck

$$u_1(r e^{i\varphi}) = \Re(w_1(r e^{i\varphi})) = \int_{r_0}^r \frac{v(t)}{t} dt + \int_0^\varphi u(r e^{i\vartheta}) d\vartheta.$$

Es ist also

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} = u(r e^{i\varphi}) \geq 0.$$

Wie schnell kann  $|w_1|$  für  $|z| \rightarrow 1$  wachsen? Eine obere Schranke für diesen Betrag erhalten wir aus (17), wenn wir schreiben

$$w_1(r e^{i\varphi}) = \int_{r_0}^{r e^{i\varphi}} \frac{w(z)}{i z} dz + \int_{r_0 e^{i\varphi}}^{r e^{i\varphi}} \frac{w(z)}{i z} dz.$$

Es wird hiernach für  $r_0 < r < 1$

$$|w_1(r e^{i\varphi})| \leq \int_0^{\varphi_0} |w(r_0 e^{i\vartheta})| d\vartheta + \frac{1}{r_0} \int_{r_0}^r |w(t e^{i\varphi})| dt. \quad (18)$$

Für den Betrag  $|w|$  hat man wieder nach der Poissonschen Formel für  $|z| < \rho < 1$

$$|w(z)| \leq \frac{\rho + |z|}{\rho - |z|} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\vartheta}) d\vartheta + |v(0)| = \frac{\rho + |z|}{\rho - |z|} u(0) + |v(0)|$$

oder also für  $\rho \rightarrow 1$

$$|w(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} u(0) + |v(0)|. \quad (19)$$

Führt man dies in (18) ein, so wird für  $0 \leq \varphi < 2\pi$

$$|w_1(r e^{i\varphi})| \leq 2\pi u(0) \frac{1 + r_0}{1 - r_0} + 2\pi |v(0)| + \frac{|v(0)|}{r_0} + \frac{2u(0)}{r_0} \log \frac{1 - r_0}{1 - r}. \quad (20)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß  $|w_1(z)|$  in der Nähe von  $|z| = 1$  höchstens von der Größenordnung  $\log \frac{1}{1-r}$  ist, während  $|w|$  wie  $\frac{1}{1-r}$  ins Unendliche wachsen kann; die in (19) gegebene obere Schranke ist nämlich genau, wie das Beispiel

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

zeigt; für welches  $u(0) = 1$ ,  $v(0) = 0$  ist. Die Integralfunktion  $w_1$  wächst also für  $|z| \rightarrow 1$  weniger schnell ins Unendliche als  $w$ ; wegen dieser „regularisierenden“ Wirkung der Integration bedeutet es einen Vorteil, jene Integralfunktion einzuführen.

Ein noch einfacheres Verhalten weist die durch wiederholte Integration gewonnene Funktion

$$w_2(r e^{i\varphi}) = u_2 + i v_2 = \int_{r_0}^{r e^{i\varphi}} \frac{w_1(z)}{i z} dz$$

auf. Bei Anwendung der Abschätzung (20) sieht man nämlich unmittelbar ein, daß  $w_2(z)$  auf der Peripherie  $|z| = 1$  stetig ist. Speziell existiert somit der *stetige Grenzwert*

$$u_2(e^{i\varphi}) = \lim_{r=1} u_2(r e^{i\varphi}) \quad (21)$$

des Realteils

$$u_2(r e^{i\varphi}) = \int_{r_0}^r v_1(t) \frac{dt}{t} + \int_0^{\varphi} u_1(r e^{i\vartheta}) d\vartheta. \quad (22)$$

Um die Eigenschaften der Grenzfunktion  $u_2(\varphi)$  näher zu untersuchen, bemerken wir, daß für  $r < 1$

$$0 \leq u(r e^{i\varphi}) = \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2}$$

gilt, wonach also  $u_2$  eine *konvexe* Funktion von  $\varphi$  ist, so daß für  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3$

$$\begin{vmatrix} u_2(re^{i\varphi_1}) & u_2(re^{i\varphi_2}) & u_2(re^{i\varphi_3}) \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \leq 0.$$

Durch den Grenzübergang  $r \rightarrow 1$  findet man nun, daß dieselbe Beziehung auch für  $u_2(e^{i\varphi})$  gilt, und man schließt infolgedessen, daß auch  $u_2(e^{i\varphi})$  eine konvexe Funktion von  $\varphi$  darstellt. Folglich hat sie eine rechtsseitige und eine linksseitige Ableitung  $u_2'(e^{i(\varphi+0)})$  bzw.  $u_2'(e^{i(\varphi-0)})$  und es ist

$$u_2'(e^{i(\varphi-0)}) \leq u_2'(e^{i(\varphi+0)}),$$

wo das Gleichheitszeichen für alle  $\varphi$ , außer höchstens für eine abzählbare Menge von Werten, besteht. Setzt man

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{2} (u_2'(e^{i(\varphi+0)}) + u_2'(e^{i(\varphi-0)})), \quad (23)$$

so ist also  $\psi$  als eine monoton wachsende Funktion von  $\varphi$  eindeutig erklärt.

Wir behaupten nun, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} u_1(re^{i\varphi}) = \psi(\varphi) \quad (24)$$

für jede Stetigkeitsstelle  $\varphi$  von  $\psi(\varphi)$  gilt. Setzt man nämlich für  $r \leq 1$

$$\Delta(re^{i\varphi}, h) = \frac{u_2(re^{i(\varphi+h)}) - u_2(re^{i\varphi})}{h},$$

so gibt es, sofern  $\varphi$  eine Stetigkeitsstelle von  $\psi(\varphi)$  ist, wegen der Konvexität von  $u_2$  für jedes  $\varepsilon > 0$  eine so kleine Zahl  $h > 0$ , daß

$$0 \leq \Delta(e^{i\varphi}, h) - \psi(\varphi) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < \psi(\varphi) - \Delta(e^{i\varphi}, -h) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ferner ist für hinreichend große Werte  $r < 1$

$$|\Delta(e^{i\varphi}, h) - \Delta(re^{i\varphi}, h)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\Delta(e^{i\varphi}, -h) - \Delta(re^{i\varphi}, -h)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

woraus folgt, daß sowohl  $\Delta(re^{i\varphi}, h)$  als auch  $\Delta(re^{i\varphi}, -h)$  im Intervall  $(\psi - \varepsilon, \psi + \varepsilon)$  liegt.

Andererseits ist

$$\Delta(re^{i\varphi}, -h) \leq u_1(re^{i\varphi}) \leq \Delta(re^{i\varphi}, h)$$

und man schließt also, daß auch  $u_1(re^{i\varphi})$  für hinreichend wenig von 1 abweichende Werte  $r$  in das oben erwähnte Intervall fällt, woraus die Behauptung (24) folgt.

Unter Beachtung der Beziehung

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} d u_1(\varrho e^{i\vartheta}) = \int_0^{2\pi} u(\varrho e^{i\vartheta}) d\vartheta = 2\pi u(0) \quad (25)$$

findet man aus der Poissonschen Formel durch partielle Integration

$$w(z) = \frac{\varrho + z}{\varrho - z} u(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(\varrho e^{i\vartheta}) \frac{2iz\varrho e^{i\vartheta}}{(\varrho e^{i\vartheta} - z)^2} d\vartheta + iv(0)$$

für  $|z| < \varrho < 1$ . Lassen wir nun  $\varrho$  gegen 1 streben, so konvergiert das erste Glied rechts gegen

$$\frac{1+z}{1-z} u(0).$$

Wir behaupten, daß das Integral den Grenzwert

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta) \frac{2iz e^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta} - z)^2} d\vartheta$$

hat.

Da  $u_1(\varrho e^{i\vartheta})$  nach (25) für  $0 \leq \vartheta < 2\pi$  höchstens gleich  $2\pi u(0)$  ist, und die Grenzfunktion  $\psi$  also ebenfalls die obere Schranke  $2\pi u(0)$  hat, so folgt, daß die Integrale

$$\int_0^{2\pi} u_1(\varrho e^{i\vartheta}) \frac{\varrho e^{i\vartheta}}{(\varrho e^{i\vartheta} - z)^2} d\vartheta \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} u_1(\varrho e^{i\vartheta}) \frac{e^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta} - z)^2} d\vartheta$$

für  $\varrho \rightarrow 1$  beliebig wenig voneinander abweichen. Es erübrigt also zu zeigen, daß die Differenz

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta} (u_1(\varrho e^{i\vartheta}) - \psi(\vartheta))}{(e^{i\vartheta} - z)^2} d\vartheta \tag{26}$$

für  $\varrho \rightarrow 1$  verschwindet.

Zu diesem Zwecke wählen wir eine Zahl  $\varepsilon > 0$  und teilen das Intervall  $(0, 2\pi)$  in  $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$  gleiche Teile. Da die Variation der monoton wachsenden Funktion  $u_1$  in demselben Intervall gleich  $2\pi u(0)$  ist, so ist die Anzahl  $k$  derjenigen Teilintervalle, wo der Zuwachs von  $u_1$  größer als  $\varepsilon$  ist, höchstens gleich  $\frac{2\pi u(0)}{\varepsilon}$ ; dasselbe gilt auch für die Funktion  $\psi(\vartheta)$ . Unter den betrachteten  $n$  Teilintervallen gibt es, für jedes  $\varrho < 1$ , höchstens

$$2k < \frac{4\pi u(0)}{\varepsilon}$$

solche, wo die Variation von entweder  $u_1(\varrho e^{i\vartheta})$  oder  $\psi(\vartheta)$  größer als  $\varepsilon$  wird. In den übrigen Teilintervallen sind die entsprechenden Variationen also höchstens gleich  $\varepsilon$ .

Wir wählen nun in jedem der  $n$  Teilintervalle eine Stetigkeitsstelle  $\vartheta$  und können dann eine Zahl  $\varrho_0 < 1$  finden, so daß für  $\varrho_0 \leq \varrho < 1$

$$u_1(\varrho e^{i\vartheta}) - \psi(\vartheta) < \varepsilon,$$

für jeden dieser  $n$  Werte  $\vartheta$  gilt. Dann wird also

$$|u_1(\varrho e^{i\vartheta}) - \psi(\vartheta)| < 3\varepsilon$$



in jedem Teilintervalle, außer möglicherweise für die  $2k$  Ausnahmeintervalle, für welche jedenfalls

$$|u_1(\varrho e^{i\vartheta}) - \psi(\vartheta)| \leq 2\pi u(0)$$

gilt, weil ja beide Funktionen in ein und demselben Intervall von der Länge  $2\pi u(0)$  variieren.

Für den absoluten Betrag des Integrales (26) finden wir somit die obere Grenze

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-|z|)^2} \int_0^{2\pi} |u_1(\varrho e^{i\vartheta}) - \psi(\vartheta)| d\vartheta &\leq \frac{1}{(1-|z|)^2} \left( 2\pi u(0) \frac{4\pi k}{n} + 6\pi\varepsilon \right) \\ &\leq \frac{2\pi\varepsilon}{(1-|z|)^2} (8\pi^2(u(0))^2 + 3), \end{aligned}$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Es gilt also für jedes  $|z| < 1$  die Darstellung

$$w(z) = \frac{1+z}{1-z} u(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta) \frac{2iz e^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta} - z)^2} d\vartheta + iv(0). \quad (27)$$

Da  $\psi$  eine monotone Funktion ist, so können wir partiell integrieren, und erhalten schließlich

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\psi(\vartheta) + iv(0), \quad (28)$$

wo das Integral im STIELTJESSchen Sinne zu verstehen ist. Dies ist die in Aussicht gestellte POISSON-STIELTJESSche *Integraldarstellung*<sup>1</sup>.

Wir erinnern noch daran, daß die monotone Funktion  $\psi(\vartheta)$  hier als der Grenzwert der Summe

$$\int_{r_0}^r v(t) \frac{dt}{t} + \int_0^{\vartheta} u(re^{i\varphi}) d\varphi$$

für  $r \rightarrow 1$  definiert ist. Hieraus ist zu ersehen, daß der erste, von  $\vartheta$  unabhängige Teil einen endlichen Grenzwert

$$\psi_0 = \int_{r_0}^1 v(t) \frac{dt}{t}$$

haben muß, und man könnte also, da es nach (28) nur auf die *Variation* der Funktion  $\psi$  ankommt, die in dieser Formel stehende monotone Funktion  $\psi$  ebensogut als den Grenzwert

$$\psi(\vartheta) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{\vartheta} u(re^{i\varphi}) d\varphi$$

definieren.

<sup>1</sup> Vgl. hierzu G. C. EVANS [1], G. HERGLOTZ [1], A. OSTROWSKI [2], C. CARATHÉODORY [3].

Diese Formel (28) stellt den allgemeinen Ausdruck der für  $|z| < 1$  regulären analytischen Funktionen von nichtnegativem Realteil dar. Wir haben in der Tat gefunden, daß jede Funktion dieser Art eine Darstellung (28) zuläßt. Andererseits definiert diese Formel, falls auf der rechten Seite eine beliebige monoton wachsende, für  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  beschränkte Funktion  $\psi$  eingesetzt wird, eine analytische Funktion, die für  $|z| < 1$  regulär ist und hier den nichtnegativen reellen Teil

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)} d\psi(\vartheta)$$

hat.

**155.** Eine analoge Darstellung gilt auch für die allgemeine Klasse der im Einheitskreise regulären Funktionen  $w(z) = u + iv$ , für welche die Bedingung (14) gilt. Eine solche Funktion läßt sich ja als Differenz von zwei analytischen Funktionen  $w_1$  und  $w_2$  schreiben, deren Realteile für  $|z| < 1$  nichtnegativ sind. Stellt man diese Funktionen in der Form (28) dar und sind die zugehörigen monotonen Funktionen jetzt  $\psi_1$  und  $\psi_2$ , so erhält man für ihre Differenz  $w$  die POISSON-STIELTJESSche Integraldarstellung (28), wo

$$\psi(\vartheta) = \psi_1(\vartheta) - \psi_2(\vartheta)$$

als Differenz von zwei beschränkten monotonen Funktionen eine *Funktion von beschränkter Schwankung* ist.

Wenn umgekehrt  $\psi$  eine beliebige Funktion von beschränkter Schwankung ist, so kann sie bekanntlich als Differenz von zwei beschränkten monotonen Funktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  geschrieben werden. Die Formel (28) definiert dann also eine Funktion  $w = u + iv$ , welche als Differenz von zwei Funktionen  $w_1, w_2$  mit nichtnegativen Realteilen dargestellt werden kann, und genügt somit einer Bedingung der Form (14). In der Tat wird

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})| d\varphi &= \int_0^{2\pi} |\Re(w_1 - w_2)| d\varphi \leq \int_0^{2\pi} (\Re(w_1) + \Re(w_2)) d\varphi \\ &= 2\pi \Re(w_1(0) + w_2(0)), \end{aligned}$$

so daß also die Bedingung (14) erfüllt ist.

Die Formel (28), wo  $\psi$  eine Funktion von beschränkter Schwankung bezeichnet, ist der allgemeine Ausdruck einer für  $|z| < 1$  regulären analytischen Funktion  $w = u + iv$ , für welche das Integral

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})| d\varphi \tag{29}$$

für  $r < 1$  beschränkt ist.

**156. Bemerkung.** Aus der Beziehung (15) schließt man, daß das Integral (29) eine monoton wachsende Funktion von  $r$  ist, was man auch einfach direkt beweisen könnte. Es hat also stets für  $r \rightarrow 1$  einen

Grenzwert; die Darstellung (28) gilt aber dann und nur dann, wenn dieser Grenzwert endlich ist.

Unter Anwendung der Ergebnisse von § 1 ist es leicht zu zeigen, daß die Funktion  $\psi$  als Grenzwert des Integrals

$$\psi(\vartheta) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{\vartheta} u(r e^{i\varphi}) d\varphi$$

definiert werden kann.

157. Zusammenfassend gilt also der

**Satz.** *Es sei  $w(z) = u + iv$  für  $|z| < 1$  regulär und der Grenzwert*

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |u(r e^{i\varphi})| d\varphi = M$$

*endlich. Dann existiert für  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  der Grenzwert*

$$\psi(\vartheta) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{\vartheta} u(r e^{i\varphi}) d\varphi,$$

*höchstens mit Ausnahme einer abzählbaren Menge von Werten  $\vartheta$ . Die Funktion  $\psi$  ist von beschränkter Schwankung und es gilt für  $z = r e^{i\varphi}$ ,  $r < 1$*

$$w(r e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\psi(\vartheta) + i v(0), \quad (30)$$

*wo das Integral im STIELTJESSCHEN Sinne zu verstehen ist.*

Unter allen Darstellungen einer Funktion von beschränkter Schwankung

$$\psi(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} d\psi(\vartheta)$$

als Differenz von zwei monoton wachsenden Funktionen  $\psi_1, \psi_2$  gibt es eine wohlbestimmte

$$\psi(\vartheta) = \psi_1(\vartheta) - \psi_2(\vartheta) \quad (\psi(0) = \psi_1(0) = \psi_2(0) = 0), \quad (31)$$

welche die Eigenschaft besitzt, daß  $\psi_1$  und  $\psi_2$  möglichst klein sind; das extremale Funktionenpaar  $\psi_1, -\psi_2$  erweist sich bekanntlich als die *positive* bzw. *negative Variation* von  $\psi$  im Intervalle  $(0, \vartheta)$ . Alle übrigen Darstellungen erhält man aus dieser besonderen, indem man zu  $\psi_1$  und  $\psi_2$  eine willkürliche monotone Funktion  $\psi_3$  addiert. Die totale Variation von  $\psi$  im Intervall  $(0, \vartheta)$  ist gleich  $\psi_1 + \psi_2$ .

Führt man nun den Ausdruck (31) in (30) ein, so erscheint der Realteil  $u(z)$  von  $w(z)$  als Differenz der für  $|z| < 1$  harmonischen und nichtnegativen Funktionen

$$u_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\vartheta - \varphi)} d\psi_\nu(\vartheta) \quad (\nu = 1, 2), \quad (32)$$

und zwar erhält man hier zwei Funktionen von möglichst kleinem Betrag, wenn man für  $\psi_1$  und  $-\psi_2$  die obengenannte positive bzw. negative Variation von  $\varphi$  einsetzt. Hieraus folgt, daß die entsprechenden Funktionen  $u_r$  mit den auf S. 179 besprochenen Extremalfunktionen übereinstimmen, die andererseits als die Realteile der Grenzwerte (16) definiert sind. Setzt man beide Ausdrücke für  $z=0$  einander gleich, so wird

$$2\pi u_1(0) = \psi_1(2\pi) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}) \cdot d\varphi + \pi u(0) = \frac{1}{2} (M + 2\pi u(0))$$

und

$$2\pi u_2(0) = \psi_2(2\pi) = \frac{1}{2} (M - 2\pi u(0)),$$

also

$$\int_0^{2\pi} d\psi(\vartheta) = \psi_1(2\pi) + \psi_2(2\pi) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} u(re^{i\vartheta}) \cdot d\vartheta. \quad (33)$$

Die totale Variation von  $\psi(\vartheta)$  im Intervall  $(0, 2\pi)$  ist gleich dem Grenzwert (33).

**158.** Eine wichtige Frage gilt der *Unität* der Darstellung (30). Tatsächlich läßt eine gegebene Funktion im wesentlichen eine einzige solche Darstellung zu: d. h. wenn  $\psi_1$  von beschränkter Schwankung ist und

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\psi_1(\vartheta) \quad (34)$$

gesetzt wird, so ist  $\psi_1(\vartheta)$  in jedem Stetigkeitspunkt (bis auf eine additive Konstante) gleich der Funktion

$$\psi(\vartheta) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{\vartheta} u(re^{i\varphi}) d\varphi,$$

wo  $u$  den reellen Teil von  $w$  bezeichnet.

Nimmt man nämlich in (34) beiderseits den reellen Teil, so ergibt sich nach partieller Integration

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\varphi} u(0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta,$$

und es wird also unter Anwendung der Symmetrie des Kerns  $K(r; \varphi, \vartheta)$  des POISSONSCHEN Integrals in bezug auf die Veränderlichen  $\varphi$  und  $\vartheta$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\alpha} u(re^{i\varphi}) d\varphi &= 2\pi u(0) \omega(r; 0, \alpha) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\vartheta) (K(r; \alpha, \vartheta) - K(r; 0, \vartheta)) d\vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

wo  $\omega(re^{i\varphi}; \vartheta_1, \vartheta_2)$  das harmonische Maß

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} K(r; \varphi, \vartheta) d\vartheta$$

des Bogens  $(e^{i\vartheta_1}, e^{i\vartheta_2})$  im Punkte  $re^{i\varphi}$  bezeichnet. Läßt man hier  $r$  gegen 1 konvergieren, so strebt  $\omega(r; 0, \alpha)$  gegen  $\frac{1}{2}$  und das Integral auf der rechten Seite von (35), wie aus den elementaren Eigenschaften des POISSONSchen Integrals folgt (vgl. II, § 1), gegen

$$\frac{\psi_1(\alpha + 0) + \psi_1(\alpha - 0)}{2} - \frac{\psi_1(+0) + \psi_1(2\pi - 0)}{2},$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht.

Zugleich sehen wir, daß das Integral (35) auch für die Unstetigkeitsstellen von  $\psi(\vartheta)$  einen wohlbestimmten Grenzwert hat, nämlich den Mittelwert  $\frac{1}{2}(\psi(\vartheta + 0) + \psi(\vartheta - 0))$ .

**159.** Im Integral (30) hat  $\psi$  als eine Funktion von beschränkter Schwankung für fast alle  $\vartheta$  eine endliche Ableitung  $\psi'(\vartheta)$ . Man fragt sich nun, unter welchen Bedingungen das STIELTJESSche Integral sich als ein gewöhnliches LEBESGUESches Integral schreiben läßt, so daß also  $d\psi$  einfach durch  $\psi' d\vartheta$  ersetzt wird. Dies gilt bekanntlich dann und nur dann, wenn  $\psi$  eine *vollstetige* Funktion von  $\vartheta$  ist, d. h. wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta > 0$  existiert, so daß die Variation von  $\psi$  auf jeder meßbaren Punktmenge ( $\vartheta$ ) von kleinerem Maß als  $\delta$  den Betrag  $\varepsilon$  nicht übersteigt.

Nun läßt sich eine Funktion  $\psi$  von beschränkter Schwankung stets als Summe von drei Funktionen

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$$

schreiben, die sämtlich von beschränkter Variation sind, und zwar so, daß  $\psi_1$  *vollstetig* ist und  $\psi' = \psi_1'$  für fast alle  $\vartheta$  gilt,  $\psi_2$  *stetig* und  $\psi_3$  eine *Sprungfunktion* ist, deren Variation in jedem Intervall gleich der Summe der Beträge der Sprünge ist, welche  $\psi$  an seinen Unstetigkeitsstellen in diesem Intervall aufweist. Die stetige Funktion  $\psi_2$  ist, falls sie nicht konstant ist, nicht vollstetig; ihre Ableitung verschwindet fast überall<sup>1</sup>. Dasselbe gilt für die Ableitung des dritten Bestandteils, der Sprungfunktion  $\psi_3$ .

<sup>1</sup> Nichtkonstante, stetige Funktionen  $\psi$  von beschränkter Schwankung und mit fast überall verschwindender Ableitung existieren tatsächlich. Ein einfaches Beispiel dafür kann unter Anwendung des CANTORSchen Verfahrens zur Bildung perfekter, nirgends dichter Punktfolgen folgendermaßen konstruiert werden (V, § 6). Man belege das Intervall  $(0, t)$  mit einer positiven Masse  $h_n(t)$ , so daß man alle  $2^n$  Intervalle  $\Delta_n$  der Näherungsmenge  $E(p^n)$  ( $p > 2$ ) mit einer homogenen Masse vom Betrage  $2^{-n}$  überdeckt. Die Grenzfunktion  $h(t) = \lim h_n$  ist eine monotone, stetige Funktion von  $t$ , welche die Variation 1 hat und deren Ableitung  $h'$  für alle  $t$  verschwindet, außer in den Punkten der CANTORSchen Nullmenge  $E(p^\infty)$ .

Im nächstfolgenden Paragraphen werden wir eine einschränkende Bedingung für das Verhalten der harmonischen Funktion  $u$  angeben, welche das Verschwinden der Bestandteile  $\psi_2$  und  $\psi_3$ , somit die Vollstetigkeit von  $\psi$  bewirkt.

**160.** Bevor wir zu einer näheren Analyse des POISSON-STIELTJESSchen Integrals übergehen, wollen wir noch den allgemeinen Ausdruck einer für  $|z| < 1$  beschränktartigen Funktion angeben, zu dem man durch Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse des vorliegenden Abschnitts gelangt:

Jede für  $|z| < 1$  beschränktartige Funktion  $w(z)$  kann in der Form

$$w(z) = \frac{\pi_1(z)}{\pi_2(z)} e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\psi(\vartheta) + i\lambda}$$

dargestellt werden, wo  $\psi$  eine Funktion von beschränkter Schwankung und  $\pi_1, \pi_2$  BLASCHKE-Produkte sind.

### § 3. Satz von FATOU.

**161.** Im Besitze der Integraldarstellung von § 2 sind wir jetzt imstande, einen wichtigen klassischen Satz von FATOU zu beweisen, nach welchem eine im Einheitskreise harmonische, beschränkte Funktion fast überall auf dem Rande  $|z|=1$  wohlbestimmte radiale Grenzwerte besitzt<sup>1</sup>. Tatsächlich gilt dasselbe auch noch für viel allgemeinere harmonische Funktionen. Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, den Satz in folgender Fassung zu beweisen:

**Satz von FATOU.** Wenn  $u(z)$  eine für  $|z| < 1$  harmonische Funktion ist derart, daß das Integral

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})| d\varphi$$

für  $r < 1$  beschränkt ist, so existiert der endliche Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\varphi})$$

für jedes  $\varphi$ , außer möglicherweise für eine Wertmenge vom (linearen) Maß Null.

Nach den Ergebnissen von § 2 existiert, unter den obigen Voraussetzungen, eine Funktion  $\psi(\vartheta)$  von beschränkter Schwankung

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |d\psi(\vartheta)| < M,$$

so daß

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)} d\psi(\vartheta). \quad (36)$$

<sup>1</sup> P. FATOU [I].

Die Behauptung ergibt sich als eine Folgerung der zwei nachstehenden Tatsachen:

1. Nach einem allgemeinen Satz der Theorie der reellen Funktionen hat  $\psi(\vartheta)$  als eine Funktion von beschränkter Variation eine wohlbestimmte endliche Ableitung  $\psi'(\vartheta)$  für jedes  $\vartheta$ , außer höchstens für eine Wertmenge vom Maße Null (vgl. Nr. 159).

2. Wenn für einen Wert  $\vartheta$  die Ableitung  $\psi'(\vartheta)$  endlich ist, so ist

$$\lim_{r=1} u(r e^{i\vartheta}) = \psi'(\vartheta).$$

Der Lehrsatz 1 soll als bekannt vorausgesetzt werden<sup>1</sup>. Dagegen werden wir die Behauptung 2 unter Anwendung der POISSON-STIELTJESCHEN Integraldarstellung vollständig begründen.

Wir fixieren also eine Stelle  $\vartheta$ , für welche die Ableitung  $\psi'(\vartheta)$  einen bestimmten, endlichen Wert hat; ohne wesentliche Einschränkung können wie z. B.  $\vartheta=0$  voraussetzen. Es gilt dann wegen  $\psi(0) = 0$

$$\psi(\vartheta) = \psi'(0)\vartheta + \psi_0(\vartheta)\vartheta, \quad (37)$$

wo  $\psi_0 \rightarrow 0$  für  $\vartheta \rightarrow 0$ .

Die POISSON-STIELTJESCHE Integralformel nimmt nach einer partiellen Integration, wegen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\psi(\vartheta) = u(0),$$

für  $\varphi=0$ ,  $r < 1$  die Gestalt

$$u(r) = \frac{1-r}{1+r} u(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta} \right) d\vartheta$$

an. Für  $r \rightarrow 1$  verschwindet das erste Glied der rechten Seite, und es erübrigt also zu beweisen, daß das zweite Glied für  $r \rightarrow 1$  gegen den Wert  $\psi'(0)$  konvergiert. Führt man hier den Ausdruck (37) ein, so ergibt das erste Glied nach partieller Integration

$$-\psi'(0) \frac{1-r}{1+r} + \psi'(0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta} d\vartheta = \psi'(0) - \psi'(0) \frac{1-r}{1+r}.$$

Da dieser Ausdruck für  $r \rightarrow 1$  gegen  $\psi'(0)$  strebt, so genügt es, nunmehr den Nachweis dafür zu erbringen, daß das von dem zweiten Glied  $\psi_0(\vartheta)\vartheta$  der Summe (37) herrührende Integral

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi_0(\vartheta)\vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta} \right) d\vartheta \quad (38)$$

für  $r \rightarrow 1$  verschwindet.

<sup>1</sup> Vgl. z. B. H. LEBESGUE [1].

Zu diesem Zweck fixiere man, für ein gegebenes  $\varepsilon > 0$ , eine so kleine positive Zahl  $\vartheta_0 < \pi$ , daß

$$|\psi_0(\vartheta)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |\vartheta| \leq \vartheta_0,$$

und zerlege das Intervall  $(-\pi, \pi)$  in drei Teile:  $(-\pi, -\vartheta_0)$ ,  $(-\vartheta_0, \vartheta_0)$ ,  $(\vartheta_0, \pi)$ .

Für das dem mittleren Teil entsprechende Integral findet man, da der Faktor

$$-\vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta} \right) = \frac{(1-r^2)2r\vartheta\sin\vartheta}{(1+r^2-2r\cos\vartheta)^2}$$

nichtnegativ ist,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\vartheta_0}^{+\vartheta_0} \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\vartheta_0}^{+\vartheta_0} \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{r^2-1}{1+r^2-2r\cos\vartheta} \right) d\vartheta \\ &= -\frac{\varepsilon\vartheta_0}{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta_0} + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta} d\vartheta \\ &< \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta} d\vartheta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ferner wird, wenn  $m$  die obere Grenze von  $|\psi_0|$  für  $|\vartheta| \leq \pi$  bezeichnet,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\vartheta_0}^{\pi} \right| &\leq \frac{m}{2\pi} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{r^2-1}{1+r^2-2r\cos\vartheta} \right) d\vartheta \\ &\leq \frac{m}{2} \left( \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta_0} \frac{\vartheta_0}{\pi} - \frac{1-r}{1+r} \right) + \frac{m}{2\pi} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta} d\vartheta. \end{aligned}$$

Hier strebt das erste Glied rechts für  $r \rightarrow 1$  gegen Null. Dasselbe gilt aber auch für das letzte Integral, wo der Nenner

$$1+r^2-2r\cos\vartheta \geq 1+r^2-2r\cos\vartheta_0 = \sin^2\vartheta_0 + (r-\cos\vartheta_0)^2 \geq \sin^2\vartheta_0$$

eine positive untere Schranke hat.

Es existiert also eine Zahl  $r_0$  des Intervalls  $(0, 1)$ , so daß

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{\vartheta_0}^{\pi} \right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad r_0 \leq r < 1.$$

Für den dem Teilintervall  $(-\pi, -\vartheta_0)$  entsprechenden Teil des zu untersuchenden Integrals findet man genau dieselben Abschätzungen wie für das Intervall  $(\vartheta_0, \pi)$ , und zusammenfassend gilt somit, daß der absolute Betrag des Ausdrucks (38) kleiner als  $3\varepsilon$  wird, für  $r_0 \leq r < 1$ . Dieser Ausdruck verschwindet also für  $r \rightarrow 1$ , und der Beweis des FATOU'schen Satzes ist so zu Ende geführt.



**162.** Durch den bewiesenen Satz hat die Theorie des POISSONSchen Integrals eine beachtenswerte Erweiterung erhalten. Wir haben gesehen (II, § 1), daß dieses Integral das DIRICHLETSche Problem für den Kreisfall löst, unter der Annahme, daß die vorgegebenen Randwerte  $u(\vartheta)$  stetig sind. Ferner gilt das allgemeine Resultat, daß das POISSONSche Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\vartheta) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta \quad (39)$$

an einer Unstetigkeitsstelle  $\vartheta$  von  $u$ , wo die Grenzwerte  $u(\vartheta \pm 0)$  existieren, den radialen Grenzwert  $\frac{1}{2}(u(\vartheta+0) + u(\vartheta-0))$  hat.

Es sei nun  $u(\vartheta)$  eine beliebige, für  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$  definierte meßbare Funktion, für welche das LEBESGUESche Integral

$$\int_0^{2\pi} |u(\vartheta)| d\vartheta$$

endlich ist<sup>1</sup>. Setzt man das Integral (39) an, so wird es eine für  $|z| < 1$  harmonische Funktion  $u(re^{i\varphi})$  darstellen, welche für  $r \rightarrow 1$  den vorgegebenen Wert  $u(\varphi)$  anstrebt, außer höchstens für eine Nullmenge von Werten  $\varphi$ .

Schreibt man nämlich  $\psi(\varphi) = \int_0^\varphi u(\vartheta) d\vartheta$ , so ist  $\frac{d\psi}{d\varphi} = u(\varphi)$  für fast alle  $\varphi$ , und nach dem obigen Grenzwertsatz hat also  $u(z)$  für jeden solchen Wert  $\varphi$  den radialen Grenzwert  $u(\varphi)$ <sup>2</sup>.

**163.** Wir sind jetzt auch imstande, die am Schluß von § 2 berührte Frage zu lösen. Wir haben gesehen: Wenn  $u(z)$  für  $|z| < 1$  harmonisch und das Integral

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})| d\varphi$$

für  $r < 1$  gleichmäßig beschränkt ist, so strebt das Integral

$$\psi(r, \vartheta) = \int_0^\vartheta u(re^{i\varphi}) d\varphi$$

für  $r \rightarrow 1$  gegen einen Grenzwert  $\psi(\vartheta)$ , der als eine Funktion von beschränkter Schwankung als eine Summe  $\psi(\vartheta) = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$  geschrieben werden kann, so daß 1.  $\psi_1$  vollstetig und dem LEBESGUESchen Integral

$$\int_0^\vartheta \psi'(\vartheta) d\vartheta$$

<sup>1</sup> Für jede meßbare Funktion  $u(\vartheta)$  existiert das Integral  $\int_{|u| < M} u d\vartheta$ , wo  $M$  endlich ist. Dieses Integral strebt für  $M \rightarrow \infty$  gegen einen Grenzwert, der entweder endlich oder unendlich ist.

<sup>2</sup> Dies gilt sogar bei Winkelannäherung, wie aus später folgenden Sätzen geschlossen werden kann.

gleich ist; 2.  $\psi_2$  stetig und  $\psi_2'$  fast überall gleich Null ist; 3.  $\psi_3$  konstant ist, mit Ausnahme der Sprungstellen von  $\psi$ . Es gilt zu entscheiden, wann  $\psi$  vollstetig und daher  $\psi_2 = \psi_3 = 0$  ist.

Nach den Ergebnissen dieses Paragraphen ist  $\psi'(\vartheta)$  fast überall gleich dem Grenzwert  $u(\vartheta) = \lim u(re^{i\vartheta})$ . Die Bestandteile  $\psi_2$  und  $\psi_3$  verschwinden also dann und nur dann, wenn

$$\psi(\vartheta) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{\vartheta} u(re^{i\varphi}) d\varphi = \int_0^{\vartheta} u(\varphi) d\varphi, \quad (40)$$

d. h. dann und nur dann, wenn die Reihenfolge der Integration und des Grenzübergangs ( $r \rightarrow 1$ ) vertauscht werden darf.

Nun gilt in der Theorie der reellen Funktionen folgender allgemeine Satz: Falls die Folge der meßbaren Funktionen  $f_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  fast überall auf einer Punktmenge  $E$  einen Grenzwert  $f(x) = \lim f_n(x)$  hat, so gilt

$$\int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

dann und nur dann, wenn die Integrale

$$\int f_n(x) dx \quad (41)$$

auf  $E$  gleichmäßig vollstetig sind, d. h. wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta > 0$  existiert, so daß

$$\int_e |f_n(x)| dx < \varepsilon,$$

sobald das Maß der (in  $E$  enthaltenen) Menge  $e$  kleiner als  $\delta$  ist.

Hieraus schließt man, daß die Funktion  $\psi(\vartheta)$  dann und nur dann vollstetig ist und die Eigenschaft (40) besitzt, wenn das Integral

$$\int_0^{\vartheta} |u(re^{i\varphi})| d\varphi$$

für  $r < 1$  gleichmäßig vollstetig ist.

Für eine beschränkte harmonische Funktion ist die Bedingung der gleichmäßigen Vollstetigkeit offenbar stets erfüllt. Als Beispiel einer nichtbeschränkten Funktion, welche diese Eigenschaft nicht besitzt, führen wir die für  $|z| < 1$  harmonische und positive Funktion

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\varphi}$$

an. Sie hat für  $r \rightarrow 1$  den Grenzwert Null, außer wenn  $\varphi = 0$  ist; für diesen Wert strebt sie gegen Unendlich, und zwar so rasch, daß das Integral

$$\int_{-\delta}^{+\delta} u(re^{i\varphi}) d\varphi$$

für jedes  $\delta > 0$  gegen den Grenzwert  $2\pi$  konvergiert. Für diese Funktion ist auch die Größe  $\psi(\vartheta)$  keineswegs vollstetig: sie reduziert sich nämlich auf eine Sprungfunktion, welche im Punkte  $\vartheta = 0$  einen Sprung vom Betrage  $2\pi$  aufweist, sonst aber konstant ist.

164. Eine für  $|z| < 1$  reguläre *beschränkte analytische* Funktion hat nach dem FATOUSCHEN Satz fast überall auf  $|z| = 1$  wohlbestimmte radiale Grenzwerte. Denn sowohl der reelle wie der imaginäre Teil besitzt diese Eigenschaft außer möglicherweise für eine Punktmenge, welche als Vereinigungsmenge von zwei Nullmengen selber vom Maße Null ist. Wir können sogar schließen, daß diese Grenzwerte bei Winkelannäherung (vgl. Nr. 60) existieren; dies ist in der Tat auch eine unmittelbare Folgerung aus dem in Nr. 60 bewiesenen Grenzwertsatz.

Die Ergebnisse aus § 1 und 2 dieses Abschnitts gestatten dieses Resultat wesentlich zu erweitern. Sei zunächst  $w = u + iv$  eine im Einheitskreise reguläre, analytische Funktion, welche die Bedingung (14) von § 2 erfüllt. Sie läßt sich als Differenz  $w = w_1 - w_2$  von zwei Funktionen  $w_1$  und  $w_2$  von nichtnegativem Realteil schreiben. Durch eine lineare Transformation  $S$ , welche die rechte Halbebene auf den Einheitskreis abbildet, werden diese Funktionen in zwei beschränkte analytische Funktionen transformiert, und da diese fast überall auf  $|z| = 1$  bestimmte Winkelgrenzwerte haben, so gilt also dasselbe für  $w_1$  und  $w_2$ .

Hieraus läßt sich der Schluß ziehen, daß auch die Differenz  $w_1 - w_2$  bestimmte Winkelgrenzwerte hat, mit möglicher Ausnahme erstens derjenigen Punkte  $E_1$ , wo entweder  $w_1$  oder  $w_2$  keinen Grenzwert haben, und zweitens derjenigen Randpunktmenge  $E_2$ , wo sowohl  $w_1$  als  $w_2$  einen unendlichen radialen Grenzwert haben. Die Menge  $E_1$  ist eine Nullmenge. Läßt sich nun dasselbe über  $E_2$  aussagen?

Hierzu ist zu bemerken, daß *der reelle Teil*  $u$  der Funktion  $w$  nach dem FATOUSCHEN Satz *endliche* Grenzwerte fast überall auf der Peripherie hat. Dasselbe können wir nicht ohne weiteres vom imaginären Teil der Funktion behaupten. Wir werden im folgenden Paragraphen einen allgemeinen Satz beweisen, durch welchen diese Frage entschieden werden könnte. Vorläufig können wir uns mit nachstehender einfachen Bemerkung begnügen.

Wir betrachten die Gesamtheit derjenigen Punkte  $E$ , wo eine Funktion  $w$  mit nichtnegativem reellen Teil, bei radialer Annäherung, gegen Unendlich strebt. Dann ist  $\log|w + 1|$  offenbar eine harmonische Funktion, welche ebenfalls einen nichtnegativen reellen Teil hat und in den Punkten  $E$  den radialen Grenzwert  $\infty$  hat. Also ist nach dem FATOUSCHEN Satz  $E$  notwendigerweise vom Maße Null.

Hieraus folgt, daß auch die oben durch  $E_2$  bezeichnete Menge das Maß Null hat, und wir schließen also, daß eine für  $|z| < 1$  reguläre analytische Funktion  $w = u + iv$ , für welche das Integral

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})| d\varphi$$

beschränkt ist, für  $r \rightarrow 1$  einem endlichen Grenzwert zustrebt, fast überall auf  $|z| = 1$ .

165. Vermittels der Normaldarstellung (Nr. 160) einer beschränktartigen Funktion  $w(z)$  läßt sich der FATOUSCHE Satz auch auf eine solche Funktion erweitern. Bringt man  $w$  auf diese Form

$$w = e^{f \frac{\pi_1}{\pi_2}}, \quad (42)$$

so gehört der Exponent  $f$  zu der in Nr. 164 betrachteten Funktionenklasse und hat also, fast überall auf  $|z|=1$ , endliche Winkelgrenzwerte. Dasselbe gilt aber auch für die BLASCHKESCHEN Produkte  $\pi_1, \pi_2$ , welche ja im Einheitskreise beschränkt sind. Also hat nach (42) auch  $w$  dieselbe Eigenschaft mit möglicher Ausnahme derjenigen Punkte der Peripherie  $|z|=1$ , wo die Grenzwerte der Produkte  $\pi_1$  und  $\pi_2$  gleichzeitig verschwinden. Daß dies höchstens für eine Nullmenge stattfinden kann, ergibt sich aus nachstehender, an sich bemerkenswerter Eigenschaft jener Produkte:

*Ein BLASCHKE-Produkt  $\pi(z)$  hat fast überall auf der Peripherie  $|z|=1$  Winkelgrenzwerte vom absoluten Betrag 1.*

Nach der JENSENSCHEN Formel ist nämlich für  $\rho < 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\pi(\rho e^{i\varphi})| d\varphi = \int_0^{\rho} \frac{n(r)}{r} dr + \log |\pi(0)| = - \int_{\rho}^1 \frac{n(r)}{r} dr,$$

unter  $n(r)$  die Anzahl der in  $|z| \leq r$  liegenden Nullstellen von  $\pi(z)$  verstanden. Da aber hier die rechte Seite für  $\rho \rightarrow 1$  verschwindet, so schließt man:

*Für ein BLASCHKE-Produkt verschwindet das Integral*

$$\int_0^{2\pi} \log |\pi(r e^{i\varphi})| d\varphi$$

für  $r \rightarrow 1$ .

Hieraus folgt leicht die obige Behauptung. Da  $|\pi| < 1$  für  $|z| < 1$ , so ist der Grenzwert  $\lim \log |\pi(r e^{i\varphi})|$  für  $r \rightarrow 1$ , falls er existiert, höchstens gleich Null. Gesetzt, er wäre für eine Wertmenge  $(\varphi)$  von positivem Maß *negativ*, so zerlege man diese Menge in eine abzählbare Anzahl von Teilmengen  $(\varphi)_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), von denen  $(\varphi)_n$  alle Werte  $\varphi$  umfaßt, für welche dieser Grenzwert  $\leq -\frac{1}{n}$  ist. Nach einem allgemeinen Satz der Theorie der reellen Funktionen<sup>1</sup> sind sämtliche  $(\varphi)_n$  meßbar. Es gibt außerdem ein endliches  $n$ , für welches auch  $(\varphi)_n$  von positivem Maß ist, denn sonst müßte ja die Menge  $(\varphi)$  als Vereinigungsmenge einer abzählbaren Menge von Nullmengen selber eine Nullmenge sein.

Ein bekannter Satz aus der Theorie der reellen Funktionen lehrt nun, daß die Menge  $(\varphi)_n$  eine Teilmenge enthält, deren Maß sich beliebig wenig vom Maße der Menge  $(\varphi)_n$  unterscheidet, und auf der die Annäherung an die entsprechenden radialen Grenzwerte *gleichmäßig* ist<sup>1</sup>. Sei  $e_n$  eine

<sup>1</sup> Vgl. z. B. H. LEBESGUE [I].

solche Teilmenge von positivem Maß  $\mu$ . Es ist dann, sobald  $r$  eine gewisse Zahl  $r_0 < 1$  überschritten hat,  $\log |\pi(r e^{i\varphi})| < -\frac{1}{2n}$  für jedes  $\varphi$  der Menge  $e_n$ , und es wird somit für dieselben Werte  $r$

$$\int_0^{2\pi} \log |\pi(r e^{i\varphi})| d\varphi \leq \int_{e_n} \log |\pi| d\varphi \leq -\frac{\mu}{2n}.$$

Das linksstehende Integral könnte hiernach nicht für  $r \rightarrow 1$  verschwinden. Dieser Widerspruch zeigt, daß, wie behauptet wurde, tatsächlich  $\pi \rightarrow 1$  für fast alle Werte  $\varphi$  gelten muß.

Die so bewiesene Eigenschaft der BLASCHKE-Produkte  $\pi$  findet ihre natürliche Erklärung darin, daß  $\pi$  als Grenzwert eines endlichen Produktes  $\pi_n$  gewonnen wird, das auf  $|z| = 1$  stetig ist und hier überall den absoluten Betrag 1 hat.

Aus der Darstellung (42) erhalten wir jetzt folgendes zusammenfassende Ergebnis.

**Satz.** Eine für  $|z| < 1$  beschränktartige Funktion hat fast überall auf dem Kreise  $|z| = 1$  wohlbestimmte Winkelgrenzwerte.

Dieser allgemeine Satz enthält als Spezialfälle sämtliche obige, die Existenz der Randwerte betreffenden Sätze.

#### § 4. Über die Randwertmenge einer beschränktartigen Funktion.

166. Eine für  $|z| < 1$  beschränktartige Funktion hat fast überall auf  $|z| = 1$  wohlbestimmte Winkelgrenzwerte. In diesem Paragraphen werden wir die Menge  $E$  dieser Randwerte einer näheren Analyse unterziehen.

Ein erstes Resultat über die Randwertmenge  $E$  können wir direkt aus der kanonischen Darstellung einer beschränktartigen Funktion ablesen (Nr. 160). Der Exponent des ersten Faktors hat als POISSON-STIELTJESSCHES Integral fast überall auf  $|z| = 1$  endliche Randwerte; also sind auch die Randwerte jenes Exponentialfaktors fast überall endlich. Entsprechendes gilt aber auch für den zweiten Faktor, der als Quotient von zwei BLASCHKE-Produkten fast überall auf der Peripherie Randwerte vom absoluten Betrage 1 besitzt. Eine beschränktartige Funktion hat folglich den Winkelgrenzwert  $\infty$  höchstens für eine Nullmenge der Peripherie  $|z| = 1$ .

Ist nun  $a \neq \infty$  und  $w(z)$  nicht identisch gleich  $a$ , so hat auch der Ausdruck  $\frac{1}{w-a}$  eine beschränkte Charakteristik, und das obige Resultat ist somit auf diese Funktion anwendbar. Man gelangt so zu dem

**Satz von F. und M. RIESZ<sup>1</sup>.** Falls eine für  $|z| < 1$  beschränktartige Funktion einen konstanten radialen Grenzwert auf einer Punktmenge von

<sup>1</sup> Die Gebrüder RIESZ haben diesen Satz für den besonderen Fall einer beschränkten Funktion bewiesen [1].

positivem Maß auf  $|z|=1$  hat, so ist die Funktion identisch gleich dieser Konstante.

Zur Begründung dieses Satzes hätte auch folgende einfache Bemerkung dienen können. Für eine beschränktartige, nichtkonstante Funktion  $w$  ist die Schmiegunsfunktion  $m(r, a)$  für jedes  $a$  beschränkt. Wenn nun für eine Punktmenge  $(\varphi)$  von positivem Maß der Peripherie  $w(re^{i\varphi}) \rightarrow a$  strebt, so gilt nach dem in Nr. 165 zitierten allgemeinen Satz der Theorie der reellen Funktionen dasselbe gleichmäßig für eine Teilmenge von  $(\varphi)$ , welche ebenfalls positives Maß hat. Für  $r \rightarrow 1$  strebt aber dann der Ausdruck  $m(r, a)$ , welcher ja als Mittelwert von  $\log \left| \frac{1}{w-a} \right|$  definiert ist, gegen Unendlich. Dieser Widerspruch zeigt die Richtigkeit des RIESZschen Satzes auf.

**167.** Aus dem Satz von RIESZ schließt man, daß die Randwertmenge einer nichtkonstanten, beschränktartigen Funktion *nicht abzählbar* sein kann; denn eine abzählbare Randwertmenge kann eine solche Funktion nur auf einer Punktmenge auf  $|z|=1$  besitzen, die als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Nullmengen selber eine Nullmenge ist.

Wir gehen nun daran, einen allgemeinen Satz zu beweisen, der die Frage nach dem Maß der Menge  $E$  vollständig löst<sup>1</sup>.

**Satz.** *Es sei  $E_w$  die Menge der radialen Randwerte, welche eine für  $|z| < 1$  beschränktartige, nichtkonstante Funktion  $w(z)$  auf einer gegebenen Menge  $E_z$  der Peripheriepunkte  $|z|=1$  annimmt. Falls dann das (lineare) Maß von  $E_z$  positiv ist, so ist das innere harmonische Maß von  $E_w$  ebenfalls positiv, d. h. es gibt eine abgeschlossene Teilmenge von  $E_w$ , welche positives harmonisches Maß besitzt.*

*Beweis.* Angenommen, daß die Punktmenge  $E_z$  von positivem Maß ist, können wir eine abgeschlossene Teilmenge  $E'_z$  desselben finden, welche ebenfalls von positivem Maß ist und auf welcher die Grenzwerte

$$\lim_{r \rightarrow 1} w(re^{i\varphi}) = w(e^{i\varphi})$$

gleichmäßig existieren. Hieraus folgt, daß die Menge  $E'_w$  dieser Randwerte *abgeschlossen* ist.

Durch eine lineare Transformation der Veränderlichen  $w$ , welche weder die vorausgesetzte Beschränktartigkeit von  $w(z)$ , noch das Verschwinden bzw. Nichtverschwinden der Kapazität von  $E'_w$  stört, verlegen wir den Punkt  $w = w(0)$  in den unendlich fernen Punkt der Ebene, und behalten für die Bildmenge von  $E'_w$  die frühere Bezeichnung  $E'_w$  bei. Wir überdecken nun die  $w$ -Ebene durch ein Netz abgeschlossener Quadrate  $Q_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) mit der Seitenlänge 1 und setzen die Menge  $E'_z$

<sup>1</sup> Der nachstehende Satz wurde, als Erweiterung eines älteren Satzes (R. NEVANLINNA [7]) von O. FROSTMAN [1] und dem Verfasser [13] unabhängig voneinander bewiesen.

als Vereinigungsmenge aus den unendlich vielen Teilmengen  $E_z^n$  zusammen, für welche die entsprechenden Randwerte  $w$  auf  $Q_n$  fallen. Da  $E_z'$  von positivem Maß ist, so muß mindestens eine der meßbaren Mengen  $E_z^n$  dieselbe Eigenschaft besitzen. Durch eine Translation verschieben wir schließlich das entsprechende Quadrat  $Q_n$  in den Kreis  $|w| < 1$ .

Vermittels dieser einfachen Vorbereitungen haben wir eine nicht-konstante, beschränktartige Funktion  $w(z)$  von folgender Art erhalten:

1. Auf einer Punktmenge  $E_z$  der Peripherie  $|z|=1$  vom positiven Maß  $2\pi\mu > 0$  strebt  $w$  radial gleichmäßig gegen gewisse Grenzwerte  $E_w$ .
2. Die Punktmenge  $E_w$  ist abgeschlossen und liegt im Kreise  $|w| < 1$ .
3. Es ist  $w(0) = \infty$ .

Es gilt nun zu beweisen, daß  $E_w$  von positivem harmonischen Maß ist.

Zu diesem Zweck betrachten wir dasjenige von  $E_w$  begrenzte, zusammenhängende Gebiet  $D$ , welches den unendlich fernen Punkt enthält, und wählen ein beliebiges Teilgebiet  $D_w$  desselben, das ebenfalls  $w = \infty$  als inneren Punkt hat und von endlich vielen, im Kreise  $|w| < 1$  verlaufenden analytischen Jordanbögen  $\Gamma_w$  begrenzt wird. Die GREENSCHE Funktion von  $D_w$  sei

$$g(w, \infty) = \log |w| + \gamma + \varepsilon \left( \frac{1}{w} \right),$$

wo  $\gamma$  die ROBINSche Konstante von  $D_w$  ist. Wir erinnern daran, daß diese Funktion für jeden Punkt  $w$  des Gebietes  $D_w$  der Ungleichung

$$g(w, \infty) \leq \log |w| + \gamma + \log 2 \quad (43)$$

genügt [V, § 2, Ungleichung (6), wo für  $d_2$  der Ausdruck  $|w| + 1$  eingesetzt werden kann].

Nunmehr fassen wir die Gesamtheit derjenigen Punkte  $z$  des Einheitskreises ins Auge, in denen der Funktionswert  $w(z)$  auf  $D_w$  fällt; diese Punktmenge hat als Teilmenge ein wohlbestimmtes zusammenhängendes Gebiet  $D_z$ , welches den Nullpunkt enthält und einerseits von den Bildkurven  $\Gamma_z$  von  $\Gamma_w$ , andererseits von gewissen Punkten der Peripherie  $|z|=1$  begrenzt wird. Die Bögen  $\Gamma_z$  sind analytisch und häufen sich, falls sie in unendlicher Anzahl vorkommen, gegen den Rand  $|z|=1$ .

Die Funktion  $g(w(z), \infty)$  ist in  $D_z$  harmonisch, mit Ausnahme der Pole  $z_0 = 0, z_1, z_2, \dots$  von  $w(z)$ , in denen sie eine Entwicklung  $g = -\lambda \log |z - z_v| + \text{harm. Funktion}$  hat, wobei  $\lambda$  die Multiplizität des Poles  $z_v$  bedeutet. Speziell gilt für  $z=0$ , falls  $w$  hier die Laurententwicklung

$$w(z) = \frac{c_0}{z^{n_0}} + \frac{c_1}{z^{n_0-1}} + \dots \quad (c_0 \neq 0)$$

hat,

$$g(w(z), \infty) = n_0 \log \frac{1}{|z|} + \log |c_0| + \gamma + \varepsilon(z),$$

wo  $\varepsilon \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow 0$ .

Wir setzen jetzt die GREENSche Formel

$$\int \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = 0$$

an in demjenigen Gebiet, welches als Durchschnitt  $D'_z$  von  $D_z$  mit dem Kreis  $|z| < r < 1$  definiert ist, indem wir

$$u = g(w(z), \infty), \quad v = \log \frac{r}{z}$$

setzen und die Pole  $z = z_p$  zuerst durch kleine Kreise isolieren. Läßt man diese nachträglich gegen jene Pole konvergieren, so wird, da  $g$  auf den Bogen  $\Gamma'_z$  und  $v$  auf der Kreislinie  $|z| = r$  verschwindet, nach einer leichten Rechnung

$$\log |c_0| + \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{(\varphi)_r} g(w(re^{i\varphi}), \infty) d\varphi - \int_{\Gamma'_z} \log \frac{r}{z} \frac{\partial g}{\partial n} ds + N(r, \infty),$$

wo  $(\varphi)_r$  die Teilbogen der Peripherie  $|z| = r$  und  $\Gamma'_z$  die Teilbogen der oben definierten Bogen  $\Gamma_z$  bezeichnen, welche das Gebiet  $D'_z$  (in endlicher Anzahl) begrenzen.

Die in der Richtung der inneren Normale der Bogen  $\Gamma'_z$  genommene Ableitung  $\frac{\partial g}{\partial n}$  ist offenbar  $\geq 0$  und das über  $\Gamma'_z$  erstreckte Integral also ebenfalls nichtnegativ. Unter Beobachtung der Relation (43) wird also

$$\begin{aligned} \log |c_0| + \gamma &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{(\varphi)_r} g(w(re^{i\varphi}), \infty) d\varphi + N(r, \infty) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(re^{i\varphi})| d\varphi + N(r, \infty) + \log 2 + \gamma m_r \\ &= \log 2 + \gamma m_r + T(r, w), \end{aligned}$$

wo  $m_r$  das Integral

$$m_r = \frac{1}{2\pi} \int_{(\varphi)_r} d\varphi$$

bezeichnet.

Man wähle nun  $r$  so groß, daß die Werte  $w(re^{i\varphi})$  für die der Menge  $E_z$  entsprechenden  $\varphi$ -Werte außerhalb des Gebietes  $D_w$  liegen, was gemäß den Voraussetzungen 1 und 2 möglich ist. Da der Wert  $w(re^{i\varphi})$  für jedes  $\varphi$  der Menge  $(\varphi)_r$  auf den Bereich  $D_w$  fällt, so sind die diesen zwei Mengen entsprechenden Werte  $re^{i\varphi}$  punktfremd, und es gilt also

$$m_r = \frac{1}{2\pi} \int_{(\varphi)_r} d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_{E_z} d\varphi \leq 1 - \mu.$$

Also wird

$$\mu \gamma \leq \log 2 - \log |c_0| + T(1, w),$$



woraus zu ersehen ist, daß die ROBINSche Konstante des Gebietes  $D_w$  unter einer endlichen, von der Wahl von  $D_w$  unabhängigen Grenze liegt. Hieraus folgt, daß die ROBINSche Konstante  $\gamma_0$  des Gebietes  $D$ , welche als die obere Grenze der ROBINSchen Konstanten  $\gamma$  der Näherungsgebiete  $D_w$  definiert ist, ebenfalls endlich ist.

Die Kapazität  $e^{-\gamma_0}$  der Begrenzungsmenge hat sich also als positiv erwiesen, womit der Beweis zu Ende geführt ist.

Daß dieser Grenzwertsatz, solange keine zusätzlichen Annahmen über die Struktur der Randwertmenge gemacht werden, keiner weiteren Verschärfung fähig ist, wird aus dem nachstehenden Paragraphen hervorgehen. Es wird sich nämlich herausstellen, daß zu jeder Menge  $E_w$  von positivem harmonischen Maß eine für  $|z| < 1$  beschränktartige Funktion konstruiert werden kann, deren Winkelgrenzwerte auf  $|z| = 1$  sämtlich in der gegebenen Menge  $E_w$  enthalten sind.

## § 5. Anwendung auf die konforme Abbildung der universellen Überlagerungsfläche eines schlichten Gebietes.

168. Über einem schlichten, mehrfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  denken wir uns die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche  $G^\infty$  konstruiert (vgl. I, § 2). Nach dem allgemeinen RIEMANNschen Abbildungssatz  $B$  (I, § 2), kann diese Fläche durch eine linear polymorphe Funktion  $x(z)$  auf die schlichte Kreisfläche  $|x| < 1$  umkehrbar eindeutig und konform bezogen werden, sofern der triviale Fall ausgeschlossen wird, wo die Berandung  $\Gamma$  aus zwei isolierten Punkten besteht, und wo der Logarithmus die entsprechende Überlagerungsfläche nicht in den Einheitskreis, sondern in die punktierte Ebene abbildet.

Die Umkehrfunktion  $z(x)$  ist für  $|x| < 1$  automorph in bezug auf eine Gruppe von linearen Transformationen  $S$ , welche mittels endlich oder unendlich vieler Fundamentalsubstitutionen erzeugt werden können, je nachdem der Zusammenhang von  $G$  von endlicher oder unendlicher Ordnung ist (I, § 2).

Wir treffen jetzt folgende Fallunterscheidung:

Das Gebiet  $G$  heißt *beschränktartig* oder *nichtbeschränktartig*, je nachdem die Abbildungsfunktion  $z = z(x)$  beschränktartig oder nicht beschränktartig ist.

Es gilt dann das interessante Kriterium<sup>1</sup>:

**Satz 1.** *Das Gebiet  $G$  ist dann und nur dann beschränktartig, wenn seine Berandung  $\Gamma$  positives harmonisches Maß hat.*

Daß die automorphe Abbildungsfunktion  $z(x)$  von beschränkter Charakteristik  $T$  ist, falls die Randpunktmenge  $\Gamma$  von positivem harmonischen Maß ist, folgt unmittelbar daraus, daß  $z(x)$  für  $|x| < 1$  keinen

<sup>1</sup> R. NEVANLINNA [12].

Punkt dieser Menge  $\Gamma$  annimmt, in Verbindung mit dem nachstehenden allgemeinen Satz, der einen speziellen Fall des Satzes in VI, § 4, S. 172 darstellt:

*Falls eine für  $|x| < 1$  meromorphe Funktion  $z(x)$  eine Menge von Werten ausläßt, deren harmonisches Maß positiv ist, so ist sie beschränktartig.*

Um den Beweis von Satz 1 zu Ende zu bringen, gilt es noch zu zeigen, daß die Randpunktmenge  $\Gamma$  von positivem harmonischen Maß ist, sobald die Charakteristik  $T(r, z(x))$  für  $r < 1$  beschränkt ist.

Aus der Beschränktheit von  $T$  folgt gemäß dem ersten Hauptsatz, daß sämtliche der Funktion  $z(x)$  zugeordnete Anzahlfunktionen  $N(r, a)$  ebenfalls beschränkt sind. Wir nehmen einen beliebigen inneren Punkt  $a$  von  $G$  und bezeichnen durch  $x_1, x_2, \dots$  dessen Bildpunkte im Einheitskreise  $|x| < 1$ . Aus der Beschränktheit von  $N(r, a)$  ergibt sich (§ 1), daß die Summe

$$s(x) = \sum_{|x_p| < 1} \log \left| \frac{1 - \bar{x}_p x}{x - x_p} \right|$$

eine für  $|x| < 1$  nichtnegative und harmonische Funktion von  $x$  ist, mit Ausnahme der Punkte  $x_p$ , wo

$$s(x) = \log \frac{1}{|x - x_p|} + \text{stetige Funktion.}$$

Ferner ist  $s(x)$  automorph in bezug auf die Gruppe der linearen Transformationen  $S$ , durch welche die Zweige der linear polymorphen Abbildungsfunktion  $x(z)$  verbunden sind. Man bestätigt in der Tat, daß die Ausführung einer Transformation  $S$  auf die Variable  $x$  nur die Reihenfolge der Glieder der Summe verändert, und den Wert von  $s(x)$  also unverändert beläßt.

Gehen wir nun durch die Substitution  $x = x(z)$  zur  $z$ -Ebene über, so wird  $s(x(z))$  also eine in  $G$  *eindeutige* und harmonische Funktion sein, außer für  $z = a$ , wo  $s$  einen positiven logarithmischen Pol hat:

$$s(x(z)) = \log \frac{1}{|z - a|} + \text{stetige Funktion};$$

für  $a = \infty$  hat man hier  $\log \frac{1}{|z - a|}$  durch  $\log |z|$  zu ersetzen. Schließlich gilt im ganzen Gebiet  $G$   $s \geq 0$ .

Hiermit haben wir die Existenz einer endlichen, nichtkonstanten, nichtnegativen und in jedem Punkt  $z \neq a$  des Gebietes  $G$  harmonischen Funktion nachgewiesen. Hieraus folgt nun, daß die Randpunktmenge  $\Gamma$ , positive Kapazität hat. Um dies einzusehen beschreibe man um den Pol  $z = a$  einen kleinen Kreis  $C_r$  vom Radius  $r$  und bezeichne mit  $m_r$  das Minimum von  $s(x(z))$  auf der Kreiseibe  $|z - a| \leq r$ . Würde nun  $\Gamma$  vom harmonischen Maß Null sein, so könnte man das erweiterte Minimumprinzip von Nr. 115 in dem außerhalb von  $C_r$  liegenden Teilgebiet von  $G$  anwenden. Es würde dann  $s \geq m_r$  im ganzen Gebiete  $G$

sein, was andererseits wegen  $m_r \rightarrow \infty$  für  $r \rightarrow 0$  unmöglich ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß  $\Gamma$  von positivem harmonischen Maß ist. Der Beweis ist hiermit vollendet.

**169.** In diesem Zusammenhang ist noch folgendes zu beachten: Die Funktion  $s(x)$  hat als Logarithmus eines BLASCHKE-Produktes fast überall auf dem Rand  $|x|=1$  verschwindende radiale Grenzwerte. Da die zusammengesetzte Funktion  $s(x(z))$  ferner in  $G$  harmonisch und nichtnegativ ist, und für  $z = a$  unendlich wird wie  $\log \frac{1}{|z-a|}$ , so liegt die Vermutung nahe, daß sie identisch ist mit der GREENSchen Funktion des Gebietes  $G$ . Daß dies tatsächlich der Fall ist, wird am einfachsten so bewiesen, daß man zeigt, daß  $s(x(z))$  kleiner als jede andere in  $G$  nichtnegative und harmonische Funktion  $u(z)$  ist, welche im Punkte  $a$  einen ähnlichen logarithmischen Pol hat; durch diese Extremaleigenschaft zeichnet sich ja die GREENSche Funktion aus (V, § 2, Nr. 97).

Sei also  $u(z)$  eine derartige, von  $s$  verschiedene Funktion. Dann wird  $u(z(x))$  in  $|x| < 1$  harmonisch sein, mit Ausnahme der Punkte  $x_\nu$ , wo  $u$  eine ähnliche Entwicklung hat wie  $s(x)$ . Die Differenz

$$u(z(x)) - \sum_{|x_\nu| < \varrho} \log \left| \frac{\varrho^2 - \bar{x}_\nu x}{\varrho(x_\nu - x)} \right|$$

ist also für  $|x| < \varrho < 1$  harmonisch; auf  $|x| = \varrho$  ist sie offenbar nichtnegativ, und dasselbe gilt somit auch für  $|x| < \varrho$ . Durch den Grenzübergang  $\varrho \rightarrow 1$  finden wir, daß auch der Grenzwert

$$u(z(x)) - s(x)$$

für  $|x| < 1$  nichtnegativ ist. Tatsächlich ist er sogar positiv. Denn wenn er für einen Punkt  $x$  verschwinden würde, so folgt aus dem Minimumprinzip  $u = s$ , was der Voraussetzung widerspricht. Also ist  $u > s$ , und  $s$  ist folglich die GREENSche Funktion von  $G$ .

Diese mittels der Abbildungsfunktion  $x(z)$  der universellen Überlagerungsfläche gewonnene Produktdarstellung der GREENSchen Funktion ist schon von POINCARÉ [2] gegeben worden<sup>1</sup>.

**170.** Im Hilfssatz von Nr. 168 haben wir auf die Beschränktheit einer für  $|z| < 1$  meromorphen Funktion  $w(z)$  geschlossen als eine Folge davon, daß die Funktion eine Wertmenge von positiver Kapazität ausläßt. Der zuletzt bewiesene Satz zeigt, daß dieses Resultat, insoweit es sich um das Maß der Ausnahmewerte handelt, nicht verschärft werden kann. In der Tat: falls  $\Gamma$  eine beliebige *harmonische Nullmenge* ist, so liefert die automorphe Funktion  $z(x)$ , die den Kreis  $|x| < 1$  auf die universelle Überlagerungsfläche  $G^\infty$  des von  $\Gamma$  berandeten Gebietes  $G$  konform abbildet, ein Beispiel einer *nichtbeschränktartigen* Funktion, die keinen Wert der Menge  $\Gamma$  annimmt.

<sup>1</sup> Vgl. hierzu auch P. J. MYRBERG [1].

**171.** Wie verhält es sich nun mit der automorphen Abbildungsfunktion  $z(x)$  auf dem Rande  $|x|=1$ ? Hierüber gilt der bemerkenswerte<sup>1</sup>

**Satz 2.** Die Menge der Werte  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ), für welche der Winkelgrenzwert

$$z(e^{i\varphi}) = \lim_{x \rightarrow e^{i\varphi}} z(x) \quad (44)$$

existiert, hat das Maß  $2\pi$  oder Null, je nachdem das Gebiet beschränktartig oder nichtbeschränktartig ist.

Der erste Teil der Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung aus dem FATOUSCHEN Satz. Um den zweiten Teil zu beweisen, bezeichnen wir, unter der Voraussetzung, daß  $G$  nichtbeschränktartig und die Randpunktmenge  $\Gamma$  also von der Kapazität Null ist, durch  $(\varphi)$  die Menge der Werte  $\varphi$ , für welche der Winkelgrenzwert (44) existiert. Nach einem allgemeinen Satz der Theorie der reellen Funktionen ist  $(\varphi)$  jedenfalls meßbar und wir können also das LEBESGUESCHE Integral ( $x = re^{i\varphi}$ )

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{(\varphi)} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta$$

ansetzen. Wenn das Maß  $\mu$  von  $(\varphi)$  zwischen Null und  $2\pi$  liegt, so definiert  $u$  eine für  $|x| < 1$  harmonische und beschränkte Funktion ( $0 \leq u \leq 1$ ), die nach dem FATOUSCHEN Satz fast überall auf der Menge  $(\varphi)$  den radialen Grenzwert 1 hat. Da  $u$  für  $x=0$  den Wert

$$\frac{1}{2\pi} \int_{(\varphi)} d\varphi = \frac{\mu}{2\pi} < 1$$

annimmt, so ist  $u$  andererseits nicht konstant gleich 1.

Übt man auf  $x$  eine Substitution  $S$  der zur Funktion  $x(z)$  gehörigen Transformationsgruppe aus, so bleibt die der Menge  $(\varphi)$  entsprechende Punktmenge  $(e^{i\varphi})$  invariant; denn wegen des automorphen Charakters von  $z(x)$  hat diese Funktion für jedes  $\varphi$  der transformierten Menge  $S(e^{i\varphi})$  einen Winkelgrenzwert, und da die Menge  $(\varphi)$  andererseits als die Gesamtheit der Werte  $\varphi$  definiert ist, für welche jener Grenzwert existiert, so müssen also die ursprüngliche und die transformierte Wertmenge  $(\varphi)$  übereinstimmen. Da das Differential des oben erwähnten POISSONSCHEIN Integrals überhaupt jeder linearen, den Einheitskreis erhaltenden Transformation gegenüber invariant ist (I, § 1), so schließt man, daß  $u(x)$  ein in bezug auf die Gruppe  $(S)$  automorphes Potential ist.

Aus den oben zusammengestellten Eigenschaften von  $u$  ersieht man, daß die Funktion  $u(x(z))$  im Gebiete  $G$  eindeutig, harmonisch und beschränkt ist, ohne konstant zu sein. Dies ist aber wegen Satz 2 (V, § 4) nicht möglich. Es kann also nicht  $0 < \mu < 2\pi$  sein.

<sup>1</sup> R. NEVANLINNA [12].

