

**SAMMLUNG VIEWEG**

**TAGESFRAGEN AUS DEN GEBIETEN  
DER NATURWISSENSCHAFTEN  
UND DER TECHNIK**

**Heft 68**

**Die Schüttelerscheinungen  
elektrischer Lokomotiven  
mit Kurbelantrieb**

**Von**

**Dr. Iwan Döry**



**SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH**



Die „Sammlung Vieweg“ hat sich die Aufgabe gestellt, Wissens- und Forschungsgebiete, Theorien, chemisch-technische Verfahren usw., die im Stadium der Entwicklung stehen, durch zusammenfassende Behandlung unter Beifügung der wichtigsten Literaturangaben weiteren Kreisen bekanntzumachen und ihren **augenblicklichen Entwicklungsstand zu beleuchten**. Sie will dadurch die Orientierung erleichtern und die Richtung zu zeigen suchen, welche die weitere Forschung einzuschlagen hat.

Als Herausgeber der einzelnen Gebiete, auf welche sich die Sammlung Vieweg zunächst erstreckt, sind tätig, und zwar für:

**Physik** (theoretische und praktische, und mathematische Probleme):

Herr Geh. Reg.-Rat Professor Dr., Dr. E. h. **Karl Scheel**, Physikal.-Techn. Reichsanstalt, Charlottenburg;

**Chemie** (Allgemeine, Organische und Anorganische Chemie, Physikal. Chemie, Elektrochemie, Technische Chemie, Chemie in ihrer Anwendung auf Künste und Gewerbe, Photochemie, Metallurgie, Bergbau):

Herr Professor Dr. **B. Neumann**, Techn. Hochschule, Breslau;

**Technik** (Wasser-, Straßen- und Brückenbau, Maschinen- und Elektrotechnik, Schiffsbau, mechanische, physikalische und wirtschaftliche Probleme der Technik):

Herr Professor Dr.-Ing. E. h. **Fritz Emde**, Techn. Hochschule, Stuttgart.

### *Bisher erschienene Hefte der „Sammlung Vieweg“*

- Heft 1. Dr. Robert Pohl und Dr. P. Pringsheim-Berlin: *Die lichtelektrischen Erscheinungen*. Mit 36 Abbildungen. Vergriffen.
- Heft 2. Dr. C. Freiherr von Girsewald-Berlin-Halensee: *Peroxyde und Persalze*. M. 2,50.
- Heft 3. Diplomingenieur Paul Béjeuhr-Charlottenburg: *Der Blériot-Flugapparat und seine Benutzung durch Pégoud vom Standpunkte des Ingenieurs*. Mit 26 Abbildungen. M. 2,—.
- Heft 4. Dr. Stanislaw Loria-Krakau: *Die Lichtbrechung in Gasen als physikal. und chem. Problem*. Mit 3 Abbild. und 1 Tafel. M. 3,—.
- Heft 5. Professor Dr. A. Gockel-Freiburg i. d. Schweiz: *Die Radioaktivität von Boden und Quellen*. Mit 10 Abbildungen. M. 3,—.
- Heft 6. Ingenieur D. Sidersky-Paris: *Brennereifragen: Kontinuierliche Gärung der Rübensäfte. — Kontinuierliche Destillation und Rektifikation*. Mit 24 Abbildungen. M. 2,—.
- Heft 7. Hofrat Professor Dr. Ed. Donath und Dr. A. Gröger-Brünn: *Die flüssigen Brennstoffe, ihre Bedeutung und Beschaffung*. Mit 1 Abbildung. M. 2,50.
- Heft 8. Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Max B. Weinstein-Berlin: *Kräfte und Spannungen. Das Gravitations- und Strahlenfeld*. M. 2,—.
- Heft 9/10. Geh. Reg.-Rat Professor Dr. O. Lummer-Breslau: *Verflüssigung der Kohle und Herstellung der Sonnentemperatur*. Mit 50 Abbildungen. M. 5,—.
- Heft 11. Dr. E. Przybyllok: *Polhöhen-Schwankungen*. Mit 8 Abbildungen. M. 2,—.
- Heft 12. Professor Dr. Albert Oppel-Halle a. S.: *Gewebekulturen und Gewebepflege im Explantat*. Mit 32 Abbildungen. M. 3,—.
- Heft 13. Dr. Wilhelm Foerster-Berlin: *Kalenderwesen und Kalenderreform*. M. 1,50.
- Heft 14. Dr. O. Zoth-Graz: *Über die Natur der Mischfarben auf Grund der Undulationshypothese*. Mit 3 Textfiguren und 10 Kurventafeln. M. 3,—.
- Heft 15. Dr. Siegfried Valentiner-Clausthal: *Die Grundlagen der Quantentheorie in elementarer Darstellung*. 3. erweiterte Aufl. Mit 8 Abbild. M. 4,—.

# Die Schüttlerscheinungen elektrischer Lokomotiven mit Kurbelantrieb

Von

Dr. Iwan Döry

Direktor der Pöge-Elektrizitäts-A.-G., Chemnitz

Mit 12 Abbildungen



---

---

Herausgeber dieses Heftes:  
Professor Dr.-Ing. h. c. Fritz Ende in Stuttgart

---

---

ISBN 978-3-663-06127-4      ISBN 978-3-663-07040-5 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-663-07040-5

Alle Rechte vorbehalten

## Vorwort.

Die Schüttelschwingungen elektrischer Lokomotiven sind Gegenstand mehrerer in der Fachliteratur verstreuter Abhandlungen. Die vorliegende kleine Schrift will sie in großen Zügen zu einer Einheit zusammenfassen.

Was Kummer, Meissner, Müller, Buchli, Couwenhoven u. a. geleistet haben, sollen aber nur Stationen eines Gedankenweges sein, der ohne eine Unterbrechung seiner Kontinuität von ihnen zu erleiden und ohne über ihre Lösungen hinauszuführen, sich das Problem so stellt, als ob er eine eigene Lösung suchte. Über diese Fiktion hinaus biete ich keine neue Lösung an.

Vollständigkeit der Darstellung ist nicht beabsichtigt gewesen.

Herrn Professor Dr.-Ing. h. c. Fritz Emde bin ich für wesentliche Verbesserungen, Ergänzungen und sachliche Richtigstellungen zu großem Dank verpflichtet. Herrn Professor Ing. Dr. W. Kummer danke ich herzlichst für viele wertvolle Anregungen.

Chemnitz, im September 1923.

**Iwan Döry.**

# Inhaltsübersicht.

|  | Seite |
|--|-------|
| 1. Einleitung . . . . .  | 1     |
| 2. Die erste Abweichung vom idealen Kurbelantrieb. (Lagerspiel) . . .                          | 4     |
| 3. Die zweite Abweichung vom idealen Kurbelantrieb. (Veränderliche<br>Elastizität) . . . . .   | 11    |
| 4. Mehrere Abweichungen vom idealen Kurbelantrieb. (Der praktische<br>Kurbelantrieb) . . . . . | 30    |
| 5. Übersicht . . . . .   | 35    |

## 1. Einleitung.

Die Erfahrung zeigt, daß der Anker und das Triebwerk elektrischer Lokomotiven mit Kurbelantrieb bei „kritischen Geschwindigkeiten“ in Schwingungen geraten können. Die Erscheinung hat ausgesprochene Resonanzmerkmale. Die Erschütterung wächst mit zunehmender Geschwindigkeit und verschwindet oft ganz unvermittelt. Sie tritt bei Belastung und im Leerlauf auf. Die Ursache kann deshalb nicht elektrischer Natur sein.

Die neuartige, oft Schüttelschwingung genannte Schwingungsbewegung ist an elektrischen Lokomotiven erst bemerkt worden, als man die Motoren wegen ihrer großen Leistung im Rahmen hochlegte und ihr Drehmoment mittels Kurbeln und Stangen auf die Triebräder übertrug (Abb. 1 bis 3). Es war auffallend, daß die Schüttelschwingung zwar an den Kurbelantrieb gebunden war, daß sie aber nur an elektrischen Lokomotiven auftrat und daß eine ähnliche Erscheinung am Antrieb der Dampflokomotive, von der man ihn übernommen hatte, trotz der Jahrzehnte zurückreichenden Erfahrung noch nicht beobachtet worden war.

Das ungleiche Verhalten des Kurbelantriebs im Dampf- und im elektrischen Betrieb blieb längere Zeit ungeklärt. Zur Aufdeckung der Ursache hat besonders der von W. Kummer erkannte Einfluß der Motormasse auf die Triebwerksbeanspruchung geführt. Die Erkenntnis, daß die Elastizität des Antriebs zusammen mit der Ankermasse elektrischer Lokomotiven ein schwingungsfähiges System bildet, das der Dampflokomotive ihres fast masselosen Antriebs wegen abgeht, gestattete durch Bestimmung der schwingenden Masse und der Elastizität die Eigenschwingungsdauer des Systems und die Frequenzen zu ermitteln, bei denen es in Resonanz gerät. Diese dem Problem durch Kummer gegebene Formulierung ist in ihrer vollen Bedeutung erst gewürdigt worden, nachdem sie nach Aufzeigung der vom Lagerspiel und von der

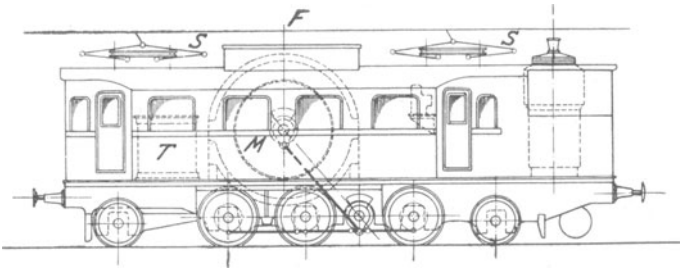


Abb. 1. Schlesische 1-C-1-Personenzugslokomotive der Maffei-Schwarzkopff-Werke mit direktem Parallelkurbelantrieb (ohne Zahnradvorgelege).

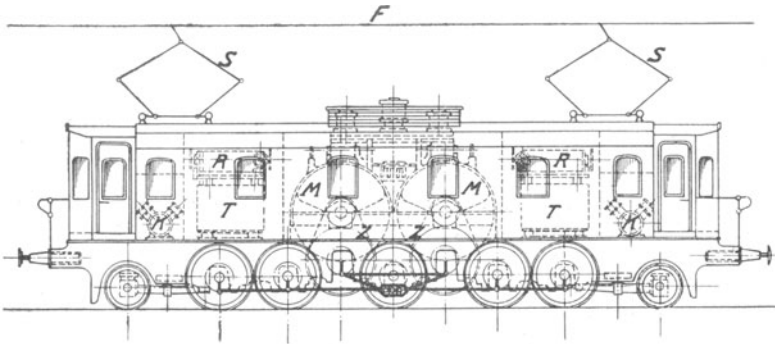


Abb. 2. Lötschberg-1-E-1-Lokomotive der Maschinenfabrik Oerlikon mit einseitigem Zahnradvorgelege und Dreieckstangenantrieb.

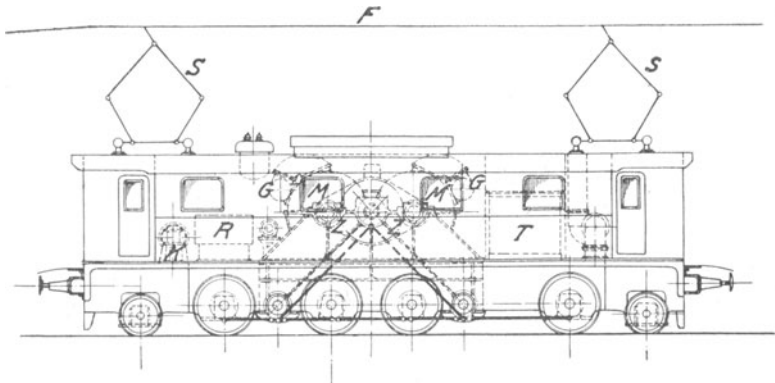


Abb. 3. Bayrische 1-D-1-Lokomotive der Pöge-Elektrizitäts-A.-G. Chemnitz und Lokomotivfabrik J. A. Maffei-München mit Lotterantrieb. (Beiderseitiges Zahnradvorgelege und Doppelparallelkurbelantrieb. Vgl. S. 36.)

*M* = Motor, *T* = Transformator, *R* = Geschwindigkeitsregler, *S* = Stromabnehmer, *Z* = Zahnradvorgelege, *G* = Kühlgebläse, *K* = Kompressor für Bremsluft, *F* = Fahrdrabt.



Veränderlichkeit der Elastizität herrührenden Schwingungserreger zur Vorausberechnung der kritischen Geschwindigkeiten und auch darüber noch hinaus zur praktischen Beseitigung der Schüttel-schwingung durch Buchli geführt hatte.

Aber solange der Einfluß des Lagerspiels und der veränderlichen Elastizität auf die Arbeitsweise des Kurbelantriebs noch nicht klar erkannt war, war es naheliegend, den Schwingungserreger im Antrieb selbst zu suchen.

Kleinow untersuchte den Kurbelantrieb unter der Voraussetzung konstanter Elastizität und unter Vernachlässigung des Lagerspiels und fand, daß das Drehmoment in allen Kurbelstellungen konstant bleibt. Der spielfreie Kurbelantrieb konstanter Elastizität, der sogenannte ideale Kurbelantrieb selbst, konnte also kein Schwingungserreger sein. Das stand scheinbar im Widerspruch mit der Erfahrung, daß die Schüttelschwingung gerade vom Kurbelantrieb herrührt.