Um die Unmöglichkeit der Gleichheit  $\mu = 2\pi$  nachzuweisen, überdecken wir die  $z = \sigma + it$ -Ebene durch das Netz der Quadrate  $Q(m, n, p)$

$$\frac{m}{p} \leq \sigma < \frac{m+1}{p}, \quad \frac{n}{p} \leq t < \frac{n+1}{p} \quad (m, n = 0, \pm 1, \dots),$$

und bezeichnen durch  $(\varphi)_{mnp}$  die jedenfalls meßbare Teilmenge von  $(\varphi)$ , für welche die Randwerte von  $z(x)$  auf das Quadrat  $Q(m, n, p)$  fallen; die Summe der Maße von  $(\varphi)_{mnp}$ , wo  $p$  gegeben ist und die  $m, n$  alle ganzen Zahlen durchlaufen, ist gleich dem Maß  $\mu$  von  $(\varphi)$ , welches jetzt gleich  $2\pi$  angenommen ist. Wir lassen jetzt  $p$  die Werte  $1, 2, \dots$  durchlaufen, und behaupten, daß für mindestens *eine* endliche Wertkombination  $m, n, p$  das Maß der Menge  $(\varphi)_{mnp}$  zwischen Null und  $2\pi$  liegt.

Im entgegengesetzten Fall gibt es für jedes  $p$  *ein* wohlbestimmtes Quadrat  $Q_{mnp}$ , für welches das entsprechende Maß genau gleich  $2\pi$  ist. Diese Quadrate sind ineinander geschachtelt und haben also einen einzigen gemeinsamen Punkt  $z_0$ . Aus der Definition des Punktes  $z_0$  folgt, daß die Werte  $\varphi$ , für welche der Randwert  $z(e^{i\varphi})$  in den Kreisring  $\frac{1}{n} \geq |z - z_0| \geq \frac{1}{n+1}$  fällt, eine *Nullmenge* bilden. Infolgedessen hat  $z(x)$  fast überall auf dem Rand  $|x|=1$  den Grenzwert  $z_0$ . Daß dies zu einem Widerspruch führt, wird jetzt folgendermaßen eingesehen.

Unter der Annahme, daß  $G$  *mehr als drei* Randpunkte hat, fixieren wir drei solche, von  $z_0$  verschiedene Punkte  $z_1, z_2, z_3$ , und konstruieren die universelle Überlagerungsfläche der dreifach punktierten Ebene  $z \neq z_\nu (\nu = 1, 2, 3)$ . Diese wird durch die inverse Funktion  $w = w(z)$  der Modulfunktion auf den Einheitskreis  $|w| < 1$  abgebildet. Wir fixieren für  $x = 0$  einen beliebigen der Werte  $w(z(0))$ . Der so bestimmte Funktionszweig  $w(z(x))$  ist, da  $z(x)$  die kritischen Werte  $z_1, z_2, z_3$  vermeidet, im Einheitskreis  $|x| < 1$  unbeschränkt fortsetzbar und stellt also nach dem Monomodriesatz eine daselbst eindeutige Funktion dar, welche *beschränkt* ist und fast überall auf  $|x|=1$  einen Randwert  $w = w(z_0)$  hat. Die Menge dieser Randwerte ist also *abzählbar*, was gemäß dem RIESZschen Satz die Konstanz von  $w(z(x))$  zur Folge hat. Dies ist jedoch unmöglich, da sowohl  $w(z)$  als  $z(x)$  nicht konstant sind.

Vorausgesetzt, daß  $\Gamma$  mehr als drei Punkte enthält, haben wir also die Existenz eines Quadrates  $Q$  aufgezeigt, derart, daß die Menge der Werte  $\varphi$ , für welche die Randwerte von  $z(x)$  auf  $Q$  fallen, ein zwischen 0 und  $2\pi$  liegendes Maß hat. Nun können wir mit dieser Menge weiter, wie oben mit  $(\varphi)$  im Falle  $0 < \mu < 2\pi$ , verfahren und stoßen so auf den in Aussicht gestellten Widerspruch.

Hiermit ist der Nachweis dafür erbracht worden, daß die Randwerte von  $z(x)$  höchstens für eine Nullmenge existieren, sofern  $G$  mindestens vier Punkte enthält.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so haben wir es, da der triviale Fall, wo  $G$  höchstens zwei Punkte hat, ein für alle mal ausgeschlossen

wurde, mit der Modulfunktion  $z(x)$  zu tun. Dieser Fall läßt sich am einfachsten so erledigen, daß man zwei von den drei Randpunkten von  $G$  als Windungspunkte einer zweiblättrigen, über die  $z$ -Ebene ausgebreiteten RIEMANNschen Fläche nimmt, und diese durch eine Quadratwurzeloperation auf die schlichte  $w$ -Ebene abbildet. Hierdurch wird die Modulfunktion in eine automorphe Funktion transformiert, die den Kreis  $|x| < 1$  auf die universelle Überlagerungsfläche der *vierfach* punktierten  $w$ -Ebene konform abbildet. Der Beweis wird derart auf den obenbehandelten Fall zurückgeführt.

**172.** Die Randwerte der Abbildungsfunktion liegen jedenfalls auf der Randpunktmenge  $\Gamma$ . Dies wird wie in dem früher (I, § 3) behandelten Spezialfall bewiesen. Ist nämlich  $z_0$  ein innerer Punkt von  $G$ , so kann man um denselben eine ganz in  $G$  liegende Kreisscheibe  $K_0$  abgrenzen. Die Bilder dieser Kreise liegen isoliert im Einheitskreise  $|x| < 1$ . Bewegt sich also der Punkt  $x$  stetig gegen den Rand  $|x| = 1$ , so muß der Bildpunkt  $z = z(x)$  immer wieder aus dem Kreise  $K_0$  heraustreten und kann also nicht gegen den Mittelpunkt  $z_0$  konvergieren.

Auf eine nähere Untersuchung der Zuordnung zwischen den Randpunkten  $\Gamma$  und den Peripheriepunkten  $|x| = 1$  soll hier nicht eingegangen werden.

## VIII. Meromorphe Funktionen endlicher Ordnung.

### § 1. Ordnung einer meromorphen Funktion.

**173.** Wir hatten im Laufe der vorhergehenden Darstellung schon mehrmals Gelegenheit, zu bestätigen, daß der Grad der Transzendenz einer meromorphen Funktion sich im Anwachsen der Charakteristik  $T(r)$  widerspiegelt. Faßt man diejenigen meromorphen Funktionen, für welche die Charakteristik von einer bestimmten Größenordnung ist, zu einer Klasse zusammen, so wird die Struktur der Funktionen einer solchen Klasse um so komplizierter sein, je höher jene Wachstumsordnung ist. So haben wir gefunden, daß die Funktionen, welche im Einheitskreis eine beschränkte Charakteristik haben, unter allen für  $|z| < 1$  meromorphen Funktionen sich durch gewisse einfache Eigenschaften auszeichnen. Sie haben z. B. fast überall auf der Peripherie  $|z| = 1$  bestimmte Randwerte, während entsprechendes für nichtbeschränkartige Funktionen i. a. nicht mehr gilt. Im Falle einer in der ganzen Ebene  $z \neq \infty$  meromorphen Funktion hat wiederum die Beschränktheit der Charakteristik das Konstantwerden der Funktion zur Folge. Die rationalen Funktionen besitzen die Eigenschaft  $T(r) = O(\log r)$ , und für eine transzendente Funktion wächst das Verhältnis  $T(r) : \log r$  für  $r \rightarrow \infty$  über alle Grenzen<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Dies soll in § 2 des vorliegenden Abschnitts bewiesen werden.

174. Aus der Menge der transzendenten meromorphen Funktionen grenzt sich eine besondere Klasse durch gewisse charakteristische Eigenschaften natürlich ab; es ist dies die Klasse der meromorphen Funktionen von *endlicher Ordnung*. Um das Anwachsen einer solchen Funktion sogleich mit nötiger Präzision definieren zu können, sollen vorerst gewisse einfache Hilfsbegriffe zusammengestellt werden.

Sei  $s(r)$  eine für  $r > 0$  definierte, positive, monoton zunehmende Funktion von  $r$ . Wenn die obere Grenze

$$\overline{\lim}_{r = \infty} \frac{\log s(r)}{\log r} = \lambda$$

endlich ist, so heißt  $s(r)$  *von der Ordnung  $r^\lambda$*  oder kürzer auch: *von der Ordnung  $\lambda$* . Dies ist also dann und nur dann der Fall, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$

$$s(r) < r^{\lambda + \varepsilon}$$

für alle hinreichend großen Werte  $r$ , während

$$s(r) > r^{\lambda - \varepsilon}$$

für beliebig große Werte  $r$  gilt. Wenn jene obere Grenze unendlich ist, so ist  $s(r)$  *von unendlicher Ordnung*.

Man teilt die Funktionen von der endlichen Ordnung  $\lambda$  in drei Unterklassen ein:  $s(r)$  ist vom *Maximal-, Mittel- oder Minimaltypus*<sup>1</sup> der Ordnung  $\lambda$ , je nachdem die obere Grenze

$$\overline{\lim}_{r = \infty} \frac{s(r)}{r^\lambda}$$

unendlich, endlich und positiv, oder Null ist.

Es ist ferner zweckmäßig den Minimaltypus einer positiven Ordnung  $\lambda$  näher zu differenzieren durch Unterscheidung der *Konvergenzklasse* und der *Divergenzklasse*<sup>2</sup>, welche charakterisiert sind durch die Konvergenz bzw. Divergenz des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{s(r)}{r^{\lambda+1}} dr. \tag{1}$$

Die Funktion  $r^\lambda (\log r)^\mu$  z. B. ist für jedes  $\mu$  von der Ordnung  $\lambda$ , und zwar für  $\mu > 0$  vom Maximaltypus, für  $\mu = 0$  vom Mitteltypus und für  $\mu < 0$  vom Minimaltypus; für  $0 > \mu \geq -1$  gehört sie zur Divergenzklasse, für  $\mu < -1$  dagegen zur Konvergenzklasse.

Während also eine Funktion vom Minimaltypus nicht immer zur Konvergenzklasse gehört, gilt das Umgekehrte ausnahmslos. Ist nämlich

<sup>1</sup> A. PRINGSHEIM [I], E. LINDELÖF [I]. Wir ziehen die von LINDELÖF vorgeschlagene Benennung „Mitteltypus“ (type moyen) dem PRINGSHEIMSchen Terminus „Normaltypus“ vor.

<sup>2</sup> G. VALIRON [I].

das Integral (1) konvergent, so wird für  $\varepsilon > 0$ , sobald  $r$  hinreichend groß ist,

$$\varepsilon > \int_r^\infty \frac{s(t)}{t^{\lambda+1}} dt \geq s(r) \int_r^\infty \frac{dt}{t^{\lambda+1}} = \frac{s(r)}{\lambda r^\lambda},$$

und  $s(r)$  ist folglich vom Minimaltypus.

Unter Anwendung dieser Eigenschaft geht die Richtigkeit folgenden Kriteriums hervor.

*Die Funktion  $s(r)$  ist dann und nur dann von der Ordnung  $\lambda$ , wenn das Integral*

$$\int_r^\infty \frac{s(r)}{r^{\mu+1}} dr$$

*für  $\mu > \lambda$  konvergent, für  $\mu < \lambda$  dagegen divergent ist.*

Wir erklären jetzt:

**Definition.** Eine für  $z \neq \infty$  meromorphe Funktion ist von derselben Ordnung, demselben Typus und derselben Klasse wie ihre charakteristische Funktion  $T(r)$ .

So ist z. B.  $\operatorname{tg} z$  von der Ordnung Eins,  $e^{-z^k}$  und seine in § 2 von Abschnitt VI betrachtete Integralfunktion von der Ordnung  $k$ , die doppeltperiodischen Funktionen sind von der Ordnung 2, und zwar sind diese Funktionen sämtlich vom Mitteltypus der betreffenden Ordnungen. Die Gammafunktion und die RIEMANNSCHE Zetafunktion gehören dem Maximaltypus der Ordnung Eins an. Weitere Beispiele folgen in § 3 dieses Abschnitts.

**175.** Für eine ganze transzendente Funktion  $w(z)$  lassen sich diese Begriffe ebensogut mit Hilfe des Logarithmus des Maximalbetrages

$$M(r) = \max_{|z|=r} |w(z)|$$

erklären. Für eine solche Funktion ist nämlich  $N(r, \infty) = 0$ , und daher

$$T(r) = m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w(re^{i\varphi})| d\varphi \leq \log M(r),$$

während andererseits für  $z = re^{i\varphi}$  und  $r < \rho$  [vgl. (1), Nr. 134]

$$\begin{aligned} \log |w(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(\rho e^{i\theta})| \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} d\theta - \sum \log \left| \frac{\rho^2 - \bar{a}_\nu z}{\rho(z - a_\nu)} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w(\rho e^{i\theta})| \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} d\theta \\ &\leq \frac{\rho + r}{\rho - r} m(\rho, \infty), \end{aligned}$$



also

$$T(r) \leq \log M(r) \leq \frac{\varrho + r}{\varrho - r} T(\varrho).$$

Setzt man hier  $r = \Theta \varrho$  ( $0 < \Theta < 1$ ), so folgt:

*Die Größen  $T(r)$  und  $\log M(r)$  sind für eine ganze Funktion von derselben Ordnung, demselben Typus und derselben Klasse.*

Wegen der Invarianz der Charakteristik  $T$  gegenüber linearen Transformationen  $S(w)$ , ist die Ordnung (Typus, Klasse) einer meromorphen Funktion einer solchen Transformation gegenüber invariant.

Unter Anwendung der Relation (vgl. Nr. 137)

$$T(r, w_1 w_2) \leq T(r, w_1) + T(r, w_2)$$

folgt ferner, daß die Ordnung  $\lambda$  eines Produktes höchstens gleich der größeren Ordnung der Faktoren  $w_1$  und  $w_2$  ist. Dasselbe gilt wegen  $T\left(r, \frac{1}{w_2}\right) = T(r, w_2) + O(1)$  auch für den Quotienten  $w = \frac{w_1}{w_2}$ . Sind nun  $w_1$  und  $w_2$  von *ungleicher* Ordnung  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  (und z. B.  $\lambda_1 > \lambda_2$ ), so ist also  $\lambda \leq \lambda_1$ , und andererseits, da  $w_1$  als Quotient (bzw. Produkt) der Funktionen  $w$  und  $w_2$  geschrieben werden kann, auch  $\lambda_1 \leq \max(\lambda, \lambda_2)$ , so daß also  $\lambda = \lambda_1$  sein muß.

*Die Ordnung des Produktes (des Quotienten) von zwei meromorphen Funktionen  $w_1$  und  $w_2$  der Ordnung  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$  ist  $\leq \max(\lambda_1, \lambda_2)$  und sicher gleich dieser Zahl, sobald  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .*

Mittels der Beziehung  $T(r, w_1 + w_2) \leq T(r, w_1) + T(r, w_2) + \log 2$  (vgl. S. 162) zeigt man ferner, daß entsprechendes für *die Summe*  $w_1 + w_2$  gilt.

Aus dem ersten Hauptsatz  $T(r) \sim m(r, a) + N(r, a)$  schließt man, daß sowohl die Schmiegungsfunktion  $m(r, a)$  wie die Anzahlfunktion  $N(r, a)$  für jedes  $a$  höchstens von der Ordnung (Typus, Klasse) der gegebenen meromorphen Funktion  $w(z)$  ist. Mindestens eine dieser Größen erreicht jene Ordnung; daß dies im allgemeinen, das heißt, für die große Majorität der  $a$ -Werte, für die *Anzahlfunktion* zutrifft, wird sich später ergeben. Was auf Grund der bisherigen Resultate uns vorläufig über die relative Größe der Komponenten  $m$  und  $N$  bekannt ist, ist vor allem im PICARDSchen Satze enthalten, wonach  $N(r, a)$  höchstens für *zwei* Werte  $a$  verschwinden kann, sofern vom trivialen Fall einer konstanten Funktion  $w(z)$  abgesehen wird. Ferner zeigen die Ergebnisse von VI, § 4, daß die Größe  $N$  für „fast alle“ Werte  $a$  den vollen Betrag der Charakteristik erreicht.

**176.** In welcher Art und Weise die Wachstumsschnelligkeit der Anzahlfunktion  $N(r, a)$  mit der Verteilung der  $a$ -Stellen zusammenhängt, geht deutlicher hervor aus nachstehendem Hilfssatz.

Bezeichnen  $r_1(a), r_2(a), \dots$  die wachsend geordneten Beträge der  $a$ -Stellen der meromorphen Funktion  $w(z)$ , so sind für  $\mu > 0$  die drei Ausdrücke

$$\int_0^\infty \frac{N(r, a)}{r^{\mu+1}} dr, \quad \int_0^\infty \frac{n(r, a)}{r^{\mu+1}} dr \quad \text{und} \quad \sum \left( \frac{1}{r_\nu(a)} \right)^\mu \quad (2)$$

gleichzeitig endlich oder unendlich.

Es ist nämlich erstens für  $0 < r_0 < r$

$$\int_{r_0}^r \frac{n(t, a)}{t^{\mu+1}} dt = \int_{t=r_0}^r \frac{dN(t, a)}{t^\mu} = \frac{N(r, a)}{r^\mu} - \frac{N(r_0, a)}{r_0^\mu} + \mu \int_{r_0}^r \frac{N(t, a)}{t^{\mu+1}} dt,$$

woraus unmittelbar hervorgeht, daß die Konvergenz des zweiten Integrals (2) die Konvergenz des ersten zur Folge hat. Wenn dieses Integral wieder konvergent ist, so gilt, wie oben bewiesen wurde,  $N(r, a)r^{-\mu} \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ ; die rechte Seite der obigen Beziehung ist also für  $r \rightarrow \infty$  endlich, und dasselbe gilt somit für das zweite Integral (2), welche also mit dem ersten Integral gleichzeitig konvergent oder divergent ist.

Mittels der Beziehung

$$\sum_{r_0 < r_\nu \leq r} \left( \frac{1}{r_\nu(a)} \right)^\mu = \int_{t=r_0}^r \frac{dn(t, a)}{t^\mu} = \frac{n(r, a)}{r^\mu} - \frac{n(r_0, a)}{r_0^\mu} + \mu \int_{r_0}^r \frac{n(t, a)}{t^{\mu+1}} dt$$

beweist man in entsprechender Weise, daß das zweite Integral und die Reihe in (2) entweder beide konvergent oder beide divergent sind, womit der Hilfssatz vollständig begründet ist.

Man schließt jetzt, daß die Ordnungen (Typen, Klassen) der Ausdrücke  $N$  und  $n$  dieselben sind und ferner, unter Anwendung des oben gegebenen Kriteriums:

Wenn die Ordnung der meromorphen Funktion  $w(z)$  gleich  $\lambda$  ist, so ist die Reihe

$$\sum \left( \frac{1}{r_\nu(a)} \right)^\mu \quad (3)$$

für jedes  $a$  konvergent, sobald  $\mu > \lambda$ .

Wenn  $w(z)$  zur Konvergenzklasse der Ordnung  $\lambda$  gehört, so gilt dasselbe noch für  $\mu = \lambda$ .

Wenn die Reihe (3) für einen gewissen Wert  $\mu$  konvergent ist, so wird  $\mu$  Konvergenzexponent der Zahlenfolge  $r_\nu(a)$  genannt. Die untere Grenze der Konvergenzexponenten heißt Grenzexponent. Das obige Ergebnis besagt also, daß der Grenzexponent der  $a$ -Stellen einer meromorphen Funktion höchstens gleich der Ordnung  $\lambda$  dieser Funktion ist. Falls diese zur Konvergenzklasse gehört, so ist der Grenzexponent gleichzeitig auch Konvergenzexponent.

Gibt es Fälle, wo der Grenzexponent der  $a$ -Stellen für irgendwelche Werte  $a$  kleiner als die Ordnung ausfällt? Daß dies für mindestens

zwei Werte  $a$  zutreffen kann, zeigt uns das Beispiel

$$w(z) = w_1(z)e^{z^\lambda},$$

wo  $\lambda > 0$  ganzzahlig und  $w_1(z)$  eine beliebige meromorphe Funktion von einer Ordnung  $\lambda_1 < \lambda$  ist. Das Produkt ist von der höheren Ordnung  $\lambda$  (vgl. oben S. 209). Die Funktion  $w(z)$  hat aber mit  $w_1(z)$  gemeinsame Nullstellen und Pole, und die Reihe (3) ist also für die zwei Werte  $a = 0, \infty$  konvergent, sobald  $\mu > \lambda_1$ . Für diese Werte ist folglich der Grenzwert kleiner als die Ordnung  $\lambda$ .

Daß andererseits die Anzahl solcher Ausnahmewerte nicht größer als zwei sein kann, folgt aus einer zuerst von BOREL<sup>1</sup> gegebenen Erweiterung des PICARDSchen Satzes, welche im Abschnitt X bewiesen werden soll.

Die obige Funktion  $w(z)$  war von ganzzahliger Ordnung. Für nicht-ganzzahlige endliche Ordnungen gelten noch einfachere Gesetze, welche in § 4 dieses Abschnitts besprochen werden sollen.

## § 2. Kanonische Darstellung einer meromorphen Funktion endlicher Ordnung.

177. Aus der POISSON-JENSENSchen Formel läßt sich nach einem von F. NEVANLINNA<sup>2</sup> angegebenen Verfahren eine in der ganzen punktierten Ebene gültige Darstellung einer meromorphen Funktion endlicher Ordnung als Quotient von zwei WEIERSTRASSschen kanonischen Produkten herleiten.

Sei  $w(z)$  eine meromorphe Funktion von endlicher Ordnung mit den Nullstellen  $a_\mu$  und Polen  $b_\nu$  ( $\mu, \nu = 1, 2, \dots$ ). Es gibt dann eine endliche ganze Zahl  $q \geq 0$ , so daß

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r)}{r^{q+1}} = 0. \tag{4}$$

Wir stellen  $w(z)$  im Kreise  $|z| \leq \rho$  dar durch die POISSON-JENSENSche Formel (1') (VI, § 1) und finden dann nach  $(q+1)$ -maliger Differentiation<sup>3</sup>

$$D^{(q+1)} \log w(z) = \sum_{|a_\mu| < \rho} \frac{(-1)^q q!}{(z - a_\mu)^{q+1}} - \sum_{|b_\nu| < \rho} \frac{(-1)^q q!}{(z - b_\nu)^{q+1}} + S_\rho(z) + I_\rho(z),$$

wo

$$S_\rho(z) = q! \sum_{|a_\mu| < \rho} \left( \frac{\bar{a}_\mu}{\rho^2 - a_\mu z} \right)^{q+1} - q! \sum_{|b_\nu| < \rho} \left( \frac{\bar{b}_\nu}{\rho^2 - \bar{b}_\nu z} \right)^{q+1},$$

$$I_\rho(z) = \frac{(q+1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(\rho e^{i\theta})| \frac{2\rho e^{i\theta} d\theta}{(\rho e^{i\theta} - z)^{q+2}}.$$

<sup>1</sup> E. BOREL [I].

<sup>2</sup> F. NEVANLINNA [I], R. NEVANLINNA [A].

<sup>3</sup> Wir können den Anfangswert  $w(0) \neq 0, \infty$  annehmen. Dies kann stets durch Division der Funktion  $w$  durch eine Potenz  $z^z$  erreicht werden.

178. Es wird sich zeigen, daß die Ausdrücke  $S_\varrho$  und  $I_\varrho$  für  $\varrho \rightarrow \infty$  verschwinden. Für  $|z| \leq r < \varrho$  ist nämlich, da  $|a_\mu| < \varrho$ ,

$$\left| \frac{\bar{a}_\mu}{\varrho^2 - \bar{a}_\mu z} \right| \leq \frac{|a_\mu|}{\varrho^2 - |a_\mu| r} < \frac{1}{\varrho - r}$$

und daher

$$\left| \sum \left( \frac{\bar{a}_\mu}{\varrho^2 - \bar{a}_\mu z} \right)^{q+1} \right| \leq \frac{n(\varrho, 0)}{(\varrho - r)^{q+1}} = \frac{n(\varrho, 0)}{\varrho^{q+1}} \left( \frac{1}{1 - \frac{r}{\varrho}} \right)^{q+1}.$$

Hier ist

$$n(\varrho, 0) = n(\varrho, 0) \int_{\varrho}^{\varrho\varrho} \frac{dt}{t} \leq \int_{\varrho}^{\varrho\varrho} n(t, 0) dt \leq N(\varrho\varrho, 0) < T(\varrho\varrho) + O(1),$$

woraus vermöge der Voraussetzung (4)

$$\frac{n(\varrho, 0)}{\varrho^{q+1}} \rightarrow 0 \text{ für } \varrho \rightarrow \infty$$

folgt.

Die zweite im Ausdrucke  $S_\varrho$  stehende, von den Polen  $b_\nu$  herrührende Summe läßt sich auf ähnliche Weise abschätzen, und es ergibt sich also, daß  $S_\varrho(z)$  für  $\varrho \rightarrow \infty$  verschwindet, und zwar gleichmäßig für  $|z| \leq r$ .

Für den Ausdruck  $I_\varrho$  gilt für  $|z| \leq r < \varrho$

$$\begin{aligned} |I_\varrho(z)| &\leq \frac{(q+1)! \varrho}{\pi(\varrho-r)^{q+2}} \int_0^{2\pi} |\log w(\varrho e^{i\theta})| d\theta = \frac{2(q+1)!}{\left(1 - \frac{r}{\varrho}\right)^{q+2}} \frac{m(\varrho, 0) + m(\varrho, \infty)}{\varrho^{q-1}} \\ &< \frac{4(q+1)!}{\left(1 - \frac{r}{\varrho}\right)^{q+2}} \frac{T(\varrho) + O(1)}{\varrho^{q-1}}, \end{aligned}$$

und es wird gleichmäßig für  $|z| \leq r$

$$I_\varrho(z) \rightarrow 0 \text{ für } \varrho \rightarrow \infty.$$

Zusammenfassend wird

$$D^{(q+1)} \log w(z) = (-1)^{q+1} q! \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\substack{|z| < \varrho \\ b_\nu < \varrho}} \left( \frac{1}{z - b_\nu} \right)^{q+1} - \sum_{\substack{|z| < \varrho \\ a_\mu < \varrho}} \left( \frac{1}{z - a_\mu} \right)^{q+1} \right\},$$

woraus nach  $(q+1)$ -maliger Integration, welche wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz rechts gliedweise ausgeführt werden kann, schließlich

$$\begin{aligned} \log w(z) &= \sum_0^q c_\nu z^\nu + \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{\substack{|z| < \varrho \\ a_\mu < \varrho}} \left[ \log \left( 1 - \frac{z}{a_\mu} \right) + \frac{z}{a_\mu} + \dots + \frac{1}{q} \left( \frac{z}{a_\mu} \right)^q \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{|z| < \varrho \\ b_\nu < \varrho}} \left[ \log \left( 1 - \frac{z}{b_\nu} \right) + \frac{z}{b_\nu} + \dots + \frac{1}{q} \left( \frac{z}{b_\nu} \right)^q \right] \right\}. \end{aligned}$$

Hier ist  $\nu! c_\nu = D^{(\nu)} \log w(0)$ . Wir haben also das Ergebnis:

Es sei  $w(z)$  eine meromorphe Funktion endlicher Ordnung mit den Nullstellen  $a_1, a_2, \dots$  und den Polen  $b_1, b_2, \dots$ . Sei ferner  $T(r)$  ihre Charakteristik und  $q$  eine so große ganze Zahl, daß

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r)}{r^{q+1}} = 0. \tag{4}$$

Unter diesen Bedingungen hat  $w(z)$  die in jedem endlichen Gebiete der Ebene gleichmäßig konvergente Darstellung

$$w(z) = z^\alpha e^{\sum_{\nu} c_\nu z^\nu} \lim_{\rho=\infty} \frac{\prod_{|a_\mu| < \rho} \left(1 - \frac{z}{a_\mu}\right) e^{\frac{z}{a_\mu} + \dots + \frac{1}{q} \left(\frac{z}{a_\mu}\right)^q}}{\prod_{|b_\nu| < \rho} \left(1 - \frac{z}{b_\nu}\right) e^{\frac{z}{b_\nu} + \dots + \frac{1}{q} \left(\frac{z}{b_\nu}\right)^q}}, \tag{5}$$

wo  $\alpha$  eine ganze Zahl ist<sup>1</sup>.

**179.** Die obigen Annahmen genügen noch nicht, um die Konvergenz der einzelnen, im Zähler und Nenner stehenden kanonischen Produkte zu sichern. Hierfür ist nämlich die Konvergenz der Reihen

$$\sum \left| \frac{1}{a_\mu} \right|^{q+1} \quad \text{und} \quad \sum \left| \frac{1}{b_\nu} \right|^{q+1} \tag{6}$$

erforderlich, oder was gleichbedeutend ist, die Konvergenz der Integrale

$$\int_0^\infty \frac{N(r, a)}{r^{q+2}} dr \quad (a = 0, \infty).$$

Die Voraussetzung (4) dagegen sagt nur aus, daß  $T(r)$  und somit auch  $N(r, a)$  höchstens vom Minimaltypus der Ordnung  $q+1$  ist.

Gehört aber  $T(r)$  höchstens der *Konvergenzklasse* der Ordnung  $q+1$  an, d. h. ist das Integral

$$\int_0^\infty \frac{T(r)}{r^{q+2}} dr$$

konvergent, so sind beide Reihen (6), und daher auch die entsprechenden kanonischen Produkte absolut und für jedes  $|z| \leq r$  gleichmäßig konvergent.

Wenn das Integral

$$\int_0^\infty \frac{T(r)}{r^{q+2}} dr \tag{7}$$

<sup>1</sup> Dieser Satz zeigt, daß die Beziehung  $T(r) = O(\log r)$  nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß eine meromorphe Funktion  $w$  sich auf eine rationale Funktion reduziert (vgl. VI, § 2, Nr. 137). Aus jener Beziehung folgt nämlich, daß (4) mit  $q=0$  erfüllt ist. Da  $N(r, 0)$  und  $N(r, \infty)$  nach dem ersten Hauptsatz ebenfalls von der Ordnung  $O(\log r)$  sind, so ist die Nullstellen- und Polanzahl *endlich*, und der Ausdruck rechts in (5) wird eine *rationale* Funktion.

konvergent ist, so hat man

$$w(z) = z^{\lambda} e^{\sum_{\nu} c_{\nu} z^{\nu}} \frac{\prod_{\nu} E\left(\frac{z}{a_{\nu}}, q\right)}{\prod_{\nu} E\left(\frac{z}{b_{\nu}}, q\right)}, \quad (8)$$

wo  $E$  den Primfaktor von WEIERSTRASS

$$E(u, q) = (1 - u) e^{u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^q}{q}}$$

bezeichnet.

Diese kanonische Darstellung zeigt, daß eine meromorphe Funktion endlicher Ordnung bis auf einen Exponentialfaktor

$$e^{P(z)},$$

wo  $P$  ein Polynom ist, durch ihre Nullstellen und Pole bestimmt ist. Die asymptotischen Eigenschaften der Funktion hängen also wesentlich von der Verteilung jener Stellensorten ab. Um diesen Zusammenhang aufzuklären, müssen wir die Beziehungen zwischen dem Anwachsen und der Nullstellendichte eines kanonischen Produktes einem näheren Studium unterziehen.

### § 3. Einige Eigenschaften der kanonischen Produkte.

180. Zur Abschätzung des absoluten Betrages eines kanonischen Produktes soll der WEIERSTRASSsche Primfaktor  $E(u, q)$  zunächst untersucht werden. Falls  $q=0$  ist, so haben wir einfach die evidente Beziehung

$$\log |E(u, 0)| \leq \log(1 + |u|) \quad (9)$$

zu benutzen.

Ist dagegen  $q \geq 1$ , so gilt für  $|u| \leq \frac{q}{q-1}$

$$\begin{aligned} \log |E(u, q)| &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|u|^{\nu}}{\nu} \leq \frac{|u|^{q+1}}{q+1} (1 + |u| + \dots) = \frac{|u|^{q+1}}{q+1} \frac{1}{1 - |u|} \\ &\leq |u|^{q+1}. \end{aligned}$$

Für  $|u| > \frac{q}{q-1}$  ist wiederum, wegen  $\log(1 + |u|) < |u|$ ,

$$\begin{aligned} \log |E(u, q)| &\leq |u|^q \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} \left| \frac{1}{u} \right| + \dots + \frac{1}{2} \left| \frac{1}{u} \right|^{q-2} + 2 \left| \frac{1}{u} \right|^{q-1} \right) \\ &\leq |u|^q \left[ 2 \left( 1 + \frac{1}{q} \right)^{q-1} + \sum_{r=2}^q \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{1}{q} \right)^{q-r} \right] \\ &\leq |u|^q \left( 1 + \frac{1}{q} \right)^q \left( 2 + \sum_{r=2}^q \frac{1}{r} \right) \leq e(2 + \log q) |u|^q \\ &\leq \frac{|u|^{q+1}}{1 + |u|} 3e(2 + \log q). \end{aligned}$$

Diese obere Schranke ist aber für  $|u| \leq \frac{q}{q+1}$ , größer als  $|u|^{q+1}$ , wir haben also den<sup>1</sup>

**Satz.** *Der WEIERSTRASSsche Primfaktor genügt für  $q \geq 1$  der Ungleichung*

$$\log |E(u, q)| \leq \frac{\rho |u|^{q+1}}{1 + |u|}, \tag{10}$$

wo

$$\rho = 3e(2 + \log q).$$

181. Sei nun  $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$  eine nach wachsenden Beträgen geordnete Folge von Zahlen derart, daß die Reihe

$$\sum_{\nu} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^q,$$

wo  $q$  eine ganze Zahl ist, divergent ist, während die Reihe

$$\sum_{\nu} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{q+1}$$

konvergiert. Unter diesen Voraussetzungen ist das unendliche Produkt

$$\prod_{\nu} E\left(\frac{z}{a_\nu}, q\right)$$

in jedem endlichen Bereich der Ebene gleichmäßig konvergent und stellt also eine für  $z = a_\nu$  verschwindende ganze Funktion dar. Die ganze Zahl  $q$  wird das *Geschlecht* des kanonischen Produktes genannt.

Bezeichnet  $n(r)$  die Anzahl der im Kreise  $|z| \leq r$  liegenden Nullstellen  $a_\nu$ , so sind die Integrale

$$\int \frac{n(r)}{r^{\mu+1}} dr \quad \text{und} \quad \int \frac{N(r)}{r^{\mu+1}} dr$$

für  $\mu = q$  divergent und für  $\mu = q + 1$  konvergent. Die *Ordnung*  $\lambda$  der Größen  $n(r)$  und  $N(r)$ , welche gleich dem Grenzexponenten der Zahlenfolge  $|a|$  ist, liegt im Intervalle  $q \leq \lambda \leq q + 1$ , und die Ordnung des kanonischen Produktes, d. h. die Ordnung seiner Charakteristik  $T(r)$  oder auch der Größe  $\log M(r)$ , ist also *mindestens gleich*  $\lambda$ .

Wir gehen jetzt dazu über, den Betrag des kanonischen Produktes nach oben abzuschätzen. Unter Anwendung des Hilfssatzes (10) findet man für  $q \geq 1$

$$\begin{aligned} \log M(r) &\leq \rho \sum_1^{\infty} \frac{r^{q+1}}{|a_\nu|^q (|a_\nu| + r)} = \rho r^{q+1} \int_{t=0}^{\infty} \frac{dn(t)}{t^q (t+r)} \\ &= \rho r^{q+1} \int_0^{\infty} \frac{qr + (q+1)t}{t^{q+1} (t+r)^2} n(t) dt \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Vgl. E. BOREL [1], G. VALIRON [3].

$$\begin{aligned} &\leq \rho(q+1)r^{q+1} \int_0^{\infty} \frac{n(t) dt}{t^{q+1}(t+r)} \\ &\leq \rho(q+1)r^q \left( \int_0^r \frac{n(t)}{t^{q+1}} dt + r \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt \right). \end{aligned}$$

Die letzte obere Schranke ist auch im Falle  $q=0$  brauchbar, wie man leicht bestätigt, wenn bei der obigen Abschätzung von der Beziehung (9) ausgeht. Zusammenfassend gilt demnach:

*Der Maximalbetrag  $M(r)$  eines kanonischen Produktes vom Geschlecht  $q$  genügt der Ungleichung*

$$\log M(r) < k r^q \left( \int_0^r \frac{n(t)}{t^{q+1}} dt + r \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt \right), \quad (11)$$

wo  $k = 3e(q+1)(2 + \log q)$ .

**182.** Diese Ungleichung zeigt, daß die Ordnung von  $\log M(r)$  nicht höher als die Ordnung von  $n(r)$  sein kann, und da auch das Umgekehrte besteht, so hat man also das Ergebnis:

*Die Ordnung eines kanonischen Produkts von endlichem Geschlecht stimmt mit der Ordnung seiner Nullstellenanzahl  $n(r)$  überein.*

Was nun den Typus und die Klasse des Produkts betrifft, so hat man hier zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Ordnung  $\lambda$  ganzzahlig oder nichtganzzahlig ist. Wir fassen zuerst den letztgenannten Fall  $q < \lambda < q+1$  ins Auge. Man bestätigt dann unmittelbar an Hand der Beziehung (11), daß  $\log M(r)$  nicht von höherem Typus als  $n(r)$  sein kann. Dasselbe gilt aber auch für die Klasse, denn man hat den Satz<sup>1</sup>:

*Für ein kanonisches Produkt nichtganzzahliger Ordnung  $\lambda$  sind die Integrale*

$$\int_0^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}} dr \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \frac{n(r)}{r^{\lambda+1}} dr \quad (12)$$

*gleichzeitig konvergent oder divergent.*

Mit Rücksicht auf die Resultate von § 1 genügt es, zu beweisen, daß die Konvergenz des zweiten Integrals die Konvergenz des ersten Integrals nach sich zieht. Dies ergibt sich in der Tat als eine leichte Folgerung der Beziehung (11), welche wir in der Form

$$\log M(r) < k(\varphi(r) + \psi(r)) \quad (13)$$

schreiben, mit

$$\varphi(r) = r^q \int_0^r \frac{n(t)}{t^{q+1}} dt, \quad \psi(r) = r^{q+1} \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt.$$

<sup>1</sup> G. VALIRON [I].



Es ist nämlich

$$\int_0^r \frac{\varphi(t)}{t^{\lambda+1}} dt = -\frac{1}{\lambda-q} \frac{1}{r^{\lambda-q}} \int_0^r \frac{n(t)}{t^{q+1}} dt + \frac{1}{\lambda-q} \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt,$$

woraus zu sehen ist, daß das Integral

$$\int_{r^{\lambda+1}}^{\infty} \frac{\varphi(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

konvergent ist, sofern das zweite Integral (12) endlich ist.

Unter derselben Voraussetzung ist

$$\int_0^r \frac{\psi(t)}{t^{\lambda+1}} dt = \frac{r^{q+1-\lambda}}{q+1-\lambda} \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{q+2}} dt + \frac{1}{q+1-\lambda} \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}} dt.$$

Die Größe  $n(r)$  ist aber vom Minimaltypus der Ordnung  $\lambda$  und der Ausdruck rechts strebt also für  $r \rightarrow \infty$  gegen einen endlichen Grenzwert. Es folgt hieraus die Konvergenz des Integrals

$$\int_{r^{\lambda+1}}^{\infty} \frac{\psi(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

und weiter, mit Rücksicht auf (13), die behauptete Endlichkeit des Integrals

$$\int_{r^{\lambda+1}}^{\log M(r)} dr.$$

*Die Typen und die Klassen der Größen  $\log M(r)$  und  $n(r)$  sind für ein kanonisches Produkt nichtganzzahliger Ordnung einander gleich.*

**183.** Dieser Satz gilt nicht ausnahmslos für ganzzahlige Ordnungen. Daß hier eine Erhöhung des Typus oder der Klasse von  $\log M(r)$  im Vergleich zu  $n(r)$  möglich ist, soll jetzt durch ein Beispiel gezeigt werden.

Es seien  $\lambda$  eine positive,  $\alpha$  eine beliebige reelle Zahl und

$$\varphi(r; \lambda, \alpha) = r^\lambda (\log r)^\alpha. \tag{14}$$

Für  $r \geq e^{\frac{|\alpha|}{\lambda}}$  ist  $\varphi$  mit  $r$  monoton wachsend. Schränken wir die Variabilität des Parameters  $r$  auf  $r \geq r_0 > e^{2\pi + \frac{\alpha}{\lambda}}$  ein, so wird also die Gleichung

$$\varphi(r) = \nu$$

für jede ganze Zahl  $\nu \geq \nu_0 = [\varphi(r_0) + 1]$  eine wohlbestimmte Wurzel  $r_\nu$  haben<sup>1</sup>; sei noch  $r_1 = \dots = r_{\nu_0-1} = r_{\nu_0}$ .

Um das Anwachsen der monotonen Zahlenfolge  $r_1, r_2, \dots$  zu untersuchen, bemerke man, daß die Anzahl der Werte  $r_\nu$ , welche den Wert  $r \geq r_1$  nicht übersteigen, gleich

$$n(r) = [\varphi(r)]$$

<sup>1</sup> Wie üblich bezeichnet  $[a]$  die größte ganze Zahl  $\leq a$ .

ist. Da die Differenz  $\varphi - n$  demnach höchstens den Betrag 1 hat, so sind die Integrale

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{n(r)}{r^{\mu+1}} dr \quad \text{und} \quad \int_{r_1}^{\infty} \frac{\varphi(r; \lambda, \alpha)}{r^{\mu+1}} dr$$

für jedes  $\mu > 0$  gleichzeitig konvergent oder divergent. Also ist das erste Integral, und somit die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{1}{r_{\nu}}^{\mu}$$

für  $\mu > \lambda$  konvergent und für  $\mu < \lambda$  divergent. Für  $\mu = \lambda$  tritt Konvergenz oder Divergenz ein, je nachdem  $\alpha < -1$  oder  $\alpha \geq -1$  ist. Die *größte ganze Zahl*  $q$ , für welche Divergenz stattfindet, ist also gleich  $q = [\lambda]$ , falls  $\lambda$  nichtganzzahlig,  $\alpha$  beliebig oder falls  $\lambda$  ganzzahlig,  $\alpha \geq -1$  ist. Dagegen wird  $q + 1 = \lambda$  sein, falls  $\lambda$  ganzzahlig und  $\alpha < -1$  ist.

184. Mit den derart bestimmten Zahlen  $q$  und  $r_{\nu}$  setzen wir nun das kanonische Produkt vom Geschlechte  $q$

$$f(z; \lambda, \alpha) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(-\frac{z}{r_{\nu}}, q\right)$$

an. Um das asymptotische Verhalten dieser in den Punkten  $-r_{\nu}$  der negativen reellen Achse verschwindenden ganzen Funktion zu untersuchen, schneiden wir die Ebene von  $-r_1$  bis  $-\infty$  geradlinig auf. Nimmt man im Ausdruck

$$\log f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \log E\left(-\frac{z}{r_{\nu}}, q\right)$$

überall denjenigen Zweig des Logarithmus, welcher für  $z=0$  verschwindet, so ist  $\log f(z; \lambda, \alpha)$  hierdurch als eine in der aufgeschnittenen Ebene  $D$  reguläre und eindeutige Funktion definiert.

Es gilt

$$\left. \begin{aligned} \log f(z; \lambda, \alpha) &= \int_{t=r_1}^{\infty} E\left(-\frac{z}{t}, q\right) dn(t) = - \int_{r_1}^{\infty} n(t) dE\left(-\frac{z}{t}, q\right) \\ &= (-1)^q z^{q+1} \int_{r_1}^{\infty} \frac{n(t)}{t^{q+1}} \frac{dt}{t+z}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

und da  $n(t) \sim \varphi$ , so wird das asymptotische Verhalten von  $\log f$ , wie später genau bewiesen werden soll, von den asymptotischen Eigenschaften des Integrals

$$I(z; \lambda, \alpha) = \int_{r_1}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{q+1}} \frac{dt}{t+z}$$

im wesentlichen bestimmt.

Eine vorbereitende Abschätzung für den Betrag dieses Integrals wird uns nötig sein. Schränkt man den Punkt  $z$  auf den Winkelraum

$$|\arg z| \leq \pi - \delta \quad (0 < \delta < \pi) \quad (W)$$

ein, so wird  $|t+z|$  mindestens gleich der größeren der Zahlen  $t \sin \delta$  und  $|z| \sin \delta$  sein, und jedenfalls

$$|t+z| \geq \frac{\sin \delta}{2} (t + |z|).$$

Folglich ist in  $W$  für  $|z|=r$

$$|I(z; \lambda, \alpha)| \leq \frac{2}{\sin \delta} \int_{r_1}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{q+1} t+r} dt.$$

Ferner ergibt sich für  $r > r_1$

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{\varphi(t; \lambda, \alpha)}{t^{q+1}} \frac{dt}{t+r} \leq \frac{1}{r} \int_{r_1}^r \frac{\varphi dt}{t^{q+1}} + \int_r^{\infty} \frac{\varphi dt}{t^{q+2}}.$$

Durch partielle Integration wird für  $\lambda > q$

$$(\lambda - q) \int_{r_1}^r \frac{\varphi(t; \lambda, \alpha)}{t^{q+1}} dt = r^{\lambda-q} (\log r)^\alpha - r_1^{\lambda-q} (\log r_1)^\alpha - \alpha \int_{r_1}^r \frac{\varphi(t; \lambda, \alpha - 1)}{t^{q+1}} dt.$$

Da das linksstehende Integral voraussetzungsgemäß für  $r \rightarrow \infty$  unbeschränkt wächst und der Ausdruck  $\varphi(t; \lambda, \alpha - 1)$  für  $t \rightarrow \infty$  im Vergleich mit  $\varphi(t; \lambda, \alpha)$  verschwindend klein wird, so ist auch das rechtsstehende Integral im Vergleich mit dem linksstehenden unendlich klein, und es wird also

$$\int_{r_1}^r \frac{\varphi(t; \lambda, \alpha)}{t^{q+1}} dt \sim \frac{r^{\lambda-q}}{\lambda-q} (\log r)^\alpha = \frac{\varphi(r; \lambda, \alpha)}{(\lambda-q)r^q}.$$

Eine ähnliche Betrachtung lehrt, daß für  $\lambda < q + 1$

$$\int_r^{\infty} \frac{\varphi(t; \lambda, \alpha)}{t^{q+2}} dt \sim \frac{\varphi(r; \lambda, \alpha)}{(q+1-\lambda)r^{q+1}},$$

und es wird also zusammenfassend im Winkelraume  $W$

$$I(z; \lambda, \alpha) = O(\varphi(r; \lambda, \alpha) r^{-q-1}) \quad (16)$$

für  $q < \lambda < q + 1$ .

Für  $\lambda = q, \alpha > -1$ <sup>1</sup> wird

$$\int_{r_1}^r \frac{\varphi dt}{t^{q+1}} \sim \frac{(\log r)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \int_{r_1}^{\infty} \frac{\varphi dt}{t^{q+2}} \sim \frac{(\log r)^\alpha}{r}$$

und

$$I(z; q, \alpha) \sim O\left(\frac{(\log r)^{\alpha+1}}{r}\right). \quad (16')$$

<sup>1</sup> Der Wert  $\alpha = -1$  würde eine besondere Behandlung erfordern, weshalb wir ihn der Kürze wegen im folgenden ausschließen (vgl. hierzu die Fußnote S. 221).

Schließlich findet man für  $\lambda = q + 1$ ,  $\alpha < -1$

$$I(z; q + 1, \alpha) \sim O((\log r)^{\alpha + 1}). \quad (16'')$$

Durch eine ähnliche Schlußweise läßt sich auch das Integral

$$\int_{r_1}^{\infty} n(t) - \frac{\varphi(t; \lambda, \alpha)}{t^{q+1}} \frac{dt}{t+z}$$

abschätzen, unter Beachtung der Beziehung  $|n - \varphi| \leq 1$ . Dieser Ausdruck ist für  $q > 0$  höchstens von der Größenordnung  $O\left(\frac{1}{r}\right)$  und für  $q = 0$  von der Ordnung  $O\left(\frac{\log r}{r}\right)$ . Führt man dies in (15) ein, so wird also im Winkelraum  $W$

$$\log f(z; \lambda, \alpha) = (-1)^q z^{q+1} I(z; \lambda, \alpha) + O(|z|^q + \log |z|). \quad (17)$$

**185.** Um jetzt eine genauere Entwicklung des Integrals  $I(z; \lambda, \alpha)$  zu finden, betrachten wir die Funktion  $\varphi(t; \lambda, \alpha)$  für komplexwertige  $t$  und beschränken uns hierbei auf dasjenige Gebiet  $D_1$  der  $t$ -Ebene, welches aus dem Kreisäußeren  $|t| > r_1$  entsteht, wenn dieses Gebiet von  $r_1$  bis  $\infty$  längs der positiven reellen Achse aufgeschlitzt wird. Auf dem oberen Schrittrand wählen wir  $\arg t = 0$  und  $\varphi$  reell; hierdurch ist ein in  $D_1$  eindeutiger Funktionszweig festgelegt, und es ist, sofern der Punkt  $z$  außerhalb des Strahls  $(-r_1, -\infty)$  liegt, nach dem CAUCHYSCHEN Lehrsatz

$$(-1)^{q+1} \frac{2\pi i \varphi(-z; \lambda, \alpha)}{z^{q+1}} = \int_I \frac{\varphi(t; \lambda, \alpha)}{t^{q+1}} \frac{dt}{t+z},$$

wobei die Integration im positiven Sinn um den Rand  $I$  von  $D_1$  auszuführen ist<sup>1</sup>.

Man hat

$$\int_I = \int_{r_1}^{\infty} \frac{\varphi}{t^{q+1}} \frac{dt}{t+z} - \int_{r_1}^{\infty} \frac{\varphi_1}{t^{q+1}} \frac{dt}{t+z} + \int_{|z|=r_1}, \quad (18)$$

wo

$$\begin{aligned} \varphi_1(t; \lambda, \alpha) &= \varphi(te^{2\pi i}; \lambda, \alpha) = e^{2\pi i \lambda} (\log t + 2\pi i)^{\alpha} t^{\lambda} \\ &= e^{2\pi i \lambda} \varphi(t; \lambda, \alpha) \left(1 + \frac{2\pi i}{\log t}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

den Wert von  $\varphi$  auf dem unteren Schrittrand bezeichnet. Da  $\log t > \log r_1 > 2\pi$ , so hat man

$$\left(1 + \frac{2\pi i}{\log t}\right)^{\alpha} = 1 + \frac{2\pi \alpha i}{\log t} + \frac{\psi(t)}{(\log t)^2},$$

<sup>1</sup> Man hat zuerst diesen Satz in demjenigen Teil von  $D_1$  anzuwenden, der innerhalb  $|z| = R > r_1$  liegt; für  $R \rightarrow \infty$  wird dann der diesem Kreis entsprechende Teil des Integrals verschwinden. Dies gilt auch für  $\lambda = q + 1$ , sofern nur  $\alpha < 0$  ist, was für das folgende wichtig ist.

wo  $\varphi(t)$  für  $r_1 \leq t$  beschränkt ist, und es wird also, da das letzte Glied in (18) von der Größenordnung  $O\left(\frac{1}{|z|}\right)$  ist,

$$2\pi i \frac{\varphi(-z; \lambda, \alpha)}{(-z)^{q+1}} = I(z; \lambda, \alpha) (1 - e^{2\pi i \lambda}) - 2\pi \alpha i e^{2\pi i \lambda} I(z; \lambda, \alpha - 1) \left. \begin{aligned} & - e^{2\pi i \lambda} \int_{r_1}^{\infty} \frac{\varphi(t; \lambda, \alpha - 2) \psi(t)}{t^{q+1}(t+z)} dt + O\left(\frac{1}{|z|}\right). \end{aligned} \right\} (19)$$

Sei nun  $q < \lambda < q + 1$ . Unter Anwendung der vorbereitenden Abschätzung (16) folgt, daß das Integral rechts in (19) und der Ausdruck  $I(z; \lambda, \alpha - 1)$  in  $W$  von der Größenordnung  $O(|z|^{-q-1} \varphi(|z|; \lambda, \alpha - 1))$  sind, und es wird also, da diese Größen somit im Vergleich mit dem Ausdruck links in (19) verschwindend klein sind,

$$I(z; \lambda, \alpha) \sim - \frac{\pi e^{-\pi i \lambda}}{\sin \pi \lambda} \frac{\varphi(-z; \lambda, \alpha)}{(-z)^{q+1}} \sim \frac{\pi z^{\lambda-q-1} (\log z)^\alpha}{\sin \pi (\lambda - q)},$$

wo  $|\arg z| \leq \pi - \delta$  zu nehmen ist.

Im Falle  $\lambda = q$  wird das erste Glied rechts in (19) verschwinden. Ersetzt man dann  $\alpha$  durch  $\alpha + 1$ , so wird für  $\alpha + 1 > 0$

$$I(z; \lambda, \alpha) \sim \frac{(-1)^q \varphi(-z; \lambda, \alpha + 1)}{\alpha + 1} \frac{1}{z^{q+1}} = \frac{(\log z)^{\alpha+1}}{(\alpha + 1) z}.$$

Für  $\lambda = q + 1, \alpha + 1 < 0$  erhält man schließlich

$$I(z; \lambda, \alpha) \sim - \frac{(\log z)^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.$$

Führt man diese Entwicklungen in (17) ein, so gelangt man zu folgendem Ergebnis:

Das kanonische Produkt  $f(z; \lambda, \alpha)$  vom Geschlecht  $q$ , dessen Nullstellenanzahl  $n(r)$  von der Größenordnung

$$n(r) \sim r^\lambda (\log r)^\alpha \tag{20}$$

ist, hat im Winkelraum  $|\arg z| \leq \pi - \delta (0 < \delta < \pi)$  die asymptotische Entwicklung

$$\log f(z; \lambda, \alpha) \sim (-1)^q \frac{\pi}{\sin \pi (\lambda - q)} z^\lambda (\log z)^\alpha \left(1 + \varepsilon \left(\frac{1}{z}\right)\right), \tag{20'}$$

falls  $q < \lambda < q + 1$ , und

$$\log f(z; \lambda, \alpha) \sim \frac{(-1)^\lambda}{\alpha + 1} z^\lambda (\log z)^{\alpha+1}, \tag{20''}$$

falls  $\lambda = q, \alpha + 1 > 0$  oder  $\lambda = q + 1, \alpha + 1 < 0$ .

186. Übereinstimmend mit dem Satz von Nr. 182 sind bei der ganzen Funktion  $f(z; \lambda, \alpha)$  die Größen  $\log M(r)$  (oder  $T(r)$ ) und  $n(r)$  für eine nichtganzzahlige Ordnung  $\lambda$  von derselben Klasse und Typus. Entsprechendes gilt dagegen nicht mehr für ganzzahlige Ordnungen, bei

<sup>1</sup> Vgl. E. LINDELÖF [1]. Im Falle  $\lambda = q, \alpha + 1 = 0$  findet man durch eine besondere elementare Abschätzung  $\log f(z; q, -1) \sim z^\lambda \log \log z$ .

denen eine Erhöhung des Typus oder der Klasse von  $\log M(r)$  vorkommen kann. So zeigen uns die Beziehungen (20) und (20''), daß für  $\lambda=q$ ,  $-1 < \alpha < 0$  die Größe  $\log M(r)$  [bzw.  $T(r)$ ] vom *Maximaltypus* der Ordnung  $q$  ist, während die Nullstellenanzahl dem *Minimaltypus* derselben Ordnung angehört. Und für  $\lambda=q+1$ ,  $-2 \leq \alpha < -1$  gehört  $\log M(r)$  [bzw.  $T(r)$ ] der *Divergenzklasse*,  $n(r)$  dagegen der *Konvergenzklasse* vom Minimaltypus der Ordnung  $q+1$  an.

#### § 4. Das Geschlecht einer meromorphen Funktion.

187. Wir gehen zur allgemeinen Theorie der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung zurück und betrachten eine Funktion  $w(z)$ , für welche das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{T(r)}{r^{q+2}} dr \quad (21)$$

konvergent ist, wobei  $q$  eine ganze Zahl  $\geq 0$  ist. Nach dem Satz von § 2, Nr. 179 können wir dann  $w$  in der Normalform (8) darstellen. Wegen der Konvergenz des Integrals (21) sind die mittels der Nullstellen  $a_\nu$  und der Pole  $b_\nu$  gebildeten Reihen

$$\sum \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{k+1}, \quad \sum \left| \frac{1}{b_\nu} \right|^{k+1}$$

für  $k=q$  beide konvergent. Wir bezeichnen nun durch  $k=k_1 \leq q$  und  $k=k_2 \leq q$  die *kleinsten ganzen Zahlen*, wofür diese Reihen noch konvergieren. Man kann dann in den kanonischen Produkten rechts in (8) den Primfaktor  $E\left(\frac{z}{a_\nu}, q\right)$  bzw.  $E\left(\frac{z}{b_\nu}, q\right)$  durch  $E\left(\frac{z}{a_\nu}, k_1\right)$  bzw.  $E\left(\frac{z}{b_\nu}, k_2\right)$  ersetzen und die dabei verschwindenden Exponentialfaktoren mit dem vorangehenden Exponentialfaktor  $e^{\Sigma c_\nu z^\nu}$  vereinigen. In dieser Weise gelangt man zu der konvergenten Darstellung

$$w(z) = z^\alpha e^{P_h(z)} \frac{\prod E\left(\frac{z}{a_\nu}, k_1\right)}{\prod E\left(\frac{z}{b_\nu}, k_2\right)}, \quad (22)$$

wo  $P_h$  ein Polynom vom Grade  $h \leq q$  und  $k_1$  bzw.  $k_2$  das Geschlecht der kanonischen Produkte bezeichnen.

Der Begriff des Geschlechts, der bisher nur für ein kanonisches Produkt erklärt worden ist, wird nun für eine beliebige meromorphe Funktion folgendermaßen definiert:

**Definition.** Das Geschlecht einer meromorphen Funktion endlicher Ordnung ist gleich der größten der in der Normaldarstellung (22) vorkommenden ganzen Zahlen  $h, k_1, k_2$ .

188. Wenn die Funktion  $w(z)$  von der Ordnung  $\lambda$  ist, so ist das Integral (21) sicher konvergent, falls man die ganze Zahl  $q$  durch die Bedingung

$q \leq \lambda < q + 1$  festlegt. Dann hat man für  $w$  die Darstellung (22), woraus zu sehen ist, daß das Geschlecht von  $w$  nicht größer als  $\lambda$  ist:

*Das Geschlecht einer meromorphen Funktion ist höchstens gleich der Ordnung derselben.*

Sei umgekehrt  $w(z)$  vom Geschlecht  $q$ ; in der Darstellung (22) wird also dann  $\max(h, k_1, k_2) = q$  sein. Zur Abschätzung der Ordnung von  $w(z)$  bemerke man, daß dessen charakteristische Funktion höchstens gleich der Summe der charakteristischen Funktionen der einzelnen Faktoren der Produktdarstellung (22) ist. Bezeichnet man durch  $\pi_1$  und  $\pi_2$  die im Zähler und Nenner stehenden kanonischen Produkte, so wird

$$T(r, z^\alpha) = O(\log r), \quad T(r, e^{P_1}) = O(r^h)$$

und

$$T\left(r, \frac{1}{\pi_2}\right) = T(r, \pi_2) + O(1),$$

also

$$T(r, w) < T(r, \pi_1) + T(r, \pi_2) + O(\log r + r^h). \quad (23)$$

In § 3 haben wir aber gefunden, daß die Ordnung eines kanonischen Produktes höchstens gleich dem Geschlecht, vermehrt um die Einheit, ist. Die Glieder rechts in der letzten Ungleichung sind also höchstens von der Ordnung  $q + 1$ , und man schließt folglich:

*Die Ordnung einer meromorphen Funktion vom Geschlecht  $q$  ist höchstens gleich  $q + 1$ .*

Zusammenfassend gilt also:

*Das Geschlecht einer meromorphen Funktion von nichtganzzahliger Ordnung  $\lambda$  ist gleich der größten ganzen Zahl  $q < \lambda$ .*

189. Ist dagegen die Ordnung  $\lambda$  ganzzahlig, so ist das Geschlecht entweder gleich  $\lambda$  oder gleich  $\lambda - 1$ . Um näheres über diese Fallunterscheidung zu erfahren, bemerke man, daß ein kanonisches Produkt vom Geschlecht  $q$ , für welches ja das Integral

$$\int_0^\infty \frac{n(r)}{r^{q+2}} dr$$

definitionsgemäß konvergent ist, der Ungleichung (11) von § 3 genügt, woraus unmittelbar zu sehen ist, daß es höchstens zum *Minimaltypus* der Ordnung  $q + 1$  gehört. Es folgt hieraus, mit Rücksicht auf die Beziehung (22), daß *eine Funktion  $w(z)$ , welche zum Mittel- oder Maximaltypus der ganzzahligen Ordnung  $\lambda$  gehört, auch vom Geschlecht  $\lambda$  ist.*

Wie verhält sich in dieser Hinsicht eine Funktion vom *Minimaltypus* der ganzzahligen Ordnung  $\lambda$ ? Man hat hier zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Charakteristik  $T$  zur Konvergenz- oder Divergenzklasse gehört. Im ersteren Fall folgt aus dem Darstellungssatz von § 2, Nr. 179, daß das Geschlecht gleich  $\lambda - 1$  ist. Ist dagegen das Integral

$$\int_0^\infty \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

divergent, so schließt man aus dem allgemeinen Satz von Nr. 178 (§ 2), daß das Geschlecht gleich  $\lambda$  ist, außer wenn beide Funktionen  $N(r, 0)$ ,  $N(r, \infty)$  [bzw.  $n(r, 0)$ ,  $n(r, \infty)$ ] zur Konvergenzklasse gehören.

**190.** Zusammenfassend haben wir also das Ergebnis:

Wenn die Charakteristik  $T(r)$  einer meromorphen Funktion  $w(z)$  von ganzzahliger Ordnung  $\lambda \geq 1$  der Beziehung

$$\overline{\lim}_{r=\infty} \frac{T(r)}{r^\lambda} > 0$$

genügt, so ist  $w(z)$  vom Geschlechte  $\lambda$ .

Falls dagegen

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r)}{r^\lambda} = 0,$$

so hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das Integral

$$\int_0^\infty \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr \quad (24)$$

konvergent oder divergent ist.

Im ersteren Fall ist das Geschlecht gleich  $\lambda - 1$ . Im letzteren Fall ist  $w(z)$  vom Geschlechte  $\lambda - 1$ , wenn die Reihen

$$\sum \left( \frac{1}{r_r(0)} \right)^\lambda \quad \text{und} \quad \sum \left( \frac{1}{r_r(\infty)} \right)^\lambda$$

beide konvergent sind, dagegen vom Geschlechte  $\lambda$ , wenn mindestens eine dieser Reihen divergent ist.

Das Geschlecht ist also durch die Ordnung eindeutig bestimmt, außer in dem einzigen Fall, wo  $T(r)$  zur Divergenzklasse des Minimaltypus der ganzzahligen Ordnung  $\lambda$  gehört. In diesem Fall kommen die zwei Fälle der obengenannten Alternative tatsächlich vor. So ist das oben betrachtete kanonische Produkt  $f(z; \lambda, \alpha)$  für  $\lambda = q + 1$  vom Geschlechte  $q = \lambda - 1$ , falls  $1 < \alpha \leq 2$ . Dagegen wird der Quotient

$$\frac{f(z; \lambda, \alpha)}{f(z + 1; \lambda, \alpha)},$$

der für  $\lambda = q$ ,  $0 < \alpha < 1$  zum Minimaltypus der Ordnung  $\lambda$  gehört, das Geschlecht  $\lambda$  haben.

Wir werden später sehen (X), daß der Fall, wo das Geschlecht einer Funktion von der Divergenzklasse des Minimaltypus einer ganzzahligen Ordnung niedriger als die Ordnung ausfällt, als eine Ausnahme zu betrachten ist, die nur dann eintritt, wenn die Nullstellen und die Pole der Funktion im Verhältnis zu den übrigen Stellensorten besonders spärlich verteilt sind.

**191.** Als letzte Anwendung der kanonischen Darstellung einer meromorphen Funktion wollen wir noch einige Sätze zusammenstellen, die sich auf die Ordnung der Größen  $N(r, a)$  bzw.  $n(r, a)$  oder, was auf



dasselbe herauskommt, auf den Grenzexponenten der Reihe

$$\sum_r \left( \frac{1}{r_\nu(a)} \right)^\mu$$

für verschiedene Werte  $a$  beziehen. Aus dem ersten Hauptsatz folgt, daß jene Ordnung bzw. jener Grenzexponent für keinen Wert  $a$  die Ordnung  $\lambda$  der gegebenen meromorphen Funktion übersteigen kann. Um eine in entgegengesetzter Richtung gehende Abschätzung zu gewinnen, muß wieder die Fallunterscheidung zwischen den ganzzahligen und den nichtganzzahligen Ordnungen berücksichtigt werden.

Wenn  $\lambda$  zwischen den ganzen Zahlen  $q$  und  $q+1$  liegt, so schreibe man  $w(z)$  in der kanonischen Form (22). Die Beziehung (23) lehrt, daß die Ordnung  $\lambda$  höchstens gleich der höheren der Ordnungen der kanonischen Produkte  $\pi_1$  und  $\pi_2$  ist. Die Ordnung eines solchen Produktes ist wiederum gleich der Ordnung der betreffenden Nullstellenanzahl, und man schließt folglich, daß mindestens eine der Größen  $n(r, 0)$ ,  $n(r, \infty)$  genau von der Ordnung  $\lambda$  ist.

Vermittels einer linearen Transformation, welche die Ordnung  $\lambda$  nicht abändert, lassen sich die besonderen Werte  $0, \infty$  durch zwei ganz beliebige Werte ersetzen, und man gelangt so zu folgendem Ergebnis:

*Für eine meromorphe Funktion nichtganzzahliger Ordnung  $\lambda$  ist die Größe  $N(r, a)$  bzw.  $n(r, a)$  ebenfalls von der Ordnung  $\lambda$ , außer höchstens für einen einzigen Wert.*

Entsprechendes gilt für die Klasse und den Typus.

Ein Ausnahmewert kann tatsächlich vorkommen. Einen solchen Wert stellt z. B.  $a = \infty$  für jede ganze Funktion dar.

**192.** Die obigen Schlüsse versagen, falls  $\lambda$  eine ganze Zahl  $\geq 1$  ist. Für eine solche Ordnung kann ja schon eine Erhöhung der Klasse oder des Typus eines kanonischen Produkts relativ zu der Nullstellendichte desselben vorkommen. Vor allem ist aber zu bemerken, daß die Ordnung beider kanonischen Produkte in (22) unter den Wert  $\lambda$  sinken kann oder daß sogar beide Produkte fehlen können. Die Rolle des Hauptgliedes der rechten Seite wird in solchen Fällen von dem vorangehenden Exponentialfaktor übernommen. Dieser Faktor ist vom Mitteltypus der Ordnung  $\lambda$ . Meromorphe Funktionen vom Mitteltypus einer ganzzahligen Ordnung können also zwei Ausnahmewerte aufzeigen, für welche die Ordnung von  $N(r, a)$  bzw.  $n(r, a)$  niedriger als  $\lambda$  ist. Bei dem Maximaltypus einer ganzzahligen Ordnung kann wieder eine Typenerniedrigung für zwei verschiedene Ausnahmewerte vorkommen. Dies ist z. B. für das kanonische Produkt  $f(z; \lambda, \alpha)$  der Fall, wenn  $\lambda = q$ ,  $-1 < \alpha < 0$ . Dann ist nämlich  $n(r, 0)$  vom Minimaltypus, während  $n(r, \infty)$  identisch verschwindet. Falls eine Funktion zum Minimaltypus einer ganzzahligen Ordnung gehört, so kann die Klasse von  $n(r, a)$  für zwei Werte sinken. So ist das erwähnte kanonische Produkt für  $\lambda = q + 1$ ,  $-2 \leq \alpha < -1$  von

der Divergenzklasse des Minimaltypus der Ordnung  $\lambda$ , während  $n(r, \infty) \equiv 0$  und  $n(r, 0)$  zur Konvergenzklasse jener Ordnung gehört.

Daß andererseits für ganzzahlige Ordnungen die Anzahl der Ausnahmewerte obiger Art nicht größer als zwei sein kann, ist der wesentliche Inhalt des Satzes von PICARD-BOREL (X, § 1), auf den schon früher in verschiedenen Zusammenhängen hingewiesen worden ist.

## IX. Zweiter Hauptsatz der Theorie der meromorphen Funktionen.

### § 1. Einleitende Bemerkungen.

**193.** Nachdem wir durch den ersten Hauptsatz in Besitz der wichtigen Symmetrieeigenschaft einer für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphen Funktion  $w(z)$  gelangt sind, welche sich in der Invarianz der Summe  $m(r, a) + N(r, a)$  kundgibt, haben wir als ein Hauptziel dieser Theorie die nähere Untersuchung der relativen Stärke der beiden Glieder, der Schmiegungskomponente  $m(r, a)$  und der Anzahlkomponente  $N(r, a)$  aufgestellt. Im vorhergehenden sind bereits einzelne in dieser Richtung gehende Resultate erreicht worden:

1. Der PICARDSche Satz zeigt, daß für eine nichtkonstante, in der Ebene  $z \neq \infty$  meromorphe Funktion die Anzahlfunktion höchstens für zwei Werte  $a$  verschwinden kann.

2. Für meromorphe Funktionen endlicher, nichtganzzahliger Ordnung gibt es höchstens einen PICARDSchen Ausnahmewert, und es gelten die schärferen Sätze von VIII, § 4.

3. Daß die Anzahlfunktion  $N(r, a)$  i. a., d. h. für die große Mehrzahl der Werte  $a$ , im Vergleich zu der Schmiegungsfunktion  $m(r, a)$  groß ist, geht aus den Mittelwertsätzen von VI, § 3, 4 hervor.

**194.** In diesem Abschnitt soll eine allgemeine Beziehung hergeleitet werden, die ich wegen ihrer großen Bedeutung als den zweiten Hauptsatz der Theorie der meromorphen Funktionen bezeichnet habe<sup>1</sup>. Dieser Satz, der zu weitgehenden Folgerungen über die Wertverteilung einer meromorphen Funktion führt, ist ziemlich tieflegend und die Rechnungen, die mit den verschiedenen heute bekannten Beweisen desselben verknüpft sind, sind nicht leicht zu überblicken. Im Interesse der Anschaulichkeit und Leichtverständlichkeit sollen deshalb im folgenden zunächst einige vorbereitende Bemerkungen vorausgeschickt werden.

Wir knüpfen an ein besonderes Beispiel, die in VI, § 2 betrachtete ganze Funktion

$$w(z) = \int_0^z e^{-t^p} dt \quad (p \geq 1), \quad (1)$$

<sup>1</sup> R. NEVANLINNA [4].

an. Sie hat in jedem Sektor  $W_\nu \left( \left| \arg z - \frac{\nu\pi}{p} \right| < \frac{\pi}{2p}; \nu = 0, 1, \dots, 2p-1 \right)$  einen wohlbestimmten, *asymptotischen Wert* oder *Zielwert*, und zwar ist dieser gleich Unendlich für die  $p$  ungeraden Werte des Index  $\nu$  und gleich

$$a_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{p}} \int_0^\infty e^{-t^\nu} dt = e^{\frac{2\nu\pi i}{p}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

in  $W_{2\nu}$  ( $\nu = 0, 1, \dots, p-1$ ).

Wir haben ferner gesehen, daß da, wo das Integral (1) ins Unendliche wächst, auch der Betrag seiner Ableitung  $w' = e^{-z^\nu}$  über alle Grenzen wächst, und zwar mit einer Schnelligkeit, die annähernd dieselbe wie für  $w(z)$  ist. Hieraus folgt, daß jeder Sektor  $W_{2\nu-1}$  zu den Mittelwerten  $m(r, w)$  und  $m(r, w')$ , welche die mittlere Konvergenzstärke der Funktionen  $w$  und  $w'$  gegen den unendlichen Wert messen, mit ungefähr den gleichen Beträgen beitragen. Die Winkelräume  $W_{2\nu}$  sind dagegen vom Standpunkt des Anwachsens der Funktionen von geringer Bedeutung, denn hier sind  $w$  und  $w'$  beschränkt. Aus all diesem folgt, daß die obigen Schmiegungsfunktionen von ein und derselben Größenordnung sind, welche man (vgl. Nr. 135) auf

$$m(r, w) \sim m(r, w') \sim \frac{r^p}{\pi}$$

berechnet.

In den Sektoren  $W_{2\nu}$ , wo  $w(z)$  die endlichen Zielwerte  $a_\nu$  ( $\nu = 0, \dots, p-1$ ) hat, strebt die Ableitung  $w'(z)$  gegen Null. Wieder aber gilt, daß die Schnelligkeit der Konvergenz in beiden Fällen ein und dieselbe ist: wo  $w(z)$  vom Werte  $a_\nu$  wenig abweicht, da unterscheidet sich  $w'(z)$  wenig und mit annähernd demselben Betrag von Null. Der Sektor  $W_{2\nu}$  liefert also zu den Schmiegungsfunktionen  $m\left(r, \frac{1}{w - a_\nu}\right)$  und  $m\left(r, \frac{1}{w'}\right)$  ungefähr gleiche Beiträge, für welche wir den asymptotischen Wert  $\frac{r^p}{p\pi}$  gefunden haben. Dies macht allein schon den vollen Betrag der Größe  $m\left(r, \frac{1}{w - a_\nu}\right)$  aus, denn die anderen Sektoren  $W_\mu$  ( $\mu \neq 2\nu$ ), wo ja  $w(z)$  gegen andere Zielwerte strebt, tragen zu jenem Mittelwert nicht wesentlich bei. Es wird also

$$m\left(r, \frac{1}{w - a_\nu}\right) \sim \frac{r^p}{p\pi},$$

während die Schmiegungsfunktion  $m\left(r, \frac{1}{w'}\right)$ , welche von allen  $p$  Sektoren  $W_{2\nu}$  ( $\nu = 0, \dots, p-1$ ) gleiche Beiträge erhält, sich auf

$$m\left(r, \frac{1}{w'}\right) \sim \sum_1^p m\left(r, \frac{1}{w - a_\nu}\right) \sim \frac{r^p}{\pi}$$

addiert.

195. Was wir so im speziellen Fall der ganzen Funktion (1) beobachtet haben, besteht nun mit gewissen Modifikationen ganz allgemein.

Sei also  $w(z)$  jetzt eine beliebige meromorphe Funktion. Es scheint allgemein zu gelten, daß die Ableitung  $w'(z)$  auf demjenigen Bogen des Kreises  $|z|=r$ , wo  $|w(z)|$  groß ist, ebenfalls einen großen Betrag hat, so daß die Schmiegungsfunktionen  $m(r, w)$  und  $m(r, w')$ , welche das mittlere Anwachsen der Funktionen ins Unendliche charakterisieren, asymptotisch einander gleich werden<sup>1</sup>

$$m(r, w) \sim m(r, w').$$

Denken wir uns nun, daß, wie dies im obenstehenden Beispiel der Fall war, die Funktion  $w(z)$  auf dem Kreis  $|z|=r$  gewisse *endliche* Werte  $a_\nu$  ( $\nu=1, \dots, p$ ) besonders stark approximiert, und daß in Übereinstimmung mit dem oben gefundenen, auf demjenigen Bogen  $B_\nu$ , wo die Differenz  $w - a_\nu$  sehr klein ist, der Wert der Ableitung  $w'$  von derselben Größenordnung ist, so daß die über jene Bogen erstreckten Integrale von  $\log \left| \frac{1}{w - a_\nu} \right|$  und  $\log \left| \frac{1}{w'} \right|$  annähernd einander gleich sind. Nun liegen die verschiedenen Bogen  $B_\nu$  ( $\nu=1, \dots, p$ ) offenbar getrennt nebeneinander auf der Peripherie  $|z|=r$ . Integriert man also über diese Kreislinie, so wird folglich der Mittelwert von  $\log \left| \frac{1}{w'} \right|$  approximativ gleich der *Summe* der Mittelwerte von  $\log \left| \frac{1}{w - a_\nu} \right|$  ( $\nu=1, \dots, p$ ) sein, so daß also

$$m\left(r, \frac{1}{w'}\right) \sim \sum_1^p m\left(r, \frac{1}{w - a_\nu}\right).$$

Die Einführung der Ableitung  $w'$  hat also die Wirkung, daß alle diejenigen Werte  $a$ , für welche die Schmiegungsfunktion  $m(r, a)$  der Funktion  $w(z)$  einen bedeutenden Betrag erreicht, in nur *zwei* Werten der Ableitung  $w'(z)$  gleichsam gesammelt werden, nämlich in  $\infty$  und 0, und zwar entspricht hierbei die Unendlichkeitskomponente  $m(r, w)$  der Unendlichkeitskomponente  $m(r, w')$  während die Schmiegungsfunktionen  $m(r, a)$ , welche den endlichen Werten  $a$  entsprechen, sich zu der Nullkomponente  $m\left(r, \frac{1}{w'}\right)$  der Ableitung addieren<sup>2</sup>.

196. Hieraus ergibt sich eine Bedingung zwischen den betrachteten Schmiegungsfunktionen  $m$  von  $w(z)$ . Denn die Unendlichkeits- und

<sup>1</sup> Tatsächlich ist dem Verfasser kein Beispiel einer transzendenten Funktion bekannt, wo diese asymptotische Gleichheit nicht streng gelten würde.

<sup>2</sup> Die Idee, die Ableitung als Vergleichsfunktion einzuführen, geht auf BOREL [I] zurück. Dieser Gedanke ist grundlegend für den BORELSCHEN Beweis derjenigen Erweiterung des PICARDSCHEN Satzes, welche unter dem Namen „Satz von PICARD-BOREL“ bekannt ist. E. ULLRICH [I] hat in seiner Beweisanordnung des zweiten Hauptsatzes die Bedeutung der Ableitung als Sammelstelle der Ausnahmewerte besonders deutlich hervorgehoben.

Nullkomponente der Ableitung  $w'$  sind ja durch den *ersten Hauptsatz* miteinander verbunden, und zwar so, daß

$$m(r, w') + N(r, w') \sim m\left(r, \frac{1}{w'}\right) + N\left(r, \frac{1}{w'}\right),$$

wo  $N(r, w')$  und  $N\left(r, \frac{1}{w'}\right)$  die Anzahlfunktionen der Pole und Nullstellen der Ableitung  $w'$  sind. Nun war

$$m(r, w) \sim m(r, w'), \quad m\left(r, \frac{1}{w'}\right) \sim \sum_1^p m\left(r, \frac{1}{w - a_v}\right),$$

und es wird somit

$$m(r, w) + N(r, w') \sim \sum_1^p m\left(r, \frac{1}{w - a_v}\right) + N\left(r, \frac{1}{w'}\right).$$

Aus Gründen, die weiterhin ersichtlich werden, formen wir diese Beziehung noch um, indem wir beiderseits die Größe  $2N(r, w) + m(r, w)$  hinzufügen. Man findet dann

$$2m(r, w) + 2N(r, w) \sim m(r, w) + \sum_1^p m\left(r, \frac{1}{w - a_v}\right) + N_1(r),$$

mit

$$N_1(r) = N\left(r, \frac{1}{w'}\right) + (2N(r, w) - N(r, w')), \quad (2)$$

eine Größe, die eine einfache, später zu erklärende Bedeutung hat.

In jener Beziehung können wir noch die Summe  $m(r, w) + N(r, w)$  durch die charakteristische Funktion  $T(r, w)$  ersetzen, und man erhält schließlich

$$2T(r) \sim \sum_1^{p+1} m(r, a_v) + N_1(r), \quad (3)$$

wo  $a_{p+1} = \infty$  gesetzt ist und  $N_1$  die Bedeutung (2) hat.

Diesem Ergebnis lag wesentlich die Vermutung zugrunde, daß die Werte von  $|w|$  und  $|w'|$  sich nicht bedeutend voneinander unterscheiden, falls sie groß sind, und daß ein gleiches für  $\left|\frac{1}{w-a}\right|$  und  $\left|\frac{1}{w'}\right|$  gilt, wo  $w$  nicht viel vom endlichen Werte  $a$  abweicht. Wenn dies auch mit großer Wahrscheinlichkeit gilt, sind wir doch nur imstande, sozusagen die eine Hälfte dieser Hypothese streng zu begründen. Auf Grund eines allgemeinen Satzes über die Schmiegunsfunktion  $m\left(r, \frac{w'}{w}\right)$  der logarithmischen Abteilung, der uns späterhin noch eingehender beschäftigen wird, geht hervor, daß, wo  $|w(z)|$  groß ist,  $|w'(z)|$  *nicht wesentlich größer* ist, und ferner, daß auf einem Bogen des Kreises  $|z|=r$ , wo  $w(z)$  im Mittel nur wenig vom Wert  $a \neq \infty$  abweicht, die Ableitung  $w'$  sich im Mittel auch *nicht mehr* von Null unterscheidet.

An Stelle der jener Hypothese entsprechenden asymptotischen *Gleichheit* ist also nur eine *Ungleichheit* bekannt. Dies hat zur Folge,

daß die Beziehung (3), welche wir oben als eine asymptotische Gleichung geschrieben haben, in eine asymptotische Ungleichheit übergeht: die linke Seite ist, bis auf unwesentliche Zusatzglieder, nicht kleiner als die rechtsstehende Summe. *Dies ist der zweite Hauptsatz.*

**197.** Wir verlassen jetzt das Gebiet der heuristischen Betrachtungen und gehen daran, den in Aussicht gestellten Satz streng zu beweisen. Um die Bedeutung der einzelnen Deduktionen der nachfolgenden Herleitung zu verstehen, empfiehlt es sich, dieselben jeweils mit den analogen Schritten in der vorangehenden Beweisskizze zu vergleichen, die uns als anschauliches Vorbild vorschwebt.

Es sei also  $w(z) = c_0 + c_k z^k + \dots (c_0 \neq 0, c_k \neq 0)$  eine für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphe Funktion und  $a_1, \dots, a_p$  ein System von  $p \geq 2$  verschiedenen, endlichen komplexen Zahlen.

Zunächst werden die Schmiegungefunktionen  $m(r, w)$  und  $m(r, w')$  miteinander verglichen. Mittels der elementaren Beziehungen (3) von VI, § 2 findet man unmittelbar

$$m(r, w') = m\left(r, w \frac{w'}{w}\right) \leq m(r, w) + m\left(r, \frac{w'}{w}\right). \quad (4)$$

Zur Abschätzung des Mittelwertes  $m\left(r, \frac{1}{w'}\right)$  betrachte man die Summe

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^p \frac{1}{w(z) - a_\nu}.$$

Es wird

$$m(r, f) = m\left(r, f w' \frac{1}{w'}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{w'}\right) + m\left(r, \sum \frac{w'}{w - a_\nu}\right). \quad (5)$$

Andererseits ist für ein gegebenes  $\mu (= 1, \dots, p)$

$$f = \frac{1}{w - a_\mu} \left(1 + \sum_{\nu \neq \mu} \frac{w - a_\mu}{w - a_\nu}\right).$$

Ist  $\delta = \min(|a_h - a_k|, 1)$  ( $h \neq k$ ), so wird in jedem Punkt  $z$ , wo

$$|w(z) - a_\mu| < \frac{\delta}{2p} \left(\leq \frac{1}{2p}\right), \quad (6)$$

für  $\nu \neq \mu$

$$|w - a_\nu| \geq |a_\mu - a_\nu| - |w - a_\mu| > \delta - \frac{\delta}{2p} \geq \frac{3\delta}{4},$$

also

$$\sum_{\nu \neq \mu} \left| \frac{w - a_\mu}{w - a_\nu} \right| < p \frac{2}{3p} = \frac{2}{3},$$

so daß

$$\left| 1 + \sum_{\nu \neq \mu} \frac{w - a_\mu}{w - a_\nu} \right| > \frac{1}{3}.$$

Hieraus folgt

$$\log^+ |f(z)| > \log^+ \left| \frac{1}{w - a_\mu} \right| - \log 3$$

in jedem Punkt  $z$ , wo die Bedingung (6) erfüllt ist.

Diejenigen Bogen der Peripherie, welche durch (6) bestimmt sind, sind für verschiedene Werte  $\mu$  punktfremd, und man schließt somit, daß

$$\begin{aligned} m(r, f) &\geq \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1}^p \int_{|w - a_\mu| < \frac{\delta}{2p}} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi \\ &> \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu=1}^p \int_{|w - a_\mu| < \frac{\delta}{2p}} \log^+ \left| \frac{1}{w(re^{i\varphi}) - a_\mu} \right| - \log 3. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|w - a_\mu| < \frac{\delta}{2p}} \log^+ \left| \frac{1}{w - a_\mu} \right| d\varphi &= m(r, a_\mu) - \frac{1}{2\pi} \int_{|w - a_\mu| \geq \frac{\delta}{2p}} \log^+ \left| \frac{1}{w - a_\mu} \right| d\varphi \\ &\geq m(r, a_\mu) - \log \frac{2p}{\delta}, \end{aligned}$$

und es wird schließlich

$$m(r, f) > \sum_{\mu=1}^p m(r, a_\mu) - p \log \frac{2p}{\delta} - \log 3,$$

oder in Verbindung mit (5)

$$m\left(r, \frac{1}{w'}\right) > \sum_{\nu=1}^p m(r, a_\nu) - m\left(r, \sum_{\nu=1}^p \frac{w'}{w - a_\nu}\right) - p \log \frac{2p}{\delta} - \log 3. \quad (7)$$

Addiert man nun zu den Beziehungen (4) und (7) beiderseits die Größe  $N(r, w')$  bzw.  $N\left(r, \frac{1}{w'}\right)$ , so erhält man bei Anwendung des ersten Hauptsatzes

$$T(r, w') = T\left(r, \frac{1}{w'}\right) + \log |kc_k|$$

folgendes Resultat, welches als ein besonderer Hilfssatz ausgesprochen werden soll<sup>1</sup>:

*Die Charakteristik  $T(r, w')$  der Ableitung der meromorphen Funktion  $w(z)$  liegt zwischen den Grenzen*

$$\begin{aligned} \text{und} \quad & m(r, w) + N(r, w') + m\left(r, \frac{w'}{w}\right) \\ & \sum_1^p m\left(r, \frac{1}{w - a_\nu}\right) + N\left(r, \frac{1}{w'}\right) - m\left(r, \sum_1^p \frac{w'}{w - a_\nu}\right) - p \log \frac{2p}{\delta} - \log \frac{3}{k|c_k|}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Die Bedeutung dieser allgemeinen Doppelungleichung für die Frage nach der Wertverteilung der *Ableitung* einer meromorphen Funktion ist von E. ULLRICH [I] hervorgehoben worden. Vgl. auch E. F. COLLINGWOOD [J].

Läßt man den Ausdruck  $T(r, w')$  fort und führt den Ausdruck (2) ein, so ergibt sich hieraus folgende vorbereitende Fassung des zweiten Hauptsatzes:

Es sei

$$w(z) = c_0 + c_k z^k + \dots \quad (c_k \neq 0)$$

für  $|z| < R \leq \infty$  meromorph. Wenn  $a_1, \dots, a_p$  ( $p \geq 2$ ) endliche, untereinander verschiedene Zahlen sind, so gilt

$$\sum_1^{p+1} m(r, a_\nu) < 2T(r, w) - N_1(r) + S(r). \quad (8)$$

Hier ist  $N_1(r)$  gleich dem Ausdruck (2),  $a_{p+1} = \infty$  und

$$S(r) < m\left(r, \frac{w'}{w}\right) + m\left(r, \sum_1^p \frac{w'}{w - a_\mu}\right) + p \log \frac{2p}{\delta} + \log k \left| \frac{3}{c_k} \right|, \quad (8')$$

wo  $\delta$  die kleinste der Zahlen 1 und  $|a_h - a_k|$  ( $h \neq k$ ) bezeichnet.

**198.** Wir wollen die Glieder der rechten Seite dieser wichtigen Beziehung sogleich einer näheren Betrachtung unterziehen. Der Ausdruck  $N_1$  setzt sich aus zwei Gliedern zusammen, von denen  $N\left(r, \frac{1}{w'}\right)$ , die Anzahlfunktion der Nullstellen von  $w'$ , Beiträge von sämtlichen Stellen  $z$  erhält, wo  $w(z)$  irgendeinen endlichen Wert  $a$  mehrfach annimmt, und zwar so, daß jede  $k$ -fache Stelle als eine  $(k-1)$ -fache Nullstelle von  $w'$  auftritt. Genau dieselbe Bedeutung hat das zweite Glied  $2N(r, w) - N(r, w')$  in bezug auf die mehrfachen  $\infty$ -Stellen von  $w(z)$ . In einem  $k$ -fachen Pol von  $w$  hat nämlich  $w'$  ebenfalls einen Pol, und zwar von der Multiplizität  $k+1$ , so daß der Pol zu dem betreffenden Glied insgesamt mit der Vielfachheit  $k-1$  beiträgt.

Der Ausdruck  $N_1(r)$  mißt die Anzahl der mehrfachen Stellen von  $w(z)$ . Er kann in der Form

$$N_1(r) = \int_0^r \frac{n_1(t) - n_1(0)}{t} dt + n_1(0) \log r \quad (9)$$

geschrieben werden, wo  $n_1(r)$  die Anzahl der mehrfachen Stellen von  $w(z)$  im Kreise  $|z| \leq r$  angibt, so daß jede  $k$ -fache Stelle  $(k-1)$ -fach gezählt wird.

Was das letzte Glied  $S(r)$  in (8) anbelangt, so spielt dasselbe die Rolle eines unwesentlichen Restgliedes, im Falle  $R < \infty$  jedoch nur, sofern die Charakteristik  $T$  für  $r \rightarrow R$  hinreichend schnell ins Unendliche wächst. Es wird sich nämlich zeigen, daß sobald eine gewisse kritische Wachstumsgrenze überschritten ist,  $S(r)$  im wesentlichen von der Größenordnung  $\log T(r)$  ist. Dies gilt im Falle  $R = \infty$ , wo  $w(z)$  also eine in der ganzen Ebene  $z \neq \infty$  meromorphe Funktion ist, ohne irgendwelche zusätzlichen Bedingungen.



## § 2. Die Fundamentalbeziehung.

199. Der zur Vollendung des Beweises des zweiten Hauptsatzes erforderliche Hilfssatz über die logarithmische Ableitung einer meromorphen Funktion wurde vom Verfasser<sup>1</sup> zuerst unter Anwendung der POISSON-JENSENSCHEN Formel bewiesen. Heute kennt man mehrere verschiedene Beweise desselben. Hier werden wir ihn als Folgesatz einer allgemeinen Beziehung herleiten, die im Prinzip von F. NEVANLINNA<sup>2</sup> herrührt. Die im Text folgende Fassung derselben schließt sich einer später von AHLFORS<sup>3</sup> gegebenen Darstellung eng an.

Wie in VI, § 4 breiten wir über die  $w$ -Ebene eine nichtnegative Massenbelegung  $\mu$  vom Gesamtbetrag 1 aus und bilden den Ausdruck

$$\Omega(r) = \int_{(a)} n(r, a) d\mu,$$

wo  $n(r, a)$ , wie üblich, die Anzahl der  $a$ -Stellen einer gegebenen, für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphen Funktion  $w(z)$  im Kreise  $|z| \leq r < R$  bezeichnet. Belegt man jedes Flächenelement der mehrfach erwähnten RIEMANNschen Fläche  $F_r$ , worauf die Kreisscheibe  $|z| < r$  durch die Funktion  $w(z)$  abgebildet wird, mit dem über demselben liegenden Massenelement  $d\mu$ , so bedeutet  $\Omega(r)$  die gesamte, vom Flächenstück  $F_r$  getragene Masse. In VI, § 4 haben wir gesehen, daß das Integral

$$Q(r) = \int_0^r \frac{\Omega(t)}{t} dt$$

dieser Masse nicht wesentlich größer ist als die Charakteristik  $T(r)$  von  $w(z)$ , und dies bei jeder Wahl der Belegung  $\mu$ , sofern das von ihr erzeugte sphärische Potential

$$P(w) = \int_{(a)} \log \frac{1}{k(w, a)} d\mu,$$

wo  $k(w, a)$  den sphärischen, chordalen Abstand der Punkte  $w$  und  $a$  bezeichnet, im Punkte  $w = w_0 = w(0)$  endlich ausfällt. Es gilt dann nämlich [VI, § 4, (19)]

$$Q(r) \leq T(r) + P(w_0), \quad (10)$$

wo für  $T(r)$  die sphärische Normalform der Charakteristik zu nehmen ist.

Bei besonderer Wahl der Belegung  $\mu$  geht diese Beziehung sogar in eine asymptotische Gleichheit über. Dies gilt nicht nur, falls man  $d\mu$  als das sphärische Flächenelement nimmt (dann ist exakt  $Q \equiv T$ ), sondern nach VI, § 4 auch dann, wenn man die Belegung  $\mu$  über eine beliebige Punktmenge  $(a)$  von positivem harmonischen Maß so verteilt, daß ihr logarithmisches Potential auf  $(a)$  ein möglichst kleines Maximum erhält (ROBINSche Belegung).

<sup>1</sup> R. NEVANLINNA [4], [5].

<sup>2</sup> F. NEVANLINNA [4].

<sup>3</sup> L. AHLFORS [7].

**200.** Durch die Methode F. NEVANLINNA-L. AHLFORS erhält man für  $\Omega(r)$  eine *Abschätzung nach unten*. Dies fordert indes, daß die Belegung  $\mu$  gewissen zusätzlichen Stetigkeitsbedingungen genügt. Wir setzen voraus:

1. Die Mengenfunktion  $\mu$  ist vollstetig. Sie hat dann fast überall in der  $a$ -Ebene eine nichtnegative, endliche *Dichte*  $\varrho(a)$ , und der einer (meßbaren) Punktmenge  $e$  entsprechende Belegungswert  $\mu(e)$  ist gleich dem LEBESGUESCHEN Integral

$$\mu(e) = \int \varrho(a) d\sigma_a,$$

wo  $d\sigma_a$  das Flächenelement bezeichnet. Speziell ist das über die Voll-ebene erstreckte Integral

$$\int \varrho(a) d\sigma_a = 1.$$

Die Masse  $\Omega(r)$  des Flächenstücks  $F_r$  kann nun in der Form

$$\Omega(r) = \int n(r, a) \varrho(a) d\sigma_a = \int_{|z| \leq r} |w'(z)|^2 \varrho(w(z)) d\sigma_z$$

geschrieben werden, wo  $d\sigma_z$  das Flächenelement  $r dr d\varphi$  im Punkte  $z = r e^{i\varphi}$  bezeichnet.

2. Die Belegung  $\varrho(a)$  ist so regulär, daß die Ableitung  $\Omega'(r)$  endlich und gleich

$$\Omega'(r) = r \int_0^{2\pi} |w'(r e^{i\varphi})|^2 \varrho(w(r e^{i\varphi})) d\varphi \tag{11}$$

ist.

**201.** Unter diesen noch recht allgemeinen Voraussetzungen über die Massenbelegung  $\mu$  gilt der

**Hilfssatz 1.** Für jedes  $0 \leq r < R$  ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(|w'(r e^{i\varphi})|^2 \varrho(w)) d\varphi \leq \log \frac{\Omega'(r)}{2\pi r} \tag{12}$$

und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(|w'(r e^{i\varphi})|^2 \varrho(w)) d\varphi \leq \log \frac{\Omega'(r)}{2\pi r} + \log 2. \tag{12'}$$

Die erste Beziehung (12) folgt in der Tat aus der Identität (11) unter Anwendung des bekannten elementaren Satzes, wonach der Mittelwert des Logarithmus einer nichtnegativen Funktion  $f(x)$  höchstens gleich dem Logarithmus ihres Mittelwertes ist:

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \log f(x) dx \leq \log \left( \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right) \quad (\alpha < \beta) \tag{13}$$

(Satz über das arithmetische und geometrische Mittel)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Der Beweis verläuft z. B. so: Der rechtsstehende Mittelwert von  $f(x)$  sei  $m$ : schreibt man  $f(x) = m + \varphi(x)$ , so ist also das Integral von  $\varphi(x)$ , von  $x = \alpha$  bis  $x = \beta$ ,

Die zweite Beziehung ergibt sich aus der Relation

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \log f(x) dx \leq \log \left( \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right) + \log 2,$$

die eine einfache Folgerung aus (13) ist. Setzt man nämlich  $f_1 = e^{+\log f}$ , so ist  $f_1 = f$  für  $f \geq 1$  und  $f_1 = 1$  für  $f < 1$ , also jedenfalls  $f_1 < f + 1$ . Die Anwendung von (13) auf die Funktion  $f_1$  gibt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \log f(x) dx &\leq \log \left( \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x) dx \right) \leq \log \left( \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f dx + 1 \right) \\ &\leq \log \left( \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right) + \log 2. \end{aligned}$$

**Hilfssatz 2.** Falls  $w(z)$  für  $z \neq \infty$  meromorph ist, so ist für  $\lambda \geq 0$

$$\log \frac{\Omega'(r)}{2\pi r} < 4 \log Q(r) + 3\lambda \log r, \quad (14)$$

außer höchstens für eine Wertmenge  $\Delta_r$  ( $0 < r_0 < r$ ), auf welcher die Variation von  $\frac{r^\lambda}{\lambda}$ ,

$$\int_{\Delta_r} d \left( \frac{r^\lambda}{\lambda} \right) = \int_{\Delta_r} r^{\lambda-1} dr,$$

beschränkt ist.

Sei nämlich  $r_0 > 0$  und  $\Delta'_r$  die Menge der Werte  $r > r_0$  für welche  $\Omega(r) \geq r^\lambda (Q(r))^2$ . Dann ist

$$\int_{\Delta'_r} d \left( \frac{r^\lambda}{\lambda} \right) = \int_{\Delta'_r} r^{\lambda-1} dr = \int_{\Delta'_r} \frac{r^\lambda}{\Omega} dQ \leq \int_{\Delta'_r} \frac{dQ}{Q^2} \leq \frac{1}{Q(r_0)}.$$

In genau derselben Weise findet man für die Variation von  $\frac{r^\lambda}{\lambda}$  auf denjenigen Intervallen  $\Delta''_r$ , wo  $\Omega'(r) \geq r^{\lambda-1} (\Omega(r))^2$ ,

$$\int_{\Delta''_r} d \left( \frac{r^\lambda}{\lambda} \right) = \int_{\Delta''_r} \frac{r^{\lambda-1} d\Omega}{\Omega'(r)} \leq \int_{\Delta''_r} \frac{d\Omega}{\Omega^2} \leq \frac{1}{\Omega(r_0)}.$$

gleich Null. Gemäß der Beziehung  $\log(1+t) \leq t$ , die für reelles  $t$  gilt und wo Gleichheit nur für  $t=0$  besteht, wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \log f(x) dx &= \log m + \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \log \left( 1 + \frac{\varphi}{m} \right) dx \\ &\leq \log m + \frac{1}{m(\beta - \alpha)} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi dx = \log m. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt hier nur, wenn  $f$  (fast überall) konstant und gleich  $m$  ist.

Die Variation von  $\frac{r^\lambda}{\lambda}$  auf der Vereinigungsmenge  $\Delta_r = \Delta'_r + \Delta''_r$  ist also beschränkt, und es ist, für jeden Wert  $r$  außerhalb der Intervalle  $\Delta_r$ ,  $\frac{\Omega'}{r} < r^{\lambda-2} \Omega^2 < r^{3\lambda-2} Q^4$ , woraus die Behauptung folgt.

**Hilfssatz 3.** Für eine im Einheitskreise  $|z| < 1$  meromorphe Funktion  $w(z)$  gilt für  $\lambda > 0$

$$\log \Omega'(r) < 7 \log^+ Q(r) + (2\lambda + 2) \log \frac{1}{1-r} + 2 \log \log \frac{1}{1-r} + c(\lambda), \quad (15)$$

außer für eine Wertmenge  $\Delta_r$  ( $0 < r < 1$ ), auf welcher die Variation von  $\frac{1}{\lambda(1-r)^\lambda}$ ,

$$\int_{\Delta_r} d \left( \frac{(1-r)^{-\lambda}}{\lambda} \right) = \int_{\Delta_r} \frac{dr}{(1-r)^{\lambda+1}},$$

beschränkt ist<sup>1</sup>.  $c(\lambda)$  ist eine nur von  $\lambda$  abhängige Zahl.

Sei  $\Delta'_r$  diejenige Wertmenge ( $0 < r_0 < r < 1$ ), für welche

$$\Omega \geq \frac{Q((\log Q)^2 + 1)}{(1-r)^{\lambda+1}}.$$

Man hat dann

$$\int_{\Delta'_r} \frac{1}{\lambda} d \left( \frac{1}{1-r} \right)^\lambda = \int_{\Delta'_r} \frac{dr}{dQ} \cdot \frac{dQ}{(1-r)^{\lambda+1}} \leq \int_{\Delta'_r} \frac{d \log Q}{1 + (\log Q)^2} \leq \pi.$$

Analog ergibt sich für die Intervalle  $\Delta''_r$  ( $0 < r < 1$ ), wo

$$\Omega' \geq \frac{\Omega(1 + (\log \Omega)^2)}{(1-r)^{\lambda+1}},$$

$$\int_{\Delta''_r} \frac{dr}{(1-r)^{\lambda+1}} \leq \pi.$$

Auf der Vereinigungsmenge  $\Delta_r$  von  $\Delta'_r$  und  $\Delta''_r$  ist die Variation  $\frac{(1-r)^{-\lambda}}{\lambda}$  beschränkt ( $\leq 2\pi$ ). Für jeden Wert  $r$  außerhalb  $\Delta_r$  gilt (15), wie man bei Anwendung der Rechenregeln (3) (VI, § 2) und der evidenten Beziehung  $\log^+ \log t \leq \log^+ t$  findet.

**202.** Verbindet man nun die drei Hilfssätze mit der schon früher gefundenen Abschätzung (10) der Größe  $Q(r)$ , so ergibt sich die in Aussicht gestellte

**Fundamentalbeziehung.** Es sei  $w(z)$  für  $|z| < R \leq \infty$  meromorph und  $\mu$  eine über die  $w$ -Ebene ausgebreitete, nichtnegative Einheitsbelegung von der Dichte  $\varrho(w)$ , welche den Bedingungen 1. und 2. von Nr. 200 genügt.

<sup>1</sup> Für die meisten Anwendungen würde schon eine gröbere und leichter zu beweisende Abschätzung genügen.

Dann gilt für  $0 \leq r < R$  die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log (|w'(re^{i\varphi})|^2 \varrho(w(re^{i\varphi}))) d\varphi \leq \log \psi(r) \quad (16)$$

und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ (|w'(re^{i\varphi})|^2 \varrho(w(re^{i\varphi}))) d\varphi \leq \log^+ \psi(r) + \log 2 \quad (16')$$

mit

$$\psi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |w'(re^{i\varphi})|^2 \varrho(w) d\varphi. \quad (16'')$$

Vorausgesetzt, daß das von der Belegung  $\mu$  erzeugte sphärische Potential

$$P(w) = \int_{(a)} \log \frac{1}{k(w, a)} d\mu(a)$$

für  $w = w(0)$  endlich ausfällt, genügt  $\psi(r)$  ferner folgenden Bedingungen.

Im Falle  $R = \infty$  gilt für  $\lambda \geq 0$

$$\log^+ \psi(r) < 4 \log^+ T(r) + 3\lambda \log^+ r + O(1), \quad (17)$$

höchstens mit Ausnahme einer Wertmenge  $\Delta_r$ , auf welcher die Variation von  $\frac{r^\lambda}{\lambda}$  beschränkt ist.

Im Falle  $R = 1$  gilt wiederum für  $\lambda \geq 0$

$$\log^+ \psi(r) < 7 \log^+ T(r) + (2\lambda + 2) \log \frac{1}{1-r} + 2 \log \log \frac{1}{1-r} + O(1) \quad (17')$$

außer höchstens für eine Wertmenge  $\Delta_r$ , auf welcher die Variation von  $\frac{1}{\lambda(1-r)^\lambda}$  beschränkt bleibt.

Die Fundamentalbeziehung (16) enthält den Schlüssel zu dem zweiten Hauptsatz. Aus ihr folgt nicht nur der in Aussicht gestellte Hilfssatz über die logarithmische Ableitung einer meromorphen Funktion, sondern sie kann auch, wie von F. NEVANLINNA gezeigt worden ist, für eine vom Beweisansatz der ersten Paragraphen völlig unabhängigen Beweisanordnung des zweiten Hauptsatzes verwendet werden. Auf diese Frage kommen wir in § 4 dieses Abschnittes noch zurück.

### § 3. Hilfssatz über die logarithmische Ableitung. Zweiter Hauptsatz.

203. Um zu dem Hilfssatz über die logarithmische Ableitung einer für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphen Funktion zu gelangen, wählen wir die Belegung  $\mu$  in der Fundamentalbeziehung speziell so, daß ihre Dichte

$$\varrho(a) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{|a|^2 (1 + (\log|a|)^2)}$$

ist. Diese Wahl ist zulässig, da die Gesamtmasse dann der Bedingung

$$\int d\mu = \int \varrho(a) d\sigma_a = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d|a|}{|a|(1 + (\log|a|)^2)} = 1$$

genügt.

Vorerst muß untersucht werden, wie sich das entsprechende sphärische Potential

$$P(w) = \int \log_k \frac{1}{(w, a)} d\mu,$$

welches im Restglied der Fundamentalbeziehung vorkommt, verhält<sup>1</sup>.

Man hat

$$P(w) = \log \sqrt{1 + |w|^2} + U(w)$$

wo

$$U(w) = \int \log \frac{\sqrt{1 + |a|^2}}{|w - a|} d\mu. \tag{18}$$

Zur Auswertung dieser Größe geht man am einfachsten davon aus, daß dieselbe, nebst ihrer Normalableitung, offenbar auf jedem Kreis  $|w| = r$  konstant ist. Also ist für  $w = r e^{i\vartheta}$

$$2\pi r \frac{\partial U}{\partial r} = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial U}{\partial r} d\vartheta.$$

Daraus folgt unter Anwendung des GAUSSSchen Satzes, oder direkt, indem man den aus (18) berechneten Wert von  $\frac{\partial U}{\partial r}$  bei Verwendung der Identität  $\frac{\partial \log|w - a|}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \arg(w - a)}{\partial \vartheta}$  in bezug auf  $\vartheta$  unter dem Integralzeichen integriert,

$$|w| \frac{\partial U}{\partial |w|} = - \int_{|a| < |w|} d\mu.$$

Führt man hier den Wert von  $d\mu$  ein, so ergibt sich durch Integration

$$U(w) = \frac{1}{\pi} \left( \log \sqrt{1 + (\log|w|)^2} - \log|w| \operatorname{arctg} \log|w| - \frac{\pi}{2} \log|w| \right) + U(1)$$

wo  $U(1)$  endlich ist<sup>2</sup>.

Das Potential  $P(w)$  hat also einen endlichen Wert, außer für  $w = 0$  und  $\infty$ .

<sup>1</sup> Es würde für unsere Zwecke genügen, zu entscheiden, ob  $P(w)$  endlich oder unendlich ist. Der Vollständigkeit halber soll das Verhalten von  $P$  hier genauer untersucht werden.

<sup>2</sup> Man hat für  $U(1)$  den Wert

$$\int \log \frac{\sqrt{1 + |a|^2}}{|a - 1|} d\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \log \sqrt{1 + e^{-2t}} \frac{dt}{1 + t^2}.$$

204. Nach dieser Vorbereitung können wir zu unserer eigentlichen Aufgabe, der Abschätzung der Schmiegungsfunktion  $m\left(r, \frac{w'}{w}\right)$  übergehen. Es ist zunächst

$$m\left(r, \frac{w'}{w}\right) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{w'(r e^{i\varphi})}{w(r e^{i\varphi})} \right|^2 d\varphi \\ \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{|w'|^2}{|w|^2 (1 + (\log|w|)^2)} d\varphi + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \log (1 + (\log|w|)^2) d\varphi.$$

Hier ist das erste Glied rechts nach der Fundamentalbeziehung nicht größer als  $\frac{1}{2} \log^+ \psi(r) + \log 2\pi$ , wobei  $\psi$  die im Fundamentalsatz aufgezählten Eigenschaften hat. Die oberen Schranken (17) und (17') sind endlich, sofern  $w(0) \neq 0, \infty$ , denn dann hat das Potential  $P(w_0)$  einen endlichen Wert.

Für das zweite Glied der rechten Seite erhalten wir wiederum einfach gemäß dem Satz über das arithmetische und geometrische Mittel

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{1 + (\log|w|)^2} d\varphi \leq \log \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (\log|w|)^2} d\varphi \\ \leq \log \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|\log|w|| + 1) d\varphi = \log \left( m(r, w) + m\left(r, \frac{1}{w}\right) + 1 \right) \\ \leq \log \left( 2T(r, w) + \log \left| \frac{e}{w_0} \right| \right) = \log^+ T(r) + O(1).$$

Falls  $w(0) = 0$  oder  $\infty$ , multipliziere man  $w$  mit einer solchen Potenz von  $z$ , daß das Produkt  $w_1 \neq 0, \infty$  für  $z = 0$ . Die obigen Überlegungen gelten dann für die Funktion  $w_1$ , und da die Schmiegungsfunktionen  $m\left(r, \frac{w'}{w}\right)$  und  $m\left(r, \frac{w'_1}{w_1}\right)$ , sowie die Charakteristiken von  $w$  und  $w_1$ , sich höchstens um eine Größe der Ordnung  $O(\log r)$  unterscheiden, so sieht man, daß die obigen Abschätzungen auch im vorliegenden Fall ihre Geltung beibehalten, sofern nur zu den gefundenen oberen Schranken ein Glied der Größenordnung  $O(\log r)$  hinzugefügt wird.

Führen wir nun die Schranken (17) bzw. (17') für  $\psi(r)$  ein, so erhalten wir den

**Satz über die logarithmische Ableitung.** Wenn  $w(z)$  für  $|z| < R \leq \infty$  meromorph ist, so ist für  $R = \infty$

$$m\left(r, \frac{w'}{w}\right) = O(\log r T(r)), \tag{19}$$

außer höchstens für eine Menge  $\Delta$ , von Werten  $r$ , auf welchen die Variation von  $\frac{r^\lambda}{\lambda}$  ( $\lambda \geq 0$ ) beschränkt ist.

Für  $R=1$  hat man wiederum

$$m\left(r, \frac{w'}{w}\right) = (\lambda + 1) \log \frac{1}{1-r} + O\left(\log \log \frac{1}{1-r}\right) + O(\log T(r)), \quad (19')$$

außer höchstens für eine Intervallfolge  $\Delta_r$ , wo die Variation von  $\frac{(1-r)^{-\lambda}}{\lambda}$  ( $\lambda \geq 0$ ) beschränkt ist<sup>1</sup>.

Aus diesem Satz ersieht man, daß die Schmiegungsfunktion  $m\left(r, \frac{w'}{w}\right)$  im allgemeinen von wesentlich niedrigerer Größenordnung ist als die Charakteristik der Funktion  $w(z)$ . Im Falle einer im Einheitskreis meromorphen Funktion  $w(z)$  gilt dies nach (19') allerdings nur dann, wenn die Charakteristik nicht langsamer als  $\log \frac{1}{1-r}$  anwächst ( $\lambda=0$ ). Daß diese Einschränkung nicht durch die angewandte Beweistechnik künstlich bedingt ist, wird sich später herausstellen: jene Wachstumsgrenze wird sich tatsächlich als kritisch für die Wertverteilungseigenschaften einer für  $|z| < 1$  meromorphen Funktion erweisen.

**205.** Verbindet man nun den obigen Hilfssatz mit den Ergebnissen von § 1, so gelangen wir an unser Ziel:

**Zweiter Hauptsatz.** *Es sei  $w(z)$  eine für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphe Funktion und  $a_1, \dots, a_q$  ( $q \geq 3$ ) voneinander verschiedene endliche oder unendliche Zahlen. Unter diesen Bedingungen ist für  $r < R$*

$$\sum_1^q m(r, a_v) < 2T(r) - N_1(r) + S(r), \quad (II)$$

wo

$$N_1(r) = \int_0^r \frac{n_1(t)}{t} dt + n_1(0) \log r \quad (20)$$

die auf S. 229 definierte Anzahlfunktion der mehrfachen Stellen von  $w(z)$  ist und das Restglied  $S(r)$  nachstehenden Bedingungen genügt:

1. Im Falle  $R = \infty$  ist

$$S(r) < O(\log r T(r)), \quad (21)$$

außer möglicherweise in einer Intervallfolge  $\Delta_r$ , wo die Variation von  $\frac{r^\lambda}{\lambda}$  ( $\lambda \geq 0$ ) beschränkt ist.

2. Für  $R=1$  hat man

$$S(r) < (\lambda + 1) \log \frac{1}{1-r} + O\left(\log \log \frac{1}{1-r}\right) + O(\log T(r)), \quad (22)$$

mit möglicher Ausnahme einer Intervallfolge  $\Delta_r$ , auf welcher die Variation von  $\frac{(1-r)^{-\lambda}}{\lambda}$  ( $\lambda \geq 0$ ) beschränkt ist.

<sup>1</sup> R. NEVANLINNA [4], H. SELBERG [1], F. NEVANLINNA [4].



Eine andere, für viele Anwendungen besser geeignete Form des Hauptsatzes erhält man, wenn man in (II) beiderseits  $\sum_1^q N(r, a_v)$  hinzufügt und den ersten Hauptsatz  $m + N = T$  berücksichtigt. Man findet dann statt (II)

$$(q - 2) T(r) < \sum_1^q N(r, a_v) - N_1(r) + S(r), \quad (\text{II}')$$

wo  $S$  die unter 1. und 2. aufgezählten Eigenschaften hat.

**206.** Eine wichtige Ergänzung zu diesem Ergebnis gilt dem Fall, wo der Ausdruck

$$\sum_1^q N(r, a_v) = N(r) \quad (23)$$

von *endlicher Ordnung* ist ( $R = \infty$ ). Dann ist auch  $n = \frac{dN}{d \log r}$  von endlicher Ordnung (vgl. S. 210), und es gibt also eine positive Zahl  $\lambda$ , so daß  $n < r^{\lambda+1}$  von einem gewissen Wert  $r = r_0$  ab besteht. Sei nun  $r'$  ein Punkt eines Ausnahmeintervalls  $\Delta_r$  und  $r$  der rechte Endpunkt desselben. Sobald  $r' > r_0$ , wird

$$N(r) - N(r') < \int_{r'}^r r^\lambda dr,$$

eine Größe, die nach den Eigenschaften der Ausnahmeintervalle  $\Delta_r$  unter einer festen von  $r$  unabhängigen Schranke liegt. Nach (II') wird also

$$\begin{aligned} (q - 2) T(r') &\leq (q - 2) T(r) < N(r) - N_1(r) + S(r) \\ &\leq N(r') - N_1(r') + S(r) + (N(r) - N(r')) \\ &= N(r') - N_1(r') + S(r) + O(1). \end{aligned}$$

Außerhalb der (offenen) Intervalle  $\Delta_r$  ist aber  $S(r) < O(\log r T(r)) = O(\log r)$ . Beachtet man nun, daß die Variation von  $\log r$  auf den Intervallen  $\Delta_r$  beschränkt ist ( $\lambda = 0$ ), und daß somit dasselbe für den Ausdruck  $\log \frac{r}{r'}$  gilt, so sieht man ein, daß die Beziehung (II') auch in den Ausnahmeintervallen besteht mit  $S = O(\log r)$ .

Falls  $R = \infty$  und der Ausdruck (23) von endlicher Ordnung ist, so bestehen die Beziehungen (II) und (II') ohne Ausnahmeintervalle, und es ist also

$$(q - 2) T(r) < \sum_{v=1}^q N(r, a_v) - N_1(r) + O(\log r). \quad (24)$$

Entsprechendes gilt im Falle  $R = 1$ , wenn die Summe  $N(r)$  für  $r \rightarrow 1$  von endlicher Wachstumsordnung ist, d. h. falls

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\log N(r)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

endlich ist. Die Sätze gelten dann ausnahmslos für  $r < 1$  mit  $S = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$ .

#### § 4. Direkter Beweis des zweiten Hauptsatzes mit Hilfe der Fundamentalbeziehung.

207. Besitzt man erst einmal die Fundamentalbeziehung von § 2, so ist die oben eingeschlagene Methode zur Aufstellung des zweiten Hauptsatzes als ein Umweg zu betrachten. In der Tat wurde jene Beziehung, welche oben als Hilfsmittel zur Herleitung des Satzes über die logarithmische Ableitung verwendet wurde, von F. NEVANLINNA [2] für einen direkten, von den Betrachtungen in § 1 und § 3 unabhängigen Beweis des Hauptsatzes benutzt, wie dies jetzt näher auseinandergesetzt werden soll<sup>1</sup>.

Um den Hauptsatz zu gewinnen, setzt F. NEVANLINNA die Belegung  $\mu$  in der Fundamentalbeziehung (16) in § 2 gleich dem *nichteuklidischen, hyperbolischen Flächeninhalt der an den Stellen  $a_1, a_2, \dots, a_q$  ( $q \geq 3$ ) punktierten  $w$ -Ebene*. Wie in I, § 2 auseinandergesetzt worden ist, gelangt man zu der hyperbolischen Maßbestimmung dieses  $q$ -fach zusammenhängenden Gebiets  $F_q$ , so daß man seine einfach zusammenhängende universelle Überlagerungsfläche  $F_q^\infty$ , die wegen der Voraussetzung  $q \geq 3$  zum hyperbolischen Typus gehört (vgl. I, § 2), auf die schlichte Kreisscheibe  $|x| < 1$  konform abbildet. Dies geschieht mittels der linear polymorphen Funktion  $x = x(w; a_1, \dots, a_q)$ , deren verschiedene Zweige durch eine Gruppe  $\Sigma$  von linearen Transformationen  $S$  zusammenhängen, welche den Einheitskreis  $K$  invariant lassen. Die Umkehrfunktion  $w = \varphi(x)$ , welche die Abbildung  $K \rightarrow F_q^\infty$  vollzieht, ist in bezug auf diese Gruppe automorph.

Führt man in  $K$  die LOBATSCHESKY-POINCARÉsche Maßbestimmung ein, indem man die nichteuklidische Länge  $d\sigma$  eines Bogenelementes  $|dx|$  gleich

$$d\sigma = \frac{|dx|}{1 - |x|^2}$$

setzt (I, § 1), so ist  $d\sigma$  in bezug auf jede lineare Transformation, die  $K$  auf sich selbst abbildet, also speziell für jede Transformation der Gruppe  $\Sigma$  invariant. Hieraus folgt daß, wenn man diese Maßbestimmung durch die Abbildung  $K \rightarrow F_q^\infty$  überträgt, sie nicht nur auf der Überlagerungsfläche  $F_q^\infty$ , sondern schon auf der Grundfläche  $F_q$  eindeutig erklärt ist (vgl. hierzu III, § 3).

Das nichteuklidische Flächenelement im Punkte  $w$  ist als das Quadrat von  $d\sigma$  definiert. Für die Dichte des entsprechenden Flächeninhalts  $d\mu$  im Punkte  $w$  findet man also

$$\rho = \frac{d\mu}{df_w} = \frac{\left| \frac{dx}{dw} \right|^2}{(1 - |x(w)|^2)^2},$$

<sup>1</sup> Daß wir vorgezogen haben, den Beweis von §§ 1 bis 3 zuerst darzustellen, geschah teilweise mit Rücksicht auf die Leichtfaßlichkeit, teilweise auch weil diese Methode und der Hilfssatz über die logarithmische Ableitung für gewisse andere Fragen der Theorie der meromorphen Funktionen von Bedeutung sind. Vgl. hierzu R. NEVANLINNA [5], Kap. V.

wo  $x(w)$  die obige linear polymorphe Abbildungsfunktion und  $df_w$  das euklidische Flächenelement sind. Mit diesem Wert für  $\varrho$  wird die Fundamentalbeziehung (16) zur Anwendung gebracht, wobei  $\mu$  bzw.  $\varrho$  jedoch vorerst so normiert werden müssen, daß die gesamte, über die punktierte Ebene  $F_q$  ausgebreitete Masse

$$\mu_0 = \int d\mu = \int \frac{df_w}{(1 - |x(w)|^2)^2} \left| \frac{dx}{dw} \right|^2 \quad (25)$$

gleich der Einheit wird, was einfach durch Division von  $\mu$  und  $\varrho$  durch den Betrag  $\mu_0$  der gesamten Masse geschieht.

Vorerst müssen wir uns jedoch davon überzeugen, daß diese Größe  $\mu_0$ , der nichteuklidische Flächeninhalt von  $F_q$ , endlich ist. Hierzu benutzen wir die schon in I, § 3, S. 18 vorbereitenderweise aufgestellten Entwicklungen der Abbildungsfunktion  $x(w)$ . Man hat nach letzteren, wenn  $c$  den dem Grenzpunkt  $a = a_\nu$  der Fläche  $F_q$  zugeordneten Peripheriepunkt von  $K$  bezeichnet [für einen beliebig festgelegten Zweig  $x(w)$  in der Nähe von  $a = a_\nu$ ]:

$$\frac{c+x}{c-x} = \alpha + \beta \log(w-a) + \varepsilon(w-a), \quad (26)$$

wo  $\alpha$  und  $\beta$  konstant sind und  $\varepsilon$  für  $w \rightarrow a$  verschwindet. Es wird

$$\Re \left( \frac{c+x}{c-x} \right) = \frac{1-|x|^2}{|c-x|^2} \sim \gamma \log \frac{1}{|w-a|}$$

und

$$\left| \frac{d}{dw} \left( \frac{c+x}{c-x} \right) \right| = \frac{2|c|}{|c-x|^2} \left| \frac{dx}{dw} \right| \sim \frac{|\beta|}{|w-a|},$$

also

$$\varrho = \frac{\left| \frac{dx}{dw} \right|^2}{(1-|x|^2)^2} \sim \lambda \left( \frac{1}{|w-a| \log \frac{1}{|w-a|}} \right)^2, \quad (27)$$

wo  $\lambda$  eine positive Konstante ist.

Für den Grenzpunkt  $a = \infty$  hat man in der Entwicklung (26)  $w-a$  durch  $\frac{1}{w}$  zu ersetzen, und es wird, statt (27), für  $a = \infty$

$$\varrho = \frac{\left| \frac{dx}{dw} \right|^2}{(1-|x|^2)^2} \sim \lambda \left( \frac{1}{|w| \log |w|} \right)^2. \quad (27')$$

208. Unter Anwendung dieser asymptotischen Entwicklungen der Dichte  $\varrho$  in der Umgebung der Grenzpunkte  $w = a_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, q$ ) ergibt sich, da  $\varrho$  für  $w \neq a_\nu$  stetig ist, erstens daß die Gesamtmasse  $\mu_0$  endlich ist<sup>1</sup> und ferner daß das von der Belegung  $\frac{\mu}{\mu_0}$  erzeugte sphärische Potential

$$P(w) = \frac{1}{\mu_0} \int_{(a)} \log \frac{1}{h(w,a)} d\mu$$

<sup>1</sup> Wünscht man den genauen Wert der Masse  $\mu_0$ , so verbinde man die Punkte  $a_1$  und  $a_2$ ,  $a_2$  und  $a_3$ , ...,  $a_{q-1}$  und  $a_q = \infty$  durch je einen Kurvenbogen  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{q-1}$ . Diese können derart gewählt werden, daß ihnen, vermöge der Ab-

ebenfalls einen endlichen Wert erhält, sofern der Punkt  $w$  von  $a_1, \dots, a_q$  ( $a_q = \infty$ ) verschieden ist.

Die Fundamentalbeziehung (16) gibt uns jetzt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w'(re^{i\varphi})| d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{\varrho(w(re^{i\varphi}))} d\varphi \leq \frac{\log \mu_0}{2} + \frac{\log \psi(r)}{2}, \quad (28)$$

wo  $\mu_0$  die Gesamtmasse ist und  $\psi(r)$  den in Nr. 202 aufgezählten Bedingungen genügt.

Hier ist nach dem JENSENSchen Satz

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w'| d\varphi = N\left(r, \frac{1}{w'}\right) - N(r, w') + \text{const.}$$

bildung  $F_q^\infty \rightarrow K$  im Einheitskreis  $|x| < 1$  gewisse Orthogonalkreisbogen der Peripherie  $|x| = 1$  zugeordnet sind; die längs  $Q_1, \dots, Q_{q-1}$  aufgeschnittene  $w$ -Ebene,  $F_q$ , wird durch einen beliebigen Zweig der Abbildungsfunktion in ein Spitzenpolygon  $\pi$  übergeführt, das von  $2(q-1)$ , den Schnittträgern entsprechenden, sich auf der Kreislinie  $|x| = 1$  berührenden Orthogonalkreisbogen berandet ist. Durch die Variabeltransformation  $x = x(w)$  ergibt sich für die Gesamtmasse unserer Belegung der Ausdruck

$$\mu_0 = \int_{\pi} \frac{df_x}{(1 - |x|^2)^2},$$

wo die Integration über die Fläche des Spitzenpolygons  $\pi$  zu erstrecken ist;  $df_x = r dr d\varphi$  ist das euklidische Flächenelement in  $x = re^{i\varphi}$ .

Zur Auswertung des Integrals wendet man am bequemsten die Differentialgleichung  $\Delta u = 4e^{2u}$  an, welcher der Logarithmus  $\log \frac{d\sigma}{dx} = \log \frac{1}{1 - |x|^2}$  des Verhältnisses zwischen den nichteuklidischen und euklidischen Bogenlängen genügt (I, § 1). Die GAUSSSche Transformationsformel ergibt dann

$$-\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int \Delta u df_x = 4 \int \frac{df_x}{(1 - |x|^2)^2} = 4\mu_0,$$

wo das linksstehende Integral über den Perimeter des Polygons  $\pi$  geführt werden muß. Bezeichnet  $\vartheta$  den Winkel, den die Richtung der inneren Normalen mit dem Radiusvektor  $(0, x)$  bildet, so erhält man, wenn  $M$  der Mittelpunkt und  $\varrho$  der Radius desjenigen Orthogonalkreisbogens  $L$  ist, der durch den Punkt  $x$  geht, aus dem Dreieck  $OMx$ , wo  $OM = \sqrt{1 + \varrho^2}$ ,  $\cos \vartheta = \frac{1 - r^2}{2r\varrho}$ . Es wird somit

$$-\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int \frac{du}{dr} \cos \vartheta ds = \int \frac{ds}{\varrho}.$$

Hier ist  $\frac{ds}{\varrho}$  gleich dem Element  $d\psi$  des Zentriwinkels von  $L$ , dessen Variation auf dem Bogen  $L$  gleich  $\pi - \Phi$  ist, wo  $\Phi$  der Winkel ist, unter welchem  $L$  aus dem Nullpunkt  $x = 0$  erscheint. Da die Anzahl der Seiten  $L$  des Polygons  $2(q-1)$  beträgt, so wird das Linienintegral gleich  $2\pi(q-1) - 2\pi = 2\pi(q-2)$ , und man findet für den nichteuklidischen Flächeninhalt der punktierten Ebene den Wert  $\mu_0 = (q-2) \frac{\pi}{2}$ .

Dies ist nichts anderes als der Satz über den Winkeldefekt und den Flächeninhalt eines Polygons in der hyperbolischen Geometrie.

Für das zweite Integral findet man bei Anwendung der asymptotischen Entwicklungen (27) und (27')

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{\varrho} \, d\varphi = \sum_{\nu=1}^{q-1} \frac{1}{2\pi} \int \left( \log^+ \left| \frac{1}{w-a_\nu} \right| - \log^+ \log^+ \left| \frac{1}{w-a_\nu} \right| \right) d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int (\log^+ |w| + \log^+ \log^+ |w|) d\varphi + O(1).$$

Die von den einfachen Logarithmen herrührenden Integrale ergeben die Mittelwerte  $m(r, a_\nu)$ . Die Mittelwerte der doppelten Logarithmen werden durch den Satz über das arithmetische und geometrische Maß weiter abgeschätzt; sie sind von der Größenordnung  $O(\log m(r, a_\nu))$  und daher, nach dem ersten Hauptsatz, auch von der Ordnung  $O(\log T(r))$ .

Zusammenfassend wird also aus (28)

$$N\left(r, \frac{1}{w'}\right) - N(r, w') + \sum_1^{q-1} m(r, a_\nu) - m(r, \infty) < \frac{\log \psi(r)}{2} + O(\log T(r)).$$

Addiert man noch beiderseits die Größe  $2m(r, \infty) = 2T(r) - 2N(r, \infty)$ , so ergibt sich

$$\sum_1^q m(r, a_\nu) < 2T(r) - N_1(r) + \frac{\log \psi(r)}{2} + O(\log T(r)),$$

wo  $N_1$  der mehrmals besprochene Ausdruck

$$N_1(r) = N\left(r, \frac{1}{w'}\right) + [2N(r, w) - N(r, w')]$$

ist. Dies ist, mit Rücksicht auf die Eigenschaften der in der Fundamentalbeziehung (16) stehenden Größe  $\psi(r)$ , nichts anderes als der zweite Hauptsatz (II). Um die Endlichkeit des in der oberen Schranke von  $\psi(r)$  vorkommenden Potentials  $P(w_0)$  zu erzielen, hat man jedoch die Annahme  $w(0) = w_0 \neq a_\nu$  hinzuzufügen.

**209.** Legt man die allgemeine Fundamentalbeziehung zugrunde, wie es in der obigen Darstellung geschehen ist, so kommt man, wie AHLFORS [8] bemerkt hat, einfacher als bei Anwendung der nichteuklidischen Belegung zum Ziel, wenn man die Dichte *elementar* vorschreibt, so daß sie sich an den kritischen Stellen  $a_\nu$  ähnlich wie die Dichte der nichteuklidischen Belegung verhält. Es genügt also die Fundamentalbeziehung z. B. mit der Dichtefunktion

$$\log \varrho(w) = 2 \sum_1^q \log \frac{1}{k(w, a_\nu)} - 2 \log \left( \sum \log \frac{1}{k(w, a_\nu)} \right) + c,$$

anzusetzen, wo  $k(w, a_\nu)$  der chordale Abstand der Punkte  $w$  und  $a_\nu$  ist und die Konstante  $c$  so normiert werden muß, daß die Gesamtmasse gleich 1 wird (AHLFORS, l. c.).

Wir haben es oben vorgezogen, dem ursprünglichen, weniger elementaren Weg von F. NEVANLINNA zu folgen, weil die Anwendung der Abbildungsfunktionen  $x(w; a_1, \dots, a_q)$  und der hierauf fußenden nicht-euklidischen Maßbestimmung keineswegs als ein Kunstgriff zu betrachten ist, sondern vielmehr eine naturgemäße Erweiterung des ursprünglichen, auf der Verwendung der Modulfunktion beruhenden Beweises darstellt, durch welchen PICARD seinen berühmten Satz begründete (vgl. I, § 3). Es verlohnt sich der Mühe, etwas näher auf die leitende Idee einzugehen, die den uniformisierenden Transzendenten  $x(w; a_1, \dots, a_q)$  einen ganz natürlichen Platz in der Theorie der Wertverteilung zuweist.

**210.** Sei  $w = w(z)$  eine für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphe Funktion, welche in jenem Kreis gewisse Werte  $a_1, \dots, a_q (q \geq 2)$  nicht annimmt. Die linear polymorphe Funktion  $x = x(w; a_1, \dots, a_q)$  bildet die universelle Überlagerungsfläche  $F_q^\infty$  der an den Stellen  $a_v$  punktierten Ebene, für  $q=2$  auf die punktierte Ebene  $x \neq \infty$  (parabolischer Fall), für  $q > 2$  dagegen auf den Einheitskreis  $|x| < 1$  (hyperbolischer Fall) ab. Legt man nun für  $w = w_0 = w(0)$  einen beliebigen Zweig der Abbildungsfunktion  $x = x(w)$  fest, so läßt sich, da  $w$  die Grenzpunkte  $a_v$  vermeidet, jener Funktionszweig für  $|z| < R$  unbeschränkt fortsetzen und stellt somit nach dem Monodromiesatz eine eindeutige Funktion  $x(w(z)) = f(z)$  dar. Bezeichnet nun  $w = \varphi(x; a_1, \dots, a_q)$  die für  $|x| < \infty (q=2)$  bzw.  $|x| < 1 (q > 2)$  automorphe Umkehrfunktion von  $x(w; a_1, \dots, a_q)$ , so ist die gegebene, von den Werten  $a_v$  verschiedene Funktion  $w(z)$  gleich

$$w(z) = \varphi(f(z); a_1, \dots, a_q), \quad (29)$$

wo also  $f(z)$  eine für  $|z| < R$  reguläre Funktion ist, die im Falle  $q > 2$  beschränkt ist ( $|f| < 1$ ).

Die Beziehung (29) enthält den *allgemeinen Ausdruck einer für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphen, von den gegebenen Werten  $a_v$  verschiedenen Funktion  $w(z)$* . Denn wir haben gesehen, daß eine jede solche Funktion  $w$  in dieser Form darstellbar ist; und umgekehrt, falls  $f(z)$  für  $|z| < R$  regulär und, sofern  $q > 2$ , beschränkt ( $|f| < 1$ ), im übrigen aber beliebig ist, wird durch (29) eine Funktion  $w(z)$  von der angegebenen Art definiert.

Das Problem, die Gesamtheit der für  $|z| < R$  meromorphen, von  $q \geq 2$  Werten  $a_1, \dots, a_q$  verschiedenen Funktionen  $w$  zu bestimmen, wird also mit Hilfe der uniformisierenden Transzendenten  $x(w; a_1, \dots, a_q)$  vollständig gelöst. Im Falle  $q=2$  ist  $x(w)$  gleich dem Logarithmus  $x = \log \frac{w - a_1}{w - a_2}$ , und es handelt sich also um das elementare Resultat, daß eine Funktion  $w$ , welche für  $|z| < R$  zwei Ausnahmewerte  $a_1, a_2$  besitzt, eine linear gebrochene Funktion von  $e^{f(z)}$  ist, wo  $f$  für  $|z| < R$  regulär ist. Wenn dagegen  $q > 2$ , so folgt aus dem LIOUVILLESCHEN Satz, daß  $f(z)$  sich, und somit auch  $w(z)$ , auf eine Konstante reduziert, *sofern  $R = \infty$  ist*; dies ist der PICARDSCHE Satz (vgl. I, § 3).

211. Wenn die betrachtete meromorphe Funktion  $w(z)$  nicht mehr von den vorgegebenen Werten  $a$ , verschieden ist, so liegt es nahe, das obige Verfahren zur Untersuchung der Stellen  $z$  einzuschlagen, in denen  $w(z)$  jene besonderen Werte annimmt. Diese Stellen zeichnen sich nämlich dadurch aus, daß die zusammengesetzte Funktion  $x(w(z); a_1, \dots, a_q)$  in ihnen *singular* wird. Die Untersuchung dieser Singularitäten wird dadurch erschwert, daß jene Funktion in der Umgebung derselben mehrdeutig wird, und man wird infolgedessen danach streben, eine von  $x(w(z); a_1, \dots, a_q)$  abhängige Größe zu finden, welche, ohne den singulären Charakter an den Stellen  $w = a_v$ , zu verlieren, *eindeutig* ist<sup>1</sup>.

Einen solchen Ausdruck gibt uns im Falle  $q=2$ , wo  $x(w)$ , wenn der Kürze halber  $a_1=0, a_2=\infty$  gesetzt wird, einfach gleich  $\log w$  ist, das Verhältnis  $\left| \frac{dx}{dw} \right| = \left| \frac{1}{w} \right|$  der euklidisch gemessenen einander entsprechenden Linienelemente  $|dx|$  und  $|dw|$ . Der Logarithmus dieses Ausdrucks,  $u(w; a_1, a_2) = \log \frac{1}{|w|}$  genügt der LAPLACESchen Differentialgleichung  $\Delta u = 0$ , außer an den kritischen Stellen  $a_1=0, a_2=\infty$ , in denen er logarithmisch unendlich wird. Setzt man nun  $u(w(z); a_1, a_2) \equiv \bar{u}(z)$ , so ist auch  $\bar{u}$  für  $|z| < R$  harmonisch, außer an den Stellen wo  $w=0$  oder  $\infty$  ist. Die Integration der Differentialgleichung  $\Delta \bar{u} = 0$ , gibt uns, bei Beachtung jener Singularitäten, die JENSENSche Formel, welche uns bei der Untersuchung der Null- und Unendlichkeitsstellen einer meromorphen Funktion als grundlegendes Hilfsmittel gedient hat.

Im Falle  $q > 2$ , wo die Fläche  $F_q^\infty$  auf den Einheitskreis abbildbar ist, liegt es nun nahe, das euklidische Linienelement  $|dx|$  durch das *hyperbolische* Element  $d\sigma$  zu ersetzen, das für alle Zweige von  $x(w)$  den invarianten Betrag  $d\sigma = \frac{dx}{1-|x|^2}$  beibehält. Setzt man dann  $u(w; a_1, \dots, a_q) = \log \frac{d\sigma}{|dw|}$ , so ist  $u$  als eine eindeutige Funktion von  $w$  erklärt, die der Differentialgleichung  $\Delta u = 4e^{2u}$  genügt, außer in den Punkten  $a_1, \dots, a_q$ , wo sie logarithmisch unendlich wird (vgl. S. 243). Die Zusammensetzung mit der gegebenen, für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphen Funktion  $w(z)$  erklärt eine eindeutige Funktion von  $z$ ,  $v(z) \equiv u(w(z)) + \log \left| \frac{dw}{dz} \right|$ , welche ebenfalls der Differentialgleichung  $\Delta_z v = 4e^{2v}$  genügt, und man wird so zu der Integration dieser partiellen Differentialgleichung geführt, unter Beachtung der Singularitäten von  $v$ , als welche innerhalb  $|z| < R$  diejenigen Stellen auftreten, wo  $w(z)$  die kritischen Werte  $a_1, \dots, a_q$  annimmt. Während diese Integration bei der Gleichung  $\Delta u = 0$  ( $q=2$ ) zu einer exakten Mittelwertformel führte (JENSENSche Formel), gelangt man in vorliegendem komplizierteren Fall nur zu einem approximativen Resultat: so kann in der Tat die Fundamentalbeziehung (16) interpretiert

<sup>1</sup> F. NEVANLINNA [I].

werden, wenn für die Belegung  $\mu$  das nichteuklidische Flächenelement eingesetzt wird<sup>1</sup>.

212. Um diesen Zusammenhang näher zu erklären, und zugleich die Genauigkeit der Fundamentalbeziehung zu prüfen, wollen wir jene Beziehung analysieren, für den einfachsten Fall, wo  $w(z)$  die Werte  $a_1, \dots, a_q$  für  $|z| < R$  nicht annimmt. Da die Dichte  $\varrho$  der nichteuklidischen Flächenbelegung  $d\sigma$  gleich

$$\varrho = \left( \frac{d\sigma}{dw} \right)^2 = e^{2u(w; a_1, \dots, a_q)}$$

ist, so wird das linksstehende Integral jener Beziehung gleich

$$\frac{1}{2\pi} \int \left( \log \varrho + 2 \log \left| \frac{dw}{dz} \right| \right) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int v(r e^{i\varphi}) d\varphi,$$

wo  $v$  die oben definierte Funktion

$$v = u(w(z); a_1, \dots, a_q) + \log \left| \frac{dw}{dz} \right|$$

ist, welche der Differentialgleichung  $\Delta v = 4e^{2v}$  genügt. Bei Anwendung der GAUSSSchen Integraltransformationsformel ergibt sich für dieses Integral der Wert

$$\frac{4}{\pi} \int_0^r \frac{\Omega(t)}{t} dt,$$

wo

$$\Omega(r) = \frac{1}{4} \int_{|z| \leq r} \Delta_z v d f_z = \int_{|z| \leq r} e^{2v} d f_z$$

der nichteuklidische Flächeninhalt des RIEMANNSchen Flächenstücks  $F_r$  ist, auf welches der Kreis  $|z| \leq r$  mittels der gegebenen Funktion  $w = w(z)$  abgebildet wird. Setzt man wie in § 2

$$Q(r) = \int_0^r \frac{\Omega(r)}{r} dr = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} v(r e^{i\varphi}) d\varphi,$$

so ergibt die Fundamentalbeziehung [vgl. (11)].

$$\frac{4Q}{\pi} \leq \log \frac{\Omega'(r)}{2\pi r} = \log \frac{d^2 Q}{dt^2} - 2t - \log 2\pi,$$

wo  $t = \log r$ , oder, falls

$$y(t) = \frac{2}{\pi} Q + t \tag{30}$$

gesetzt wird,

$$y''(t) \geq 4e^{2y}.$$

Multipliziert man hier beiderseits mit  $y' > 0$ , so ergibt sich durch Integration zwischen den Grenzen  $t_0$  und  $t (< \log R)$

$$(y'(t))^2 - (y'(t_0))^2 \geq 4(e^{2y(t)} - e^{2y(t_0)}).$$

<sup>1</sup> Für eine allgemeine Dichte  $\varrho$  handelt es sich in entsprechender Weise um die Integration der POISSONSchen Gleichung  $\Delta u = -2\pi\varrho$ .