J. Buchli bemerkte indes, daß die Schüttelerscheinung vom Lagerspiel herrührt, das bei ungenau eingestellten oder abgenutzten Lagerschalen auftritt.

Also nicht der Kurbelantrieb, aber die vom Spiel herrührende Abweichung von seiner idealen Ausführung kann zur Schüttelschwingung führen.

So ward der Widerspruch mit der klassischen Untersuchung Kleinows, die keinen vom idealen Kurbelantrieb herrührenden Schwingungserreger zuläßt, aufgeklärt. Die Praxis, die keinen spielfreien Antrieb kennt, hat ebenso zu dieser Erkenntnis beigetragen wie die Untersuchungen Buchlis und Couwenhovens, die gerade in dem vom Spiel herrührenden Winkelsprung der Ankermasse den Schwingungserreger erkannten.

Vom idealen Kurbelantrieb Kleinows, der spielfrei und von konstanter Elastizität gedacht war, war die erste Voraussetzung gefallen. E. Meissner ließ auch noch die zweite fallen. Er berücksichtigte die Veränderlichkeit der Elastizität, die von der Kurbelstellung abhängt und auch ohne äußeren Erreger zu einem unendlich großen Ausschlag der Eigenschwingung führen kann. Auf die Schüttelerscheinung des Kurbelantriebs fiel damit ein neues Licht.

Kummer hatte die Schwingungsfähigkeit des aus der Triebwerkselastizität und aus der Ankermasse bestehenden Systems

gezeigt. So entstand die Frage nach dem Schwingungserreger. Meissner hat auch noch die Fähigkeit des Systems zur Selbsterrregung nachgewiesen. Die Frage nach dem Erreger hatte damit ihre Berechtigung scheinbar wieder verloren.

Aber K. E. Müller, der Schüler Meissners und Kummers, hat die gemeinsame Idee gezeigt, die den Auffassungen beider Züricher Meister zugrunde liegt und eine einheitliche Betrachtung der Schüttelerscheinung zuläßt.

## 2. Die erste Abweichung vom idealen Kurbelantrieb.

(Lagerspiel.)

Die gleichförmige Ankerdrehung geht unter dem Einfluß der Schüttelschwingung in eine ungleichförmige Bewegung über. Man kann sie von zwei verschiedenen Ausgangspunkten aus beschreiben

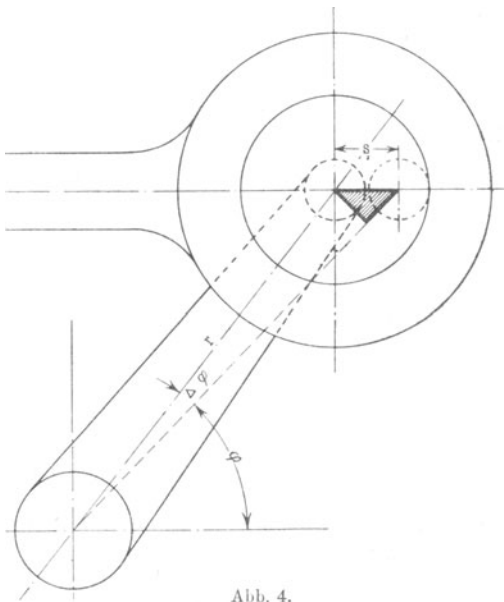


Abb. 4.

und entweder von der absoluten (resultierenden) Ankerbewegung oder von der relativen Bewegung des Ankers gegenüber den Tribrädern ausgehen.

Couwenhoven ist von der absoluten Ankerbewegung ausgegangen. Dieser Weg hat den Vorzug, daß er die Bewegung so wie sie wirklich auftritt, unmittelbar beschreibt.

Von der ungleichförmigen Bewegung des Ankers und der

Lokomotive ist so viel sicher, daß sie wegen der großen konstanten Grundgeschwindigkeit absolut nur in einem Sinn stattfinden kann. Die Schwingung ändert also nur die Größe, aber nicht die Rich-

tung der Ankergeschwindigkeit. Die beschleunigte Rückwärtschwingung wird zur verzögerten Vorwärtsbewegung, die verzögerte Rückwärtsbewegung zur beschleunigten Vorwärtsbewegung. Trotzdem könnte sich der Kurbelzapfen von der Lagerschale abheben. Aber wegen des Kraftschlusses schwingt der Anker trotz des Spiels tatsächlich spielfrei. Das Spiel beeinflusst also nicht die Eigenschwingung. Es kann aber als Schwingungserreger wirken.

Das Spiel, das im Ruhezustand allseitig ( $s$ ) ist, vergrößert nämlich die Voreilung der treibenden Welle um den Betrag

$$\Delta_1 \varphi = \Delta \varphi = \left| \frac{s \sin \varphi}{r} \right| \quad (1)$$

( $r$  = Kurbelarm,  $\varphi$  = Kurbelwinkel; Abb. 4),

wenn die eine Stange trägt, und um den Betrag

$$\Delta_2 \varphi = \Delta \psi = \left| \frac{s \cos \varphi}{r} \right|, \quad (1a)$$

wenn die andere, um  $90^\circ$  versetzte Stange trägt.

Beide Stangen können nur in den Kurbelstellungen gleichzeitig tragen, in denen die vom Spiel beider Stangen herrührenden Voreilwinkel gleich sind:

$$\Delta \varphi = \left| \frac{s \sin \varphi}{r} \right| = \left| \frac{s \cos \varphi}{r} \right| = \Delta \psi, \quad (1b)$$

also nur in den Winkelhalbierenden der Quadranten

$$\varphi = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ \text{ und } 315^\circ,$$

in denen notwendig ein Stangenwechsel eintritt.

In allen andern Kurbelstellungen kann nur eine Stange tragen.

Im Augenblick des Stangenwechsels springt der Abstand der Kurbelzapfen der belasteten Stange (Abb. 5)

$$L + s + \varepsilon_1 \quad (2)$$

( $\varepsilon_1$  = absolute elastische Längenänderung,  $L$  = Abstand zwischen treibender und getriebener Welle)

auf den Abstand der Kurbelzapfen der unbelasteten Stange

$$L - s, \quad (2a)$$

was zu einem Winkelsprung der Ankermasse führt. Sie erleidet ihn in jedem Quadranten, also mit der vierfachen Antriebsfrequenz ( $4\gamma$ ).



Die erzwungene Schwingung, die harmonisch ist, weil der Anker spielfrei schwingt und eine harmonische Eigenschwingung hat, lagert sich über die fortschreitende Ankerbewegung. Der Anker schwingt spielfrei wegen seiner kraftschlüssigen Verbindung mit dem Triebwerk und deshalb harmonisch.

Wenn aber Resonanz nicht mit der Grundfrequenz der erzwungenen Schwingung eintritt, sondern mit ihrer  $k$ ten Oberwelle und wenn auf eine Umdrehung nicht 4, sondern allgemein ( $\alpha$ ) erzwungene Schwingungen kommen (vgl. S. 34), dann wird die kritische Drehzahl allgemein

$$\gamma^* = \frac{1}{k\alpha} \cdot \eta = \frac{1}{\alpha k} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\Theta}} \text{ Per/sec.} \quad (3a)$$

**Beispiel 1.** Die Eigenfrequenz der schlesischen 1-C-1-Personenzuglokomotive (Abb. 1).

Der elastische Nachgiebigkeitsgrad ( $e$ ) des Triebwerks, das ist der Winkel, um den sich die Ankermasse gegenüber den Triebrädern unter der Wirkung eines Drehmoments von 1 mt verdreht, rührt her von der Nachgiebigkeit der Motorwelle ( $e_m$ ), der Blindwelle ( $e_b$ ), der Triebstangen ( $e_t$ ) und Kuppelstangen ( $e_k$ )<sup>1)</sup>:

$$e = e_m + e_b + e_t + e_k,$$

wenn man die Nachgiebigkeit der Kurbeln und Kurbelzapfen vernachlässigt.

Es ist (vgl. Abb. 6):

$$e_m = \frac{L_m}{J_m G} = \frac{0,423}{0,84 \cdot 10^{-3} \cdot 0,83 \cdot 10^7} = \text{rd } 0,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \text{ t}^{-1},$$

$L_m$  = Länge des auf Verdrehung beanspruchten Motorwellenstückes = 0,423 m,

$J_m$  = polares Trägheitsmoment der Motorwelle =  $\frac{\pi}{32} (0,31^4 - 0,16^4)$   
= rd  $0,84 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ ,

$G$  = Schubmodul =  $0,83 \cdot 10^7 \text{ m}^{-2} \text{ t}$ .

$$e_b = \frac{L_b}{J_b G} = \frac{1,65}{0,52 \cdot 10^{-3} \cdot 0,83 \cdot 10^7} = \text{rd } 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \text{ t}^{-1},$$

$L_b$  = Länge der Blindwelle zwischen den Kurbelsitzen = 1,65 m,

$J_b$  = Polares Trägheitsmoment der Blindwelle =  $\frac{\pi}{32} (0,275^4 - 0,14^4)$   
=  $0,52 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ ,

Durchmesser der Blindwelle = 0,275 m,

Bohrung der Blindwelle = 0,14 m.

$$e_t = \frac{\varepsilon}{Mr \sin \varphi} = \frac{L_t}{E I_t r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{2,484}{2,089 \cdot 10^7 \cdot 0,583 \cdot 10^{-2} \cdot 0,09 \cdot 0,5} \\ = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \text{ t}^{-1},$$

<sup>1)</sup> Den nachstehend eingeschlagenen Weg zur Ermittlung der Triebwerkselastizität hat Couwenhoven (Forschungsarbeiten d. Ver. Deutsch. Ing., Heft 218, S. 51) angegeben.

$\epsilon$  = absolute elastische Längenänderung der Triebstange beim Drehmoment

$$M = Pr \sin \varphi,$$

$$\epsilon = \frac{L_t \cdot P}{E F_t},$$

$L_t$  = Länge der Triebstange = 2,484 m,

$P$  = Triebstangenkraft,

$r$  = Kurbelradius = 0,3 m,

$F_t$  = Querschnitt der Triebstange =  $0,583 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ ,

$E$  = Elastizitätsmodul =  $2,089 \cdot 10^7 \text{ m}^{-2} \text{ t}$ ,

$\sin^2 \varphi = 0,5$ , wenn die Kurbelstellung ( $\varphi = 45^\circ$ ) gewählt wird, die die größte Dehnung gibt.

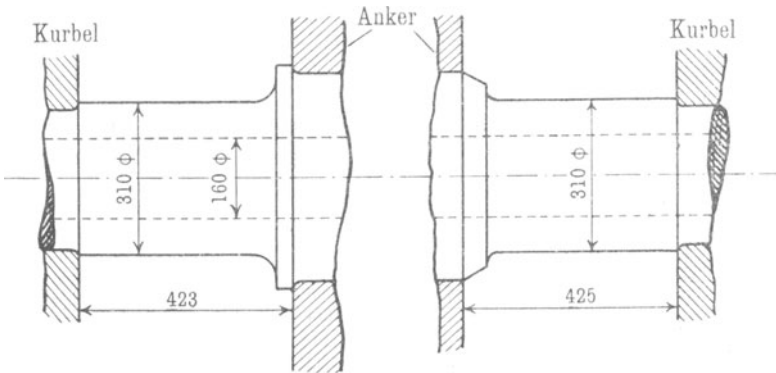


Abb. 6.

Für die Kuppelstange zwischen Blindwelle und mittlerem Triebbad kann angenommen werden, daß sie  $\frac{2}{3}$  des Motordrehmoments überträgt:

$$e_k = \frac{\frac{2}{3} L_k}{E F_k \nu^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,115}{2,089 \cdot 10^7 \cdot 0,23 \cdot 10^{-2} \cdot 0,09 \cdot 0,5} = 3,55 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \text{ t}^{-1},$$

$L_k$  = Länge der Kuppelstange = rd 0,115 m,

$F_k$  = Querschnitt der Kuppelstange =  $0,23 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$  (angenommen),

$$e = e_m + e_b + e_t + e_k = (0,6 + 3,8 + 4,5 + 3,55) \cdot 10^{-4} = 12,45 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \text{ t}^{-1},$$

Trägheitsmoment des Ankers:  $\Theta = \text{rd } 0,9 \text{ mtsec}^2$ .

Die Eigenfrequenz des Systems ist also

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\Theta e}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{10^4}{0,9 \cdot 12,45}} = \text{rd } 4,8 \text{ Per/sec}, \quad (4)$$

und die kritische Geschwindigkeit

$$\nu^* = \frac{\eta}{4} = 1,2 \text{ Per/sec}, \quad (3)$$

was

$$60 \times 1,2 = 72 \text{ U/min}$$

der Triebräder, oder bei 1200 mm Triebraddurchmesser einer kritischen Lokomotivgeschwindigkeit von 16,3 km/h entspricht.

Die Beobachtung auf der fahrenden Lokomotive hat ein Schüttelbereich zwischen

$$16 \text{ und } 22 \text{ km/h}$$

festgestellt. Ein schwächeres Schüttelbereich zwischen

$$34 \text{ und } 43 \text{ km/h}$$

rührt wahrscheinlich von einem Stichmaßfehler (vgl. S. 34) her.