Läßt man nun  $t_0$  gegen  $-\infty$  konvergieren, so wird nach (30), falls  $w(0) \neq a_1, \dots, a_q (= \infty)$  und  $w'(0) \neq 0$  vorausgesetzt wird,  $y(t_0) \rightarrow -\infty$ , und  $y'(t_0) = \frac{2\Omega(t_0)}{\pi} + 1 \rightarrow 1$ . Die obige Beziehung geht also in

$$(y'(t))^2 \geq 4e^{2y(t)} + 1$$

über, woraus durch Integration zwischen den Grenzen  $t = \log r < \tau = \log \varrho < \log R$  folgt

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \leq \frac{\sqrt{4e^{2y(\tau)} + 1} + 1}{\sqrt{4e^{2y(t)} + 1} - 1} \cdot \frac{\sqrt{4e^{2y(\tau)} + 1} - 1}{\sqrt{4e^{2y(\tau)} + 1} + 1} \leq \frac{\sqrt{4e^{2y(t)} + 1} + 1}{\sqrt{4e^{2y(t)} + 1} - 1},$$

oder

$$y(t) \leq \log \frac{\varrho r}{\varrho^2 - r^2}.$$

Führt man noch den Wert von  $y$  ein, so ergibt sich durch den Grenzübergang  $\varrho \rightarrow R$  schließlich der

**Satz.** *Der Mittelwert der nichteuklidischen Invariante*

$$v(z) = \log \frac{d\sigma}{|dz|} = \log \frac{\left| \frac{dx}{dw} \right| \left| \frac{dw}{dz} \right|}{1 - |x(w(z))|^2}$$

genügt für  $r < R$  der Beziehung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi}) d\varphi \leq \log \frac{R}{R^2 - r^2}. \tag{31}$$

Hat  $w(z)$  die Nullpunktentwicklung  $w = c_0 + c_1 z + \dots$ , so folgt hieraus für  $r \rightarrow 0$

$$\log \frac{|c_1| |x'(c_0)|}{1 - |x(c_0)|^2} \leq \log \frac{1}{R}.$$

Dies ist der PICARD-LANDAUSCHE Satz in der genauen Form von IV, § 5, wo  $x(c_0) = 0$  gewählt wurde.

Allgemeiner läßt es sich zeigen, daß die Beziehung (31) in eine Gleichheit übergeht, falls die meromorphe Funktion  $w(z)$  mit der automorphen Funktion übereinstimmt, welche den Kreis  $|z| < R$  auf die universelle Überlagerungsfläche  $F_q^\infty$  konform abbildet.

## X. Anwendungen des zweiten Hauptsatzes.

### § 1. Der Satz von PICARD-BOREL.

213. Für eine in der punktierten Ebene  $z \neq \infty$  meromorphe Funktion  $w(z)$  gilt der PICARDSche Satz: es gibt höchstens *zwei* Werte, welche die Funktion  $w(z)$  überhaupt nicht annimmt, es sei denn, daß sie sich auf eine Konstante reduziert; dieser triviale Fall ist im folgenden ein für allemal ausgeschlossen. Im Zusammenhang mit dem ersten Hauptsatz

haben wir ferner gefunden, daß eine solche Funktion *fast alle Werte*  $a$  mit einer, der Charakteristik  $T(r, w)$  entsprechenden Häufigkeit  $N(r, a)$  annimmt. Diese Ergebnisse wurden im Falle einer meromorphen Funktion von endlicher, nichtganzzahliger Ordnung dahin verschärft, daß höchstens *ein* Ausnahmewert existiert, für welchen die Anzahlfunktion von niedrigerer Ordnung (Klasse, Typus) ist als die Charakteristik. Bereits einfache Beispiele zeigen, daß entsprechendes für ganzzahlige Ordnungen nicht mehr gilt; so hat die Exponentialfunktion zwei Ausnahmewerte  $(0, \infty)$ , und in VIII, § 4 haben wir einen Fall besprochen, wo eine Erniedrigung des Typus oder der Klasse von  $N(r, a)$  für zwei Werte  $a$  zustande kommt. Daß andererseits die Anzahl solcher Ausnahmewerte nicht *zwei* übersteigen kann, ist der wesentliche Inhalt der von BOREL [1] gegebenen Erweiterung des PICARDSchen Satzes.

**214.** Der PICARD-BORELSche Satz und seine späteren Verschärfungen<sup>1</sup> ergeben sich als eine unmittelbare Folgerung aus dem zweiten Hauptsatz. Setzt man  $q=3$ , d. h. nimmt man drei voneinander verschiedene Zahlen  $a_1, a_2, a_3$ , so folgt aus den zwei Hauptsätzen die für jedes  $a$  gültige Doppelbeziehung

$$N(r, a) + O(1) < T(r) < N(r, a_1) + N(r, a_2) + N(r, a_3) + S(r), \quad (1)$$

wo das Restglied  $S(r)$  den im zweiten Hauptsatz aufgezählten Bedingungen genügt. Dies zeigt, daß *die Verteilung von drei Stellensorten das Anwachsen der Charakteristik  $T(r)$  und hierdurch die asymptotische Verteilung sämtlicher Stellensorten im wesentlichen bestimmt.*

Wir beweisen den

**Satz.** *Wenn das Integral*

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{N(r, a)}{r^{\mu+1}} dr \quad (\mu > 0) \quad (2)$$

*für drei verschiedene Werte  $a$  konvergent ist, so ist das Integral*

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\mu+1}} dr \quad (3)$$

*ebenfalls konvergent, und (2) konvergiert dann für jedes  $a$ .*

Dies ergibt sich unmittelbar aus der Beziehung (1), falls man beiderseits mit  $\frac{dr}{r^{\mu+1}}$  multipliziert und zwischen den Grenzen  $r_0$  und  $r$  ( $0 < r_0 < r$ ) integriert. Das von dem Restglied  $S$  herrührende Integral

$$\int_{r_0}^r \frac{S(r)}{r^{\mu+1}} dr$$

ist nämlich für  $r \rightarrow \infty$  *endlich*. In der Tat folgt aus der Voraussetzung

<sup>1</sup> G. VALIRON [2], R. NEVANLINNA [2], [4].

unseres Satzes, daß die Summe  $N(r) = \sum_1^3 N(r, a_v)$  von endlicher Ordnung ( $\leq \mu$ ) ist (S. 210), und es ist dann nach dem zweiten Hauptsatz (Zusatz auf S. 241)  $S(r) = O(\log r)$ , woraus die Konvergenz des obigen Integrals für  $r \rightarrow \infty$  folgt.

Beachtet man die Zusammenhänge, welche zwischen dem Grenzexponenten  $\mu$  des Integrals (2) einerseits und der Ordnung (Klasse, Typus) des Integranden andererseits bestehen (S. 241), so ergibt sich der

**PICARD-BORELSche Satz.** *Für eine nichtkonstante meromorphe Funktion gibt es höchstens zwei Werte  $a$ , für welche die Anzahlfunktion  $N(r, a)$  (bzw.  $n(r, a)$ ) von niedrigerer Ordnung (Klasse, Typus) als die Charakteristik  $T(r)$  ist.*

**215.** Sei insbesondere  $w(z)$  von der ganzzahligen Ordnung  $q+1$ . Aus dem PICARD-BORELSchen Satz folgt dann: Falls das Integral

$$\int \frac{T(r)}{r^{q+2}} dr$$

divergent ist, sind die Integrale

$$\int \frac{N(r, a)}{r^{q+2}} dr \quad \text{und} \quad \int \frac{n(r, a)}{r^{q+2}} dr$$

und die Summe

$$\sum \left( \frac{1}{r_v(a)} \right)^{q+1}$$

höchstens für zwei Werte  $a$  konvergent sind. Dieses Ergebnis zeigt, daß der Fall, wo das Geschlecht einer meromorphen Funktion von der Divergenzklasse einer ganzzahligen Ordnung  $q+1$  sich erniedrigt, tatsächlich als ein Ausnahmefall zu betrachten ist, der nur dann eintritt, falls die Nullstellen und die Pole PICARD-BORELSche Ausnahmewerte sind, für welche die Anzahlfunktionen  $N(r, 0)$ ,  $N(r, \infty)$  zur Konvergenzklasse gehören. Mit Rücksicht auf die in Nr. 190 formulierte Regel zur Bestimmung des Geschlechts einer meromorphen Funktion ganzzahliger Ordnung, können wir folgendes behaupten:

*Falls die meromorphe Funktion  $w(z)$  zur Divergenzklasse des Minimaltypus der ganzzahligen Ordnung  $q+1$  gehört, d. h. im Falle*

$$\frac{T(r)}{r^{q+1}} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \int \frac{T(r)}{r^{q+2}} dr \rightarrow \infty \quad \text{für } r \rightarrow \infty,$$

ist der Quotient<sup>1</sup>

$$\frac{w-a}{w-b} \quad (a \neq b)$$

vom Geschlecht  $q+1$ , außer höchstens für ein Zahlenpaar  $(a, b)$ .

<sup>1</sup> Falls eine dieser Zahlen, z. B.  $b$ , gleich  $\infty$  ist, so hat man den Quotienten einfach durch  $w-a$  zu ersetzen.

**216.** Wie weit läßt sich der PICARD-BORELSche Satz auf Funktionen ausdehnen, welche nur *im Einheitskreise* meromorph sind (Fall  $R=1$ )? Wir erinnern daran, daß eine für  $0 \leq r < 1$  definierte positive und monoton wachsende Funktion  $s(r)$  von der Wachstumsordnung  $\left(\frac{1}{1-r}\right)^\lambda$  (oder kürzer: von der Ordnung  $\lambda$ ;  $\lambda \geq 0$ ) heißt, falls

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\log s(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \lambda.$$

ist. Wie auf S. 208 beweist man, daß  $s(r)$  dann und nur dann von der Ordnung  $\lambda$  ist, falls  $\lambda$  Grenzexponent des Integrals

$$\int_0^1 s(r) (1-r)^{\mu-1} dr$$

ist, d. h. falls das Integral für  $\mu > \lambda$  konvergent, für  $\mu < \lambda$  divergent ist.  $s(r)$  gehört ferner der Konvergenz- oder Divergenzklasse an, je nachdem jenes Integral für  $\mu = \lambda$  konvergiert oder divergiert. Ersterer Fall ist nur dann möglich, wenn  $s$  vom Minimaltypus der Ordnung  $\lambda$  ist, d. h. wenn das Produkt

$$s(r) (1-r)^\lambda$$

für  $r \rightarrow 1$  verschwindet.

Aus der Identität ( $0 < r_0 < r < 1$ )

$$\begin{aligned} \mu \int_{r_0}^r N(t, a) (1-t)^{\mu-1} dt &= \\ &= N(r, a) (1-r)^\mu - N(r_0, a) (1-r_0)^\mu - \int_{r_0}^r \frac{n(t)}{t} (1-t)^\mu dt \end{aligned}$$

schließt man, wie auf S. 210, daß die Integrale

$$\int_0^1 N(r, a) (1-r)^{\mu-1} dr \quad \text{und} \quad \int_0^1 n(r, a) (1-r)^\mu dr \quad (4)$$

für  $\mu > 0$  gleichzeitig konvergent und divergent sind. Die Beziehung

$$\begin{aligned} (\mu+1) \int_{r_0}^r n(t) (1-t)^\mu dt &= \\ &= n(r) (1-r)^{\mu+1} - n(r_0) (1-r_0)^{\mu+1} - \int_{r_0}^r (1-t)^{\mu+1} dn(t, a) \end{aligned}$$

zeigt uns ferner, daß die Reihe

$$\int_0^1 (1-r)^{\mu+1} dn(r, a) = \sum (1-r_v(a))^{\mu+1}$$

für  $\mu+1 \geq 0$  dann und nur dann konvergent ist, wenn dasselbe für das zweite Integral (4) gilt.

Aus dem ersten Hauptsatz folgt, daß die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^1 T(r) (1-r)^{\mu-1} dr \quad (5)$$

für ein gegebenes  $\mu > 0$  die Endlichkeit der Größen

$$\int_0^1 N(r, a) (1-r)^{\mu-1} dr, \quad \int_0^1 n(r, a) (1-r)^\mu dr, \quad \sum (1-r_v(a))^{1+\mu} \quad (6)$$

nach sich zieht, wie immer die Zahl  $a$  gewählt wird. Ist also  $T$  von einer Ordnung  $\lambda > 0$ , so ist  $n(r, a)$  höchstens von der Ordnung  $\lambda + 1$  und der Grenzexponent der Reihe

$$\sum (1-r_v(a))^\mu \quad (7)$$

ist höchstens gleich  $\lambda + 1$ . Als Beispiel betrachten wir die für  $|z| < 1$  reguläre Funktion

$$w = e^{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{1+\lambda}} \quad (\lambda > 0), \quad (8)$$

deren Ordnung, wie man leicht nachrechnet, gleich  $\lambda$  ist (d. h. die Charakteristik  $T(r)$  ist von dieser Ordnung). Die Größen  $N(r, a)$  und  $n(r, a)$  sind bzw. von der Ordnung  $\lambda$  und  $\lambda + 1$  und der Grenzexponent  $\mu$  der Reihe (7) gleich  $\lambda + 1$ , außer für die beiden Ausnahmewerte  $a = 0, \infty$ .

**217.** Daß die Anzahl solcher Ausnahmewerte andererseits nicht größer als zwei sein kann, zeigt uns der zweite Hauptsatz. Durch Integration beweist man nämlich genau wie in Nr. 214, folgenden Satz, der den PICARD-BORELSchen Satz auf meromorphe Funktionen im Einheitskreis erweitert.

*Falls  $w(z)$  für  $|z| < 1$  meromorph ist und die Ausdrücke (6), bei  $\mu > 0$ , für drei verschiedene Werte  $a$  endlich sind, so gilt dasselbe für jedes  $a$ .*

Dieses Resultat gilt nicht mehr für  $\mu = 0$ . Für diesen Wert  $\mu$  wird man auf die gleichzeitig endlichen oder unendlichen Größen

$$\sum (1-r_v(a)) \quad \text{und} \quad N(1, a) = \int_0^1 \frac{n(r, a)}{r} dr$$

geführt (vgl. S. 252). Wenn sie für drei Werte  $a$  endlich sind, so gestattet der zweite Hauptsatz nicht, auf die Beschränktheit der Charakteristik  $T(r)$  zu schließen, denn rechts steht das Restglied  $S(r)$ , das nicht beschränkt ist. Und tatsächlich wissen wir schon auf Grund der Resultate von VII, § 5, daß es Funktionen gibt, die sogar eine Menge von PICARDSchen Ausnahmewerten von der Mächtigkeit des Kontinuums aufweisen, ohne von beschränkter Charakteristik zu sein. Solche Fälle kommen unter denjenigen automorphen Funktionen vor, welche den Einheitskreis auf die universelle Überlagerungsfläche eines schlichten Gebiets abbilden, dessen Randpunktmenge vom harmonischen Maß Null ist.

Die Gültigkeitsgrenze des PICARDSchen Satzes wird durch den zweiten Hauptsatz richtig getroffen. Für das Restglied  $S$  haben wir die obere Schranke  $O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$  gefunden; sinkt also  $T(r)$  diese Wachstumsordnung, so wird  $S(r)$  nicht mehr die Rolle eines Restgliedes

spielen und der Hauptsatz ist nicht mehr für die Theorie der Ausnahmewerte verwertbar. Falls nun die Charakteristik für  $r \rightarrow 1$  nicht schneller als  $\log \frac{1}{1-r}$  ins Unendliche wächst, so hört andererseits auch der PICARD-BORELSche Satz auf, richtig zu sein. In der Tat läßt sich aus den Ergebnissen von IX, § 4 der Schluß ziehen, daß die Charakteristik der Modulfunktion sich asymptotisch genau wie  $\log \frac{1}{1-r}$  verhält: die Modulfunktion hat aber schon *drei* PICARDSche Ausnahmewerte.

## § 2. Die Defektrelationen.

218. Bisher haben wir den zweiten Hauptsatz nur für den besonderen Fall von  $q=3$  Stellensorten verwendet. Eine genauere Analyse des Satzes in seiner allgemeinen Form wird uns zu einer neuen, prägnanten und wohlabgegrenzten Klasse von Ausnahmewerten führen.

Wir fassen zuerst den parabolischen Fall  $R = \infty$  ins Auge und betrachten also eine für  $z \neq \infty$  meromorphe Funktion  $w(z)$ , die als nicht-konstant vorausgesetzt werden soll. Dividiert man die dem ersten Hauptsatz entnommene Identität  $m(r, a) + N(r, a) \sim T(r)$  durch  $T(r)$ , so ergibt sich für  $r \rightarrow \infty$

$$\lim_{r=\infty} \left( \frac{m(r, a)}{T(r)} + \frac{N(r, a)}{T(r)} \right) = 1,$$

woraus zu ersehen ist, daß die Unbestimmtheitsgrenzen der Quotienten  $\frac{m}{T}$  und  $\frac{N}{T}$  für  $r \rightarrow \infty$  zwischen 0 und 1 liegen. Speziell gilt dies für die Größe

$$\lim_{r=\infty} \frac{m(r, a)}{T(r)} = 1 - \overline{\lim}_{r=\infty} \frac{N(r, a)}{T(r)},$$

deren Verhalten mit den Hilfsmitteln aus Abschnitt IX genau untersucht werden kann.

Was sagt in der Tat der zweite Hauptsatz über jene Unbestimmtheitsgrenzen aus? Dividiert man die Beziehung (II) durch  $T(r)$ , so wird die untere Grenze des Ausdrucks

$$\lim_{r=\infty} \frac{S(r)}{T(r)} = 0 \tag{9}$$

sein, und man findet

$$\lim_{r=\infty} \left( \sum_1^q \frac{m(r, a_v)}{T(r)} + \frac{N_1(r)}{T(r)} \right) \leq 2.$$

Für eine in der punktierten Ebene  $z \neq \infty$  meromorphe Funktion gilt die Beziehung

$$\sum_1^q \lim_{r=\infty} \frac{m(r, a_v)}{T(r)} + \lim_{r=\infty} \frac{N_1(r)}{T(r)} \leq 2. \tag{10}$$

Die Beziehung (10) besteht a fortiori, wenn man das von den mehrfachen Stellen der Funktion herrührende, jedenfalls nichtnegative Glied links wegläßt, und es wird also unter den Bedingungen des vorigen Satzes, falls

$$\delta(a) = \lim_{r=\infty} \frac{m(r, a)}{T(r)} = 1 - \lim_{r=\infty} \frac{N(r, a)}{T(r)} \quad (11)$$

gesetzt wird,  $0 \leq \delta \leq 1$  und

$$\sum_1^q \delta(a_\nu) \leq 2. \quad (12)$$

Die Anzahl derjenigen Werte, für welche die Größe  $\delta(a)$ , der Defekt des Wertes  $a$ , größer als eine gegebene positive Zahl  $\delta_1$  ist, ist also nicht größer als  $\frac{2}{\delta_1}$ . Ist nun  $\delta_1, \delta_2, \dots$  eine Folge von positiven Zahlen, welche monoton gegen Null abnehmen, so existieren höchstens endlich viele Werte  $a$ , für welche der Defekt  $\delta(a)$  im Intervall  $\delta_\nu \geq \delta(a) > \delta_{\nu+1}$  liegt, und da dies für jedes  $\nu$  besteht, so schließt man, daß der Defekt höchstens für eine abzählbare Menge von Werten  $a$  positiv ausfallen kann. Die Relation (12), wo  $q$  beliebig groß gewählt werden kann, gibt uns jetzt den<sup>1</sup>

**Satz über die Defektsumme.** Wenn  $w(z)$  eine für  $z \neq \infty$  meromorphe Funktion ist, so verschwindet der durch die Formel (11) definierte Defekt  $\delta(a)$  für jedes  $a$ , außer höchstens für eine abzählbare Menge von Werten  $a$ . Die Summe aller Defekte ist höchstens gleich 2:

$$\sum \delta(a) \leq 2. \quad (13)$$

**219.** Der Betrag des Defekts  $\delta(a)$ , der im Intervall  $0 \leq \delta \leq 1$  liegt, gibt uns ein sehr genaues Maß für die relative Dichte derjenigen Stellen, wo die Funktion  $w(z)$  den betreffenden Wert  $a$  annimmt. Je größer der Defekt ist, um so spärlicher sind jene Stellen vorhanden. Seinen maximalen Wert 1 erreicht der Defekt, wenn letztere sehr dünn gesät sind, wie z. B. im äußersten Fall, wo der Wert  $a$  ein PICARDScher Ausnahmewert ist.

Die Defektrelation (13) berechtigt uns jetzt jeden Wert von verschwindendem Defekt  $\delta(a)$  als einen Normalwert zu bezeichnen, im Gegensatz zu den defekten Werten, für welche  $\delta(a)$  positiv ausfällt. Letztere sind Ausnahmewerte, welche höchstens in abzählbarer Anzahl vorkommen können. Eine meromorphe Funktion hat höchstens zwei PICARDSche oder PICARD-BORELSche Ausnahmewerte. Daß die Anzahl der defekten Werte nicht beschränkt ist, findet seine Erklärung durch die offensichtliche Tatsache, daß der Defektbegriff feine Unterschiede in den Verteilungsdichten der verschiedenen Stellensorten hervorhebt, welche die ältere PICARD-BORELSche Wertverteilungstheorie nicht beachtete. Trotz dieser Verschiedenheit hat man die Defektrelation als

<sup>1</sup> R. NEVANLINNA [4].

eine sinngemäße Erweiterung des PICARD-BORELSchen Satzes zu betrachten: die nämliche Zahl 2, die im PICARDSchen Satz eine obere Schranke für die Anzahl der Ausnahmewerte darstellt, gibt jetzt nicht mehr den Maximalwert der Anzahl der Ausnahmewerte, wohl aber eine obere Schranke für den *totalen Defekt* jener Werte an. In der Tat ist auch der Satz von PICARD ein unmittelbares Korollar der Defektrelation: da nämlich ein PICARDScher Ausnahmewert den maximalen Defekt 1 hat, so können höchstens zwei derartige Werte vorkommen.

Wenn eine meromorphe Funktion zwei PICARDSche Ausnahmewerte hat, so erreicht der totale Defekt sein Maximum, *zwei*. Interessanter vom Standpunkt der Defektrelation ist, daß Funktionen mit mehreren defekten Werten existieren, für welche der Gesamtdefekt ebenfalls gleich 2 wird. Eine solche Funktion ist z. B.

$$w = \int_0^z e^{-t^q} dt, \quad (14)$$

deren asymptotische Eigenschaften in der vorhergehenden Darstellung wiederholt zur Sprache gekommen sind. Wir erinnern daran, daß diese Funktion in den Winkelräumen  $W_\nu: \left| \arg z - \frac{\nu\pi}{q} \right| < \frac{\pi}{2q}$  je einen *asymptotischen* oder *Zielwert* hat, und zwar sind die den geraden Werten  $\nu = 2\mu$  entsprechenden Zielwerte  $a_\mu (\mu = 1, \dots, q)$  sämtlich untereinander verschieden und endlich, während  $w(z)$  in allen Winkeln  $W_{2\mu-1} (\mu = 1, \dots, q)$  gegen den Wert  $a_{q+1} = \infty$  strebt. Diese  $q+1$  Zielwerte  $a_1, \dots, a_{q+1}$  sind zugleich defekte Werte; man berechnet unmittelbar mit Hilfe der asymptotischen Entwicklungen von VI, § 2 die Beträge der entsprechenden Defekte auf

$$\delta(a_1) = \dots = \delta(a_q) = \frac{1}{q}, \quad \delta(a_{q+1}) = 1,$$

so daß also tatsächlich  $\sum \delta(a) = 2$  wird.

## 220. Die Defektrelation führt zu folgendem

**Problem.** *Jedem Punkt  $a_\nu$  einer gegebenen Punktfolge  $a_1, \dots, a_\nu, \dots$  sei eine Zahl  $\delta_\nu$  des Intervalls  $0 < \delta_\nu \leq 1$  zugeordnet, so daß  $\sum \delta_\nu = 2$  wird. Es gilt, eine meromorphe Funktion zu konstruieren, welche die Werte  $a_\nu$  als defekte Werte hat mit*

$$\delta(a_\nu) = \delta_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Im nächstfolgenden Abschnitt werden wir eine wohlabgegrenzte Klasse von meromorphen Funktionen untersuchen, welche das Problem vollständig unter der einschränkenden Bedingung löst, daß die Anzahl der Werte  $a_\nu$  endlich ist und daß die vorgegebenen Defekte *rationale* Zahlen sind.

Sucht man nach Funktionen, die den größtmöglichen totalen Defekt 2 besitzen, so muß man darauf achten, daß das von den mehrfachen Stellen herrührende Glied  $N_1(r)$  im Verhältnis zur Charakteristik



$T(r)$  für  $r \rightarrow \infty$  verschwindend klein werden muß, denn sonst sinkt gemäß (10) der Gesamtdefekt sicher unter jene Grenze. Man wird also Beispiele dieser Art unter denjenigen Funktionen zu suchen haben, welche nur wenig mehrfache Stellen haben oder, im extremen Fall, ganz ohne solche Stellen sind. Zu dieser Funktionenklasse gehört die ganze Funktion (14), deren Ableitung ja verschieden von Null ist, und allgemeiner auch die oben erwähnten meromorphen Funktionen mit endlich vielen rationalwertigen Defekten.

221. Man wird sich nun fragen, ob eine meromorphe Funktion ohne mehrfache Stellen andererseits immer den maximalen Gesamtdefekt 2 aufweist. In der Tat liegt aus verschiedenen Gründen die Vermutung nahe, daß diejenige Beziehung (II), welche wir als den zweiten Hauptsatz bezeichnen haben, in normalen Fällen in eine *Gleichheit* übergeht, sofern man sämtliche Werte  $a_1, a_2, \dots$  in Betracht zieht, die defekt sind. Dann würde sich im Falle  $N_1 = 0$  für den totalen Defekt tatsächlich der Wert 2 ergeben.

Andererseits ist es wichtig zu bemerken, daß Ausnahmen von dieser Regel vorkommen können. Eine solche ist z. B. die ganze Funktion

$$\int_0^z e^t dt, \quad (15)$$

welche den PICARDSchen Ausnahmewert  $\infty$  vom Defekt  $\delta(\infty) = 1$  und überdies unendlich viele endliche Zielwerte hat, die jedoch sämtlich den Defekt Null haben, so daß der totale Defekt sich auf 1 reduziert. Diese Erniedrigung des Gesamtdefekts ist in diesem Beispiel eine Folge davon, daß die Annäherung der Funktion an die endlichen Zielwerte asymptotisch mit gleicher Geschwindigkeit erfolgt: wegen dieser Symmetrie müssen diese Werte sämtlich *gleiche* Defekte erhalten und da ihre Anzahl unendlich ist, während der Gesamtdefekt beschränkt ( $\leq 2$ ) ist, so müssen diese Defekte sämtlich verschwinden. Hier ist es also die Verteilung des gesamten Defekts auf die einzelnen Werte  $a_v$ , welche einen Teil desselben zum Verschwinden bringt. Würde man den Gesamtdefekt durch eine andere Technik bestimmen, z. B. so, daß man in der Summe

$$\frac{1}{T(r)} \sum_1^q m(r, a_v)$$

$q$  gleich einer passenden Funktion von  $r$  setzen würde, und dann  $r$  ins Unendliche wachsen ließe, so würde man für diesen „Gesamtdefekt“ tatsächlich den Wert 2 finden<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Der Leser wird aufgefordert, obiges, in mancher Beziehung lehrreiche Beispiel näher zu untersuchen; vgl. hierzu ULLRICH [I]. Es sei noch bemerkt, daß wegen des Zusammenhanges zwischen einerseits der Nullschmiegun, bzw. Unendlichkeitsschmiegun der Ableitung  $w'$ , andererseits der Schmiegun von  $w$  an die

222. Für alle bisher bekannten Beispiele gilt, daß ein defekter Wert gleichzeitig *Zielwert* der betreffenden Funktion ist. Dies scheint auch in der Natur der Sache zu liegen. Daß ein Wert  $a$  defekt ist, bedeutet ja, daß die  $a$ -Stellen der Funktion relativ spärlich sind oder, was mit Rücksicht auf den ersten Hauptsatz dasselbe bedeutet, daß die Schmiegun g der Funktion gegen diesen Wert relativ stark ist. Auf dem Kreis  $|z|=r$  gibt es somit für jedes hinreichend große  $r$  gewisse Teilbogen, auf denen  $w(z)$  sehr wenig von  $a$  abweicht; damit  $a$  nun Zielwert von  $w(z)$  sei, müßten sich jene Bogen zu Gebieten vereinigen lassen, die keine getrennten endlichen „Inseln“ bilden, sondern sich bis an die wesentliche Singularität  $z=\infty$  erstrecken.

Träfe die Vermutung, *ein defekter Wert ist Zielwert*, zu, dann würden sich für gewisse Klassen meromorpher Funktionen endlicher Ordnung interessante Folgerungen über die Anzahl der defekten Werte als Funktion der Ordnung ergeben. Für die Anzahl der Zielwerte walten nämlich in dieser Hinsicht gewisse Gesetzmäßigkeiten, die in Abschnitt XI eingehender besprochen werden sollen (Satz von DENJOY-CARLEMAN-AHLFORS).

Es ist wichtig zu bemerken, daß umgekehrt ein Zielwert nicht notwendigerweise defekt ist. Das Vorhandensein eines Zielweges, auf dem die Funktion  $w(z)$  für  $z \rightarrow \infty$  einem Grenzwert  $a$  zustrebt, hat allerdings zur Folge, daß auf jeder hinreichend großen Kreislinie  $|z|=r$  ein Punkt, und daher ein umgebender Bogen  $B_r$  liegt, wo sich  $w(z)$  nur wenig vom Werte  $a$  unterscheidet, und wo also die Größe  $\log \left| \frac{1}{w-a} \right|$  relativ groß wird. Es kann indes vorkommen, daß die Annäherung an den Wert  $a$  nicht hinreichend rasch und der Bogen  $B_r$  nicht hinreichend lang ist, um dem Mittelwert  $m(r, a)$  jenes Pluslogarithmus auf  $|z|=r$  einen der Charakteristik  $T(r)$  proportionalen Betrag zu geben, was erforderlich ist um den Wert  $a$  defekt zu machen. Diese Erscheinung wurde bereits bei der Funktion (15) beobachtet. Entsprechendes kann auch bei Funktionen mit endlich vielen Zielwerten vorkommen. So hat beispielsweise die ganze Funktion

$$w = \int_0^z \frac{\sin t^q}{t^q} dt \quad (16)$$

der Ordnung  $q$  ( $q$  ganz und  $>0$ )  $2q$  endliche Zielwerte

$$e^{\frac{v\pi i}{q}} \int_0^\infty \frac{\sin r^q}{r^q} dr \quad (v=1, \dots, 2q) \quad (16')$$

Ausnahmewerte der letzteren Funktion, die wir in IX, § 1 erörtert haben, die Vermutung nahelegt, daß die Größe  $\liminf \frac{1}{T} \left( m(r, w') + m\left(r, \frac{1}{w'}\right) \right)$  als gutes Maß für den Gesamtdefekt dienen könnte.

und überdies noch den Zielwert  $\infty$ . Die Konvergenz von  $w$  gegen jene Werte ist verhältnismäßig schwach und erfolgt nur in einem schmalen Streifen um die Halbstrahlen  $\arg z = \frac{\nu\pi}{q}$  ( $\nu = 1, \dots, 2q$ ). Dementsprechend verschwinden die Defekte der Werte (16'). Dagegen strebt  $w$  auf allen Halbstrahlen  $\arg z = \varphi \pm \frac{\nu\pi}{q}$  relativ schnell gegen Unendlich, und es wird für diesen Wert, der ein PICARDScher Ausnahmewert von  $w$  ist,  $\delta(\infty) = 1$ . Daß hier der Gesamtdefekt nicht das Maximum 2 erreicht, findet seine Erklärung darin, daß das von den mehrfachen Stellen herführende Glied  $N_1(r)$  einen Betrag  $\sim T(r)$  erreicht, so daß der Quotient  $\frac{N_1}{T}$  die Summe links in (10) bis auf den maximalen Betrag 2 erhöht.

**223.** Wie verhält es sich mit der Defektrelation *im hyperbolischen Fall*, wo also die gegebene Funktion  $w$  nur im *Einheitskreis*  $|z| < 1$  meromorph ist? Unter dieser Voraussetzung wird die Grundbeziehung (10), wo der Grenzübergang  $r \rightarrow 1$  statt  $r \rightarrow \infty$  vorzunehmen ist, nur dann als eine Folgerung des Hauptsatzes erhalten, wenn die charakteristische Funktion  $T(r)$  für  $r \rightarrow 1$  schneller als das Restglied  $S(r)$  ins Unendliche wächst, oder genauer ausgedrückt, für

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\log \frac{1}{1-r}}{T(r)} = 0. \quad (17)$$

Falls die Charakteristik  $T(r)$  einer für  $|z| < 1$  meromorphen Funktion  $w(z)$  für  $r \rightarrow 1$  so schnell ins Unendliche wächst, daß die Beziehung (17) besteht, so ist der totale Defekt  $\sum \delta(a)$  höchstens gleich zwei.

In der Definition (11) des Defekts hat man selbstverständlich den Grenzübergang  $r \rightarrow \infty$  durch  $r \rightarrow 1$  zu ersetzen.

Wenn die *untere* Grenze für  $r = 1$

$$\lambda = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} \quad (18)$$

nicht mehr unendlich ist, so liefert der Hauptsatz für den totalen Defekt die obere Schranke

$$\sum \delta(a) \leq 2 + \frac{1}{\lambda}, \quad (19)$$

welche für  $\lambda > 0$  endlich ist. Auch dieses Ergebnis läßt sich nicht verschärfen. In der Tat läßt sich zeigen, daß die automorphe Funktion  $w(z; a_1, \dots, a_q)$ , welche den Einheitskreis auf die universelle Überlagerungsfläche der in  $w = a_1, \dots, a_q$  punktierten Ebene abbildet, für  $q \geq 3$  der Beziehung (19) genügt mit  $\lambda = \frac{1}{q-2}$ : andererseits sind jetzt  $a_1, \dots, a_q$  PICARDSche Ausnahmewerte vom Defekt 1. Der totale Defekt wird gleich  $q = 2 + \frac{1}{\lambda}$ , und erreicht somit den größten Betrag, der bei

dem gegebenen Wert von  $\lambda$  nach der verallgemeinerten Defektrelation (19) überhaupt möglich ist (vgl. R. NEVANLINNA [5]).

Wenn der totale Defekt *unendlich* ist, so genügt die Charakteristik  $T(r)$  nach obigem der Beziehung

$$\lambda = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = 0.$$

Dies ist speziell immer dann der Fall, wenn die Menge der defekten Werte *nichtabzählbar* ist.

**224.** Es liegt nun nahe die Frage zu stellen: *Für wie mächtige Mengen von Werten  $a$  kann der Defekt  $\delta(a)$  überhaupt positiv sein, ohne daß die Charakteristik beschränkt wird?* Dieses Problem wurde vollständig von O. FROSTMAN gelöst<sup>1</sup>. Als eine Verschärfung eines früheren Satzes von AHLFORS [3] bewies er folgenden Satz, der wieder einmal die Bedeutung der Mengen vom harmonischen Maß Null hervorhebt:

*Die Menge  $D$  der defekten Werte einer im Einheitskreise nichtbeschränktartigen meromorphen Funktion hat das innere harmonische Maß Null, d. h. jede abgeschlossene Teilmenge von  $D$  ist eine harmonische Nullmenge.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Integralform (18) (VI, § 4) des ersten Hauptsatzes. Sei nämlich  $E$  eine beliebige abgeschlossene Punktmenge der  $w$ -Ebene, deren Punkte  $a$  für eine gegebene, im Einheitskreis  $|z| < 1$  nichtbeschränktartige Funktion  $w(z)$  defekte Werte darstellen. Angenommen, daß  $E$  positive Kapazität hat, sei  $\mu(a)$  die Gleichgewichtsverteilung der positiven Einheitsmasse über  $E$ , welche das ROBINSCHE Problem löst. Der entsprechende logarithmische Potential  $u(w)$  hat eine *endliche* obere Schranke und die Beziehung (18) (VI, § 4) ergibt nach Division durch  $T(r)$  für  $r \rightarrow 1$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{T(r)} \int_E N(r, a) d\mu(a) = 1.$$

Hier ist die Belegung  $\mu$  für jede im BORELSCHEN Sinne meßbare Teilmenge von  $E$  als eine vollständig additive Funktion erklärt. Der Integrand  $\frac{N}{T}$  ist eine stetige Funktion von  $a$  und seine obere Grenze für  $r = 1$  daher eine im BORELSCHEN Sinne meßbare Funktion. Der Grenzübergang kann also unter dem Integral ausgeführt werden und es wird

$$\int_E \lim_{r \rightarrow 1} \frac{N(r, a)}{T(r)} d\mu(a) = 1$$

oder also

$$\int_E \delta(a) d\mu = 0.$$

<sup>1</sup> O. FROSTMAN [2].

Sei nun  $r_1 = 1 > r_2 > r_3 > \dots$ ,  $r_\nu > 0$ ,  $r_\nu \rightarrow 0$  für  $\nu \rightarrow \infty$ . Die Menge  $E_\nu$  der Werte  $a$  in  $E$ , für welche  $r_{\nu+1} < \delta(a) \leq r_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) ist im BORELSCHEN Sinne meßbar. Es ist für jedes  $\nu$

$$r_{\nu+1} \int_{E_\nu} d\mu(a) \leq \int_{E_\nu} \delta(a) d\mu(a) \leq \int_E \delta(a) d\mu(a) = 0$$

und wegen der Additivität von  $\mu(a)$ , auch

$$\int_E d\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{E_\nu} d\mu = 0,$$

im Widerspruch damit, daß die Gesamtmasse gleich 1 ist. Die Menge  $E$  ist folglich von der Kapazität Null, was zu beweisen war.

**225.** Sei  $h(r)$  eine monotone Maßfunktion von der in V, § 6 betrachteten Art. Angenommen, daß das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{h(r)}{r} dr \quad (20)$$

konvergent ist, gilt (Nr. 123), daß jede Menge  $E$  vom harmonischen Maß Null auch ein verschwindendes  $h$ -Maß hat. Das obige Resultat enthält somit nachstehenden älteren, von AHLFORS [3] angegebenen Satz als Folgesatz:

*Die defekten Werte einer nichtbeschränktartigen Funktion sind von verschwindendem  $h$ -Maß für jede Maßfunktion  $h$  derart, daß das Integral (20) endlich ist.*

Der Satz von AHLFORS-FROSTMAN läßt sich indes wesentlich verschärfen. Hierzu muß die in der Fundamentalbeziehung (17) (VI, § 4) enthaltene Aussage nur genauer verwertet werden. Die Formel (17') (VI, § 4) gibt in Verbindung mit (17)

$$T(r) = \int_E N(r, a) d\mu(a) - u(w(0)) + \langle \gamma + \log 6 \rangle. \quad (21)$$

Hier bedeutet  $E$  eine im Kreise  $|w| \leq 1$  befindliche abgeschlossene Punktmenge,  $\gamma$  die ROBINSCHES Konstante desselben<sup>1</sup>,  $\mu(a)$  die entsprechende ROBINSCHES Gleichgewichtsbelegung von der Gesamtmasse 1 und  $u(w(0))$  den Wert des entsprechenden logarithmischen Potentials

$$u(w(0)) = \int_E \log \left| \frac{1}{w(0) - a} \right| d\mu \geq \log \frac{1}{|w(0)| + 1} \quad (22)$$

in demjenigen Punkt  $w = w(0) \neq \infty$ <sup>2</sup>, auf welchen der Anfangswert der gegebenen, für  $|z| < R (\leq \infty)$  meromorphen Funktion  $w(z)$  fällt.

<sup>1</sup> Zur Abkürzung sprechen wir von der ROBINSCHES Konstante einer abgeschlossenen Punktmenge; vollständiger heißt dies: ROBINSCHES Konstante desjenigen von der Punktmenge begrenzten Gebietes, welches den unendlich fernen Punkt enthält.

<sup>2</sup> Die Annahme  $w(0) \neq \infty$  bedeutet keine wesentliche Einschränkung.

Wir wählen nun eine beliebige für  $0 < r < R$  monoton wachsende Funktion  $\lambda(r)$  ( $0 < \lambda(r) < T(r)$ ), so daß die Größe  $T(r) - \lambda(r)$  mit  $r$  monoton und unbeschränkt zunimmt, und bezeichnen durch  $c_r$  diejenige, wegen der Stetigkeit von  $N(r, a)$  in bezug auf  $a$ , abgeschlossene Punktmenge  $(a)$  des Kreises  $|w| \leq \frac{1}{2}$ , für welche  $N(r, a) \leq T(r) - \lambda(r)$ . Die Anwendung von (21) ergibt dann

$$\lambda(r) + u(w(0)) = \langle \gamma_r + \log 6 \rangle$$

oder mit Rücksicht auf (22)

$$\gamma_r > \lambda(r) - \log(6(|w(0)| + 1)),$$

wo  $\gamma_r$  die ROBINSche Konstante von  $c_r$  ist. Sobald  $r$  eine gewisse Grenze  $r_0$  überschritten hat, wird  $\lambda(r)$  größer als  $2 \log(6(|w(0)| + 1))$  und somit

$$\gamma_r > \frac{\lambda(r)}{2} \quad \text{für } r > r_0.$$

Sei nun  $r_0 < r_1 < r_2 < \dots$  eine unendliche Folge von Werten, die gegen den Grenzwert  $R$  streben und  $E_n$  ( $n \geq 1$ ) die Vereinigungsmenge der Mengen  $e_{r_v}$  ( $v = n, n+1, \dots$ ). Wenn  $\gamma_n$  die ROBINSche Konstante von  $E_n$  ist<sup>1</sup>, so wird nach dem Hilfssatz 2 von V, § 2

$$\frac{1}{\gamma_n} < \sum_{v=n}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{r_v}} < 2 \sum_{v=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda(r_v)}. \quad (23)$$

Wird die Folge  $r_v$  so gewählt, daß die rechtstehende Reihe konvergent ist, so strebt die Kapazität von  $E_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null.

Für das Bestehen dieses Resultats ist es nicht wesentlich, daß die betrachteten Werte  $(a)$  gerade im Kreise  $|w| \leq \frac{1}{2}$  liegen. Dasselbe Ergebnis gilt allgemeiner, wenn jener Kreis durch einen beliebigen abgeschlossenen Bereich  $B$  ersetzt wird, der die Vollebene nicht umfaßt. Dieser allgemeine Fall läßt sich nämlich durch eine vorbereitende lineare Transformation der  $w$ -Ebene auf jenen Spezialfall zurückführen.

Man lege jetzt, nach beliebiger Wahl des Anfangswertes  $r_0$ , die Wertfolge  $r_v$  durch die Bedingung

$$T(r_{v+1}) = T(r_v) + \lambda(r_{v+1}) \quad (v = 0, 1, \dots) \quad (24)$$

fest, was möglich ist, da  $T - \lambda$  eine unbeschränkt wachsende Funktion von  $r$  ist. Bezeichnet dann  $B$  einen beliebigen Bereich der  $w$ -Ebene, so gilt nach obigem die Beziehung  $N(r, a) > T(r) - \lambda(r)$  für jedes  $r = r_v$  ( $v = n, n+1, \dots$ ) und jedes  $a$  auf  $B$ , außer für eine Wertmenge  $E_n$ , deren ROBINSche Konstante für  $n \rightarrow \infty$  ins Unendliche wächst,

<sup>1</sup> Wenn  $E_n$  nicht abgeschlossen ist, so sei  $\gamma_n$  die obere Grenze der ROBINSchen Konstanten aller abgeschlossenen Teilmengen von  $E_n$ . Statt von der Kapazität von  $E_n$ , kann man dann von der inneren Kapazität  $e^{-\gamma_n}$  dieser Menge reden.

sofern nur die Reihe (23) konvergent ist. Sei nun  $a$  ein Wert außerhalb  $E_n$  und  $r_v < r < r_{v+1}$  ( $v \geq n$ ). Dann wird

$$N(r, a) \geq N(r_v) > T(r_v) - \lambda(r_v) = T(r) - \lambda(r) + T(r_v) - \lambda(r_v) \\ - (T(r) - \lambda(r)) \geq T(r) - \lambda(r) + T(r_v) - \lambda(r_v) - (T(r_{v+1}) - \lambda(r_{v+1}))$$

oder, wegen (24),

$$N(r, a) \geq T(r) - \lambda(r) - \lambda(r_v) > T(r) - 2\lambda(r).$$

Für jeden Wert  $a$  des Bereiches  $B$  gilt somit, sobald  $r > r_n$  ist,

$$N(r, a) \geq T(r) - 2\lambda(r), \quad (25)$$

mit Ausnahme der Punkte  $a$  der Menge  $E_n$ , deren Kapazität der Bedingung (23) genügt.

Unter Beachtung der Beziehung (24) findet man

$$\frac{1}{\lambda(r_v)} = \frac{1}{\lambda(r_v)} \frac{T(r_v) - T(r_{v-1})}{\lambda(r_v)} = \frac{1}{(\lambda(r_v))^2} \int_{r=r_{v-1}}^{r_v} dT(r) \leq \int_{r=r_{v-1}}^{r_v} \frac{dT(r)}{(\lambda(r))^2}$$

und

$$\sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(r_v)} \leq \int_{r=r_n}^{\infty} \frac{dT(r)}{(\lambda(r))^2}.$$

Die Beziehung (25) besteht also für jedes  $r > r_n$  und für jeden Wert  $a$  von  $B$ , mit Ausnahme einer Wertmenge derart, daß der reziproke Wert der entsprechenden ROBINSchen Konstante  $\gamma_n$  höchstens gleich dem doppelten Betrag des rechtsstehenden Integrals vermehrt um  $\frac{2}{\lambda(r_n)}$  ist.

Sei nun  $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$  und  $\lambda(r) = (T(r))^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$ . Dann wird

$$\frac{1}{2\gamma_n} < \frac{1}{(T(r_n))^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} + \int_{r_n}^{\infty} \frac{dT}{T^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{(T(r_n))^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{(T(r_n))^\varepsilon}.$$

Sobald  $n$  eine gewisse Grenze überschritten hat, wird dieser Ausdruck kleiner als  $\frac{2}{\varepsilon} (T(r_n))^{-\varepsilon}$ . Beachtet man noch, daß der Bereich  $B$  beliebig gewählt werden kann, so gelangt man schließlich zu folgendem

**Satz.** Sei  $w(z)$  eine für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphe Funktion, die nicht beschränktartig ist. Dann gilt für ein gegebenes  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ) und jeden hinreichend großen Wert  $r_0$  des Intervalls  $(0, R)$  die Beziehung

$$N(r, a) \geq T(r) - 2(T(r))^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \quad (26)$$

für  $r_0 \leq r < R$ , mit möglicher Ausnahme einer Menge  $E_0$  von Werten  $a$ ,

deren Kapazität höchstens gleich

$$e^{-\frac{\varepsilon T(r_0)^\varepsilon}{4}} \quad (27)$$

ist.

**226.** Aus diesem Satz ergibt sich unmittelbar eine wesentliche Verschärfung des obigen Ergebnisses, wonach die Größe

$$\lim_{r=R} \frac{N(r, a)}{T(r)} = 1 - \delta(a)$$

für jedes  $a$ , außer für eine Menge der Kapazität Null, gleich 1 ist, es sei denn  $T(r)$  für  $r \rightarrow R$  beschränkt. Es zeigt sich nämlich, daß dasselbe Resultat besteht, wenn  $\overline{\lim}$  durch  $\underline{\lim}$  ersetzt wird, so daß also, für eine nichtbeschränktartige Funktion

$$\lim_{r=R} \frac{N(r, a)}{T(r)} = 1 \quad (28)$$

ist, außer höchstens für eine Wertmenge ( $a$ ) von verschwindender „innerer“ Kapazität. Sei nämlich  $E$  die Menge der Werte  $a$ , für welche (28) nicht besteht. Wenn  $\varepsilon$  im Intervall  $(0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$  beliebig festgelegt wird, so wird jeder Punkt  $a$  von  $E$  der im obigen Satz erklärten Menge  $E_0$  angehören, wie immer der Wert  $r_0$  im Intervall  $0 < r_0 < R$  auch gewählt wird. Die Kapazität einer vorgegebenen abgeschlossenen Teilmenge von  $E$  ist also höchstens gleich der Größe (27) und daher notwendig gleich Null, da jene Größe für  $r_0 \rightarrow R$  verschwindet. Die Ausnahmemenge  $E$  ist folglich, wie behauptet wurde, von der „inneren“ Kapazität Null.

In Verbindung mit dem ersten Hauptsatz  $m(r, a) + N(r, a) \sim T(r)$  ergibt sich aus (27) das schärfere Ergebnis

$$m(r, a) = O\left((T(r))^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\right) \quad (29)$$

für jedes  $a$  höchstens mit Ausnahme einer Wertmenge von der inneren Kapazität Null.

Da jede Menge von verschwindender Kapazität das  $h$ -Maß Null hat, sobald das vermittels der Maßfunktion  $h$  gebildete Integral

$$\int_0^r \frac{h(t)}{t} dt$$

endlich ist, so folgt hieraus, daß die in den zuletzt gefundenen Sätzen auftretenden Ausnahmemengen  $E$  in jeder Maßbestimmung von der erwähnten Art vom  $h$ -Maß Null sind<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> In dieser Form sind die Sätze (25) und (29) von L. AHLFORS [3] aufgestellt worden als eine Verallgemeinerung gewisser älterer Sätze in derselben Richtung von G. VALIRON [5], J. E. LITTLEWOOD [1] und vom Verfasser [5].



### § 3. Sätze über verzweigte Werte.

227. Wir haben bis jetzt die von den *mehrfachen Wurzeln* der Gleichung

$$w(z) = a \quad (30)$$

herrührende, im zweiten Hauptsatz (II) enthaltene Größe  $N_1(r)$  vernachlässigt. Es sollen nun einige Folgesätze aus (II) zusammengestellt werden, die durch das Vorhandensein jenes Ausdrucks bedingt sind. Zu diesem Zwecke setze man, für ein gegebenes  $a$ ,  $n_1(r, a)$  gleich der Anzahl der mehrfachen Wurzeln von (30) im Kreise  $|z| \leq r$ , wobei eine  $k$ -fache Wurzel nur  $(k-1)$ -mal mitgezählt werden soll. Setzt man dann

$$N_1(r, a) = \int_0^r \frac{n_1(t, a)}{t} dt + n_1(0, a) \log r,$$

so gilt

$$N_1(r) = \sum_a N_1(r, a),$$

wo man über sämtliche Werte zu summieren hat. Da die meromorphe Funktion  $w(z)$  im Kreise  $|z| \leq r < R (\leq \infty)$  nur endlich viele Werte mehrfach annehmen kann, so enthält jene Summe auch nur endlich viele nichtverschwindende Glieder. Für  $r \rightarrow R$  gilt

$$\lim_{r \rightarrow R} \frac{N_1(r)}{T(r)} \geq \sum_a \lim_{r \rightarrow R} \frac{N_1(r, a)}{T(r)},$$

wo die Größe

$$\vartheta(a) = \lim_{r \rightarrow R} \frac{N_1(r, a)}{T(r)}$$

wegen  $N_1(r, a) \leq N(r, a)$  sicher im Intervall  $0 \leq \vartheta(a) \leq 1$  liegt, und verschwindet außer höchstens für diejenigen abzählbar vielen Werte, welche die Funktion  $w(z)$  mehrfach annimmt. Da solchen Werten  $a$  stets Windungspunkte endlicher Ordnung derjenigen RIEMANNschen Fläche  $F$  entsprechen, auf welche der Kreis  $|z| < R$  durch die Transformation  $w = w(z)$  abgebildet wird, so soll jeder solche Wert *verzweigt* heißen;  $\vartheta(a)$  wird der *Verzweigungsindex* der Stelle  $a$  genannt.

228. Sei nun  $R = \infty$  und  $w(z)$  nicht konstant, so daß also  $T(r) \rightarrow \infty$  strebt für  $r \rightarrow \infty$ . Nach Division durch  $T(r)$  ergibt sich aus (II) durch den Grenzübergang  $r \rightarrow \infty$

$$\sum_{(a)} \delta(a) + \sum_{(a)} \vartheta(a) \leq 2, \quad (31)$$

und daher, neben der Defektrelation  $\sum \delta(a) \leq 2$ , der analoge Satz über die Verzweigungsindizes<sup>1</sup>.

*Der totale Verzweigungsindex ist höchstens gleich 2:*

$$\sum \vartheta(a) \leq 2. \quad (32)$$

<sup>1</sup> Diese Sätze können als Erweiterungen gewisser älterer Sätze von C. CARATHÉODORY [1] angesehen werden.

Dieser Satz beschränkt in bemerkenswerter Weise das Vorkommen der mehrfachen Stellen. Der Betrag des Index  $\vartheta(a)$  gibt ein Maß dafür an, wie groß die relative Häufigkeit der mehrfachen Wurzeln von  $w = a$  ist. Der Index wächst mit dieser relativen Häufigkeit und erreicht sein Maximum 1, falls die überwiegende Mehrzahl der Wurzeln jener Gleichung mehrfach ist und die Vielfachheit der Wurzeln in der Nähe von  $z = \infty$  über alle Grenzen wächst, vorausgesetzt, daß der Wert  $a$  ein nichtdefekter Wert ist, so daß also  $N(r, a)$  asymptotisch gleich  $T(r)$  ist. Man bemerke nämlich, daß nicht nur  $\delta(a) \leq 1$ ,  $\vartheta(a) \leq 1$ , sondern auch die Summe

$$\delta(a) + \vartheta(a) \leq 1$$

ist, wie aus der Beziehung

$$1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, a) + N(r, a)}{T(r)} \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, a) + N_1(r, a)}{T(r)} \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m}{T} + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1}{T}$$

erhellt. Ist also  $\delta(a) > 0$ , so muß notwendig  $\vartheta(a) < 1$  sein.

**229.** Wie die Defektrelation ist auch der Satz über den Verzweigungsindex genau: die obere Schranke 2 in (32) läßt sich durch keine kleinere Zahl ersetzen. Das einfachste Beispiel, wo die Beziehung in eine Gleichung übergeht, stellen die *doppeltperiodischen Funktionen* dar. Hier sollen nur gewisse besonders interessante Spezialfälle hervorgehoben werden.

Das Integral

$$z(w) = \int_0^{\infty} (t - \alpha)^{m-1} (t - \beta)^{n-1} (t - \gamma)^{p-1} dt,$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma$  reelle und  $m, n, p$  ganze, positive Zahlen sind, so daß

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1,$$

vermittelt eine konforme Abbildung der oberen  $w$ -Halbebene auf ein Dreieck der  $z$ -Ebene mit den Winkeln  $\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}$ . Die inverse Funktion  $w = w(z)$  ist eine eindeutige, doppelperiodische Funktion von  $z$  (SCHWARZsche Dreiecksfunktion). Man hat drei Fälle zu unterscheiden:

1.  $m = n = p = 3$ . Beachtet man, daß die Funktion  $w(z)$  in jedem Paar von benachbarten Fundamentaldreiecken jeden Wert  $a$  genau einmal annimmt, mit Ausnahme der Eckpunkte, in denen die vorgegebenen Werte  $\alpha, \beta, \gamma$  dreifach angenommen werden, so ergibt sich leicht, daß  $N(r, a) \sim T(r)$  für jedes  $a$ ,  $N_1(r, a) = 0$  für  $a \neq \alpha, \beta, \gamma$  und  $N_1(r, a) \sim \frac{2}{3} T(r)$  für  $a = \alpha, \beta, \gamma$ . Also wird

$$\delta(a) = \vartheta(a) = 0$$

außer für jene drei Werte  $a$ , für diese aber

$$\vartheta(a) = \vartheta(\beta) = \vartheta(\gamma) = \frac{2}{3}.$$

Es ist also, wie behauptet wurde

$$\sum_{(a)} \vartheta(a) = 2.$$

2.  $m=2$ ,  $n=p=4$ . Man findet, wie im Fall 1,  $\delta(a) = \vartheta(a) = 0$ , außer für  $a = \alpha, \beta, \gamma$ . Hier wird  $\vartheta(\alpha) = \frac{1}{2}$ ,  $\vartheta(\beta) = \vartheta(\gamma) = \frac{3}{4}$ , also

$$\sum \vartheta(a) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 2.$$

3.  $m=2$ ,  $n=3$ ,  $p=6$ . Es wird  $\vartheta(a) = 0$  für  $a \neq \alpha, \beta, \gamma$  und  $\vartheta(\alpha) = \frac{1}{2}$ ,  $\vartheta(\beta) = \frac{2}{3}$ ,  $\vartheta(\gamma) = \frac{5}{6}$ , also

$$\sum \vartheta(a) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = 2.$$

Besondere Beachtung verdient noch die doppeltperiodische Grundfunktion  $w(z)$ , die  $p$ -Funktion. Sie nimmt sämtliche Werte  $a$  einfach an, mit Ausnahme von vier Werten  $a = a_1, \dots, a_4$ , für welche die Gleichung  $w = a$  lauter Doppelwurzeln hat. Es wird

$$\sum \vartheta(a) = \sum_{v=1}^4 \vartheta(a_v) = 2.$$

Als Beispiel einer Funktion, welche sowohl defekte Werte wie Werte von positivem Index  $\vartheta$  aufweist, sei  $w = \cos z$  angeführt. In diesem Fall wird  $\delta(a) = 0$  für  $a \neq \infty$ ,  $\delta(\infty) = 1$  und  $\vartheta(a) = 0$ , außer für  $a = \pm 1$ , für diese Werte aber  $\vartheta = \frac{1}{2}$ . Es ist also

$$\sum \delta + \sum \vartheta = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Ähnliches gilt für sämtliche einfachperiodischen Funktionen; einzig die Exponentialfunktion nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als der totale Index  $\sum \vartheta$  verschwindet, wogegen  $\sum \delta = 2$  ist.

**230.** Die oben aufgezählten periodischen Funktionen zeichnen sich durch die Eigenschaft aus, daß diejenigen Werte  $a$ , welche die betreffende Funktion überhaupt mehrfach annimmt, *vollständig verzweigte Werte darstellen*. So nennen wir jeden Wert  $a$ , für welchen die Gleichung  $w(z) = a$  keine einfachen Wurzeln hat.

Es gilt nun der bemerkenswerte

**Satz.** Die Anzahl der vollständig verzweigten Werte einer meromorphen Funktion ist höchstens gleich vier.

Zum Beweis müssen wir den zweiten Hauptsatz etwas genauer verwenden, als es durch die Beziehung (31) geschehen ist. Aus Satz (II)

folgt für  $r \rightarrow \infty$ , daß

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{v=1}^q m(r, a_v) + N_1(r)}{T(r)} \leq 2,$$

wo  $a_1, \dots, a_q$  beliebige, untereinander verschiedene Werte bezeichnen. Hier ist

$$N_1(r) \geq \sum_1^q N_1(r, a_v)$$

und es wird also

$$\sum \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, a) + N_1(r, a)}{T(r)} \leq 2. \quad (33)$$

Die Größe

$$\Theta(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, a) + N_1(r, a)}{T(r)} \quad (34)$$

läßt sich einfacher schreiben, wenn man den Ausdruck

$$\bar{N}(r, a) = \int_0^r \frac{n(t, a)}{t} dt + n(0, a) \log r \quad (35)$$

eingührt, wo  $n(r, a) = n(r, a) - n_1(r, a)$  die Anzahl der Wurzeln von  $w = a$  im Kreis  $|z| \leq r$  bezeichnet derart, daß jede Wurzel, ohne Rücksicht auf die Multiplizität, nur einmal mitgezählt wird. Es wird dann  $N(r, a) = N_1(r, a) + \bar{N}(r, a)$  und folglich, wegen  $m + N \sim T$ ,

$$\Theta(a) = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}(r, a)}{T(r)}. \quad (34')$$

Die Beziehung (33) ergibt nun den

**Satz.** Die Größe  $\Theta(a)$ , welche ihrer Definition zufolge im Intervall  $0 \leq \Theta \leq 1$  liegt, verschwindet für alle Werte  $a$ , außer höchstens für eine abzählbare Wertmenge. Es ist ferner

$$\sum \Theta(a) \leq 2. \quad (36)$$

Diese allgemeine Beziehung enthält den Satz (31) als unmittelbaren Folgesatz, denn gemäß (34) ist

$$\Theta(a) \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, a)}{T(r)} + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_1(r, a)}{T(r)} = \delta(a) + \vartheta(a).$$

**231.** Sei nun  $a$  ein vollständig verzweigter Wert der meromorphen Funktion  $w(z)$ . Es ist dann also entweder  $a$  ein PICARDScher Ausnahmewert oder jede Wurzel von  $w(z) = a$  mindestens eine Doppelwurzel. Im ersten Fall ist  $\delta(a) = 1$  und somit auch  $\Theta(a) = 1$ . Im zweiten Fall wird  $n(r, a) \geq 2n(r, a)$  und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}(r, a)}{T(r)} \leq \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, a)}{T(r)} \leq \frac{1}{2},$$

folglich  $\Theta(a) \geq \frac{1}{2}$ .

Für einen vollständigen verzweigten Wert  $a$  wird  $\Theta(a) \geq \frac{1}{2}$ .

Nach (36) kann also die Anzahl der vollständig verzweigten Werte einer meromorphen Funktion höchstens gleich vier sein, was zu beweisen war.

Andererseits gibt es Funktionen mit genau vier vollständig verzweigten Werten. Eine solche ist die WEIERSTRASSsche  $p$ -Funktion.

**232.** Der Satz über die vollständig verzweigten Werte gestattet eine interessante Anwendung auf die Uniformisierung algebraischer Kurven.

Wenn das Geschlecht einer algebraischen Kurve  $f(x, y) = 0$  gleich Null ist, so läßt sie bekanntlich eine Parameterdarstellung

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (37)$$

zu, wo  $x(t)$  und  $y(t)$  rationale Funktionen von  $t$  sind. Wenn das Geschlecht gleich Eins ist, so gelingt die Uniformisierung mit elliptischen Funktionen  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Eine wichtige Ergänzung hierzu gibt der

**Satz von PICARD**<sup>1</sup>. Falls die Kurve  $f(x, y) = 0$  vom Geschlecht  $p > 1$  ist, so gibt es kein Paar von meromorphen Funktionen  $x(t)$ ,  $y(t)$ , so daß  $f(x(t), y(t)) = 0$ .

Wie PICARD (l. c.) bemerkt hat, genügt es, den Satz für den Fall einer hyperelliptischen Kurve

$$y^2 = (x - a_1) \dots (x - a_q) \quad (q = 2p + 1 \geq 5) \quad (38)$$

vom Geschlecht  $p (\geq 2)$  zu beweisen. Daß die Uniformisierung einer solchen Kurve mit Hilfe von zwei meromorphen Funktionen  $x(t)$ ,  $y(t)$  unmöglich ist, ist aber eine unmittelbare Folgerung aus dem obigen Satz über die vollständig verzweigten Werte. Angenommen, daß die Uniformisierung mit einem solchen Funktionspaar gelingen würde, so folgt aus (38) mit Rücksicht auf die Eindeutigkeit der Funktion  $y(t)$ , daß die meromorphe Funktion  $x(t)$  die  $q \geq 5$  Werte  $a_1, \dots, a_q$  als vollständig verzweigte Werte haben müßte. Dies steht jedoch im Widerspruch mit dem erwähnten Satz<sup>2</sup>.

Eine nähere Analyse der geometrischen Bedeutung der Größe  $\theta$ , welche bei den obigen Anwendungen eine wichtige Rolle gespielt hat, soll in den folgenden Abschnitten vorgenommen werden.

## XI. Die RIEMANNsche Fläche einer einwertigen Funktion.

### § 1. Über die Singularitäten einwertiger Funktionen.

**233.** Bisher haben wir die Theorie der für  $|z| < R \leq \infty$  eindeutigen Funktionen  $w = w(z)$  untersucht, ohne uns im allgemeinen um das Bild

<sup>1</sup> E. PICARD [2].

<sup>2</sup> Dieser zuerst von A. BLOCH [2] angegebene Beweis weicht von dem ursprünglichen PICARDSchen Beweis völlig ab. Ein anderer, direkt auf jede Kurve vom Geschlecht  $p > 1$  anwendbarer, auf den Hilfsmitteln der modernen Wertverteilungslehre fußender Nachweis ist nachher von H. SELBERG [2] gegeben worden.

zu kümmern, welches man vermöge der gegebenen Zuordnung  $z \rightarrow w$  in der Ebene der Veränderlichen  $w$  erhält. Im ersten Abschnitt haben wir allerdings schon die RIEMANNSCHEN Flächen eingehend untersucht, welche zu den speziellen automorphen Abbildungsfunktionen  $w(z; a_1, \dots, a_q)$  gehören (universelle Überlagerungsflächen der an  $q$  Stellen punktierten Ebene); und wir haben im Laufe unserer Darstellung wiederholt vom allgemeineren Begriff der universellen Überlagerungsfläche eines beliebigen, in der  $w$ -Ebene gelegenen schlichten Gebietes Gebrauch gemacht. Auch diese Flächen sind insofern noch als sehr spezielle zu betrachten, als auch die ihnen entsprechenden Abbildungsfunktionen automorph sind. Nun liefern gerade die automorphen Funktionen und die ihnen zugeordneten *regulär verzweigten* RIEMANNSCHEN Flächen recht oft die interessantesten Beispiele für die allgemeine Wertverteilungslehre. Dessen ungeachtet wird es nützlich sein, einige allgemeine Eigenschaften der Flächen kennen zu lernen, die vermittelt einer *beliebigen* eindeutigen, für  $|z| < R \leq \infty$  meromorphen Funktion als Abbild jenes Kreises entstehen. Auf dieser einfach zusammenhängenden Fläche ist die Umkehrfunktion  $z$  von  $w$  eindeutig und einwertig, und es wird sich also um die Untersuchung einer durch diese Eigenschaften charakterisierten analytischen Funktion handeln.

**234.** In einem Punkt  $w_0$  der  $w$ -Ebene sei ein reguläres analytisches Funktionselement  $E(w, w_0)$  gegeben. Wir bezeichnen durch  $z(w)$  diejenige analytische Funktion, welche entsteht, wenn man das gegebene Element (mit rationalem Charakter) unbeschränkt fortsetzt. Speziell wird im folgenden angenommen:

1. Die analytische Funktion  $z(w)$  ist einwertig, d. h. den Mittelpunkten von zwei verschiedenen Funktionselementen  $z(w)$  sind stets zwei verschiedene Funktionswerte  $z$  zugeordnet.

2. Das (wegen der Einwertigkeit) schlichte Bildgebiet  $G_z$  in der  $z$ -Ebene ist einfach zusammenhängend.

Die Umkehrfunktion  $w(z)$  ist unter diesen Voraussetzungen in  $G_z$  eindeutig und meromorph. Was das Gebiet  $G_z$  betrifft, hat man drei Fälle zu unterscheiden (vgl. I, § 2).

1.  $G_z$  ist die Vollebene (elliptischer Fall).  $w(z)$  hat keine wesentlichen Singularitäten und reduziert sich auf eine rationale Funktion.

2.  $G_z$  ist die punktierte Ebene, z. B.  $z \neq \infty$  (parabolischer Fall). Es ist  $w(z)$  dann eine in der ganzen endlichen Ebene meromorphe, transzendente Funktion.

3.  $G_z$  ist von einem Kontinuum  $\Gamma_z$  begrenzt (hyperbolischer Fall). Mit Rücksicht auf den RIEMANNSCHEN Abbildungssatz bedeutet es dann keine Einschränkung anzunehmen, daß  $G_z$  mit dem Einheitskreis  $|z| < 1$  zusammenfällt. Die Kreislinie  $|z| = 1$  bildet dann die natürliche Grenze der Funktion  $w(z)$ .

**235.** Wir kommen nun zu der Frage nach den Singularitäten einer einwertigen Funktion und fangen mit dem einfachsten Fall einer *isolierten* kritischen Stelle  $w_0$  an. Sei  $z(w)$  ein Zweig, der sich für  $0 < |w - w_0| \leq \varrho$  (mit rationalem Charakter) unbeschränkt analytisch fortsetzen läßt. Setzt man dann  $\log(w - w_0) = t$ , so wird  $z(w_0 + e^t)$  in der Halbebene  $H_t: \Re t \leq \log \varrho$  unbeschränkt fortsetzbar und wegen des Monodromiesatzes *eindeutig* sein.

Wenn nun der derart erklärte Funktionszweig in  $H_t$  einwertig ist, so vermittelt er eine schlichte Abbildung von  $H_t$  auf ein Gebiet  $H_z$  der  $z$ -Ebene. Der Zweig  $z(w)$  hat dann die kritische Stelle  $w = w_0$  als *logarithmischen Windungspunkt* unendlich hoher Ordnung, in dessen Umgebung sich seine unendlich vielen Bestimmungen untereinander vertauschen. Man sagt,  $z(w)$  definiere ein *logarithmisches Element* der gegebenen Funktion. Wenn  $w$  gegen den Windungspunkt  $w_0$  rückt, so muß  $z(w)$  notwendig gegen die Berandung des Wertgebiets  $G_z$  streben. Im parabolischen Fall gilt also  $z \rightarrow \infty$ , im hyperbolischen Fall wiederum  $|z| \rightarrow 1$ . Ob im letztgenannten Fall  $z$  immer einen wohlbestimmten Punkt der Peripherie  $|z| = 1$  als Grenzlage hat, ist eine Frage, die bis auf weiteres noch nicht entschieden worden ist<sup>1</sup>.

Ist wiederum  $z$  in  $H_t$  nicht einwertig, so existiert ein Wert  $z_0$ , den  $z$  in mehreren Punkten  $t_0, t_1, t_2, \dots$  annimmt. Wegen der Einwertigkeit von  $z(w)$  müssen diese Werte ein und demselben Wert  $w$  entsprechen, und es ist also  $t_v - t_0 = m_v \cdot 2\pi i$ , wo  $m_v$  eine ganze Zahl ist. Wenn nun  $m$  die kleinste der positiven Zahlen  $|m_v|$  ist, so sieht man unmittelbar ein, daß  $z$  in  $H_t$  *periodisch* ist mit der primitiven Periode  $m \cdot 2\pi i$ ; in jedem Periodenstreifen ist  $z$  einwertig. Der gegebene Zweig  $z(w)$  erklärt in diesem Fall ein *algebraisches Funktionselement*, dessen  $m$  verschiedene Bestimmungen sich in der Umgebung des Windungspunktes  $w_0$  der Ordnung  $m - 1$  permutieren. Für  $w \rightarrow w_0$  strebt  $z(w)$  gegen einen inneren Punkt  $z_0$  des Wertgebiets  $G_z$ ;  $z_0$  ist eine  $m$ -fache Stelle der Umkehrfunktion  $w(z)$ . Umgekehrt entspricht stets einer  $m$ -fachen Stelle von  $w(z)$  ein algebraischer Windungspunkt von der Ordnung  $m - 1$  auf der RIEMANNschen Fläche  $F$ .

Für  $m = 1$  ist  $z(w)$  an der Stelle  $w = w_0$  *eindeutig*.