### Beispiel 2. Die kritische Geschwindigkeit der Varesina-Lokomotive.

Couwenhoven hat den mittleren Nachgiebigkeitsgrad des Triebwerks zu

$$e = 1,273 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1} \text{ t}^{-1}$$

und das Trägheitsmoment des Ankers zu

$$\Theta = 0,0663 \text{ mtsec}^2$$

bestimmt.

Die Eigenfrequenz des Systems ist also

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^3}{0,0663 \cdot 1,273}} = 17,3 \text{ Per/sec}, \quad (4)$$

und die kritische Geschwindigkeit

$$\gamma^* = \frac{\eta}{4} = 4,33 \text{ Per/sec}, \quad (3)$$

was  $4,33 \times 60 = 260$  U/min der Triebräder oder bei 1500 mm Triebraddurchmesser einer Lokomotivgeschwindigkeit von 73,5 km/h entspricht. Die Messung im Betriebe hat 78 bis 80 km/h ergeben.

Wenn auch die Schwingung sonst spielfrei ist, kann doch im Resonanzfall, wenn das übergelagerte Drehmoment der erzwungenen Schwingung die Größe des Motordrehmoments übersteigt, der Kraftschluß und daher die Berührung zwischen dem arbeitenden Kurbelzapfen und seiner Lagerschale bei der Rückwärtsschwingung des Ankers aufhören, so daß beide Kurbelzapfen im Lagerspiel schweben.

Dieser Schwingungszustand, bei dem die Arbeitsübertragung zeitweise ganz aussetzt, was sich wegen des Losewerdens der arbeitenden Triebstange durch Stangengerassel oder triebwerkzerstörendes Poltern äußern kann, erklärt die auf der Lokomotive empfundene Schüttelerscheinung. Sie verschwindet und

geht wieder in die spielfreie erzwungene Schwingung über, sobald sich der Schwingungsaussschlag nach Überschreiten der Resonanz vermindert hat.

So führt gerade die Betrachtungsweise Couwenhovens, trotzdem sie von der absoluten, kraftschlüssigen und deshalb spielfreien Ankerbewegung ausgeht, im Resonanzfall zur Relativbewegung, die den Anker rückwärts in sein Spiel treibt und sich wesentlich von der spielfreien 'Ankerschwingung unterscheidet. Während diese eine erzwungene harmonische Schwingung ist, kann die ins Spiel einschwingende Bewegung es nicht mehr sein, weil sich beim Durchgang durch das Spiel die elastische Richtkraft sprunghaft ändert.

Ihre Schwingungsdauer

$$\vartheta = \frac{1}{\nu} = T + \tau$$

hat zuerst K. E. Müller auf anschauliche Weise als Summe der natürlichen Schwingungsdauer ( $T = 1/\eta$ ) und der zum Durchfliegen des Spiels ( $s$ ) benötigten Zeit

$$\tau = \frac{4s}{V} = \frac{2s}{\mu\pi Q} T$$

berechnet, weil das Spiel bei jeder vollen Schwingung (von der Amplitude  $Q$ ) viermal mit einer bei Null beginnenden veränderlichen Geschwindigkeit, deren Mittelwert

$$V = \mu \frac{2\pi Q}{T} \quad (0 < \mu < 1)$$

sei, durchschritten wird.

Deshalb ist

$$\vartheta = \frac{1}{\nu} = T \left( 1 + \frac{2s}{\mu\pi Q} \right) = \frac{1}{\eta} \left( 1 + \frac{2s}{\mu\pi Q} \right)$$

und die Frequenz

$$\nu = \frac{\eta}{1 + \frac{2s}{\mu\pi Q}}. \quad (5)$$

Unter dem Einfluß des Lagerspiels vermindert sich also die Eigenfrequenz des Systems und geht von der natürlichen Frequenz ( $\eta$ ) der harmonischen Schwingung in die Frequenz ( $\nu$ ) der quasiharmonischen<sup>1)</sup> Schwingung über.

<sup>1)</sup> Die Bezeichnung rührt von Kummer her.



Die Frequenz der quasiharmonischen Schwingung ist nicht konstant. Sie wächst mit der Größe des Ausschlags ( $Q$ ). Aber nicht seine absolute Größe, nur sein Verhältnis ( $s/Q$ ) zum Spiel bestimmt die Eigenschwingungsdauer.

Die vom Spiel herrührende (dynamische) Störung des Systems tritt also, wenn die Schwingung wegen des Kraftschlusses (kinematisch) spielfrei ist, als äußere Störung auf, die zum Winkelsprung der Ankermasse führt und eine der fortschreitenden Ankerbewegung überlagerte erzwungene harmonische Schwingung erregt.

Die vom Spiel herrührende Störung des Systems tritt dagegen, wenn der Anker sein Spiel durchschreitet, als innere Störung auf, die zum Elastizitätssprung des Triebwerks und zur freien quasiharmonischen Schwingung führt.

Beide sind nur verschiedene Wirkungen der einen vom Spiel herrührenden Störung des Systems, die sich als Elastizitätssprung äußert, wenn der Kraftschluß verschwindet, und als Winkelsprung auftritt, wenn der Kraftschluß wiederkehrt.

### 3. Die zweite Abweichung vom idealen Kurbelantrieb.

#### (Veränderliche Elastizität.)

Von der Elastizität des Triebwerks ist bisher angenommen worden, daß sie während einer Umdrehung konstant bleibt. In der Regel ändert sie sich aber mit der Kurbelstellung.

Das kommt daher, daß die Stangenkraft ( $P$ ) auch bei unveränderlichem Motordrehmoment ( $M$ ) wegen des veränderlichen Hebelarmes ( $r \sin \varphi$ )

$$M = Pr \sin \varphi$$

vom Kurbelwinkel ( $\varphi$ ) abhängt und daß sich die Verteilung des Motordrehmoments auf beide Triebwerksseiten wegen der Phasenverschiebung ihrer Stangen mit der Kurbelstellung ändert, so daß die Beanspruchung und Nachgiebigkeit der Triebwerksteile (Wellen, Stangen, Kurbeln) mit dem Energiefluß durch sie wechselt.

Denkt man sich das Triebwerk etwa festgestellt und die Ankermasse elastische Schwingungen um die Motorwelle aus-

führend, so wird also die Schwingungszahl je nach der Kurbelstellung eine andere sein, weil die Nachgiebigkeit des Getriebes von jener Stellung abhängt. Was geschieht aber, wenn das Getriebe nicht mehr feststeht, sondern etwa gleichförmig umläuft? fragt Meissner. Von einer eigentlichen Schwingungszahl im üblichen Sinn kann offenbar nicht mehr gesprochen werden; ja der Schwingungsvorgang wird vielleicht gar nicht mehr streng periodisch sein. Bleibt überhaupt die Schwingung in endlichen Grenzen, oder kann sie, obwohl die äußere Erregung fehlt, trotzdem zu unendlich großen Ausschlägen führen?

Über den Schwingungsvorgang bei veränderlicher Elastizität kann man sich wie folgt einen Überblick verschaffen:

Wenn der Elastizitätsfaktor ( $1/e$ ) nicht mehr konstant ist, wie bei der harmonischen Schwingung, sondern wenn er eine periodische Funktion

$$f(t + T) = f(t)$$

der Zeit  $t$  mit der Umlaufzeit ( $T$ ) des Antriebs als Periode ist, so geht die Bewegungsgleichung der harmonischen Schwingung

$$\Theta \ddot{x} + \frac{1}{e} x = 0 \quad (e = \text{const}) \quad (6)$$

in die Gleichung der nunmehr nichtharmonischen Schwingung

$$\Theta \ddot{x} + f(t)x = 0 \quad (6a)$$

über. Sie hat wie jede lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei linear voneinander unabhängige Lösungen,

$$\Phi_1(t) \quad \text{und} \quad \Phi_2(t).$$

Setzt man in der Gleichung (6a) statt ( $t$ ) durchweg ( $t + T$ ), so ändert sie sich wegen

$$f(t + T) = f(t)$$

nicht. Daher sind auch

$$\Phi_1(t + T) \quad \text{und} \quad \Phi_2(t + T)$$

Lösungen der Gleichungen (6a), d. h. die Funktionen ( $\Phi_1$ ) und ( $\Phi_2$ ) sind periodisch. Sie sind aber nicht rein periodische Funktionen wie bei konstanter Elastizität. Sie reproduzieren sich

vielmehr mit einem Multiplikator ( $m$ ), wenn die Umlaufszeit ( $T$ ) abgelaufen ist:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t+T) &= m_1 \Phi_1(t), \\ \Phi_2(t+T) &= m_2 \Phi_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$m_1 \cdot m_2 = 1.$$

Das kommt daher, daß die Schwingung in einem zeitlich veränderlichen elastischen Feld erfolgt und deshalb, wenn die Vergrößerung der elastischen Kraft gerade im Moment des größten Ausschlags eintritt, mit wachsender Zeit ins Unendliche zunehmen kann, so wie es die erzwungene Schwingung im Resonanzfall tut. Aus der  $n$ mal wiederholten Anwendung der Periodizitätseigenschaft (7) folgt nämlich

$$\Phi(t+nT) = m^n \Phi(t), \quad (7a)$$

was bei reellen Multiplikatoren zum unbegrenzten Wachstum der einen Funktion, deren Multiplikator

$$m_1 > 1$$

und zum Verschwinden der andern Funktion führt, deren Multiplikator

$$m_2 = \frac{1}{m_1} < 1$$

ist.

Zu den Lösungen (7) der Differentialgleichung (6a) kann man wie folgt gelangen (vgl. etwa J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen [Sammlung Schubert, Bd. 50], S. 232, Leipzig 1905 bei Göschen):

Sind  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  die beiden noch unbekanntten Lösungen, dann lautet das allgemeine Integral

$$X(t) = P x_1(t) + Q x_2(t) \quad (a)$$

mit den willkürlichen Integrationskonstanten ( $P$ ) und ( $Q$ ).

Weil die Elastizität  $f(t)$  die Periode  $T$  hat:

$$f(t+T) = f(t),$$

so ändert sich die Gleichung (6a) nicht, wenn man statt ( $t$ ) durchweg ( $t+T$ ) setzt. Deshalb sind auch  $x_1(t+T)$  und  $x_2(t+T)$  Lösungen der Gleichung (6a), sind also von der Form (a):

$$\left. \begin{aligned} x_1(t+T) &= A x_1(t) + B x_2(t), \\ x_2(t+T) &= C x_1(t) + D x_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

mit den durch  $x_1, x_2$  bestimmten Integrationskonstanten  $A, B, C, D$ . Nach (a) und (b) ist

$$X(t+T) = P x_1(t+T) + Q x_2(t+T) \quad (c)$$

$$= (PA + QC) x_1(t) + (PB + QD) x_2(t) \quad (d)$$

Sucht man  $P/Q$  so zu bestimmen, daß mit konstantem  $m$

$$X(t+T) = mX(t) \quad (7)$$

wird (was im allgemeinen nicht schon von  $x_1$  und  $x_2$  gelten wird), so folgt aus Gleichung (d) und (7):

$$[P(A-m) + Q]x_1(t) + [PB + Q(D-m)]x_2(t) = 0,$$

oder weil die Koeffizienten beider Glieder gleichzeitig verschwinden müssen:

$$\begin{aligned} P(A-m) + Q &= 0, \\ PB + Q(D-m) &= 0, \end{aligned}$$

also

$$-\frac{Q}{P} = \frac{A-m}{C} = \frac{B}{D-m}. \quad (e)$$

Daher hat man für  $m$  die Bestimmungsgleichung

$$m^2 - m(A+D) + (AD - BC) = 0, \quad (f)$$

die wegen

$$AD - BC = 1 \quad (g)$$

übergeht in

$$m^2 - m(A+D) + 1 = 0, \quad (h)$$

so daß das Produkt ihrer Wurzeln der Bedingung genügt:

$$m_1 \cdot m_2 = 1.$$

Hier ist  $A+D$  reell. Für  $A+D \geq 2$  ist auch  $m$  reell. Für  $|A+D| < 2$  ist  $m$  dagegen eine komplexe Einheit, und  $m_1, m_2$  sind zueinander konjugiert. Die zu  $m_1$  gehörige Eigenschwingung  $X(t)$  mit der Eigenschaft (7) ist durch das mit  $m = m_1$  aus (e) folgende Verhältnis  $P/Q$  charakterisiert (ebenso bei  $m_2$ ). Aus der Gleichung (h) folgt für die Stabilitätsbedingung [Gleichung (8), S. 16]:

$$m = \frac{A+D}{2} = 1. \quad (i)$$

Der Satz (g), daß die Determinante ( $\Delta$ ) der Konstanten ( $A, B, C, D$ ) in den Gleichungen (b) gleich Eins sein muß:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC = 1, \quad (g)$$

läßt sich in jedem Sonderfall für die gewählten Anfangsbedingungen der Differentialgleichung (6a) nachweisen. Er ist an die Bedingung geknüpft, daß der Koeffizient  $R_1$  der ersten Ableitung in der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + R_1\dot{x} + R_2x = 0 \quad (k)$$

verschwindet und kann für diesen Fall

$$R_1 = 0, \quad (l)$$

also für die Gleichung

$$\ddot{x} + R_2x = 0$$

wie folgt allgemein bewiesen werden:

Sind  $x_1$  und  $x_2$  Lösungen der Gleichungen (k), ist also

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + R_1\dot{x}_1 + R_2x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + R_1\dot{x}_2 + R_2x_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

dann folgt aus beiden Gleichungen (m):

$$R_1 = \frac{\ddot{x}_1x_2 - x_1\ddot{x}_2}{x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2} = \frac{v}{w}. \quad (n)$$

Aus den Gleichungen (b):

$$\begin{cases} y_1 = Ax_1 + Bx_2, \\ y_2 = Cx_1 + Dx_2, \end{cases} \quad (b)$$

ergibt sich aber

$$r = y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2 = (x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2) (AD - BC)$$

oder nach Gleichung (g) und (n)

$$r = w A, \quad (o)$$

während aus (n) folgt:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{d(x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2)}{dx} = x_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 x_2 = -v = -w R_1$$

und wegen

$$R_1 = 0 \quad (l)$$

$$w = x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2 = K = \text{konstant.} \quad (p)$$

Da die Konstante ihren Wert behält, wenn die Lösungen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  in  $y_1(t) = x_1(t+T)$  und  $y_2(t) = x_2(t+T)$  übergehen [vgl. Gleichungen (b)], so muß auch

$$r = y_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_1 y_2 = K = w \quad (q)$$

sein, was in Verbindung mit Gleichung (o) zum oben behaupteten Satz (g) führt:

$$A = AD - BC = 1. \quad (g)$$

E. Meissner nennt Schwingungen mit  $|m| \neq 1$  instabil.

Der reelle Multiplikator beeinflußt also den Ausschlag der Schwingung. Von einem imaginären Multiplikator mit dem Betrag 1 dagegen hängt nur die Phase der Schwingung ab.

Das kann z. B. aus der Darstellung der Schwingung als umlaufender Vektor unmittelbar abgelesen werden. Ein imaginärer Multiplikator kommt dort einer Drehung des Vektors, ein reeller Multiplikator einer Änderung seines Betrages gleich.

Für einen imaginären Multiplikator bleibt also die Schwingung in endlichen Grenzen (stabil). Sie ändert aber ihre Phase und hat — sofern sie überhaupt periodisch bleibt — auch eine andre Frequenz.

Beträgt nämlich nach Ablauf der ersten Periode von  $T$  Sekunden die Phasenverschiebung ( $\chi$ ), so ist sie nach  $2T$  Sekunden ( $2\chi$ ) usw. Wenn die Schwingung nach ( $p$ ) vollen Umläufen, also nach  $pT$  Sekunden wieder zu einem Punkt gleicher Phase zurückkehrt, das ist wenn die Phasenverschiebung ( $p\chi$ ) ein Vielfaches ( $q$ ) eines vollen Umlaufs ( $2\pi$ ) ist,

$$p\chi = 2\pi q,$$

beginnt das Spiel periodisch von neuem, also offenbar mit der Frequenz ( $1/pT$ ). Die Schwingung bleibt also nur dann periodisch, wenn sich ( $\chi$ ) und ( $2\pi$ ) so wie zwei ganze Zahlen ( $p, q$ ) verhalten, die wir gleich als teilerfremd angenommen haben:

$$\chi = \frac{2\pi p}{q}.$$



Ersetzt man in den Gleichungen (6b) die Zeit ( $t$ ) durch den Kurbelwinkel

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} t,$$

so gehen sie wegen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \frac{dx}{d\varphi}$$

über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\varphi^2} + (T\eta)^2 x &= 0, \\ \frac{d^2 y}{d\varphi^2} + (T\xi)^2 y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6c)$$

Ihre Integrale sind von der Form

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos \lambda \varphi + B \sin \lambda \varphi && \text{im Teilstück 1, } \{ \\ y &= C \cos \mu \varphi + D \sin \mu \varphi && \text{„ „ 2, } \} \end{aligned} \right\} \quad (6d)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= T\eta, \\ \mu &= T\xi. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die Integrationskonstanten ( $A, B, C, D$ ) folgen aus der Bedingung, daß an der Grenze zweier Teilstücke die Ordinaten und die Tangenten der dort zusammenstoßenden Teilkurven übereinstimmen müssen. Demnach folgt für ( $\varphi = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} x_{\varphi=0} &= y_{\varphi=0}, \\ \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} &= \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)_{\varphi=0}, \end{aligned} \right\}$$

aus den Gleichungen (6d):

$$\left. \begin{aligned} A &= C, \\ \lambda B &= \mu D, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

und für ( $\varphi = \pi$ ):

$$\left. \begin{aligned} x_{\varphi=\pi} &= y_{\varphi=\pi} = m y_{\varphi=-\pi}, \\ \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)_{\varphi=\pi} &= \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)_{\varphi=\pi} = m \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)_{\varphi=-\pi}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

weil wegen der Periodizitätsbedingung (7):

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = m \Phi(\varphi)$$

und

$$\Phi(\pi) = m \Phi(-\pi)$$

ist, aus den Gleichungen (12) mit Hilfe der Gleichungen (6d):

$$\left. \begin{aligned} A \cos \lambda \pi + B \sin \lambda \pi &= m (C \cos \mu \pi - D \sin \mu \pi), \\ -\lambda A \sin \lambda \pi + \lambda B \cos \lambda \pi &= m (\mu C \sin \mu \pi + \mu D \cos \mu \pi). \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

Durch Elimination ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \mu m C &= A a + B b, \\ \mu m D &= A c + B d, \end{aligned} \right\} \quad (12b)$$

wenn

$$\left. \begin{aligned} a &= \mu \cos \lambda \pi \cos \mu \pi - \lambda \sin \lambda \pi \sin \mu \pi, \\ b &= \mu \sin \lambda \pi \cos \mu \pi + \lambda \cos \lambda \pi \sin \mu \pi, \\ c &= -\mu \cos \lambda \pi \sin \mu \pi - \lambda \sin \lambda \pi \cos \mu \pi, \\ d &= -\mu \sin \lambda \pi \sin \mu \pi + \lambda \cos \lambda \pi \cos \mu \pi \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

bedeuten.

Aus den Gleichungen (12b) und (11) folgt:

$$\left. \begin{aligned} \mu m A &= A a + B b, \\ \lambda m B &= A c + B d, \end{aligned} \right\} \quad (12c)$$

$$\left. \begin{aligned} A \left( \frac{a}{\mu} - m \right) &= -B \frac{b}{\mu}, \\ B \left( \frac{d}{\lambda} - m \right) &= -A \frac{c}{\lambda}, \end{aligned} \right\} \quad (12d)$$

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{a}{\mu} - m \right) \left( \frac{d}{\lambda} - m \right) &= \frac{bc}{\lambda\mu}, \\ m^2 - m \left( \frac{a}{\mu} + \frac{d}{\lambda} \right) &= \frac{bc - ad}{\lambda\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die rechte Seite der Gleichung (14) ist [vgl. Satz (g), S. 14]:

$$\frac{bc - ad}{\lambda\mu} = -1,$$

was unmittelbar aus den Definitionsgleichungen (13) folgt. Deshalb ist

$$m^2 - m \left( \frac{a}{\mu} + \frac{d}{\lambda} \right) + 1 = 0, \quad (14a)$$

wo der Klammerausdruck reell ist, und die Bedingungsgleichung für den gesuchten Grenzfall  $|m| = 1$  lautet:

$$m = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\mu} + \frac{d}{\lambda} \right) = 1^1), \quad (15)$$

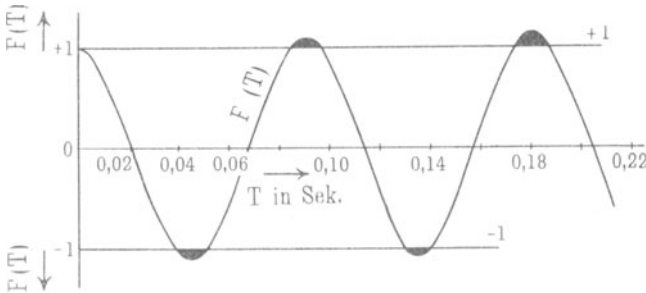


Abb. 7.

oder für  $(a)$  und  $(d)$  die Werte aus den Gleichungen (13) und für  $(\lambda)$  und  $(\mu)$  die Werte aus den Gleichungen (10) gesetzt:

$$\cos \eta T \pi \cdot \cos \zeta T \pi - \frac{1}{2} \left( \frac{\eta}{\zeta} + \frac{\zeta}{\eta} \right) \sin \eta T \pi \cdot \sin \zeta T \pi = 1. \quad (16)$$

Die linke Seite der Bedingungsgleichung (16) enthält außer den konstanten Eigenfrequenzen  $(\eta, \zeta)$  nur die Umlaufzeit  $(T)$ . Wir fassen sie nun

<sup>1)</sup> Die Stabilitätsbedingung (15) ist identisch mit der Bedingung (i), S. 14. Man hätte sie unmittelbar anschreiben und umgekehrt aus ihr und den Anfangsbedingungen die Konstanten rechnen können.





Die Berechnung eines Sonderfalls im Beispiel (3) zeigt, daß es unendlich viele Schüttelgebiete der Umlaufszeit  $T$  gibt. Sie bestehen nicht aus einzelnen Punkten, sondern erfüllen ganze Bereiche und erstrecken sich über alle Drehzahlen, für die die Multiplikatoren einen von 1 verschiedenen Betrag haben. Ihre Randwerte (mit  $m = +1$ ) sind die unendlich vielen kritischen Geschwindigkeiten, die die stabilen von den instabilen Gebieten trennen.

Nur außerhalb dieser Resonanzgebiete sind die Schwingungen stabil. Bei Überschreitung der Randwerte werden die Schwingungen instabil und führen zu Schüttelerscheinungen.

**Beispiel 4.** Die kritischen Geschwindigkeiten der 1-E-1-Lötschberglokomotive (Abb. 2).

Der einseitige Zahnradantrieb dieser Lokomotive macht ihr Triebwerk unsymmetrisch, was zu verschiedener Nachgiebigkeit der beiden Triebwerksseiten führt. Die Nachgiebigkeit der Zahnradseite ist nämlich um die von der Vorgelegewelle herrührende Verdrehung kleiner als die Nachgiebigkeit der andern Triebwerksseite.

Nach den Berechnungen von Couwenhoven (l. c., S. 78) ist der auf 1 mt Drehmoment bezogene mittlere Verdrehungswinkel der Zahnradseite

$$e_1 = 1,742 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \text{ t}^{-1},$$

der andern Triebwerksseite aber

$$e_2 = 5,21 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \text{ t}^{-1}.$$

Wenn Lagerspiel vorhanden ist, dann können die beiden Triebwerksseiten nicht gleichzeitig, sondern nur abwechselnd Arbeit übertragen. Die Nachgiebigkeit des Triebwerks erleidet deshalb im Augenblick des Stangenwechsels einen Sprung.

Die Elastizität ist also stückweise konstant. Ihre kritischen Umlaufzeiten ( $T$ ) sind die Schnittpunkte der im Beispiel (3), Seite 19 ermittelten Funktion

$$F(T) = \cos \eta T \pi \cdot \cos \zeta T \pi - \frac{1}{2} \left( \frac{\eta}{\zeta} + \frac{\zeta}{\eta} \right) \sin \eta T \pi \cdot \sin \zeta T \pi \quad (16a)$$

mit den Geraden

$$F(T) = \pm 1. \quad (16b)$$

Die kritischen Umlaufzeiten des Triebwerks sind dann ( $4T$ ), weil wegen des Stangenwechsels vier volle Perioden der Elastizität auf eine Triebwerksumdrehung kommen.

Die Eigenfrequenzen in den beiden Teilstücken sind

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\Theta e_1}} - \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^4}{5,21 \cdot 0,747}} = 8,1 \text{ Per/sec,} \\ \zeta &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\Theta e_2}} - \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^4}{1,742 \cdot 0,747}} = 14 \text{ Per/sec,} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

weil das Trägheitsmoment der Ankermasse  $\Theta = 0,747 \text{ mtsec}^2$  beträgt.

Mit diesen Werten lautet die Gleichung der Kurve (16a):

$$F(T) = \cos 8,1 T \pi \cdot \cos 14 T \pi - 1,155 \sin 8,1 T \pi \cdot \sin 14 T \pi, \quad (16f)$$

die in Abb. 7 aufgezeichnet ist. Sie schneidet die Geraden  $F(T) = \pm 1$  bei

$$T_1 = 0,039 \quad \text{und} \quad 0,052 \text{ Sek.}$$

und

$$T_2 = 0,085 \quad \text{und} \quad 0,097 \text{ Sek.}$$

Die kritischen Umlaufzeiten des Triebwerks liegen also zwischen

$$4 T_1 = 0,156 \quad \text{und} \quad 0,208 \text{ Sek.}$$

und

$$4 T_2 = 0,34 \quad \text{und} \quad 0,388 \text{ Sek.}$$

Das entspricht folgenden Frequenzen:

$$\frac{1}{4 T_1} = 4,8 \quad \text{bis} \quad 6,4 \text{ Per/sec}$$

und

$$\frac{1}{4 T_2} = 2,57 \quad \text{bis} \quad 2,94 \text{ Per/sec}$$

und kritischen Drehzahlen:

$$\frac{60}{4 T_1} = 288 \quad \text{bis} \quad 384 \text{ U/min}$$

und

$$\frac{60}{4 T_2} = 154 \quad \text{bis} \quad 176 \text{ U/min,}$$

oder (bei 1350 mm Triebbraddurchmesser) folgenden Schüttelgebieten:

$$\text{von } 73 \quad \text{bis} \quad 98 \text{ km/h}$$

und

$$\text{von } 38,3 \quad \text{bis} \quad 44,6 \text{ km/h.}$$

Die Messung auf der fahrenden Lokomotive hat 38 bis 42 km/h ergeben (Couwenhoven, a. a. O., S. 6). Das oberste Schüttelgebiet wird nicht erreicht, weil die Höchstgeschwindigkeit der Lokomotive 70 km/h beträgt.