**236.** Es sei nun  $L_w$  ein stetiger Kurvenbogen, der in einem Punkt  $w_0$  der  $w$ -Ebene endet. Wir nehmen auf  $L_w$  einen Punkt  $w_1 \neq w_0$ , fixieren

<sup>1</sup> Aus den Sätzen von VII, § 4 schließt man, daß dies sicher dann der Fall ist, wenn die gegebene RIEMANNsche Fläche  $F$  beschränktartig ist. Denn würde für  $w \rightarrow w_0$  der Punkt im Kreise  $|z| < 1$  eine Kurve  $L$  beschreiben, welche in keinem Punkt von  $|z| = 1$  endet, so würde  $L$  einen ganzen Bogen der Peripherie als Häufungsbereich haben. Auf diesen Bogen würde dann die Funktion  $w(z)$ , welche als eine beschränktartige Funktion fast überall auf  $|z| = 1$  radiale Grenzwerte hat, ein und denselben Randwert  $w = w_0$  besitzen, und sie würde sich folglich nach den Sätzen von VII, § 4 auf eine Konstante reduzieren, was nicht möglich ist.

hier ein Element der gegebenen einwertigen Funktion  $z(w)$  und nehmen an, daß sich dieses Element auf  $L_w$  mit algebraischem Charakter fortsetzen läßt bis zu  $w_0$ , mit möglicher Ausnahme dieses Endpunktes. Der Punkt  $z$  beschreibt hierbei einen in  $G_z$  verlaufenden stetigen Bogen  $L_z$ , der dann und nur dann in einem inneren Punkt von  $G_z$  endigt, wenn  $z(w)$  auch noch in  $w_0$  von algebraischem Charakter ist. Im entgegengesetzten Fall, wo also  $w_0$  für den betrachteten Funktionszweig eine *transzendente Singularität* darstellt, wird  $L_z$  auf dem Rand  $\Gamma$  von  $G_z$  endigen, also im Punkt  $z = \infty$ , falls die Fläche  $F$  parabolisch ist, und auf der Peripherie  $|z| = 1$ , falls  $F$  hyperbolisch ist; im letztgenannten Fall hat man noch zwei Möglichkeiten zu unterscheiden, je nachdem  $L_z$  einen Grenzpunkt oder einen ganzen Grenzbogen der Peripherie als Häufungsbereich hat<sup>1</sup>. Wenn  $z$  auf  $L_z$  gegen  $\Gamma$  strebt, so nähert sich  $w$  dem Grenzwert  $w_0$ .

Umgekehrt gilt, wenn  $L_z$  ein Bogen obiger Art ist, auf welchem die meromorphe Funktion einen bestimmten Zielwert  $w_0$  hat, daß die Stelle  $w_0$  für mindestens einen Zweig der Umkehrfunktion  $z(w)$  eine *transzendente Singularität* ist.

*Die auf der Berandung  $\Gamma$  des Wertgebietes  $G_z$  endigenden Zielwege der meromorphen Funktion  $w(z)$  und die transzendenten kritischen Stellen der Umkehrfunktion  $z(w)$  sind einander zugeordnet.*

**237.** Wir nehmen nun auf einem gegebenen, in eine transzendente Singularität  $w_0$  einmündenden Weg  $L_w$  einen Punkt  $w_1$ , so daß  $|w_1 - w_0|$  kleiner als eine vorgegebene Zahl  $\varrho > 0$  ist, und bezeichnen durch  $G_z(w_0, \varrho)$  dasjenige schlichte Teilgebiet von  $G_z$ , welches von denjenigen Punkten  $z$  überdeckt wird, zu denen man gelangt, wenn man in  $w_1$  ein Funktionselement  $z(w)$  festlegt und dieses im Kreise  $|w - w_0| < \varrho$  unbeschränkt (mit algebraischem Charakter) fortsetzt<sup>2</sup>.

Das Gebiet  $G_z(w_0, \varrho)$  läßt sich offenbar auch folgendermaßen erklären: es ist dasjenige unter den durch die Bedingung  $|w(z) - w_0| < \varrho$  bestimmten zusammenhängenden Teilgebiete von  $G_z$ , welches den Punkt  $z_1 = z(w_1)$  enthält. Da  $w_0$  transzendent kritisch ist, so erstreckt sich  $G_z(w_0, \varrho)$  bis an den Rand  $\Gamma$  von  $G_z$ .

Die Berandung von  $G_z(w_0, \varrho)$  besteht aus endlich oder unendlich vielen analytischen Kurvenbögen  $\Gamma(w_0, \varrho)$  auf denen  $|w(z) - w_0| = \varrho$ . Diese Bogen sind entweder offen und münden dann auf  $\Gamma$  ein, oder sie sind geschlossen. Die geschlossenen Bogen begrenzen Teilgebiete von  $G_z$ , in denen  $w(z)$ , mindestens in der unmittelbaren Umgebung der Randpunkte  $\Gamma(w_0, \varrho)$ , die Eigenschaft  $|w - w_0| > \varrho$  besitzt und die je mindestens einen Pol von  $w(z)$  enthalten, weil sonst  $|w - w_0|$  gemäß dem Maximumprinzip konstant gleich  $\varrho$  sein müßte. Fügt man diese geschlossenen

<sup>1</sup> Jener Fall tritt sicher dann ein, wenn die Fläche  $F$  beschränktartig ist.

<sup>2</sup> Falls  $w_0 = \infty$  ist, so hat man hier und im nachfolgenden die Kreisscheibe  $|w - w_0| < \varrho$  durch das Kreisäußere  $\left| \frac{1}{w} \right| < \varrho$  zu ersetzen.



Teilgebiete zu  $G_z(w_0, \rho)$  hinzu, so entsteht ein Gebiet  $\widehat{G}_z(w_0, \rho)$ , das einfach zusammenhängend ist.

**238.** Falls nun  $w_0$  ein logarithmischer Windungspunkt ist, so wird  $G_z(w_0, \rho)$  für hinreichend kleine Werte  $\rho > 0$  von einem einzigen offenen Randbogen  $\Gamma(w_0, \rho)$  begrenzt. Außer dieser einfachsten Art einer transzendenten Singularität verdient folgender etwas allgemeinere Fall besondere Beachtung: Man nehme an, daß eine so kleine Zahl  $\rho > 0$  existiert, daß der Funktionszweig  $z(w)$  innerhalb des Kreises  $|w - w_0| < \rho$  überhaupt nicht bis zu  $w = w_0$  (mit algebraischem Charakter) fortsetzbar ist. Das zugehörige Gebiet  $G_z(w_0, \rho)$  ist dann durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß die meromorphe Funktion  $w(z)$  innerhalb derselben von  $w_0$  verschieden ist. Nach IVERSEN<sup>1</sup>, der als erster die Umkehrfunktionen von meromorphen Funktionen einer systematischen Untersuchung unterzogen hat, nennt man eine solche Singularität eine *direkt kritische* transzendenten Singularität der einwertigen Funktion, im Gegensatz zu den *indirekt kritischen* transzendenten Stellen, bei welchen  $z(w)$  auf passenden Wegen in  $|w - w_0| < \rho$  bis zu  $w = w_0$  fortsetzbar ist, wie klein  $\rho > 0$  immer gewählt werden mag.

Aus obigem folgt, daß eine erreichbare Stelle  $w_0$ , die ein PICARDScher Ausnahmewert der meromorphen Funktion  $w(z)$  ist, stets eine direkt kritische transzendenten Singularität der Funktion  $w(z)$  definiert.

Die einfachsten Beispiele für einwertige Funktionen mit nur isolierten Singularitäten liefern die Umkehrfunktionen der periodischen und automorphen Funktionen. Der Logarithmus hat insgesamt zwei logarithmische Elemente (über  $w = 0, \infty$ ),  $z = \arcsin w$  hat über  $w = \infty$  zwei verschiedene logarithmische Windungspunkte und über  $w = \pm 1$  unendlich viele algebraische Windungspunkte erster Ordnung. Die zu den doppelt-periodischen Funktionen gehörenden RIEMANNschen Flächen besitzen lauter algebraische Windungspunkte, die Fläche der Modulfunktion  $w(z; a_1, a_2, a_3)$  nur logarithmische Windungspunkte und zwar unendlich viele über sämtlichen drei kritischen Punkten  $a_n$ .

Die Windungspunkte der erwähnten regulär verzweigten Flächen sind über einer endlichen Anzahl von Grundpunkten der  $w$ -Ebene gelegen. Aber auch die nichtregulär verzweigten Flächen mit der gleichen Eigenschaft liefern Beispiele, die vom Standpunkt der Wertverteilungslehre interessant sind. Von diesen Flächen, welche uns in § 2 dieses Abschnitts weiter beschäftigen werden, seien hier schon diejenigen erwähnt, welche zu der ganzen Funktion

$$w = \int_0^z e^{-t'} dt$$

gehört, welche in einem früheren Abschnitt (VI, § 2) als Beispiel einer

<sup>1</sup> F. IVERSEN [I].

Funktion mit mehreren Zielwerten angeführt worden ist. Diese Zielwerte  $a_0 = \infty$  und

$$a_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{q}} \int_0^\infty e^{-r^\nu} dr$$

sind zugleich *defekte* Werte, und es ist  $\delta(a_0) = 1$ ,  $\delta(a_\nu) = \frac{1}{q}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, q$ ). Nun sieht man leicht ein, daß die Umkehrfunktion  $z(w)$  unverzweigt ist, außer über jenen Werten  $a_0, a_1, \dots, a_q$ ; die entsprechende RIEMANNSCHE Fläche hat insgesamt  $2q$  logarithmische Windungspunkte, von denen die halbe Anzahl  $q$  über der Stelle  $a_0$  gelagert ist, während die übrigen  $q$  über den Stellen  $a_1, \dots, a_q$  liegen; über diesen Stellen hat die Fläche außerdem je unendlich viele schlichte Blätter.

Eine direkt kritische, aber nicht logarithmische transzendente Singularität ist die Stelle  $w = \infty$  für die Funktion  $z \sin z$ .

Als Beispiel einer indirekt kritischen Stelle betrachten wir die Stelle  $w = 0$  für die ganze Funktion

$$w = \frac{\sin z}{z}.$$

Diese strebt gegen Null, wenn  $z$  auf der positiven reellen Achse ins Unendliche rückt. Nimmt man eine kleine positive Zahl  $\varrho$  und betrachtet man diejenige Umgebung  $G_\varrho$  jener Achse, welche durch die Bedingung  $|w| < \varrho$  festgelegt wird, so wird der entsprechende Zweig der Umkehrfunktion  $z(w)$  den Wert  $w = 0$  als transzendente Stelle haben, und zwar als eine indirekt kritische solche Stelle, denn jener Wert wird in  $G_\varrho$  unendlich oft, nämlich für  $z = \nu\pi$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) angenommen. Die Stelle  $w = 0$  erscheint als Häufungspunkt einer Folge von algebraischen Windungspunkten erster Ordnung, welche den Wurzeln der Gleichung  $w'(z) = 0$ , d. h.  $\operatorname{tg} z = z$  zugeordnet sind.

**239. Satz von IVERSEN über parabolische Flächen.** Außer den oben betrachteten erreichbaren Singularitäten, können bei einer einwertigen Funktion auch nichterreichbare Singularitäten vorkommen. Nimmt man  $F$  z. B. als ein einfach zusammenhängendes *schlichtes* Gebiet an, das einen nichterreichbaren Randpunkt  $w_0$  besitzt, so liefert die konforme Abbildung von  $F$  auf den Einheitskreis  $|z| < 1$  eine einwertige Funktion  $z(w)$ , für welche die Stelle  $w_0$  nicht erreichbar ist.

Diese besondere Fläche war vom hyperbolischen Typus. Bei einer parabolischen Fläche sind die Singularitäten von weniger verwickelter Art; hier sind speziell *sämtliche Stellen  $w$  erreichbar*. Dies schließt man aus nachstehendem, von IVERSEN [I] herrührenden Satz.

*Es seien  $F$  eine über der  $w$ -Ebene ausgebreitete RIEMANNSCHE Fläche vom parabolischen Typus und  $w = w_0$  ein beliebiger Punkt der Ebene. Sei ferner  $\varrho > 0$ ,  $w_1$  ein innerer Punkt der Fläche  $F$  und  $|w_1 - w_0| = \varrho$ . Dann läßt sich ein stetiger Kurvenbogen  $L$  finden, der, ohne aus dem Kreis*

$|w - w_0| < \rho$  herauszutreten, die Punkte  $w_1$  und  $w_0$  verbindet und der mit möglicher Ausnahme des Endpunktes  $w_0$  aus lauter inneren Punkten der Fläche  $F$  besteht.

Wenn  $z(w)$  die Funktion ist, welche die Fläche  $F$  auf die punktierte Ebene  $z \neq \infty$  abbildet, so gilt es zu zeigen, daß zu einem beliebigen, im Punkte  $w = w_1$  festgelegten Zweig ein von  $w_1$  bis  $w_0$  im Kreise  $|w - w_0| < \rho$  verlaufender stetiger Weg  $L$  existiert, auf welchem jener Funktionszweig (mit algebraischem Charakter) fortsetzbar ist, mit möglichem Ausschluß der Stelle  $w_0$ .

Zum Beweise<sup>1</sup> betrachten wir dasjenige an den gegebenen Anfangswert  $z_1 = z(w_1)$  grenzende zusammenhängende Gebiet  $G_\rho$  der  $z$ -Ebene, dessen Punkte durch die Bedingung  $|w(z) - w_0| < \rho$  gekennzeichnet sind. Wenn dann die Funktion mindestens in einem Punkt  $z_0$  in  $G_\rho$  den Wert  $w_0$  annimmt, so braucht man nur  $z_1$  mit  $z_0$  stetig innerhalb  $G_\rho$  zu verbinden, um eine Kurve der gewünschten Art auf der Fläche  $F$  zu erhalten.

Ist dagegen  $w(z) \neq w_0$  in  $G_\rho$ , so grenzen wir um  $z_1$  dasjenige zusammenhängende Teilgebiet  $G_1$  von  $G_\rho$  ab, wo  $\rho > |w - w_0| > \frac{\rho}{2}$  ist. Dieses Gebiet enthält mindestens einen in  $G_\rho$  gelegenen Randpunkt  $z_2$ , mit  $|w(z) - w_0| = \frac{\rho}{2}$ . Denn sonst würde die in  $G_1$  reguläre Funktion  $\frac{1}{w(z) - w_0}$  in jedem endlichen Randpunkt von  $G_1$  den absoluten Betrag  $\frac{1}{\rho}$  haben. Da aber ihr Betrag in der Umgebung des unendlich fernen Punktes, falls dieser zum Rand von  $G_1$  gehört, beschränkt ist ( $< \frac{2}{\rho}$ ), so müßte nach dem Maximumprinzip  $\frac{1}{|w - w_0|} \leq \frac{1}{\rho}$  in  $G_1$  sein, was unmöglich ist.

Sei nun  $G_2$  das an den Punkt  $z_2$  grenzende Teilgebiet von  $G_\rho$ , wo  $\frac{\rho}{2} > |w - w_0| > \frac{\rho}{4}$  ist. Genau wie oben sieht man ein, daß  $G_2$  einen endlichen Randpunkt  $z_3$  hat mit  $|w(z) - w_0| = \frac{\rho}{4}$ . In dieser Weise geht man weiter, und definiert so eine Folge von nebeneinander gelagerten Teilgebieten  $G_1, G_2, \dots$ , so daß  $\frac{\rho}{2^{n-1}} > |w(z) - w_0| > \frac{\rho}{2^n}$  in  $G_n$  gilt und daß  $G_n$  und  $G_{n+1}$  einen gemeinsamen Randpunkt haben, wo  $|w(z) - w_0| = \frac{\rho}{2^n}$  ist.

Die Gebiete  $G_n$  konvergieren für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $z = \infty$ , denn im Durchschnitt  $D_r$  von  $G_\rho$  mit einem vorgegebenen Kreis  $|z| \leq r$  hat  $|w(z) - w_0|$  eine positive untere Grenze, und  $G_n$  muß also für ein hinreichend großes  $n$  außerhalb jenes Kreises liegen. Verbinden wir nun, für jedes  $n = 1, 2, \dots$ , den Punkt  $z_n$  mit  $z_{n+1}$  durch eine in  $G_n$  verlaufende stetige Kurve, so erhalten wir in  $G_\rho$  einen stetigen, von  $z = z_1$  bis  $z = \infty$  gehenden Weg  $L_z$ , auf welchem  $w(z)$  den Zielwert  $w_0$  hat. Die Bildkurve  $L_w$  in der  $w$ -Ebene besitzt dann sämtliche im Satze behaupteten Eigenschaften.

<sup>1</sup> Der folgende Beweis rührt im Prinzip von G. VALIRON [3] her.

Aus dem so bewiesenen Satz folgt unmittelbar als Korollar:

*Eine für  $z \neq \infty$  meromorphe Funktion, die einen PICARDSCHEN AUSNAHMEWERT BESITZT, HAT DIESEN WERT ALS ZIELWERT.*

**240. Satz von GROSS<sup>1</sup>.** *Wenn die einfach zusammenhängende RIEMANNSCHE FLÄCHE  $\Gamma$  vom parabolischen Typus ist und  $z(w)$  einen Zweig der zugehörigen Abbildungsfunktion bezeichnet, der in einer Stelle  $w_0 \neq \infty$  eindeutig ist, so läßt sich dieser Zweig auf jedem Halbstrahl  $\arg(w - w_0) = \varphi$  bis zum Punkt  $w = \infty$  analytisch fortsetzen, außer höchstens für eine Wertmenge  $\varphi$  vom Maße Null<sup>2</sup>.*

Wir verfolgen jeden Strahl  $\arg(w - w_0) = \varphi$  vom Anfangspunkt  $w_0$  bis zur ersten transzendenten oder algebraischen Singularität oder, falls man keiner solchen Stelle begegnet, bis zum Punkt  $w = \infty$ . Die so definierten Segmente  $H_\varphi$  überdecken den Stern des betrachteten Funktionselementes  $z(w)$ . Der Satz von GROSS sagt also, daß diejenigen Werte  $\varphi$ , denen ein endlicher „Eckpunkt“ des Sternes entspricht, eine Nullmenge bilden. Da die algebraischen Eckpunkte höchstens in abzählbarer Menge vorhanden sind, so genügt es diese Behauptung für die Menge  $M$  der transzendenten Eckpunkte zu beweisen. Ferner können wir unsere Betrachtung auf diejenigen Punkte  $M_R$  beschränken, welche im Kreise  $|w - w_0| \leq R$  liegen, wobei  $R$  eine beliebige positive Zahl ist. Ist nämlich die Menge der entsprechenden  $\varphi$ -Werte vom Maße Null, so gilt dasselbe für die gesamte, den Eckpunkten  $M$  zugeordnete Wertmenge ( $\varphi$ ), welche ja dann als Vereinigungsmenge der den Eckpunkt mengen  $M_{R_n}$  ( $R_1 < R_2 < \dots$ ;  $R_n \rightarrow \infty$ ) entsprechenden Nullmengen selbst das Maß Null hat.

Es sei nun  $S_w$  der Durchschnitt des betrachteten Sterns mit dem Kreis  $|w - w_0| \leq R$ . Durch die Funktion  $t = \frac{1}{z(w) - z(w_0)}$  wird das Innere von  $S_w$  auf ein schlichtes Gebiet  $S_t$  eineindeutig und konform abgebildet, welches den unendlich fernen Punkt enthält, während der Nullpunkt ein äußerer oder Randpunkt ist. Der letztere Fall trifft sicher dann zu, wenn die Menge  $M_R$  der „transzendenten Randpunkte“ von  $S_w$  nicht leer ist; denn bei Annäherung an einen solchen Punkt wird ja  $z \rightarrow \infty$  und also  $t \rightarrow 0$ .

Wir nehmen eine Zahl  $r > 0$  und betrachten die Gesamtheit der endlich oder abzählbar vielen Teilbogen  $\Delta_t(r)$  des Kreises  $|t| = r$ , welche in  $S_t$  fallen. Diese Querschnitte trennen den Randpunkt  $t = 0$  vom inneren Punkt  $t = \infty$  und ihre Bildbogen  $\Delta_w(r)$  im Sterngebiet  $S_w$

<sup>1</sup> W. GROSS [2].

<sup>2</sup> Die Sonderstellung des unendlich fernen Punktes ist unwesentlich. Statt der Strahlenschar  $\arg(w - w_0) = \varphi$  könnte man z. B. eine Kreisschar  $C_\varphi$  betrachten, die durch  $w_0$  und einen beliebigen Punkt  $w_1 \neq w_0$  hindurchgeht, wobei der Parameter  $\varphi$  den Richtungswinkel der betreffenden Kreistangenten in  $w_0$  angibt. Für fast alle  $\varphi$  läßt sich dann  $z(w)$  längs  $C_\varphi$  bis zum Punkt  $w_1$  analytisch fortsetzen.

stellen also Querschnitte dieses Gebietes dar, welche den Punkt  $w = w_0$  von sämtlichen Punkten  $M_R$  trennen. Hieraus folgt, daß das Maß  $m(\varphi)$  der entsprechenden  $\varphi$ -Werte nicht größer sein kann als die Summe der Schwankungen von  $\arg(w - w_0)$  auf diesen Bogen  $\Delta_w(r)$ . Die Schwankung von  $\arg(w - w_0)$  auf  $\Delta_w(r)$  ist aber höchstens gleich der Länge des Bogens, dividiert durch  $\delta_r$ , wobei  $\delta_r$  die kürzeste Entfernung von  $w_0$  zu dem Bogen  $\Delta_w(r)$  ist. Wählt man nun  $r$  kleiner als eine beliebige Zahl  $r_0 > 0$ , so werden sämtliche Entfernungen  $\delta_r$  größer als eine gewisse, nur von der Wahl von  $r_0$  abhängige Zahl  $\delta_0 > 0$  ausfallen. Es genügt demnach zu zeigen, daß die Summe  $s(r)$  der Längen der Querschnitte  $\Delta_w(r)$  durch passende Wahl des Radius  $r$  ( $0 < r \leq r_0$ ) beliebig klein gemacht werden kann.

Wir setzen  $t = r e^{i\vartheta}$ ,  $f(t) = w \left( z_0 + \frac{1}{t} \right)$  und finden dann unter Anwendung der SCHWARZSchen Ungleichung

$$(s(r))^2 = \left( \int_{\Delta_i(r)} |f'(t)| |dt| \right)^2 \leq 2\pi r \int_{\Delta_i(r)} |f'(t)|^2 r d\vartheta.$$

Hier ist

$$\int_{\Delta_i(r)} |f'(t)|^2 r d\vartheta = \frac{dA}{dr},$$

wo  $A(r)$  den Flächeninhalt desjenigen Teilgebietes des Sterns  $S_w$  bezeichnet, welches den Punkt  $w_0$  enthält und das von den Querschnitten  $\Delta_w(r)$  begrenzt wird. Durch Integration zwischen den Grenzen  $r$  und  $r_0$  ( $> r$ ) findet man

$$\int_r^{r_0} \frac{s^2}{r} dr \leq 2\pi(A(r) - A(r_0)) < 2\pi^2 R^2.$$

Dieses Ergebnis besteht für jedes  $0 < r \leq r_0$ . Ist nun  $\varepsilon$  eine beliebige Zahl  $< 0$ , so ist für mindestens einen Wert  $r$  jenes Intervalles  $s(r) < \varepsilon$ . Denn sonst würde

$$\int_r^{r_0} \frac{s^2}{r} dr \geq \varepsilon^2 \log \frac{r_0}{r},$$

und das Integral würde, im Widerspruch zur obigen Ungleichung, für  $r \rightarrow 0$  ins Unendliche streben.

Hiermit ist der Beweis des GROSSSchen Satzes erbracht.

**241.** Die Sätze von IVERSEN und GROSS weisen darauf hin, daß die Singularitäten einer parabolischen Fläche auf dieser relativ dünn gesät sind. Dies hindert keineswegs, daß die Spurpunkte der Singularitäten sogar sehr dicht auf der  $w$ -Ebene liegen können. GROSS [2] hat ein Beispiel einer ganzen Funktion konstruiert, welche jeden Wert als Zielwert hat; hier füllen also jene Spurpunkte die ganze  $w$ -Ebene aus.

## § 2. RIEMANNSche Flächen, deren Windungspunkte über endlich vielen Punkten liegen.

**242.** Bei der großen Allgemeinheit der Hauptsätze der Wertverteilungslehre ist es von Gewicht, die darin enthaltenen Aussagen an konkreten Beispielen prüfen zu können. Unter Funktionen, die mit Rücksicht auf die Wertverteilung besonders interessant sind, verdienen vor allem die periodischen und automorphen (FUCHSSchen) Funktionen erwähnt zu werden. Die Windungspunkte der zugehörigen, regulär verzweigten RIEMANNSchen Flächen liegen über einer endlichen Anzahl von Grundpunkten. Es liegt nun nahe, die allgemeinere Klasse der einfach zusammenhängenden RIEMANNSchen Flächen zu untersuchen, welche, ohne notwendig regulär verzweigt zu sein, mit jenen Flächen eine zweite Eigenschaft gemeinsam haben, daß sich nämlich ihre Windungspunkte auf endlich viele Punkte der Ebene projizieren. Im Rahmen dieser Darstellung ist es nicht möglich, dieses Problem in allen Einzelheiten streng zu behandeln. Wir werden uns also damit begnügen, diese Flächenklasse in großen Zügen zu beschreiben und den Weg anzugeben, auf welchem die erforderlichen Existenzbeweise durchgeführt werden können.

**243.** Es sei also in der  $w$ -Ebene eine endliche Anzahl  $q \geq 2$  von Grundpunkten  $a_1, \dots, a_q$  gegeben. Vorerst wird es sich darum handeln, die topologische Struktur einer einfach zusammenhängenden RIEMANNSchen Fläche  $F$  klarzulegen, welche höchstens über jenen Punkten  $a_1, \dots, a_q$  verzweigt ist. Einen guten Einblick in den Aufbau einer solchen Fläche erhält man durch ein Verfahren, das derjenigen Betrachtung vollkommen analog ist, welche im Abschnitt I, § 3 der topologischen Beschreibung der universellen Überlagerungsfläche der in den Grundpunkten  $a_\nu$  punktierten Ebene zugrunde liegt; eine Fläche, welche unter den jetzt zu untersuchenden Flächen dadurch ausgezeichnet ist, daß sie möglichst hoch verzweigt ist.

Man ziehe durch die in der Reihenfolge  $a_1, \dots, a_q, a_1$  genommenen Punkte  $a_\nu$  eine geschlossene Jordankurve  $\gamma$ , welche die  $w$ -Ebene in zwei einfach zusammenhängende Gebiete,  $G_1$  und  $G_2$ , zerlegt, die einander insofern „spiegelbildlich“ entsprechen, als eine gegebene Umlaufrichtung auf  $\gamma$  in bezug auf das eine der Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  positiv, in bezug auf das andere dagegen negativ ist. Denkt man sich die Fläche längs  $\gamma$  aufgeschnitten, so zerfällt sie in endlich oder unendlich viele untereinander kongruente Exemplare  $G_1$  und in eine entsprechende Anzahl von unter sich kongruenten Exemplaren  $G_2$ . Wir wollen diese „Halbblätter“  $G_1, G_2$  kurz als Polygone bezeichnen; die Randpunkte  $a_1, \dots, a_q$  mögen Ecken, die Bogen  $(a_1 a_2), (a_2 a_3), \dots, (a_q a_1)$  Seiten der Polygone heißen.

Die Eckpunkte  $a_1, \dots, a_q$  eines gegebenen Polygons  $G_\nu (\nu = 1, 2)$  sind von dreierlei Art: 1. Windungspunkte unendlicher Ordnung; 2. Windungs-

punkte endlicher Ordnung, wo eine endliche Anzahl  $m > 1$  von Blättern  $G_1 + G_2$  zyklisch vereinigt sind; 3. unverzweigte Stellen der Fläche. Die ersten Punkte nennen wir Eckpunkte unendlicher Ordnung, die zweiten Eckpunkte  $(m-1)$ -ter Ordnung, wobei also  $m-1 > 0$  die Ordnung des entsprechenden Windungspunktes bezeichnet, die dritten Punkte sollen uneigentliche Eckpunkte oder Eckpunkte nullter Ordnung heißen.

Wie im Abschnitt I, § 3 stellen wir die RIEMANNSCHE Fläche  $F$  auch hier durch einen *schlichten Graphen*  $G$  dar, der aus einer Anzahl den Halbblättern  $G_\nu$  zugeordneten, mit diesen topologisch äquivalenten nebeneinander gelagerten Kurvenpolygone  $G_\nu^\mu$  ( $\nu=1, 2; \mu=1, 2, \dots$ ) zusammengesetzt ist, so daß zwei Polygone  $G_1^\mu, G_2^\mu$  dann und nur dann längs einer Seite zusammenhängen, wenn die zugeordneten Polygone  $G_1, G_2$  auf  $F$  die entsprechende „Bildseite“ gemeinsam haben. Für die Eckpunkte behalten wir die Bezeichnungen  $a_1, \dots, a_q$  bei. Um die Konstruktion des Graphen geometrisch verwirklichen zu können, wollen wir den verschiedenen Polygonen  $G_1^1, G_1^2, \dots$  (bzw.  $G_2^1, G_2^2, \dots$ ) der Form oder Größe nach keine Beschränkungen auferlegen. Das einzig wesentliche ist, daß sie untereinander topologisch äquivalent, d. h. Kurvenbogenpolygone mit  $q$  Ecken sind.

Die inneren Eckpunkte des Graphen  $G$  sind entweder uneigentliche Eckpunkte (nullter Ordnung), an welche zwei Polygone grenzen, oder eigentliche Eckpunkte von positiver Ordnung  $m-1$ . Ein solcher Eckpunkt ist  $m$  Polygonen  $G_1$  und einer ebenso großen Anzahl von Polygonen  $G_2$  gemeinsam, welche bei einem Umlauf um den Eckpunkt abwechselnd aufeinander folgen. Die Eckpunkte unendlicher Ordnung sind „Randpunkte“ des Graphen.

*Abgesehen vom trivialen Fall, wo die Fläche  $F$  einblättrig ist und mit der schlichten Vollebene zusammenfällt, gilt, daß jedes Polygon  $G_1, G_2$  mindestens zwei eigentliche Eckpunkte besitzt.*

Sei nämlich  $G_1$  ein Polygon, für welches die  $q-1$  Eckpunkte  $a_1, \dots, a_{q-1}$  uneigentlich (von nullter Ordnung) sind. An jedes Seitenpaar grenzt dann immer nur ein Polygon  $G_2$ . Und da zwei aufeinanderfolgende Paare eine Seite gemeinsam haben, so folgt hieraus, daß an  $G_1$  überhaupt immer nur *ein* Polygon grenzen kann, so daß also die ganze Fläche durch das geschlossene Blatt  $G_1 + G_2$  ausgeschöpft wird.

Diese Bemerkung zeigt, daß eine mehrblättrige Fläche mindestens zwei Windungspunkte hat, die nicht übereinander liegen. Es bedeutet also keine Einschränkung, anzunehmen, daß die Anzahl der Grundpunkte  $a_\nu$  mindestens zwei beträgt.

**244.** *Der Fall  $q=2$ .* Die verschiedenen Zweiecke  $G_1, G_2$  reihen sich nebeneinander, entweder in einer endlichen Anzahl  $2m$  oder in unendlicher Anzahl nach beiden Richtungen. Im erstgenannten Fall hat

man es mit der geschlossenen  $m$ -blättrigen Fläche einer Potenz zu tun, mit zwei Windungspunkten  $(m-1)$ -ter Ordnung, im zweiten Fall mit der Fläche des Logarithmus mit zwei Windungspunkten unendlicher Ordnung.

Zur Veranschaulichung dieser Flächentypen kann man auch einen *Streckenkomplex*<sup>1</sup> verwenden, welcher vermittels desselben Verfahrens wie die im Abschnitt I, § 2 besprochenen topologischen Bäume von SPEISER gewonnen werden kann. Man nimmt in jedem Polygon  $G_1, G_2$  je einen inneren Punkt  $P_1, P_2$  und verbindet jeden solchen *Knotenpunkt* durch insgesamt  $q$  Strecken  $S_{12}, S_{23}, \dots, S_{q1}$  mit den Knotenpunkten der unmittelbar angrenzenden Polygone  $G$ , und zwar so, daß  $S_{v, v+1}$  über die Seite  $a_v a_{v+1}$  zu dem Knotenpunkt des an diese Seite

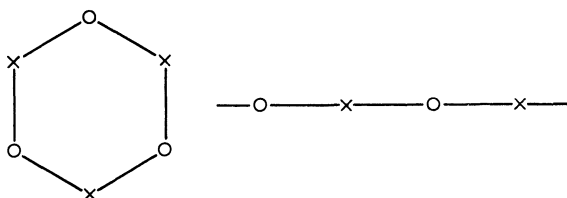


Abb. 18.

grenzenden Nachbarpolygons führt; sämtliche Strecken werden punkt-fremd gewählt.

Im vorliegenden Fall  $q=2$  lassen sich also die zwei möglichen Flächentypen ( $0 < m < \infty$  und  $m = \infty$ ) durch die Abb. 18 darstellen (die erste Figur entspricht dem Wert  $m=3$ ).

Durch den Streckenkomplex zerfällt die Ebene in gewisse Teilgebiete welche wir als *Elementargebiete* der RIEMANNSCHEN Fläche bezeichnen. Man bemerke, daß im obigen Fall die Elementargebiete den Windungspunkten der Fläche zugeordnet sind, so daß einem Windungspunkt  $(m-1)$ -ter Ordnung ein Elementargebiet mit  $2m$  Ecken und Seiten entspricht.

**245. Der Fall  $q=3$ .** Der Graph  $G$  setzt sich aus lauter Dreiecken  $G_v$  zusammen. Diese sind zweierlei Art: entweder sind sämtliche drei Eckpunkte Windungspunkte, oder es gibt unter den drei Ecken eine, die uneigentlich ist, und wo also die Fläche  $F$  unverzweigt verläuft. Sind sämtliche Dreiecke von zweiter Art, so hat man es offenbar mit dem bereits behandelten einfachsten Fall zu tun, wo die Fläche nur über zwei Grundpunkte verzweigt ist. Liegt über einem jeden der Punkte  $a_1, a_2, a_3$  mindestens ein Verzweigungspunkt, so enthält also der Graph mindestens ein Dreieck, in welchem sämtliche Ecken verzweigt sind.

Andererseits gibt es eine Fläche, welche ein einziges solches Dreieck enthält. Zu dieser Fläche gelangt man, wenn man jeder Seite des Dreiecks eine unendliche Reihe von nebeneinander gelagerten Dreiecken mit je

<sup>1</sup> Vgl. R. NEVANLINNA [10], G. ELFVING [1].



einer uneigentlichen Ecke anhängt, in der Art, wie es durch die Abbildung 19 zum Ausdruck gebracht wird. Es ist leicht einzusehen, daß diese unendlich vielblättrige Fläche, welche drei logarithmische Windungspunkte, und zwar je einen über den Grundpunkten  $a_1, a_2, a_3$  hat, die einzige Fläche der erwähnten Art ist.

Wir haben diese Fläche besonders hervorgehoben, weil sie auch sonst gewisse für uns wichtige Eigenschaften besitzt, auf die wir später noch zurückkommen werden. Es soll hier nur gezeigt werden, wie der entsprechende Streckenkomplex aufgebaut ist. Er läßt sich nach der

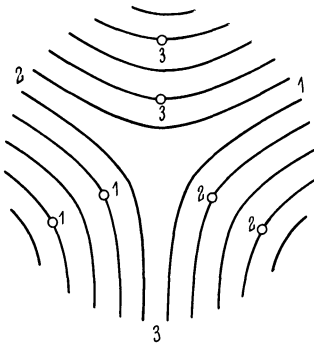


Abb. 19.

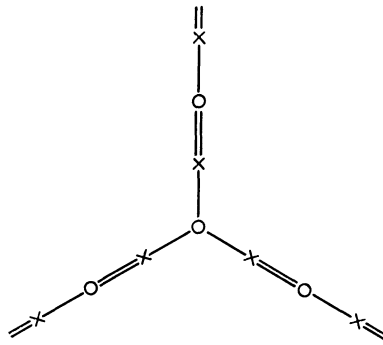


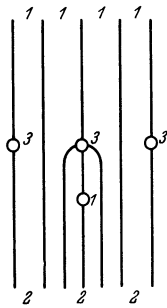
Abb. 20.

oben gegebenen allgemeinen Regel mit Leichtigkeit konstruieren, indem man in jedem Dreieck einen Knotenpunkt wählt und die benachbarten Knotenpunkte durch Strecken miteinander verbindet; man bemerke, daß von sämtlichen Knotenpunkten, mit Ausnahme des Zentraldreiecks, das drei verzweigte Ecken hat, stets *zwei* Strecken  $s$  zu einem der benachbarten Polygone führen. Zur Vereinfachung der Figur wollen wir die Vereinbarung treffen, zwei (oder mehrere  $\mu$ ) Strecken, die ein und dasselbe Paar von Knotenpunkten  $P_v$  verbinden, als eine Doppelstrecke ( $\mu$ -fache Strecke) zu zeichnen. Die fragliche Fläche wird dann durch obenstehenden Streckenkomplex dargestellt. Umgekehrt genügt die Angabe des Streckenkomplexes um die Struktur der zugehörigen RIEMANNSCHEN Fläche eindeutig festzulegen. — Der vorliegende Streckenkomplex weicht von einem topologischen Baum (I, § 2) dadurch ab, daß er geschlossene Elementargebiete (die als Doppelstrecken gezeichneten Zweiecke) enthält. Die unendlichen, an zwei benachbarte Elementargebiete von unendlicher Ordnung grenzenden Züge eines topologischen Baumes (oder eines Komplexes) nennen wir mit SPEISER [2] ein *logarithmisches Ende* der Fläche.

Einige weitere im Fall  $q=3$  vorkommende Beispiele seien noch erwähnt. Läßt man die geschlossenen, den rationalen Abbildungsfunktionen  $w(z)$  entsprechenden Flächen beiseite, so sind die Flächen mit nur zwei logarithmischen Windungspunkten die einfachsten Flächen

der betrachteten Kategorie. Als ein einfaches Beispiel führen wir die Fläche der Funktion  $ze^{-z}$  an, welche über  $a_1 = 0, a_2 = \infty$  je einen Windungspunkt unendlicher Ordnung und über  $a_3 = \frac{1}{e}$  einen Windungspunkt erster Ordnung hat. Der entsprechende Graph und der Streckenkomplex sind in Abb. 21 nebeneinander abgebildet; der Zusammenhang dieser Darstellung dürfte ohne weiteres einleuchtend sein.

246. Die regulär verzweigten Flächen  $F$  sind dadurch gekennzeichnet, daß es eine Gruppe von Transformationen (Decktransformationen) gibt, welche den Graph  $G$  in sich topologisch überführen. Unter diesen sind



(für  $q = 3$ ) die einfachsten diejenigen, bei welchen sämtliche Dreiecke  $G_v$  insofern äquivalent sind, als sie ein und dasselbe Verzweigungsschema haben, d. h. daß die Ordnungszahlen der Eckpunkte  $a_1, a_2, a_3$  drei vorgegebene Werte  $m_1 - 1, m_2 - 1, m_3 - 1$  haben.

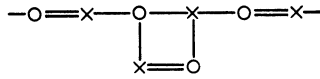


Abb. 21.

Es sind dies die Flächen der SCHWARZSchen Dreiecksfunktionen, von welchen bereits im vorhergehenden Abschnitt (§ 3) die Rede gewesen ist. Sie werden derart konstruiert, daß man ein Kreisbogendreieck  $P$

$m_1$	$m_2$	$m_3$
1	$n$	$n$
2	2	$n$
2	3	3
2	3	4
2	3	5

mit den Ecken  $z_1, z_2, z_3$  und den Winkeln  $\frac{\pi}{m_1}, \frac{\pi}{m_2}, \frac{\pi}{m_3}$ , wo die  $m_v \geq 1$  ganze Zahlen sind, auf einen Kreis  $K$  konform abbildet, und die Abbildungsfunktion  $w(z)$  durch einen unbeschränkt zu wiederholenden Spiegelungsprozeß analytisch fortsetzt. In der  $z$ -Ebene erhält man so den Graph  $G$  der über der  $w$ -Ebene ausgebreiteten Fläche  $F$ , deren

Windungspunkte über drei Punkten  $w_1, w_2, w_3$  der Kreisperipherie gelegen sind. Diese Konstruktion ist der im Abschnitt I, § 3 durchgeführten vollkommen analog; der früher behandelte Fall der Modulfunktion ist im obigen in der Tat als Spezialfall enthalten ( $m_1 = m_2 = m_3 = \infty$ ).

Was nun den Graph  $G$  betrifft, so hat man drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Winkelsumme des Dreiecks  $P$  größer, gleich oder kleiner als  $\pi$  ist.

1.  $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} > 1$ . Diese Bedingung ist nur für die Wertkombinationen in obenstehender Tabelle erfüllt. Diese Flächen sind geschlossen. Projiziert man die  $z$ -Ebene auf die RIEMANNSCHE Kugel, so werden die Dreiecke untereinander kongruent und die Gruppe der

Deckformationen wird mit den Gruppen der Deckrotationen der regulären Polyeder zusammenfallen<sup>1</sup>. Die Abbildungsfunktion  $w(z)$  ist rational und die Fläche  $F$  vom elliptischen Typus.

2.  $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 1$ . In diesem Falle wird der Graph  $G$  die punktierte Ebene lückenlos ausfüllen. Man hat auch hier wieder nur endlich viele Möglichkeiten (s. nebenstehende Tabelle).

Von den entsprechenden Abbildungsfunktionen sind die beiden ersten einfach periodisch ( $e^z$  und  $\sin z$ ), die übrigen doppelperiodisch. Die entsprechenden Flächen sind *parabolisch*.

3.  $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1$ . Dies ist der allgemeine Fall, der bei beliebiger Wahl der positiven ganzen Zahlen  $m_i$  zutrifft, mit Ausnahme der unter 1. und 2. aufgezählten Wertsysteme.

Die Gruppe der Spiegelungen läßt das Innere desjenigen, das Dreieck  $P$  enthaltenden Kreises  $E$  invariant, der die Dreieckseiten

$m_1$	$m_2$	$m_3$
1	$\infty$	$\infty$
2	2	$\infty$
2	3	6
2	4	4
3	3	3

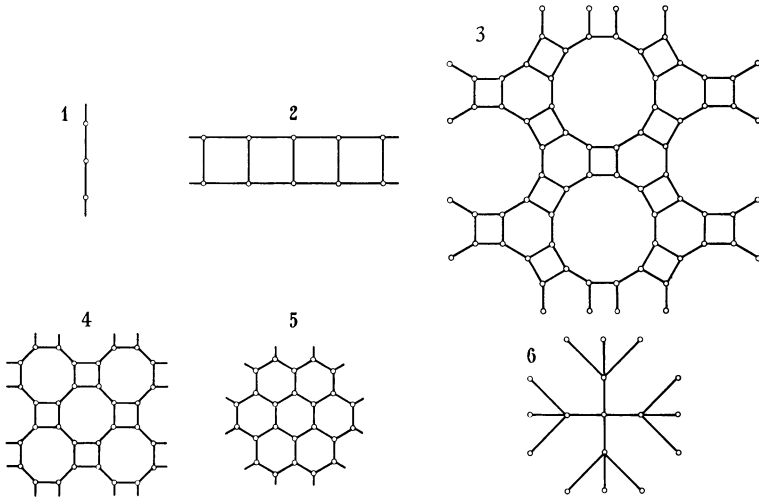


Abb. 22.

orthogonal schneidet, und man sieht unmittelbar ein, daß die Figur  $G$  diese Kreisscheibe  $E$ , die bei geeigneter Normierung mit dem Einheitskreis  $|z| < 1$  zusammenfällt, schlicht und lückenlos ausfüllt. Diese RIEMANNSCHE Flächen sind also vom hyperbolischen Typus.

In Abb. 22 haben wir die Flächen der Dreiecksfunktionen durch Streckenkomplexe dargestellt. Die fünf ersten entsprechen den verschiedenen Fällen 2, der letzte dem hyperbolischen Fall (4, 4, 4). Der Einfachheit halber sind alle Knotenpunkte hier als Kreispunkte gezeichnet.

<sup>1</sup> H. A. SCHWARZ [2].

**247. Der Fall  $q > 3$ .** Wir beschränken uns hier darauf, die regulär verzweigten Flächen hervorzuheben, zu denen man gelangt, wenn man ein Kreisbogenpolygon  $P$  mit  $q > 3$  Seiten auf einen Kreis  $K$  konform abbildet. Zu der lückenlos überdeckten  $z$ -Ebene gelangt man dann nur, wenn  $q = 4$  und  $P$  ein Rechteck ist; die zugehörige Abbildungsfunktion  $w(z)$  ist die  $p$ -Funktion. Es ist dies auch der einzige Fall, der zum parabolischen Typus führt. Sämtliche andere Fälle ( $q > 3$ ) sind hyperbolisch. Zu diesen gelangt man, wenn die Seiten von  $P$  als beliebige Orthogonalkreisbogen eines gegebenen Kreises, z. B. des Einheitskreises, genommen werden; es kommt dann wieder eine schlichte und lückenlose Überdeckung dieser Kreisfläche zustande.

**248. Konforme Abbildung der Flächen  $F$ .** Durch den Graph  $G$  und die zugehörigen Streckenkomplexe haben wir die Gesamtheit der einfach zusammenhängenden RIEMANNSCHEN Flächen  $F$  topologisch charakterisiert, die über einer endlichen Anzahl  $q$  von Grundpunkten  $w_1, w_2, \dots, w_q$  verzweigt sind. Der RIEMANNSCHE Hauptsatz B (Abschnitt I, § 2) besagt, daß die topologische Abbildung  $F \rightarrow G$  konform ausführbar ist; d. h. wenn  $G$  ein gegebener Graph ist, so läßt sich bei beliebiger Wahl der Grundpunkte  $w_1, \dots, w_q$  und der zugehörigen Jordankurve  $\gamma$  eine einwertige analytische Funktion  $z(w)$  finden, welche in sämtlichen Punkten  $w \neq w_1, \dots, w_q$  unverzweigt ist, so daß das Polygonnetz  $G_0$ , welches in der  $z$ -Ebene als Bild erhalten wird, mit dem gegebenen Graphen topologisch äquivalent wird. Die Abbildungsfunktion ist bis auf eine lineare Transformation der  $z$ -Ebene eindeutig bestimmt. Hier tritt nun die Notwendigkeit ein, die unendlich vielblättrigen Flächen in zwei Typen, die parabolischen und die hyperbolischen, einzuteilen, je nachdem das Gebiet  $G$  nur von einem Punkt oder von einem ganzen Kontinuum begrenzt ist.

Ein Verfahren zur Herstellung der konformen Abbildung liefert uns das Spiegelungsprinzip, allerdings nur in den sehr speziellen Fällen der oben besprochenen regulär verzweigten Flächen. In dem allgemeinen Fall müssen wir uns mit einem Hinweis auf den weniger elementaren RIEMANNSCHEN Abbildungssatz B begnügen (I, § 2). Nur eine für die Konstruktion der Abbildungsfunktion brauchbare und für unsere späteren Ausführungen wichtige Bemerkung soll hier Platz finden.

Vorausgesetzt, daß die endlich vielblättrigen, elliptischen Flächen  $F$  uniformisiert werden können, gelangt man durch einen naheliegenden Grenzprozeß zur Herstellung der Abbildungsfunktion für jede beliebige Fläche der in diesem Abschnitt untersuchten Klasse  $F$ . Sei in der Tat  $F$  eine vorgegebene, über den Stellen  $w_1, \dots, w_q$  verzweigte, unendlich vielblättrige, einfach zusammenhängende RIEMANNSCHE Fläche und  $G$  den entsprechende Graph. Man nehme ein beliebiges  $G^0$  der Polygone von  $G$ , füge jeder Seite von  $G^0$  das unmittelbar angrenzende

Polygon  $G^1$  (erste Generation), an sämtlichen freien Seiten der Polygone  $G^1$  wieder die unmittelbaren Nachbarpolygone  $G^2$  (zweite Generation) usw. Wir wiederholen diese kranzförmige Erweiterung  $n$ -mal und bezeichnen mit  $G_n$  das aus den Generationen  $G^0, G^1, \dots, G^n$  bestehende Polygon. Durch eine stetige Deformation (topologische Abbildung) können wir bewirken, daß  $G_n$  kreisförmig wird. Spiegeln wir nun  $G_n$  an der Kreisperipherie und fügen wir das spiegelbildliche Polygon  $\bar{G}_n$  zu  $G_n$  hinzu, so erhält man den Graph  $G_n + \bar{G}_n$  einer elliptischen, endlich vielblättrigen Fläche  $F_n$ . Man konstruiere nun zu  $F_n$ , deren Windungspunkte über die gegebenen Grundpunkte  $w_1, \dots, w_q$  verlegt werden, die zugehörige Abbildungsfunktion  $z = z_n(w)$ ; diese ist bis auf eine lineare Transformation von  $w$  eindeutig bestimmt. Letztere kann derart festgesetzt werden, daß ein in einem beliebigen Flächenpunkt  $w = w_0$  festgelegtes Element  $z_n(w)$  der Abbildungsfunktion den Anfangsbedingungen  $z_n(w_0) = 0, z'_n(w_0) = 1$  genügt.

Man betrachte nun die zu den Näherungsflächen  $F_n$  gehörigen normierten Abbildungsfunktionen  $z_1(w), z_2(w), \dots$ . Beschreibt man um  $w_0$  einen kleinen Kreis  $|w - w_0| < 2\rho$ , der keine von den Verzweigungsstellen  $w_1, \dots, w_q$  enthält, so sind die Funktionen  $z_n(w)$  darin eindeutig; und da sie ferner eine schlichte Abbildung vermitteln, so kann man nach dem KOEBESCHEN Verzerrungssatz schließen, daß sie im Kreise  $|w - w_0| \leq \rho$  gleichmäßig beschränkt sind. Aus einer Folge von gleichmäßig beschränkten, eindeutigen analytischen Funktionen läßt sich aber nach einem Satz von VITALI eine in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig kongruente Teilfolge auswählen<sup>1</sup>. Indem man den Konvergenzbereich kettenartig fortsetzt, gelangt man derart zu einer Grenzfunktion  $z(w)$ , die die gewünschte konforme Abbildung der gegebenen RIEMANNSCHEN Fläche  $F$  liefert. Auf eine nähere Ausführung dieser Beweismethode muß hier verzichtet werden.

Eine RIEMANNSCHE transzendente Fläche von der hier betrachteten Art läßt sich also in der beschriebenen Weise als Grenze einer Folge von endlich vielblättrigen rationalen Flächen herstellen. Es ist dies ein Grenzübergang, der genau dem elementaren Verfahren entspricht, nach welchem die Fläche des Logarithmus als Grenze der Fläche einer Potenz konstruiert wird. Es gibt indes auch kompliziertere Fälle, wo dieser Grenzübergang sich arithmetisch vollständig bewältigen läßt. Im folgenden Paragraphen soll auf diese Frage zurückgekommen werden.

**249.** Zum Schlusse sei bemerkt, daß die in diesem Paragraphen angewandte Darstellung einer RIEMANNSCHEN Fläche durch Streckenkomplexe für etwas allgemeinere Flächenklassen verwendbar ist als für die hier betrachteten Flächen  $F$ . Diese sind ja durch die Eigenschaft

<sup>1</sup> Nach der Terminologie von MONTEL [I] sagt man,  $z_n(w)$  bilde eine *normale* Funktionsfamilie.

charakterisiert, daß ihre Windungspunkte über einer endlichen Anzahl von Grundpunkten  $w_1, \dots, w_q$  liegen. Wir denken uns nun um jeden Grundpunkt  $w_\nu$  ein Gebiet  $W_\nu$  abgegrenzt, so daß die verschiedenen Gebiete punktfremd sind, und ferner die Fläche so deformiert, daß die Windungspunkte stetig aus den Lagen  $w_\nu$  verschoben werden, jedoch so, daß ihre Spurpunkte in der  $w$ -Ebene nicht aus den betreffenden festen Gebieten  $W_\nu$  heraustreten. Die topologische Struktur des entsprechenden Graphen  $G$  wird hierdurch nicht verändert. Um die Lage der Windungspunkte in der  $w$ -Ebene festzulegen, hat man nur jedem eigentlichen Eckpunkt  $z_\nu^i (i = 1, 2, \dots; \nu = 1, \dots, q)$  der Polygone in  $G$  einen Punkt  $w_\nu^i$  des Gebietes  $G_\nu$  zuzuordnen, welcher den Spurpunkt des entsprechenden Windungspunktes angibt.

Die derart definierten allgemeinen Flächen  $F(W_1, \dots, W_q)$  besitzen folgende charakteristische Eigenschaft: Stanzt man aus der Fläche das Gebiet  $W_\nu$  aus, so besteht der ausgeschnittene Flächenteil aus endlich oder unendlich vielen zusammenhängenden Stücken, die entweder schlicht (einblättrig) sind oder je *einen* Windungspunkt enthalten; das entsprechende Stück ist endlich oder unendlich vielblättrig, je nachdem jener Windungspunkt algebraisch oder logarithmisch ist.

Die entsprechende einwertige Abbildungsfunktion  $z(w)$ , welche die konforme Abbildung von  $F(W_1, \dots, W_q)$  vermittelt, ist eindeutig in der Umgebung eines jeden Punktes  $w$ , der außerhalb der Gebiete  $W_\nu$  liegt. Fixiert man wiederum in einem Punkt von  $W_\nu$  einen Zweig  $E_\nu$  der Funktion  $z(w)$  und setzt diesen über das Gebiet  $W_\nu$  fort, so ist  $E_\nu$  entweder eindeutig oder aber es definiert ein algebraisches oder logarithmisches Element der Funktion  $z(w)$ , das also nur *eine kritische Stelle* (Windungsstelle) über  $W_\nu$  hat.

Ist umgekehrt eine einwertige Funktion  $z(w)$  dieser Art vorgegeben, so läßt sich der entsprechende Graph  $G$  und der entsprechende Streckenkomplex  $S$  unmittelbar konstruieren. Man braucht nur die Gebiete  $(W_1, W_2), (W_2, W_3), \dots, (W_q, W_1)$  miteinander durch beliebige Jordanbögen  $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \dots, \gamma_{q1}$  zu verbinden, die außerhalb jener Gebiete verlaufen und punktfremd sind. Das Äußere der Gebiete  $W_\nu$  zerfällt hierbei in zwei Gebiete  $F_1, F_2$ . In der  $z$ -Ebene erhält man als Bilder dieser zwei Gebiete gewisse „Polygone“, und die in dieser Art entstandene Abbildung  $G$  ist mit dem oben erklärten Graph äquivalent, falls man die den Gebieten  $W_\nu$  zugeordneten „Eckgebiete“  $Z_\nu$  auf Punkte  $z_\nu$  zusammenzieht.

In dem zugeordneten Streckenkomplex sind, wie vorher, die *Elementargebiete* den Windungspunkten  $w_\nu^i$  der Fläche  $F$  eineindeutig zugeordnet; außerdem gibt auch die um 2 verminderte Seitenzahl die doppelte Ordnung der Windungspunkte an. Die *Knotenpunkte* entsprechen den „Halbblättern“ der Fläche. Von jedem Knotenpunkt gehen  $q$  *Strecken*  $S_{\nu, \nu+1}$  aus, welche zwei benachbarte Gebiete  $W_\nu, W_{\nu+1}$  voneinander trennen;

wenn zwei benachbarte Strecken  $S_{\nu-1, \nu}$ ,  $S_{\nu, \nu+1}$  zu einer *Doppelstrecke* vereinigt sind, so bedeutet es, daß die Fläche  $F$  über das entsprechende Gebiete  $W_\nu$  *schlicht* verläuft.

**250.** Wir wollen  $F(W_1, \dots, W_q)$  kurz als eine Fläche bezeichnen, deren *Windungspunkte durch die Gebiete  $W_\nu$  getrennt* werden. Es ist evident, daß diese Flächen eine sehr spezielle Unterklasse derjenigen Flächen darstellt, die lauter isolierte Windungspunkte haben. Im folgenden Abschnitt (§ 3) werden wir eine allgemeinere Methode besprechen, welche bei der topologischen Beschreibung einer beliebigen Fläche mit isolierten Singularitäten verwendet werden kann.

### § 3. RIEMANNSCHE FLÄCHEN MIT ENDLICH VIELN WINDUNGSPUNKTEN.

**251.** Unter den in § 2 betrachteten Flächen  $F(w_1, \dots, w_q)$  sind diejenigen die einfachsten, welche nur eine *endliche Anzahl* von Windungspunkten besitzen. Da eine endliche Anzahl algebraischer Windungspunkte keinen wesentlichen Einfluß auf die Eigenschaften haben, welche für die Wertverteilung von Gewicht sind, können wir uns darauf beschränken, sämtliche einfach zusammenhängenden RIEMANNschen Flächen mit endlich vielen Windungspunkten unendlich hoher Ordnung zu bestimmen.

Es mögen wieder in der  $w$ -Ebene  $q$  Grundpunkte  $w_1, \dots, w_q$  beliebig gegeben sein. Wir stellen uns zuerst die Aufgabe, diejenigen einfach zusammenhängenden Flächen  $F_q$  zu konstruieren, welche über jedem jener  $q$  Punkte genau einen Windungspunkt unendlich hoher Ordnung haben.

Der zugehörige Streckenkomplex besitzt dann (vgl. § 2, S. 281)  $q$  logarithmische Enden, welche den  $q$ , den Windungspunkten  $w_\nu$  zugeordneten Elementargebieten entsprechen. Um die möglichen Strukturen besser zu überblicken, wollen wir wieder die einfachsten Fälle näher betrachten.

$q=2$ . Die in der Abb. 18 dargestellte Fläche ist die einzig mögliche. Über den kritischen Stellen  $w_1, w_2$ , wo die zwei logarithmischen Windungspunkte liegen, verlaufen keine schlichten Blätter der Fläche.

$q=3$ . Als einzig möglicher Typus kommt hier die in § 2, Nr. 245 beschriebene Fläche mit drei Elementarpolygonen und drei logarithmischen Enden vor. Es sei darauf aufmerksam gemacht, daß die logarithmischen Enden *Doppelstrecken* enthalten; grenzt eine derselben z. B. an diejenigen Elementargebiete, die den über  $w_1$  und  $w_2$  liegenden Windungspunkten entsprechen, so gibt die Doppelstrecke eine über dem Grundpunkt  $w_3$  befindliche Stelle an, wo die Fläche  $F$  unverzweigt verläuft. Über jedem Grundpunkt  $w_\nu$  liegt also, außer dem logarithmischen Windungspunkt, eine unendliche Anzahl von schlichten Blättern.

$q=4$ . Die vier Elementarpolygone, welche die Windungspunkte  $w_1, \dots, w_4$  darstellen, werden durch vier logarithmische Enden getrennt. Diese laufen entweder von ein und demselben Knotenpunkt aus, der einem Viereck (Halbblatt) entspricht, das an sämtliche vier Windungspunkte angrenzt; oder aber sie gehen paarweise von zwei verschiedenen Knotenpunkten aus, welche zwei Vierecke mit drei verzweigten und einem uneigentlichen, unverzweigten Eckpunkt darstellen. Diese Anfangsvierecke werden entweder durch eine

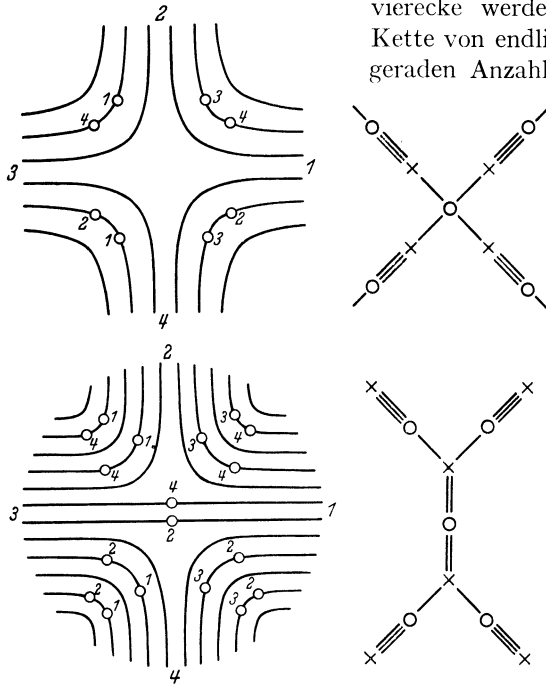


Abb. 23.

Kette von endlich vielen, und zwar einer geraden Anzahl  $2n$  von Doppelstrecken miteinander verbunden (in der nebenstehenden Abb. 23 sind die Fälle  $n=0$  und  $n=2$  sowohl durch Streckenkomplexe wie durch Graphen dargestellt), oder durch eine Streckenkette, welche aus  $n$  dreifachen und  $n+1$  einfachen Strecken besteht.

Entfernt man aus dem Graph alle logarithmischen Enden, die aus einer unendlichen Anzahl nebeneinandergelegter „Streifen“ bestehen<sup>1</sup>, so wird der übrigbleibende Teil des Graphen, als das *Kernpolygon* der Fläche bezeichnet;

ihm entspricht der *Kern*, welcher vom Streckenkomplex übrigbleibt, wenn man in jedem logarithmischen Ende immer nur die Anfangsstrecke übrig läßt.

Die Angabe des Kernpolygons oder des Kerns des Streckenkomplexes bestimmt die Fläche eindeutig.

**252.** Wir kommen jetzt zu dem allgemeinen Fall. Es soll also die Flächen  $F_p$  bestimmt werden, die eine vorgegebene Anzahl  $p = \sum_1^q \mu_v (\geq q)$  von logarithmischen Windungspunkten besitzt, und zwar so, daß von

<sup>1</sup> Als „Streifen“ bezeichnen wir ein Halbblatt, das nur zwei verzweigte Eckpunkte hat, die beide von unendlicher Ordnung sind. Im Streckenkomplex wird ein Streifen durch einen Knotenpunkt dargestellt, der an nur zwei Elementargebiete unendlicher Ordnung angrenzt.



diesen genau gewisse  $\mu_\nu (\geq 1)$  den gegebenen Grundpunkt  $w_\nu$  als Spurpunkt haben. Die ganzen Zahlen  $\mu_\nu \geq 1$  können beliebig vorgeschrieben werden, jedoch so, daß  $\mu_\nu \leq \frac{p}{2}$  ist. Denn zwei benachbarte, an ein und dasselbe logarithmische Ende angrenzende Elementargebiete sind offenbar stets zwei verschiedenen Grundpunkten  $w_\nu$  zugeordnet, und hieraus folgt, daß über einem gegebenen Grundpunkt höchstens die halbe Anzahl sämtlicher Windungspunkte liegen kann.

Unter der angegebenen Bedingung existieren auch immer RIEMANNSCHE FLÄCHEN, welche die gewünschten Eigenschaften haben (R. NEVANLINNA [9], G. ELFVING [1]). Diese Flächen sind eindeutig den Streckenkomplexen zugeordnet, die aus  $p$  logarithmischen Enden und einem, aus endlich vielen Strecken bestehenden Kern zusammengesetzt sind. Der Komplex zerlegt die Ebene in  $p$  Elementargebiete unendlicher Ordnung, entsprechend den  $p$  logarithmischen Windungspunkten. Die Anzahl der Flächen ist unendlich, außer in den einfachsten Fällen  $p = q = 2$  und  $p = q = 3$ , in denen, wie wir gesehen haben, eine einzige Fläche der verlangten Art existiert.

253. Die einfachste Fläche  $F_p$ , welche ein Paar übereinander gelegener Windungspunkte hat, entspricht dem Fall  $p = 4, q = 3$ . Liegt über  $w_2, w_3$  je ein Windungspunkt, über  $w_1$  dagegen zwei solche, so ergeben sich

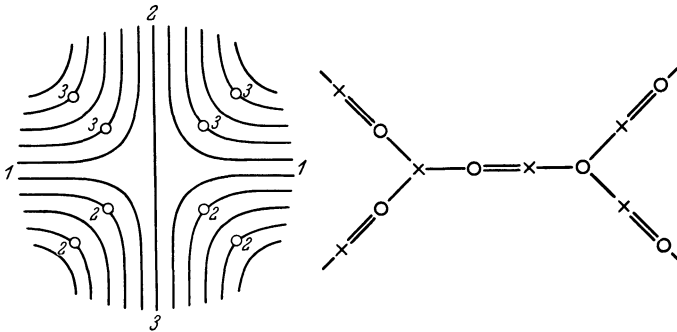


Abb. 24.

sämtliche zugehörigen Flächen aus einem Streckenkomplex, der vier logarithmische Enden (bzw. Elementargebiete) besitzt, welche von zwei Anfangsknotenpunkten ausgehen, die durch eine ungerade Zahl  $2n + 1$  von Strecken ( $n + 1$  einfache und  $n$  Doppelstrecken) miteinander verbunden sind, wie es Abb. 24 zum Ausdruck bringt (links der Fall  $n = 0$ , rechts der Fall  $n = 1$ ).

Aus dem Streckenkomplex ist unmittelbar zu ersehen, daß über der Stelle  $w_1$ , außer den zwei logarithmischen Windungspunkten noch  $n$  unverzweigte Blätter der Fläche zu finden sind. Es sei noch, ohne

weitere Begründung, erwähnt, daß der einfachste Fall  $n=0$  dem Wahrscheinlichkeitsintegral

$$w = \int_0^z e^{-t^2} dt$$

entspricht  $\left(w_1 = \infty, w_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, w_3 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^1$ .

**254.** Das am Schlusse des vorstehenden Paragraphen beschriebene Verfahren durch *rationale Approximation* läßt sich mit Vorteil auch zur Konstruktion der zu den Flächen  $F_p$  zugehörigen Abbildungsfunktionen verwenden. Man schneidet aus dem Streckenkomplex die logarithmischen Enden ab, so daß nur die  $\nu$  ersten Strecken eines jeden Endes übrig bleiben, und fügt dann einen „spiegelbildlich“ angeordneten Komplex hinzu. Der derart entstandene Streckenkomplex entspricht einer rationalen Abbildungsfunktion  $w = w^\nu(z)$ , welche über der Stelle  $w_i$  genau  $\mu_i$  algebraische Windungspunkte hat, jeder von einer Ordnung  $\geq 2\nu - 1$ . Diese rationale Funktion, deren Existenz durch den allgemeinen RIEMANNSCHEN Abbildungssatz B (I, § 2) sichergestellt ist, kann in gewissen symmetrischen Fällen auf elementarem Weg hergestellt werden<sup>2</sup>. Jedem Punkt  $w = w_i$  entsprechen in der  $z$ -Ebene, außer gewissen einfachen Stellen entsprechend den über  $w_i$  verlaufenden schlichten Blättern der Näherungsfläche  $F_p^\nu$ , noch  $\mu_i$  mehrfache Stellen  $z_i$  der Funktion  $w^\nu(z)$ .

Normiert man nun die rationalen Funktionen  $w^\nu(z)$  für  $z=0$  in der auf S. 285 angegebenen Weise, so läßt sich aus der Folge  $w^\nu$  eine Unterfolge auswählen, welche gegen eine analytische Grenzfunktion  $w(z)$  konvergiert<sup>3</sup>, die in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  meromorph ist. Bei diesem Grenzübergang wachsen die Ordnungen der  $p$  Windungspunkte unbeschränkt; die entsprechenden mehrfachen Stellen  $z_i$  rücken hierbei gegen den Rand  $\Gamma$  von  $G$ .

**255.** Es entsteht nun die Frage: besteht  $\Gamma$  aus einem Kontinuum oder aus einem einzigen Punkt; mit anderen Worten: ist die Grenzfläche vom *hyperbolischen* oder vom *parabolischen* Typus? Wir werden zeigen, daß letzteres der Fall ist, daß also die Grenzfunktion  $w(z)$ , bei geeigneter Normierung, in der ganzen Ebene  $z \neq \infty$  meromorph ist.

Zum Beweise betrachten wir die SCHWARZSCHE Ableitung

$$\{w, z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left( \frac{w''}{w'} \right)^2$$

für  $w = w^\nu$ . An jeder Stelle  $z$  der Vollebene, die von den  $p$  mehrfachen Stellen  $z_i^\nu$  der Funktion  $w^\nu$  verschieden ist, ist dieser Ausdruck regulär.

<sup>1</sup> Wegen der analytischen Bestimmung sämtlicher Flächentypen im Falle  $p=4$  vgl. R. NEVANLINNA [9]. Gewisse höhere Fälle sind später von H. WAGNER [1] klargelegt worden.

<sup>2</sup> R. NEVANLINNA [6], G. ELFVING [3].

<sup>3</sup> Bei den erwähnten symmetrischen Flächen läßt sich dieser Grenzprozeß arithmetisch vollständig beherrschen.

Man rechnet ferner leicht nach, daß jede mehrfache Stelle einen Pol zweiter Ordnung ergibt. Also ist die rationale Funktion  $\{w^\nu, z\}$  höchstens vom Grade  $2\phi$ .

Andererseits strebt, für  $\nu \rightarrow \infty$ ,  $w^\nu \rightarrow w(z)$  und daher

$$\{w^\nu, z\} \rightarrow \{w, z\}.$$

Eine Folge von rationalen Funktionen, deren Grade unter einer festen Schranke  $2\phi$  liegen, kann aber als Grenzfunktion immer nur eine rationale Funktion höchstens vom Grade  $2\phi$  haben. *Die SCHWARZSCHE Ableitung der Grenzfunktion  $w(z)$  ist also rational und höchstens vom Grade  $2\phi$ .*

Nun läßt sich leicht schließen, daß die RIEMANNSCHE Fläche von  $F_\phi$  vom parabolischen Typus ist. Die Funktion  $w(z)$  läßt sich nämlich analytisch bis in jede Stelle  $z$  der Ebene fortsetzen, wo der Ausdruck  $\{w, z\}$  regulär ist; also ist  $w(z)$  für jedes  $z$  meromorph, *mit Ausnahme höchstens der Pole von  $\{w, z\}$ .* Andererseits wissen wir, daß das einfach zusammenhängende Gebiet  $G$  das vollständige Existenzgebiet von  $w(z)$  darstellt; jeder Punkt des Randes  $\Gamma$  von  $G$  ist eine wesentliche Singularität. Hieraus folgt, daß  $\Gamma$  kein Kontinuum sein kann, sondern sich auf einen einzigen Punkt reduzieren muß, den wir uns, ohne wesentliche Einschränkung, in  $z = \infty$  verlegt denken können.

**256.** Hierdurch ist nicht allein bewiesen worden, daß die Flächen  $F_\phi$  parabolisch sind, sondern wir haben zugleich ein für die analytische Bestimmung dieser Fläche wichtiges neues Ergebnis gefunden. Da nämlich  $w(z)$  für  $z \neq \infty$  keine mehrfachen Stellen hat, so ist die SCHWARZSCHE Ableitung  $\{w, z\}$  für dieselben Werte  $z$  regulär. Andererseits ist sie eine rationale Funktion, und man schließt infolgedessen

*Die SCHWARZSCHE Ableitung  $\{w, z\}$  reduziert sich auf ein Polynom  $P(z)$ .*

Für die Gradzahl des Polynoms ergibt sich die obere Schranke  $2\phi$ . Eine genauere Untersuchung, auf welche hier verzichtet werden muß, zeigt, daß  $P(z)$  tatsächlich vom Grade  $\phi - 2$  ist. Umgekehrt gilt, daß die Lösung  $w$  der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\{w, z\} = P(z) \tag{1}$$

wo  $P$  ein beliebiges Polynom vom Grade  $\phi - 2$  ist, meromorph ist und die Ebene  $z \neq \infty$  auf eine RIEMANNSCHE Fläche mit  $\phi$  Windungspunkten unendlicher Ordnung abbildet. Die Polynome  $P$  und die RIEMANNSCHE Flächen  $F_\phi$  sind einander eindeutig zugeordnet.