Neuere Ausführungen sowohl der Schweizerbahnen als auch der deutschen Reichseisenbahnen vermeiden die vom einseitigen Zahnradantrieb herführende Unsymmetrie durch beiderseits angeordnete Zahnräder.

Das Beispiel (3) zeigt die Berechnung der Instabilitätsgebiete für stückweise konstante Elastizität und Beispiel (4) gibt eine praktische Anwendung davon. Um die Instabilitätsgebiete der Eigenschwingung

$$\Theta \frac{d^2 x}{dt^2} + f(t)x = 0 \quad (6a)$$

für kleine Schwankungen des elastischen Feldes allgemein zu berechnen, führt K. E. Müller in die Bewegungsgleichung (6a) die Umlaufzeit ( $T$ ) der Elastizität und den Kurbelwinkel

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} t \quad (\varphi = 2\pi \text{ für } t = T) \quad (17)$$

ein, für die die Gleichung (6a) übergeht in

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} + T^2 \frac{f_1(\varphi)}{4\pi^2 \Theta} x = 0 \quad (6e)$$

[vgl. Gleichung (6c), S. 17] und entwickelt die Elastizität  $f_1(\varphi)$ , die Umlaufszeit ( $T$ ) und den Ausschlag ( $x$ ) in Reihen eines kleinen Parameters ( $\delta$ ):

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_1(\varphi)}{4\pi^2\Theta} &= \eta_0^2 + \delta\eta_1^2 + \delta^2\eta_2^2 + \dots \\ T &= T_0 + \delta T_1 + \delta^2 T_2 + \dots \\ x &= x_0 + \delta x_1 + \delta^2 x_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Diese Entwicklungen in Gleichung (6e) eingesetzt und nach Potenzen von ( $\delta$ ) geordnet, geben nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten eine Reihe von Bedingungsgleichungen, deren erste lautet:

$$\frac{d^2 x_0}{d\varphi^2} + T_0^2 \eta_0^2 x_0 = 0. \quad (6f)$$

Vernachlässigt man den Einfluß der übrigen Bedingungsgleichungen, die von den Gliedern mit dem kleinen Parameter ( $\delta$ ) und seinen höheren Potenzen herrühren, dann folgt die erste Näherungslösung der Gleichung (6a) als Integral der Gleichung (6f):

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A \cos(n\varphi - \chi), \\ n &= T_0 \eta_0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

worin ( $A$ ) und ( $\chi$ ) Integrationskonstanten sind und  $\eta_0$  nach Gleichung (4) und (18) die angenäherte oder mittlere Eigenfrequenz bedeutet.

Nun muß nach früherem die Lösung (19) der Periodizitätsbedingung (9) genügen:

$$\Phi(t + T) = +\Phi(t). \quad (9)$$

Es muß also nach Gleichung (19) unter Berücksichtigung der Gleichung (17) sein:

$$\cos n(\varphi + 2\pi) = \pm \cos n\varphi, \quad (9a)$$

$$n = \frac{1}{2}(1, 2, 3 \dots k).$$

Die kritische Umlaufszeit ( $T^*$ ) der Elastizität ist wegen Gleichung (19) und (9a)

$$T^* = \frac{n}{\eta_0} = \frac{k}{2\eta_0}$$

und die kritische Frequenz der Elastizität

$$e = \frac{1}{T^*} = \frac{2\eta_0}{k}. \quad (20)$$

Die Umlaufszeit ( $T$ ) der Elastizität ist in symmetrischen Getrieben gleich einem Viertel der Umlaufszeit des Antriebs, weil die Stangen (Triebwerksseiten) viermal während einer Umdrehung wechseln und beide Triebwerksseiten elastisch gleich sind. Wenn aber die Elastizität der beiden Triebwerksseiten verschieden ist, so kehren gleiche elastische Verhältnisse nur nach jedem zweiten Stangenwechsel, nämlich nur für die jeweils gleiche Triebwerksseite wieder, und die Umlaufszeit der Elastizität ist gleich der halben Umlaufszeit des Antriebs. Wenn Stichmaßfehler vorhanden sind, kann die Umlaufszeit der Elastizität auch der Umlaufszeit des Antriebs gleich sein (vgl. S. 34).

Die kritische Frequenz der Elastizität ist also in symmetrischen Getrieben gleich der vierfachen Antriebsfrequenz ( $c = 4\gamma$ ) und in unsymmetrischen Getrieben gleich der doppelten oder einfachen Antriebsfrequenz ( $c = 2\gamma, \gamma$ ). Ist allgemein  $c = \kappa\gamma$ , so folgt aus Gleichung (20) die Reihe der kritischen Drehzahlen

$$\gamma^* = \frac{c}{\kappa} = \frac{2\eta_0}{k\kappa} = \frac{2}{\kappa k} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\Theta e_0}} \text{ Per/sec} \quad (21)$$

$k = 1, 2, 3 \dots$ ,

$\kappa = 4$  für symmetrische Getriebe,

$= 2$  für unsymmetrische Getriebe,

$= 1, 2$  für Stichmaßfehler,

$\eta_0 =$  mittlere Eigenfrequenz,

$e_0 =$  mittlere Elastizität,

$\Theta =$  Trägheitsmoment.

Man erhält also alle kritischen Drehzahlen, wenn man ( $k$ ) in der Gleichung (21) die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufen läßt. Statt ganzer Schüttelbereiche ergibt aber die erste Annäherung nur kritische Drehzahlen.

### Beispiel 5.

Eine schöne Bestätigung hat die Theorie K. E. Müllers durch Buchli und Couwenhoven gefunden, die mit dem Torsiographen<sup>1)</sup> gemessene

<sup>1)</sup> Der von Geiger konstruierte Torsiograph besteht aus einer Aluminiumscheibe, die durch ein Band angetrieben wird und die zu untersuchenden Drehschwankungen mitmacht. Im Innern der Bandscheibe ist ein sie möglichst ausfüllendes Schwungrad angeordnet, das durch Spiralfedern mit der Bandscheibe elastisch verbunden ist. Während aber die Bandscheibe die Drehschwankungen der Maschinenwelle fast unverändert wiederholt, ist durch zweckentsprechende Bemessung der Federn, derart, daß die Eigenschwingungszahl des Schwungrades unter die niedrigste Schwingungszahl der zu messenden Drehschwankungen gelegt wird, dafür gesorgt, daß das Schwungrad ohne Rücksicht auf die Ausschläge der Bandscheibe gleichmäßig umläuft.

Zwischen der genau wie die Maschinenwelle ungleichförmig umlaufenden Bandscheibe und dem in ihrem Innern befindlichen Schwungrad entstehen also

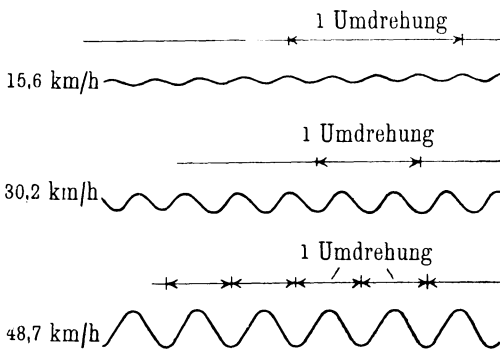
Schütteldiagramme einer 1-E-1-Lötschberglokomotive (Abb. 2) mit Buchli-scher Federung veröffentlichen (BBC-Mitteilungen, Mannheim 1923, Heft 1/2) Wie aus den in Abb. 9 wiedergegebenen Bruchstücken der Torsiogramme zu erkennen ist, treten Schüttelschwingungen

vierfacher Frequenz bei 15,6 km/h,  
 zweifacher „ „ 30,2 km/h,  
 einfacher „ „ 48,7 km/h

auf. Die Reihe der Schüttelfrequenzen und kritischen Geschwindigkeiten ist also

$$k = 1, 2, 4,$$

so wie es die Gleichung (21) für  $\kappa = 2$  für unsymmetrische Getriebe (einseitiger Zahnradantrieb!) vorschreibt. Die dreifache Frequenz ( $k = 3$ ) tritt in der Regel nicht auf. Vgl. Kummers und Müllers Reihe der ausgezeichneten Schüttelfrequenzen Seite 38.



tritt in der Regel nicht auf. Vgl. Kummers und Müllers Reihe der ausgezeichneten Schüttelfrequenzen Seite 38.

Die Reihe (21) für die von der veränderlichen Elastizität herührenden kritischen Drehzahlen

$$\gamma^* = \frac{2 \eta_0}{\alpha k} \quad (21)$$

erinnert an die Reihe (3a, S. 7) der kritischen Geschwindigkeiten

$$\gamma^* = \frac{\eta_0}{\alpha k}, \quad (3a)$$

die von der Resonanz der Eigenschwingung mit der Grundschwingung oder mit der  $k$ ten Oberwelle einer von einer äußeren Störung erregten erzwungenen Schwingung herrührt: Die Reihe (3a) geht für die doppelte Eigenfrequenz ( $2 \eta_0$ ) in die Reihe (21) über.

Drehschwankungen, die, am Umfang der Bandscheibe gemessen, unmittelbar die Winkelabweichung der Maschinenwelle darstellen. Die Drehschwankungen gehen für jeden Punkt der Bandscheibe auf einem Kreisbogen vor sich, also tangential zum Halbmesser. Durch Winkelhebel werden die tangentialen Ausschläge in radiale und schließlich in axiale umgeformt und durch eine nicht mitlaufende Nadel aus dem Drehbereich der umlaufenden Massen herausgeleitet und auf einen Schreibhebel übertragen (Zeitschr. d. Ver. D. Ing. 1916, S. 811).

Die Übereinstimmung ist keine zufällige. L. Dreyfus hat gezeigt, daß die von der veränderlichen Elastizität herrührenden Schüttelbereiche tatsächlich Resonanzfälle der Eigenschwingung mit der Grundwelle oder mit einer Oberwelle des pulsierenden elastischen Feldes sind. Der Resonanzfall tritt ein, wenn die Frequenz der Elastizitätsschwankung gleich der doppelten Eigenfrequenz ist, so wie es der Vergleich der Reihen (3a) und (21) fordert.

Das ist auch leicht verständlich: Der Ausschlag eines Pendels wächst, wenn seine elastische Richtfähigkeit bei der Annäherung an die Ruhelage abnimmt und im Moment des größten Ausschlags am größten ist. Die größere elastische Richtfähigkeit beim größten Ausschlag erhöht ja die Schwingungsenergie des Systems. Die elastische Richtfähigkeit muß freilich sowohl beim positiven, als auch beim negativen Pendelausschlag wachsen, also mit der doppelten Frequenz der Pendelschwingung. So wird dem System vermittelt der Schwankung des elastischen Feldes dauernd Energie von außen zugeführt. Das ist die physikalische Erklärung der Instabilität.

Daß es unendlich viele Instabilitätsbereiche oder Schüttelzonen geben kann, kommt von der Möglichkeit unendlich vieler Oberwellen im Verlauf des elastischen Feldes. Daß es aber Schüttelbereiche sind, die die Resonanzpunkte zu Resonanzzonen verbreitern, das kommt von der Veränderlichkeit der Eigenfrequenz. Sie hängt nicht nur von der Größe der Elastizität, sondern auch von ihrer Frequenz und Phase ab. Ändert man nämlich ihre Frequenz, so ändert sich auch ihre Phase gegen die Eigenschwingung und das im Moment des größten Ausschlags wirksame elastische Feld, das die Eigenfrequenz beeinflusst. Die Eigenfrequenz ändert sich also zugleich mit der Frequenz der Elastizitätsschwankung. Deshalb kann das zwischen beiden Frequenzen für die Resonanz erforderliche Verhältnis (1:2) innerhalb eines größeren (Instabilitäts-)Bereiches erhalten bleiben.

Die vollständige Lösung des Problems, die auch die Ermittlung der „Breite“ des instabilen Gebiets umfaßt, ist Dreyfus durch den Nachweis gelungen, daß ein System periodisch veränderlicher Elastizität identisch ist mit einem System konstanter Elastizität, aber mit pulsierender Dämpfung.

Führt man nämlich in die Schwingungsgleichung (6a, S. 12)

$$\Theta \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{e} x = 0 \quad (6a)$$

mit der periodisch veränderlichen Richtfähigkeit

$$\frac{1}{e} = f(t) = f(t + T)$$

statt der Zeit  $t$  durch

$$d\varphi = \omega dt \quad \text{mit} \quad \omega^2 \Theta e = 1$$

eine neue unabhängige Veränderliche  $\varphi$  ein, wo also  $\omega/2\pi$  die Eigenfrequenz bedeutet, so geht sie wegen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{dx}{d\varphi}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \omega^2 \frac{d^2 x}{d\varphi^2} + \frac{dx}{d\varphi} \frac{d\omega}{dt} = \omega^2 \frac{d^2 x}{d\varphi^2} + \frac{1}{2} \frac{d(\omega^2)}{d\varphi} \frac{dx}{d\varphi} \\ &= \frac{1}{\Theta e} \left( \frac{d^2 x}{d\varphi^2} - \frac{1}{2} \frac{d \log \text{nat } \Theta e}{d\varphi} \frac{dx}{d\varphi} \right) \end{aligned}$$

über in

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} - \frac{1}{2} \frac{d \log \text{nat } e}{d\varphi} \frac{dx}{d\varphi} + x = 0. \quad (22)$$

Das ist die Gleichung eines Systems mit konstanter Elastizität ( $= 1$ ), dessen Dämpfung  $\left(-\frac{1}{2} \frac{d \log \text{nat } e}{d\varphi}\right)$  periodisch schwankt.

Durch die Dämpfung wird dem System Energie entzogen oder zugeführt, die proportional dem Integral

$$E = \int_0^\varphi \frac{d \log \text{nat } e}{d\varphi} \frac{dx}{d\varphi} dx = \int_0^\varphi \frac{d \log \text{nat } e}{d\varphi} \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 d\varphi \quad (23)$$

sein muß.

Ist das Integral über eine volle Periode negativ, so wird dem System Energie entzogen und die Schwingung verklingt. Ist das Integral aber positiv, dann wird dem System Energie zugeführt und die Schwingung wächst über alle Grenzen (instabil). Ist endlich der Integralwert Null, so bleibt die Energie des Systems ungedändert und die Schwingung ist ungedämpft.

Im allgemeinen ist das Energie-Integral (23) von Null verschieden, wenn die Frequenz ( $e, ke$ ) der Elastizitätsschwankung



oder ihrer  $k$ ten Oberwelle gleich der Frequenz der Schwingung  $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2$  ist und wenn die Phasenverschiebung zwischen beiden Schwingungen weder  $0^\circ$  noch  $180^\circ$  ist<sup>1)</sup>.

Da aber die Schwingung  $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2$  die doppelte Grundfrequenz ( $2\eta_0$ ) der Schwingung  $x$  hat, so ist die Resonanz der Elastizitätsschwankung oder ihrer  $k$ ten Oberwelle mit der Eigenschwingung doppelter Frequenz die Bedingung für die Instabilität:

$$ke = 2\eta_0, \quad (20)$$

so wie es die Gleichung (20), S. 22 fordert.

**Beispiel 6.** Ermittlung der Instabilitätsgebiete und ihrer Breite nach Dreyfus für ein elastisches Feld von einfachem Verlauf. (Vgl. Dreyfus, Archiv für Elektrotechnik, 12. Bd. Heft 1, S. 38, 1923.)

Die gesuchten Schüttelgebiete müssen Lösungen der Gleichung

$$\Theta \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{e} x = 0 \quad (6a)$$

<sup>1)</sup> Zum Beweise entwickle man den Logarithmus der Elastizität in eine Fouriersche Reihe

$$\log \text{nat } e = \sum_k \mathfrak{E} \cos(kc\varphi - \chi)$$

und setze die Frequenz der Schwingung  $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2$  gleich der doppelten mittleren Eigenfrequenz ( $2\eta_0$ ) der Schwingung  $x$  des Systems:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = A \cos 2\eta_0 \cdot \varphi.$$

Dann führt das Energie-Integral (23) auf Integrale von der Form

$$\begin{aligned} & \int_0^{\varphi} \sin(kc \cdot \varphi - \chi) \cos 2\eta_0 \varphi d\varphi \\ &= \cos \chi \int_0^{\varphi} \sin kc\varphi \cos 2\eta_0 \varphi d\varphi - \sin \chi \int_0^{\varphi} \cos kc\varphi \cos 2\eta_0 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Erstreckt man die Integrale über eine volle Periode ( $2\pi$ ), so verschwindet das erste Integral der rechten Seite, während das zweite Integral nur dann von Null verschieden ist, wenn die Frequenzen einander gleich sind:

$$kc = 2\eta_0, \quad (20)$$

also wenn die Frequenz ( $c$ ) der Elastizität oder ihrer  $k$ ten Oberwelle gleich der doppelten mittleren Eigenfrequenz ( $\eta_0$ ) des Systems ist. Das Energie-Integral verschwindet aber auch noch in diesem Falle, wenn wegen des Faktors  $\sin \chi$  die Phase der Elastizitätsschwankung gleich ( $\chi = 0$ ) oder entgegengesetzt ( $\chi = 180^\circ$ ) der Phase der  $x$ -Schwingung ist. Diese Bedingung bestimmt die Grenzen der Schüttelgebiete.

und der mit ihr identischen Gleichung

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} - \frac{1}{2} \frac{d \log \text{nat } e}{d\varphi} \frac{dx}{d\varphi} + x = 0 \quad (22)$$

sein. Zwischen der Zeit ( $t$ ) und dem Winkel ( $\varphi$ ) besteht die Beziehung

$$\varphi = \int_0^t \omega dt.$$

Der vollen Umlaufszeit ( $T$ ) der Elastizität entspricht dann der Winkel

$$\Phi = \int_0^T \omega dt = \omega_m T = 2\pi \eta_0 / c \quad (24)$$

( $\omega_m$  = mittlere Winkelgeschwindigkeit oder Kreisfrequenz,  
 $\eta_0$  = mittlere Eigenfrequenz.)

Das elastische Feld habe den besonders einfachen Verlauf

$$\log \text{nat } e = \pm \mathfrak{E} \cos \frac{2\pi}{\Phi} \varphi \quad (25)$$

( $\mathfrak{E}$  = Amplitude des Logarithmus der elastischen Nachgiebigkeit).

Weil wegen der Resonanzbedingung (20) die Frequenz der Elastizität ( $c$ ) gleich der doppelten Eigenfrequenz ( $2\eta_0$ ) sein muß, so kann man für die Lösung der Gleichung (22) den Ansatz versuchen:

$$x = a_1 \sin \frac{\pi}{\Phi} \varphi + a_3 \sin 3 \frac{\pi}{\Phi} \varphi + a_5 \sin 5 \frac{\pi}{\Phi} \varphi + \dots \quad (26)$$

Setzt man die Werte ( $x$ ) und ( $\log \text{nat } e$ ) der Gleichungen (25) und (26) in die Gleichung (22) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \sin \frac{\pi}{\Phi} \varphi \left[ a_1 \left( 1 - \frac{\pi^2}{\Phi^2} \right) \pm \frac{\mathfrak{E}}{2} \frac{\pi^2}{\Phi^2} (a_1 - 3a_2) \right] \\ & + \sin 3 \frac{\pi}{\Phi} \varphi \left[ a_3 \left( 1 - \frac{\pi^2}{9\Phi^2} \right) \pm \frac{\mathfrak{E}}{2} \frac{\pi^2}{\Phi^2} (a_3 - 5a_5) \right] + \dots = 0. \end{aligned}$$

Weil die Glieder einzeln verschwinden müssen, so folgt für kleine Elastizitätsschwankungen ( $\mathfrak{E} \ll 1$ ) mit guter Annäherung

$$\frac{\Phi}{\pi} = 1 \pm \frac{\mathfrak{E}}{4}$$

oder wegen Gleichung (24)

$$c^* = 2\eta_0 \left( 1 \mp \frac{\mathfrak{E}}{4} \right). \quad (27)$$

Die kritische Frequenz der Elastizität ( $c$ ) ist also, übereinstimmend mit Gleichung (20), gleich der doppelten Eigenfrequenz ( $2\eta_0$ ), verbreitert sich aber zur kritischen Zone ( $c^*$ ),

$$\left. \begin{aligned} c^* &= 2(\eta_0 \mp \Delta\eta_0), \\ c^* &= c \mp \Delta c, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

deren Breite

$$2\Delta c = \eta_0 \mathfrak{E} \quad (29)$$

der Schwankung ( $\mathcal{E}$ ) des elastischen Feldes proportional ist. Wenn die Elastizität Oberwellen hat, dann läßt sich leicht auf gleiche Weise zeigen, daß die kritische Zone der Elastizität für die  $k$ te Oberwelle

$$c^* = \frac{2\eta_0}{k} \left( 1 \mp \frac{\mathcal{E}_k}{4} \right), \quad (27a)$$

die kritische Elastizitätsfrequenz in Übereinstimmung mit Gleichung (20)

$$c = \frac{2\eta_0}{k} \quad (20)$$

und die Breite der Zone

$$2\mathcal{A}e = \frac{\eta_0 \mathcal{E}_k}{k} \quad (29a)$$

ist.

Die kritischen Drehzahlen ( $\gamma^*$ ) ergeben sich aus Gleichung (21).

Das Beispiel (6) zeigt die Berechnung der Instabilitätsgebiete für einen einfachen Sonderfall. Für einen beliebigen Verlauf des elastischen Feldes schlägt Dreyfus folgendes Näherungsverfahren vor:

Ist die Elastizitätskurve

$$e = f(t)$$

mit der Abszisse ( $t$ ) und der Ordinate ( $e$ ) gegeben, so zeichne man sie um und wähle als neue Abszisse

$$\varphi = \int_0^t \omega dt \quad \text{mit} \quad \omega^2 \Theta e = 1$$

und als neue Ordinate ( $\log \text{nat } e$ ) und bestimme von der neuen Kurve

$$\log \text{nat } e = f(\varphi)$$

die Grundwelle und ihre Oberschwingungen.

Dann gibt es für jede ( $k$ te) Harmonische mit der Amplitude ( $\mathcal{E}_k$ ) und der Frequenz ( $k\epsilon$ ) ein Instabilitätsbereich, dessen kritische Drehzahl

$$\gamma^* = \frac{e}{x} = \frac{2\mathcal{A}1}{kx} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\Theta e_0}} \text{ Per sec} \quad (21)$$

und dessen Breite

$$2\mathcal{A}\gamma^* = \frac{2\mathcal{A}e}{x} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_k \gamma^* \text{ Per/sec} \quad (29b)$$

ist, wenn ( $x$ ) Perioden der Elastizität auf eine Umdrehung kommen.

#### 4. Mehrere Abweichungen vom idealen Kurbelantrieb.

##### (Der praktische Kurbelantrieb.)

Der praktische Kurbelantrieb unterscheidet sich vom idealen durch die Abweichungen, die vom Spiel, von der Veränderlichkeit der Elastizität und von andern Störungen herrühren. Er ist durch die Winkeländerung des Ankers und durch die Elastizitätsänderung des Triebwerks gekennzeichnet. Beiden liegt eine Änderung der Voreilung zugrunde, die den Übergangswinkel beeinflusst, das ist der Winkel, den das System beim Stangenwechsel während der Übergabe des Drehmoments durchläuft.

Im idealen Kurbelantrieb können beide Stangen dauernd tragen. Sein Übergangswinkel umspannt den vollen Quadranten (90°). Der Voreilwinkel der treibenden Welle ändert sich nur mit der Belastung und bleibt in allen Kurbelstellungen unverändert.

Wenn der Antrieb aber Spiel besitzt, dem gegenüber die elastische Verformung vernachlässigbar ist, dann ändert sich der Voreilwinkel sprunghaft in den Quadrantenhalbierenden, in denen ein plötzlicher Stangenwechsel auftritt. Der Übergangswinkel ist Null geworden.

Die Trägheit der Ankermasse verhindert freilich, daß sich die Winkel tatsächlich sprunghaft ändern. Sie können sich auch deshalb nur allmählich ändern, weil die Stangen wegen der elastischen Verformung des Triebwerks nicht plötzlich wechseln. Die Übergangswinkelgeschwindigkeit wird deshalb praktisch einen endlichen Wert annehmen. Die Größe und die Abweichung des Übergangswinkels vom rechten Winkel ist ein Maß der Abweichung des Antriebs vom idealen Kurbelantrieb und deshalb ein Maß der Neigung des Antriebs zur Schüttelschwingung.

Der Übergangswinkel ( $\Gamma$ ) ist gleich der Differenz der Kurbelwinkel ( $\varphi, \psi$ ), bei denen die Übergabe des Drehmoments beginnt und endet. Die Winkel ( $\varphi, \psi$ ) können aus der Bedingung ermittelt werden, daß wegen des beiderseitigen Stangeneingriffs während der Übergabe die Voreilwinkel ( $\angle\varphi, \angle\psi$ ) beider Triebwerksseiten einander gleich sein müssen. Daraus folgt für den Beginn des

Stangenwechsels, wo die Stange der einen Triebwerksseite noch eben vollbelastet, die der anderen noch eben unbelastet ist (Abb. 5):

$$\Delta\varphi = \frac{(s + \varepsilon_1) \sin \varphi}{r} = \frac{s \cos \varphi}{r} \quad (1c)$$

und für das Ende, wo umgekehrt die arbeitende Stange eben entlastet ist:

$$\Delta\psi = \frac{s \sin \psi}{r} = \frac{(s + \varepsilon_2) \cos \psi}{r}, \quad (1d)$$

wenn ( $s$ ) die vom Spiel und ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ) die von der elastischen Verformung herrührenden Änderungen der Mittenentfernung ( $L$ ) bedeuten. Die Differenz

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

gibt den Elastizitätssprung beim Stangenwechsel an.

Die Beziehungen (1c) und (1d) zeigen deutlich, daß die Elastizität ( $\varepsilon$ ) des Antriebs den Beginn ( $\varphi$ ) des Eingriffs verfrüht:

$$\cot \varphi = 1 + \frac{\varepsilon_1}{s} \quad (30)$$

und sein Ende ( $\psi$ ) verspätet:

$$\operatorname{tg} \psi = 1 + \frac{\varepsilon_2}{s}, \quad (30a)$$

so daß der Übergangswinkel

$$\Gamma = \psi - \varphi \quad (31)$$

(vgl. Abb. 5) mit der Elastizität des Antriebs wächst. Er geht in den rechten Winkel des spielfreien idealen Kurbelantriebs über, bei dem dauernd beide Stangen tragen, wenn die Elastizität so groß ist, daß ihr gegenüber das Spiel vernachlässigt werden kann, was den einen Grenzfall bildet, während umgekehrt der Übergangswinkel Null wird, wenn die Verformung dem Spiel gegenüber vernachlässigbar klein ist und der Stangenwechsel plötzlich eintritt, was den andern Grenzfall bildet (Abb. 12).