Die zu (1) gehörige meromorphe Funktion ist von der endlichen Ordnung  $\frac{\phi}{2}$ . Die  $z$ -Ebene läßt sich in  $\phi$  gleiche Winkel  $A_\nu$ , der Größe  $\frac{2\pi}{\phi}$  einteilen, so daß  $w(z)$  auf jedem in  $A_\nu$  fallenden Halbstrahl für  $z \rightarrow \infty$  den Zielwert  $w_\nu$  hat.

Diese Resultate lassen sich sämtlich durch asymptotische Integration der Differentialgleichung (1) streng begründen<sup>1</sup>. So läßt es sich auch beweisen, daß die Zielwerte  $w_\nu$  auch *defekte* Werte der meromorphen Abbildungsfunktionen  $w(z)$  sind. Es würde uns jedoch zu weit führen, dies hier näher auszuführen; wir müssen uns darauf beschränken, unter Hinweis auf die betreffenden Originalarbeiten folgendes Resultat ohne Beweis anzugeben:

*Jeder Punkt  $w_\nu$ , über welchem mindestens ein logarithmischer Windungspunkt von  $F_p$  gelegen ist, ist in bezug auf die meromorphe Abbildungsfunktion  $w(z)$  defekt, und zwar liefert jeder Windungspunkt zum entsprechenden Defekt den Beitrag  $\frac{2}{p}$ .*

Der Gesamtdefekt  $\delta(w_\nu)$  von  $w_\nu$  summiert sich also auf  $\frac{2\mu_\nu}{p}$ .

**257.** Diese Eigenschaft der Flächen  $F_p$  erlaubt das schon in Nr. 220 aufgestellte Problem teilweise zu lösen:

*Gegeben sei ein System von  $q$  Punkten  $w_1, \dots, w_q$  und  $q$  Zahlen  $\delta_1, \dots, \delta_q$  des Intervalls  $(0, 1)$  mit  $\sum \delta_\nu = 2$ . Es gilt eine meromorphe Funktion zu konstruieren, welche die Werte  $w_\nu$  als defekte Werte hat mit*

$$\delta(w_\nu) = \delta_\nu \quad (\nu = 1, \dots, q).$$

Eine solche meromorphe Funktion kann mittels der Flächen  $F_p$  stets dann bestimmt werden, wenn die Zahlen  $\delta_\nu$  *rational* sind. Setzt man nämlich  $\delta_\nu = \frac{m_\nu}{m}$ , wo  $m_\nu$  und  $m$  ganze Zahlen sind und voraussetzungsgemäß  $\sum m_\nu = 2m$  sein muß, so setze man  $\mu_\nu = m_\nu$  und konstruiere eine Fläche  $F_p$ , von deren insgesamt  $p = 2m$  Windungspunkten genau  $m_\nu$  über dem vorgegebenen Punkt  $w_\nu$  liegen. Jeder Windungspunkt liefert zum Defekt des Spurpunktes einen Beitrag  $\frac{2}{p} = \frac{1}{m}$ , und der gesamte Defekt des Punktes  $w_\nu$  summiert sich also auf den vorgegebenen Wert  $\frac{m_\nu}{m} = \delta_\nu$ <sup>2</sup>.

#### § 4. Über den Zusammenhang zwischen der Ordnung einer meromorphen Funktion und den kritischen Stellen der Umkehrfunktion.

**258.** Oben wurde erwähnt, daß eine meromorphe Funktion  $w(z)$ , welche die Ebene  $z \neq \infty$  auf eine RIEMANNSCHE Fläche abbildet, die als einzige kritische Stellen eine endliche Anzahl von logarithmischen

<sup>1</sup> Vgl. hierzu: R. NEVANLINNA [9], F. NEVANLINNA [3], E. HILLE [1], [2], L. AHLFORS [6], G. ELFVING [1], [3], H. WAGNER [1].

<sup>2</sup> Nach Beendigung der Redaktion erschien eine interessante Arbeit von E. ULLRICH [4], wo das obige Problem wesentlich erweitert wird. Mit Hilfe einer neuen Klasse von RIEMANNSCHEN Flächen (Flächen mit endlich vielen periodischen Enden) beweist ULLRICH die Existenz von meromorphen Funktionen, welche für endlich viele Stellensorten  $w_1, \dots, w_q$  vorgeschriebene rationalwertige *Defekte* oder *Verzweigungsindizes* mit der Summe 2 aufweisen.

Windungspunkten hat, von der Ordnung  $\frac{p}{2}$  ist. Daß die Ordnung einer solchen Funktion mindestens gleich  $\frac{p}{2}$  sein muß, kann nach folgendem allgemeinen, von AHLFORS [5] herrührenden Satz geschlossen werden:

*Die Anzahl der direkten transzendenten Singularitäten der Umkehrfunktion einer meromorphen Funktion von der Ordnung  $k$  ist für  $k \geq \frac{1}{2}$  höchstens gleich  $2k$  und für  $k < \frac{1}{2}$  höchstens gleich 1.*

Zum Beweise betrachte man eine meromorphe Funktion  $w(z)$ , deren Umkehrfunktion  $z(w)$  mindestens eine direkt kritische Stelle  $a$  hat. Vermittels einer linearen Transformation, welche die Charakteristik  $T(r, w)$  invariant läßt, bringen wir den Spurpunkt einer beliebigen dieser Stellen  $a$  nach  $w = \infty$ . Es gibt dann eine so große Zahl  $\lambda > 1$ , daß der betreffende singuläre Zweig  $z = z(w)$ , im Kreise  $|w| \geq \lambda$  unbeschränkt fortgesetzt, kein über  $w = \infty$  reguläres oder algebraisches Element besitzt. Das Bildgebiet  $G_\lambda$  wird von gewissen analytischen Kurven begrenzt, auf denen  $|w| = \lambda$  ist. In  $G_\lambda$  ist  $\lambda < |w| \neq \infty$  und man schließt hieraus, daß  $G_\lambda$  sich ins Unendliche erstrecken muß, da  $|w|$  sonst konstant gleich  $\lambda$  sein müßte. Man nehme  $\lambda > |w(0)|$ , so daß also der Nullpunkt  $z = 0$  außerhalb  $G_\lambda$  liegt, und bezeichne durch  $\Gamma_\lambda$  diejenige äußere Randkurve von  $G_\lambda$ , welche den Punkt  $z = 0$  vom Gebiete  $G_\lambda$  trennt.  $\Gamma_\lambda$  zerlegt die Ebene in zwei einfach zusammenhängende Gebiete, von denen das eine,  $\bar{G}_\lambda$ , das Gebiet  $G_\lambda$  als Teilgebiet enthält. Man ziehe in  $\bar{G}_\lambda$  einen Querschnitt  $L$ , der einen Randpunkt  $z_0 \neq \infty$  mit dem Randpunkt  $z = \infty$  verbindet und bezeichne mit  $\Theta_r$  denjenigen auf dem Kreis  $|z| = r > |z_0|$  gelegenen, die Punkte  $z_0$  und  $\infty$  trennenden Querschnitt, den der Punkt  $z$  zuerst trifft, wenn er sich auf  $L$  von  $z_0$  bis  $\infty$  bewegt. Die Länge von  $\Theta_r$  sei  $r\theta(r)$ .

**259.** Nach dieser Vorbereitung bilde man das Gebiet  $\bar{G}_\lambda$  auf die obere Halbebene  $\Im \zeta > 0$  konform ab, so daß die Randpunkte  $z = z_0, \infty$  in  $\zeta = 0, \infty$  übergehen; die abbildende Funktion  $\zeta(z)$  ist dadurch bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmt. Der Querschnitt  $\Theta_r$  wird in einen Kurvenbogen transformiert, dessen kürzester Abstand vom Nullpunkt  $\zeta = 0$  gleich  $\rho_1(r)$  sei. Nach dem AHLFORSSchen Verzerrungssatz (IV, § 4) hat man dann bei geeigneter Wahl des obengenannten Faktors

$$\log \rho_1(r) > \pi \int_{r_0}^r \frac{dr}{r \theta(r)}, \tag{2}$$

wo  $r_0 > 0$  so groß gewählt werden soll, daß  $\rho_1(r_0) > 1$  ist.

**260.** Wir betrachten nun die zusammengesetzte Funktion  $w(z(\zeta))$ . In der Halbebene  $\Im \zeta \geq 0$  ist sie meromorph und in dem dem Gebiete  $G_\lambda$  zugeordneten Teilgebiet  $G'_\lambda$  regulär. Innerhalb  $G'_\lambda$  ist ferner  $|w| > \lambda$ ,

und auf dem Rand, der aus der reellen Achse und gewissen innerhalb der Halbebene verlaufenden Kurven  $K_\lambda$  zusammengesetzt ist, gilt  $|w| = \lambda$ . Der Ausdruck

$$u(\zeta) = \log \left| \frac{w}{\lambda} \right|$$

definiert also eine in  $G'_\lambda$  harmonische, positive, in jedem endlichen Randpunkt verschwindende Funktion. Auf dem innerhalb  $G'_\lambda$  liegenden Teil  $\alpha_\varrho$  des Kreises  $|\zeta| = \varrho$  hat  $u$  also ein positives Maximum  $m(\varrho)$ .

Aus dem Maximumprinzip folgt nun unmittelbar, daß  $u(\zeta)$  in jedem Punkt  $\zeta$  des Durchschnittes  $D_\varrho$  von  $|\zeta| < \varrho$  und  $G'_\lambda$  der Beziehung

$$u(\zeta) \leq m(\varrho) \omega(\zeta, \alpha_\varrho, D_\varrho) \quad (3)$$

genügt, wo  $\omega$  das harmonische Maß der Bogen  $\alpha_\varrho$  in bezug auf das Gebiet  $D_\varrho$  bezeichnet. Nach dem Erweiterungsprinzip (IV, § 2) (oder direkt nach dem Maximumprinzip) ergibt sich ferner, daß dieses harmonische Maß sich nur vergrößert, wenn man  $D_\varrho$  durch den Halbkreis  $\Re \zeta > 0, |\zeta| < \varrho$  und  $\alpha_\varrho$  durch den oberen Halbkreisbogen  $|\zeta| = \varrho$  ersetzt. Dieses harmonische Maß  $\omega_\varrho(\zeta)$ , das sich elementar berechnen läßt (vgl. III, § 2, Satz von PHRAGMÉN-LINDELÖF) verschwindet für  $\varrho \rightarrow \infty$  so, daß das Produkt  $\varrho \omega_\varrho$  einem endlichen Grenzwert zustrebt. Da nun  $u(\zeta) > 0$  ist, so folgt aus (5) daß

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{m(\varrho)}{\varrho} > 0 \quad (4)$$

sein muß.

Es sei jetzt  $M(r) = \max |w(z)| (> \lambda)$  auf demjenigen Teil des Querschnittes  $\Theta_r$ , der innerhalb  $G_\lambda$ , liegt. Aus dem Prinzip des Maximums folgt, daß  $\log \frac{M}{\lambda} \geq m(\varrho_1(r))$  ist, und es wird also nach (4)

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{M(r)}{\lambda}}{\varrho_1(r)} > 0.$$

Unter Beachtung der Beziehung (2) ergibt sich schließlich die Existenz einer von  $r$  unabhängigen Zahl  $C$  derart, daß die Ungleichung

$$\log \log M(r) > \pi \int_{r_0}^r \frac{dr}{r \Theta(r)} + C \quad (5)$$

für  $r > r_0$  besteht.

Aus (5) ergibt sich weiter leicht eine untere Schranke für die Charakteristik  $T$ . Es sei  $r_0 < r < r'$  und  $D_{r'}$  der Durchschnitt zwischen dem Kreis  $|z| < r'$  und dem Gebiet  $G_\lambda$ . Wir konstruieren mittels des POISSONschen Integrals eine für  $|z| < r'$  harmonische Funktion  $U(z)$ , welche auf dem zu  $G_\lambda$  gehörenden Bogen  $\Theta_{r'}$  gleich  $\log |w|$  ist und auf den übrigen Bogen  $|z| = r'$  den konstanten Wert  $\lambda$  annimmt. Da  $U(z) > \lambda$  für  $|z| < r'$ , so folgt aus dem Maximumprinzip, daß  $\log |w| - U \leq 0$  in

jedem Punkt des Gebiets  $D_r$  ist. Speziell folgt für denjenigen Wert  $z$ , wo  $|w(z)|$  sein Maximum  $M(r)$  auf  $\Theta_r$  erreicht, daß

$$\begin{aligned} \log M(r) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r'e^{i\vartheta}) \frac{r'^2 - r^2}{r'^2 + r^2 - 2r'r' \cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta \\ &\leq \frac{r' + r}{r' - r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r'e^{i\vartheta}) d\vartheta \\ &\leq \frac{r' + r}{r' - r} (m(r', w) + \log \lambda), \end{aligned}$$

also für  $r' = 2r$

$$T(2r) \geq m(2r, w) \geq \frac{1}{3} \log M(r) - \log \lambda.$$

Nach (5) wird endlich

$$\log T(2r) > \pi \int_{r_0}^r \frac{dr}{r \Theta(r)} + C, \tag{6}$$

wo  $C$  eine neue von  $r$  unabhängige Zahl ist.

**261.** Wir nehmen an, daß die Umkehrfunktion  $z(w)$  von  $w(z)$  mindestens  $p \geq 1$  verschiedene direkt kritische Stellen  $a_1, \dots, a_p, \dots$  hat. Für jedes  $\nu = 1, \dots, p$  konstruieren wir, wie oben, das zugehörige Gebiet  $G_\lambda$ . Wegen der Einwertigkeit von  $z(w)$  können wir die Zahlen  $\lambda > |w(0)|$  so groß wählen, daß diese Gebiete punktfremd sind. Bezeichnet man also durch  $r\Theta_\nu(r)$  ( $\nu = 1, \dots, p$ ) die entsprechenden Längen der Bogen  $\Theta_\nu$ , so wird  $\sum \Theta_\nu(r) \leq 2\pi$  und man erhält, wenn man für jedes  $\nu$  die Ungleichung (6) ansetzt und addiert

$$p \log T(2r) > \pi \int_{r_0}^r \left( \sum_1^n \frac{1}{\Theta_\nu(r)} \right) \frac{dr}{r} + C',$$

wo  $C'$  konstant ist. Nach der SCHWARZSchen Ungleichung ist

$$p^2 = \left( \sum \frac{\sqrt{\Theta_\nu}}{\sqrt{\Theta_\nu}} \right)^2 \leq \sum \Theta_\nu \sum \frac{1}{\Theta_\nu} \leq 2\pi \sum \frac{1}{\Theta_\nu},$$

und es wird folglich

$$\log T(2r) > \frac{p}{2} \log r + \text{const}$$

oder, wenn  $r$  statt  $2r$  geschrieben wird,

$$\log T(r) > \frac{p}{2} \log r + \text{const}.$$

Dies zeigt, daß die Ordnung  $k$  von  $w(z)$  mindestens gleich  $\frac{p}{2}$  ist, so daß also  $p \leq 2k$  ist. Hiermit ist der Beweis zu Ende geführt.

**262.** Der Satz von AHLFORS gestattet eine interessante Anwendung auf eine ganze Funktion  $w(z)$  von der Ordnung  $k$ . Es seien  $L_1$  und  $L_2$

zwei punktfremde *Zielwege*, auf denen die Funktion  $w(z)$  *endliche* Zielwerte hat. Diesen entsprechen zwei transzendente Singularitäten der Umkehrfunktion. Wir betrachten dann eines der zwischen  $L_1$  und  $L_2$  liegenden Gebiete  $G_{12}$ . Wenn  $w$  in  $G_{12}$  beschränkt ist, so müssen nach dem LINDELÖFSchen Satz von III, § 6, Nr. 56 die Zielwerte auf  $L_1$  und  $L_2$  einander gleich sein, und  $w(z)$  strebt für  $|z| \rightarrow \infty$  in  $G_{12}$  gleichmäßig diesem gemeinsamen Zielwert  $a$  zu. Die den Wegen  $L_1, L_2$  zugeordneten transzendenten Singularitäten sind dann untereinander identisch. Man schließt hieraus: Falls  $L_1, L_2$  zwei verschiedenen kritischen Stellen der vorliegenden RIEMANNschen Fläche entsprechen, so kann die Funktion  $w(z)$  in  $G_{12}$  nicht beschränkt sein. Dann aber läßt sich wie in § 1, Nr. 239 dieses Abschnitts ein Weg  $L_{12}$  in  $G_{12}$  konstruieren, auf dem  $w(z)$  den Zielwert  $\infty$  hat. Die entsprechende transzendente Stelle ist direkt, weil  $w(z)$  als eine ganze Funktion den Wert  $w = \infty$  nicht annimmt.

Hat nun  $w(z)$  eine Anzahl  $p$  verschiedener endlicher Zielwerte, so enthält sie also mindestens eine gleich große Anzahl verschiedener über  $w = \infty$  liegender *direkt* kritischer Stellen, und es muß also nach obigem Satz  $p \leq 2k$  sein:

*Eine ganze Funktion von der Ordnung  $k$  hat höchstens  $2k$  verschiedene endliche Zielwerte<sup>1</sup>.*

Wenn unter den endlichen Zielwerten  $m$  direkte und  $n$  nicht direkte sind, so ist die gesamte Anzahl der direkten kritischen Stellen mindestens gleich  $2m + n$  und die obige Relation verschärft sich zu  $2m + n \leq 2k$ . Hieraus folgt insbesondere:

*Die Umkehrfunktion einer ganzen Funktion der Ordnung  $k$  hat höchstens  $k$  im Endlichen gelegene direkt kritische Singularitäten.*

*Wenn die Gesamtzahl der im Endlichen gelegenen transzendenten Singularitäten die maximale Anzahl  $2k$  erreicht, so ist keine von ihnen direkt.*

Letzteres gilt also z. B. für die  $2k$  endlichen Zielwerte der ganzen Funktionen der ganzzahligen Ordnung  $k$

$$\frac{\sin x^k}{x^k} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{\sin x^k}{x^k} dx.$$

## XII. Der Typus einer RIEMANNschen Fläche.

### § 1. Verzweigthet einer RIEMANNschen Fläche.

**263.** Wir beschränken uns in diesem Paragraphen vorerst auf die in XI, § 2 betrachtete Klasse von einfach zusammenhängenden RIEMANN-

<sup>1</sup> Dieser Satz wurde im Jahre 1907 von DENJOY [1] als eine Vermutung ausgesprochen. Daß die Anzahl der endlichen Zielwerte endlich und  $< 5k$  wurde von CARLEMAN [1] durch einen Beweis gezeigt, dessen Grundidee auch dem AHLFORSchen Verfahren zugrunde liegt. Vgl. auch CARLEMAN [2].



schen Flächen  $F_q$  deren Windungspunkte sich auf eine endliche Anzahl  $q$  von Spurlpunkten  $w_1, \dots, w_q$  projizieren. Diese Flächen lassen sich durch die an der erwähnten Stelle erklärten Streckenkomplexe anschaulich darstellen. Jedem Halbblatt von  $F_q$  entspricht ein Knotenpunkt des Streckenkomplexes. Durch die Verbindungsstrecken der Knotenpunkte wird die Ebene in *Elementargebiete* zerlegt, welche den Windungspunkten von  $F$  eindeutig entsprechen, und zwar so, daß einem Windungspunkt der Ordnung  $m-1$  ein Elementargebiet mit  $2m$  Seiten zugeordnet ist. Den über den Grundpunkten unverzweigten Blättern entsprechen Zweiecke (Doppelstrecken) des Komplexes.

Der Typus einer unendlich vielblättrigen Fläche  $F_q$  scheint in einem gewissen Zusammenhang mit dem Grad von deren Verzweigkeit zu stehen. Liegen nur relativ wenige Windungspunkte über den Spurlpunkten  $w_v$ , so wird  $F_q$  zum parabolischen Typus gehören; umgekehrt scheint eine hochgradige Verzweigkeit den hyperbolischen Typus zu bedingen. So haben wir gesehen, daß die schwach verzweigten Flächen  $F_q$  mit nur endlich vielen Windungspunkten sämtlich vom parabolischen Typus sind; die stark verzweigte Modulfläche wiederum gehört dem hyperbolischen Typus an. Es liegt also die Vorstellung nahe, daß ein kritischer Verzweigungsgrad vorhanden sein muß, welcher die schwächer verzweigten parabolischen Flächen von den stärker verzweigten hyperbolischen Flächen trennt.

264. Zu einem einfachen Verfahren, um die Verzweigkeit einer Fläche  $F_q$  zu messen, gelangt man im Falle einer endlich-vielblättrigen, geschlossenen Fläche  $F_q$  folgendermaßen. Man bestimme die Summe  $\sum (m-1)$  der Ordnungen der Windungspunkte und dividiere diese durch die Blätteranzahl  $n$  der Fläche. Der Quotient

$$V = \frac{1}{n} \sum (m-1)$$

gibt die gesamte Verzweigungsordnung pro Blatt an und möge deshalb die *mittlere Verzweigkeit* von  $F_q$  heißen. Nach der RIEMANNschen Formel (EULERSche Polyederformel) wird

$$V = \frac{1}{n} \sum (m-1) = 2 - \frac{2}{n}.$$

Die Berechnung der mittleren Verzweigkeit  $V$  einer geschlossenen Fläche läßt sich mittels des zugehörigen Streckenkomplexes auch folgendermaßen durchführen: Einem Windungspunkt von der Ordnung  $m-1$  entspricht ein Elementargebiet  $W$  mit  $2m$  Seiten und Ecken (Knotenpunkten). Man verteile nun die doppelte Ordnung  $2m-2$  auf jene  $2m$  Knotenpunkte, so daß jeder den „Verzweigungsbeitrag“  $\frac{2m-2}{2m} = 1 - \frac{1}{m}$  erhält. Wiederholt man dies für sämtliche Elementargebiete  $W$ , so wird

jedem Knotenpunkt  $P$  des Komplexes die „gesamte Verzweigung“

$$V_P = \sum_W \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

zugeteilt, wo über sämtliche an  $P$  grenzende Elementarpolygone  $W$  zu summieren ist. Die Gesamtanzahl der Knotenpunkte  $P$  ist gleich der doppelten Blätterzahl  $2n$  und das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{2n} \sum_P V_P$$

der Verzweigungen sämtlicher Knotenpunkte ist offenbar gleich der oben definierten mittleren Verzweigung  $V$  der Fläche  $F_q$ .

**265.** Das zuletzt besprochene Verfahren läßt sich unmittelbar auf eine unendlich vielblättrige Fläche  $F_q$  anwenden. Jedem Knotenpunkt  $P$  des entsprechenden Streckenkomplexes wird als „Verzweigung“ die Zahl  $V_P$  zugeordnet. Da  $1 - \frac{1}{m}$  zwischen den Grenzen 0 ( $m=1$ ) und 1 ( $m=\infty$ ) variiert, und jeder Punkt  $P$  an mindestens 2 und höchstens  $q$  Elementargebiete von positiver Ordnung  $m-1$  grenzt, so ist  $1 \leq V_P \leq q$ .

Da  $F_q$  unendlich viele Blätter hat, so läßt sich die Mittelbildung der Verzweigungen  $V_q$  jetzt nur so ausführen, daß man den Streckenkomplex  $F_q$  durch eine unendliche Folge von Teilkomplexen  $F_q^\nu$  ( $\nu=1, 2, \dots$ ) mit unbeschränkt wachsender Knotenpunktzahl ausschöpft. Das Ergebnis eines derartigen Grenzprozesses wird im allgemeinen wesentlich davon abhängen, wie die Folge  $F_q^\nu$  gewählt wird. Eine naheliegende Methode besteht in einer *kranzförmigen Ausschöpfung* von  $F_q$ . Von einem beliebigen Anfangsknotenpunkt  $P_0$  ausgehend, werden zu diesem die unmittelbar angrenzenden Knotenpunkte  $P_1$  (erste Generation) hinzugefügt, zu den Punkten  $P_0, P_1$  dann die nachfolgenden neuen, von den Punkten  $P_1$  um eine Komplexstrecke entfernten Knotenpunkte  $P_2$  (zweite Generation) hinzugenommen, usw. in infinitum. Als Näherungskomplex  $F_q^\nu$  nehme man dann denjenigen Teil von  $F_q$ , der nur die  $\nu$  ersten Generationen enthält.

Bezeichnet  $n_\nu$  die Anzahl der Knotenpunkte von  $F_q^\nu$ , so bilde man die mittlere Verzweigung der Näherungsfläche  $F_q^\nu$  durch den Ausdruck

$$V_\nu = \frac{1}{n_\nu} \sum_{F_q^\nu} V_P.$$

Der Grenzwert

$$V = \lim_{\nu \rightarrow \infty} V_\nu$$

werde jetzt als die *mittlere Verzweigung* der transzendenten Fläche  $F_q$  definiert. Falls dieser Grenzwert nicht existiert, so kann nur von einer „unteren“ und „oberen“ Verzweigung der Fläche ( $\liminf V_\nu$  bzw.  $\limsup V_\nu$ ) die Rede sein.

266. Bevor wir zu einer näheren Betrachtung der so erklärten Verzweigkeit übergehen, wollen wir noch eine andere für die später folgenden Erklärungen wichtige Methode zur Berechnung der oben definierten Näherungszahlen  $V_v$  besprechen. Dem Streckenkomplex  $F_q^v$  entspricht ein aus  $2n = n_v$  Halbblättern zusammengesetztes Stück der über die  $w$ -Ebene ausgebreiteten RIEMANNschen Fläche  $F_q$ . Es sei  $a$  ein beliebiger Punkt der Ebene,  $n(a)$  die Zahl der inneren Punkte von  $F_q^v$  über  $a$  und  $\bar{n}(a)$  die Anzahl der innerhalb  $F_q^v$  liegenden verschiedenen Blätterzyklen: jedes über  $a$  schlicht verlaufende Blatt und jeder algebraische Windungspunkt über  $a$  von  $F_q^v$  liefert also zu  $\bar{n}(a)$  den Beitrag 1. Die über  $a$  befindlichen logarithmischen Windungspunkte, die ja Randpunkte von  $F_q$  sind und also nie innerhalb  $F_q^v$  liegen können, geben zu  $n(a)$  oder  $\bar{n}(a)$  keine Beiträge. Es ist offenbar  $\bar{n}(a) \leq n(a) \leq n$ , wo Gleichheit für alle Werte besteht außer für die Punkte  $a = w_i (i = 1, \dots, q)$ , auf die die Windungspunkte sich projizieren. Die Differenz  $n(a) - \bar{n}(a)$  gibt die gesamte Ordnung der über  $w = a$  liegenden algebraischen Windungspunkte von  $F_q^v$  an, während  $n - n(a)$  gleich der Anzahl derjenigen Blätter ist, welche an der Stelle  $w = a$  an einen logarithmischen Windungspunkt grenzen.

Die Summe

$$\sum_{(a)} (n - n(a)) = \sum_{(a)} (n - n(a)) + \sum_{(a)} (n(a) - \bar{n}(a)),$$

wo über alle Werte  $a$  zu summieren ist, erhält nur aus den Windungspunkten positive Beiträge. Jedes Glied ist offenbar gleich dem halben Betrag der Summe  $\sum V_P$ , wo über die Knotenpunkte  $P$  derjenigen Elementargebiete zu summieren ist, welche der Stelle  $a$  zugeordnet sind. Die Gesamtsumme ist also gleich dem oben definierten Ausdruck  $\frac{1}{2} \sum V_P$ , und es wird somit, da die Anzahl  $n_v$  der Knotenpunkte von  $F_q^v$  gleich der doppelten Blätteranzahl ist,

$$V_v = \frac{1}{n_v} \sum_P V_P = \sum_{(a)} \left(1 - \frac{\bar{n}(a)}{n}\right) = \sum_{(a)} \left(1 - \frac{n(a)}{n}\right) + \sum_a \frac{n(a) - \bar{n}(a)}{n}.$$

267. Die Verzweigkeit gestattet noch eine beachtenswerte geometrische Deutung mittels des der Fläche zugeordneten Graphen  $G$  (vgl. XI, § 2). Als Bild eines Halbblattes der RIEMANNschen Fläche hat man in  $G$  ein  $q$ -Eck (Fundamentalpolygon  $P$ ), dessen Eckpunkte den Spurpunkten  $w_1, \dots, w_q$  zugeordnet sind. Wir führen in  $G$  eine Winkelmetrik ein, indem wir einem Winkel, dessen Spitze einem Windungspunkt  $(m - 1)$ -ter Ordnung entspricht, das Maß  $\frac{\pi}{m}$  erteilen. Aus naheliegenden Gründen bezeichnen wir die durch  $\pi$  geteilte Winkelsumme  $\sum \frac{1}{m}$ , vermindert um  $q - 2$  (d. h. um die durch  $\pi$  geteilte Winkelsumme

eines euklidischen geradlinigen  $q$ -Ecks) als den Exzeß  $E_p$  des Polygons:

$$E_p = \sum \frac{1}{m} - q + 2.$$

Andererseits hatten wir für die Verzweigkeit des zugeordneten Knotenpunktes  $P$  des Streckenkomplexes den Ausdruck

$$V_p = \sum \left(1 - \frac{1}{m}\right) = q - \sum \frac{1}{m}$$

und es ergibt sich also:

*Die Verzweigkeit  $V_p$  eines Fundamentalpolygons  $P$  vermehrt um dessen Exzeß ist gleich 2.*

**268.** Was läßt sich nun über den Betrag der mittleren Verzweigkeit einer RIEMANNschen Fläche  $F_q$  schließen? Für die  $n$ -blättrige Fläche einer rationalen Funktion ist  $V = \frac{1}{n} \sum V_p = 2 - \frac{2}{n}$ , also stets kleiner als 2, und der mittlere Exzeß  $\frac{1}{n} \sum E_p$  positiv. Mit Hilfe der EULERSchen Polyederformel ist es nun leicht einzusehen, daß die (untere) mittlere Verzweigkeit  $V$  einer transzendenten Fläche  $F_q$  mindestens gleich 2 sein muß; andererseits ist  $V_p \leq q$  und daher auch der Mittelwert  $V \leq q$ .

**269.** Um die hier vorkommenden Verhältnisse näher zu beleuchten, betrachten wir vorerst den einfachen Fall einer *regulär* verzweigten Fläche, für welche die mittlere Verzweigkeit  $V$  mit der Verzweigkeit  $V_p$  eines beliebigen Fundamentalpolygons übereinstimmt. Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Der elliptische Fall tritt ein, wenn  $V < 2$  ist. Führt man in der  $z$ -Ebene eine sphärische Metrik ein, so können die Fundamentalpolygone als ein geodätisches Kreisbogenpolygon so gewählt werden, daß der Winkelexzeß gleich  $\pi E$  wird, wo  $E = E_p$  der oben erklärte Exzeß ist. Die entsprechende rationale Abbildungsfunktion  $w(z)$  ist eine Ikosaederfunktion.

2. Wenn  $V = 2$ ,  $E = 0$  ist, so hat man es mit dem parabolischen Fall zu tun. Die Fundamentalpolygone können als gewöhnliche euklidische Polygone mit verschwindendem Winkelexzeß genommen werden, und  $w(z)$  ist doppeltperiodisch (XI, § 2).

3. Für  $V > 2$ ,  $E < 0$  tritt der hyperbolische Fall ein. Die Funktion  $w(z)$  ist in einem Kreis, z. B. in  $|z| < 1$ , als eine automorphe Funktion definiert. Führt man hier die POINCARÉsche Maßbestimmung (I, § 4) ein, so gilt die LOBATSCHESKYSche Geometrie und die Polygone  $P$  können als geodätische Kreisbogenpolygone gewählt werden mit dem Winkeldefekt  $\pi|E|$ . Der Maximalwert  $V = q$  kommt bei der universellen Überlagerungsfläche  $F_q^\infty$  der bei  $w_1, \dots, w_q$  punktierten  $w$ -Ebene vor.

**270.** Geht man nun zu den nichtregulär verzweigten Flächen  $F_q$  über, so läßt sich, wie wir gesehen haben, immer noch eine *Winkelmetrik* einführen. Falls diese im Mittel sphärisch ist, d. h. falls  $V < 2$ ,  $E > 0$  ist, so liegt der elliptische Fall vor. Was nun die transzendenten Flächen  $F_q$  betrifft, so erhebt sich folgende Frage:

**Problem.** *Liegt allgemein der parabolische oder der hyperbolische Fall vor, je nachdem die Winkelgeometrie der Fläche  $F_q$  „euklidisch“ oder „lobatschewskysch“ ist, d. h. je nachdem der mittlere Exzeß  $E = 2 - V$  gleich Null oder negativ ist?*

Dem Verfasser sind keine Beispiele von Flächen  $F_q$  bekannt, für welche die vermutete Beziehung nicht bestehen würde<sup>1</sup>. Außer für die regulär verzweigten Flächen, läßt sich dies noch für gewisse andere einfache Unterklassen der Flächen  $F_q$  mittels der Defektrelationen streng begründen, wie im § 2 dieses Abschnitts gezeigt werden soll.

Alles was hier für die Flächen  $F_q$  ausgeführt worden ist, läßt sich unverändert für die allgemeinere Klasse von Flächen  $F(W_1, \dots, W_q)$  wiederholen, deren Windungspunkte durch gegebene, punktfremde Gebiete  $W_p$  der  $w$ -Ebene getrennt sind (vgl. XI, § 2 Nr. 250).

## § 2. Defektrelationen und Verzweigkeit.

**271.** Daß die allgemeinen Defektrelationen als Aussagen über die Singularitäten der einfach zusammenhängenden RIEMANNSchen Flächen gedeutet werden können, ist fast unmittelbar einleuchtend und wurde auch im Laufe unserer Darstellung bereits mehrfach betont. Die in § 1 enthaltenen Auseinandersetzungen gestatten uns tiefer in das Wesen dieser Zusammenhänge einzudringen. Wir haben dort für die relativ einfach aufgebauten Flächen  $F_q$  (oder  $F(W_1, \dots, W_q)$ ) mit lauter isolierten Windungspunkten eine Art von „kranzförmiger Ausschöpfung“ der Fläche erklärt, die uns zum Begriff der mittleren Verzweigkeit  $V$  der Fläche führte. Nun beruht auch das Verfahren, welches der allgemeinen Wertverteilungslehre einer ganz beliebigen, offenen einfach-zusammenhängenden RIEMANNSchen Fläche  $F$  zugrunde liegt, auf einem Näherungsprozeß, durch welchen die Fläche, wenn auch in ganz anderer Art, ausgeschöpft wird. Hier wird nämlich die Näherungsfläche nicht durch das Zusammenfügen einer endlichen Anzahl von „Blättern“ von  $F$  hergestellt; dies würde in den allgemeinsten Fällen gar nicht möglich sein, da eine natürliche, allgemein gültige Regel für die Zerlegung in „Blätter“ sich kaum aufstellen läßt. In der Tat wird die Näherungsfläche, ohne Rücksicht auf den Verzweigungscharakter von  $F$ , durch

<sup>1</sup> Dies gilt offenbar z. B. für die Flächen  $F_q$  mit endlich vielen Windungspunkten. Für diese ist ja  $E_P = 0$ , außer höchstens für endlich viele Punkte, und daher auch  $E = 0$ . In Übereinstimmung hiermit ist der Typus dieser Flächen parabolisch.

Einführung einer gewissen Maßbestimmung auf  $F$  erklärt; für jedes  $r > 0$  werden diejenigen Punkte der Fläche in Betracht gezogen, deren Bildpunkte im Kreise  $|z| < R (\leq \infty)$  in das Innere des Kreises  $|z| < r$  fallen. Die derart erklärte Teilfläche  $F_r$  geht für  $r \rightarrow R$  in die gegebene Fläche  $F$  über.

Obwohl die Fläche  $F_r$  also vermittels eines ganz anderen Konstruktionsprinzips hergestellt ist als die Näherungsflächen  $F_q^v$  der Flächen  $F_q$  in § 1, so lassen sich ihr gewisse, den Begriffen von § 1 analoge Größen zuordnen, welche in etwas modifizierter Form die Verzweigkeit jener Fläche beschreiben. Nach dem Vorbild von Nr. 266 könnte man nämlich folgendermaßen vorgehen: Für ein gegebenes  $r < R$  berechne man die Anzahl der Blätter des RIEMANNSCHEN Flächenstücks  $F_r$ , welche über einer gegebenen Stelle  $w = a$  liegen. Diese Anzahl ist nichts anderes als die früher durch  $n(r, a)$  bezeichnete Anzahl der Wurzeln der Gleichung  $w(z) = a$  im Kreise  $|z| \leq r$ . Alsdann fasse man sämtliche über  $a$  befindlichen verschiedenen Blätterzyklen ins Auge: die Anzahl derselben ist gleich der Anzahl  $n(r, a)$  der *verschiedenen* Punkte  $z$  in  $|z| \leq r$ , für welche  $w(z)$  gleich  $a$  wird. Die nichtnegative Größe  $n(r, a) - \bar{n}(r, a)$  gibt die gesamte Ordnung der über  $w = a$  gelegenen algebraischen Windungspunkte von  $F_r$  an. Bezeichnet man nun durch  $n(r)$  die größte der Anzahlen  $n(r, a)$  für alle Werte  $a$  (eine Größe, welche als die „Blätterzahl“ von  $F_r$  erklärt werden kann) und bildet man die Differenz (vgl. hierzu Nr. 266)

$$n(r) - n(r, a) = (n(r) - n(r, a)) + (n(r, a) - \bar{n}(r, a)),$$

so wird dieser Ausdruck für alle Werte  $a$  verschwinden, außer für diejenigen, welche Spurpunkte algebraischer Windungspunkte von  $F$  sind, oder für welche die Blätteranzahl  $n(r, a)$  *kleiner* ist als die Maximalanzahl  $n(r)$  der Blätter der Fläche  $F_r$ . Das erste Glied der rechten Seite der obenstehenden Identität gibt die Anzahl der fehlenden Blätter an; falls nun  $a$  eine direkte transzendente Singularität der Fläche  $F$  ist, so wird sich diese um  $a$  winden, und die Größe  $n(r) - n(r, a)$  wächst für  $r \rightarrow R$  unbeschränkt. Jene Differenz gibt also gewissermaßen ein Maß für die Stärke der „transzendenten Verzweigkeit“ der Fläche  $F$  über  $a$  an.

Mittels des Ausdrucks  $n(r) - \bar{n}(r, a)$  kann man in Analogie mit dem Verfahren von Nr. 266 eine Art von „mittlerer Verzweigkeit“ bilden; für diese ergibt sich der Ausdruck

$$\frac{n(r) - \bar{n}(r, a)}{n(r)} = \frac{n(r) - n(r, a)}{n(r)} + \frac{n(r, a) - \bar{n}(r, a)}{n(r)}.$$

**272.** Mit Rücksicht darauf, daß die Fundamentalsätze der Wertverteilungslehre nicht mit den Größen  $n$  sondern mit den Mittelwerten  $N$  operieren, wollen wir auch in den obigen Ausdrücken die Anzahlen  $n$ ,  $\bar{n}$  durch die Anzahlintegrale

$$N(r, a) = \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \log r,$$

$$\bar{N}(r, a) = \int_0^r \frac{\bar{n}(t, a) - \bar{n}(0, a)}{t} dt + \bar{n}(0, a) \log r$$

ersetzen. Führt man noch, statt der Maximalanzahl  $n(r)$ , das Maximum

$$N(r) = \max_{(a)} N(r, a)$$

ein, so wird nach dem ersten Hauptsatz und den in VI, § 4 gegebenen Zusätzen desselben

$$\frac{N(r)}{T(r)} \rightarrow 1 \quad \text{für } r \rightarrow R$$

für jede nichtbeschränktartige Funktion, deren Charakteristik also für  $r \rightarrow R$  unbeschränkt wächst. Werden also die Größen  $N$  statt  $n$  eingeführt und überdies noch  $N(r)$  durch den asymptotisch gleichwertigen Ausdruck  $T(r)$  ersetzt, so findet man für die „mittlere Verzweigkeit“ der Fläche  $F_r$  über der Stelle  $w = a$  den Ausdruck

$$\delta(r, a) + \vartheta(r, a) = \Theta(r, a),$$

wo

$$\delta(r, a) = 1 - \frac{N(r, a)}{T(r)}, \quad \vartheta(r, a) = \frac{N(r, a) - \bar{N}(r, a)}{T(r)},$$

$$\Theta(r, a) = 1 - \frac{\bar{N}(r, a)}{T(r)}.$$

Hierbei kann  $\vartheta(r, a)$  als eine mittlere Ordnung der über  $a$  gelegenen algebraischen Windungspunkte gedeutet werden, während  $\delta(r, a)$  ein Maß für die „transzendente Verzweigkeit“ der Fläche  $F_r$  über der Stelle  $w = a$  angibt;  $\Theta(r, a)$  ist die „totale Verzweigkeit“ der Stelle  $a$ .

In dieser Art haben wir auch den Anschluß an die Fundamentalgrößen der allgemeinen Wertverteilungslehre gewonnen. Die unteren Grenzen der obigen drei Ausdrücke für  $r = R$  sind nichts anderes als der „totale Verzweigungsindex  $\Theta(a)$ “, der Defekt  $\delta(a)$  und der Index  $\vartheta(a)$  der algebraischen Verzweigkeit für den Wert  $a$ . Die Summen

$$\sum \delta(a) + \sum \vartheta(a)$$

oder auch der mindestens gleichgroße Ausdruck

$$\Theta = \sum \Theta(a)$$

können also als die „gesamte mittlere Verzweigkeit“ der nichtbeschränktartigen RIEMANNschen Fläche  $F$  gedeutet werden. Die Analogie mit dem in § 1 erklärten Begriff der mittleren Verzweigkeit  $V$  einer RIEMANNschen Fläche der Klasse  $F_q$  [oder allgemeiner  $F(W_1, \dots, W_q)$ ] leuchtet ohne weiteres ein.

**273.** Über die Verzweigkeit  $\Theta$  enthält der zweite Hauptsatz bemerkenswerte Aufschlüsse. Im Zusammenhang mit dem Typenproblem verdient vor allem die nachfolgende Folgerung desselben Beachtung (X, § 3):

Falls die totale Verzweigkeit einer einfach zusammenhängenden RIEMANNschen Fläche größer als 2 ist:

$$\Theta = \sum \Theta(a) > 2,$$

so gehört die Fläche dem hyperbolischen Typus an.

Was läßt sich hieraus über die spezielle Flächenklasse  $F_q$  schließen, deren Verzweigkeit, außer durch die allgemein anwendbare Größe  $\Theta$ , auch mittels der auf einer kranzförmigen Ausschöpfung beruhenden Größe  $V$  von § 1 charakterisiert werden kann? Würde die Beziehung  $V > 2$  stets die Relation  $\Theta > 2$  nach sich ziehen, so würde es also für das Eintreten des hyperbolischen Typus hinreichend sein, daß die mittlere Verzweigkeit  $V$  der Flächen  $F_q$  größer als 2 ist. Mit Berücksichtigung der in § 1 gegebenen geometrischen Deutung der Größe  $V$  könnte man also dann schließen, daß, wie auf S. 301 vermutet wurde, das Bestehen der LOBATSCHESKYschen Winkelgeometrie im Mittel eine hinreichende Bedingung für das Eintreten des hyperbolischen Falles wäre.

Daß nun aber  $\Theta > 2$  keine notwendige Folgerung aus  $V > 2$  ist, läßt sich durch Beispiele nachweisen. Es gibt jedoch einen interessanten Spezialfall wo dies sicher gilt: der Fall einer über  $q \geq 5$  Grundpunkten  $w_1, \dots, w_q$  vollständig verzweigten Fläche; einer Fläche also, die über den Grundpunkten  $w_v$  in keinem Blatt schlicht verläuft (vgl. X, § 3). Für diese Flächen wird, wie man unmittelbar bestätigt, die nach § 1 bestimmte mittlere Verzweigkeit  $V > 2$ ; ihre „Winkelgeometrie“ ist also im Mittel lobatschewskysch. Andererseits ist aber, wie bereits in X, § 3 gezeigt wurde, die zugehörige Größe  $\Theta$  auch stets  $> 2$  und die Fläche gehört also zum hyperbolischen Typus. In sämtlichen bisher betrachteten Beispielen von Flächen der Klasse  $F_q$  besteht die Identität  $V = \Theta$ . Gilt dies nun für jede Fläche jener Klasse? Wenn dem so wäre, so müßte es auch Flächen  $F_q$  vom hyperbolischen Typus geben, für welche  $V = 2$  und die Winkelgeometrie also euklidisch sein würde, wodurch ein Teil der Vermutung von S. 301 widerlegt wäre, indem die nichteuklidische Winkelgeometrie sich als eine nicht unbedingt notwendige Eigenschaft des hyperbolischen Typus erwiesen hätte. In der Tat kann man leicht Beispiele von Flächen  $F_q$  angeben, welche dem hyperbolischen Typus angehören und bei denen die für  $r < 1$  definierte Charakteristik  $T(r)$  für  $r \rightarrow 1$  so schnell ins Unendliche wächst, daß

$$T(r) : \log \frac{1}{1-r} \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Für eine Fläche dieser Art gelten noch die Defektrelationen (vgl. Nr. 223), und es ist also  $\Theta \leq 2$ . Wäre nun also für jene Flächen allgemein  $V = \Theta$ , so hätte man also auch  $V \leq 2$ .

**274.** Es zeigt sich indes, daß die Beziehung  $V = \Theta$  keineswegs für sämtliche Flächen  $F$  von der Eigenschaft (1) gilt. Im Gegenteil: dem Verfasser ist kein Beispiel der Klasse (1) bekannt, wo nicht  $V > 2 (\geq \Theta)$



sein würde. Ohne Einzelheiten auszuführen, möge hier ein Beispiel Platz finden, das für die vorliegenden Verhältnisse aufschlußreich ist.

Es sei  $F(0, 1, \infty)$  die universelle Überlagerungsfläche der dreifach punktierten Ebene, die auf S. 12 durch einen topologischen Baum dargestellt ist, und  $f(z)$  die für  $|z| < 1$  erklärte automorphe Abbildungsfunktion (Modulfunktion). Die Funktion

$$w = e^{f(t)}$$

bildet dann den Einheitskreis auf eine RIEMANNSche Fläche  $F_4$  ab, die über  $w = 0, \infty$  vollständig verzweigt ist und über  $w = 1$  und  $w = e$  neben unendlich vielen logarithmischen Windungspunkten, eine unendliche Anzahl von schlichten Blättern besitzt; diese hyperbolische Fläche gehört zur Klasse  $F(0, 1, e, \infty)$ . Man konstruiert den entsprechenden topologischen Baum einfach aus dem Baum der Modulfläche (S. 12) indem man, in jedem dem Grundpunkt  $w = \infty$  zugeordneten Elementargebiet, an jeden Knotenpunkt ein logarithmisches Ende anhängt. Schöpft man nun diese Fläche kranzartig aus, so ergibt sich für die mittlere Verzweigkeit der Wert  $V = 3$ . Andererseits überzeugt man sich leicht davon, daß die Charakteristik  $T(r)$  von der Größenordnung  $e^{\frac{1}{1-r}}$  ist, und es muß also gemäß dem zweiten Hauptsatz  $\Theta \leq 2$  sein; tatsächlich ist  $\Theta = 2$ , weil  $w = 0, w = \infty$  als PICARDSche Ausnahmewerte den Defekt 1 haben und also schon  $\sum \delta = 2$  ist.

Ein tieferes Eindringen in das Typenproblem setzt für die Flächen  $F(w_1, \dots, w_q)$  eine genauere Einsicht in die zwischen den Größen  $V$  und  $\Theta$  bestehenden Beziehungen voraus.

### § 3. Hinreichende Bedingungen für den parabolischen Fall.

275. Die Sätze der Wertverteilungslehre enthalten nur notwendige Bedingungen für den parabolischen Flächentypus bzw. hinreichende Bedingungen für den hyperbolischen Typus. Sie besagen, daß die Flächen dem letztgenannten Typus angehören, sobald ihre Verzweigkeit, gemessen mit den Fundamentalgrößen der Wertverteilungstheorie, eine gewisse Grenze überschreitet. In gleicher Richtung können die Sätze von IVERSEN und GROSS (XI, § 1) gedeutet werden. Alle diese Ergebnisse sind indes vom Standpunkt der Typenfrage immer noch als sehr unvollständig zu betrachten, selbst dann, wenn man sich auf die Betrachtung der relativ einfachen Flächenklasse  $F(W_1, \dots, W_q)$  beschränkt.

Hinreichende Bedingungen für das Eintreten des parabolischen Falles sind im Laufe der vorangehenden Untersuchung nur im Zusammenhang mit gewissen ganz speziellen Flächenklassen zur Sprache gekommen. Für die regulär verzweigten Flächen ist das Bestehen der Beziehung  $V = \Theta = 2$  sowohl eine notwendige als hinreichende Eigenschaft des parabolischen Typus. Wir haben ferner gesehen, daß die

Flächen mit nur endlich vielen Windungspunkten stets parabolisch sind. Im folgenden stellen wir uns die Aufgabe, allgemeinere hinreichende Kriterien für Flächen mit lauter isolierten Windungspunkten, also speziell für die Klasse  $F(W_1, \dots, W_q)$  aufzustellen.

**276.** Zu diesem Zweck beweisen wir zuerst den<sup>1</sup>

**Hilfssatz.** *Es sei  $U(z)$  eine auf der Kreisfläche  $|z| < R < \infty$  erklärte, bis auf isolierte Punkte stetige, reelle Funktion von  $z = x + iy$ , welche nachstehenden Bedingungen genügt:*

1. *An den Unstetigkeitspunkten ist  $U = +\infty$ .*
2. *Die partiellen Ableitungen erster Ordnung von  $U$  sind stetig, mit Ausnahme von gewissen glatten Kurvenbogen  $\gamma$  die innerhalb  $|z| < R$  isoliert verlaufen, d. h. in der Umgebung jedes Punktes jener Kreisfläche liegt höchstens eine endliche Anzahl glatter Kurvenstücke  $\gamma$ , auf denen die Ableitungen möglicherweise unstetig sind.*
3.  *$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 > 0$ , höchstens mit Ausnahme von isolierten Punkten des Kreisinnern  $|z| < R$ .*
4. *Es strebt  $U(z) \rightarrow +\infty$  für  $|z| \rightarrow R$ .*

Sei ferner  $|\text{grad } U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}$  und, für  $\varrho \geq \min U$ ,

$$L(\varrho) = \int_{U=\varrho} |\text{grad } U| |dz| = \int_{U=\varrho} \left| \frac{\partial U}{\partial n} \right| |dz|, \quad (2)$$

wo das Integral über die Niveaukurven  $U(z) = \varrho$  zu erstrecken ist, welche für alle hinreichend großen Werte  $\varrho$  aus einer endlichen Anzahl geschlossener glatter Kurven zusammengesetzt sind.

Unter diesen Bedingungen ist das Integral

$$\int \frac{d\varrho}{L(\varrho)} \quad (3)$$

konvergent.

*Beweis.* Es sei  $\varrho_0 > U(0)$  und  $r_0 (> 0)$  die kürzeste Entfernung von  $z=0$  nach der Kurve  $U = \varrho \geq \varrho_0$ . Diese enthält dann einen geschlossenen Zweig, der die Kreisfläche  $|z| \leq r_0$  umgibt und deren Bogenlänge also mindestens  $2\pi r_0$  ist. Die Verwendung der SCHWARZschen Ungleichung ergibt dann

$$\begin{aligned} 4\pi^2 r_0^2 &\leq \left( \int_{U=\varrho} |dz| \right)^2 = \left( \int_{U=\varrho} \sqrt{\left| \frac{\partial U}{\partial n} \right|} \frac{|dz|}{\sqrt{\left| \frac{\partial U}{\partial n} \right|}} \right)^2 \\ &\leq \int_{U=\varrho} \left| \frac{\partial U}{\partial n} \right| |dz| \int_{U=\varrho} \frac{|dz|}{\left| \frac{\partial U}{\partial n} \right|} = L(\varrho) \frac{dA(\varrho)}{d\varrho}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> AHLFORS [9]. Die im Text gegebene Darstellung verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn AHLFORS.

wo

$$\frac{dA}{d\varrho} = \int_{U=\varrho} \frac{|dz|}{\left| \frac{\partial U}{\partial n} \right|}$$

die Ableitung des Flächeninhalts  $A(\varrho)$  der Fläche  $U < \varrho$  ist. Durch Integration findet man für  $\varrho \geq \varrho_0$

$$A(\varrho) - A(\varrho_0) \geq 4\pi^2 r_0^2 \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d\varrho}{L(\varrho)},$$

und es wird, da  $A < \pi R^2$  ist, für jedes  $\varrho \geq \varrho_0$

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d\varrho}{L(\varrho)} < \frac{1}{4\pi} \left( \frac{R}{r_0} \right)^2,$$

woraus die Behauptung folgt.

*Bemerkung.* Der Satz gilt nicht mehr für  $R = \infty$ . Setzt man nämlich  $U(z) = \log^+ |z|$ , so wird, für  $\log |z| = \varrho > 1$ ,  $|\text{grad } U| = \frac{1}{|z|} = e^{-\varrho}$  und daher  $L(\varrho) = 2\pi |z| e^{-\varrho} = 2\pi$ . Das Integral (3) wird also unendlich.

**277.** Die Bedeutung dieses Ergebnisses für das Typenproblem beruht darauf, daß der Ausdruck  $L(\varrho)$ , und somit auch das Integral (3), eine gegenüber analytischen Transformationen der Veränderlichen  $z$  *invariante* Größe darstellt. Führt man nämlich statt  $z$  eine neue Veränderliche  $w = w(z)$ ,  $z = z(w)$  ein, wo  $w(z)$  eine für  $|z| < R$  eindeutige analytische Funktion von  $z$  ist, so wird für die zusammengesetzte Funktion  $U(z(w))$ , die eine eindeutige Funktion der Punkte  $P_w$  derjenigen RIEMANNschen Fläche ist, auf welche der Kreis  $|z| < R$  abgebildet ist,

$$\int_{U=\varrho} |\text{grad}_w U| |dw| = \int_{U=\varrho} |\text{grad}_z U| \left| \frac{dz}{dw} \right| |dw| = \int_{U=\varrho} |\text{grad}_z U| |dz|. \quad (4)$$

**278.** Sei nun  $F_w$  eine über die  $w$ -Ebene ausgebreitete, offene, einfach zusammenhängende RIEMANNsche Fläche und  $U(P_w)$  eine auf dieser Fläche eindeutige reelle Funktion, welche nachstehenden Bedingungen genügt:

- a) In jedem inneren Punkt  $P_w$  der Fläche  $F_w$  ist  $U(P_w)$  stetig, höchstens mit Ausnahme isolierter Punkte.
- b) An den Unstetigkeitsstellen ist  $U = +\infty$ .
- c) Die Ableitungen  $\frac{\partial U}{\partial u}, \frac{\partial U}{\partial v}$  ( $w = u + iv$ ) sind stetig, höchstens mit Ausnahme von gewissen glatten isolierten Kurven  $\gamma_w$ , d. h. in der Umgebung jedes Flächenpunktes  $P_w$  verläuft höchstens eine endliche Anzahl von Kurvenstücken  $\gamma_w$ .

d)  $\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 > 0$ , außer höchstens für isolierte Flächenpunkte.

e) Wenn  $P_w^\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) eine unendliche Folge von Flächenpunkten ist, ohne Häufungspunkt *innerhalb* der Fläche, so strebt

$$U(P_w^\nu) \rightarrow +\infty \quad \text{für } \nu \rightarrow \infty.$$

Es sei  $I_\varrho$  diejenige Kurve der Fläche  $F_w$ , wo  $U(P_w) = \varrho (> \min U)$ . Dann gilt folgender<sup>1</sup>

**Satz 1.** *Es sei  $F_w$  eine offene einfach zusammenhängende RIEMANNsche Fläche. Angenommen, daß auf  $F_w$  eine Funktion  $U(P_w)$  existiert, welche den Bedingungen a), ..., e) genügt, so daß das Integral*

$$\int_{I_\varrho}^{\infty} \frac{d\varrho}{L(\varrho)} \tag{5}$$

*divergent ist, mit*

$$L(\varrho) = \int_{I_\varrho} |\text{grad}_w U| |dw|,$$

*so gehört die Fläche zum parabolischen Typus.*

Wäre nämlich  $F_w$  vom hyperbolischen Typus, so könnte es auf einen endlichen Kreis  $|z| < R < \infty$  eindeutig und, mit Ausnahme der Windungspunkte endlicher Ordnung, konform abgebildet werden. Wenn  $z = z(P_w)$ ,  $P_w = P_w(z)$  die entsprechende analytische Abbildungsfunktion ist, so genügt die zusammengesetzte Funktion  $U(P_w(z))$  den Bedingungen des Hilfssatzes, und da ferner der Ausdruck  $L(\varrho)$  invariant verbleibt, so müßte das Integral (5) entgegen der Voraussetzung endlich sein. Die Fläche kann also nicht vom hyperbolischen Typus sein, was zu beweisen war.

**279.** Wir werden das obige Kriterium zur Bestimmung des Typus einer einfach zusammenhängenden RIEMANNschen Fläche  $F$  mit *lauter isolierten Windungspunkten* anwenden. Im einfachsten Falle, wo  $F$  zur Klasse  $F(w_1, \dots, w_q)$  oder etwas allgemeiner zur Klasse  $F(W_1, \dots, W_q)$  (vgl. XI, § 2) gehört, läßt sie sich vermittels eines Streckenkomplexes topologisch charakterisieren. Als eine Verallgemeinerung dieser Darstellungsweise werden wir mit KOBAYASHI<sup>2</sup> eine Konstruktion ausführen, welche für jede Fläche  $F$  mit isolierten Singularitäten hergestellt werden kann.

Man denke sich die Fläche  $F$  über der RIEMANNschen Kugel ausgebreitet und grenze um jeden Windungspunkt  $w = a_\nu$  der Fläche eine Umgebung  $Q_\nu$  ab, welche aus der Gesamtheit derjenigen Flächenpunkte  $P_w$  besteht, deren auf der Fläche gemessener (sphärischer) Abstand von  $a_\nu$  kürzer ist als die Abstände von den übrigen Windungspunkten  $a_\mu$  ( $\mu \neq \nu$ ). Das derart entstandene *Normalpolygon*  $Q_\nu$  wird von einer

<sup>1</sup> Vgl. L. AHLFORS [9].

<sup>2</sup> Z. KOBAYASHI [1].

Anzahl größter Kreisbogen  $B$  berandet, deren Punkte von mindestens zwei Windungspunkten die gleiche Entfernung haben. Das von den Bogen  $B$  gebildete KOBAYASHI-Netz stimmt in den einfachsten Fällen mit dem Streckenkomplex überein; jedenfalls sind die Normalpolygone  $Q_v$  und die Elementarpolygone des Streckenkomplexes im Falle der Flächen  $F(w_1, \dots, w_q)$  einander eineindeutig zugeordnet.

**280.** Wir gehen nun daran, auf der Fläche  $F$  eine den Bedingungen von Satz 1 genügende Funktion zu erklären. Zu diesem Zweck nehmen wir auf dem Netz  $B$  einen beliebigen Punkt  $P_w$ ; sofern dieser kein Eckpunkt ist, grenzt er an zwei Normalpolygone  $Q'$  und  $Q''$ , welche die Windungspunkte  $w = a'$  und  $w = a''$  enthalten. Falls  $P_w$  mittels zweier Großkreisbogen ( $\leq \frac{\pi}{2}$ ),  $G(P_w, a')$ ,  $G(P_w, a'')$  mit jenen Punkten verbunden wird, so drehen sich diese Bogen um *gleiche* Winkel, wenn  $P_w$  sich auf der betreffenden Seite  $B(a', a'')$  des Netzes  $B$  bewegt.

Die Zunahme  $d\tau$  jenes Winkels auf einem Bogenelement  $|dw|$  ist offenbar gleich dem Differential

$$d\tau(P_w) = \left| d \arg \frac{1 + \bar{a}w}{w - a} \right|,$$

wo für  $a$  entweder  $a'$  oder  $a''$  zu setzen ist<sup>1</sup>.

Sei nun  $P_0$  ein beliebig festgesetzter Punkt und  $P_w$  ein beweglicher Punkt auf  $B$ . Wir bestimmen das Minimum

$$\tau(P_w) = \min_{P_0 P_w} \int d\tau(P_w),$$

wo  $P_w$  auf  $B$  von  $P_0$  bis  $P_w$  läuft. Hierdurch ist  $\tau$  als eine stetige, nicht-negative Funktion des Netzpunktes  $P$  erklärt. Sie wird jetzt in jeden von den Windungspunkten  $a_v$  verschiedenen inneren Punkt  $P_w$  der Polygone  $Q_v$  stetig fortgesetzt durch folgende Vorschrift: Man verlängere den Kreisbogen  $G(P_w, a_v)$  über  $P_w$  hinaus, bis er dem Netz  $B$  im Punkt  $P_w^*$  begegnet, und setze dann  $\tau(P_w) = \tau(P_w^*)$ .

Außer diesem Winkelabstand  $\tau(P_w)$  der Flächenpunkte  $P_0$  und  $P_w$  wird noch eine andere positive und für jedes  $P_w \neq a_v$  stetige Funktion  $\sigma$  durch die Festsetzung

$$\sigma(P_w) = \log \left| \frac{1 + \bar{a}w}{w - a} \right|$$

definiert, wo  $a$  derjenige, oder falls  $P_w$  auf  $B$  liegt, ein beliebiger derjenigen Windungspunkte  $a$  ist, der von  $P_w$  den kürzesten (sphärischen) Abstand hat.

**281.** Die Summe

$$U(P_w) = \sigma(P_w) + \tau(P_w)$$

genügt sämtlichen Bedingungen von Nr. 278. Sie ist in jedem Flächen-

<sup>1</sup> Dieses Resultat ist evident für  $a = 0$ . Ist  $a \neq 0$ , so hat man  $w$  durch diejenige Kugeldrehung zu ersetzen, welche  $a \rightarrow 0$  überführt.

punkt  $P_w \neq a_v$  stetig. Das gleiche gilt für ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung, mit Ausnahme der Seiten des Netzes  $B$ , auf denen  $\sigma(P_w)$  ein konstantes (positives) Minimum erreicht, sowie gewisser Großkreisbogen  $G(P_w, a_v)$ , auf denen  $\tau(P_w)$  einen extremen Wert annimmt. Führt man die Veränderliche  $t = \sigma + i\tau$  ein, so erhält man als konformes Abbild der Fläche  $F$  eine über den ersten Quadranten der  $t$ -Ebene gelagerte, vielblättrige Fläche  $F_t$ , die keine Windungspunkte enthält, statt dessen aber mit senkrechten und waagrechten Faltungen versehen ist, welche den oben genannten singulären Kurvenbogen zugeordnet sind<sup>1</sup>.

Wir fassen jetzt die Niveaukurven  $U = \sigma + \tau = \text{const.}$  ins Auge, und finden, wegen der in Nr. 277 erwähnten Invarianzeigenschaft des Ausdrucks  $|\text{grad}_w U| |dw|$

$$|\text{grad}_w U| |dw| = |\text{grad}_t U| |dt| = \sqrt{2} |dt|.$$

Das über die Niveaukurve  $\Gamma_\rho$  ( $U = \sigma + \tau = \rho$ ) erstreckte Integral

$$L(\rho) = \int_{\Gamma_\rho} |\text{grad}_w U(P_w)| |dw|$$

ist also gleich der mit  $\sqrt{2}$  multiplizierten Gesamtlänge der auf der Faltungsfläche  $F_t$  liegenden Bildstrecken  $\sigma + \tau = \rho$  von  $\Gamma_\rho$ . Um diese Länge weiter abzuschätzen, bezeichne man, für  $\tau > 0$ , durch  $n(\tau)$  die Anzahl derjenigen Punkte  $P_w$  auf dem Netz  $B$ , welche der Gleichung

$$\tau(P_w) = \tau$$

genügen. Falls der Punkt  $P_w$  kein Eckpunkt von  $B$  ist, so bestimmt er zwei Kreisbogen  $G(P_w, a)$ , auf denen  $\tau$  konstant ist, auf denen also, für ein gegebenes  $\rho > 0$ , entweder *ein* oder *kein* Punkt ( $\sigma = \rho - \tau$ ,  $\tau$ ) der Niveaulinie  $\Gamma_\rho$  ( $\sigma + \tau = \rho$ ) liegt. Mit Ausnahme von isolierten Werten  $\tau$  befinden sich also über jedem Punkt  $t = \rho - \tau + i\tau$  der Strecke  $\sigma + \tau = \rho$  ( $\sigma > 0$ ,  $\tau > 0$ ) der  $t$ -Ebene höchstens  $2n(\tau)$  Bildpunkte von  $\Gamma_\rho$ , und es wird also

$$L(\rho) = \sqrt{2} \int_{\Gamma_\rho} |dt| = 2 \int_{\Gamma_\rho} |d\tau| \leq 4 \int_{\tau=0}^{\rho} n(\tau) d\tau.$$

Aus Satz 1 folgt nunmehr der Satz von KOBAYASHI:

**Satz 2.** Sei  $F$  eine einfach zusammenhängende RIEMANNSche Fläche mit lauter isolierten Windungspunkten,  $B$  das zugehörige Normalpolygonnetz und  $n(\tau)$  die Anzahl der Netzpunkte  $P_w$ , welche von einem beliebig gewählten Netzpunkt  $P_0$  den Winkelabstand  $\tau$  haben.

Falls dann das Integral

$$\int_0^{\rho} \frac{d\rho}{\int_0^{\rho} n(\tau) d\tau} \quad (6)$$

divergent ist, so gehört die Fläche zum parabolischen Typus.

<sup>1</sup> Diese Veranschaulichung des KOBAYASHISchen Satzes verdanke ich gleichfalls einer brieflichen Mitteilung von Herrn AHLFORS.

282. Als Anwendung dieses allgemeinen Satzes betrachten wir den einfachen Fall einer Fläche, welche nur endlich viele Windungspunkte hat. Für eine solche Fläche bleibt die Anzahlfunktion  $n(\tau)$  offenbar beschränkt. Das Integral (6), das sich also wie  $\int \frac{d\rho}{\rho}$  verhält, wird divergent, und die Fläche muß also parabolisch sein, wie schon oben (XI, § 3) durch andere Erwägungen gezeigt worden ist.

Für die allgemeine Klasse einer über  $q \geq 3$  Punkten  $w_1, \dots, w_q$  (oder allgemeiner: Gebieten  $W_1, \dots, W_q$ ) verzweigten Fläche  $F'_q$  führt der obige Satz auch zu einem interessanten Ergebnis. Wir beschränken uns auf den Fall, wo die Fläche lauter logarithmische Windungspunkte hat, welche über drei Grundpunkten  $w_1, w_2, w_3$  liegen; ein Fall, der zuerst von SPEISER<sup>1</sup> untersucht worden ist. Man stelle die Fläche durch einen Streckenkomplex dar (XI, § 2) und bezeichne mit  $\varphi(n)$  die Anzahl der Äste der  $n$ -ten Generation. Falls jedem Knotenpunkt  $P$ , von welchem  $\nu$  ( $2 \leq \nu \leq 3$ ) verschiedene Äste ausgehen, die Zahl  $\nu - 2$  als Verzweigungszahl zugeordnet wird, und  $\psi(\nu)$  die Summe der Verzweigungszahlen sämtlicher Knotenpunkte der  $n$  ersten Generation bezeichnet, so ist

$$\varphi(\nu) = \psi(\nu) + 2.$$

Andererseits ist es einleuchtend, daß der KOBAYASHISCHE Winkelabstand  $\tau$  eines Punktes  $P_w$  der  $\nu$ -ten Generation des Baumes vom Anfangspunkt desselben, dividiert durch  $\nu$ , zwischen endlichen positiven Schranken variiert. Hieraus schließt man unmittelbar, indem man das in (6) stehende Integral  $\int_0^{\rho} n d\tau$  durch sein Maximum  $\rho n(\rho)$  ersetzt<sup>2</sup>:

**Satz 3.** Falls die Fläche  $F(w_1, w_2, w_3)$  mit lauter logarithmischen Windungspunkten versehen ist, und wenn die Verzweigungszahl  $\psi(\nu)$  des zugehörigen Streckenkomplexes so schwach anwächst, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \psi(n)}$$

divergent ist, so gehört die Fläche zum parabolischen Typus<sup>3</sup>.

Gewisse neuere Ergebnisse von MYRBERG scheinen darauf hinzuweisen, daß selbst bei den einfachsten Flächen  $F(w_1, w_2, w_3)$  sich zugleich hinreichende und notwendige Kriterien kaum aufstellen lassen, solange man

<sup>1</sup> A. SPEISER [1], [2].

<sup>2</sup> Dieser Satz wurde zuerst vom Verfasser [8] bewiesen durch eine Methode, als deren sinngemäße Erweiterung das KOBAYASHISCHE Verfahren angesehen werden kann.

<sup>3</sup> Für Flächen mit lauter algebraischen Windungspunkten gilt ein naheverwandter Satz von AHLFORS [4]. Vgl. hierzu auch SPEISER [2], [3], ULLRICH [3].

allein die Verzweigungsstärke der Fläche benutzt. Neben dem Grad der Verzweigkeit muß auch die *Symmetrie* bzw. *Asymmetrie* im Aufbau der Fläche als ein für die Typenfrage wesentliches Merkmal berücksichtigt werden<sup>1</sup>.

## XIII. Die AHLFORSSche Theorie der Überlagerungsflächen.

### § 1. Topologische Grundbegriffe.

283. Im Laufe der vorhergehenden Darstellung der Wertverteilungslehre hat sich unser Interesse in immer höherem Grade auf die Eigenschaften der RIEMANNschen Flächen  $F$  gerichtet, auf welche der Kreis  $|z| < R \leq \infty$  mittels der gegebenen meromorphen Funktion  $w = w(z)$  konform abgebildet wird. Für unsere Untersuchung war folgendes wesentlich: 1. Auf der Fläche  $F$  wurde eine Metrik eingeführt (z. B. eine sphärische Metrik im Falle des ersten Hauptsatzes, eine nicht-euklidische (oder noch allgemeinere) Metrik zur Gewinnung des zweiten Hauptsatzes). 2. Um die Eigenschaften der ganzen offenen Fläche  $F$  zu bewältigen, müßte eine Menge von Näherungsflächen erklärt werden, durch welche  $F$  ausgeschöpft wurde; als solche Näherungsflächen haben uns vor allem die Abbilder  $F_r$  der Kreise  $|z| \leq r < R$  gedient. 3. Die Abbildung  $z \rightarrow w$  ist eindeutig und konform.

Neuerdings ist von L. AHLFORS<sup>2</sup> ein neuer Weg zu den Hauptsätzen angegeben worden, der auf einer direkten Untersuchung der Überlagerungsfläche  $F$  einer gegebenen Grundfläche fußt. Diese Theorie bedeutet in mehreren Hinsichten einen bedeutenden Fortschritt. Erstens wird ein tieferer Einblick in den Mechanismus der Wertverteilung insofern erzielt, als das *topologische* von dem *metrischen* sauber getrennt wird. Zweitens wird die Konformität der Abbildung nicht mehr unbedingt vorausgesetzt; die Hauptsätze werden auf viel allgemeinere Abbildungen ausgedehnt. Drittens ergeben sich jene Hauptsätze in einer neuen, allgemeineren Form, die auch für den speziellen Fall einer meromorphen Funktion zu Ergebnissen führt, die Verfeinerungen der früheren Ergebnisse darstellen, wenn sie auch andererseits jene Resultate nicht in der schärfst möglichen ursprünglichen Fassung enthalten.