Diese Verhältnisse werden noch durchsichtiger, wenn man vom Elastizitätssprung ( $\Delta\varepsilon$ ) beim Stangenwechsel absieht, wodurch die Kurbelwinkel ( $\varphi, \psi$ ) komplementär werden. Aus den Gleichungen (30) und (30a) folgt nämlich für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ :

$$\cot \varphi = 1 + \frac{\varepsilon}{s} = \operatorname{tg} \psi \quad (30b)$$

und  $\Gamma = 90^\circ - 2\varphi, \quad (31a)$

$$\Gamma = 90^\circ - 2 \operatorname{arc} \cot \left( 1 + \frac{\varepsilon}{s} \right), \quad (31b)$$

und wenn insbesondere  $\varepsilon/s$  klein ist<sup>1)</sup>,

$$\frac{\Gamma}{57,3^{\circ}} = \frac{\varepsilon}{s} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^3 - \frac{1}{20} \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^5 + \frac{1}{24} \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^6 - + \dots \quad (31c)$$

Ist dagegen  $1 + \frac{\varepsilon}{s} = \frac{1}{u}$  groß, so ist

$$\Gamma = 90^{\circ} - 114,6^{\circ} \left( u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - + \dots \right). \quad (31d)$$

Also nur vom Verhältnis ( $\varepsilon/s$ ) der elastischen Verformung zum Spiel, nicht von ihren absoluten Werten, hängt der Übergangswinkel ab. Er ist Null, wenn die Verformung verschwindet und ein rechter Winkel, wenn das Spiel verschwindet. Zwischen diesen theoretischen Grenzen liegen die praktischen Werte, in denen das Verhältnis ( $\varepsilon/s$ ) endlich bleibt (Abb. 10).

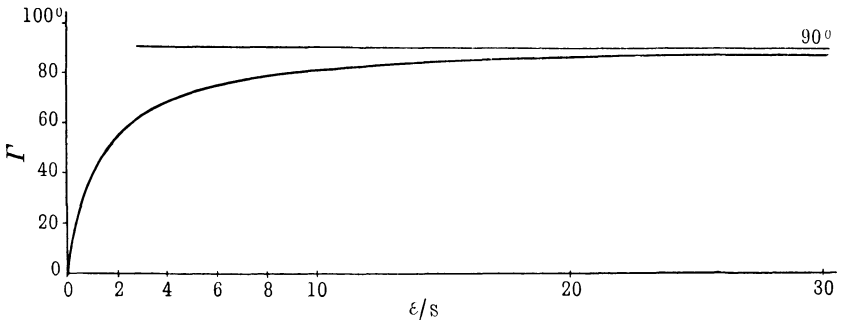


Abb. 10.

Man kann die Größe des Übergangswinkels durch Änderung des Lagerspiels und der Elastizität des Antriebs beeinflussen und seine Neigung zur Schüttelschwingung nicht nur durch genaue Einstellung der Lager und Beseitigung des Spiels, sondern auch durch Erhöhung der Elastizität des Systems verringern.

Der größere Übergangswinkel, gleichgültig ob er erhöhter Elastizität oder verringertem Spiel entspringt, mildert den vom

<sup>1)</sup> Aus  $1 + y = \operatorname{tg}(45^{\circ} + x)$  folgt nämlich

$$x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{2 + y} = \frac{1}{2} \int_0^y \frac{du}{1 + u + \frac{u^2}{2}}$$

Jeden dieser beiden Ausdrücke kann man in eine Reihe entwickeln und erhält dann (31c).

Spiel herrührenden Winkelsprung und die von ihm erregte Ankerschwingung und verflacht beide zur unschädlichen allmählichen Winkeländerung.

Das ist der wahre Grund, warum der Einbau von Federn, den Buchli vorgeschlagen hat, die Schüttelschwingungen beseitigen kann. Das ist aber auch der Grund, warum die Schüttelschwingung im Leerlauf oft stärker empfunden worden ist als bei Belastung, wo die stärkere elastische Verformung einen größeren Übergangswinkel gibt.

**Beispiel 7.** Der Übergangswinkel der schlesischen 1-C-1-Personenzuglokomotive (Abb. 1). (Vgl. Beispiel 1, S. 7.)

Nach Beispiel 1, S. 7, ist der elastische Verdrehungswinkel des Triebwerks den Triebbrädern gegenüber (beim Drehmoment 1 mt):

$$e = 12,45 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \text{ t}^{-1},$$

dem eine Änderung der Mittenentfernung ( $J$ ) beim Drehmoment ( $M$ ) entspricht:

$$\varepsilon = eMr \cos \varphi = 3,735 \cdot 10^{-4} M \cos \varphi \quad (r = 0,3 \text{ m}).$$

Der Übergangswinkel ist also nach Gleichung (31a):

$$T = 90^\circ - 2\varphi, \tag{31 a}$$

wo ( $\varphi$ ) bestimmt ist durch die Gleichung (30b):

$$\cot \varphi = 1 + \frac{\varepsilon}{s} = 1 + \frac{3,735 \cdot 10^{-4} M \cos \varphi}{s}. \tag{30 c}$$

Die Abb. 11 zeigt den Verlauf des Übergangswinkels, abhängig vom Drehmoment für verschiedene Werte des Spiels und der Elastizität. Nur

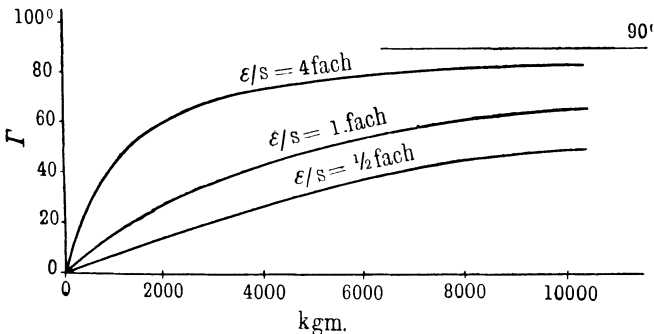


Abb. 11.

vom Verhältnis ( $\varepsilon/s$ ) der Elastizität zum Spiel, nicht von ihren absoluten Werten ( $\varepsilon, s$ ) hängt der Übergangswinkel ab: Die Elastizität ( $e = 12,45 \cdot 10^{-4}$ ) bei  $s = 0,001 \text{ m}$  Spiel gibt den gleichen Übergangswinkel wie die doppelte Elastizität ( $e = 24,9 \cdot 10^{-4}$ ) bei doppeltem Spiel ( $s = 0,002 \text{ m}$ ). Um-

gekehrt erreicht man mit der Verringerung des Spiels auf einen Bruchteil ( $s = 0,00025 \text{ m}$ ) dasselbe wie mit der Erhöhung der Elastizität auf ein Vielfaches ( $e = 49,8 \cdot 10^{-4}$ ).

Die Abbildung zeigt auch, wie rasch der Übergangswinkel mit der Belastung wächst. Der Übergangswinkel der leerfahrenden Lokomotive (rd 400 kgm) bei  $s = 0,001 \text{ m}$  Spiel ist ungefähr nur  $5^\circ$ , was nahezu plötzlichem stoßartigem Stangenwechsel entspricht und die gerade im Leerlauf oft stark auftretende Schüttelerscheinung erklärt. Beim Stundendrehmoment (4000 kgm) ist der Übergangswinkel nahezu  $45^\circ$ .

Während das Lagerspiel die Größe des Übergangswinkels beeinflusst, beeinflussen Stichmaßfehler seine Phase. Das kommt daher, daß das Lagerspiel und die elastische Verformung die Voreilung der treibenden Welle in allen Quadranten vergrößern, daß aber Stichmaßfehler die Voreilung in benachbarten Quadranten in einander entgegengesetzter Weise beeinflussen, weil sich das Spiel der einen Stange um ihren Stichmaßfehler ( $f_1$ ) scheinbar vergrößert, das der andern aber um ihn ( $f_2$ ) verringert und umgekehrt:

$$\left. \begin{aligned} \cot \varphi &= \frac{s + f_1 + \varepsilon_1}{s - f_2}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{s - f_2 + \varepsilon_2}{s + f_1}. \end{aligned} \right\} \quad (30 \text{ d})$$

Einem früheren Beginn ( $\varphi$ ) des Stangenwechsels entspricht darum ein früheres Ende ( $\psi$ ), so daß weniger die Größe des Übergangswinkels ( $\varphi - \psi$ ), als seine an den Eintritt ( $\varphi$ ) des Stangenwechsels gebundene Phase geändert wird und von den Quadrantenhalbierenden nach den Totpunktlagen wandert (Abb. 12).

Weil sich der Einfluß der Stichmaßfehler auf den Stangenwechsel in benachbarten Quadranten verschieden auswirkt, so wiederholen sich die Übergangsverhältnisse nicht mehr periodisch in allen Quadranten, sondern nach einem halben oder vollen Umlauf. Die vom Lagerspiel herrührende Ankerschwingung kann deshalb bei Stichmaßfehlern neben der vierfachen auch die einfache oder zweifache Frequenz des Antriebs haben (vgl. Beispiel 1, S. 9).

Eine eingehende Betrachtung der Störungen durch Stichmaßfehler hat keine praktische Bedeutung. Die genaue Arbeit der Lokomotivfabriken und die verfeinerten Meßmethoden der Eisenbahnwerkstätten werden Stichmaßfehler bei der Herstellung und bei der Nachstellung des Antriebs in der Regel ganz vermeiden können.



## 5. Übersicht.

Kummer und Meissner haben die Schwingungen beschrieben, die vom Lagerspiel und von der veränderlichen Elastizität des Triebwerks herrühren und zu scheinbar verschiedenen Schüttelschwingungsarten führen, zur harmonischen erzwungenen Schwingung, die durch eine äußere Erregung entsteht, und zur instabilen freien Schwingung, die sich selbst erregt. Beiden liegt eine gemeinsame Idee zugrunde. Das ist die Art, wie sich die Voreilung der treibenden Welle ändert.

Im idealen Kurbelantrieb kann sich die Voreilung nur mit der Belastung ändern, weil die Nachgiebigkeit des Triebwerks konstant ist. Eine Änderung der Voreilung ist im idealen Kurbelantrieb bei konstantem Moment gar nicht möglich. Wenn aber Lagerspiel oder Stichmaßfehler da sind, und wenn sich die Elastizität des Triebwerks mit der Kurbelstellung ändert, dann ändert sich die Voreilung mit ihr und mit der Größe der Fehlerglieder.

Die Schüttelschwingung des Kurbelantriebs mit Lagerspiel und Stichmaßfehler und mit veränderlicher Elastizität, die Schüttelschwingung des praktischen Kurbelantriebs kurzweg, dessen Voreilung vom Spiel und von der Verformung herrührt und sich in beliebiger Weise auf beide verteilt, bildet daher den allgemeinen Fall. Die Schüttelschwingung des spielfreien Kurbelantriebs, dessen Voreilung von der Verformung allein herrührt und nur mit ihr sich ändert, und die Schüttelschwingung des Kurbelantriebs konstanter Elastizität mit einer nur mit dem Spiel sich ändernden Voreilung sind Grenzfälle.

Damit verlieren die Unterschiede, die die verschiedenen Schwingungserscheinungen des Kurbelantriebs voneinander trennen, ihre grundsätzliche Bedeutung. Der sie verbindenden Idee der Aufteilung der Voreilung aufs Spiel, auf Stichmaßfehler und auf die Verformung liegt das gemeinsame Prinzip zugrunde, die Schüttelschwingung durch Änderung der Größe und der Phase des Übergangswinkels zu beeinflussen.

Am vollkommensten gelangt dieses Prinzip zur Anwendung, wenn man die Voreilung nicht nur der Größe, sondern auch der Phase nach verteilt. Es ist auf diese Weise nämlich möglich, den Voreilwinkel so einzustellen und den Übergangswinkel so zu beherrschen, daß Schüttelschwingungen vermieden werden.

Die Aufteilung des Voreilwinkels aufs Spiel und auf die Verformung und die Änderung seiner Größe und seiner Phase gibt daher die allgemeine Lösung für die Beherrschung der von der Elastizitätsänderung und vom Lagerspiel und Stichmaßfehlern herrührenden Schüttelschwingung.

Die Aufteilung der Voreilung und ihre absolute Größe kann durch Nachstellung der Lager und Beseitigung des Spiels, durch Anordnung von Triebwerken konstanter Elastizität [Lotter<sup>1)</sup>, Abb. 3] und durch Erhöhung der Elastizität des Triebwerks (Buchlis federnde Zahnräder und Kupplungen), die Phase der Voreilung aber durch Beseitigung der Stichmaßfehler geändert werden.

Das sind zugleich die Mittel zur Milderung und Beseitigung der Schüttelschwingung. Sie zeigen die wahre Rolle, die der Erhöhung der Elastizität des Triebwerks zukommt und von ihrem Einfluß auf den Übergangswinkel herrührt.