284. Um die nötige Grundlage für die Theorie herzustellen, müssen zunächst gewisse einfache topologische Hilfsbegriffe für geschlossene oder berandete Flächen eingeführt werden.

Es sei gegeben eine unendliche Menge  $F_0$  von Punkten  $P_0$ . Jedem Punkt  $P_0^*$  sind gewisse, diesen Punkt  $P_0^*$  enthaltende Punkt mengen ( $P_0$ ) als *Umgebungen* zugeordnet, welche die für den Umgebungs begriff

<sup>1</sup> P. J. MYRBERG [2].

<sup>2</sup> L. AHLFORS [10].



wesentlichen bekannten Eigenschaften besitzen<sup>1</sup>. Durch den Umgebungsbegriff sind die Begriffe einer einfachen (Jordan-)Kurve, des Häufungspunktes einer unendlichen Punktfolge ( $P_0$ ) usw. auf der Punktmenge  $F_0$  erklärt. Es sei schließlich  $F_0$  außerdem *zusammenhängend*, d. h. zwei beliebige Punkte  $P'_0$  und  $P''_0$  auf  $F_0$  sollen sich stets durch eine auf  $F$  verlaufende stetige Kurve verbinden lassen.

Auf der so definierten Fläche  $F_0$  ist eine *Dreiecksteilung* möglich. Es läßt sich (auf unendlich viele Weisen) ein System von, von drei einfachen Bogen (Kanten)  $\beta$  begrenzten einfach zusammenhängenden Gebieten (Dreiecken)  $D_1, D_2, \dots$  angeben, welche keine inneren (von den Kantenpunkten verschiedenen) Punkte gemeinsam haben und welche sich in keinem Punkt  $P_0$  der Fläche  $F_0$  häufen.

Zwei Fälle sind zu unterscheiden: Entweder ist die Anzahl der Dreiecke  $D$  *endlich*, dann ist die Fläche  $F_0$  *geschlossen*: eine unendliche Folge von Flächenpunkten hat stets wieder einen Flächenpunkt als Häufungspunkt. Oder aber die Anzahl der Dreiecke ist *unendlich*. Dann ist die Fläche *offen*: es kann eine unendliche Punktfolge  $P_0$  angegeben werden, welche keinen Flächenpunkt als Häufungspunkt besitzt.

285. In diesem Paragraphen betrachten wir nur *endliche*, d. h. aus einer endlichen Anzahl von Dreiecken  $D$  zusammengesetzte Flächen. Neben diesen geschlossenen Flächen, bei denen also jede Dreieckskante zu genau zwei verschiedenen Nachbardreiecken gehört, ziehen wir auch die *berandeten, endlichen* Flächen in Betracht, welche ebenfalls aus einer endlichen Anzahl von Dreiecken in ähnlicher Weise aufgebaut werden, jedoch so, daß jetzt gewisse Kanten zu nur *einem* Dreieck gehören; diese bilden den Rand der endlichen Fläche. Man kommt zu dem Begriff einer berandeten, endlichen Fläche, wenn aus einer geschlossenen Fläche eine gewisse Anzahl von Dreiecken fortgelassen werden; und umgekehrt läßt sich eine berandete Fläche  $F_0$  zu einer geschlossenen Fläche ergänzen, indem man zwei identische<sup>2</sup> Exemplare  $F_0$  nimmt und die zugehörigen Randpunkte identifiziert.

Für die Zusammenhangseigenschaften einer geschlossenen oder berandeten endlichen Fläche spielt die Charakteristik

$$q = -e + k - p$$

eine entscheidende Rolle; hier ist, bei einer gegebenen Dreiecksteilung,  $e$  die Anzahl der inneren Ecken,  $k$  die Anzahl der inneren Kanten und  $p$  die Anzahl der Dreiecke. Wir wollen als bewiesen voraussetzen, daß die Charakteristik von der gewählten Dreiecksteilung unabhängig ist.

Ihren kleinstmöglichen Wert,  $-2$ , erhält die Charakteristik bei einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht Null (z. B. für die Kugel-

<sup>1</sup> Vgl. z. B. B. KEREKJARTO [J].

<sup>2</sup> D. h. topologisch aufeinander abgebildete.

fläche). Für ein Dreieck oder, allgemeiner, für eine einfach zusammenhängende Fläche wird  $\varrho = -1$ .

Wir denken uns eine gewisse Anzahl von inneren Kanten  $k$  und Ecken  $e$  einer gegebenen Dreiecksteilung außer acht gelassen. Es bleibt dann eine Anzahl von inneren Kanten  $k'$  und Ecken  $e'$  übrig. Die Fläche setzt sich aus gewissen Polygonen  $G$  zusammen, und man bestätigt unmittelbar, daß

$$\varrho = \sum \varrho(G) - e' + k'$$

wird, wo  $\varrho(G)$  die Charakteristik von  $G$  ist.

Man setze jetzt speziell voraus, daß die inneren Kanten der Polygone  $G$  aus lauter punktfremden Querschnitten oder Rückkehrsnitten<sup>1</sup>  $s$  der Fläche  $F_0$  bestehen. Da jede solche Kante keinen inneren Eckpunkt hat, so wird  $k' - e'$  genau gleich der Anzahl  $n(s)$  jener Schnitte sein.

Falls die endliche Fläche  $F_0$  durch ein System von  $n(s)$  punktfremden Querschnitten oder Rückkehrsnitten ( $s$ ) in gewisse Teilpolygone  $G$  zerlegt wird, so gilt

$$\varrho = \sum \varrho(G) + n(s). \quad (1)$$

**286.** Wir kommen jetzt zu dem Begriff der Überlagerungsfläche.

Es sei, außer einer gewissen endlichen (geschlossenen oder berandeten) Fläche  $F_0$ , die im folgenden *Grundfläche* genannt wird, noch eine andere, ebenfalls endliche (geschlossene oder berandete) Fläche  $F$  gegeben. Wir denken uns ferner auf jenen Flächen je eine Dreiecksteilung erklärt, welche nachstehende Eigenschaften besitzt:

1. Jedem Dreieck  $D$  von  $F$  ist ein wohlbestimmtes „Spurdreieck“  $D_0$  auf  $F_0$  topologisch zugeordnet. Der dem Punkt  $P$  von  $D$  zugeordnete Punkt  $P_0$  von  $F_0$  heißt Spurpunkt von  $P$ ; man sagt auch,  $P$  liege über  $P_0$ .

2. Zwei, durch eine Kante  $k$  getrennten Nachbardreiecken  $D$  von  $F$  entsprechen stets auch zwei Nachbardreiecke  $D_0$  von  $F_0$ , und zwar so, daß einem Punkt von  $k$  stets ein und derselbe Kantenpunkt auf  $F_0$  zugeordnet ist.

Unter diesen Voraussetzungen nennt man  $F$  eine *Überlagerungsfläche* von der Grundfläche  $F_0$ . Diejenigen Randkanten von  $F$ , welche über inneren Kanten der Grundfläche  $F_0$  liegen, bilden den *relativen Rand* von  $F$ .

Es sei  $e$  ein innerer Eckpunkt auf  $F$ ; er gehört einem Zyklus von Dreiecken  $D$  als Eckpunkt an. Jedem Dreiecke  $D_0$  des entsprechenden Zyklus in  $F_0$  ist ein und dieselbe Anzahl  $m$  von jenen Dreiecken zugeordnet. Falls  $m > 1$ , so heie ist  $e$  ein *Verzweigungspunkt* der Überlagerungsfläche  $F$ ; die Zahl  $m - 1$  heißt seine Ordnung.

**287.** Die Überlagerungsfläche  $F$  läßt sich durch folgende Vorschrift in „Blätter“ zerlegen: Es sei  $F_1$  die Menge derjenigen Dreiecke auf  $F_0$ ,

<sup>1</sup> D. h. aus einfachen Kurven, die sich auf der Fläche schließen.

über welchen mindestens ein Dreieck von  $F$  liegt:  $F_1$  heißt das „erste Blatt“ von  $F$ . Das „zweite Blatt“  $F_2$  besteht aus denjenigen Dreiecken auf  $F_0$ , welche Spurdreiecke von wenigstens zwei Dreiecken  $D$  sind usw. In dieser Weise wird die Überdeckung von  $F_0$  durch  $F$ , insofern es sich um die Anzahl der Überdeckungen handelt, durch die Blätter  $F_1, F_2, \dots, F_n$  vollkommen charakterisiert;  $n$  bedeutet hier die Höchstzahl der Überdeckungen.

288. Mit Hilfe der Blättereinteilung läßt sich eine wichtige Beziehung für die Charakteristik der Überlagerungsfläche aufstellen. Bei einer gegebenen Dreiecksteilung der Grundfläche  $F_0$  sei

$$\varrho_v = -e_v + k_v - p_v$$

die Charakteristik des  $v$ -ten Blattes der  $n$ -blättrigen Überlagerungsfläche.

Man sieht nun sofort, daß für diese Fläche  $p = \sum_1^n p_v$  und  $k = \sum_1^n k_v$  ist. Dagegen ist im allgemeinen  $e \leq \sum_1^n e_v$ , denn bei der Berechnung von  $e$  wird die Vielfachheit der als Verzweigungspunkte vorkommenden  $e$  nicht berücksichtigt, sondern ein jeder solcher Punkt nur *einmal* mitgezählt. In der Tat gilt

$$e = \sum_1^n e_v - v,$$

wo  $v$  die sog. *Verzweigungszahl* der Überlagerungsfläche ist, die definitionsgemäß gleich der Summe der Ordnungen sämtlicher Verzweigungspunkte von  $F$  ist. Für die Charakteristik  $\varrho = -e + k - p$  findet man also:

*Die Charakteristik  $\varrho$  der Überlagerungsfläche  $F$  ist gleich*

$$\varrho = \sum_1^n \varrho_v + v, \quad (2)$$

wo  $\varrho_v$  die Charakteristik des  $v$ -ten Blattes und  $v$  die Verzweigungszahl der Fläche ist.

289. Falls  $F$  keinen relativen Rand hat, so sind die Charakteristiken der verschiedenen Blätter sämtlich gleich der Charakteristik  $\varrho_0$  der Grundfläche  $F_0$ , und (2) geht über in die sog. HURWITZsche Relation

$$\varrho = n\varrho_0 + v, \quad (2')$$

welche also die Charakteristik einer relativ unberandeten  $n$ -blättrigen Überlagerungsfläche bestimmt.

## § 2. Einführung einer Metrik.

290. Es soll jetzt auf der endlichen Grundfläche  $F_0$  eine gewisse Metrik erklärt werden. Um die Anwendbarkeit der Theorie nicht von vornherein unnötig einzuschränken, soll jede Metrik zugelassen werden, welche folgenden, sehr allgemeinen Postulaten genügt. Wir betrachten zunächst den Fall einer *geschlossenen* Fläche.

1. Jedem Bogen  $\beta$  einer vorgegebenen Klasse  $(\beta)$  von einfachen Kurven ist eine endliche positive Zahl  $L_0(\beta)$  als *Bogenlänge* zugeordnet. Die Klasse  $(\beta)$  umfaßt speziell sämtliche in der definierenden Dreiecks- teilung vorkommenden Bogen.

2. Zwischen zwei beliebigen Punkten der Fläche verläuft mindestens ein Bogen  $\beta$ . Die untere Grenze der Längen der verbindenden Bogen, *der Abstand der Punkte*, ist positiv.

3. Zu jedem Punkt  $(P)$  gehört für  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung von  $P$ , deren Punkte von  $P$  einen Abstand  $< \varepsilon$  haben.

4. Jedes von einer einfachen, geschlossenen Kurve  $\beta$  begrenzte Teil- gebiet  $D$  von  $F_0$  hat einen endlichen, positiven Flächeninhalt  $I_0(D)$ .

5. Das Längen- und Flächenmaß sind *additiv*.

6. Zu jedem Punkt  $P$  der Fläche soll eine Umgebung  $U_P$  und eine positive Zahl  $h(P)$  gehören, so daß jede in  $U_P$  liegende, geschlossene Kurve von der Länge  $L$  ein Gebiet einschließt, dessen Flächeninhalt  $I$  der Beziehung

$$I < hL \quad (3)$$

genügt.

Diese Bedingungen sind sehr allgemeiner Natur. Sie sind bei allen in der Differentialgeometrie gebräuchlichen Maßbestimmungen erfüllt.

**291.** Die in der Bedingung 6. stehende Größe  $h$  ist zunächst vom Punkte  $P$  abhängig. Aus den obigen Postulaten folgt indes, daß die Bedingung (3) mit einem festen Wert  $h$  für alle Punkte gilt, sofern nur die Bogenlänge hinreichend klein gewählt wird:

6'. *Es existieren zwei positive Zahlen  $d$  und  $h$ , so daß jede geschlossene Kurve  $\beta$  von der Länge  $L < d$  einen Flächeninhalt  $I < hL$  einschließt.*

Um dies einzusehen, bestimme man zu jedem Punkt die Umgebung  $U_P$  und die zugehörige Konstante  $h = h(P)$  und bezeichne durch  $\delta (> 0)$  den kleinsten Abstand von  $P$  nach dem Rand von  $U_P$ . Sei dann  $U'_P$  eine Umgebung von  $P$ , deren Punkte höchstens um  $\frac{\delta}{2}$  von  $P$  entfernt sind. Nach dem HEINE-BORELSchen Überdeckungssatz läßt sich die geschlossene Fläche  $F$  mittels einer *endlichen* Anzahl von Umgebungen  $U'_P$  überdecken; es sei  $d (> 0)$  gleich der kleinsten der zugehörigen Zahlen  $\frac{\delta}{2}$  und  $h$  die größte der entsprechenden Konstanten  $h(P)$ . Ist nun  $\beta$  eine einfache geschlossene Kurve von der Länge  $L < d$ , so muß  $\beta$  innerhalb einer wohlbestimmten der ausgewählten Umgebungen  $U_P$  liegen, und es gilt somit, gemäß 6., für das von  $\beta$  berandete Teilgebiet die Beziehung  $I < h(P) L \leq hL$ , was zu beweisen war.

**292.** Hieraus ergibt sich weiter der

**Hilfssatz 1.** *Es existiert eine endliche Konstante  $h > 0$  folgender Art: Die geschlossene Fläche  $F_0$  sei durch eine endliche Anzahl von geschlossenen*

Kurven  $\beta$  von der Gesamtlänge  $L$  in zwei Teile  $D'$  und  $D''$  zerlegt, welche aus je endlich vielen Gebieten zusammengesetzt sind und die Flächeninhalte  $I'$ ,  $I''$  haben mögen.

Es gilt dann

$$\min(I', I'') \leq hL. \quad (4)$$

Falls sämtliche Bogen  $\beta$  eine Länge  $< d$  haben, so begrenzen sie gewisse (endlich viele) Gebiete, deren Gesamthalt nach  $\delta'$  kleiner als  $hL$  ist, wo  $h$  die in  $\delta'$  erwähnte Flächenkonstante ist. Die übrigen Punkte der Fläche gehören entweder sämtlich zu  $D'$  oder sämtlich zu  $D''$ , und jener Gesamthalt majoriert somit entweder  $I''$  oder  $I'$ , woraus (4) folgt.

Ist wiederum die Länge von mindestens einem Bogen  $\beta$  nicht kleiner als  $d$ , so ist auch  $L \geq d$ . Bezeichnet  $I_0 = I' + I''$  den Inhalt der ganzen Fläche  $F_0$ , so wird also

$$\min(I', I'') \leq \frac{I_0}{2} \leq \frac{I_0}{2d} L,$$

und (4) gilt, falls man  $h$  gleich der nur von der Flächenmetrik abhängigen Zahl  $\frac{I_0}{2d}$  setzt.

**293.** Falls die endliche Grundfläche  $F_0$  *berandet* ist, so ergänzt man sie, wie in Nr. 285 angegeben wurde, durch Zusammensetzung von zwei identischen Exemplaren  $F_0$  zu einer geschlossenen Fläche  $\bar{F}_0$ . Es wird angenommen, daß die auf  $F_0$  gegebene Längen- und Flächenmetrik so gewählt ist, daß die Bedingungen 1.—6. auf  $\bar{F}_0$  gelten. Dann besteht Hilfssatz 1 auf  $F_0$  und also auch auf  $\bar{F}_0$ , sofern die Kurven  $\beta$  *relativ* zu  $F_0$  geschlossen sind, d. h. sofern sie entweder sich innerhalb  $F_0$  schließen, oder *Querschnitte* von  $F_0$  sind, die also zwei Randpunkte von  $F_0$  verbinden; auf  $\bar{F}_0$  entspricht nämlich einem Querschnitt eine geschlossene Kurve.

**294.** Es sei  $\beta$  ein einfacher Bogen auf  $F_0$  und  $P$  ein Punkt von  $\beta$ . Wenn dann zwei positive Zahlen  $d(P)$  und  $h(P)$  existieren, so daß diejenigen Teilbogen von  $\beta$ , deren Punkte von  $P$  höchstens den Abstand  $d$  ( $0 < d < d(P)$ ) haben, eine Gesamtlänge

$$\lambda < h(P) \cdot d$$

besitzen, so möge  $\beta$  im Punkte  $P$  *regulär* heißen. Wenn der Bogen  $\beta$  in  $P$  regulär ist, so genügt er offenbar auch folgender wichtigen Bedingung: Es existiert eine Umgebung  $U_P$  und eine Zahl  $h(P)$ , so daß derjenige Teil von  $\beta$ , der innerhalb einer in  $U_P$  gezogenen, den Punkt  $P$  umgebenden geschlossenen Kurve von der Länge  $L$  liegt, eine Länge  $< h(P)L$  hat.

Der Bogen  $\beta$  heißt kurz regulär, wenn er in jedem Punkt diese Regularitätseigenschaft besitzt.

Im folgenden soll vorausgesetzt sein, daß sämtliche als Kanten der in Betracht kommenden Dreiecksteilungen regulär sind. In genauer Analogie mit dem Beweis von Hilfssatz 1 ergibt sich dann die Richtigkeit folgender Behauptung:

**Hilfssatz 2.** *Wenn  $\beta$  eine einfache Kurve auf der geschlossenen Fläche  $F_0$  ist, so existiert eine endliche Zahl  $h > 0$  von folgender Eigenschaft: Zieht man auf  $F_0$  gewisse geschlossene Kurven von der Gesamtlänge  $L$ , welche  $F_0$  in zwei Teile zerlegen, die aus je endlich vielen Gebieten bestehen, und bezeichnen  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  die Gesamtlängen der in diese Teile fallenden Teilbögen von  $\beta$ , so gilt*

$$\min(\lambda', \lambda'') < hL. \quad (5)$$

**295.** Auch dieser Hilfssatz gilt, falls die Fläche  $F_0$  nicht mehr geschlossen, sondern endlich und *berandet* angenommen wird; dies wird man durch das Verfahren von Nr. 293 einsehen. Die zerlegenden Kurven von der Länge  $L$  sind dann nur relativ zu  $F_0$  geschlossen: sie können also speziell Querschnitte von  $F_0$  darstellen.

Insbesondere ist zu beachten, daß man, im Falle einer berandeten Fläche, den Bogen  $\beta$  als einen Teil des Randes von  $F_0$  nehmen kann, sofern dieser nur regulär ist. Man gelangt so zu folgendem, für die spätere Untersuchung wichtigen

**Folgesatz.** *Wenn  $F_0$  endlich und berandet ist, so existiert eine Konstante  $h$  folgender Art: Falls  $F_0$  durch ein System von endlich vielen Querschnitten von der Gesamtlänge  $L$  in zwei Teile zerlegt wird, so zerfällt der Rand in zwei Teile, deren Gesamtlängen  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  der Beziehung*

$$\min(\lambda', \lambda'') < hL \quad (5')$$

*genügen.*

### § 3. Metrische Eigenschaften der Überlagerungsfläche.

**296.** Die Metrik der endlichen Grundfläche  $F_0$  wird auf die gegebene endliche Überlagerungsfläche  $F$  derselben übertragen, indem man jeder Kurve  $\beta$  und jeder Teilfläche  $D$  von  $F$  als Länge und Inhalt die Länge  $L$  und den Inhalt  $I$  der Spurkurve  $\beta_0$  bzw. der Spurfläche  $D_0$  auf der Grundfläche  $F_0$  zuordnet. Nunmehr wird es möglich sein, auf der Überlagerungsfläche eine Fundamentalgröße einzuführen, welche für diese Fläche eine ähnliche Rolle spielen wird, wie in der Wertverteilungslehre die Charakteristik  $T(r)$  für die RIEMANNSCHE Fläche  $F_r$ .

**297.** Dividiert man den gesamten Inhalt  $I$  der Überlagerungsfläche  $F$  durch den Inhalt  $I_0$  der Grundfläche  $F_0$ , so erhält man als Quotient eine Größe

$$S = \frac{I}{I_0}, \quad (6)$$

welche die *mittlere Blätteranzahl von F* heißt. Wenn  $D$  ein gegebenes Gebiet der Grundfläche  $F_0$  vom Inhalt  $I_0(D)$  ist, so erklärt man ferner die *mittlere Blätteranzahl von F über D* als den Ausdruck

$$S(D) = \frac{I(D)}{I_0(D)}, \tag{6'}$$

wo  $I(D)$  den gesamten Flächeninhalt der über  $D$  liegenden Teile der Überlagerungsfläche  $F$  bezeichnet.

Ähnlich wird schließlich die mittlere Blätteranzahl  $S(\beta)$  von  $F$  über einer gegebenen Kurve  $\beta$  der Grundfläche  $F_0$  erklärt. Bezeichnet  $L_0(\beta)$  die Länge von  $\beta$  und  $L(\beta)$  die Gesamtlänge der über  $\beta$  liegenden Bogen auf der Überlagerungsfläche  $F$ , so ist

$$S(\beta) = \frac{L(\beta)}{L_0(\beta)}. \tag{6''}$$

**298.** Für die folgende Untersuchung ist es von großer Bedeutung zu wissen, in welcher Art und Weise die mittlere Blätteranzahl von dem Grundgebiet  $D$  oder von der Grundkurve  $\beta$  abhängt. In dieser Hinsicht gilt zunächst der

**Überdeckungssatz I.** *Es existiert eine nur von der Metrik der Grundfläche  $F_0$  abhängige Zahl  $h > 0$ , so daß jede endliche Überlagerungsfläche  $F$  von  $F_0$  der Bedingung*

$$|S - S(D)| \leq \frac{h}{I_0(D)} L \tag{I. 1}$$

genügt, wobei  $L$  die Länge des relativen Randes von  $F$  bezeichnet.

Zum Beweise zerlege man die Fläche  $F$  in die in Nr. 287 erklärten Blätter  $F_1, \dots, F_n$ . Es gilt dann

$$I = \sum_1^n I_\nu, \quad L = \sum_1^n L_\nu,$$

wo  $I_\nu$  den Flächeninhalt,  $L_\nu$  die Länge des relativen Randes des  $\nu$ -ten Blattes  $F_\nu$  bezeichnet. Entsprechend gilt

$$I(D) = \sum_1^n I_\nu(D),$$

wenn  $I_\nu(D)$  der Flächeninhalt des über  $D$  liegenden Teils von  $F_\nu$  (d. h. des Durchschnitts von  $D$  und  $F_\nu$ ) ist.

Es ist  $I_\nu(D) \leq I_\nu$  und daher

$$S_\nu(D) = \frac{I_\nu(D)}{I_0(D)} \leq \frac{I_\nu}{I_0(D)}.$$

Andererseits gilt

$$S_\nu \equiv \frac{I_\nu}{I_0} \leq \frac{I_\nu}{I_0(D)},$$

und es wird folglich, da  $S_\nu$  und  $S_\nu(D)$  nichtnegativ sind, auch

$$|S_\nu - S_\nu(D)| \leq \frac{I_\nu}{I_0(D)}. \tag{7'}$$

Analog ergibt sich  $I_0(D) - I_v(D) \leq I_0 - I_v$ , somit

$$1 - S_v(D) \leq \frac{I_0 - I_v}{I_0(D)},$$

und andererseits

$$1 - S_v = \frac{I_0 - I_v}{I_0} \leq \frac{I_0 - I_v}{I_0(D)},$$

also, da  $1 - S_v(D)$  und  $1 - S_v$  nichtnegativ sind,

$$|S_v - S_v(D)| = |(1 - S_v) - (1 - S_v(D))| \leq \frac{I_0 - I_v}{I_0(D)}. \quad (7'')$$

Zusammenfassend erschließt man aus (7) und (7')

$$|S_v - S_v(D)| \leq \frac{1}{I_0(D)} \min(I_v, I_0 - I_v),$$

oder, gemäß Hilfssatz 1,

$$|S_v - S_v(D)| \leq \frac{h}{I_0(D)} L_v.$$

Durch Addition ergibt sich schließlich

$$|S - S(D)| = \left| \sum_1^n (S_v - S_v(D)) \right| \leq \frac{h}{I_0(D)} \sum_1^n L_v = \frac{h}{I_0(D)} L, \quad (8)$$

womit die Beziehung (I, 1) bewiesen ist.

**299.** Für die mittlere Blätteranzahl  $S(\beta)$  der Überlagerungsfläche  $F$  über einer gegebenen *regulären Kurve*  $\beta$  der Grundfläche besteht ein analoger

**Überdeckungssatz 2.** *Es existiert eine nur von der Metrik der Fläche  $F_0$  und von der Wahl der regulären Kurve  $\beta$  auf  $F_0$  abhängige endliche Zahl  $h$ , so daß*

$$|S - S(\beta)| < hL, \quad (\text{I. } 2)$$

wo  $L$  die Länge des relativen Randes von  $F$  ist.

Durch die Zerlegung von  $F$  in die Blätter  $F_1, \dots, F_n$  erhält man für die Länge  $L(\beta)$  der über  $\beta$  verlaufenden Bogen den Ausdruck

$$L(\beta) = \sum_1^n L_v(\beta),$$

wo  $L_v(\beta)$  die Länge des im Blatte  $F_v$  befindlichen Teils von  $\beta$  ist.

Wir nehmen zuerst an, daß  $\beta$  die Fläche  $F_0$  zerlegt, und bezeichnen mit  $D$  das dem Inhalt nach *kleinere* der entsprechenden, von  $\beta$  berandeten Teilgebiete.

Sei nun  $D_v$  das Durchschnittsgebiet von  $D$  und  $F_v$ ; es hat den Flächeninhalt  $I_v(D)$  und eine Randlänge  $\leq L_v(\beta) + L_v$ , wo  $L_v$  die Randlänge von  $F_v$  ist. Nach dem ersten Hilfssatz gibt es also eine nur von der Fläche  $F_0$  abhängige Konstante  $h$ , so daß

$$I_v(D) \leq h(L_v(\beta) + L_v).$$



Vertauscht man  $D_v$  gegen das in bezug auf  $D$  komplementäre Gebiet  $\bar{D}_v$  ( $D_v + \bar{D}_v = D$ ), so findet man auf analoge Weise mit derselben Konstante  $h$

$$I_0(D) - I_v(D) \leq h(L_0(\beta) - L_v(\beta) + L_v),$$

wo  $L_0(\beta)$  die Länge der Kurve  $\beta$  ist. Nach Division durch  $I_0(D)$  ergibt sich hieraus

$$S_v(D) \leq \frac{h}{I_0(D)} (L_v(\beta) + L_v)$$

und

$$1 - S_v(D) \leq \frac{h}{I_0(D)} (L_0(\beta) - L_v(\beta) + L_v).$$

Dieselben zwei Beziehungen gelten, auch wenn man links  $S_v(D)$  durch  $S_v(\beta)$  ersetzt, denn die Größe  $\frac{hL_0(\beta)}{I_0(D)}$  ist nach dem ersten Hilfssatz mindestens gleich 1, und die rechten Seiten jener Beziehungen sind also, wegen  $L_v \geq 0$ , sicher nicht kleiner als bzw.  $S_v(\beta)$  und  $1 - S_v(\beta)$ . Beachtet man schließlich, daß die linksstehenden Ausdrücke andererseits nicht-negativ sind, so wird einerseits

$$|S_v(D) - S_v(\beta)| \leq \frac{h}{I_0(D)} (L_v(\beta) + L_v)$$

und andererseits

$$|S_v(D) - S_v(\beta)| \leq \frac{h}{I_0(D)} (L_0(\beta) - L_v(\beta) + L_v),$$

also

$$|S_v(D) - S_v(\beta)| \leq \frac{h}{I_0(D)} [L_v + \min(L_v(\beta), L_0(\beta) - L_v(\beta))].$$

Durch Anwendung des zweiten Hilfssatzes ergibt sich hieraus schließlich

$$|S_v(D) - S_v(\beta)| \leq h' L_v,$$

wo  $h'$  eine nur von der Wahl der Kurve  $\beta$  abhängige Konstante ist. Gibt man hier  $v$  die Werte  $1, \dots, n$  und addiert man, so wird

$$|S(D) - S(\beta)| \leq \sum_1^n |S_v(D) - S_v(\beta)| \leq h' L$$

und schließlich, unter Beachtung des ersten Überdeckungssatzes,

$$|S - S(\beta)| \leq \bar{h} L, \tag{9}$$

wo  $\bar{h}$  wieder nur von  $\beta$  abhängt.

**300.** Hiermit ist der Beweis erbracht für den Fall, wo  $\beta$  eine reguläre Kurve ist, welche die Fläche zerlegt. Um zu dem allgemeinen, im Überdeckungssatz 2 vorausgesetzten Fall zu gelangen, bemerke man, daß man durch Wiederholung der Schlußweise von Nr. 298 leicht die Gültigkeit der Relation

$$|S(\beta) - S(\beta')| < \frac{h}{L_0(\beta')} L \tag{10}$$

nachweist, wo  $\beta'$  ein *Teilbogen* des beliebig gegebenen, regulären Bogens  $\beta$  ist;  $h$  ist eine nur von der Wahl von  $\beta$  abhängige Konstante.

Schreibt man nämlich die Gesamtlänge der über  $\beta'$  gelegenen Bogen der Überlagerungsfläche in der Form  $L(\beta') = \sum L_\nu(\beta')$ , so hat man  $L_\nu(\beta') \leq L_\nu(\beta)$ , also

$$S_\nu(\beta') \equiv \frac{L_\nu(\beta')}{L_0(\beta')} \leq \frac{L_\nu(\beta)}{L_0(\beta')}.$$

Ferner wird

$$S_\nu(\beta) \equiv \frac{L_\nu(\beta)}{L_0(\beta)} \leq \frac{L_\nu(\beta)}{L_0(\beta')},$$

und es wird also

$$|S_\nu(\beta) - S_\nu(\beta')| \leq \frac{L_\nu(\beta)}{L_0(\beta')}. \quad (11')$$

Andererseits ist, da der außerhalb des  $\nu$ -ten Blattes liegende Teilbogen von  $\beta'$  als Teil in dem entsprechenden Teilbogen von  $\beta$  enthalten ist,  $L_0(\beta') - L_\nu(\beta') \leq L_0(\beta) - L_0(\beta_\nu)$  und somit

$$1 - S_\nu(\beta') \leq \frac{L_0(\beta) - L_0(\beta_\nu)}{L_0(\beta')}.$$

Es ist aber auch

$$1 - S_\nu(\beta) = \frac{L_0(\beta) - L_\nu(\beta)}{L_0(\beta)} \leq \frac{L_0(\beta) - L_\nu(\beta)}{L_0(\beta')},$$

und die Verbindung der zwei letzten Beziehungen ergibt

$$|S_\nu(\beta) - S_\nu(\beta')| \leq \frac{L_0(\beta) - L_\nu(\beta)}{L_0(\beta')}. \quad (11'')$$

Als Zusammenfassung von (11') und (11'') erhält man nunmehr

$$|S_\nu(\beta) - S_\nu(\beta')| \leq \frac{1}{L_0(\beta')} \min(L_\nu(\beta), L_0(\beta) - L_\nu(\beta))$$

und, unter Beachtung des zweiten Hilfssatzes,

$$|S_\nu(\beta) - S_\nu(\beta')| \leq \frac{h}{L_0(\beta')} L_\nu, \quad (11)$$

wo  $L_\nu$  die Randlänge des  $\nu$ -ten Blattes bezeichnet und  $h$  eine nur von der Wahl von  $\beta$  abhängige Konstante ist. Die Summation dieser Ungleichungen ergibt schließlich die in Aussicht gestellte Beziehung (10).

**301.** Die endgültige Fassung des Überdeckungssatzes 2 ist nun eine Folge aus der letztgenannten Beziehung, zusammen mit der für einen geschlossenen, die Fläche  $F_0$  zerlegenden Bogen  $\beta$  bestehenden Relation (I. 2). Um einzusehen, daß die Behauptung (I. 2) für einen *beliebigen* regulären Bogen  $\beta$  besteht, wähle man auf  $\beta$  einen beliebigen Punkt  $P$ , nehme eine beliebige Umgebung  $U_P$  von  $P$  und bezeichne durch  $\beta'$  den in  $U_P$  fallenden Teilbogen von  $\beta$ . Dieser Teilbogen  $\beta'$  läßt sich in  $U_P$  zu einem geschlossenen Bogen  $\beta_P$  ergänzen, der die Fläche  $F_0$

zerlegt. Nun wende man die Relation (10) einerseits auf  $\beta$  und  $\beta'$ , andererseits auf  $\beta_p$  und  $\beta'$  an, und setze dann die Beziehung (I. 2) für den zerlegenden Bogen  $\beta_p$  an. Die Zusammenfassung dieser drei Beziehungen ergibt alsdann die allgemeine Behauptung (I. 2).

**302. Bemerkung.** Für das folgende ist es von großem Gewicht, zu beachten, daß der Überdeckungssatz 2 für berandete Flächen  $F_0$  gilt (vgl. hierzu Nr. 295) und daß man dann insbesondere den Bogen  $\beta$  als einen Randbogen von  $F_0$  nehmen kann, sofern der Rand regulär ist, was im folgenden stets vorausgesetzt werden soll.

#### § 4. Hauptsatz über endliche Überlagerungsflächen.

**303.** Es wurde in § 1 schon hervorgehoben, daß die topologische Relation

$$\varrho = \sum_1^n \varrho_v + v, \tag{12}$$

welche die Charakteristik einer  $n$ -blättrigen endlichen Überlagerungsfläche  $F$  als Funktion von den Charakteristiken der Blätter  $F_1, \dots, F_n$  und der Verzweigungszahl  $v$  (von  $F$ ) bestimmt, als speziellen Fall die HURWITZSCHE Beziehung

$$\varrho = n\varrho_0 + v \tag{12'}$$

enthält, falls  $F$  relativ zur Grundfläche  $F_0$  *unberandet* ist. Aus dieser Beziehung ist zu ersehen, daß die Charakteristik  $\varrho$  der Überlagerungsfläche  $F$  mindestens gleich ist der Charakteristik  $\varrho_0$  der Grundfläche, multipliziert mit der Blätteranzahl  $n$ . Nachdem die Flächenmetrik eingeführt worden ist, läßt sich aus der allgemeinen Charakteristikrelation (12) eine Beziehung ableiten, welche zeigt, daß die HURWITZSCHE Ungleichung  $\varrho \geq n\varrho_0$  auch für berandete Überlagerungsflächen besteht, falls die Blätterzahl  $n$  durch die oben erklärte *mittlere Blätterzahl*  $S$  ersetzt wird, vorausgesetzt, daß auf der rechten Seite eine Größe hinzugefügt wird, welche im folgenden die Rolle eines unwesentlichen Restgliedes spielen wird. Dies ist der wesentliche Inhalt des nachstehenden fundamentalen Satzes<sup>1</sup>.

**Hauptsatz.** *Es sei  $F_0$  eine geschlossene oder berandete endliche Grundfläche von der Charakteristik  $\varrho_0$ , auf welcher eine Maßbestimmung von der in § 2 angegebenen Art eingeführt worden ist. Dann existiert eine positive Zahl  $h$ , so daß jede endliche Überlagerungsfläche  $F$  von  $F_0$  der Beziehung*

$$\varrho^+ \geq \varrho_0 S - h\bar{L} \tag{II. 1}$$

*genügt, wobei  $\varrho$  die Charakteristik und  $L$  die relative Randlänge von  $F$  bezeichnen<sup>2</sup>.*

<sup>1</sup> AHLFORS [10], S. 168.

<sup>2</sup>  $\varrho^+$  ist die größere der Zahlen  $\varrho$  und Null. Der Satz ist offenbar für  $\varrho_0 \leq 0$  trivial; es kann also im folgenden  $\varrho_0 > 0$  vorausgesetzt werden.

**304.** Es soll hier nur der Fall einer *schlichtartigen* Grundfläche betrachtet werden<sup>1</sup>. Die Fläche  $F_0$  möge von  $q (> 2)$  geschlossenen Randkurven (oder Punkten) berandet sein; es ist dann  $\varrho_0 = q - 2$ . Man ziehe  $q$  punktfremde Querschnitte  $\beta_1, \dots, \beta_q$  und bezeichne durch  $F'_0, F''_0$  die zwei einfach zusammenhängenden Teile, in welche  $F_0$  zerfällt. Es bedeutet keine wesentliche Einschränkung anzunehmen, daß eine Dreiecksteilung der Fläche  $F_0$  existiert, bei welcher die Querschnitte  $\beta_\nu$  aus lauter Kanten zusammengesetzt sind.

Nach dieser Vorbereitung fassen wir sämtliche Kantenzüge der gegebenen Überlagerungsfläche  $F$  ins Auge, welche über den Querschnitten  $\beta_\nu$  liegen. Die von ihnen gebildeten Querschnitte  $\sigma$  der Fläche  $F$  zerlegen diese in eine endliche Anzahl  $N(G)$  von einfach zusammenhängenden Gebieten  $G$ . Bezeichnet  $n(\sigma)$  die Anzahl der verschiedenen Querschnitte  $\sigma$ , so hat man nach (1), § 1, für die Charakteristik  $\varrho$  der Überlagerungsfläche  $F$  den Wert  $n(\sigma) + \sum \varrho(G)$ , wo  $\varrho(G)$  die Charakteristik von  $G$  ist. Die Charakteristik eines jeden berandeten Gebietes ist aber  $\geq -1$ , und es wird also  $\varrho(G) \geq -1$  und

$$\varrho \geq n(\sigma) - N(G). \quad (13)$$

**305.** Um den Hauptsatz aus dieser Beziehung herzuleiten, muß eine gewisse Klasseneinteilung der Gebiete  $G$  vorgenommen werden. Angenommen, daß ein Gebiet  $G$  existiert, dessen Berandung genau *einen* Querschnitt  $\sigma$  enthält, sei  $(G_1)$  die Klasse sämtlicher solcher Gebiete und  $(\sigma_1)$  die Klasse der begrenzenden Querschnitte  $\sigma$ . Die Klasse  $(G_2)$  möge sämtliche Gebiete  $G$  umfassen, deren Rand genau einen, nicht zu  $(\sigma_1)$  gehörenden Querschnitt  $\sigma$  enthält; sei  $(\sigma_2)$  die Gesamtheit dieser Querschnitte. In dieser Weise erklärt man zwei Folgen  $(G_1), (G_2), \dots, (G_p)$  ( $p \leq n$ ) von Gebieten  $G$  und von zugehörigen Querschnitten  $(\sigma_1), (\sigma_2), \dots, (\sigma_p)$ ; jedes Gebiet  $G_\nu$  hat genau einen, nicht zu den früheren Klassen gehörenden Querschnitt  $\sigma = \sigma_\nu$  als Randbogen. Das Verfahren bricht ab, wenn die übrigbleibenden Gebiete  $G$  entweder von *keinem* neuen, noch nicht in Betracht gezogenen Querschnitt  $\sigma$  oder von mindestens *zwei* solchen Querschnitten begrenzt werden; anderenfalls wird es fortgesetzt, bis alle Gebiete  $G$  miteinbezogen worden sind.

Jeder Querschnitt  $\sigma_\nu$  ( $\nu = 1, \dots, p$ ) gehört definitionsgemäß zur Berandung von einem Gebiet  $G_\nu$ ; weiterhin gilt, daß  $\sigma_\nu$  *im allgemeinen zur Begrenzung von nur einem Gebiet  $G_\nu$  gehört*. Um dies einzusehen, fasse man zuerst die zwei Teile  $F'_\nu, F''_\nu$  ins Auge, in welche ein gegebener Querschnitt  $\sigma_\nu$  die Fläche  $F$  zerlegt. Mindestens der eine dieser Teile enthält ein an  $\sigma_\nu$  grenzendes Gebiet  $G_\nu$ ; es möge z. B.  $F'_\nu$  diese Eigenschaft

<sup>1</sup> Eine Fläche heißt *schlichtartig*, wenn sie von jedem einfachen Polygon (Rückkehrschnitt) zerlegt wird. — AHLFORS [10] hat auch den Fall einer nichtschlichtartigen Fläche in Betracht gezogen.

besitzen. Unter dieser Voraussetzung gehören sämtliche *innerhalb*  $F'_v$  verlaufende Querschnitte  $\sigma$  zu den Klassen  $(\sigma_1), (\sigma_2), \dots, (\sigma_{v-1})$ .

Nach der Konstruktion der Klassen  $(G_v)$  und  $(\sigma_v)$  gehören nämlich sämtliche, das betrachtete Gebiet  $G_v$  begrenzenden Querschnitte, mit alleiniger Ausnahme von  $\sigma_v$ , zu den niedrigeren Klassen  $(\sigma_{v-1}), \dots, (\sigma_1)$ . Sei  $\sigma_{v_1} (v_1 < v)$  ein solcher Querschnitt; da  $\sigma_{v_1}$  mindestens ein Gebiet der Klasse  $(G_{v_1})$  begrenzt, so muß das andere an  $\sigma_{v_1}$  grenzende Gebiet  $G$  zu dieser Klasse gehören, und sämtliche dieses Gebiet begrenzenden Querschnitte  $\sigma$  gehören also zu den Klassen  $(\sigma_{v_1}), \dots, (\sigma_1)$ . Indem man so weiter verfährt, sieht man ein, daß tatsächlich sämtliche in  $F'_v$  gelegenen Querschnitte zu den Klassen  $(\sigma_1), \dots, (\sigma_{v-1})$  gehören.

Angenommen, daß auch das andere an  $\sigma_v$  grenzende Gebiet  $G$  zur Klasse  $(G_v)$  gehört, so folgt aus obigem, daß auch der Teil  $F'_0$  nur Querschnitte der niedrigeren Klassen  $(\sigma_1), \dots, (\sigma_{v-1})$  enthält; dann erschöpfen aber der gegebene Querschnitt  $\sigma_v$  und die Klassen  $(\sigma_1), \dots, (\sigma_{v-1})$  die Gesamtheit der Querschnitte  $\sigma$ . Hieraus folgt:

Die Querschnitte  $\sigma_v$  und die Gebiete  $G_v (v=1, \dots, p)$  sind einander eineindeutig zugeordnet, außer in dem einzigen Fall, wo die Gebiete  $(G_v) (v=1, \dots, p)$  die Gesamtheit sämtlicher Gebiete  $G$  umfassen. In diesem Ausnahmefall gibt es genau einen Querschnitt  $\sigma_v$ , und zwar von der höchsten Klasse  $v=p$ , der *zwei* Gebiete  $G_v$  begrenzt.

Wir gehen nun zu dem Fall über, wo die Klassen  $(G_v)$  noch nicht die Gesamtheit der Gebiete  $G$  erschöpfen. Wenn  $G$  ein nicht abgesondertes Gebiet ist, so wird es, außer von gewissen abgesonderten Querschnitten  $(\sigma_v)$  entweder 1. von *keinem* nicht zu  $(\sigma_v)$  gehörenden Querschnitt  $\sigma$ , oder 2. von *mindestens zwei* solchen Querschnitten  $\sigma$  berandet. Ein einziger nicht abgesondertes Querschnitt kann nämlich nicht als Randbogen vorkommen, weil die Klasseneinteilung  $(G_v)$  dann auch jenes Gebiet  $G$  mit einbeziehen würde, und zwar als ein Gebiet der Klasse  $G_{p+1}$ , welche nach der Voraussetzung jedoch nicht existiert.

Sei nun  $G$  ein nichtabgesondertes Gebiet von der Art 1 und sei  $\sigma_\mu (\mu \leq p)$  ein begrenzender Querschnitt von möglichst hohem Index  $\mu$ . An diese Seite grenzt ein Gebiet  $G_\mu \equiv G$ , und man schließt wie oben, daß derjenige Teil der Fläche, welcher durch  $\sigma_\mu$  getrennt wird und  $G_\mu$  enthält, lauter Gebiete  $G_v (v \leq \mu)$  enthält. Der entsprechende Schluß läßt sich in bezug auf die anderen Seiten von  $G$  wiederholen, und es ergibt sich so, daß die Querschnitte  $(\sigma_v)$  die Fläche  $F$  in Gebiete zerlegen, die mit alleiniger Ausnahme von  $G$  sämtlich zu den Klassen  $(\sigma_1), \dots, (\sigma_\mu)$  gehören. Es muß also  $\mu=p$  sein, und das Ausnahmegebiet  $G$  wird von mindestens zwei Querschnitten  $\sigma_p$  begrenzt, weil es ja anderenfalls schon zur Klasse  $G_p$  gehören würde. — Zusammenfassend gilt:

Falls die Querschnitte  $(\sigma_v)$  sämtliche Querschnitte  $\sigma$  umfassen, so sind zwei Fälle möglich: Entweder grenzen die Querschnitte  $(\sigma_v)$  an *ein* Gebiet  $G_v$  an; in diesem Fall gibt es genau ein Gebiet  $G$ , das nicht

zu den Klassen  $(G_v)$  gehört. Oder aber es gibt genau einen Querschnitt der höchsten Klasse  $(\sigma_p)$ , der zwei Nachbargebiete  $G_p$  trennt; die Gebiete  $(G_v)$  erschöpfen dann die Gesamtheit der Gebiete  $G$ .

Falls es dagegen Querschnitte  $\sigma$  gibt, welche zu keiner Klasse  $(\sigma_v)$  gehören, so entsprechen die Gebiete  $G_v$  und die angrenzenden Querschnitte  $\sigma_v$  einander eineindeutig. Jedes von den Gebieten  $(G_v)$  verschiedene Gebiet  $G$  wird dann an mindestens *zwei* nicht abgesonderte Querschnitte  $\sigma$  grenzen.

Wenn der zuletzt betrachtete Fall vorliegt, so teile man noch die nichtabgesonderten Gebiete  $G$  in zwei Klassen  $G'$ ,  $G''$  ein, je nachdem die Anzahl der begrenzenden, nichtabgesonderten Querschnitte  $\sigma$  *kleiner als*  $q$  oder *mindestens gleich*  $q$  ist. Diese Querschnitte  $\sigma$  werden schließlich durch  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$  bezeichnet, je nachdem die zwei angrenzenden Gebiete  $G$  beide zur Klasse  $G'$  gehören, das eine ein Gebiet  $G'$ , das andere ein Gebiet  $G''$  ist, beide zur Klasse  $G''$  gehören. Es gilt also dann:

- a) Die  $G_v$  und  $\sigma_v$  entsprechen einander eineindeutig.
- b) Die Begrenzung eines Gebiets  $G'$  enthält mindestens zwei, höchstens  $q-1$  Querschnitte  $\sigma_{11}$  oder  $\sigma_{12}$ .
- c) Die Begrenzung eines Gebiets  $G''$  enthält mindestens  $q$  Querschnitte  $\sigma_{12}$  oder  $\sigma_{22}$ .

**306.** Wir kehren nun zu der Beziehung (13) zurück. *Falls die Querschnitte  $\sigma_v$  nicht alle Querschnitte  $\sigma$  umfassen*, so heben sich nach a) die jenen Querschnitten zugeordneten Glieder der Differenz  $n(\sigma) - N(G)$  gegenseitig auf, und es wird also, unter Anwendung einer unmittelbar verständlichen Bezeichnung

$$\varrho \geq \left[ n(\sigma_{11}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{12}) - N(G') \right] + \left[ n(\sigma_{22}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{12}) - N(G'') \right]. \quad (14)$$

Bezeichnet  $G'_i$  ein beliebiges der Gebiete  $G'$ , dessen Begrenzung eine Anzahl  $n_i(\sigma_{11}) \geq 0$  von Querschnitten  $\sigma_{11}$  und eine Anzahl  $n_i(\sigma_{12})$  von Querschnitten  $\sigma_{12}$  enthält, so wird nach b)  $n_i(\sigma_{11}) + n_i(\sigma_{12}) \geq 2$ . Summiert man über alle  $G'$ , ergibt sich hieraus weiter  $\sum n_i(\sigma_{11}) + \sum n_i(\sigma_{12}) \geq 2N(G')$ . Hier ist  $\sum n_i(\sigma_{11}) = 2n(\sigma_{11})$  und  $\sum n_i(\sigma_{12}) = n(\sigma_{12})$ , also

$$n(\sigma_{11}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{12}) - N(G') \geq 0.$$

Analog beweist man, mit Rücksicht auf c)

$$n(\sigma_{22}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{12}) \geq \frac{q}{2} N(G'').$$

Die erste dieser Beziehungen zeigt, daß das erste Glied rechts in (14) nichtnegativ ist. Unter Berücksichtigung der zweiten Beziehung wird nun

$$\varrho \geq n(\sigma_{22}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{12}) - N(G'') \geq \frac{q-2}{q} \left( n(\sigma_{22}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{12}) \right),$$

also sicher

$$\varrho \geq \frac{q-2}{q} n(\sigma_{22}). \quad (15)$$

**307.** Es gilt nun eine untere Grenze für die Anzahl  $n(\sigma_{22})$  derjenigen Querschnitte, welche je zwei Gebiete  $G''$  begrenzen, zu finden. Zu diesem Zweck beachte man, daß jeder Querschnitt  $\sigma$  über einer wohlbestimmten der Kurven  $\beta_1, \dots, \beta_q$  liegt, durch welche die Grundfläche  $F_0$  zerlegt wurde. Bezeichnet man allgemein durch  $\lambda(\sigma)$  die Länge von  $\sigma$ , dividiert durch die Länge der entsprechenden Kurve  $\beta$ , so ist die Summe der mittleren Blätterzahlen der Überlagerungsfläche  $F$  über  $\beta_1, \dots, \beta_q$  gleich

$$\sum_{i=1}^q S(\beta_i) = \sum \lambda(\sigma_v) + \sum \lambda(\sigma_{11}) + \sum \lambda(\sigma_{12}) + \sum \lambda(\sigma_{22}). \quad (16)$$

Nach dem Überdeckungssatz 2 gibt es nun eine nur von der gegebenen Flächenmetrik und von der Wahl der Bogen  $\beta_1, \dots, \beta_q$  abhängige Zahl  $h > 0$ , so daß

$$\sum_{i=1}^q S(\beta_i) \geq qS - hL \quad (16')$$

gilt, wo  $S$  die mittlere Blätteranzahl und  $L$  die Länge des relativen Randes von  $F$  bezeichnet. Eliminiert man  $\sum S$  aus den zwei letzten Beziehungen und bemerkt noch, daß jedes  $\lambda(\sigma) \leq 1$  und also speziell  $\sum \lambda(\sigma_{22}) \leq n(\sigma_{22})$  ist, so ergibt sich die Beziehung

$$n(\sigma_{22}) \geq qS - hL - \sum \lambda(\sigma_v) - \sum \lambda(\sigma_{11}) - \sum \lambda(\sigma_{12})$$

oder, gemäß (15) und wegen  $\frac{q-2}{q} < 1$ ,

$$\varrho \geq (q-2)S - hL - (\sum \lambda(\sigma_v) + \sum \lambda(\sigma_{11}) + \sum \lambda(\sigma_{12})), \quad (17)$$

wo also  $h$  eine nur von der gegebenen Metrik und der Wahl der Bogen  $\beta_1, \dots, \beta_q$  abhängige Zahl ist<sup>1</sup>.

**308.** Es gilt nun zu zeigen, daß die rechtstehenden drei Summen  $\sum \lambda$  von der Größenordnung  $hL$  sind. Dies soll durch eine nochmalige Anwendung des Überdeckungssatzes geschehen. Wir betrachten, außer der Grundfläche  $F_0$ , diejenigen zwei Grundteilflächen  $F'_0$  und  $F''_0$ , in welche  $F_0$  durch das Bogensystem  $\beta_1, \dots, \beta_q$  zerfällt. Falls  $F'$  eine Überlagerungsfläche von  $F'_0$  ist, so unterscheidet sich die mittlere Blätteranzahl  $S(\beta_i)$  von  $F'$  über einer der begrenzenden Kurven  $\beta_i$  von der mittleren Blätteranzahl  $S(F')$  der ganzen Fläche  $F'$  um einen Betrag  $< hL'$ , wo  $L'$  die relative Länge des Randes von  $F'$  ist. Entsprechendes gilt für eine beliebige Überlagerungsfläche  $F''$  von  $F''_0$ . Hieraus schließt man:

Es gibt eine Zahl  $h$ , so daß, für eine beliebige Überlagerungsfläche von  $F'_0$  oder  $F''_0$ , die Beziehung

$$|S(\beta_i) - S(\beta_j)| \leq hL \quad (18)$$

<sup>1</sup> Im folgenden wird jede solche Zahl mit  $h$  bezeichnet.

für jedes Bogenpaar  $\beta_i, \beta_j$  gilt;  $L$  bezeichnet die Länge des relativen Randes der Überlagerungsfläche in bezug auf  $F'_0$  bzw. auf  $F''_0$ .

Dieses Ergebnis wird nun auf eines der Gebiete ( $G_v$ ) angewandt, welche ja sämtlich Überlagerungsflächen von entweder  $F'_0$  oder  $F''_0$  sind. Wenn wir uns fortan an den Fall halten, wo die Querschnitte ( $\sigma_v$ ) nicht alle  $\sigma$  umfassen, so entspricht einem gegebenen  $G_v$  ein wohlbestimmter Querschnitt  $\sigma_v$ ; es möge dieser z. B. über dem Bogen  $\beta_1$  liegen. Es wird dann für  $i = 1, \dots, q$

$$\lambda(\sigma_v) \leq S(\beta_1) \leq S(\beta_i) + hL(G_v),$$

wo  $L(G_v)$  die Länge des *relativ zu  $F'_0$  bzw.  $F''_0$  bestimmten* Randes von  $G_v$  ist. Gibt man hier  $i$  die Werte  $1, \dots, q$ , so ergibt sich durch Addition

$$q\lambda(\sigma_v) \leq \sum_{i=1}^q S(\beta_i) + qhL(G_v).$$

Hier ist die Summe ( $\sum S$ ) der mittleren Blätterzahlen von  $G_v$  über den Bogen  $\beta_i$ ; offenbar gleich der Summe  $\sum \lambda(\sigma)$ , wo über sämtliche Seiten  $\sigma$  von  $G_v$  zu summieren ist, und die letzte Relation läßt sich folglich auch in der Form

$$q\lambda(\sigma_v) \leq \sum_{G_v} \lambda(\sigma) + qhL(G_v) \quad (19)$$

schreiben.

Summiert man nun diese Beziehung über sämtliche Gebiete  $G_v$ , so ergibt das erste Glied rechts eine Summe, die höchstens gleich der zweifachen Summe  $\sum \lambda(\sigma_v)$  ist, denn jede Seite  $\sigma$  von  $G_v$  gehört zu einer der Klassen ( $\sigma_\mu$ ) ( $\mu = 1, \dots, p$ ) und grenzt an höchstens zwei der abgesonderten Gebiete ( $G_\mu$ ). Beachtet man noch, daß die Summe ( $\sum L(G_v)$ ) der relativen Randlängen der Teilgebiete  $G_v$  in bezug auf  $F'_0$  oder  $F''_0$  höchstens gleich der Länge  $L$  des ganzen relativen Randes der gegebenen Überlagerungsfläche  $F$  in bezug auf  $F_0$  ist, so wird

$$q\sum \lambda(\sigma_v) \leq 2\sum \lambda(\sigma_v) + qhL$$

oder also, da  $q > 2$  ist,

$$\sum \lambda(\sigma_v) \leq hL, \quad (20)$$

wo  $h$  eine neue nur von der Fläche  $F_0$  und von dem Querschnittssystem  $\beta$ , abhängige Konstante ist.

**309.** Wir kommen schließlich zur Abschätzung der Summen  $\sum \lambda(\sigma_{11})$  und  $\sum \lambda(\sigma_{12})$ . Wenn das Gebiet  $G$  zur Klasse  $G'$  gehört, so wird es höchstens von  $q-1$  Bogen  $\sigma_{11}$  oder  $\sigma_{12}$  begrenzt. Zu jedem  $G'$  läßt sich also mindestens ein Bogen  $\beta_i$  angeben, über welchem kein begrenzender Bogen  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$  liegt. Bezeichnet  $S(\beta_i)$  die mittlere Blätterzahl von  $G'$  über  $\beta_i$ , so wird, gemäß (18),

$$\sum_{G'} \lambda(\sigma_{11}) + \sum_{G'} \lambda(\sigma_{12}) \leq \sum_{i \neq 1} S(\beta_i) \leq (q-1)S(\beta_i) + (q-1)hL(G'),$$

wo die Summation links über alle Seiten  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$  von  $G'$  zu erstrecken ist. Addiert man noch über sämtliche  $G'$ , so ergibt sich links die Summe



$2 \sum \lambda(\sigma_{11}) + \sum \lambda(\sigma_{12})$ . Rechts erscheint eine Summe  $\sum S(\beta_i)$ , die nach der Definition des Querschnitts  $\beta_i$  nur von abgesonderten Querschnitten ( $\sigma_v$ ) herrührt; da jeder solche Querschnitt höchstens ein Gebiet  $G'$  begrenzt, so wird jene Summe höchstens gleich  $\sum \lambda(\sigma_v)$ . Schließlich hat die Summe  $\sum_{G'} L(G')$  die relative Randlänge  $L$  von  $F$  als Majorante, und es wird gemäß (20)

$$2 \sum_{G'} \lambda(\sigma_{11}) + \sum_{G'} \lambda(\sigma_{12}) \leq (q-1) \sum \lambda(\sigma_v) + (q-1)hL \leq h'L. \quad (21)$$

Mit Rücksicht auf (20) und (21) ergibt die Beziehung (17) die Behauptung

$$q \geq (q-2)S - hL.$$

**310.** Dieses Ergebnis haben wir unter der Voraussetzung gefunden, daß die abgesonderten Querschnitte ( $\sigma_v$ ) nicht alle Querschnitte  $\sigma$  umfassen. Es ist nun leicht einzusehen, daß dasselbe Resultat in Kraft bleibt, auch wenn sämtliche Querschnitte  $\sigma$  schon zu jenen Klassen ( $\sigma_v$ ) gehören. In diesem Fall besteht nämlich jedenfalls die Relation (20)<sup>1</sup>. Die Identität (16) reduziert sich auf

$$\sum_1^q S(\beta_i) = \sum \lambda(\sigma_v)$$

und die Beziehung (16'), welche als eine Folgerung des Überdeckungssatzes ganz allgemein gilt, ergibt

$$qS \leq \sum \lambda(\sigma_v) + hL \leq h'L.$$

Die mittlere Blätterzahl  $S$  ist also im vorliegenden Fall von der Größenordnung  $hL$  und die Behauptung (II. 4) gilt infolgedessen sicher, wenn der rechtsstehenden Zahl  $h$  nur ein genügend großer Wert gegeben wird.

**311. Bemerkung.** Zum richtigen Verständnis der leitenden Idee beim obigen Beweis ist zu bemerken, daß der Satz (II. 4), wie aus dem letzten Teil des Beweises hervorgegangen ist, trivial wird, falls die mittlere Blätteranzahl  $S$  der Überlagerungsfläche von derselben Größenordnung ist, wie die relative Randlänge  $L$  derselben. Interessant ist allein der Fall, wo  $S$  im Verhältnis zu  $L$  groß ist. Aus dem Beweis ist zu ersehen, daß dies dann eintritt, wenn die Anzahlen der Gebiete der Klasse  $G''$  und der entsprechenden Querschnitte  $\sigma_{22}$  im Verhältnis zur Gesamtanzahl der Gebiete bzw. Querschnitte sehr groß sind<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Die Begründung von Nr. 308 gilt auch im vorliegenden Fall. Der einzige Unterschied besteht darin: Falls nicht nur die Querschnitte ( $\sigma_v$ ) alle  $\sigma$ , sondern auch die Gebiete ( $G_v$ ) die Gesamtheit der Gebiete  $G$  erschöpfen, so existiert ein Querschnitt  $\sigma_p$  der gleichzeitig zwei Gebiete  $G_p$  begrenzt. In (20) könnte also diese Seite links zweimal mitgerechnet werden, und jene Beziehung besteht somit nur a fortiori, wenn jeder Querschnitt  $\sigma_p$  links nur einmal mitgezählt wird.

<sup>2</sup> Auf den Fall einer nicht schlichtartigen Fläche soll hier nicht eingegangen werden.

### § 5. Umkehrung des Hauptsatzes.

312. Der Hauptsatz  $\varrho \geq \varrho_0 S - hL$  wurde oben als eine Verallgemeinerung der genauen HURWITZschen Relation  $\varrho = \varrho_0 n + v$  aufgefaßt, welche für eine zur Grundfläche  $F_0$  relativ unberandeten  $n$ -blättrigen Überlagerungsfläche  $F$  besteht. Falls  $F$  außerdem relativ zu  $F_0$  unverzweigt ist, verschwindet die Verzweigungszahl  $v$  und es wird einfach  $\varrho = \varrho_0 n$ . Es liegt nun nahe, zu untersuchen, ob für eine relativ berandete, aber in bezug auf  $F_0$  unverzweigte Fläche  $F$  eine dem Hauptsatz analoge Beziehung gilt, welche statt einer unteren Schranke eine obere Schranke für die Charakteristik  $\varrho$  enthält.

Daß dem tatsächlich so ist, soll unter nachstehenden Voraussetzungen gezeigt werden (AHLFORS [10], § 5).

Die endliche Überlagerungsfläche  $F$  der schlichtartigen Grundfläche  $F_0$  sei als Teil in einer endlich vielblättrigen, relativ zur Grundfläche unverzweigten und unberandeten Überlagerungsfläche  $F^*$  enthalten.

Die Blätterzahl von  $F^*$  sei  $N$ ; nach der HURWITZschen Relation hat man für ihre Charakteristik den Wert  $N\varrho_0$ . Der relative Rand von  $F$  zerlegt das Komplement von  $F$  in bezug auf  $F^*$  in gewisse Teilflächen  $\bar{F}$ . Bezeichnet man durch  $n(\gamma)$  die Anzahl derjenigen Randbogen  $\gamma$  von  $F$ , welche Querschnitte der Fläche  $F^*$  darstellen, so ergibt sich nach dem Zerlegungssatz (1) andererseits der Wert  $\varrho + \sum \varrho(\bar{F}) + n(\gamma)$  für die Charakteristik der ganzen Fläche  $F^* = F + \sum \bar{F}$ , und es wird also

$$N\varrho_0 = \varrho + \sum \varrho(\bar{F}) + n(\gamma).$$

Für jedes einfach zusammenhängende  $\bar{F}$  ist  $\varrho(\bar{F}) = -1$ ; wenn  $N_1$  die Anzahl solcher Gebiete ist, so wird

$$N\varrho_0 = \varrho + \sum \varrho^+(\bar{F}) - N_1 + n(\gamma).$$

Nach dem Hauptsatz gilt nun für die Teilfläche  $F$

$$\varrho^+(F) \geq \bar{S}\varrho_0 - h\bar{L},$$

wobei  $\bar{S}$  die entsprechende mittlere Blätterzahl ist und  $\bar{L}$  die Länge des relativen Randes ist. Durch Addition erhält man  $\sum S = N - S$  und  $\sum \bar{L} = L$ , wo  $S$  und  $L$  die mittlere Blätteranzahl und die relative Randlänge von  $F$  bezeichnen. Setzt man dies in die obige Identität ein, so wird

$$\varrho \leq S\varrho_0 + N_1 - n(\gamma) + hL.$$

Besteht nun der Rand von  $F$  aus lauter Querschnitten von  $F^*$ , so zerfällt  $F^*$  in höchstens  $n(\gamma) + 1$  Teilgebiete, und es ist, da eines von jenen Teilgebieten mit  $F$  zusammenfällt,  $N_1 \leq n(\gamma)$ . Jede geschlossene Kurve  $\gamma$  zerlegt  $F^*$  in zwei Teile, von denen höchstens der eine einfach zusammenhängend ist. Enthält also der Rand von  $F$  eine Anzahl  $\alpha$  von geschlossenen Konturen  $\gamma$ , so wird die Anzahl  $N_1$  also höchstens gleich  $n(\gamma) + \alpha$ , und man findet

$$\varrho \leq S\varrho_0 + hL + \alpha.$$

**Umkehrung des Hauptsatzes.** *Es sei  $F_0$  eine schlichtartige endliche Fläche und  $F^*$  eine relativ zu  $F_0$  unberandete und unverzweigte, endlich vielblättrige Überlagerungsfläche. Dann gibt es eine Konstante  $h$ , so daß für jede endliche Überlagerungsfläche  $F$  von  $F_0$ , welche als Teil in  $F^*$  enthalten ist, die Beziehungen*

$$S_{Q_0} - hL \leq \dot{Q} \leq S_{Q_0} + hL + \alpha \quad (\text{II. 2})$$

*bestehen, wo  $S$  die mittlere Blätteranzahl,  $L$  die Länge des relativen Randes und  $\alpha$  die Anzahl der geschlossenen Konturen des relativen Randes von  $F$  bezeichnen.*

### § 6. Sätze über regulär ausschöpfbare offene Überlagerungsflächen.

**313.** Der Begriff der offenen, unendlichen Überlagerungsfläche  $F^*$  einer gegebenen endlichen Grundfläche  $F_0$  kann mittels einer unendlichen Folge von endlichen Überlagerungsflächen erklärt werden. Es sei  $F_1, \dots, F_\nu, \dots$  eine unendliche Folge endlicher Überlagerungsflächen der Grundfläche  $F_0$ , die ineinander geschachtelt sind, d. h. es sei  $F_\nu$  als Teil in  $F_{\nu+1}$  enthalten. Als Grenze erhält man für  $\nu \rightarrow \infty$  eine unendliche, offene Überlagerungsfläche, für welche die Grundbegriffe „Punkt“, „Umgebung“, „Spurpunkt“ in evidentier Weise durch die Näherungsflächen  $F_\nu$  gegeben sind. Zwei Folgen  $F_\nu$  und  $F'_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) von Näherungsflächen erklären dann und nur dann ein und dieselbe offene Grenzfläche, wenn jede Fläche der einen Folge in allen, bis auf endlich viele, Flächen der anderen Folge als Teil enthalten ist, und umgekehrt. Eine definierende Folge  $F_\nu$  nennt man eine *Ausschöpfung* der Grenzfläche  $F^*$ .

**314.** Mit Rücksicht auf den Überdeckungssatz und den Hauptsatz sind diejenigen Flächen von besonderem Interesse, für welche folgende Bedingung erfüllt ist:

*Die offene Fläche  $F^*$  heißt regulär ausschöpfbar, wenn wenigstens eine Ausschöpfung  $F_1, F_2, \dots$  existiert, für welche*

$$\lim \frac{L}{S} = 0$$

*ist, wo  $L$  die Länge des relativen Randes und  $S$  die mittlere Blätterzahl von der Näherungsfläche  $F$  bezeichnen.*

Nur für diese Flächen spielt die Größe  $L$  in den erwähnten Hauptsätzen die Rolle eines unwesentlichen Restgliedes.

**315.** Es empfiehlt sich, im folgenden gewisse Bezeichnungen einzuführen, welche in nahem Zusammenhang mit einigen wichtigen Begriffen der Wertverteilungslehre stehen. Es sei  $D$  ein beliebiges Teilgebiet der Grundfläche  $F_0$ . Die über  $D$  gelegenen, zusammenhängenden

Teile der Flächen  $F$  einer ausschöpfenden Folge von  $F^*$  sind von zwei Arten:

Entweder ist ein solches Flächenstück relativ zu  $D$  unberandet. Dann heiÙe es eine *Insel*.

Oder es besitzt ein Randstück relativ zu  $D$ , das dann auch zum relativen Rand von  $F$  gehört. Ein solches Teilflächenstück von  $F$  heißt eine *Zunge*.

Eine Insel gibt zu der mittleren Blätteranzahl  $S(D)$  von  $F$  über  $D$  einen Beitrag, der ganzzahlig und gleich der Blätteranzahl der Insel ist; man nennt diese Zahl die *Vielfachheit* der Insel. Von sämtlichen, über  $D$  gelegenen Inseln der Fläche  $F$  rührt also ein ganzzahliger Teil  $n(D)$  der Größe  $S(D)$  her, der gleich der Summe der Vielfachheiten jener Inseln ist. Setzt man nun  $S(D) = n(D) + m(D)$ , wo also das zweite Glied  $m(D)$  von den über  $D$  liegenden Zungen herrührt, so existiert nach dem Überdeckungssatz eine nur von  $D$  abhängige Konstante  $h(D)$ , so daß

$$n(D) + m(D) = S + h(D)L, \quad (\text{A})$$

für jedes  $F$  besteht;  $S$  und  $L$  bezeichnen hierbei die mittlere Blätterzahl und die relative Länge des Randes von  $F$ .

Die Analogie dieses Satzes mit dem *ersten Hauptsatz* der Theorie der meromorphen Funktionen ist auffallend. Die Anzahl  $n(D)$  der über dem Gebiet  $D$  liegenden Inseln entspricht der mittleren Anzahlfunktion  $N(r, a)$  der  $a$ -Stellen, der von den Zungen gelieferte Beitrag  $m(D)$  zur gesamten mittleren Blätterzahl  $S(D)$  über  $D$  entspricht der Schmiegungsfunktion  $m(r, a)$ ; die mittlere Blätterzahl  $S$  hat die Rolle der charakteristischen Funktion übernommen und  $hL$  ist ein Restglied von unwesentlicher Bedeutung, *sofern die Bedingung der regulären Ausschöpfbarkeit erfüllt ist*.

Wenn die letztgenannte Bedingung besteht, so wird nach (A)

$$\overline{\lim} \frac{n(D)}{S} \leq 1. \quad (22)$$

Diese Beziehung besteht also, wie immer das Gebiet  $D$  auch gewählt wird. Läßt man  $D$  sich auf einen Punkt  $a$  der Grundfläche zusammenziehen, so wird  $n(D)$  in die Anzahl  $n(r, a)$  der über  $a$  gelegenen inneren Punkte von  $F$  übergehen, sofern jeder Verzweigungspunkt so oft mitgezählt wird, wie seine Vielfachheit angibt. Ob die Beziehung (22) noch für  $D \rightarrow a$  in Kraft bleibt, ist jedoch ungewiß, denn die in (A) stehende Konstante  $h(D)$  kann hierbei über alle Grenzen wachsen.

**316.** Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir daran, einen Spezialfall zu betrachten, der immer noch sehr allgemeiner Natur ist und für die Anwendungen besonderes Interesse hat. Es soll fortan vorausgesetzt werden:

1. Die Grundfläche  $F_0$  ist eine geschlossene Fläche vom Geschlecht Null, z. B. eine Kugelfläche.

2. Die offene Überlagerungsfläche  $F^*$  ist einfach zusammenhängend, d. h. jede Fläche der ausschöpfenden Folge  $F$  ist einfach zusammenhängend.

Unter diesen Voraussetzungen nehmen wir  $q > 2$  außerhalb voneinander liegende Gebiete  $D_1, \dots, D_q$  auf der Kugel  $F_0$  und betrachten die über denselben liegenden Inseln und Zungen der Überlagerungsfläche  $F$ . Jeder Insel haben wir eine ganze Zahl  $\geq 1$  als ihre *Vielfachheit* zugeordnet. Im folgenden empfiehlt es sich, eine Insel noch durch eine andere Zahl zu charakterisieren: die Charakteristik der Insel, genommen mit umgekehrtem Vorzeichen, soll die *einfache Vielfachheit* derselben heißen; für eine *einfach zusammenhängende* Insel hat diese Größe den Wert 1; sonst wird sie gleich Null oder negativ.

Die Summe der einfachen Vielfachheiten der über einem Gebiet liegenden Inseln der Näherungsfläche sei  $p(D)$ ; es ist  $p$  höchstens gleich der Anzahl der Inseln; jedenfalls gilt  $p \leq n$ . Aus der oben bewiesenen Beziehung (A) folgt

$$\sum_{i=1}^q p(D_i) \leq qS + hL.$$

Um eine untere Schranke für die linksstehende Summe aufzustellen, betrachten wir die über den Gebieten  $D_i$  liegenden Inseln  $D^i$  und Zungen  $D^z$  der Fläche  $F$ . Man entferne aus  $F$  zunächst alle Zungen  $D^z$ ; da  $F$  einfach zusammenhängend ist, so bleiben gewisse, ebenfalls einfach zusammenhängende Restgebiete  $F'$  übrig. Entfernt man alsdann aus  $F'$  noch sämtliche Inseln  $D^i$ , so erhält man gewisse Flächenstücke  $\bar{F}$ , welche sämtlich Überlagerungsflächen des zu den Gebieten  $D_i$  ( $i=1, \dots, q$ ) komplementären Teils  $\bar{F}_0$  der Kugelfläche  $F_0$  sind. Die Gebiete  $\bar{F}$  sind von zweierlei Art: entweder sie sind relativ zu  $\bar{F}_0$  unberandet, oder sie besitzen einen relativen Rand. Die Gebiete *erster Art* sind sicher mehrfach zusammenhängend.

Da die Gebiete  $F'$  durch lauter Rückkehrsnitte in die Inseln  $D^i$  und die Restgebiete  $\bar{F}$  zerlegt worden sind, so gilt für die entsprechenden Charakteristiken

$$\sum \varrho(F') = \sum \varrho(\bar{F}) + \sum \varrho(D^i),$$

und hieraus findet man für die Größe  $\sum p(D_i) = -\sum \varrho(D^i)$  den Wert

$$\sum_{i=1}^q p(D_i) = \sum \varrho(\bar{F}) + N(F'),$$

wo  $N$  die Anzahl der Gebiete  $F'$  ist, welche ja sämtlich die Charakteristik  $-1$  haben. Bezeichnet nun  $N_1(\bar{F})$  die Anzahl der einfach zusammenhängenden  $\bar{F}$ , so läßt sich die letzte Relation auch schreiben

$$\sum_{i=1}^q p(D_i) = \sum \varrho^*(\bar{F}) + N(F') - N_1(\bar{F}). \tag{23}$$

Jedes einfach zusammenhängende Gebiet ist nach obigem relativ zu  $\bar{F}_0$  berandet; ein solches Gebiet fällt mit einem gewissen der Gebiete  $F'$  zusammen. Die Differenz  $N(F') - N_1(\bar{F})$  ist also gleich der Anzahl  $N'(F')$  derjenigen Gebiete  $F'$ , welche mindestens eine Insel enthalten.

317. Nunmehr wenden wir den Hauptsatz (II. 1) auf die Überlagerungsflächen  $\bar{F}$  von  $\bar{F}_0$  an. Die Summe der mittleren Blätteranzahlen jener Flächen ergibt die mittlere Blätteranzahl  $S(\bar{F}_0)$  von  $F$  über  $\bar{F}_0$ , und die Summe der Länge der relativen Ränder ist höchstens gleich der gesamten Randlänge  $L$  von  $F$ . Es wird also

$$\sum \rho^+(F) > (q-2)S(\bar{F}_0) - hL$$

oder, da nach dem Überdeckungssatz  $S(\bar{F}_0) \geq S - hL$  ist, in Verbindung mit (23)

$$\sum_{i=1}^q \rho(D_i) \geq (q-2)S + N'(F') - hL. \quad (24)$$

Streicht man hier noch die nichtnegative Anzahl  $N'(F')$ , so ergibt sich:

Die Summe  $\sum_{i=1}^q \rho(D_i) = -\sum \rho(D^i)$  der einfachen Vielfachheiten sämtlicher über den Gebieten  $D_i$  liegenden Inseln der Fläche  $F$  genügt der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^q \rho(D_i) \geq (q-2)S - hL, \quad (B)$$

wo  $h$  eine nur von der Wahl der Gebiete  $D_i$  abhängige Konstante ist.

Bezeichnet man nun durch  $n_1(D)$  die gesamte Anzahl der Verzweigungsordnungen der Inseln über  $D$ , so ergibt sich aus der HURWITZschen Relation (2') (§ 1), sofern  $D$  einfach zusammenhängend ist,

$$\rho(D) = n(D) - n_1(D)$$

und (B) geht über in

$$\sum_{i=1}^q n(D_i) - \sum_{i=1}^q n_1(D_i) \geq (q-2)S - hL$$

oder

$$\sum_{i=1}^q (S - n(D_i)) + \sum_{i=1}^q n_1(D_i) \leq 2S + hL.$$

Mit Rücksicht auf (A) folgt hieraus noch

$$\sum_{i=1}^q m(D_i) + \sum_{i=1}^q n_1(D_i) \leq 2S + hL. \quad (C)$$

Diese Relation läßt sich als eine sinngemäße Verallgemeinerung des zweiten Hauptsatzes

$$\sum_{i=1}^q m(r, a_i) + \sum_{i=1}^q N_1(r, a_i) < 2T(r) + O(\log rT) + O\left(\log \frac{1}{R-r}\right)$$

deuten. Die Summe  $\sum n_1$  der Verzweigungszahlen der Inseln  $D^i$  entspricht ihrem Bildungsgesetz nach genau der Summe  $\sum N_1$ , zu welcher ja jeder  $k$ -fache Windungspunkt der Fläche  $F_r$  mit seiner Ordnungszahl  $k-1$  beiträgt.

Was läßt sich andererseits aus (B) oder (C) für die Anzahlen der über einem gegebenen Grundpunkt  $a$  gelegenen *inneren Punkte* der Näherungsfläche  $F$  ablesen? Bezeichnet man diese Anzahl, berechnet mit Hilfe der *einfachen* Vielfachheiten, so daß also auch jeder Windungspunkt nur einmal mitgezählt wird, durch  $\bar{n}(a)$ , so wird jedenfalls, sobald der Punkt  $a$  im Gebiete  $D$  liegt,  $\bar{n}(a) \geq p(D)$  und daher nach (B)

$$\sum_1^q \bar{n}(a_i) \geq (q-2)S - hL. \tag{B'}$$

Diese Beziehung ist der früheren, aus dem zweiten Hauptsatz folgenden Ungleichung (vgl. hierzu Nr. 230).

$$\sum_1^q \bar{N}(r, a_i) > (q-2)T(r) - O(\log r T(r)) - O\left(\log \frac{1}{R-r}\right)$$

an die Seite zu stellen.

**318.** Man setze nun, im Falle einer regulären Ausschöpfung, für  $F \rightarrow F^*$

$$\begin{aligned} \underline{\lim} \frac{m(D)}{S} &= 1 - \overline{\lim} \frac{n(D)}{S} = \delta(D), \\ \underline{\lim} \frac{n_1(D)}{S} &= \vartheta(D). \end{aligned}$$

Die Größe  $\delta(D)$ , welche gemäß (A) im Intervall (0,1) varriert, heißt der Defekt des Gebietes  $D$  in bezug auf die Überlagerungsfläche  $F^*$ .

Die Größe  $\vartheta(D) (\geq 0)$  wird als Verzweigungsindex von  $D$  in bezug auf  $F^*$  bezeichnet.

Mit diesen Bezeichnungen gilt die allgemeine

**Defektrelation.** Wenn die Überlagerungsfläche  $F^*$  regulär ausschöpfbar ist, so gilt für eine beliebige Menge von außerhalb voneinander gelegenen Gebieten  $D_i$  der Grundkugel  $F_0$

$$\sum \delta(D) + \sum \vartheta(D) \leq 2.$$

Die Summe der Defekte und der Verzweigungsindizes der Gebiete  $D$  ist also höchstens gleich 2.

**319.** Aus der Defektrelation folgert man:

**Satz I.** Eine regulär ausschöpfbare Fläche überdeckt sämtliche Punkte der Kugel, höchstens mit Ausnahme von zwei Punkten.

Gäbe es nämlich drei solche Ausnahmepunkte, so könnte man sie mit drei außerhalb voneinander liegenden Grundgebieten  $D_1, D_2, D_3$

überdecken. Über diesen würde dann keine einzige Insel liegen. Die entsprechenden Defekte würden also sämtlich gleich 1 werden und es wäre  $\sum \delta(D) \geq 3$  im Widerspruch mit der Defektrelation.

**320.** Eine andere interessante Folgerung aus dem Hauptsatz (B) ist folgende: Es sei  $D$  ein Gebiet auf der Kugel; die Überlagerungsfläche  $F^*$  sei so beschaffen, daß jede *einfach zusammenhängende Insel der Fläche  $F^*$  über  $D$  mindestens  $\mu$ -blättrig ist*. Man sagt dann: die Fläche  $F^*$  ist über  $D$  mindestens  $\mu$ -fach verzweigt. Unter dieser Voraussetzung gilt  $S(D) \geq n(D) \geq \mu p(D)$ , denn die einfach zusammenhängenden Inseln allein geben positive Beiträge zu der Größe  $p$ .

Es sei nun die Fläche  $F^*$  über den Gebieten  $D_i (i=1, \dots, q)$  mindestens  $\mu_i$ -fach verzweigt. Die Beziehung (B) ergibt dann für jede Näherungsfläche  $F$

$$\sum \frac{1}{\mu_i} S(D_i) \geq \sum p(D_i) \geq (q-2)S - hL.$$

Andererseits gilt aber nach dem ersten Überdeckungssatz

$$S(D_i) < S + hL,$$

und es wird also

$$\sum_1^q \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) \leq 2 + h \frac{L}{S},$$

daraus folgt

**Satz 2.** Falls die regulär ausschöpfbare Fläche  $F^*$  über den außerhalb voneinander liegenden Gebieten  $D_i$  mindestens  $\mu_i$ -fach verzweigt ist ( $i = 1, \dots, q$ ), so gilt

$$\sum \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) \leq 2. \quad (25)$$

*Bemerkung.* Dieser Satz gilt auch dann, wenn über einem Gebiet  $D_i$  überhaupt keine Insel liegt, sofern man  $\mu_i = \infty$  setzt. In der Tat liefert ein solches Gebiet  $D_i$  zu dem Ausdruck  $p(D_i)$  keinen Beitrag, und alle obigen Schlüsse bestehen unverändert, wenn man  $\mu_i = \infty$  setzt.

Ebenso wie die Beziehung (B) verbleibt auch Satz 2 in Kraft, wenn man die Gebiete  $D_i$  durch Punkte  $a_i$  ersetzt, wobei die Fläche  $F^*$  über einer Stelle  $a$   $\mu$ -fach verzweigt heißt, falls sämtliche über  $a$  gelegenen inneren Flächenpunkte Windungspunkte von einer Ordnung  $\geq \mu - 1$  sind (vgl. hierzu X, § 3).

Falls sämtliche über dem Gebiete  $D$  (bzw. über dem Punkt  $a$ ) gelegenen Inseln (inneren Punkte) von  $F^*$  *mehrblättrig* (Windungspunkte) sind, so heißt die Fläche über  $D$  (bzw. über  $a$ ) *vollständig verzweigt*, eine Bezeichnung, von der wir bereits im Abschnitt X, § 3 Gebrauch gemacht haben. Für ein solches  $D$  (bzw.  $a$ ) ist offenbar  $\mu \geq 2$ ,  $1 - \frac{1}{\mu} \geq \frac{1}{2}$ , und man schließt aus (25):



**Satz 3.** *Eine regulär ausschöpfbare Fläche besitzt höchstens vier vollständig verzweigte Gebiete oder Punkte.*

**321.** Wir kommen jetzt zu gewissen Anwendungen der Doppelungsgleichung (II. 2). Wie oben, betrachten wir ein System von  $q$  außerhalb voneinander liegenden Gebieten  $D_i$  der Kugel  $F_0$  und zerlegen das Komplementärgebiet  $\bar{F}_0$  der  $D_i$  durch  $q$  punktfremde Querschnitte in zwei Teilgebiete  $\bar{F}'_0$  und  $\bar{F}''_0$ . Wir sagen, eine offene, einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche  $F^*$  von  $F_0$  sei über  $\bar{F}_0$  *unverzweigt* und *unbegrenzt*, falls  $F^*$  über  $\bar{F}'_0$  und  $\bar{F}''_0$  lauter *einblättrige Inseln* hat, d. h. falls jeder Punkt der Näherungsfläche  $F$ , von einer gewissen Fläche ab, zu einer solchen Insel der Näherungsfläche gehört. Von einer solchen Fläche sagt man auch, daß sie *nur über den Gebieten  $D_i$  verzweigt und berandet* sei<sup>1</sup>.

Sei nun  $F^*$  eine derartige Überlagerungsfläche der Kugel  $F_0$ . Wie in Nr. 316 betrachten wir die über  $F_0$  gelegenen Teilgebiete  $F$  der Näherungsflächen  $F$ ; durch Wiederholung derselben Schlußweise, schließt man, daß die Beziehung (23) gilt. Hier läßt sich nun die Größe  $\dot{\rho}(\bar{F})$  mit Hilfe der Relation (II. 2) *nach oben* abschätzen. Die dieser Beziehung zugrunde liegende Voraussetzung, daß  $\bar{F}$  als Teil einer über  $F_0$  ausgebreiteten, relativ zu  $F_0$  unberandeten und unverzweigten Überlagerungsfläche aufgefaßt werden kann, ist nämlich erfüllt. Eine solche Überlagerungsfläche  $F_1$  läßt sich in der Tat so herstellen, daß man aus  $F$  eine solche Menge von Inseln über  $\bar{F}_0$  nimmt, daß die von diesen gebildete Teilfläche das Gebiet  $\bar{F}$  enthält, und diese Teilfläche durch Ergänzung mit Hilfe eines symmetrischen Flächenstücks zu einer geschlossenen Fläche ergänzt, wie dies in Nr. 285 in anderem Zusammenhang auseinandergesetzt worden ist. Da die Teilfläche  $\bar{F}$  einfach zusammenhängend ist, so hat sie höchstens eine geschlossene Randkurve in bezug auf  $F_1$ , und die Beziehung (II. 2) ergibt also

$$\sum_{i=1}^q \rho(D_i) < (q-2)S + N'(F') + hL + 1. \quad (24')$$

In Verbindung mit (24) folgt hieraus:

*Wenn die offene, einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche  $F^*$  der Kugel  $F_0$  nur über den punktfremden Gebieten  $D_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) verzweigt und berandet ist, so gilt*

$$\left| \sum_{i=1}^q \rho(D_i) - N'(F') - (q-2)S \right| < hL + 1. \quad (D)$$

Hier bedeutet  $N'$  die Anzahl derjenigen, nach Entfernung der über  $D_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) gelegenen Zungen übriggebliebenen Teile  $F'$  von  $F$ , welche mindestens eine über  $D_i$  befindliche Insel enthält.

<sup>1</sup> Diesen Begriff haben wir schon in XI, § 2 eingeführt.

**322.** Indem man die einzelnen Schritte des obigen Beweises verfolgt, überzeugt man sich davon, daß die Ungleichung (D) auch dann in Kraft bleibt, wenn man die Gebiete  $D_i$  durch Punkte  $a_i$  ersetzt. In diesem Fall fällt aber  $F'$  mit der ganzen Fläche  $F$  zusammen. Es wird also die Anzahl  $N'(F')$  entweder Null oder Eins, je nachdem  $F$  keinen oder mindestens einen über  $a_i (i=1, \dots, q)$  gelegenen *inneren* Punkt hat, und man schließt infolgedessen aus (D):

*Wenn sämtliche Windungs- und Grenzpunkte der Fläche  $F$  über endlich vielen Grundpunkten  $a_1, \dots, a_q$  liegen, so wird*

$$\left| \sum_1^q \bar{n}(a_i) - (q-2)S \right| \leq hL + 2. \quad (D')$$

Ist nun  $a \neq a_i$ , so hat man  $n(a) = \bar{n}(a)$ , und man findet durch Anwendung von (D') auf das Wertsystem  $a_1, \dots, a_i, a$

$$\left| \sum_1^q \bar{n}(a_i) + n(a) - (q-1)S \right| \leq hL + 2,$$

was mit Rücksicht auf die ursprüngliche Beziehung (D')

$$|n(a) - S| \leq hL + 4$$

ergibt.

*Dies zeigt, daß die Blätteranzahl  $n(a)$  für alle  $a \neq a_i$  asymptotisch gleich der mittleren Blätteranzahl  $S$  ist, sofern die Fläche  $F^*$  regulär ausschöpfbar ist. Die Überdeckung der Grundfläche  $F_0$  mittels der Näherungsflächen  $F$  erfolgt also außerhalb der Punkte  $a_i$  sehr gleichmäßig.*

## § 7. Anwendungen auf die konforme Abbildung einfach zusammenhängender RIEMANNscher Flächen.

**323.** Wir werden jetzt untersuchen, was die allgemeinen Sätze von § 6 in dem besonderen Fall enthalten, wo die Fläche  $F^*$  als die RIEMANNsche Fläche angenommen wird, auf welche eine gegebene, innerhalb eines Kreises  $|z| < R \leq \infty$  meromorphe Funktion  $w = w(z)$  jenen Kreis konform abbildet. Die Metrik der Grundfläche ( $w$ -Ebene) soll wie in VI, § 3 gemäß der sphärischen Geometrie erklärt werden und als Näherungsflächen  $F$  wählen wir, wie dies in der Wertverteilungstheorie üblich ist, diejenigen endlichen Flächen  $F_r$ , welchen die Kreisscheiben  $|z| \leq r < R$  zugeordnet sind. Diese Metrik erfüllt sämtliche Voraussetzungen der oben entwickelten Theorie.

Die oben eingeführte *mittlere Blätteranzahl*  $S(r)$  der Näherungsfläche  $F_r$  wird dann gleich dem sphärischen Flächeninhalt von  $F_r$ , dividiert durch den gesamten Flächeninhalt  $\pi$  der RIEMANNschen Kugel, einem Ausdruck, den wir früher durch  $A(r)$  bezeichnet haben (VI, § 3):

$$S(r) = A(r) = \frac{1}{\pi} \int_{|z| < r} \frac{w'(z)^2 df}{(1 + |w(z)|^2)^2};$$

hier ist  $df$  das euklidische Flächenelement der  $z$ -Ebene. Dies ist aber nichts anderes als *die Ableitung*

$$S(r) = A(r) = \frac{dT(r)}{d \log r}$$

der Charakteristik  $T(r)$  in sphärischer Normalform, in bezug auf die Veränderliche  $\log r$ .

Für die Länge  $L(r)$  des Randes von  $F_r$  hat man wiederum den Ausdruck

$$L(r) = \int_{|z|=r} \frac{|w'(z)| |dz|}{1 + |w(z)|^2}.$$

**324.** Es sei nun  $D$  ein Teilgebiet der RIEMANNschen  $w$ -Kugel, das von einer rektifizierbaren Kurve begrenzt wird; eine solche Kurve erfüllt offenbar die in § 2 vorausgesetzte Bedingung der *Regularität*. In Übereinstimmung mit den früheren Bezeichnungen setze man  $n(r, D)$  gleich der gesamten Anzahl der über  $D$  gelegenen Inseln des Flächenstücks  $F_r$  und  $m(r, D)$  gleich dem durch den sphärischen Flächeninhalt  $I_0(D)$  des Grundgebietes  $D$  dividierten Gesamthalt der über  $D$  befindlichen Zungen von  $F_r$ . Es gilt dann gemäß der Beziehung (A) (§ 6)

$$n(r, D) + m(r, D) = A(r) + O(L(r)) \quad (\text{I})$$

Sei ferner  $D_1, \dots, D_q$  ein System von  $q \geq 3$  punktfremden, einfach zusammenhängenden Gebieten der  $w$ -Kugel. Jedem Gebiet  $D$  ordnet man, außer den Größen  $n$  und  $m$ , noch die *einfache Vielfachheit*  $p(r, D)$  zu, welche gleich der Summe der mit umgekehrten Vorzeichen genommenen Charakteristiken der über  $D$  befindlichen Inseln ist. Es ist  $p(r, D)$  höchstens gleich der Anzahl  $\bar{n}(r, D)$  der über  $D$  liegenden verschiedenen, einfach zusammenhängenden Inseln. Nach (B) gilt dann

$$\sum_{i=1}^q p(r, D_i) = \sum_{i=1}^q n(r, D_i) - \sum n_1(r, D_i) > (q-2)A(r) - O(L(r)); \quad (\text{II})$$

hier ist  $n_1(r, D)$  die Summe der Verzweigungsordnungen der über  $D$  liegenden Inseln der Fläche  $F_r$ .

Diese letzte Bedingung gilt noch, wenn man die Gebiete  $D_i$  durch Punkte  $a_i$  ersetzt. Es wird dann

$$\sum_{i=1}^q \bar{n}(r, a_i) > (q-2)A(r) - O(L(r)), \quad (\text{II}')$$

wo  $\bar{n}(r, a)$ , wie oben, die Anzahl der über  $a$  liegenden verschiedenen Blätterzyklen von  $F_r$  angibt.

Nimmt man insbesondere an, daß die Fläche  $F^*$  *höchstens über den Punkten*  $a_1, \dots, a_q$  *verzweigt oder berandet ist, so gilt sogar die asymptotische Gleichheit*

$$\sum_{i=1}^q \bar{n}(r, a_i) = (q-2)A(r) + O(L(r)). \quad (\text{III})$$

**325.** Alle diese Beziehungen stehen in offenbarem Zusammenhang mit den zwei Hauptsätzen der Wertverteilungslehre, deren wichtige Ergänzung sie bilden. Um diese Ergebnisse verwerten zu können, muß das Größenverhältnis der Ausdrücke  $S(r) = A(r)$  und  $L(r)$  untersucht werden. Vor allem interessiert uns hierbei die Frage, unter welchen Bedingungen die Eigenschaft der regulären Ausschöpfbarkeit

$$\lim_{r \rightarrow R} \frac{L(r)}{S(r)} = 0 \quad \text{für } r < R$$

vorliegt.

Dies läßt sich durch Heranziehung der SCHWARZSchen Ungleichung folgendermaßen entscheiden. Man hat

$$L(r)^2 = \left( \int_{|z|=r} \frac{|w'(z)| |dz|}{1 + |w(z)|^2} \right)^2 \leq 2\pi r \int_{|z|=r} \frac{|w'(z)|^2}{(1 + |w(z)|^2)^2} |dz| = 2\pi r \frac{dA(r)}{dr}$$

und man findet durch Integration für  $0 < r_0 < r < R$

$$\frac{dr}{r} < \frac{dA}{L^2} 2\pi, \quad \log \frac{r}{r_0} \leq 2\pi \int_{r_0}^r \frac{dA(r)}{L(r)^2}. \quad (26)$$

Hier müssen jetzt zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem  $R = \infty$  oder  $R < \infty$  ist.

**326.** Die Fläche  $F^*$  ist vom parabolischen Typus ( $R = \infty$ ). Sei dann  $\Phi(t)$  eine positive Funktion von  $t > 0$ , welche für  $t \rightarrow \infty$  so schnell ins Unendliche wächst, daß das Integral

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{\Phi(t)} \quad (27)$$

konvergent ist. Man bezeichne durch  $\Delta_r$  diejenigen Intervalle, der  $r$ -Achse ( $r > r_0 > 0$ ), wo  $L(r) \geq \sqrt{\Phi(A(r))}$  gilt. Integriert man (26) nur über jene Intervalle, so wird

$$\int_{\Delta_r} d \log r < 2\pi \int_{\Delta_r} \frac{dA(r)}{\Phi(A(r))} < 2\pi \int_{r_0}^{\infty} \frac{dt}{\Phi(t)}.$$

Falls das Integral (27) endlich ist, so ist

$$L(r) < \sqrt{\Phi(A(r))},$$

außer höchstens für eine Wertmenge  $\Delta_r$  von endlicher logarithmischer Gesamtlänge.

Setzt man z. B.  $\Phi(t) = t^{1+2\epsilon}$ , mit  $\epsilon > 0$ , so wird also außerhalb der Ausnahmestrecken  $\Delta_r$

$$L(r) < A(r)^{\frac{1}{2} + \epsilon}. \quad (28)$$

Es sei nun  $r_\nu (\nu = 1, 2, \dots)$  eine mit  $\nu$  unbeschränkt wachsende Wertfolge, welche außerhalb der Ausnahmeintervalle  $\Delta_\nu$  liegt. Es gilt dann gemäß (28)

$$\frac{L(r_\nu)}{A(r_\nu)} \rightarrow 0 \quad \text{für } \nu \rightarrow \infty,$$

und man gelangt also zu folgendem Ergebnis:

*Eine RIEMANNSCHE FLÄCHE  $F^*$  vom parabolischen Typus ist stets regulär ausschöpfbar.*

**327.** Sämtliche Sätze von § 6 sind also auf eine parabolische Fläche anwendbar. Speziell gilt die Defektrelation

$$\sum \delta(D_i) + \sum \vartheta(D_i) \leq 2,$$

wo  $\delta$  und  $\vartheta$  die Defekte und Verzweigungsindizes

$$\delta(D) = 1 - \overline{\lim}_{r=\infty} \frac{n(r, D)}{A(r)}, \quad \vartheta(D) = \lim_{r=\infty} \frac{n_1(r, D)}{A(r)}$$

bezeichnen. Dieser Satz von AHLFORS ergänzt in interessanter Weise die frühere Defektrelation (X, § 2), welche sich nicht auf Gebiete  $D$ , sondern auf defekte bzw. verzweigte Werte  $a$  bezieht. Bemerkenswert ist, daß die Fundamentalgrößen der AHLFORSschen Theorie sich direkt mit Hilfe der Anzahlen  $n$  berechnen lassen, während in der Wertverteilungslehre eine regularisierende Integration (Übergang zu den Mittelwerten  $N$ ) wesentlich war. Dies bedeutet eine beträchtliche Verschärfung der früheren Resultate, denn wir haben gesehen, daß gewisse der *Gebietsätze* den Grenzübergang zu entsprechenden *Punktsätzen* gestatten. So gilt z. B. nach (II), außerhalb der Ausnahmeintervalle  $\Delta_\nu$ , die Beziehung

$$\sum_{i=1}^q n(r, a_i) - \sum_{i=1}^q n_1(r, a_i) > (q-2)A(r) - O\left(A^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$$

als deren „integrierte Form“ der *zweite Hauptsatz*

$$\sum_{i=1}^q N(r, a_i) - \sum_{i=1}^q N_1(r, a_i) > (q-2)T(r) - O(\log r T(r))$$

erscheint. Das mögliche Vorhandensein der Ausnahmeintervalle  $\Delta_\nu$  verhindert allerdings, die zweite Relation aus der ersten einfach durch Integration (nach Multiplikation mit  $\frac{dr}{r}$ ) zu gewinnen; für das Restglied würde man in dieser Art auch nicht die richtige Größenordnung finden. Umgekehrt ist es nicht möglich, aus dem zweiten Hauptsatz auf die Richtigkeit der ersten der obigen zwei Relationen zu schließen.

**328.** Wenn sich also die Hauptsätze im „Punktfall“  $D \rightarrow a$  auch nicht vollkommen decken, lassen sich die wichtigsten Konsequenzen der Wertverteilungslehre aus den AHLFORSschen Sätzen herleiten. Dies

gilt z. B. für den PICARDSchen Satz, wie aus Satz 1 (Nr. 319) unmittelbar hervorgeht. Dasselbe gilt für den Satz über die vollständig verzweigten Werte. Nach AHLFORS gilt nun aber dieser Satz für *Gebiete*, und man findet gemäß Satz 2 folgende interessante Erweiterung der Ergebnisse von X, § 3:

**Scheibensatz.** *Wenn die Fläche  $F^*$  vom parabolischen Typus ist und sämtliche über den punktfremden Grundgebieten  $D_i (i=1, \dots, q)$  liegenden Inseln mindestens  $\mu_i$ -blättrig sind, so gilt*

$$\sum_1^q \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) \leq 2. \quad (29)$$

*Falls über  $D_i$  überhaupt keine Insel liegt, so kann man hier  $\mu_i = \infty$  setzen.*

Der Satz gilt auch dann, wenn gewisse  $D_i$  durch Punkte  $a_i$  ersetzt werden; für die Ausdrücke „ $\mu$ -blättrige Insel“ ist dann „Windungspunkt ( $\mu - 1$ )-ter Ordnung“ zu schreiben.

Hieraus folgt unmittelbar:

*Wie immer drei punktfremde Gebiete auf der RIEMANNschen Kugel gewählt werden, so besitzt die parabolische Fläche  $F^*$  über mindestens einem Gebiet eine Insel.*

Dieser Satz enthält wieder den PICARDSchen Satz als unmittelbaren Folgesatz.

Ferner schließt man (vgl. X, § 3):

*Eine parabolische Fläche ist höchstens über vier punktfremden Gebieten vollständig verzweigt.*

Nimmt man also fünf beliebige Gebiete  $D$ , so liegt über diesen mindestens eine *einblättrige Insel* der Fläche  $F^*$ . Wenn die Fläche einen Punkt unüberdeckt läßt, was z. B. für die Fläche einer *ganzen* Funktion  $w = w(z)$  der Fall ist, so wird die entsprechende Zahl  $\mu = \infty$ , und das letzte Ergebnis besteht schon für *drei* (statt für fünf) Grundgebiete  $D$ . Hieraus ergibt sich insbesondere folgender bekannte Satz von VALIRON und BLOCH<sup>1</sup>:

*Die über der  $w$ -Ebene liegende RIEMANNsche Fläche einer ganzen Funktion enthält beliebig große schlichte Kreisscheiben.*

**329.** *Die Fläche  $F^*$  ist vom hyperbolischen Typus ( $R < \infty$ ). Um in diesem Fall die Möglichkeit der regulären Ausschöpfbarkeit der Fläche zu untersuchen, betrachte man wieder, wie in Nr. 323, den Flächeninhalt  $A(r)$  und die Randlänge  $L(r)$  der Bildfläche  $F_r$  der Kreisscheibe  $|z| \leq r < R$ , welche den Beziehungen (26) genügen. Angenommen, daß die Fläche  $F^*$  nicht regulär ausgeschöpft werden kann, so existiert für*

<sup>1</sup> G. VALIRON [6], A. BLOCH [1], E. LANDAU [2].

$0 < r_0 < R$  eine endliche Zahl  $h$ , so daß  $A(r) < hL(r)$  für  $r_0 \leq r < R$  gilt. Führt man das in (26) ein, so wird für  $r_0 < r < R$

$$\log \frac{R}{r} < 2\pi h^2 \int_r^R \frac{dA(r)}{A(r)^2} \leq \frac{2\pi h^2}{A(r)}$$

und daher

$$A(r) < \frac{2\pi h^2}{\log \frac{R}{r}} < \frac{2\pi h^2 R}{R-r}. \tag{30}$$

Hieraus folgt:

Falls die Fläche  $F^*$  auf den Kreis  $|z| < R$  konform abgebildet ist und

$$\lim_{r \rightarrow R} (R-r) A(r) = \infty \tag{31}$$

gilt, so ist  $F^*$  regulär ausschöpfbar.

Für die durch diese Bedingung charakterisierten Flächen bestehen also sämtliche oben bewiesenen Sätze (Sätze von PICARD, Defektrelation, Scheibensatz usw.). Es ist bemerkenswert, daß die gefundene Gültigkeitsschranke jener Sätze mit der in den Wertverteilungssätzen vorkommenden Grenze übereinstimmt. Die reguläre Ausschöpfbarkeit hört mit der Wachstumsordnung (30) der Größe  $A(r) = \frac{dT(r)}{d \log r}$  auf. Durch Integration ergibt sich aber aus (30) für  $r_0 < r < R$

$$T(r) - T(r_0) = \int_{r_0}^r \frac{A(r)}{r} dr = O\left(\log \frac{1}{R-r}\right).$$

Dies ist genau diejenige Größenordnung, welche die charakteristische Funktion  $T(r)$  überschreiten muß, damit das Restglied des zweiten Hauptsatzes von verschwindend kleiner Ordnung sei, was für das Bestehen der Defektsätze eine wesentliche Voraussetzung ist.

### § 8. Erweiterungen auf Abbildungen von beschränkter Exzentrizität.

330. Wir denken uns die einfach zusammenhängende, offene Fläche  $F^*$ , mit der sphärischen Maßbestimmung ausgerüstet, über die  $w$ -Kugel ausgebreitet. Sie läßt sich topologisch auf einen schlichten Kreis  $|z| < R (\leq \infty)$  abbilden. In § 7 haben wir den Fall untersucht, wo die Abbildung  $z \rightarrow w$  konform ist. Es soll jetzt dieser Abbildung eine allgemeinere metrische Bedingung auferlegt werden.

Man nehme zunächst an, daß das Quadrat des sphärischen Linienelements  $ds$ , welches vermöge der Abbildung  $z \rightarrow w$  dem Element  $dz$  zugeordnet ist, als eine positiv definite quadratische Differentialform ( $z = x_1 + i x_2$ )

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu})$$

von  $dx_1, dx_2$  bestimmt ist, wo  $g_{11}, g_{12} = g_{21}, g_{22}$  stetige Funktionen von  $z$  sind. Als Bild eines infinitesimalen  $w$ -Kreises vom Radius  $ds$  hat man in der  $z$ -Ebene eine Ellipse, deren Halbachsen, durch  $ds$  gemessen, die Quadrate

$$\frac{g_{11} + g_{22} \pm \sqrt{(g_{11} + g_{22})^2 - 4(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} \quad (32)$$

haben. Wenn  $e(z)$  ( $0 \leq e < 1$ ) die Exzentrizität dieser Indikatrixellipse ist und

$$e(z) \leq \Theta \quad (0 < \Theta < 1) \quad (33)$$

für jedes  $|z| < R$  gilt, so sagen wir, die Abbildung  $z \rightarrow w$  sei von *beschränkter Exzentrizität*<sup>1</sup>. Man rechnet leicht nach, daß die Bedingung (33) äquivalent ist mit

$$g_{11} + g_{22} \leq 2K \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad (33')$$

wo

$$K = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 - \Theta^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \Theta^2}} \right).$$

Für  $\Theta = 0$  wird  $K = 1$ , also  $g_{11} = g_{22}, g_{12} = 0$ ; dies ist hinreichend und notwendig für die Konformität der Abbildung.

*Die Abbildungen von der Exzentrizität Null sind konform.*

**331.** Zweck der nachstehenden Betrachtungen ist, zu zeigen, daß *sämtliche Sätze von § 7 auch für die allgemeinere Klasse der Abbildungen von beschränkter Exzentrizität bestehen*. Zum Beweise hierfür genügt der Nachweis, daß die Sätze über die reguläre Ausschöpfbarkeit (Nr. 326, 329) unter der erwähnten allgemeineren Voraussetzung gelten. Dies ergibt sich in der Tat leicht durch Wiederholung des in Nr. 325 angesetzten Abschätzungsverfahrens.

Bezeichnet man nämlich den Flächeninhalt und die Randlänge der Bildfläche  $F_r$  des Kreises  $|z| \leq r < R$  wieder durch  $A(r)$  bzw.  $L(r)$ , so findet man mit Hilfe der SCHWARZSchen Ungleichung

$$(L(r))^2 = \int_{|z|=r} \frac{ds}{|dz|} |dz| \leq 2\pi r \int_{|z|=r} \left( \frac{ds}{|dz|} \right)^2 |dz|. \quad (34)$$

Hier ist  $\left( \frac{ds}{|dz|} \right)^2$  höchstens gleich dem reziproken Wert des kleineren der Werte (32), also gemäß (33')

$$\begin{aligned} \left( \frac{ds}{|dz|} \right)^2 &\leq \frac{1}{2} (g_{11} + g_{22} + \sqrt{(g_{11} + g_{22})^2 - 4(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}) \\ &\leq (K + \sqrt{K^2 - 1}) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \leq 2K \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Man braucht hierfür auch die Bezeichnung „quasikonforme Abbildung“ (vgl. z. B. AHLFORS [10]).



Beachtet man noch, daß man für den Flächeninhalt  $A(r)$  den Ausdruck

$$A(r) = \int_0^r dr \int_{|z|=r} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} |dz|$$

hat, so wird also

$$L(r)^2 \leq 4\pi K r \frac{dA(r)}{dr}$$

und somit

$$\frac{dr}{r} \leq 4\pi K \frac{dA(r)}{L(r)^2}. \quad (35)$$

**332.** Diese Beziehung unterscheidet sich nun von der in Nr. 325 aufgestellten Ungleichung (26) nur durch den Faktor  $K$ , welcher dem Faktor  $\frac{1}{2}$  in (26) entspricht. Da  $K$  eine ein für allemal festgesetzte Konstante ist, so sieht man unmittelbar ein, daß sämtliche aus (26) gezogenen Folgerungen auch ausgehend von (35) möglich sind. Mit diesem Ergebnis sind wir an unser Ziel gelangt. Sämtliche Sätze, welche in § 7 über die konforme Abbildung einer einfach zusammenhängenden Fläche gegeben worden sind, gelten unverändert für Abbildungen von beschränkter Exzentrizität.

## Literaturverzeichnis.

- AHLFORS, L.: [1] Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen. Acta Soc. sci. fenn. N. s. **1**, Nr. 9 (1930).  
— [2] Beiträge zur Theorie der meromorphen Funktionen. 7. Congr. Math. scand. Oslo 1929.  
— [3] Ein Satz von HENRI CARTAN und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen. Soc. sci. fenn. Comment. Phys.-math. **5**, Nr. 16 (1931).  
— [4] Zur Bestimmung des Typus einer RIEMANNSchen Fläche. Comment. math. Helvet. **3** (1931).  
— [5] Über die asymptotischen Werte der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung. Acta Acad. Aboensis. Math. et Phys. **6**, Nr. 9 (1932).  
— [6] Über eine in der neueren Wertverteilungstheorie betrachtete Klasse transzendenter Funktionen. Acta Math. **58** (1932).  
— [7] Sur les domaines dans lesquels une fonction méromorphe prend des valeurs appartenant à une région donnée. Acta Soc. sci. fenn., N. s. **2**, Nr. 2 (1933).  
— [8] Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen. Soc. sci. fenn. Comment. Phys.-math. **8**, Nr. 10 (1932).  
— [9] Sur le type d'une surface de RIEMANN. C. r. Acad. Sci. Paris **201** (1935).  
— [10] Zur Theorie der Überlagerungsflächen. Acta Math. **65** (1935).
- BEURLING, A.: [1] Etudes sur un problème de majoration. Thèse de Upsal **1933**.
- BLASCHKE, W.: [1] Eine Erweiterung des Satzes von VITALI über Folgen analytischer Funktionen. Leipzig. Ber. **67** (1915).
- BLOCH, A.: [1] Les théorèmes de M. VALIRON sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. **17** (1925).  
— [2] Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité. Memorial des Sciences math., Fasc. 20. Paris: Gauthier-Villars 1926.  
— [3] Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires. Ann. École Norm. **43** (1926).
- BOREL, E.: [1] Sur les zéros des fonctions entières. Acta math. **20** (1896).
- CARATHÉODORY, C.: [1] Sur quelques généralisations du théorème de M. PICARD. C. r. Acad. Sci. Paris **141** (1905).  
— [2] Über eine Verallgemeinerung der PICARDSchen Sätze. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. (1920).  
— [3] Über die FURIERSchen Koeffizienten monotoner Funktionen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. (1920).  
— [4] Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. (1929).  
— [5] Conformal representation. Cambridge tracts in math. a. math. phys., Vol. 28. Cambridge 1932.
- CARLEMAN, T.: [1] Sur les fonctions inverses des fonctions entières. Ark. Mat. Astron. Fys. **15**, Nr. 10 (1921).  
— [2] Sur une inégalité différentielle dans la théorie des fonctions analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris **196** (1933).
- CARTAN, H.: [1] Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés lacunaires et leurs applications. Thèse de Paris **1928**.  
— [2] Sur la fonction de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables et ses applications aux fonctions méromorphes d'une variable. C. r. Acad. Sci. Paris **189** (1929).

- CARTAN, H.: [3] Sur les zéros des combinaisons linéaires de  $p$  fonctions holomorphes données. *Mathematica (Cluj)* **7** (1933).
- COLLINGWOOD, E. F.: [1] Sur quelques théorèmes de M. NEVANLINNA. *C. r. Acad. Sci. Paris* **179** (1924).
- [2] On meromorphic and integral functions. *J. Lond. math. Soc.* **5**, (1930).
- DENJOY, A.: [1] Sur les fonctions entières de genre fini. *C. r. Acad. Sci. Paris* **145** (1907).
- ELFVING, G.: [1] Über eine Klasse von RIEMANNschen Flächen und ihre Uniformisierung. *Acta Soc. Sci. fenn. N. s.* **2**, Nr 3 (1934).
- [2] Über RIEMANNsche Flächen und Annäherung von meromorphen Funktionen. 8. Congr. Math. scand. Stockholm 1934.
- [3] Zur Flächenstruktur und Wertverteilung. Ein Beispiel. *Acta Acad. Aboensis. Math. et Phys.* **8** (1935).
- EVANS, G. C.: [1] *The Logarithmic Potential*. New York 1927.
- [2] Applications of POINCARÉs sweeping-out process. *Proc. nat. Acad. Sci. USA.* **19** (1933).
- FABER, G.: [1] Über TSCHEBYSCHEFFsche Polynome. *J. reine angew. Math.* **150** (1919).
- FATOU, P.: [1] Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta math.* **30** (1906).
- FÉKETE, M.: [1] Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. *Math. Z.* **17** (1923).
- FENCHEL, W.: [1] Über analytische Funktionen, die in Teilgebieten des Einheitskreises beschränkt sind. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl.* (1930).
- FROSTMAN, O.: [1] Über den Kapazitätsbegriff und einen Satz von R. NEVANLINNA. *Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem.* **1** (1934).
- [2] Über die defekten Werte einer meromorphen Funktion. 8. Congr. Math. scand. Stockholm 1934.
- [3] Potential d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. *Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem.* **3** (1935).
- GROSS, W.: [1] Eine ganze Funktion, für die jede komplexe Zahl Konvergenzwert ist. *Math. Ann.* **79** (1918).
- [2] Über die Singularitäten analytischer Funktionen. *Mh. Math. u. Physik* **29** (1918).
- GRUNSKY, H.: [1] Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. *Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berl.* **1** (1932).
- HAUSDORFF, F.: [1] Dimension und äußeres Maß. *Math. Ann.* **79** (1919).
- HERGLOTZ, G.: [1] Über Potenzreihen mit positivem, reellem Teil im Einheitskreis. *Leipz. Ber.* **63** (1911).
- HILLE, EINAR: [1] On the zeros of the functions of the parabolic cylinder. *Ark. Mat. Astron. Fys.* **18**, Nr 26 (1924).
- [2] Zero point problems for linear differential equations of second order. *Mat. Tidskr. B* **1927**.
- HÖSSJER, G.: [1] Über funktionstheoretische Nullmengen und das Maximumprinzip bei mehrdeutigen analytischen Funktionen. 8. Congr. Math. scand. Stockholm 1934.
- IVERSEN, F.: [1] *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*. Thèse de Helsingfors **1914**.
- [2] Zum Verhalten analytischer Funktionen in Bereichen, deren Rand eine wesentliche Singularität enthält. *Översikt av Finska Vet.-Soc. Förh.* **64 A**, Nr. 4 (1922).
- JENSEN, J. L.: [1] Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions. *Acta math.* **22** (1899).

- JULIA, G.: [1] Extension d'un lemme de SCHWARZ. Acta math. **42** (1920).  
 — [2] Principes géométriques d'Analyse. 2 partie. Paris: Gauthier-Villars 1932.
- KEREKJARTO, B. v.: [1] Vorlesungen über Topologie I. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 8. Berlin: Julius Springer 1923.
- KOBAYASHI, Z.: [1] Theorems on the conformal representation of RIEMANN surfaces. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, sect. A, Nr. 39 (1935).
- KOEBE, P.: [1] Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II., Math. Ann. **69** (1910).  
 — [2] Allgemeine Theorie der RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten. Acta math. **50** (1927).
- LANDAU, E.: [1] Über eine Verallgemeinerung des PICARDSchen Satzes. Sitzsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. (1904).  
 — [2] Der PICARD-SCHOTTYSche Satz und die BLOCHsche Konstante. Sitzsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. (1926).  
 — [3] Über den MILLOUXschen Satz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl. (1930).
- LANDAU, E. and G. VALIRON: [1] A deduction from SCHWARZs lemma. J. London Math. Soc. **4**, Nr. 3 (1929).
- LEBESGUE, H.: [1] Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. 2. édition. Paris: Gauthier-Villars 1928.
- LINDEBERG, J. W.: Sur l'existence des fonctions d'une variable complexe et des fonctions harmoniques bornées. Ann. Acad. Sci. fenn. **11**, Nr. 6 (1918).
- LINDELÖF, E.: [1] Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini. Acta Soc. sci. fenn. **31** (1902).  
 — [2] Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel. Acta Soc. sci. fenn. **35**, Nr. 7 (1908).  
 — [3] Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme. Acta Soc. sci. fenn. **46**, Nr. 4 (1915).
- LITTLEWOOD, J. E.: [1] On exceptional values of power series. J. Math. Soc. London (1930).
- LÖWNER, K.: [1] Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. Math. Ann. **89** (1923).
- MILLOUX, H.: [1] Le théorème de M. PICARD, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières. J. Math. pures appl. IX. s. **3** (1924).
- MONTEL, P.: [1] Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications. Paris: Gauthier-Villars 1927.  
 — [2] Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes Paris: Gauthier-Villars 1932.
- MYRBERG, P. J.: [1] Über die Existenz der GREENSchen Funktionen auf einer gegebenen RIEMANNschen Fläche. Acta math. **61** (1933).  
 — [2] Über die Bestimmung des Typus einer RIEMANNschen Fläche. Ann. Acad. sci. fenn. A **45**, Nr. 3 (1935).
- NEVANLINNA, F.: [1] Bemerkungen zur Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Soc. sci. fenn., Comment. Phys.-math. **2**, Nr. 4 (1923).  
 — [2] Über die Anwendung einer Klasse von uniformisierenden Transzendenten zur Untersuchung der Wertverteilung analytischer Funktionen. Acta Math. **50** (1927).  
 — [3] Über eine Klasse meromorpher Funktionen. 7. Congr. Math. scand. Oslo 1929.  
 — [4] Über die logarithmische Ableitung einer meromorphen Funktion. Comment. in honorem ERNESTI LEONARDI LINDELÖF, Helsinki 1930.
- NEVANLINNA, F. u. R.: [1] Über die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie. Acta Soc. sci. fenn. **50**, Nr. 5 (1922).

- NEVANLINNA, R.: [1] Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises. Övers. av Finska Vet. Soc. Förh. **63** A, Nr. 7 (1920).
- [2] Untersuchungen über den PICARDSchen Satz. Acta Soc. sci. fenn. **50**, Nr. 6 (1924).
- [3] Über eine Klasse von meromorphen Funktionen. Math. Ann. **92** (1924).
- [4] Zur Theorie der meromorphen Funktionen. Acta math. **46** (1925).
- [5] Le théorème de PICARD-BOREL et la théorie des fonctions méromorphes. Paris: Gauthier-Villars 1929.
- [6] Über die Herstellung transzendenter Funktionen als Grenzwerte rationaler Funktionen. Acta math. **55** (1930).
- [7] Über die Randwerte von analytischen Funktionen. Comment. math. Helvet. **2** (1930).
- [8] Ein Satz über die konforme Abbildung von RIEMANNSchen Flächen. Comment. math. Helvet. **5** (1932).
- [9] Über RIEMANNSche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta math. **58** (1932).
- [10] Über die RIEMANNSche Fläche einer analytischen Funktion. Verh. Internat. Math.-Kongr. **1** Zürich 1932.
- [11] Über eine Minimumaufgabe in der Theorie der konformen Abbildung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl. (1933).
- [12] Das harmonische Maß von Punktmengen und seine Anwendung in der Funktionentheorie. 8. Congr. Math. scand. Stockholm 1934.
- [13] Sur un principe général de l'Analyse. C. r. Acad. Sci. Paris **199** (1934).
- [14] Über die Kapazität der CANTORSchen Punktmengen. Mh. Math. Phys. **43** (1936).
- OSTROWSKI, A.: [1] Über allgemeine Konvergenzsätze der komplexen Funktionentheorie. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **32** (1923).
- [2] Über die Bedeutung der JENSENSchen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie. Acta Litt. Sci. Szeged. **1** (1933).
- [3] Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen. Acta math. **53** (1929).
- PHRAGMÉN, E. et LINDELÖF E.: [1] Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier. Acta math. **31** (1908).
- PICARD, E.: [1] Sur une propriété des fonctions entières. C. r. Acad. Sci. Paris **88** (1879).
- [2] Démonstration d'un théorème général des fonctions uniformes liées par une relation algébrique. Acta math. **11** (1887).
- PICK, G.: [1] Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche. Math. Ann. **77** (1916).
- [2] Über den KOEBESchen Verzerrungssatz. Verh. sächs. Akad. Ber. Leipzig. **68** (1916).
- PLESSNER, A.: [1] Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen. Mitt. math. Semin. Gießen **10** (1923).
- POINCARÉ, H.: [1] Théorie des groupes fuchsien. Acta math. **1** (1881).
- [2] Sur l'uniformisation des fonctions analytiques. Acta math. **31** (1907).
- PÓLYA, G.: [1] Über analytische Deformationen eines Rechtecks. Ann. of Math. **34** II (1933).
- PÓLYA, G. u. G. SZEGÖ: [1] Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen. J. reine angew. Math. **165** (1931).
- PRINGSHEIM, A.: [1] Elementare Theorie der ganzen transzendenten Funktionen von endlicher Ordnung. Math. Ann. **58** (1904).

- RIESZ, F. u. M.: [1] Über die Randwerte analytischer Funktionen. 4. Congr. scand. Math. Stockholm 1916.
- ROBIN, G.: [1] Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts. Ann. École Norm., III. s. **3** (1886).
- SCHMIDT, E.: [1] Über den MILLOUXschen Satz. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. (1932).
- SCHOTTKY, G.: [1] Über den PICARDSchen Satz und die BORELSchen Ungleichungen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. (1904).
- SCHWARZ, H. A.: [1] Zur Integration der partiellen Differentialgleichung  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , Zusatz. Ges. Abh. **2**.
- [2] Mitteilung über diejenigen Fälle, in welchen die GAUSSISCHE hypergeometrische Reihe  $F(a, \beta, \gamma, x)$  eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt. Ges. Abh. **2**.
- SELBERG, H. L.: [1] Über eine Eigenschaft der logarithmischen Ableitung einer meromorphen oder algebroiden Funktion endlicher Ordnung. Avh. Norske Vid.-Akad. Oslo, Mat.-naturvid. Kl., Nr. 14 (1929).
- [2] Algebroiden Funktionen und Umkehrfunktionen ABELScher Integrale. Avh. Norske Vid.-Akad. Oslo, Mat.-naturvid. Kl., Nr. 8 (1934).
- SHIMIZU, T.: [1] On the Theory of meromorphic Functions. Jap. J. Math. **6** (1929).
- SPEISER, A.: [1] Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen. Comment. math. Helvet. **1** (1929).
- [2] Über RIEMANNSCHE Flächen. Comment. math. Helvet. **2** (1930).
- [3] Über beschränkte automorphe Funktionen. Comment. math. Helvet. **4** (1932).
- SZEGÖ, G.: [1] Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn FEKETE: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Z. **21** (1924).
- ULLRICH, E.: [1] Über die Ableitung einer meromorphen Funktion. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Math.-physik. Kl. (1929).
- [2] Über eine Anwendung des Verzerrungssatzes auf meromorphe Funktionen. J. f. Math. **166** (1932).
- [3] Über ein Problem von Herrn SPEISER. Comment. math. Helvet. **7** (1934).
- [4] Zum Umkehrproblem der Wertverteilung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, N. F. **1**, Nr. 9 (1936).
- VALIRON, G.: [1] Sur les fonctions entières d'ordre fini. Bull. Sci. math. II. s. **46** (1921).
- [2] Recherches sur le théorème de M. PICARD dans la théorie des fonctions entières. Ann. l'Éc. Norm., III. s. **39** (1923).
- [3] Lectures on the general Theory of Integral Functions. Toulouse: Edouard Privat 1923.
- [4] Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable. Mémorial des Sciences math., Fasc. 2. Paris: Gauthier-Villars 1925.
- [5] Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes. Acta math. **47** (1925).
- [6] Sur les théorèmes de M. BLOCH, LANDAU, MONTEL et SCHOTTKY. C. r. Acad. Sci. Paris **183** (1926).
- VALLÉE POUSSIN, C. DE LA: [1] Extension de la méthode du balayage de POINCARÉ et problème de DIRICHLET. Ann. Inst. Poincaré **2** (1932).
- WAGNER, H.: [1] Über eine Klasse RIEMANNSCHER Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten. J. reine angew. Math. **175** (1936).
- WARSCHAWSKI, S.: [1] Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung. Math. Z. **35** (1932).
- WITTICH, H.: Ein Kriterium zur Typenbestimmung von RIEMANNSCHEM Flächen. Mh. Math. Phys. **44** (1936).

# Sachverzeichnis.

- Abbildung, durch lineare Transformationen 4.  
—, konforme 4, 13, 201, 284, 338.  
—, quasikonforme 344.  
— von beschränkter Exzentrizität 344.  
Absolutes harmonisches Maß 113.  
Abstand, chordaler 165.  
—, nichteuklidischer 6.  
Abstandslinie 7.  
Additive Mengenfunktionen 136.  
Additivität des harmonischen Maßes 26, 121.  
Algebraische Kurve 269.  
Algebraisches Funktionselement 271.  
Anzahlfunktion, Erklärung der 158.  
Asymmetrie einer RIEMANNSchen Fläche 312.  
Asymptotische Werte 160.  
Ausnahmintervalle 235—237, 240—241.  
Ausnahmewert, allgemeine Erklärung 161.  
— von PICARD 16.  
— von PICARD-BOREL 250.  
— von positivem Defekt 255.  
Ausschöpfung, durch kranzförmige Erweiterung 284, 298.  
—, reguläre 331.  
Automorphe Funktionen 14, 270, 300.  
— Potentiale 25, 202, 204.
- Beschränktartigkeit 178, 179, 201.  
BLASCHKE-Produkt 178, 196.
- CANTORSche Punktmengen 145, 148.  
CARLEMAN, Satz von 67, 296.  
CARTAN, Satz von 141, 169.  
Charakteristik einer meromorphen Funktion 159, 167, 171.  
— einer Fläche 313.  
Charakteristische Funktion 59.  
Defekt 255, 335.  
Defektrelation 255, 335.  
Diagonalverfahren 129.  
Direkt kritische Stellen 273, 293, 296.  
DIRICHLETSches Problem 21, 193.
- Divergenzklasse 207.  
Doppeltperiodische Funktionen 266.  
Dreiecksfunktionen 266, 282.  
Dreikreissatz von HADAMARD 42.
- Elementargebiet 280.  
Elliptischer Typus einer RIEMANNSchen Fläche 8, 300.  
Elliptische Substitutionen 8.  
Erster Hauptsatz über meromorphe Funktionen 158.  
EULERSche Polyederformel 297, 300.  
Exzeß 300.
- Faltungsflächen 310.  
FATOU, Satz von 190.  
Formel von JENSEN 155.  
— von POISSON-JENSEN 155.  
— von POISSON-STIELTJES 185.  
Fundamentalbeziehung 236.  
Fundamentalpolygon 11, 279.  
Fundamentalsubstitution 11.  
Funktionen von beschränkter Schwankung 186, 189.
- Gammafunktion 208.  
Ganze Funktionen 208, 296, 342.  
GAUSSsche Transformationsformel 156, 164, 244, 248.  
Gebietserweiterung 63, 80.  
Gesamtdefekt 256.  
Gesamte Verzweigkeit 303.  
Geschlecht einer algebraischen Kurve 269.  
— einer meromorphen Funktion 222, 224, 251.  
— einer geschlossenen Fläche 333.  
Gleichgewichtspotential 125, 171, 260.  
Graph 279.  
GREENSche Funktion, Erklärung 28.  
— Transformationsformel 28.  
Grenzexponent 210.  
Grenzlinie 7.  
GROSS, Satz von 276.

- Gruppe von linearen Transformationen 4, 14.  
 — von topologischen Transformationen 11.
- Harmonisches Maß, Erklärung 7, 26.  
 — —, Integraldarstellung 95.
- Harmonische Nullmengen, Erklärung 107, 113.
- HARNACKScher Satz 108.
- Hebbare Singularitäten 17, 132.
- HURWITZSche Relation 315.
- Hyperbolischer Typus einer RIEMANNschen Fläche, Erklärung 8.
- Hyperbolische Substitutionen 8.
- Hyperelliptische Kurven 269.
- Indirekt kritische Stellen 273.
- Invariante, funktionentheoretische 62.  
 —, nichteuklidische 5.  
 —, sphärische 5.
- Invarianz der Charakteristik 158, 167.  
 — des Gradientenintegrals 307.  
 — des harmonischen Maßes 37.
- Isomorphie von Abbildungen 11, 13.
- IVERSEN, Satz von 274.
- Kanonische Darstellung einer beschränktartigen Funktion 178.  
 — — einer meromorphen Funktion endlicher Ordnung 213, 214.  
 — Produkte 213.
- Kapazität von Punktmengen 115.
- Kern einer RIEMANNschen Fläche 288.
- Klasse einer meromorphen Funktion 208.
- Knotenpunkt 280.
- KOBAYASHIScher Satz 311.
- KOEBESche Konstante 81.  
 — —, Bestimmung des genauen Wertes 84, 94.
- KOEBESches Extremalgebiet 82.
- Konvergenzklasse 208.
- Konvergenzsatz von LINDELÖF 61.
- Konvexe Funktionen 42, 167, 183.
- Kritische Stellen, einer einwertigen Funktion 273.  
 — —, Satz von AHLFORS 293, 296.
- Kugeldrehungen 4, 165.
- LAPLACEScher Operator 5.
- LANDAUScher Satz 56.
- Lemma von JULIA-CARATHÉODORY 52.  
 — von LÖWNER 51.  
 — von SCHWARZ 47.
- LINDEBERG, Satz von 142.
- LINDELÖF, Satz von 70.
- Lineare Transformation 4—8.
- LIOUVILLEScher Satz 16, 135.
- Logarithmische Ableitung, Satz über die 239.  
 — Länge 101.
- Logarithmisches Funktionselement 271.  
 — Ende 281.
- Logarithmische Windungspunkte 271.
- Maßbestimmung, nichteuklidische (hyperbolische) 4.  
 —, sphärische 5.
- Maximumprinzip, Erweiterung 134.
- Metrik einer Fläche 316.
- Modulfunktion 15, 206, 254, 305.
- Monodromiesatz 16, 49, 205, 246.
- Mächtigkeit des Kontinuums 146, 148, 253.
- Niveaulinien der GREENSchen Funktion 30.  
 — des harmonischen Maßes 33.
- Normalform der Charakteristik 167.
- Normalwert 255.
- Ordnung einer meromorphen Funktion 208.
- Orizykel 7.
- Parabolischer Typus einer RIEMANNschen Fläche, Erklärung 8.
- Parabolische Substitutionen 8.
- Periodische Enden 292.
- PHRAGMÉN-LINDELÖFScher Satz 43.
- PICARDScher Satz 16, 269.
- PICARD-BORELScher Satz 251.
- POINCARÉSche Darstellung der GREENSchen Funktion 177.  
 — Deutung der nichteuklidischen Geometrie 5.
- POISSONSche Gleichung 122.
- POISSONSches Integral 21.
- Potential, automorphes 25, 202, 204.  
 —, logarithmisches 122.  
 —, sphärisches 173.
- Primfaktor von WEIERSTRASS 214.
- Prinzip von CARLEMAN 63.  
 — vom harmonischen Maß 38.  
 — vom hyperbolischen Maß 49.  
 — von LINDELÖF 45.  
 — vom Maximum 133.



- Problem von CARLEMAN-MILLOUX 67, 94.  
 — von DIRICHLET 21.  
 — von ROBIN 125.  
 — von SPEISER 311.  
 — über defekte Werte 256, 292.  
 — über den Typus einer RIEMANN-  
 schen Fläche 301.  
 — über verzweigte Werte 292.  
 Punkthafte Mengen 113.  
 Punktmengen, perfekte, nirgends dichte  
 146, 148.  
 — vom harmonischen Maß Null 107,  
 113.  
 — von der Kapazität Null 114, 115.  
  
 Quotientendarstellung einer meromor-  
 phen Funktion 178, 213.  
  
 Randwerte, Sätze über 190, 196, 197,  
 198, 204.  
 Reguläre Verzweigkeit 270, 300.  
 RIEMANNSCHE Abbildungssätze 8.  
 RIEMANNSCHE Flächen, deren Win-  
 dungspunkte über endlich  
 vielen Gebieten liegen 287.  
 — —, deren Windungspunkte über end-  
 lich vielen Punkten liegen 278.  
 — — mit endlich vielen Windungs-  
 punkten 287.  
 — —, regulär verzweigte 270, 300.  
 — Kugel 4, 163, 173, 333.  
 RIESZ, Satz von 197.  
 ROBINSche Konstante, Erklärung 114,  
 115.  
  
 Scheibensatz 342.  
 Schmiegungsfunktion, Erklärung 158.  
 Schmiegungsverfahren von CARATHÉO-  
 DORY-KOEBE 20.  
 SCHOTTKYScher Satz 57.  
 SCHWARZ, Ableitung von 290.  
 —, Spiegelungsprinzip von 15.  
 —, Ungleichung von 90.  
  
 Sprungfunktionen 189.  
 Streckenkomplex 280.  
  
 Topologische Abbildungen 9.  
 — Bäume 12, 281.  
 Topologisch-metrische Doppel-  
 ungleichung 331.  
 Transfiniten Durchmesser 128.  
 TSCHEBYSCHEFFSche Polynome 128.  
  
 Überdeckungssatz von AHLFORS 319, 320.  
 — von HEINE-BOREL 121, 316.  
 Überlagerungsflächen, endliche 314.  
 —, universelle 9, 48, 201.  
 —, Theorie der 312.  
  
 Vergrößerung des harmonischen Maßes  
 38, 63.  
 Verkleinerung des hyperbolischen Maßes  
 49, 80.  
 Vermutung über defekte Werte und  
 Zielwerte 258.  
 — von DENJOY 296.  
 — über den Zusammenhang zwischen  
 Typus und Winkelmetrik 301.  
 Verzerrungssatz von AHLFORS 92.  
 — von KOEBE 81.  
 — von PICK 85.  
 Verzweigkeit einer RIEMANNschen  
 Fläche 297—300, 303.  
 Verzweigte Werte 265.  
 Verzweigungsindex 265.  
 Vollständig verzweigte Werte 267.  
 Vollstetige Funktionen 189.  
  
 Wertverteilungslehre, Aufgabe der 159.  
 Winkelgeometrie 301.  
  
 Zetafunktion 208.  
 Zielwege 296.  
 Zielwerte 160, 258, 296.  
 Zweikonstantensatz 41.  
 Zweiter Hauptsatz über meromorphe  
 Funktionen 240.

**Fastperiodische Funktionen.** Von **H. Bohr.** (Ergebnisse der Mathematik, Band I, Heft 5.) Mit 10 Figuren. IV, 96 Seiten. 1932. RM 11.40

**Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion.** Von **Felix Klein.** Gehalten an der Universität Göttingen im Wintersemester 1893/94. Ausgearbeitet von Ernst Ritter, herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von Professor **Otto Haupt,** Erlangen. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band XXXIX.) Mit 96 Figuren. IX, 344 Seiten. 1933. RM 22.-; gebunden RM 23.60

**Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen.** Von **Adolf Hurwitz,** weil. ord. Professor der Mathematik am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich. Herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über Geometrische Funktionentheorie von Professor **R. Courant.** (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band III.) Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 152 Abbildungen. XII, 534 Seiten. 1929. RM 29.70; gebunden RM 31.32

**Lamésche-, Mathiesche- und verwandte Funktionen in Physik und Technik.** Von **M. J. O. Strutt.** (Ergebnisse der Mathematik, Band I, Heft 3.) Mit 12 Figuren. VIII, 116 Seiten. 1932. RM 13.60

**Tafeln der Besselschen, Theta-, Kugel- und anderer Funktionen.** Von Professor **Keiichi Hayashi.** Mit 14 Textabbildungen. V, 125 Seiten. 1930. RM 21.60; gebunden RM 23.40

**Fünfstellige Funktionentafeln.** Kreis-, zyklometrische, Exponential-, Hyperbel-, Kugel-, Besselsche, elliptische Funktionen, Thetanullwerte, natürlicher Logarithmus, Gammafunktion u. a. m. nebst einigen häufig vorkommenden Zahlenwerten. Von Professor **Keiichi Hayashi.** Mit 17 Textabbildungen. VIII, 176 Seiten. 1930. RM 25.20; gebunden RM 27.—

**Tafeln für die Differenzenrechnung sowie für die Hyperbel-, Besselschen, elliptischen und anderen Funktionen.** Von Professor **Keiichi Hayashi.** VI, 66 Seiten. 1933. RM 12.—

**Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen und deren Produkte sowie der Gammafunktion** nebst einem Anhang: Interpolations- und sonstige Formeln. Von Professor **Keiichi Hayashi.** VI, 284 Seiten. 1926. RM 40.50; gebunden RM 43.20

**Die elliptischen Funktionen** von **Jacobi.** Fünfstellige Tafeln, mit Differenzen, von  $sn u$ ,  $cn u$ ,  $dn u$  mit den natürlichen Zahlen als Argument, nach Werten von  $m$  ( $= k^2$ ) rangiert, nebst Formeln und Kurven. Von **L. M. Milne-Thomson,** Assistant Professor (Greenwich). XIV, 69 Seiten. 1931. Gebunden RM 10.50

**Funktionentheorie und ihre Anwendung in der Technik.** Vorträge von **R. Rothe,** **W. Schottky,** **K. Pohlhausen,** **E. Weber,** **F. Ollendorff,** **F. Noether.** Veranstaltet durch das Außeninstitut der Technischen Hochschule Berlin in Gemeinschaft mit dem Elektrotechnischen Verein, E. V., zu Berlin. Herausgegeben von Professor **Dr. R. Rothe,** Berlin, **Dr.-Ing. F. Ollendorff,** Berlin, und **Dr. K. Pohlhausen,** Berlin. Mit 108 Textabbildungen. VII, 173 Seiten. 1931. Gebunden RM 16.—

**David Hilbert, Gesammelte Abhandlungen.** Drei Bände.

Erster Band: Zahlentheorie. XIV, 539 Seiten. 1932. RM 48.—

Zweiter Band: Algebra. Invariantentheorie. Geometrie. Mit 12 Abbildungen und einem Bildnis. VIII, 453 Seiten. 1933. RM 45.—

Dritter Band: Analysis. Grundlagen der Mathematik. Physik. Verschiedenes. Nebst einer Lebensgeschichte. Mit 12 Abbildungen. VII, 435 Seiten. 1935. RM 45.—

---

**Felix Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen.** Drei Bände.

Erster Band: Liniengeometrie. — Grundlegung der Geometrie. — Zum Erlanger Programm. Herausgegeben von R. Fricke und A. Ostrowski. (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen.) Mit einem Bildnis. XII, 612 Seiten. 1921. Unveränderter Neudruck 1925. RM 32.40

Zweiter Band: Anschauliche Geometrie. — Substitutionsgruppen und Gleichungstheorie. — Zur mathematischen Physik. Herausgegeben von R. Fricke und H. Vermeil. (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen.) Mit 185 Textfiguren. VI, 714 Seiten. 1922. Unveränderter Neudruck 1925. RM 37.80

Dritter Band: Elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen, Hyperelliptische und Abelsche Funktionen, Riemannsche Funktionentheorie und automorphe Funktionen. Anhang: Verschiedene Verzeichnisse. Herausgegeben von R. Fricke, H. Vermeil und E. Bessel-Hagen. (Von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen.) Mit 138 Textfiguren. IX, 774 Seiten sowie 36 Seiten Anhang. 1923. Unveränderter Neudruck 1929. RM 43.20

---

**Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.** Von Professor

**G. Pólya**, Zürich, und Privatdozent **G. Szegő**, Berlin.

Erster Band: Reihen. Integralrechnung. Funktionentheorie. XVI, 338 Seiten. 1925. RM 13.50; gebunden RM 14.85

Zweiter Band: Funktionentheorie. Nullstellen. Polynome. Determinanten. Zahlentheorie. X, 407 Seiten. 1925. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band XIX und XX) RM 16.20; gebunden RM 17.55

---

**Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper.**

Mit einer Einführung in das Dreikörperproblem und mit zahlreichen Übungsaufgaben. Von Professor **E. T. Whittaker**, Edinburgh. Nach der zweiten Auflage übersetzt von F. u. K. Mittelsten Scheid, Marburg a. L. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. XVII.) XII, 462 Seiten. 1924.

RM 18.90; gebunden RM 20.25

---

**Topologie.** Von **Paul Alexandroff**, Professor der Mathematik an der

Universität Moskau, und **Heinz Hopf**, Professor an der Eidgen. Technischen Hochschule in Zürich. Erster Band. Mit 39 Textabbildungen. XIV, 636 Seiten. 1935. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. XLV.)

RM 45.—; gebunden RM 46.80

---

**Einfachste Grundbegriffe der Topologie.** Von **Paul**

**Alexandroff**. Mit einem Geleitwort von David Hilbert. Mit 25 Abbildungen. V, 48 Seiten. 1932. RM 3.60

---

**Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers.** Von

Professor Dr. **Erwin Madelung**, Frankfurt a. M. Unter Mitarbeit von Dr. K. Boehle, Göttingen und Dr. S. Flügge, Leipzig. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV.) Mit 25 Textfiguren. XIII, 381 Seiten. 1936. RM 27.—; gebunden RM 28.80

---