Alle Triebwerke sind durch die Änderung ihrer Voreilung während einer Umdrehung und durch die Art ihrer Verteilung aufs Spiel und auf die elastische Verformung gekennzeichnet. Aber nicht von der absoluten Größe des Spiels ( $s$ ) und der Verformung ( $\epsilon$ ), nur von ihrem Verhältnis ( $\epsilon/s$ ) hängt der Übergangswinkel und die Neigung des Antriebs zur Schüttelschwingung ab.

Das Verhältnis ist unendlich im idealen Antrieb, dessen Spiel verschwindet, dessen Stangen im ganzen Quadranten dauernd beiderseits im Eingriff sind, der deshalb den größten Übergangswinkel von  $90^\circ$  hat und ohne Neigung zur Schüttelschwingung den einen Grenzfall bildet.

Das Verhältnis wird Null im Kurbelantrieb, dessen elastische Verformung dem Spiel gegenüber vernachlässigbar ist, der das Moment beim Stangenwechsel plötzlich und stoßartig in verschwindend kleinem Übergangswinkel von der einen Triebwerksseite auf die andere übergibt und der mit starker Neigung zur Schüttelschwingung den anderen Grenzfall bildet.

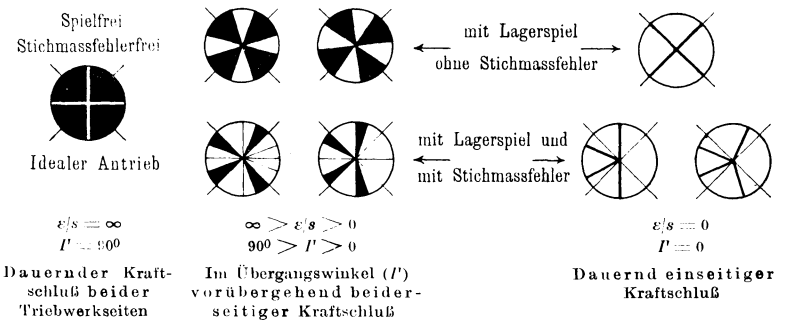
Mittelfälle bilden Triebwerke mit endlichem Verhältnis des Spiels zur Verformung und mit endlichem Übergangswinkel, der kleiner als ein rechter Winkel ist.

---

<sup>1)</sup> Der Lotterantrieb befreit die Elastizität aus ihrer Abhängigkeit von der Kurbelstellung durch die Verwendung eines Doppelparallelantriebs ohne Totpunktlage.

Ein Blick auf den Verlauf des Übergangswinkels und auf die Stangenwechselbilder (Abb. 12) zeigt die Einheit in der Mannigfaltigkeit auch graphisch. Nur durch die Größe und durch die Phase des Übergangswinkels unterscheiden sich die verschiedenen Schwingungseigenschaften der Triebwerke voneinander.

Alle Schüttelerscheinungen sind Resonanzschwingungen so großen Ausschlags und so großen zusätzlichen Drehmoments, daß der Kraftschluß der Arbeitsübertragung aufhört und daß sich der arbeitende Kurbelzapfen bei der Rückwärtsschwingung von seiner Lagerstelle abhebt, so daß der Anker mit beiden Zapfen frei im Spiel schwebt, gleichgültig, ob dieser Schwingungszustand der



Die Übergangswinkel ( $l'$ ) sind schwarz angelegt. Nur innerhalb dieser Winkel tragen beide Triebwerkseiten.

Abb. 12. Stangenwechselbilder.

Resonanzfall der Eigenschwingung mit der vom Spiel erregten erzwungenen Schwingung oder mit der vom veränderlichen elastischen Feld herrührenden Schwankung der Elastizität ist.

Die Schüttelfrequenzen genügen in der Regel der zuerst von Kummer aufgestellten Reihe

$$1 - 2 - 4, \tag{A}$$

in der die Antriebsfrequenz gleich 1 gesetzt ist.

Für die von der veränderlichen Elastizität selbsterregte instabile Schwingung Meissners gilt zwar die vollständige Reihe (21) der Frequenzen:

$$\left. \begin{array}{l} 1 - 2 - 3 - 4 \dots k \\ \text{und der Winkelgeschwindigkeiten:} \\ 1/1 - 1/2 - 1/3 - 1/4 \dots 1/k. \end{array} \right\} \tag{B}$$

Weil aber der praktische Kurbelantrieb Spiel besitzt, so muß die Schüttelschwingung, wenn sie es durchschreitet, auch dem Gesetz der quasiharmonischen Schwingung (5) genügen, mit der Frequenz:

$$4 \cdot \frac{1}{1 + \frac{2s}{\mu \pi Q}} \quad (5a)$$

(weil in der Regel vier volle Schwingungen durch das Spiel auf eine Umdrehung fallen) und mit der Winkelgeschwindigkeit:

$$1 + \frac{1}{\frac{2s}{\mu \pi Q}} \quad (5b)$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Ankers kann aber nur eine sein. Aus der zweiten Gleichung (B) und (5b) folgt deshalb

$$\frac{1}{1 + \frac{2s}{\mu \pi Q}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots \frac{1}{k}. \quad (5c)$$

Die vom Durchgang durch das Spiel herrührende Frequenzreihe ist also nach (5a) und (5c):

$$4 \cdot (\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots \frac{1}{k}), \quad (C)$$

die sich mit der von der Veränderlichkeit der Elastizität herrührenden Frequenzreihe (B)

$$1 - 2 - 3 - 4 \dots k \quad (B)$$

in den Werten (1 - 2 - 4) überdeckt.

K. E. Müller, der beide ins Unendliche weisende Reihen (B) und (C) aufgestellt hat, ist mit ihrer Verschweifung im Überlappungspunkt (1 - 2 - 4) zu Kummers Reihe der „ausgezeichneten Schüttelfrequenzen“

$$1 - 2 - 4 \quad (A)$$

zurückgekehrt.

## Literaturverzeichnis.

- Buchli, J., Studie über Kuppelstangenantrieb bei elektrischen Lokomotiven. Elektrot. Zeitschr. 1914, S. 612.
- Couwenhoven, A., Über die Schüttelerscheinungen elektrischer Lokomotiven mit Kurbelantrieb. Forschungsarbeiten des Ver. D. Ing., Berlin 1919, Heft 218.
- Dreyfus, L., Eigenschwingungen von Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität. Archiv für Elektrotechnik, 12. Bd., Heft 1, S. 38, 1923.
- Kleinow, Das Parallelkurbelgetriebe als Antriebsmittel für elektrische Lokomotiven, elektrische Kraftbetriebe und Bahnen 1910, S. 495.
- Kummer, W., Die Beanspruchung der Lokomotiv-Parallel-Kurbelgetriebe ohne und mit Stichmaßfehler und Lagerspiel. Elektrot. Zeitschr. 1915, S. 311.
- Kummer, W., Die kritischen Drehzahlen der Parallelkurbelgetriebe elektrischer Lokomotiven. Verhandlungen der Schweizer Naturforschenden Gesellschaft, Bern 1922, 2. Teil, S. 324—328.
- Meissner, E., Über Schüttelerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität. Schweizer Bauzeitung **72**, 95, 1918.
- Müller, K. E., Über die Schüttelschwingungen des Kuppelstangenantriebes. Dissertation, Zürich 1919, Schweizer Bauzeitung **74**, 141, 1919.

**Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges.**

..... Braunschweig .....

## **Einphasenbahnmotoren**

Von

**Dr. Iwan Döry**

Mit 75 Abbildungen. IV, 92 Seiten 8°. Mk. 3,—

*(Sammlung Vieweg, Heft 44)*

.....

## **Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung**

Von

**Georg Duffing**

Mit 23 Abbildungen. VI, 134 Seiten 8°. Mk. 4,75

*(Sammlung Vieweg, Heft 41/42)*

.....

## **Die Wahl der Stromart für größere elektrische Bahnen**

Von

**Prof. Dr. W. Kummer**

Mit 7 Abbildungen. VI, 72 Seiten 8°. Mk. 2,50

*(Sammlung Vieweg, Heft 36)*

.....

*In Vorbereitung befindet sich:*

## **Elektrische Vollbahn-Lokomotiven**

Von **Dr. K. Sachs**

.....

*Die angegebenen Preise sind Grundzahlen, die, multipliziert mit der allgemein gültigen Buchhandels-Schlüsselzahl, den jetzigen Verkaufspreis ergeben*

*Bisher erschienene Hefte der „Sammlung Vieweg“*

- Heft 16. Dr. Siegfried Valentiner-Clausthal: *Anwendung der Quantenhypothese in der kinetischen Theorie der festen Körper und der Gase. In elementarer Darstellung. 2. erweiterte Auflage. Mit 5 Abbildungen.* M. 4,50.
- Heft 17. Dr. Hans Witte-Wolfenbüttel: *Raum und Zeit im Lichte der neueren Physik. Eine allgemeinverständliche Entwicklung des raumzeitlichen Relativitätsgedankens bis zum Relativitätsprinzip der Trägheitssysteme. 3. Aufl. Mit 18 Abbildungen.* M. 3,—.
- Heft 18. Dr. Erich Hupka-Tsingtau: *Die Interferenz der Röntgenstrahlen. Mit 33 Abbildungen und 1 Doppeltafel in Lichtdruck.* M. 3,—.
- Heft 19. Prof. Dr. Robert Kremann-Graz: *Die elektrolytische Darstellung von Legierungen aus wässrigen Lösungen. Mit 20 Abbildungen.* M. 2,50.
- Heft 20. Dr. Erik Liebreich-Berlin: *Rost und Rostschutz. Mit 22 Abbild.* M. 3,25.
- Heft 21. Prof. Dr. Bruno Glatzel-Berlin: *Elektrische Methoden der Momentphotographie. Mit dem Bild des Verf. und 51 Abbildungen.* M. 4,—.
- Heft 22. Prof. Dr. med. et phil. Carl Oppenheimer: *Stoffwechselfermente.* M. 2,50.
- Heft 23. Dr. Alfred Wegener-Hamburg: *Die Entstehung der Kontinente und Ozeane. 3. gänzlich umgearbeitete Auflage, erschien als Bd. 66 unserer Sammlung „Die Wissenschaft“.*
- Heft 24. Dr. W. Fahrion-Feuerbach-Stuttgart: *Die Härtung der Fette. 2. vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 5 Abbild.* M. 6,—.
- Heft 25. Prof. Dr. A. Wassmuth-Graz: *Grundlagen und Anwendungen der statistischen Mechanik. 2. Auflage. Mit 4 Abbildungen.* M. 4,—.
- Heft 26. Dr. A. Lipschütz-Bern: *Zur allgemeinen Physiologie des Hungers. Mit 39 Abbildungen.* M. 3,—.
- Heft 27. Prof. Dr. C. Doelter-Wien: *Die Farben der Mineralien, insbesondere der Edelsteine. Mit 2 Abbildungen.* M. 3,—.
- Heft 28. Dr. W. Fahrion-Feuerbach-Stuttgart: *Neuere Gerbemethoden und Gerbetheorien.* M. 4,50.
- Heft 29. Dr. Erik Hägglund-Bergvik (Schweden): *Die Sulfitablauge und ihre Verarbeitung auf Alkohol. 2. Auflage. Mit 6 Abbild. und einer Tafel.* M. 3,50.
- Heft 30. Dr. techn. M. Vidmar-Laibach: *Moderne Transformatorentragen. Mit 10 Abbildungen.* M. 3,—.
- Heft 31. Dr. Heinr. Faßbender-Berlin: *Die technischen Grundlagen der Elektromedizin. Mit 77 Abbildungen.* M. 4,—.
- Heft 32/33. Prof. Rudolf Richter-Karlsruhe: *Elektrische Maschinen mit Wicklungen aus Aluminium, Zink und Eisen. Mit 51 Abbildungen.* M. 6,—.
- Heft 34. Obering. Carl Beckmann-Berlin-Lankwitz: *Haus- und Geschäfts-Telephonanlagen. Mit 78 Abbildungen.* M. 3,—.
- Heft 35. Dr. Aloys Müller-Bonn: *Theorie der Gezeitenkräfte. Mit 17 Abb.* M. 3,—.
- Heft 36. Prof. Dr. W. Kummer-Zürich: *Die Wahl der Stromart für größere elektrische Bahnen. Mit 7 Abbildungen.* M. 2,50.
- Heft 37. Dr. Reinhold Rieke-Charlottenburg: *Die Arbeitsmethoden der Silikatchemie. 2. Auflage. Mit 4 Abbildungen.* M. 3,50.
- Heft 38. Prof. Dr. A. Einstein: *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. (Gemeinverständlich.) 14. Auflage. (61.–65. Tausend.) Mit 4 Fig.* M. 3,—.
- Heft 39/40. Dr. Richard Grammel-Danzig: *Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Mit 83 Abbildungen.* M. 5,—.
- Heft 41/42. Ingenieur Georg Duffing-Berlin: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz u. ihre technische Bedeutung. Mit 23 Abb.* M. 4,75.
- Heft 43. Dr. Robert Schwarz-Freiburg i. Br.: *Feuerfeste und hochfeuerfeste Stoffe. 2. vermehrte Auflage. Mit 10 Abbild.* M. 2,—.
- Heft 44. Dr. Iwan Döry: *Einphasenbahnmotoren. Mit 75 Abbildungen* M. 3,—.
- Heft 45. Pror. Dr. K. Fajans, *Radioaktivität und die neueste Entwicklung der Lehre von den chemischen Elementen. 4. Auflage.* M. 5,—.